Daniel Vázquez Lago

Electrodinámica

Índice general

Introducción

1 Formulación del campo electromagnético: leyes de Maxwell **5**
1.1 Ecuaciones de Maxwell en el vacío 5
1.2 Teorema de Helmholtz 6
1.3 Potenciales electromagnéticos 6
1.3.1 Gauge de Coulomb 8
1.3.2 Gauge de Lorenz 8
1.4 Medios materiales 9
1.4.1 Polarización 9
1.4.2 Magnetización 10
1.4.3 Medios l.h.i. 11
1.5 Ecuaciones de Maxwell en medios materiales 12
1.6 Condiciones de frontera 12

Electrostática

2 Electrostática **15**

Magnetostática

3 Magnetostática **17**

Electrodinámica

4 Leyes de Conservación **19**
4.1 Teoremas de conservación 19
4.2 Conservación de la carga 20
4.3 Conservación de la energía 20
4.4 Conservación del momento 21
4.5 Conservación del momento angular 23
4.6 Teorema del Centro de Energía 23
Ejercicios 24

Anexo y Bibliografía

Bibliografia **28**

Capítulo 1

Formulación del campo electromagnético: leyes de Maxwell

En el primer apartado describiremos las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz, las ecuaciones mas importantes del electromagnetismo, que permiten resolver cualquier problema electromagnético. En el segundo apartado estudiaremos que es la teorema de Helmholtz, de tal manera que podamos argumentar que las ecuaciones de Maxwell determinan de manera inequívoca los campos electromagnéticos.

1.1. Ecuaciones de Maxwell en el vacío

En la electrodinámica clásica nuestro principal problema será resolver cuales son las interacciones entre partículas cargadas. Las partículas cargadas serán para nosotros entes matemáticos que funcionan como fuentes de campos eléctricos o magnéticos, de tal modo que los campos que generan nos permiten describir las interacciones entre las diferentes partículas. Entonces si conocemos la posición/movimiento de todas las cargas del espacio a lo largo del tiempo podremos conocer con precisión cuales son los campos, y por tanto las interacciones entre las cargas.

Las ecuaciones que nos dicen cual es la forma de los campos en función de la posición/movimiento de las cargas se llaman **ecuaciones de Maxwell**. Decimos que un problema electromangético está resuleto cuando conocemos con precisión los campos eléctromagnéticos, por tanto resolver las ecuaciones de Maxwell es fundamental. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{Ley de Gauss} \\
&(ii) \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 && \text{Divegencia de B} \\
&(iii) \quad \nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && \text{Ley de Faraday} \\
&(iv) \quad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} && \text{Ley de Ampere} - \text{Maxwell}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

donde tenemos que la densidad de carga eléctrica es ρ y el flujo de carga es $\mathbf{J}$. Ahora bien, hemos que es equivalente conocer los campos electromangéticos a conocer las interacciones de las cargas, pero ¿Cómo podemos deducir que fuerza crea la presencia de un campo eléctrico magnético sobre una carga cualquiera? Pues esta viene dada por la **fuerza de Lorentz** para una carga puntual q, que es:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1.2}$$

tal que la ecuación del movimiento vendrá dada por la 2ª ley de Newton.

1.2. Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz nos dice que cualquier campo vectorial está completamente definido por su rotacional y su Divrgencia, de tal modo que:

Teorema 1.1

El **teorema de Hemholtz** nos dice que si un campo vectorial **F** verifica que:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D \qquad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C} \tag{1.3}$$

entonces el campo vectorial viene inequívocamente determinado por su rotacional y su Divrgencia, tal que:

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W} \tag{1.4}$$

donde U y **W** vienen completamente determinados por

$$U(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \qquad \mathbf{W}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \tag{1.5}$$

Este teorema sin embargo tiene una pequeña incosistencia, que darán mas adelante lo que llamaremos *gauges*. Además podemos sumar a D una constante cualquiera de tal manera que su gradiente seguirá siendo el mismo. Consecuentemente tendremos una familia de funciones escalares que son igualmente válidas.

