Daniel Vázquez Lago

Geometría Diferencial

Introducción a la Geometría de Riemann

PUBLISHED BY PUBLISHER

TEMPLATE-WEBSITE

First printing, July 2023

Índice

I

Variedades Diferenciales

1. Variedades Diferenciales

1.1 Topología

Conceptos como *continuidad*, *diferenciabilidad*, son parte de una de las ramas más importantes de las matemáticas, el análisis, y sin embargo son esenciamente geometricos, y requieren el uso de **topología** para una *definición rigurosa*. La topología es la estrucutra que se impone en un conjunto de elementos/objetos que nos permiten desarrollar los términos de *convergencia* y *límite*. Un espacio con una topología definida podrá ser llamado **espacio topológico**, y un *mapa continuo* entre esapcios topológicos es aquel que preserva los puntos límites de los subconjuntos. La mejor manera de aproximarse a esta materia es a través de los *conjuntos abiertos*.

Consideremos entonecs un espacio dos dimensional S insertado en un espacio tres dimensional euclídeo $\mathbb{R}^3$. En este caso podemos entender intuitivamente lo que es una «deformación continua», siendo una aplicación de la superficie que no implica ningún desgarro. La topología básicamente maneja estas propiedades que son invariantes bajo *deformaciones continuas*.

1.1.1 Topología Euclideana

Resúmase capítulo 10.1 de (Szekeres, 2004).

1.1.2 Espacios Topológicos Genéricos

Definición 1.1 — Topología. Dado un conjunto X, una *topología en* X consiste en una famlia de subconjuntos $\mathcal{O}$, llamados *conjuntos abiertos* que siguen la siguientes condiciones:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ es abierto y el espacio X es abierto $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{O}$.
2. Si U y V son conjuntos abiertos, entonces su intersección $U \cap V$,
$$U \in \mathcal{O} \;\text{ y }\; V \in \mathcal{O} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{O} \tag{1.1}$$
3. Si $\{V_i \mid i \in I\}$ es una familia de conjuntos abiertos entonces su unión $\bigcup_{i \in I} V_i$ es abierto.

Curiosamente, la definición de «topología» inlcuye la definición de abierto. Un abierto es *cualquier conjunto de conjuntos* que verifique dichas condiciones. Por ejemplo, una **bola abierta** en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ cumple esas condiciones, y por eso se llama abierto. Sin embargo no hace falta definir «distancias» (i.e. tener un espacio métrico) para definir un abierto, por eso decimos que *un espacio métrico es siempre topológico pero un espacio topológico no tiene que ser necesariamente métrico.*

Redactar Ejemplos 10.2 (Szekeres, 2004).

Definición 1.2 — Espacio Topológico. El par $(X, \mathcal{O})$ donde $\mathcal{O}$ es una *topología en* X se llama espacio topológico. Muchas veces se dice que X es el espacio topológico cuando $\mathcal{O}$ está entendido. Los elementos de X se suelen llamar puntos.

Se dice que un conjunto A es **vecindario** de $x \in X$ si existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subset A$. Decimos que un espacio topológico X es **primer contable** para todo punto de $x \in X$ tenemos un una colección de vecestáindarios de x abiertos $U_1(x), U_2(x)$... tal que cada vecindario abierto de x U contenga a esta colección $U_{n(x)} \subset U$.

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicas es **continua** si la imagen inversa $f^{-1}(U)$ de cada abierto U en Y es abierto en X. Si f es 1 a 1 (biyectiva) y $f^{-1} : Y \to X$ es continua, entonces decimos qeu f es un **homeomorfismo** y los espacios X e Y son **homeomórficos** (topológicamente equivalentes) y se denotan como $X \cong Y$.

El punto principal de la topología es encontrar los **invariantes topológicos**, propiedades que se preservan en bajos homeomofismos. El objetivo último de la topología es estudiar los invariantes que caracterizan une esapacio topológico.

1.1.3 Espacio Métrico

La idea de esapcio métrico viene a generalizar la idea de distancia, que está implícita en un epacio euclídeo.

