

# Definizione formale di probabilità

10 marzo 2017

Si introducono la definizione assiomatica di probabilità e alcune proprietà elementari che ne derivano

## 1 Eventi e insiemi

Poiché un evento è definito come un sottoinsieme dello spazio campionario, è possibile definire un'algebra degli eventi utilizzando le classiche operazioni su insiemi:

- unione:  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in A \text{ OR } x \in B\}$
- intersezione:  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} = \{x | x \in A \text{ AND } x \in B\}$
- complemento:  $\sim A = \{x | x \notin A\}$
- differenza:  $A \setminus B = A \cap \sim B$

**Esempio 1.1 (Evento complementare)** Considerando il lancio di un dado, definiamo l'evento

$$E = \text{"numero pari"} = \{2, 4, 6\}$$

Allora,

$$\sim E = \sim \text{"numero pari"} = \text{"numero dispari"} = \{1, 3, 5\}$$

Inoltre

$$P(\sim A) = \frac{\#(\sim A)}{\#(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**Esempio 1.2 (Evento unione)** Sempre, considerando il lancio di un dado, definiamo gli eventi

$$A = \text{"numero pari"} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \text{"numero primo"} = \{2, 3, 5\}$$

Allora,

$$A \cup B = \text{"numero pari oppure primo"} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Inoltre

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#(S)} = \frac{5}{6}$$

**Esempio 1.3 (Evento intersezione)** Definiamo come nell'esempio precedente gli eventi

$$A = \text{"numero pari"} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \text{"numero primo"} = \{2, 3, 5\}$$

Allora, l'intersezione dei due insiemi è un esito elementare:

$$A \cap B = \text{"numero pari e primo"} = \{2\}$$

Inoltre

$$P(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(S)} = \frac{1}{6}$$

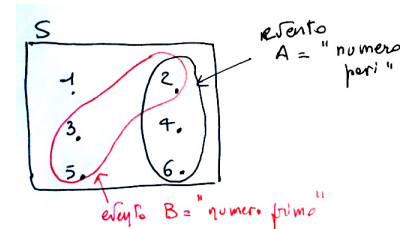


Figura 1: Eventi nello spazio degli stati definito dal lancio di un dado

**Esempio 1.4 (Evento differenza)** Usando ancora

$$A = \text{"numero pari"} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \text{"numero primo"} = \{2, 3, 5\}$$

Allora, la differenza tra A e B (cioè, A ma non B) ci restituisce l'evento:

$$A \setminus B = \text{"numeri pari che non sono primi"} =$$

$$= A \cap \sim B = \{2, 4, 6\} \cap \sim \{2, 3, 5\} = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 4, 6\} = \{4, 6\}$$

Inoltre

$$P(A \setminus B) = \frac{\#(A \setminus B)}{\#(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Il trattare eventi come insiemi può essere applicato anche al caso in cui lo spazio degli stati è continuo, ovvero non numerabile.

Si consideri, ad esempio quello che viene identificato come l'esperimento probabilistico fondamentale:

"Scegliere un numero nell'intervallo  $[0, 1]$  con probabilità uniforme"

Anche qui possiamo definire eventi come intervalli in  $S = \{x : x \in [0, 1]\}$  ed eventi come combinazioni di eventi, come mostrato in Figura 2.

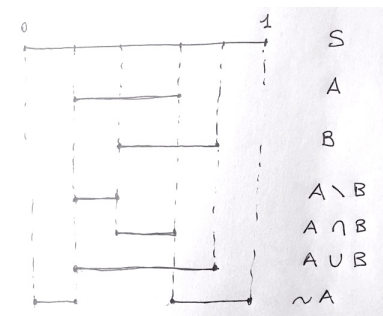


Figura 2: Eventi definiti come intervalli nello spazio degli stati continuo  $S = \{x : x \in [0, 1]\}$

**Osservazione 1.5 (L'insieme delle parti)** Quanti eventi sono possibili in S?

Consideriamo il caso semplice del lancio di moneta, con  $S = \{T, C\}$ , con  $\#(S) = 2$ . Possiamo enumerare i casi possibili come nella Figura 3

Abbiamo che il numero è pari a:

$$4 = 2^2 = 2^{\#(S)} = 2^{\text{card}(S)} = 2^{|S|}$$

dove  $|S|$  è il numero di elementi di S.