1.3. Potenciales electromagnéticos

Ahora entra un punto crucial en nuestro estudio de la electromagnetismo: los potenciales y los gauges. Entender lo siguiente es fundamental para el estudio de la materia. Las funciones vectoriales **E** y **B** o campos que verifican las ecuaciones de Maxwell para un problema determinado son únicas, de tal forma que no hay dos campos que verifiquen dichas ecuaciones a la vez. Es decir, no existen dos campos diferentes que solucionen un mismo problema, lo cual es lógico, ya que en la realidad solo vemos una solución, solo podemos medir un campo, no dos a la vez.

Ahora bien, como llegamos a la solución, que recursos matemáticos usemos es un tema diferente. Podremos construir funciones auxiliares que, al o mejor, no son unívocas, es decir, podemos obtener una serie de funciones auxiliares pero que todas ellas generen los mismos campos, y por tanto todas sean soluciones para dicho problema.

Hemos introducido en el apartado anterior los potenciales. Los potenciales son un recurso matemático que nos ayuda a resolver muchos problemas, y en muchos casos conocerlos es análogo a conocer la solución al problema (conocer los campos). Sin embargo presentan el problema mencionado anteriormente: existe una serie de potenciales, un conjunto de ellos, para cada solución del campo. A cada una de estas soluciones de los potenciales lo llamamos **gauge**. Es el momento de aplicar el teorema de Hemholtz. Dado que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ este campo vendrá dado únicamente por un potencial escalar, tal que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.6}$$

Además dado que que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ tenemos que

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.7}$$

donde hemos añadido el término Φ ya que $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$, y por tanto de existir no aparecería en la expresión del rotacional. Además la Divrgencia de $\mathbf{E}$ no es cero, por lo que debe contener un gradiente. Hemos encontrado entonces una forma de evaluar el campo electromagnético a partir de otras funciones escalares y potenciales.

Ahora bien, supongamos que existe un $\mathbf{A}'$ que también es solución de las ecuaciones de Maxwell. Obviamente podremos escribir esta ecuación como $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}$, tal que $\boldsymbol{\alpha}$ es una función vectorial cualquiera. Si tenemos que $\Phi' = \Phi + \beta$ es también solución debe verificarse que:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \left(\nabla \beta + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} \right)$$

y consecuentemente obvio que:

$$\nabla \beta = -\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

por lo que debe verificarse entonces que $\alpha = -\nabla \lambda$, es decir, debe ser un campo irrotacional. En ese caso debemos tener que $\beta = \partial \lambda / \partial t$. La relación entonces nos dice que:

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \lambda \tag{1.8}$$

donde λ es una función escalar cualquiera. Como podemos ver entonces existe una familia entera de posibles soluciones de $\mathbf{A}$ y Φ de las que podamos obtener los mismos campos.

Las ecuaciones de Maxwell son 4 ecuaciones diferenciales de primer orden. Es bien conocida que la información contenida en 4 ecuaciones de primer orden es análoga a la información contenida en 2 ecuaciones de segundo orden, si hacemos el cambio correcto. Entonces tendremos que buscar 2 ecuaciones de segundo orden usando los potenciales que contengan la misma información. Dado que la información de las fuentes está en las ecuaciones inhomogéneas (ecuaciones donde aparecen de forma explícita $\rho, \mathbf{J}$), empecemos por $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$. Dicha ecuación puede expresarse como:

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.9}$$

Ahora para la ecuación de Ampere-Maxwell solo habrá que tener en cuenta que $\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} \equiv \nabla^2\mathbf{A} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$, por lo que:

$$\left(\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{J} \tag{1.10}$$

Estas son las ecuaciones de Maxwell análogas para los potenciales. Si hacemos el cambio $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ o $\Phi \to \Phi'$ podemos ver que no se alteran. En ese caso decimos que las ecuaciones de Maxwell son **invariantes Gauge**, ya que *no varían frente a una trasformación Gauge*. En el teorema de relatividad ahondaremos mas en el tema de los invariantes. Sin embargo estas ecuaciones son realmente feas, nadie querría usarlas frente a las elegantes ecuaciones de Maxwell. Por esa misma razón existen dos gauges muy usados en la literatura, y prácticamente son los únicos usados en la electrodinámica clásica. Estos son el gauge de Coulomb y el gauge de Lorenz. En los dos siguientes apartados vamos a explicar la utilidad de ambos y porque se crearon.