Definición 1.3 — Espacio Métrico. Definimos como espacio métrico a un conjunto de elementos M con una **función distancia** o **métrica** $d : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in M$.
2. $d(x, y) = 0$ sí y solo sí $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Para cada punto x en un espacio métrico (M, d) y un número real $a > 0$, deifnimos una **bola abierta** $B_{a(x)} = \{y | d(x, y) < a\}$.

Acabar de redactar 10.3 (Szekeres, 2004)

1.1.4 Espacio de Hausdorff

En algunas topologías, existen conjuntos abiertos cuyos puntos no pueden ser separados por vecindarios que no intersecan. Para remediar esto, se crean oos llamados axiomas de separación. Uno de los más usados es la **condición de Haussdorff**. Esta nos dice que para cada par de puntos $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos U de x y V de y tales que $U \cap V = \emptyset$. Un espacio topológico que cumpla esta propiedad se llama **espacio de Hausdorff**. Una idea intuitiva de este tipo de espacios es esta: «no todos los pares de puntos de un espacio de Haussdorff están arbitrariamente cerca».

Teorema 1.1 Cada espacio métrico (X, d) es un espacio de Hausdorff.

Redactar 10.5 (Szekeres, 2004)

1.1.5 Espacios Compactos

1.2 Variedades Diferenciables

1.2.1 Introducción

Para muchos físicos y matemáticos el concepto de «mapa» dado por la topología no es suficiente. Y para un español más, ya que, las traducciones, no juegan a nuestro favor. Cuando hablamos de mapa nos referimos a *relaciones entre espacios*, incluso espacios no euclídeos (como por ejemplo la superficie de una esfera). Los conceptos/objetos que nos permiten relacionar espacios no euclídeos con, de hecho, espacios «localmente euclidéanos» son lo que llamamos *variedades diferenciables*. La geometría diferencial es precisamente el área que estudia estas estructuras, y sus aplicaciones son abundantes, siendo la más interesante y bella la Relatividad General.

Un mapa, aunque sea una definición abstracta, en realidad se puede pensar como la definición clásica de mapa. Pensemos en la superficie de la Tierra. Dado que es una esfera, no es ni métricamente ni topológicamente un espacio euclídeo plano $\mathbb{R}^2$. Sin embargo hay formas de representar la tierra en uno o varios planos (mapas). Un atlas consistirá en diferentes planos o *cartas*, cada uno representando diferentes partes de la Tierra. Supongamos por ejemplo que tenemos un mapa de Francia. Es evidente que habrá regiones donde esta carta se concectará con otras cartas, aunque sean en pequeñas regiones (véase el norte de España comprenderá parte del sur de Francia, y la parte sur del mapa de Francia comprenderá una pequeña parte del Norte del España). La correspondencia entre estas regiones de las cartas, esta región superpuesta será continua y suave, y exisitirá una correspondencia 1 a 1. Algunas cartas incluso se podrán encontrar dentro de otras (véase una carta de España y una carta de Europa). E ahí donde podemos ver las relaciones mapa $\leftrightarrow$ carta $\leftrightarrow$ atlas. Estas definiciones que hemos hecho no son precisamente abstractas o rigurosas, sin embargo son fundamentales para hacernos una idea clara de lo que estudia la geometría diferencial.

1.2.2 Variedades Diferenciales

Los puntos de $\mathbb{R}^n$ serán denotados como $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$. Una función $f : \mathbb{R}^n \to R$ será de tipo C^r si todas sus derivadas parciales existen:

$$\frac{\partial^s f(x^1, x^2, ..., x^n)}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} ... \partial x^{i_s}} \tag{1.2}$$

existe y son continuas para $s = 1, 2, ..., r$. Una función C^0 es aquella simplemente continuam nnuebtras que a C^∞ será una **función diferenciable**.

Definición 1.4 — Mapa. Definimos un **mapa** como una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que es un conjunto de funciones $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dirá que es de tipo C^r cuando todas sus φ_i son de tipo C^r.

Definición 1.5 — Variedad topológica. Una variedad topológica es un espacio de Hausdorff M en el que cada punto x tiene un vecindario homeomórfico a un conjunto abierto $\mathbb{R}^n$.

