Daniel Vázquez Lago

# Algebra

*Grupos*

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Definición de Grupo

**Definición 1.1**

Un **grupo** es un conjunto de elementos $G = \{g_1, g_2 ...\}$ que dotados de una ley de composición $*$, tal que a cada par ordenado $g_i, g_j \in G$ se le asigna otro elemento que satisface las siguientes propiedades:

- **Cierre:** la ley de composición $*$ es interna, es decir, si $g_i, g_j \in G$ entonces $g_i * g_j \in G$.

$$\forall g_i, g_j \in G \quad g_i * g_j \in G \tag{1.1}$$

- **Asociatividad:** para todo $g_i, g_j, g_k \in G$:

$$g_i * (g_j * g_k) = (g_i * g_j) * g_k \tag{1.2}$$

- **Elemento neutro:** existe un único elemento denotado como $e$, con la propiedad que $\forall g_i \in G$ tal que

$$e * g_i = g_i * e = g_i \tag{1.3}$$

- **Elemento inverso:** para cada $g_i$ existe un único elemento $g_i^{-1}$ tal que

$$g_i^{-1} * g_i = g_i * g_i^{-1} = e \tag{1.4}$$

En general $g_i g_j \equiv g_i * g_j$.

Dado un grupo, podemos ampliarlo un **álgebra**. Un álgebra es un conjunto de elemento que forman un espacio vectorial sobre un cuerpo (por ejemplo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), de forma que, junto a la adición, se define una operación de multiplicación que verifica los postulados que definen un grupo, excepto que el cero del álgebra no tiene inverso. Así pues, por ejemplo, dado un grupo $G$ con elementos $g_i$ $(i = 0, 1, \dots, h)$, las combinaciones lineales $\sum_{i=1}^{h} c_i g_i$, de elementos del grupo con coeficientes en el cuerpo, forman el álgebra del grupo. El producto se define por distrivuiddad como

$$\left(\sum_{i=1}^{h} c_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{h} c_j g_j\right) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h} c_i c_j g_i g_j \tag{1.5}$$

que por ser $g_i g_j$ es un elemento del grupo, es un nuevo elemento del álgebra.

**Definición 1.2**

Decimos que $G = \{g_1, g_2 ...\}$ es un **grupo abeliano** si su ley de composición $*$ sea conmutativa, es decir:

$$g_i * g_j = g_j * g_i \quad \forall g_i, g_j \in G \tag{1.6}$$

## 1.2. Estrucutra de los Grupos

**Definición 1.3**

Dos elementos $g_1$ y $g_2$ de un grupo $G$ son **conjugados** si existe un tercer elemento $g$ tal que $g_2 = g g_1 g^{-1}$. Decir que $g_1$ y $g_2$ son conjugaos se puede expresar como $g_1 \sim g_2$.s

Las relaciones de conjugación entre dos o más elementos, es una relación de equivalencia $\sim$. Efectivamente, podemos afirmar que se cumplan las propiedades:

- Reflexiva, tal que $a \sim a$ en virtud de lo que $a = ea = ae$.
- Simétrica, tal que $a = gbg^{-1} \Rightarrow b = gag^{-1}$.
- Transivitva, tal que $a = gbg^{-1}$ y $b = hch^{-1} \rightarrow a = (gh)c(gh)^{-1}$.

**Definición 1.4**

Un **subgrupo** $H$ de un grupo $G$ es un subconjunto de $G$ ($H \leq G$) que a su vez forma un grupo bajo la misma ley de composición de $G$.

Cuando $G$ es finito, una definición equivalente sería afirmar que $H$ es un subgrupo de $G$ cuando es cerrado, bajo la ley de composición de $G$:

$$\forall h_1, h_2 \in H \leq G \Rightarrow h_1 * h_2 \in H \tag{1.7}$$

La asociatividad, la existencia de un elemento neutro y de un inverso son propiedades *heredadas* de $G$. En todo grupo $G$ hay dos ejemplos triviales: que $H = \{e\}$ y $H = G$. Cualquier otro subgrupo que no sean estos se llaman *subgrupos propios*.

**Definición 1.5**

Dados un elemento $g \in G$ y un subgrupo $H = \{h_1, h_2 ...\}$ de $G$, definimos el subgrupo **coset izquierda** al conjutno de elementos obtenidos al multiplicar $g$ por todos los elementos de $H$, y se define como

$$gH = \{gh_1, gh_2, ...\} \tag{1.8}$$

La pertenencia de dos elementos a un mismo coset define de nuevo una relación de equivalencia.

**Definición 1.6**

Un **subgrupo normal** es un subgrupo $H$ verifica

$$gHg^{-1} = H \qquad \forall g \in G \tag{1.9}$$

# Capítulo 2

# Grupos Finitos

## 2.1. Introducción

Un grupo con un número finito de elementos se llama **grupo finito**. El númeor de elementos es el **orden** del grupo.

