Daniel Vázquez Lago

Interacción Radiación-Materia

Partículas Cargadas y No Cargadas

Índice general

Capítulo 1

Dispersiones

1.1. Teoría de dispersiónes: mecánica clásica y mecánica cuántica

Para describir la dispersión de una partícula por un potencial (Coulomb) en la mecánica cuántica en principio deberíamos estudiar la evolución temporal de un paquete de ondas, que representará la partícula incidente con una energía (y anchura) y una localización espacial (y anchura). Sin embargo, se suelen usar ondas planas, ya que en general las dimensiones del paquete de ondas suele ser mucho más grande que el tamaño del rango efectivo del potencial. La expresión de Rutherford no es una excepción.

Para poder entender como se obtiene en la mecánica cuántica la expresión de la sección eficaz lo primero que debemos hacer es entender que la sección eficaz está realcionada directamente con el cuadrado de la amplitud de probabilidad:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 \tag{1.1}$$

Uno podría plantearse ¿por qué es así? En la mecánica cuántica la sección eficaz diferencial representa la probabilidad de que una partícula salga dispersada en un ángulo sólido diferencial $\mathrm{d}\Omega$, aunque también nos habla de la tasa de partículas que atarviesan una superficie diferencial perpendicular $\mathrm{d}\Omega$. En la mecánica cuántica toda probabilidad es representada por una amplitud de probaiblidad por su complejo, por lo que la relación es directa.

1.2. Análisis en ondas parciales

1.2.1. Introducción

1.2.2. Fases

1.2.3. Teorema óptico

1.3. Aproximación de Born

1.3.1. Primera aproximación de Born

1.3.2. Teoría de Born

Ejercicios

Ejercicio 1.1 – Sección eficaz de Rutherford con modelo atómico de Fermi

Obten la expresión de la sección de eficaz de Rutherford, usando la aproximación de Born con ondas planas incidentes y salientes con el potencial de Coulomb:

$$V(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} \tag{1.2}$$

Capítulo 2

Partículas Cargadas

2.1. Dispersión de Rutherford

2.1.1. Introducción

Rutherford describió la dispersión de una partícula α por núcleos atómicos (con $m_\alpha \ll M, z = 2$) sobre una trayectoria hiperbólica a través del potencial de Coulomb. La energía total viene dada como la suma de la energía cinética y potencial, y permanece *constante* sobre toda la trayectoria:

$$E(r) = E_K(r) + E_p(r) \qquad E_p(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \tag{2.1}$$

La distancia de máxima aproximación se define como la distancia a la cual se para una partícula con parámetro de impacto $b = 0$, i.e. colisión frontal. Así, denotando E_K como la *energía cinética inicial*, tenemos que

$$E_K = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{D_{\alpha-N}} \tag{2.2}$$

aunque lógicamente esta expresión no será del todo cierta, ya que el potencial no es infinito en $r = 0$, debido a que el núcleo es finito. Aún así es una buena aproximación.

2.1.2. Relación entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión

El momento transferido en la interacción, siempre y cuando $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = p$ vale

$$\Delta p = 2p\sin(\theta/2) \tag{2.3}$$

siendo θ el **ángulo de dispersión**. Es fácil de deducir matemáticamente, pero incluso físicamente tiene sentido: cuando $\theta = \pi$ la trasferencia de momento es máxima (la partícula se da la vuelta completamente) lo que implicla un intercambio de 2 veces el momento inicial. Definimos como **parámetro de impacto**

$$b = r\sin\theta \tag{2.4}$$

cuando la partícula está en el infinito. Además, también se conserva el momento angular $L = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = Lp\sin\theta$, lo que lleva a la relación

$$v_i b = \omega r^2 \tag{2.5}$$

siendo $\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ en el vértice, definiendo ϕ como el ángulo entre el vértice y la partícula desde el núcleo. En el vértice, que es el punto en el cual la posición respecto el átomo y el momento lineal de la partícula son perpendiculares. Por definición $L = m_\alpha r^2\omega$, y en el infinito se cumple que

$$L_\infty = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = m_\alpha b v_i \tag{2.6}$$

El momento transferido Δp se calcula como la acción total en el tiempo de la fuerza de Coulomb proyectada sobre el eje de la hipérbola, tal que

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\Delta p} = (\ldots) = \tag{2.7}$$

de lo que se puede deducir que el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión se relacionan tal que:

$$b = \frac{1}{2}D_{\alpha-N}\cot(\theta/2) = \frac{1}{2}D_{\alpha-N}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{E_K} \tag{2.8}$$

siendo $\mathrm{d}_{\alpha-N}$ la distancia de máxima aproximación y E_K la energía cinética.