Como sabemos, todo espacio métrico (como $\mathbb{R}^n$) es de Hausdorff, por lo que para que M sea localmente homeomórfico a $\mathbb{R}^n$ debe de ser de Hausdorff.

Definición 1.6 — Carta de Coordenadas. Sea p un punto cualquiera de la variedad topológica M. Entonces la **carta de coordendas** en p es el par (U, φ) donde U es un subconjunto abierto de M llamado *dominio de la carta* y φ una función tal que $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo entre U y su imagen $\varphi(U)$. Por otro lado, $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Llamamos aU el **vecindario** de p y a φ el **mapa de coordenadas**. Las funciones $x^i = \varphi^i : U \to R$ $(i = 1, ..., n)$. En libros como el (Szekeres, 2004) usan lo que llamamos los *mapas de proyección* $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to R$, que se usa como $x^i = \varphi^i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ donde $\circ$ implica composición $\mathrm{pr}_i \circ \varphi = \mathrm{pr}_i(\varphi)$.

Para un par de coordenadas $(U, \varphi'; x^i)$ y (U', φ', x'^j) tal que $U \cap U' \neq \emptyset$, se definen las **funciones de transición**:

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U') \tag{1.3}$$

$$\varphi \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U') \tag{1.4}$$

Las funciones de transición muchas veces se denotan como

$$x'^j = x'^j(\boldsymbol{x}) \qquad x^j = x^j(\boldsymbol{x}') \tag{1.5}$$

que es la manera abreviada de escribirlo con los *mapas de proyección*. Decimos que las dos cartas son C^r-compatibles cuando las Ecuación (1.5) son de tipo C^r (obviamente $r = \{\mathbb{Z}^+, \infty\}$).

Definición 1.7 — Atlas. Un atlas en una variedad M es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ tal que los U_α cubren completamente M, y todos los pares de cartas son C^∞-compatibles. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son dos atlas de M, la unión también es atlas de M.

Definición 1.8 — Variedad Diferenciable. Cualquier atlas $\mathcal{A}$ puede exterderse a un *atlas maximal* añadiendo todas las cartas C^∞-compatibles con $\mathcal{A}$. Un atlas maximal es llamada la *estructura diferenciable* de M. Un par $(M, \mathcal{A})$, donde M es una variedad topológica n-dimensional y A es la estructura diferenciable de M, es llamado **variedad diferenciable**.

Una matriz Jacobiana $J = [\partial x'^k / \partial x^j]$ es no singular dado que su inversa existe tal que $JJ^{-1} = J^{-1}J = 1$. Por definición $\det J \neq 0$.

1.2.3 Ejemplos

Ejemplo 1.1 El espacio euclídeo es una variedad trivialmente, ya que la carta $U = \mathbb{R}^n$, $\varphi =$ id (identidad) cubre y genera un atlas único. El atlas generado es conssite en todas las cartas compatibles con el mismo. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ se puede expresar en coordenadas polares (r, θ) definiendo

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \tag{1.6}$$

que son compatibles con (x, y) en el conjunto abierto $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\}$. La transformada inversa será

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{if } y > 0 \\ \pi & \text{if } y = 0x < 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{if } y < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

El conjunto $\varphi(U)$ en el plano (r, θ) es un conjunto abirto semi-infinito $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$.

Ejemplo 1.2 El círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, definido por la ecuaión $x^2 + y^2 = 1$, es una variedad uno--dimensional. La coordenada x puede ser usada tanto en la región superior o inferior del semicírculo, pero no sobre todo S^1. Alternativamente, igualar $r = 1$ en las coordenadas polares hace que $(U, \varphi; \theta)$ donde $U = S^1 - \{(1, 0)\}$ y $\varphi : U \to \mathbb{R}$ está definido por $\varphi(x, y) = \theta$. La imagen $\varphi(U)$ es el intervalo $(0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$. Estas cartas son claramente compatibles entre sí. S^1 es la única variedad dimensional que no es homeomórfico a la línea real $\mathbb{R}$.

1.3 Mapas y Curvas diferenciables

Sea M una variedad diferencial de dimensión n. Un mapa $f : M \to \mathbb{R}$ se dice ***diferenciable** en el punto* $p \in M$ si para una carta de coordenadas $(U, \varphi; x^i)$ en p la función $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\varphi(p) = \boldsymbol{x}(p) = (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p))$. Esta definición es independiente de la elección de cartas en p.