1.3.1. Gauge de Coulomb

El **gauge de Coulomb** es, quizás, el gauge mas obvio que hay. Probablemente es el único que se haya visto hasta la fecha. Este gauge verifica la condición de que

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{1.11}$$

Entonces si cogemos la ley de Gauss (i) de las ecuaciones 1.1, y substituímos tendremos que:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.12}$$

es decir, la *ecuación de Poisson* para el potencial. Esta ecuación permite entonces resolvere el potencial por la famosa ecuación:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{R}\mathrm{d}\tau' \tag{1.13}$$

1.3.2. Gauge de Lorenz

El **gauge de Lorenz** es bastante menos obvio que el otro gauge. En ese debe verificarse la condición de que:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{1.14}$$

Si aplicamos a esto a las ecuaciones 1.9 y 1.10 obtenemos que se trasforman en:

$$\begin{aligned} &(i) \quad \nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J} \\ &(ii) \quad \nabla^2\Phi - \mu\varepsilon_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{1.15}$$

tal que si definimos el operador $\Box^2$ como

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.16}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} (i) \quad & \Box^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \\ (ii) \quad & \Box^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Si queremos hacer una trasformación del tipo $\mathbf{A}, \Phi \to \mathbf{A}', \Phi'$ tendremos que debe verificarse que

$$\Box^2 \lambda = 0 \tag{1.18}$$

1.4. Medios materiales

Existen fenómenos en la naturaleza que hacen que determinados materiales posean una polarización natural o una magnetización natural perceptible macroscópicamente, vease el caso de los imanes o el caso de la carga electroestática en un boli al frotarlo en lana. En general todos estos fenómenos son suficientemente complejos como para desarrollarlos en un tema aparte pero necesitamos mencionarlos brevemente para poder continuar el desarrollo de la asignatura.

Los fenómenos anteriormente descritos se deben a la contribución de pequeños fenómenos de escala atómico, que todos juntos por superposición crean campos visibles. De esta forma no es necesario conocer el espín o la ecuación de un electrón para darle un desarrollo matemático a la imanación natural de un cuerpo. De hecho el concepto es sumamente sencillo.

1.4.1. Polarización

El fenómeno de la polarización se debe a la suma de los momentos dipolares en los átomos, de tal manera que, en un material, tenemos una especie de promedio del momento dipolar total llamado **polarización** P. El **momento dipolar p** total se calculará como:

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} \mathrm{d}V' \tag{1.19}$$

Ahora bien, necesitamos tener algún tipo de herramienta matemática para calcular los campos que se crean por culpa de los dipolos eléctricos. En principio la única manera que tenemos de calcular los campos es mediante las leyes de Maxwell, por lo que entonces tendremos que tratar de incluir esta polarización en ellas. Para esto tendremos que relacionar el momento dipolar o la polarización con una densidad de carga.

Entonces no hay más que usar el potencial Φ generado por una fuente dipolar, que viene dado por:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}{R^2} \tag{1.20}$$

A partir de esto (suponiendo que $\mathbf{B} = 0$, de tal modo que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) podemos usar el *teorema de Gauss* para relacionar de alguna forma la densidad de polarización con la carga. En ese caso tendremos que:

$$\rho_p \equiv -\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad \sigma_p \equiv \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P} \tag{1.21}$$

siendo estas lo que llamaremos a partir de ahora *fuentes ligadas de polarización*, donde ρ_p es la densidad de carga y σ_p la carga superficial. En realidad esto no es mas que un constructo matemático: *la densidad de carga neta es cero*, pero que nos permite incluir esos fenómenos materiales en las leyes de Maxwell.