La forma más inmediata de representar un grupo finito conssite en mostrar su *tabla de multiplicación.*

## 2.2. Grupo Cíclico $C_n$

**Definición 2.1**

El **grupo cíclico** $C_n$ es el grupo de transofrmaciones de simetría de un polígono regular con $n$ lados y direccionando. Por "direccionar" entendemos que el polígono lleva asociado un sentido de reocrrido alrededor de su perímetro. Los elementos del grupo son rotaciones discretaas del ángulo $2\pi r/n$ con $r = 0, 1, ..., n-1$, alrededor de un eje de rotación que atraviesa el "centro de gravedad" del polígono.

## 2.3. Grupo Simétrico $S_n$

### 2.3.1. Definición

Este es uno de los gurpos finitos más importantes. Desde un punto de vvista físico tiene una relevancia directa en sistemas que involucran conjuntos de partículas idénticas. Dentro del ámbito de la teoría de grupos, juega un papel especial en virtud del teorema de Cayley.

**Definición 2.2**

El **grupo simétrico** $S_n$ se define como las posibles permutaciones o sustituiciones de $n$ elementos (o índices que los etiquetan), conteniendo por tanto $n!$ elementos, de lo que se deduce que el orden

> de $S_n$ es $n!$. La *ley de composición* es la simple aplicación sucesiva. Claramente es un gurpo no conmutativo.

Existen dos representaciones análogas, a saber, la **forma canónica** y la **descomposición en ciclos**. La forma canónica básicamene implica que un *elemento genérico* $p$ se puede escribir como:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

que nos dice que el índice $i$ es cambiado por el índice $p(i)$. Veamos que por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

es el elemento en el que el elemento de índice 2 y 3 se intercambian (parte inferior). Así pues, la múltiplicación es sucesiva, por lo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

véase que el segundo elemento intercambia los elementos ya intercambiados por el primer elemento. No es difícil de ver, pero es un ejercicio abstracto. Una vez se entienda este ejemplo el resto serán prácticamente triviales. La **descomposición en ciclos** de los elementos anteriores sería

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv (23) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv (123) \tag{2.4}$$

Como se puede ver, $23 \equiv 2 \to 3 \to 2$ y $123 \equiv 1 \to 2 \to 3 \to 1$. Es decir, el elemento $(ijk...n)$ implica que el elemento $i$ intercambia con el $j$, el $j$ con el $k$, así sucesivamente hasta el último $n$ que ser intercambia con el primero.

**Ejemplo 2.1** – $S_3$

El $S_3$ cnosiste en la identidad, 3 ciclos de 2 permutaciones y 2 ciclos de 3 permutaciones (6 elementos igual a 3!), tales que:

$$S_E = \{(); (12); (23); (13); (123); (132)\} \tag{2.5}$$

Aunquep parezca tener mayor dificultad, un par de observacioens allanan la tarea por este camino.

- Dos ciclos son el mismo si coinciden salvo permutación cíclica de sus elementos.
- Ciclos de un elemento pueden ser omitidos.
- Ciclos disjuntos conmutan entre sí.
- Ciclos que tengna un sólo elemento en común simpleemente se encadenan: $(253)(45) = (325)(54) = (3254)$.

Independientemente de la forma que el lector considere más adecuadas, el punto importante es qeu todo elemento de $S_n$ puede escribirse en forma de un porducto de ciclos disjuntos. En consecuencia el orden en el que escribimos los ciclos es irrelevante.

### 2.3.2. Teorema de Cayley

La importancia del grupo simétrico dentro del contexto de la Teoría de Grupos finitos tendrá todo el sentido una vez enunciemos el Teorema e Cayley.

**Teorema 2.1**

El **teorema de Cayley** nos dice que todo grupo $G$ finito de orden $n$ es isomorfo a algún subgrupo de $S_n$.

# Capítulo 3

# Representaciones

## 3.1. Homomorfismos

Un homomorfismo es una aplicación $f$ de un conjunto $A$ a otro conjunto $B$ (escribimos $f : A \to B$) que preserva alguna estrucutra interna. En particular, estamos interesados en la estructura de grupo de $A$ By $B$.

**Definición 3.1**

Sean $A$ y $B$ dos grupos y $f : A \to B$ una aplicación. Decimos que $f$ es un **homomorfismo** cuando verifica que para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) \tag{3.1}$$

Cuando $B$ coincide con $A$ decimos que $f$ es un **endorfismo**. Es importante recordar la definición de imagen de $f$ y núcleo de $f$:

**Definición 3.2**

Defimos como **imagen** de $f$ (Im$f$) a:

$$\mathrm{Im} f := \{b \in B / b = f(a) \text{ para algún } a \in A\} \tag{3.2}$$

**Definición 3.3**

Defimos como **núcleo** (*kernel*, del alemán) de $f$ (Ker$f$) a:

$$\mathrm{Ker} f := \{a \in A / f(a) = e_B \in B\} \tag{3.3}$$

Luego además tenemos los diferentes tipos de aplicaiocnes y homomorfismos. Una aplicación es *biyectiva* cuando $\mathrm{Ker} f = e_A$. Una aplicación es *suprayectiva* caundo $\mathrm{Im} f = B$. En el caso de ser suprayectiva y biyectiva simultáneamente estamos ante una aplicación *biyectiva*. Si además $f$ es un homomorfismo tenemos un *isomoforfismo*. Y si tenemos un endorfismo e isomorfismo estamos ante un *automorfismo*.