Dado un conjunto abierto $V \subseteq M$, la función real $f : M \to \mathbb{R}$ es *diferenciable o suave* entre variedades en V si es diferenciable en todo punto $p \in V$. Para esto la función solo necesita ser definida en el subconjunto abierto V. Denotamos como $\mathcal{F}(V)$ a todas las funciones diferenciables en el conjunto abierto V. Dado que la suma $f + g$ y el producto fg son funciones diferenciables para cualquier par de funciones diferenciables f y g, tenemos que $\mathcal{F}(V)$ es un anillo. Además, $\mathcal{F}(V)$ es cerrado respecto las combinaciones lineales $f + ag$ donde $a \in \mathbb{R}$, y es además un espacio vectorial, y un álgebra conmutativa respecto a la multiplicación de funciones fg. Todas las funciones $\mathcal{F}_p(M)$ son diferenciables en un vecindario abierto V del punto $p \in M$.

Definición 1.9 — Difeomorfismo. Definimos como difeomorfismo como un mapa $\alpha : M \to N$ tal que α y α^{-1} son uno-a-uno. Las dos variedades M y N relacionados por un difeomorfismo se dicen *difeomórficas* y se denotan como $M \cong N$. Si

Por definición, para que dos variedades sean difeomórficas deben tener la misma dimensión.

Definición 1.10 — Curva suave. Definimos como curva suave en una variedad M n —dimensiona como u mapa suave $\gamma : (a, b) \to M$ desde un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ de la línea real hacia la variedad M.

Se dice que la curva *atraviesa* el punto p en $t = t_0$ si $\gamma(t_0) = p$, donde $a < t_0 < b$. Nótese que una curva parametrizada es el mapa, no la imagen.

1.4 Espacio tangente, contangente y tensorial

1.4.1 Espacio tangente

Sea $x^i = x^{i(t)}$ una curva en $\mathbb{R}^n$ atravesando el punto $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$. En matemática elemental, es común definir la «tangente» a la curva o «velocidad» como el n-vector $\boldsymbol{v} = (\dot{\boldsymbol{x}}) = (\dot{x}^1, ..., \dot{x}^n)$ donde $\dot{\boldsymbol{x}}^i = (\mathrm{d}x^i / \mathrm{d}t)_{t=t_0}$. Esto funciona efectivamente en un espacio euclídeo, sin embargo en una variedad n-dimensional esto no es suficiente, ya que en una variedad debemos definir los objetos sin coordenadas.

El concepto que nos permite definir una tangente independientemetne de las coordenadas (*invariante*) es la **derivada direccional** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a lo largo de la curva $\boldsymbol{x}_0$:

$$X f = \left.\frac{\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\mathrm{d}x^{i(t)}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right|_{t=t_0} \tag{1.8}$$

donde X es el *operador diferenciable*

$$X = \left.\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \tag{1.9}$$

El valor del operador X cuando lo aplicamos a la función f solo depende de los valores que toma la función en el vecindario de $\boldsymbol{x}_0$ sobre la curva en cuestión, y es independiente de las coordenadas elegidos para el espacio $\mathbb{R}^n$. La expresión de arriba demuestra, sin embargo, que las componentes de un vector tangente en cualqueir sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^n$ puede ser extraído del operador derivada parcial a partir de los coeficienes de expansión en términos de las derivadas parciales.

Así pues, la derivada direccional es un mapa real en el álgebra de funciones diferenciables en $\boldsymbol{x}_0$. Dos propiedades importantes tienen las derivadas direccionales $X : \mathcal{F}_{\boldsymbol{x}_0}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$:

- El espacio vectorial $\mathcal{F}_{\boldsymbol{x}-0}(\mathbb{R}^n)$ es lineal, es decir, para cualqueir par de funciones f, g y números reales a, b tenemos que $X(af + bg) = aXf + bXg$.
- La aplicación de X sobre un producto de funciones fg en el álgebra $\mathcal{F}_{\boldsymbol{x}_0}(\mathbb{R}^n)$ está determinado por la **regla de Leibnitz** $X(fg) = f(\boldsymbol{x}_0)Xg + g(\boldsymbol{x}_0)Xf$.