Las cargas de polarización también pueden producir corrientes si la polarización $\mathbf{P}$ varía en una región del espacio, tal que:

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} \tag{1.22}$$

1.4.2. Magnetización

El fenómeno de la magnetización se debe a la suma de momentos dipolares magnéticos (podemos pensar que son espiras microscópicas) debido al movimiento y espín de los electrones, de tal manera que el promedio del momento magnético lo llamaremos **Magnetización** y el momento magnético total se calculará como:

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M}\mathrm{d}V' \tag{1.23}$$

Al igual que con la polarización, tenemos que buscar un medio para incluirlas en las leyes de Maxwell, y esto se hace creando algun tipo de analogía entre magnetización y corrientes. En ese caso tenemos que el campo vectorial magnético $\mathbf{A}$ para un momento magnético $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R^2} \tag{1.24}$$

A partir de esto si suponemos que $\mathbf{E} = 0$ tal que $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, tenemos que usando el *teorema de Stokes*:

$$\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} \qquad \mathbf{K}_p = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} \tag{1.25}$$

siendo estas la que llamamos *corrientes ligadas de magnetización*, donde $\mathbf{J}_m$ es el flujo de carga y $\mathbf{K}_m$ la corriente superficial. Al igual que antes es un constructo matemático, realmente no existe un flujo de carga global, pero actúa como si lo hubiera.

Campos D y H

Antes de continuar vamos a introducir un concepto sumamente importante: la diferencia entre fuentes aplicadas y fuentes inducidas. Las *fuentes aplicadas* $(\rho_a, \mathbf{J}_a)$ son aquellas fuentes que se introducen en un sistema electromagnético y sobre las que se tienen control. Las *fuentes inducidas* aparecen como consecuencia del medio a la reacción de las cargas aplicadas (como las cargas superficiales en los conductores sometidos a campos electrostáticos, o las corrientes inducidas en conductores por campos magnéticos variables).

Continuando con el temario, a partir de ahora llamaremos cargas libres ρ_f y corrientes libres $\mathbf{J}_f$ a todas las cargas y corrientes que no provengán de estes fenómenos materiales, de tal forma que la carga y corriente total se puede calcular como:

$$\rho = \rho_f + \rho_p \tag{1.26}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p \tag{1.27}$$

Ahora bien, ¿Que pasa si queremos calcular únicamente el efecto de estas cargas libres? Pues que tendremos que crear unos campos auxiliares *sin ningún significado físico* tales que:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{1.28}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{1.29}$$

De este modo podemos ver claramente que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$, o que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$. En el siguiente apartado escribiremos las funciones de Maxwell para estos medios. En general estos campos auxiliares son muy interesantes, ya que permiten resolver algunos ejercicios de una manera directa, aunque en otros pueden complicarlos.

1.4.3. Medios l.h.i.

Experimentalmente se sabe que la mayoría de medios presenta una relación intrínsecamente lineal entre los campos **E** y **P**, **H** y **M**. Tenemos en ese caso que las relaciones son:

$$\mathbf{H} = \chi_m \mathbf{M} \qquad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \tag{1.30}$$

al término χ_e se le conoce como **susceptibilidad eléctrica**, y al término χ_m se le conoce como **susceptibilidad magnética**. En ese caso podremos crear varias relaciones lineales tales que:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \tag{1.31}$$

donde a μ se le conoce como **permeabilidad magnética del medio**, pudiendo ser mayor o menor que μ_0 ya que χ_m puede ser negativa. Para el campo eléctrico:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{1.32}$$

donde a ε se le conoce como **permitividad eléctrica del medio**. En ese caso se verifica para todo material que $\chi_e > 0$ y por tanto que $\varepsilon > \varepsilon_0$. En ese caso las relaciones **D**(**E**) y **B**(**H**) para los medios l.h.i. son las llamadas **relaciones constitutivas del medio**.