Il numero  $2^{|S|}$  è il numero di sottoinsiemi contenuti nell'insieme delle parti, o insieme di potenza (power set) di S solitamente indicato con  $\mathcal{P}(S)$

L'insieme delle parti è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S

In generale non necessariamente tutti i possibili sottoinsiemi appartenenti all'insieme di potenza devono costituire eventi di interesse. Pertanto denoteremo con  $\mathcal{F}$  la famiglia o classe di sottoinsiemi di  $S$  che consideriamo eventi (di interesse)

Possiamo dare la seguente

**Definizione 1.6 ( $\sigma$ -algebra)** Se valgono le seguenti proprietà:

1.  $\sim S \in \mathcal{F}$ ,
2. Se  $F \in \mathcal{F}$ , allora  $\sim F \in \mathcal{F}$ ,
3. Se  $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{F}$ , allora

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F},$$

$\mathcal{F}$  è una  $\sigma$ -algebra

Alcuni esempi di  $\sigma$ -algebre:

- la  $\sigma$ -algebra banale  $\mathcal{F} = \{\emptyset, S\}$ ;
- l'insieme delle parti  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$ ;
- la  $\sigma$ -algebra generata da  $A \subseteq S$ ,  $\mathcal{F}_A = \{\emptyset, A, \sim A, S\}$ ;

Nel caso del continuo la definizione di una  $\sigma$ -algebra richiede maggiore attenzione. Senza entrare nei dettagli (che esulano dagli obiettivi di questo corso), nel caso in cui si assuma uno spazio degli stati continuo  $S = \mathbb{R}$ , è possibile definire famiglia  $\mathcal{I}$  di intervalli (aperti) sui reali  $\mathbb{R}$  per ottenere una  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{I}$  chiamata  $\sigma$ -algebra di Borel:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}).$$

Definita che sia la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$ , diciamo che la coppia  $(S, \mathcal{F})$  rappresenta uno spazio probabilizzabile.

## 2 Gli assiomi di Kolmogorov

Sia dato lo spazio probabilizzabile  $(S, \mathcal{F})$ .

**Definizione 2.1** Una funzione

$$P : F \in \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

è detta misura di probabilità, o semplicemente probabilità, quando soddisfa i seguenti tre assiomi (dovuti a Kolmogorov):

1. **Non negatività**

$$P(F) \geq 0$$

T	C			
0	0	$\emptyset$	$E=T \wedge E=C$	evento impossibile
0	1	$E=C$	$\sim(E=T)$	
1	0	$E=T$	$\sim(E=C)$	
1	1	$E=T \cup E=C$	$= S$	evento certo

Figura 3: Eventi in  $S = \{T, C\}$

Si assume nella definizione la numerabilità finita o infinita dell'insieme di eventi

Le proprietà enunciate vengono dette di chiusura. Poiché  $\bigcap_i F_i = \sim(\bigcup_i \sim F_i)$ , ne segue che una  $\sigma$ -algebra è chiusa anche rispetto a intersezioni numerabili

La definizione assiomatica di probabilità secondo Kolmogorov

2. **Additività:** se prendiamo due eventi la cui intersezione è nulla,

$$A \cup B = \emptyset,$$

la probabilità dell'evento unione è dato dalla somma della probabilità dei singoli eventi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

3. **Normalizzazione:**

$$P(S) = 1.$$

**Definizione 2.2** La terna  $(S, \mathcal{F}, P)$  è detta spazio di probabilità.

### 3 Proprietà derivanti dagli assiomi

**Prop. 3.1**

$$0 \leq P(F) \leq 1. \quad (1)$$

**Dimostrazione** Da assiomi 1 e 3:

$$0 = \frac{\#(0)}{\#(S)} \leq \frac{\#(F)}{\#(S)} \leq \frac{\#(S)}{\#(S)} = 1$$

**Prop. 3.2 (Regola del complemento)**

$$P(\sim A) = 1 - P(A). \quad (2)$$

**Dimostrazione**  $S = A \cup \sim A$

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cup \sim A) \text{ per } A_3 \\ &= P(A) + P(\sim A) \text{ per } A_2 \\ &= P(A) + 1 - P(A) \end{aligned}$$