Estas dos propiedades caracterizan completamente la clase de operadores derivada direccional, y puede ser usados para motivar la definición de *espacio tangente* en un punto de una variedad general.

Definición 1.11 — Vector tangente. El **vector tangete** X_p en el punto p de una variedad diferencial M es el mapa lineal desde el álgebra de funciones diferenciables en p a los números reales $X_p : \mathcal{F}_{p(M)} \to \mathbb{R}$, que satisface las reglas de Leibnitz para los productos:

$$X_p(af + bg) = aX_p f + bX_p g \tag{1.10}$$

$$X_p(fg) = f(\boldsymbol{x}_0)X_p g + g(\boldsymbol{x}_0)X_p f \tag{1.11}$$

son llamadas respectivamente *condición de linealidad* y *condición de Leibnitz.*

Un conjunto de vectores tangentes en p definen el espacio $T_p(M)$, ya que la combinación lineal $aX_p + bY_p$ de vectores tangentes en p definido como

$$\left(aX_p + bY_p\right)f = aX_p f + bY_p f \tag{1.12}$$

también es un espacio tangente de p al satisfacer las condiciones de linealidad Ecuación (1.10) y Leibnitz Ecuación (1.11). Así pues, llamamos a $T_p(M)$ **espacio tangente en** p. Si (U, φ) es una carta en p con funciones de coordenadas x^i, definimos los operadores

$$\partial_{x^i} \equiv \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{F}_p(M) \to \mathbb{R} \tag{1.13}$$

tal que

$$\left(\partial_{x^i}\right)_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left.\frac{\partial \hat{f}(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i}\right|_{\boldsymbol{x}=\varphi(p)} \tag{1.14}$$

donde $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Estos operadores son claramente vectores tangentes dado que satisfacen las condiciones de linealidad Ecuación (1.10) y Leibnitz Ecuación (1.11). Cualquier combinación lineal

$$X_p = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \equiv \sum_{i=1}^{n} X^i \left.\frac{\partial}{\partial x * i}\right|_p \quad \text{donde} \quad X^i \in \mathbb{R} \tag{1.15}$$

es un vector tangente. Estos coeficientes X^j pueden determinarse de la acción de X sobre las funciones de coordenadas x^j:

$$X_p x^j = X^i \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_{\boldsymbol{x}=\varphi(p)} = X^i \delta_i^j = X^j \tag{1.16}$$

Teorema 1.2 Si $(U, \varphi; x^i)$ es una carta en $p \in M$, entonces los operadores $\left(\partial_{x^i}\right)_p$ definidos por Ecuación (1.13) forman una base del espacio tangente $T_p(M)$ y su dimensión es $n = \dim(M)$

La prueba podemos encontrarla en el (Szekeres, 2004) teorema 15.1

Los coeficientes $X^i = X_p x^i$ se denominan las *componentes* del vector tangente X_p en la carta $(U; x^i)$. ¿Cómo esta definición de vector tangente está relacionada con la curva $\mathbb{R}^n$? Sea $\gamma : (a, b) \to$

M la curva suave parametrizada que atraviesa el punto $p \in M$ en $t = t_0$. Definimos el vector tangente a la curva en p como el operador $\dot{\gamma}_p$ definido por la acción de una función arbitraria

$$\dot{\gamma}_p f = (f \circ \gamma(t), t)|_{t=t_0} \tag{1.17}$$

1.4.2 Espacio cotangente y tensorial

El espacio dual $T_p^*(M)$ asociado con el espacio tangente en $p \in M$ es llamado el **espacio cotangente** en p. Este espacio consiste en todas los funcionales lineales en $T_p(M)$, llamados **covectores** o **1-formas** en p. La acción de un covector ω_p en p sobre el vector tagente X_p se puede denotar como $\omega_p(X_p)$, $\langle \omega_p | X_p \rangle$, $\langle X_p | \omega_p \rangle$.