1.5. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

Las ecuaciones de Maxwell en medios materiales son exactamente iguales que las ecuaciones de Maxwell solo que cambiamos los campos $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ por los campos $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas. Llamamos ecuaciones de Maxwell inhomogéneas a aquellas en las que aparecen explícitamente las fuentes (ley de Gauss, ley de Ampere-Maxwell) y homogéneas a las que no (ley de Faraday, Divrgencia de B). Entonces las **ecuaciones de Maxwell para medios materiales**

$$\begin{aligned}
&(i) && \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f && \text{Ley de Gauss} \\
&(ii) && \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 && \text{Divegencia de B} \\
&(iii) && \nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && \text{Ley de Faraday} \\
&(iv) && \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} && \text{Ley de Ampere} - \text{Maxwell}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Algunas personas llaman a estas ecuaciones las "verdaderas" ecuaciones de Maxwell, pero es importante entender que contienen exactamente la misma información que las ecuaciones 1.1.

Sin embargo si solo tenemos estas ecuaciones no seremos capaces de resolver ningún problema, ya que no se puede determinar las componentes de los campos en función de las fuentes libres con solo 4 ecuaciones. Por eso mismo necesitamos lo que se llaman *ecuaciones constitutivas del medio*, que serán las relaciones $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, que dependerán del medio.

Si estamos en un medio l.h.i. usamos 1.31 y 1.32. Luego tenemos las **ecuaciones de Maxwell para medios l.h.i.** que son:

$$\begin{aligned}
&(i) && \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} && \text{Ley de Gauss} \\
&(ii) && \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 && \text{Divegencia de B} \\
&(iii) && \nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && \text{Ley de Faraday} \\
&(iv) && \nabla\times\mathbf{B} = \mu\mathbf{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} && \text{Ley de Ampere} - \text{Maxwell}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

1.6. Condiciones de frontera

Las ecuaciones de Maxwell admiten un desarrollo en integrales usando los *teoremas de Gauss* y *Stokes* Estos admiten que:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = Q_{f_{enc}} \\
&(ii) \quad \oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0 \\
&(iii) \quad \oint_{\mathscr{P}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} \\
&(iv) \quad \oint_{\mathscr{P}} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{f_{enc}} + -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

donde S es una superficie cerrada cualquiera para $(i), (ii)$; $\mathscr{P}$ es una línea cerrada cualquiera y S para $(iii), (iv)$ es una superficie cuya frontera sea $\mathscr{P}$.

Lo normal es que ahora nos preguntemos que tiene que ver esto con las condiciones de frontera. Pues veréis, a la hora de calcular que pasa cuando existe una superficie cargada o una superficie donde existe una corriente (básicamente superficies donde $\sigma, \mathbf{J} \neq 0$) tenemos que usar estas ecuaciones para deducir cual es la relación entre los campos en una parte de la superficie y otra. La presencia de estas fuentes produce una discontinuidad clara en los campos.

Supongamos entonces una superficie cualquiera que divide dos medios: el medio 2, hacia donde apunta la normal a la superficie; y el medio 1, en el otro sentido. En cada libro usan diferentes símbolos para referirse a la componente normal y trasversal (perpendicular) a la superficie. Aquí usaremos el método tradicional: producto escalar y vectorial de **n**. Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f \\
&(ii) \quad \hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\
&(iii) \quad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\
&(iv) \quad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\mathbf{K}_f
\end{aligned} \tag{1.36}
$$

Como podemos ver son útiles incluso cuando no existen cargas libres, ya que nos da una medida del efecto de polarización y magnetización si los dos medios son diferentes. Por ejemplo si estamos en un medio l.h.i. tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \hat{\mathbf{n}}\cdot(\varepsilon_2\mathbf{E}_2 - \varepsilon_1\mathbf{E}_1) = \sigma_f \\
&(ii) \quad \hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\
&(iii) \quad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\
&(iv) \quad \hat{\mathbf{n}}\times\left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1}\right) = -\mathbf{K}_f
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

por lo que aún aparecerían disonancias a pesar de no haber cargas libres. Esta es la auténtica utilidad de las ecuaciones de Maxwell para medios materiales, ya que nos dan una idea intuitiva muy rápida del cambio de dos medios, aun sin haber cargas o corrientes libres.

