# *Note introduttive alla probabilitá e alla statistica*

*1 marzo 2017*

Presentiamo sinteticamente alcuni concetti introduttivi alla probabilitá e statistica

## 1 *Probabilità e statistica*

PROBABILITÀ: Un *modello probabilistico* é una descrizione matematica di una situazione incerta. Nel ragionamento probabilistico, assumiamo un modello probabilistico (e.g., una particolare distribuzione di probabilitá e relativi parametri) ed utilizziamo tecniche matematiche per quantificare le conseguenze del modello.

Come ogni altro modello scientifico puó essere utilizzato per scopi esplicativi o predittivi. Per esempio, se il modello ha una qualche attinenza a un (modello di) fenomeno fisico, biologico, ecc...posso generare dati (simulazione) e confrontarli con i dati reali

STATISTICA: In questo caso, si parte dai dati e si arriva al modello. L'*inferenza statistica* é esattamente il processo che, partendo da dati concreti, estrae informazione relativa a variabili e parametri non noti di un modello probabilistico specificato. Nel caso piú complesso, il modello stesso potrebbe non essere noto e deve essere inferito.

In tal senso, l'inferenza viene anche denotata come un processo di *probabilità inversa*.

Il *machine learning* o apprendimento statistico, oggi via via più importante (si pensi all'analisi o al *mining* di *big data*), puó essere considerato una prosecuzione dell'inferenza statistica

## 2 *Definizioni di probabilità*

- DEFINIZIONE CLASSICA:

$$P = \frac{\text{no. casi favorevoli}}{\text{no. casi possibili}}$$

- DEFINIZIONE FREQUENTISTICA:

$$P \approx f_N(A) = \frac{N(A)}{N}$$

  per $N$ grande ($N \to \infty$) dove $N(A)$ é il numero di volte (frequenza assoluta) in cui si osserva o misura il risultato $A$ in un esperimento ripetuto $N$ volte; $f_N(A)$ é la frequenza relativa.

- DEFINIZIONE BAYESIANA: la probabilitá quantifica un grado di credenza (*degree of belief*), o confidenza, o credibilitá. Per esempio, nell'interpretazione soggettiva di De Finetti, quantifica la (pre)disposizione di un agente (razionale) a scommettere sulla riuscita di un evento (ad esempio, la probabilitá che l'Inter vinca il campionato, un esito chiaramente irripetibile per un numero $N$ grande di volte, quindi intrattabile in termini frequentistici)

- DEFINIZIONE FORMALE: una funzione

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

che soddisfa certi assiomi.

E' opportuno osservare che in Probabilitá, l'approccio formale puó essere utilizzato indifferentemente sia in un quadro frequentistico sia Bayesiano. Una grossa differenza tra questi ultimi due approcci emerge invece quando si scende sul terreno della Statistica

Si noti che nell'ultimo caso a differenza dei primi tre, non si fornisce una definizione "semantica" del concetto di probabilitá, ma meramente formale: $P$ úna funzione che soddisfa un insieme di assiomi (postulati da Kolmogorov), che vedremo prossimamente.

## 3 *Elementi di un modello probabilistico*

Gli elementi costitutivi di un modello di probabilitá sono i seguenti:

1. esperimento
2. esito
3. spazio campionario
4. evento
5. misura di probabilitá

### 3.1 *Esperimento $\mathcal{E}$*

Un esperimento aleatorio può essere l"osservazione di un fenomeno aleatorio o un'azione con un esito non deterministico, per esempio il lancio dei dadi, il lancio della moneta, il conteggio degli studenti che entrano in aula prima delle 14:00. Il tratto comune di tali osservazioni è il contare.

Le caratteristiche principali di un esperimento sono:

1. essere ben definito, nel senso che riusciamo a controllare tutti gli eventi;
2. la possibilitá di contare o enumerare gli esiti dell'esperimento;
3. poterlo ripetere un numero $N$ grande di volte.[1]

[1] L'ultima caratteristica é concettualmente legata alla definizione frequentistica della probabilitá

### 3.2 *Esito*

Ogni esperimento produce un risultato o *esito* (*outcome*); in modo più specifico, un esito elementare.

## 3.3 *Spazio dei campioni S (oppure Ω)*

E' l'insieme di tutti gli esiti possibili di un esperimento $\mathcal{E}$.

Sul concetto di "possibilitá", si assume implicitamente una qualche forma di accordo: per esempio, nel lancio di una moneta, si esclude che la moneta possa rimanere "in piedi"

**Esempio 3.1** *Nel lancio di un dado:*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

**Esempio 3.2** *Nel lancio di una moneta:*

$$S = \{T, C\}$$

**Esempio 3.3** *Nel lancio di due monete:*

$$S = \{TT, CC, TC, CT\}$$

Oltre alla rappresentazione per estensione (notazione insiemistica) posso utilizzare anche una notazione tabellare.

| | |
|---|---|
| TT | TC |
| CT | CC |

Tabella 1: Rappresentazione tabellare dello spazio $S$

**Osservazione 3.4** *Lo spazio dei campioni S é a volte definito* spazio degli stati. *Si pensi, ad esempio al lancio di una moneta. Una sequenza ripetuta di lanci, produce una sequenza di esiti, per esempio*

$$T \to T \to T \to C \to C \to T \to T \cdots$$

*La sequenza rappresenta la successione di esiti reali. La moneta é un sistema che assume due stati; posso immaginarla astrattamente come un automa a stati finiti (due) probabilistico come illustrato in Figura 3.4*