Si f es una función diferenciable en p, entonces definimos como el **diferencial** de p como el covector $(\mathrm{d}f)_p$, cuya acción sobre cualquier vector tangente X_p en p viene dado por:

$$\langle (\mathrm{d}f)_p | X_p \rangle = X_p f \tag{1.18}$$

Este es un funcional lineal, ya que para un par de vectores tangentes X_p, Y_p y escalares $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\langle (\mathrm{d}f)_p | aX_p + bY_p \rangle = a\langle (\mathrm{d}f)_p | X_p \rangle + b\langle (\mathrm{d}f)_p | Y_p \rangle \tag{1.19}$$

Dado una carta $(U, \varphi; x^i)$ en p, los diferenciales de las funciones coordenadas tienen la propiedad:

$$\left\langle \left(\mathrm{d}x^i\right)_p \middle| X_p \right\rangle = X_p x^i = X^i \tag{1.20}$$

donde X^i son las componentes del *vector tangente* $X_p = X^i(\partial_{x^i})_p$. Aplicando $\left(\mathrm{d}x^i\right)_p$ sobre la base de vectores tangentes tenemos:

$$\left\langle \left(\mathrm{d}x^i\right)_p \middle| \left(\partial_{x^j}\right)_p \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(p)} = \delta^i_j \tag{1.21}$$

Por tanto las funciones lineales $\left(\mathrm{d}x^1\right)_p, \left(\mathrm{d}x^2\right)_p, \ldots, \left(\mathrm{d}x^n\right)_p$ que son una *base dual*, abarcando el espacio contangente, y todo covector en p tiene una expansión única

$$\omega_p = w_i \left(\mathrm{d}x^i\right)_p \quad \text{donde} \quad w_i = \left\langle \omega_p \middle| \left(\partial_{x^i}\right)_p \right\rangle \tag{1.22}$$

donde w_i son los llamados **componentes** del funcional lineal ω_p en la carta $(U; x^i)$. El diferencial de cada función en p tiene la expansión de coordenadas:

$$(\mathrm{d}f)_p = f_{i\left(\mathrm{d}x^i\right)_p} \tag{1.23}$$

donde

$$f_i = \left\langle (\mathrm{d}f)_p \middle| \left(\partial_{x^i}\right)_p \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} \tag{1.24}$$

La forma de escribir esto es a través de la *regla de la cadena*:

$$(\mathrm{d}f)_p = f_i(p)(\mathrm{d}x^i)_p \tag{1.25}$$

donde

$$f_i = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i} \circ \varphi \tag{1.26}$$

Estas componentes se llaman el **gradiente** de la función del p. Los diferenciales nunca han encontrado un punto correcto o cómodo en el dado que son «cantidades arbitrariamente pequeñas que no se anulan». El concepto de diferenciales como funciones lineales evitan estors problemas, ya que poseen todas sus características (regla de la cadena, de Leibnitz...).

Un **tensor de tipo** (r, s) en p es un funcional multilineal

$$A_p : \underbrace{T_p^*(M) \times T_p^*(M) \times ... \times T_p^*(M)}_{r} \underbrace{\times\, T_{p(M)} \times ... \times T_{p(M)}}_{s} \to \mathbb{R} \tag{1.27}$$

Denotamos el espacio tensorial de tipo (r, s) en p por $T_p^{(r,s)}(M)$. Es un esacpio vecotrial de dimensión n^{r+s}.

1.4.3 Campos vectoriales y tensoriales

> **Definición 1.12 — Campo Vectorial.** Un **campo vectorial** X es la asignación de un vector tangencial X_p en cada punto $p \in M$. En otras palabras, X es un mapa $X : M \to \cup_{p\in M} T_p(M)$, con la propiedad de que la imagen de cada punto, $X(p)$, pertenece al espacio tangente $T_{p(M)}$ en p.

Podemos escribir X_p en vez de $X(p)$: son intercambiables. Un campo vectorial se dice **diferenciable** o **suave** si para cada función diferenciable $f \in \mathcal{F}(M)$ la función Xf definida por

$$(Xf)(p) = X_p f \tag{1.28}$$

es diferenciable, $Xf \in \mathcal{F}(M)$. El conjunto de campos vectoriales en M se denota por $\mathcal{T}(M)$.

