

Daniel Vázquez Lago

Geometría Diferencial

Curvatura, Superficies y Riemman



Índice general

Variedades, tensores y formas exteriores

1	Variedades y Campos vectoriales	3
2	Tensores y Formas Exteriores	5
3	Integración sobre formas diferenciales	7
4	La derivada de Lie	9
5	Lema de Poincaré	11

Geometría y Topología

6	\mathbb{R}^3 y Minkowski	13
7	La geometría de superficies en \mathbb{R}^3	15
8	Diferenciales Convariantes y Curvaturas	17
9	Geodésicas	19
10	Relatividad, Tensores y Curvatura	21
	Bibliografía	21

0.14

Capítulo 1

Variedades y Campos vectoriales

La geometría diferencial estudia las propiedades geométricas como $S \in \mathbb{R}^3$, o más general (hiper-superficies). Hay dos tipos de propiedades, las intrínsecas, que son las más importantes, y las que dependen de la propia dimensión. Las propiedades geométricas de un objeto son, por ejemplo, la simetría, distancia, curvatura, pendiente...

Definición 1.1

Una **variedad** es un espacio topológico \mathcal{M} que puede ser cubierto por subconjuntos abiertos \mathcal{U}_a , tal que $\mathcal{M} = \cup_a \mathcal{U}_a$, tal que para cada \mathcal{U}_a existe una aplicación $\phi_{\mathcal{U}_a} : \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ desde \mathcal{U}_a a un subconjunto $\phi_{\mathcal{U}_a}(\mathcal{U}_a) \in \mathbb{R}^m$. De manera naif, podemos decir que una variedad de m dimensión es un espacio topológico que localmente es como \mathbb{R}^m .

Ejemplo 1.1 – Círculo S^1

El círculo S^1 se puede describir con dos cartas. Lo normal sería pensar que se puede describir con una, ya que el espacio $\phi(p \in S^1) \rightarrow \varphi = (0, 2\pi) \in \mathbb{R}^1$. Sin embargo no es posible debido a que $\phi^{-1}(0) = \phi^{-1}(2\pi)$ pero $0 \neq 2\pi$. Las cartas que lo describen serían:

$$\phi_{\mathcal{U}_1} : \varphi \in (-\varepsilon, \pi + \varepsilon) \quad \phi_{\mathcal{U}_2} : \chi \in (-\varepsilon, \pi + \varepsilon) \quad (1.1)$$

Capítulo 2

Tensores y Formas Exteriores

Capítulo 3

Integración sobre formas diferenciales

Capítulo 4

La derivada de Lie

Capítulo 5

Lema de Poincaré

0.27

Capítulo 6

\mathbb{R}^3 y Minkowski

Capítulo 7

La geometría de superficies en \mathbb{R}^3

Capítulo 8

Diferenciales Convariantes y Curvaturas

Capítulo 9

Geodésicas

Capítulo 10

Relatividad, Tensores y Curvatura

Bibliografía

- [1] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. 3.^a ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011, pág. 748. ISBN: 978-1-107-60260-1.