Capítulo 2

Electrostática

Capítulo 3

Magnetostática

Capítulo 4

Leyes de Conservación

4.1. Teoremas de conservación

En toda la física que hemos estudiado hasta ahora, desde la mecánica cuántica, como la termodinámica y otras ramas, existen ciertas cantidades que se conservan en un proceso físico. Estas cantidades conservadas pueden ayudar muchísimo a resolver un problema, o resolverlo. La física no sería nada sin estas cantidades que se conservan, y el electromagnetismo no será menos. En este tema estudiaremos la conservación de los 3 observables mas importantes: la energía U, el momento lineal $\mathbf{p}$ y el momento angular $\mathbf{L}$. Además describiremos la conservación de la carga.

A la hora de estudiar la conservación de la energía, momento o momento angular es necesario desarrollar la densidad de fuerza, mediante el principio de Lorentz, ya que aparece en los 3 términos, aunque de una manera diferente. Definimos densidad de fuerza $\mathbf{f}$ como la cantidad de fuerza que se ejerce sobre una masa por densidad de volúmen, tal que:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} \mathrm{d}\tau \tag{4.1}$$

si la única fuerza que se ejerce es la fuerza electromagnética está vendrá dada por la fuerza de Lorentz. Esta nos dice cuanta fuerza se ejerce sobre una carga. Sin embargo si lo que tenemos es una densidad de carga, habrá que integrar dicha fuerza por unidad de volumen, tal que:

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \mathrm{d}\tau \tag{4.2}$$

de tal modo que se ve claramente que:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{4.3}$$

Esto último es fundamental. Con esta definición de fuerza por unidad de volumen desarrollaremos toda la física de esta sección.

4.2. Conservación de la carga

4.3. Conservación de la energía

Como sabemos la energía no es mas que la fuerza ejercida por una partícula en su movimiento, tal que $\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$, o teniendo en cuenta que $\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\mathrm{d}t$ siendo $\mathbf{v}$ la velocidad de la partícula en un instante cualquiera. Entonces tenemos que

$$P \equiv \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{4.4}$$

ahora si dicha partícula posee una carga q, y la fuerza ejercida es electromagnética tendremos que :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (q\mathbf{v})$$

Como podemos ver tenemos que la fuerza magnética no ejerce ningún tipo de trabajo sobre la carga en movimiento. Es decir, *el campo magnético no ejerce trabajo.* En ese caso tenemos que:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

Esto será para una carga. ¿Que pasa si tenemos muchas cargas? Pues aparecerá un sumatorio. Y como sabemos un sumatorio y una integral de Riemann son exactamente lo mismo, solo que cada carga tendrá ahora un valor infenitesimal $q \to \rho(\mathbf{r})$ que depende de cada punto del espacio, de tal modo que la velocidad asociada también. En ese caso lo que tendremos es un flujo de carga, que tendremos que integrar. De este modo la expresión mas general es que:

$$\frac{\mathrm{d}W_{em}}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, \mathrm{d}\tau \tag{4.5}$$

Tenemos que buscar una expresión más general que esta. Aplicando la ley de Ampere-Maxwell y la ley de Faraday tendremos que:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\left(\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{4.6}$$

donde tendremos que $\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. De este modo tendremos que se verifica que:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\left(\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{4.7}$$

Muchas veces al primer término de la segunda igualdad se le conoce como $\frac{\partial u_{em}}{\partial t}$, ya que

$$u_{em} \equiv \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \tag{4.8}$$