2.1.3. La sección eficaz diferencial de Rutherford

La dispersión de las partículas alfa que halló Rutherford la describió en función de su sección diferencial, tal que:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{Ruth}}}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{E_K} \tag{2.9}$$

Esta ecuación, aunque fue calculado con la mecánica clásica, también puede ser hallada en la mecánica cuántica, usando las aproximaciones de Born a primer orden ya vistas. Se propone el ejercicio

Como podemos comprobar, *diverge* para $\theta = 0$, lo cual es debido al carácter ideal del núcleo puntual. La razón por la que en realidad no diverge, o la solución a esta divergencia, es que la carga nuclear está apantallada por los *electrones orbitales atómicos*, lo que conduce a un ángulo mínimo $\theta_{\mathrm{mín}}$. La dispersión hacia atrás ($\theta \to \pi, b \to 0$) tampoco se logra nunca, debido al radio finito del núcleo.

2.1.4. Ángulo mínimo: corrección por apantallamiento

Un modelo que tiene en cuenta el apantallamiento es el *modelo atómico estadístico de Fermi*, el cual introduce una exponencial tabulada por un *radio efectivo* α_{TF} de tal modo que el potencial de Coulomb no caiga "lentamente". Así pues:

$$V_{TF}(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{a_{TF}}} \tag{2.10}$$

el *radio efectivo* a_{TF} de la nube electrónica (de Thomas-Fermi) decrece por debajo del radio de Bohr α_0 al aumentar Z, como $a_{TF} = \frac{\zeta a_0}{\sqrt[3]{Z}}$, debido a la disminución del tamaño de los orbitales más internos, por el teorema de Gauss.

La aproximación de Born requiere ahora, con $\Delta k = K = (2p/h)\sin(\theta/2)(p = p_i)$ el momento de onda transferido ($p = hk$), el cálculo de la transformada seno de $V_{TF}(r)$, que es finita. Rutherford reciba entonces un *factor corrector* tal que:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{Ruth}}}{\mathrm{d}\Omega} = \left|\frac{2m_\alpha}{h^2}\int_0^\infty r^2 V_{TF}(r)\frac{\sin Kr}{Kr}\mathrm{d}r\right|^2 = (\dots) = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\theta/2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{K^2a_{TF}^2}}\right) \tag{2.11}$$

Cuando θ«1, tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{Ruth}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{D^2_{\alpha-N}}{\theta^4}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\theta^2_{\text{mín}}}{\theta^2}\right)^2\right]} = \frac{D^2_{\alpha-N}}{\theta^2+\theta^2_{\text{mín}}} \tag{2.12}$$

donde se introduce el concepto el concepto de ángulo mínimo, que como podemos ver viene expresado:

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{h}{pa_{TF}} = \frac{h\sqrt[3]{Z}}{pa_{TF}} = \frac{hc\sqrt[3]{Z}}{a_0\sqrt[root]{E_K(E_K+2Mc^2)}} \tag{2.13}$$

La mejora de la aparición de este ángulo mńimo es que ahora *la sección eficaz total es finita*, lo cual se corresponde a un resultado mucho más físico. Este ángulo mínimo tiene un *origen cuántico* debido al *principio de incertidumbre*. Se produce por la localización de la partícula sobre el radio a_{TF}, que le imprime un momento *transversal* inevitable Δp, relacionado con la longitud de onda:

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{h}{pa_{TF}} = \frac{\lambda}{a_{TF}} \tag{2.14}$$

2.1.5. Ángulo máximo: corrección por radio finito del núcleo

El potencial que ve una carga elemental z cerca del núcleo $V(r)$ tiene un plateu en su interior hasta $r = R$ y para $r > R$ adopta la forma de Coulomb $E_p(r)$.

