

Daniel Vázquez Lago

# Geometría Diferencial

*Curvatura, Superficies y Riemman*



# Índice general

---

## Variedades, tensores y formas exteriores

---

1	Variedades y Campos vectoriales	3
2	Tensores y Formas Exteriores	5
3	Integración sobre formas diferenciales	7
4	La derivada de Lie	9
5	Lema de Poincaré	11

---

## Geometría y Topología

---

6	$\mathbb{R}^3$ y Minkowski	13
7	La geometría de superficies en $\mathbb{R}^3$	15
8	Diferenciales Convariantes y Curvaturas	17
9	Geodésicas	19
10	Relatividad, Tensores y Curvatura	21
	Bibliografía	21

0.14

# Capítulo 1

## Variedades y Campos vectoriales

La geometría diferencial estudia las propiedades geométricas como  $S \in \mathbb{R}^3$ , o más general (hiper-superficies). Hay dos tipos de propiedades, las intrínsecas, que son las más importantes, y las que dependen de la propia dimensión. Las propiedades geométricas de un objeto son, por ejemplo, la simetría, distancia, curvatura, pendiente...

### Definición 1.1

Una **variedad** es un espacio topológico  $\mathcal{M}$  que puede ser cubierto por subconjuntos abiertos  $\mathcal{U}_a$ , tal que  $\mathcal{M} = \cup_a \mathcal{U}_a$ , tal que para cada  $\mathcal{U}_a$  existe una aplicación  $\phi_{\mathcal{U}_a} : \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  desde  $\mathcal{U}_a$  a un subconjunto  $\phi_{\mathcal{U}_a}(\mathcal{U}_a) \in \mathbb{R}^m$ . De manera naif, podemos decir que una variedad de  $m$  dimensión es un espacio topológico que localmente es como  $\mathbb{R}^m$ .

### Ejemplo 1.1 – Círculo $S^1$

El círculo  $S^1$  se puede describir con dos cartas. Lo normal sería pensar que se puede describir con una, ya que el espacio  $\phi(p \in S^1) \rightarrow \varphi = (0, 2\pi) \in \mathbb{R}^1$ . Sin embargo no es posible debido a que  $\phi^{-1}(0) = \phi^{-1}(2\pi)$  pero  $0 \neq 2\pi$ . Las cartas que lo describen serían:

$$\phi_{\mathcal{U}_1} : \varphi \in (-\varepsilon, \pi + \varepsilon) \quad \phi_{\mathcal{U}_2} : \chi \in (-\varepsilon, \pi + \varepsilon) \quad (1.1)$$



## **Capítulo 2**

# **Tensores y Formas Exteriores**



## **Capítulo 3**

# **Integración sobre formas diferenciales**





## **Capítulo 4**

### **La derivada de Lie**



# Capítulo 5

## Lema de Poincaré

0.27



## Capítulo 6

### $\mathbb{R}^3$ y Minkowski



## Capítulo 7

### La geometría de superficies en $\mathbb{R}^3$





## **Capítulo 8**

# **Diferenciales Convariantes y Curvaturas**



## **Capítulo 9**

### **Geodésicas**



## **Capítulo 10**

# **Relatividad, Tensores y Curvatura**



# Bibliografía

- [1] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. 3.<sup>a</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011, pág. 748. ISBN: 978-1-107-60260-1.