Este término lo llamamos la **energía de los campos electromagnéticos**, y nos da una medida de la energía electromagnética acumulada en los campos. La energía que tienen los campos podemos verlo como la energía de interacción de los campos. Definimos el **vector de Poynting S** como:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{4.9}$$

Este nos dará una medida del flujo de energía que atraviesa una superficie. Para entender esto debemos trasformar la ecuación diferencial

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial u_{em}}{\partial t} - \nabla \mathbf{S} \tag{4.10}$$

en una ecuación integral, tal que integrando en V y aplicando el *teorema de Gauss*; donde ahora $W = U_{mec}$, es decir, la energía mecánica, y $U_T = U_{mec} + U_{em}$; obtenemos el **teorema de Poynting**:

$$\frac{\mathrm{d}U_T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(U_{mec} + U_{em})}{\mathrm{d}t} = -\oint_S (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathrm{d}a \tag{4.11}$$

Este teorema nos dice que el cambio de la energía en una región del espacio V depende del flujo de energía a través de la superficie que envuelve el volumen. Entonces ya entendemos que significa $\mathbf{S}$: es el flujo de energía de los campos a través de una superficie en un instante t, y por tanto conocer la dirección del vector de Poyting es fundamental a la hora de estudiar las ondas electromagnéticas, ya que nos dará una medida de hacia donde se propagan. El término $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ puede asociarse con la energía mecánica de disipación, lo que llamamos *efecto Joule*. También podemos escribirlo según las ecuaciones de Maxwell para medios materiales, tal que:

$$u_{em} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}; \qquad \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{4.12}$$

donde la expresión del teorema de Poyting es exactamente igual.

4.4. Conservación del momento

La conservación del momento tiene un desarrollo muchísimo mas complejo. La densidad de carga ρ y el flujo de energía $\mathbf{J}$ usando las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas. El resultado es bastante atroz, ya que también hay que aplicar bastantes igualdades trigonométricas. El resultado final sería:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} = \;& \varepsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}\right] \\ & -\frac{1}{2}\nabla\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como podemos ver usar esta ecuación de manera natural podría resultar un auténtico quebradero de cabeza. Sin embargo este horror matemático puede simplificarse de una manera muy sencilla: usando el **tensor de Maxwell**. Definimos el vector de Maxwell $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ como aquel cuyas componentes se definen como:

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2\right) \tag{4.14}$$

o escrito de manera tensorial

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2 \mathbf{1}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2 \mathbf{1}\right) \tag{4.15}$$

donde el producto externo $\otimes$ es un producto tensorial. Por tanto los campos eléctricos y magnéticos dejan de ser funciones vectoriales y pasan a ser tensores, aunque puedan ser tratados como los primeros. En cualquier caso esto debe ser recordado por el lector, ya que sentará las primeras bases para entender los temas de relatividad.

Ahora bien ¿Qué diatres tiene que ver el tensor de Maxwell con la densidad de fuerza? Pues que en realidad la densidad de fuerza puede ser descrita como:

$$\mathbf{f} = \nabla \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \tag{4.16}$$

Entonces usamos ahora que $\mathbf{F}_{mec} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{mec}}{\mathrm{d}t}$ para obtener que:

$$\mathbf{F}_{mec} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{mec}}{\mathrm{d}t} = \int_V \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\tau + \oint_S (\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathrm{d}a \tag{4.17}$$

esta será la **ecuación de continuidad del momento** o también la **ecuación de la fuerza electromagnética**. Muchas veces se define el término **g** llamado **densidad de momento electromagnético** como

$$\mathbf{g} \equiv \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \tag{4.18}$$