Cada campo vectorial suave define un mapa $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ que es lineal:

$$X(af + bg) = aXf + bXg \quad \text{para todo} \quad f, g \in \mathcal{F}(M) \quad \text{y todo} \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{1.29}$$

y satisface la regla de Leibnitz de los productos:

$$F(fg) = fXg + gXf \tag{1.30}$$

Así pues, cualquier mapa X con estas propiedades definen un campo vectorial suave, dado qeu para cada punto p en el mapa $X_p : \mathcal{F}_p(m) \to \mathcal{F}_p(M)$ definido por $X_p f = (Xf)(p)$ satisface Ecuación (1.10), Ecuación (1.11).

También podemos definir los campos vectoriales en un conjunto abierto U de una manera similar a como se hace con un vector tangente en cada punto U, tal qeu $Xf \in \mathcal{F}(U)$ para todo $f \in \mathcal{F}(U)$. Definimos como **base local de campos vectoriales** en p, siendo U el vecindario de p, como un conjunto de vectores $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ en U tal que los vectores tangentes $(e_i)_q$ abarcan todo el espacio tangente $T_{q(M)}$ en cada punto $q \in U$. Para una carta $(U, \varphi; x^i)$ defininmos los campos vectoriales en el dominio U

$$\partial_{x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U) \tag{1.31}$$

como

$$\partial_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial f \circ \varphi^- 1}{\partial x^i} \tag{1.32}$$

Estos campos vectoriales asignan la base de tangentes vectoriales $(\partial_{x^i})_p$ a cada punto $p \in U$, y forman una base local de campos vectoriales en cada punto de U. Cuando es restringido al dominio U, cada campo vectorial X en M tiene una expansión única en términos de estos campos vectoriales:

$$X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_{x^i} \tag{1.33}$$

donde los componentes $X^i : U \in \mathbb{R}$ son funcioens diferenciables en U. El campo vectorial local ∂_{x^i} forman una base modular en U, pero no son una base vectorial dado un espacio vecotiral $\mathcal{T}(U)$ es la suma de espacios tangentes en todos los puntos $p \in U$, es tiene dimensión infinita.

De una manera similar, podemos definir un **campo convectorial** o una **1-forma diferencial** ω, como la relación de un covector ω_p en cada punto $p \in M$, dado que la función $\langle \omega | X \rangle$ definido por $\langle \omega | X \rangle(p) = \langle \omega_p | X_p \rangle$ es diferenciable para cada campo vectorial suave X. El espacio de 1-forma será denotado como $\mathcal{T}^*(M)$. Dado una función suave f, sea $\mathrm{d}f$ la 1-forma diferenciable definido la asignación de una $\mathrm{d}f_p$ a cada punto p, dado

$$\langle \mathrm{d}f | X \rangle = Xf \quad \text{para todo} \quad X \in \mathcal{T}(M) \tag{1.34}$$

nos referimos a este campo covector como el **diferencial** de f. Una base local en una carta cualquiera $(U, \varphi; x^i)$ consiste en 1-formas $\mathrm{d}x^i$, que tienen la propiedad

$$\langle \mathrm{d}x^i | \partial_{x^j} \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \tag{1.35}$$

Cada diferencial puede ser expandido localmente por la regla de la cadena

$$\mathrm{d}f = f_i \,\mathrm{d}x^i \quad \text{donde} \quad f_i = \frac{\partial}{\partial x^i} f \tag{1.36}$$

1.4.4 Cambios de coordenadas

Sea $(U, \varphi; x^i)$ y $(U', \varphi'; x'^j)$ dos cartas de coordenadas. Por pura regla de la cadena, podemos deducir que

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j} \tag{1.37}$$

Substituyendo esto en la expresión de un vector tangente con respecto a otras baes:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X'^j \frac{\partial}{\partial x'^j} \tag{1.38}$$

La regla de la cadena escrita en coordenadas x'^j y eligiendo $f = x^i$, nos da

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \mathrm{d}x'^j \tag{1.39}$$

Expresando esto en función de la 1-forma ω en ambas bases de coordenadas tenemos

$$\omega = w_i \, \mathrm{d}x^i = w_{j'} \, \mathrm{d}x'^j \tag{1.40}$$

u podemos obtener la *transformación covariante* de compoenntes:

$$w'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} w_i \tag{1.41}$$

Podemos escribir:

$$A^j_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \quad A'^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \tag{1.42}$$