2.2. Dispersión de Mott

2.2.1. Correcciones relativistas

2.2.2. Correcciones por espín del electrón

2.2.3. Correcciones por retroceso del núcleo

2.2.4. Correcciones por factor de forma nuclear

2.3. Poder de frenado másico de partículas cargadas en la materia

2.4. El rango másico R_{CSDA}

Ejemplo 2.1 – mi padre quiere un ejemplo

Aqui se pone lo de abajo

Ejercicios

Ejercicio 2.1 – Sección eficaz de Rutherford con modelo atómico de Fermi

Obten la expresión de la sección de eficaz de Rutherford, ahora con el potencial del modelo atómico estadístico de Fermi, usando la aproximación de Born con ondas planas incidentes y salientes

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{Ruth}}}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{K^2 a_{TF}^2}}\right)$$

y luego llegar a la expresión final cuando $\theta \ll 1$:

Ejercicio 2.2 – Dependencias genéricas de la fórmula de Bethe con Z, M, β y z

Se ha visto que el poder de frenado másico S_{col} de un medio absorbente (Z, A) para una partícula cargada (z, M, β) viene dado por la fórmula cuántica y relativista de Bethe–Bloch, reforzada con los factores de Fano (C, δ):

$$S_{\text{col}} = 4\pi N_e \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{z^2}{m_e c^2 \beta^2}\left[\ln\frac{2m_e c^2}{I} + \ln\frac{\beta^2}{1-\beta^2} - \beta^2 - \frac{C}{Z} - \delta\right] \equiv C_1 \frac{N_e z^2}{\beta^2}\bar{B}_{\text{col}}$$

donde $N_e \equiv ZN_A/A$ es el número de *electrones por gramo* del medio absorbente.
Para focalizar y separar adecuadamente las dependencias características de S_{col} con los parámetros de la partícula y del medio, responde razonadamente a las preguntas siguientes:

a) ¿Hizo Bethe la hipótesis original de que la velocidad de la partícula era muy superior a la velocidad de los electrones atómicos $v \gg v_{\text{orb}}$? ¿Sobreestima esto el potencial de ionización I cuando no lo es? Explica por qué son los electrones de la capa K los más afectados en el término C/Z, y por qué la corrección es negativa.

b) ¿Por qué la corrección por densidad δ es más importante para las colisiones *distantes* (suaves) y por qué es negativa? ¿Sabes, sin embargo, si dicha corrección es también importante en el límite ultrarrelativista para electrones y positrones?

c) Observa que la dependencia en Z de S_{col} ocurre a través de dos vías distintas: una *directa* en N_e, y otra *indirecta* a través de $I(Z)$. Comenta separadamente sobre ellas. ¿Empujan ambas en la misma dirección de subir o bajar S_{col}? ¿Por qué, pese a la gran diferencia de los potenciales de ionización (entre $I = 19$ eV para H y $I \sim 900$ eV para el Uranio), la dependencia con $I(Z)$ es suave?

d) ¿Puede decirse que, para una velocidad fija $\beta = v/c$ (o energía cinética fija E_K), S_{col} es *independiente* de la masa del proyectil M? Comenta sobre esto.

e) Analiza la dependencia de S_{col} con β, señalando los términos específicos que son decisivos en cada una de las **tres regiones**: baja velocidad (con Fano), velocidad relativista intermedia, y velocidad ultrarrelativista. Comenta sobre el aumento o disminución de S_{col} con E_K en cada caso.

f) ¿Cómo depende S_{col} de la carga z de la partícula incidente? ¿Existen también aquí dependencias indirectas?

Capítulo 3

Partículas no cargadas

Bibliografía

[1] Marcos Sánchez-Élez. *Introducción a la programación en VHDL*.

[2] Wayne Wolf. *FPGA-Based System Design*. USA: Prentice Hall PTR, 2004. ISBN: 0131424610.