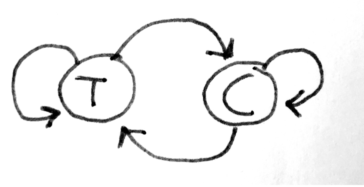


Figura 1: La moneta come automa probabilistico a stati finiti

*In generale, posso concettualizzare il processo come un esempio di* sistema dinamico *(discreto) la cui evoluzione temporale segue la legge*

$$x_t = f(x_{t-1}).$$

*Essa caratterizza la variazione temporale (la dinamica) della variabile di stato $x_t \in S$; in altri termini $x_t$ si "muove" nello spazio degli stati S. Si noti che in questi termini la sequenza generata rappresenta un primo esempio di serie temporale aleatoria (discreta). Se ripeto la generazione di tale serie piu' volte*

$$T \to C \to T \to T \to C \to C \to T \cdots$$

$$C \to T \to C \to C \to C \to T \to C \cdots$$

$$\cdots,$$

*la collezione o* ensemble *di tali serie rappresenta un primo semplice esempio di* processo stocastico.

### 3.4 *Evento*

Consideriamo l' esperimento del lancio di un dado: quello che ottengo da uno spazio campionario può essere un esito elementare (chiamato anche punto campione o sample point) oppure un evento, ovvero un' aggregazione di esiti elementari. Un esempio é fornito in figura 3.4

dove é rappresentato l'evento

$E$ = "uscita di un numero pari".

Pertanto:

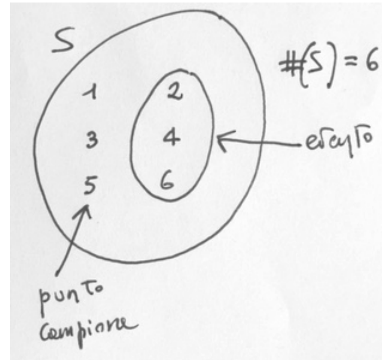


Figura 2: L'evento $E$ = "uscita di un numero pari" come insieme degli esiti elementari $\{2, 4, 6\}$

**Definizione 3.5** *Un evento E é un sottoinsieme dello spazio dei campioni S, $E \subseteq S$.*

### 3.5 *Misura*

La misura di un insieme $A$ é una funzione che associa all'insieme un numero reale positivo o nullo,

$$\sharp : A \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Per un generico insieme discreto $A$ coincide con la cardinalitá di $A$, $card(A)$,

$$\sharp(A) = card(A)$$

- Nel caso $S = \{T, C\}$, la misura dello spazio campionario é $\sharp(S) = 2$
- Nel caso $S = \{TT, TC, CT, CC\}$, $\sharp(S) = 4$
- Nel caso dei due dadi, $\sharp(S) = 6 \times 6 = 36$

## 4 *Misura di probabilità*

Dato un evento $E$ (esito semplice), in prima battuta possiamo definire la misura di probabilitá di $E$, o semplicemente la probabilitá di $E$, come la proporzione[2]

$$P(E) = \frac{\sharp(E}{\sharp(S)} \tag{1}$$

[2] La probabilitá cosí definita viene anche detta *a priori*, perché non ho bisogno, per calcolarla, di effettuare l'esperimento (a differenza della procedura frequentistica), e coincide con la definizione classica di probabilitá (proporzione tra i casi favorevoli e i casi possibili). Vedremo in seguito che é valida sotto l'assunzone di un modello *uniforme* di probabilitá.

**Esempio 4.1** *Nel lancio di un dado, per E = "uscita di un numero pari",*

$$P(E) = \frac{\sharp(E)}{\sharp(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

.

*Si noti che in questo caso (si veda Figura 3.4), é come se ripartizionassi lo spazio degli eventi:*

*$S' = \{pari, dispari\}$ con $\sharp(S') = 2$, $P(E) = \frac{1}{2}$.*

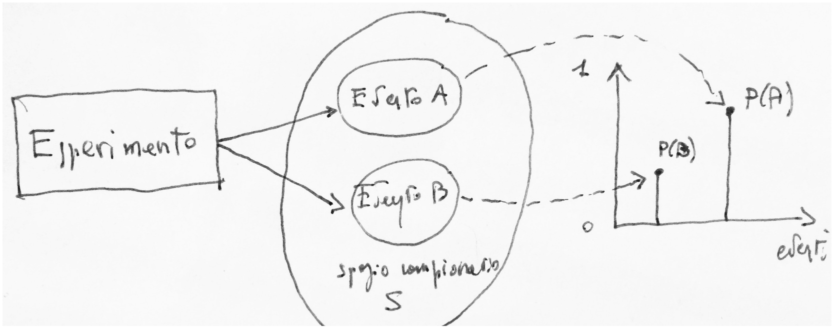


Figura 3: Gli elementi di un modello probabilistico

**Osservazione 4.2** *Dalla definizione (1) ponendo $E = \emptyset = \{\}$ (insieme vuoto):*

$$P(E) = \frac{\sharp(\emptyset}{\sharp(S)} = 0, \tag{2}$$

*ovvero E é l'evento* impossibile.

*Se $E = S$,*

$$P(E) = \frac{\sharp(S}{\sharp(S)} = 1, \tag{3}$$

*ovvero E é l'evento* certo.

In sintesi, possiamo schematizzare gli "ingredienti" di un modello probabilistico come in figura 3

Dalla definizione (1) e dalle proprietá (2) e (3), si nota come la probabilitá di un evento $E$ soddisfi,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$