Daniel Vázquez Lago

Interacción Radiación-Materia

Partículas Cargadas y No Cargadas

Índice general

Capítulo 1

Partículas Cargadas

1.1. Dispersión de Rutherford

1.1.1. Introducción

Rutherford describió la dispersión de una partícula α por núcleos atómicos (con $m_\alpha \ll M, z = 2$) sobre una trayectoria hiperbólica a través del potencial de Coulomb. La energía total viene dada como la suma de la energía cinética y potencial, y permanece *constante* sobre toda la trayectoria:

$$E(r) = E_K(r) + E_p(r) \qquad E_p(r) \tag{1.1}$$

siendo θ el **ángulo de dispersión**. La distancia de máxima aproximación se define como la distancia a la cual se para una partícula con parámetro de impacto $b = 0$, i.e. colisión frontal. Así, denotando E_K como la *energía cinética inicial*, tenemos que

$$E_K = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{D_{\alpha-N}} \tag{1.2}$$

aunque lógicamente esta expresión no será del todo cierta, ya que el potencial no es infinito en $r = 0$, debido a que el núcleo es finito. Aún así es una buena aproximación.

1.1.2. Relación entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión

El momento transferido en la interacción, siempre y cuando $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = p$ vale

$$\Delta p = 2p\sin(\theta/2) \tag{1.3}$$

Es fácil de deducir matemáticamente, pero incluso físicamente tiene sentido: cuando $\theta = \pi$ la transferencia de momento es máxima (la partícula se da la vuelta completamente) lo que implicla un intercambio de 2 veces el momento inicial. Definimos como **parámetro de impacto**

$$b = r\sin\theta \tag{1.4}$$

Además, también se conserva el momento angular $L = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = Lp\sin\theta$, lo que lleva a la relación

$$v_i b = \omega r^2 \tag{1.5}$$

siendo $\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ en el vértice, definiendo ϕ como el ángulo entre el vértice y la partícula desde el núcleo. En el vértice, que es el punto en el cual la posición respecto el átomo y el momento lineal de la partícula son perpendiculares. Por definición $L = m_\alpha r^2 \omega$, y en el infinito se cumple que

$$L_\infty = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m_\alpha b v_i \tag{1.6}$$

El momento transferido Δp se calcula como la acción total en el tiempo de la fuerza de Coulomb proyectada sobre el eje de la hipérbola, tal que

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\Delta p} = (\dots) = \tag{1.7}$$

de lo que se puede deducir que el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión se relacionan tal que:

$$b = \frac{1}{2} D_{\alpha-N} \cot(\theta/2) = \frac{1}{2} D_{\alpha-N} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{E_K} \tag{1.8}$$

siendo $\mathrm{d}_{\alpha-N}$ la distancia de máxima aproximación y E_K la energía cinética.

1.1.3. La sección eficaz diferencial de Rutherford

La dispersión de las partícuals alfa que halló Rutherford la describió en función de su sección diferencial, tal que:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{Ruth}}}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{E_K} \tag{1.9}$$

Como podemos comprobar, *diverge* para $\theta = 0$, lo cual es debido al carácter ideal del núcleo puntual. La razón por la que en realidad no diverge, o la solución a esta divergencia, es que la carga nuclear está apantallada por los *electrones orbitales atómicos*, lo que conduce a un ángulo mínimo $\theta_{\text{mín}}$. La dispersión hacia atrás ($\theta \to \pi, b \to 0$) tampoco se logra nunca, debido al radio finito del núcleo.

Un modelo que tiene en cuenta el apantallamiento es el *modelo atómico estadístico de Fermi*, el cual introduce una exponencial tabulada por un *radio efectivo* α_{TF} de tal modo que el potencial de Coulomb no caiga "lentamente". Así pues:

$$V_{TF}(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{a_{TF}}} \tag{1.10}$$

el *radio efectivo* a_{TF} de la nube electrónica (de Thomas-Fermi) decrece por debajo del radio de Bohr α_0 al aumentar Z, como $a_{TF} = \frac{\zeta a_0}{\sqrt[3]{Z}}$, debido a la disminución del tamaño de los orbitales más internos, por el teorema de Gauss.

La aproximación de Born requiere ahora, con $\Delta k = K = (2p/h)\sin(\theta/2)(p = p_i)$ el momento de onda transferido ($p = hk$), el cálculo de la transformada seno de $V_{TF}(r)$, que es finita. Rutherford reciba entonces un *factor corrector* tal qeu:

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \left| \frac{2m_\alpha}{h^2} \int_0^\infty r^2 V_{TF}(r) \frac{\sin Kr}{Kr} dr \right|^2 = (\dots) = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{K^2 a_{TF}^2}} \right) \tag{1.11}$$

Cuando θ«1, tenemos que:

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \frac{D_{\alpha-N}^2}{\theta^4} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\theta_{\text{mín}}^2}{\theta^2} \right)^2 \right]} = \frac{D_{\alpha-N}^2}{\theta^2 + \theta_{\text{mín}}^2} \tag{1.12}$$

donde se introduce el concepto el concepto de ángulo mínimo, que como podemos ver viene expresado:

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{h}{p a_{TF}} = \frac{h \sqrt[3]{Z}}{p a_{TF}} = \frac{hc \sqrt[3]{Z}}{a_0 \sqrt[root]{E_K (E_K + 2Mc^2)}} \tag{1.13}$$

La mejora de la aparición de este ángulo mńimo es que ahora *la sección eficaz total es finita*, lo cual se corresponde a un resultado mucho más físico. Este ángulo mínimo tiene un *origen cuántico* debido al *principio de incertidumbre*. Se produce por la localización de la partícula sobre el radio a_{TF}, que le imprime un momento *transversal* inevitable Δp, relacionado con la longitud de onda:

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{h}{p a_{TF}} = \frac{\lambda}{a_{TF}} \tag{1.14}$$

1.1.4. Corrección por radio finito del núcleo

1.1.5. Dispersión de Mott

1.1.6. Correciones por espín del electrón y retroceso del núcleo

1.2. Poder de frenado másico de partículas cargadas en la materia

1.3. El rango másico R_{CSDA}

Ejercicios

Ejercicio 1

Obten la expresión de la sección de eficaz de Rutherford, con el potencial de Coulomb, usando la aproximación de Born con ondas planas incidentes y salientes

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{E_K}$$

Ejercicio 2

Obten la expresión de la sección de eficaz de Rutherford, ahora con el potencial del modelo atómico estadístico de Fermi, usando la aproximación de Born con ondas planas incidentes y salientes

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{Ruth}}}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{K^2 a_{TF}^2}}\right)$$

y luego llegar a la expresión final cuando $\theta \ll 1$:

Bibliografía

[1] Marcos Sánchez-Élez. *Introducción a la programación en VHDL*.

[2] Wayne Wolf. *FPGA-Based System Design*. USA: Prentice Hall PTR, 2004. ISBN: 0131424610.