**Esempio 3.3** Consideriamo lo spazio campionario del lancio di moneta:

$$S = \{T, C\}.$$

$$\text{Se } P(T) = \frac{1}{2} \text{ allora } P(C) = P(\sim T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } P(T) = \frac{3}{4} \text{ allora } P(C) = P(\sim T) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Si consideri ora il caso rappresentato in Figura 3. In questo caso, per il calcolo di  $P(A \cup B)$  non può essere utilizzata direttamente l'additività (Assioma 2): infatti,  $A \cap B \neq \emptyset$ . La non disgiunzione comporterebbe, il doppio conteggio degli esiti contenuti nell'intersezione dei due eventi:

$$\#(A \cup B) = 9$$

$$\#(A) = 5$$

$$\#(B) = 6$$

$$\#(A \cup B) = 9 \neq 11 = 5 + 6 = \#(A) + \#(B)$$

$$\text{E' cioè necessario sottrarre } 2 = \#(A \cap B)$$

L'additività viene generalizzata dalla seguente:

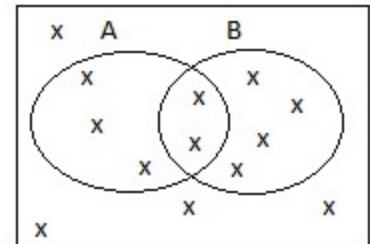


Figura 4: Rappresentazione del problema affrontato dal Principio di Inclusion-eclusione

**Prop. 3.4 (Principio di inclusione-esclusione)** Dati due eventi  $A$  e  $B$  non disgiunti,  $A \cap B \neq \emptyset$ ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (3)$$

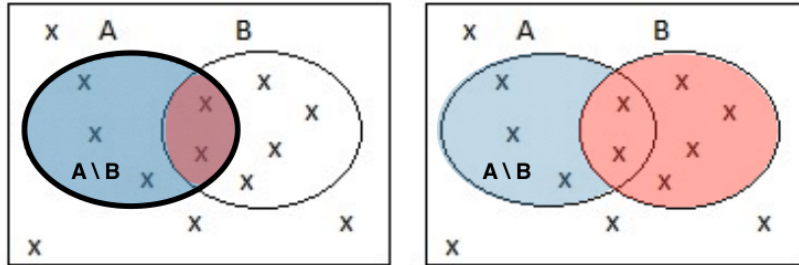


Figura 5: Con riferimento alla Figura 3: decomposizione di  $A$  (sinistra) e  $A \cup B$  (destra) su insiemi disgiunti

**Dimostrazione** Risulta evidente dalla Figura 5 che sono valide le seguenti decomposizioni

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

dove  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$  e  $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ . Applicando a entrambe la misura di probabilità, per additività ( $A_2$ ):

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$

Sostituendo  $P(A \setminus B)$  si ottiene la (3).

E' possibile estendere l'additività come segue

**Prop. 3.5 (Principio di additività generalizzata)** Si considerino una serie di eventi  $F_1, F_2, F_3, \dots \in \mathcal{F}$  tali che  $F_i \cap F_j = \emptyset, i \neq j$ . Allora:

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3 \dots) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) + \dots \quad (4)$$

**Schema della dimostrazione** Si nota che

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = P((F_1 \cup F_2) \cup F_3) = P(F_1 \cup F_2) + P(F_3) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3),$$

e si procede per induzione

### 3.1 Principio di Inclusion–Esclusione generalizzato

E' possibile generalizzare anche il PIU. Per tre insiemi:

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\
 &\quad + P(A \cap B \cap C) \\
 &\quad - P(A \cap B) \\
 &\quad - P(B \cap C)
 \end{aligned}$$

Per più di tre insiemi le cose si complicano e a volte é utile ricorrere a metodi alternativi.

- *Metodo del complemento:* Individuo l'evento complementare all'unione :

$$\sim A \cup \sim B$$

Dunque:

$$A \cup B = S - (\sim A \cap \sim B)$$

da cui  $P(A \cup B) = 1 - P(\sim A \cap \sim B)$

**Esempio 3.6**  $\mathcal{E}$  = lancio di tre monete (o tre ripetizioni del lancio di una moneta)

L'evento di interesse é:

$E$  = **almeno** una volta testa

In questo caso  $\#(S) = 2^3$ , e dovrei calcolare  $P(E)$  misurando l'insieme di tutte le combinazioni con almeno una volta testa,  $\{CCT, CTC, CTT, \dots\}$

La negazione di  $E$  risulta essere l'evento unico

$\sim E$  = "**sempre** croce"