## 3.2. Reducibilidad

# Capítulo 4

# Grupo de Lie

## 4.1. Introducción

En los grupos continuos los elementos pueden parametrizarse en un entorno de cualquier punto mediante un conjunto de variables reales. Escribimos entonces para un elemento genérico $g(x_1, x_2, ..., x_d) = g(\mathbf{x})$. Si $d$ es el número de mínimos parámetros encesiarios para alcanzar cualquier elemento, hablamos de un grupo de *dimensión d.*

Es evidente que no podmeos escribir una tabla de multiplicar en el mismo sentido que para un grupo finito. Si el producto de $g(\mathbf{x})$ por $g(\mathbf{y})$ es $g(\mathbf{z})$ tenemos que:

$$g(x_1, x_2, ..., x_d)g(y_1, y_2, ..., y_d) = g(z_1, z_2, ..., z_d) \tag{4.1}$$

entonces los parámetros $z_1, ..., z_d$ son funciones de $x_i$ y $y_i$. Es decir, la tabla de multiplicación consta de $n$ funciones relaes de $2d$ argumentos, $z_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que $i = 1, ..., d$.

Las propiedades que definen un grupo imponen restricciones sobre las posibles funciones $f_i$. La más severa es la que proviene de la asociatividad:

$$(g(\mathbf{x})g(\mathbf{y}))g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{x})(g(\mathbf{y})g(\mathbf{z})) \tag{4.2}$$

válida para todos los valores de $x, y, z$.

**Definición 4.1**

Un **grupo de Lie** es un grupo continuo, en el cual las funciones $f_i$ que expresan la multiplicación, a parte de satisfacer los requisitos que provienen de las propiedades del grupo, son $C^\infty$ (contínuas e infinitavamente derivables).

## 4.2. Representaciones de Grupos de Lie

### 4.2.1. Grupos Unitarios

### 4.2.2. Grupos Ortogonales

## 4.3. Estructura Local de los Grupos de Lie

### 4.3.1. Generadores Infinitesimales de un Grupo de Lie

### 4.3.2. Álgebras de Lie y Grupos de Lie

**Definición 4.2**

Un **álgebra de Lie** $\mathscr{L}$ de dimensión $d \geq 1$ es un espacio vectorial real de dimensión $d$, dotado de una operación interna llamada **corchete de Lie** $[,] : \mathscr{L} \times \mathscr{L} \to \mathscr{L}$, definida para todo par $u, v \in \mathscr{L}$ y que satisface las siguientes propiedades:

- **Cierre**: $[u, v] \in \mathscr{L}$ para todo $u, v \in \mathscr{L}$.
- **Antisimetría**: $[u, v] = -[v, u]$.
- **Linealidad**: $[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$ para $a, b \in \mathbb{R}$.
- **Identidad de Jacobi**: $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$.

El concepto de álebra de Lie es una definición abstracta que en cada caso requiere una definición concreta para el corchete de Lie subyacente.

Dada una base $L_1, ..., L_d$ para un álgebra de Lie viene especificada por un conjunto de $d^3$ números $f_{ij}^k$ denominados **constantes de estrucutra** con respecto a la base $\{L_i\}i = 1, ..., d$ que se definen según la siguiente expresión:

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{d} f_{ij}^k L_k \qquad i, j = 1, ..., d \tag{4.3}$$

Estos números no son independientes como se deduce de las propiedades de *antisimetría* e *indentidad de jacobi*.

Frentes a cambios de base $L_i \to \tilde{L}_i$ con $i = 1, ..., d$, las constantes de estrucutra tarnsforman con dos índices covariantes y uno contravariante. Es decir, si $S$ especifica el cambio, tenemos que

$$\tilde{L}_j = S^i L_j \tag{4.4}$$

**Teorema 4.1**

A cada grupo de Lie lineal, G, le corresponde un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de la misma dimensión. De forma más precisa, si $\mathcal{G}$ tiene dimensión $d$, entonces los generadores infinitesimales $L - 1, ..., L_d$ forman una base de $\mathcal{G}$.

## 4.4. Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie

# Capítulo 5

# Grupos de Rotaciones

## 5.1. El grupo $O(3)$

## 5.2. El grupo $SU(2)$

## 5.3. Representaciones irreducibles de $SU(2)$ y $O(3)$

# Bibliografía


[1] Anthony Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists.* USA: Princeton University Press, mar. de 2016. ISBN: 978-1-4008-8118-5, 978-0-691-16269-0.