Y la transofmración para tensores:

$$T'^{i'_1 \dots i'_r}{}_{j'_1 \dots j'_s} = T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial x'^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x'^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{j'_s}} \tag{1.43}$$

1.4.5 Fibrados Tensoriales

Definición 1.13 — Fibrado Tangente. El **fibrado tangnte** TM en una variedad M consiste en el conjunto de uniones teóricas de espacios tangentes en todos los puntos:

$$TM = \cup_{p \in M} T_p(M) \tag{1.44}$$

Existe lo que llamamos un **mapa de proyección** $\pi : TM \to M$, definido por $\pi(u) = p$ si $u \in T_p(M)$, y para cada carta $(U, \varphi; x^i)$ en M podemos definir la carta $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ en TM donde el mapa de coordenadas $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ es definido por

$$\tilde{\varphi}(v) = \left(x^1(p), \dots, x^{n(p)}, v^1, \dots, v^n\right) \quad \text{donde} \quad p = \pi(v) \quad \text{y} \quad v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \tag{1.45}$$

La topología en TM es tomado como la topología más tosca dado qeu todos los sets $\tilde{\varphi}^{-1}(A)$ son abiertos cuadno A es un abierto del conjunto $\mathbb{R}^{2n}$.

Dado un conjunto abierto $U \subseteq M$, es un mapa suave $X : U \to TM$ es dicho para un **campo vetorial suave en** U si $\pi \circ X = \mathrm{id}|_U$. Esto está en concordancia con nuetra noción de asingar un vector tangencial en el espacio tangente $T_{p(M)}$ en el punto $p \in U$. Una idea similar peude ser usada para crear un **campo vectorial suave a lo largo de la curva parametrizada** $\gamma : (a, b) \to M$, defninido por la curva suave $X : (a, b) \to TM$ que deja γ al fibrado tensorial $\pi \circ X = \gamma$. Esencialmente, esto define un vector tangente en cada punto de la curva, no necesariamente tagente a la curva, de una manera diferencial.

El **fibrado contagencial** $T^* M$ se define de manera análoga, como la unión de todos los espacios cotangentes $T_p^*(M)$ en todos los puntos $p \in M$. La generació nde cartas tiene la forma $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ en $T^* M$ donde el mapa de coordenadas $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ está definidocomo:

$$\tilde{\varphi}(\omega_p) = \left(x^1(p), ..., x^{n(p)}, w^1, ..., w^n\right) \quad \text{donde} \quad p = \pi(v) \quad \text{y} \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \tag{1.46}$$

tal que $T^* M$ va hacia una variedad 2n dimensional. Este proceso peude extenderse a fibrados tensoriales del tipo $T^{(r,s)} M$, que irían hacia variedades $n + n^{r+s}$ dimensionales.

1.5 Mapa tangente y subvariedades

1.5.1 Mapa tangente y pullback

1.5.2 Subvariedades

1.6 Conmutadores, corrientes y derivadas de Lie

1.6.1 Conmutadores

1.6.2 Derivada de Lie

1.7 Distribución y Teorema de Frobenius

2. Formas Diferenciables

3. Tensores y Formas Exteriores

4. Álgebra Exeterior

5. Integrales en Variedades

6. Derivada de Lie

7. Lema de Poincaré

II Geometría de Riemann

8. Métrica de Riemann

9. Conexiones

10. Conexiones de Levi-Civita

11. Geodésicas y Distancias

12. Curvatura

Bibliografía

Frankel, T. (2011). *The Geometry of Physics: An Introduction* (3.ª ed.). Cambridge University Press.

Gross, G., & Meinrenken, E. (2023). *Manifolds, Vector Fields, and Differential Forms: An Introduction to Differential Geometry*. Springer International Publishing. https://books.google.es/books?id=7yiSzwEACAAJ

Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics* (2.ª ed.). CRC Press.

Szekeres, P. (2004). *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential Geometry*. Cambridge University Press.