Dunque,

$$P(E) = 1 - \frac{\#(\sim E)}{\#(S)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

- *Metodo della deframmentazione:*

Si decompone lo spazio degli eventi in "frammenti" di eventi disgiunti fra loro (cfr. Figura 3.1)

$$A \cup B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B) \cup (A \cap B)$$

e si applica direttamente l'addittività generalizzata come definita in (4)

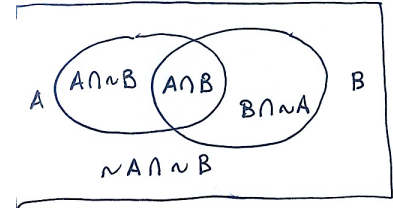


Figura 6: Tecnica di deframmentazione

#### 4 Ulteriori considerazioni sul concetto di probabilità

Abbiamo fatto uso di due definizioni di probabilità

- Definizione “semantica” in termini di misura :

$$P(F) = \frac{\sharp(F)}{\sharp(S)}$$

- Definizione formale, ovvero come la funzione

$$P : F \in \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

che soddisfa gli assiomi di Kolmogorov

Ovviamente, la prima è compatibile con la seconda, per esempio

$$0 \leq P(F) = \frac{\sharp(F)}{\sharp(S)} \leq 1$$

sotto opportune assunzioni. Queste riguardano

- Caratteristiche dello spazio:
  - discreto vs. continuo
  - numerabile vs. non numerabile
  - finito vs. infinito
- Ipotesi a priori sul modello probabilistico

Per esempio, la definizione di misura  $\sharp(F)$  vale sicuramente se lo spazio è numerabile (ogni elemento è in corrispondenza biunivoca con un indice  $k \in \mathbb{N}$ ). Inoltre, per la maggior parte degli esperimenti utilizzati (monete, dadi, ecc.)

$$\sharp(S) = \text{card}(S) < \infty,$$

quindi uno spazio campionario non solo numerabile ma anche finito.

Per questi stessi esperimenti abbiamo però assunto l'ipotesi implicita di un modello probabilistico uniforme: siamo disposti a scommettere la stessa cifra sugli esiti  $T$  o  $C$ , giacché se la moneta non è sbilanciata ripetendo un numero grande di lanci ciascun esito si presenterebbe nel 50% dei casi. Formalmente, l'equivalenza tra le due definizioni di probabilità vale sotto l'assunzione del seguente modello.

**Definizione 4.1 (Modello uniforme finito)** *Lo spazio di probabilità  $(S, \mathcal{F}, P)$  è un modello equiprobabile se*

1.  $\text{card}(S) \in \mathbb{N}$  e  $\text{card}(S) < \infty$ ;

2.  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$ , l'insieme delle parti di  $S$ ;
3.  $\forall \omega \in S, P(\omega) = \text{costante}$

In tal caso si può formalmente dimostrare che

$$\forall \omega \in S, P(\omega) = \frac{1}{\text{card}(S)}$$

$$\forall F \in \mathcal{P}(S), P(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(S)} = \frac{\#(F)}{\#(S)}$$

Nel caso di un  $S$  non numerabile, le cose si complicano.

Si consideri il classico esempio di voler calcolare la probabilità di centrare il bersaglio nel gioco delle freccette (dunque un problema dove lo spazio campionario è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ ). In questo caso (cfr- Figura 4), intuitivamente non ha senso misurare il punto esatto dove si conficca la freccetta; tecnicamente, il punto ha misura nulla. In uno spazio continuo, conviene definire gli eventi come sottoinsiemi aperti di  $S$  - in pratica si suddivide il bersaglio in anelli concentrici fino a definire il centro pieno (bull's eye)- nella fattispecie aree,

$$P(C) = \frac{\text{Area}(C)}{\text{Area}(\text{Board})} = \frac{\pi b^2}{\pi R^2} = \frac{b^2}{R^2}$$

In generale, su  $\mathbb{R}$  (procedura generalizzabile ad  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , ecc.) si definisce un insieme di intervalli (aperti),  $\mathcal{I}$ , ottenendo l'equivalente di una  $\sigma$ -algebra nel continuo, ovvero una  $\sigma$ -algebra di Borel generata da  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I})$ , che viene utilizzata per definire una misura di probabilità nel continuo, e estende a spazi continui la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  finora utilizzata.



Figura 7: Definizione del problema delle freccette