De esta forma si **G** es la integral de volumen tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{p}_{mec} + \mathbf{G}) = \oint_S (\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathrm{d}a \tag{4.19}$$

que es la manera mas común de expresarlo. Lo más normal es que el lector siga preguntándose que coño es el tensor de Maxwell. El tensor de Maxwell no es mas que la fuerza por unidad de área que ejerce un campo electromagnético sobre la superficie de un volumen. Mientras que los elementos de la diagonal hablan de la **presión** (T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}) los otros elementos (T_{xy}, T_{xz}...) hablan de como se comportan las **fuerzas cortantes**. Por ejemplo T_{xy} nos da una medida de la fuerza que se genera en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ debido a los campos en la componente $\hat{\mathbf{y}}$ sobre la superficie. Debido a la simetría del tensor T_{xy}. Leer Grifiths pag. 370 o Zangwill pag. 513, para más información.

Fuerzas sobre medios materiales

El tensor de Maxwell actúa sobre un vector $\hat{\mathbf{n}}$ dando resultado otro vector. Es muy interesante conocer para que casos el vector resultante es paralelo al vector inicial, de tal modo que actúe como un *autovector* ($\hat{\mathbf{n}}$). Dado que en el espacio libre $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ es un tensor simétrico (o en un medio l.h.i) dando lugar a valores propios reales esto cobra especial relevancia. Diferenciemos entonces el tensor de Maxwell eléctrico $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}^E$ (solo las componentes eléctricas) y el tensor de Maxwell magnético $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}^M$ (solo las componentes magnéticas). En ese caso:

$$(\overleftrightarrow{\mathbf{T}}^E \cdot \hat{\mathbf{n}})_j = \sum_{i=x,y,z} n_i T_{ij} = \varepsilon \left(\left(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z \right) E_j - \frac{1}{2} n_j E^2 \right) \tag{4.20}$$

tal que para que sea proporcional a n_j debe verificarse que $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ o que $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E$, ya que si se cumple lo primero tendremos que la parte de la izquierda, y si es paralelo $E_j = En_j$. Obteniendo así que $\mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{n}}$ o $\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{n}}$. En ese caso para que

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{n}} \quad &\Longrightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{T}}^E \hat{\mathbf{n}} = \frac{\varepsilon}{2} E^2 \hat{\mathbf{n}} \\ (ii) \quad \mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{n}} \quad &\Longrightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{T}}^E \hat{\mathbf{n}} = -\frac{\varepsilon}{2} E^2 \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Para el campo magnético ocurre exactamente lo mismo, ya que la forma de resolverlo es completamente análoga:

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{n}} \quad &\Longrightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{T}}^M \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2\mu} B^2 \hat{\mathbf{n}} \\ (ii) \quad \mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{n}} \quad &\Longrightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{T}}^M \hat{\mathbf{n}} = -\frac{1}{2\mu} B^2 \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Presión electromagnética sobre conductores

En los conductores perfectos solo hay cargas y corrientes libres, por lo que las fuerzas sobre ellos pueden ser calculadas con el tensor de Maxwell usando las condiciones de frontera adecuadas. Para un conductor perfecto lo que pasará es que *no existe ni campo eléctrico ni magnético en el interior.*

Además usando la consideración $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ podemos hallar las siguientes conclusiones. Dado que el campo eléctrico en la superficie debe ser normal va a existir una fuerza por unidad de área, una presión, dirigida hacia fuera. El campo magnético será además paralelo a la superficie y por tnato la fuerza será dirigida hacia dentro. P

4.5. Conservación del momento angular

El momento angular magnético es exactamente igual al momento lineal pero con la diferencia de que el tensor de inercia está multiplicado vectorialmente por un factor $\mathbf{r}$. La forma de obtener las ecuaciones son exactamente iguales, obteniendo qu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{L}_{mec} + \varepsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \mathrm{d}\tau\right) = \int_V \mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}a \tag{4.23}$$

donde definimos el momento angular electromagnético $\mathbf{L}_{em}$ como:

$$\mathbf{L}_{em} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{g} \mathrm{d}\tau = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \mathrm{d}V = \varepsilon_0 \int_V [\mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})] \, \mathrm{d}\tau \tag{4.24}$$

4.6. Teorema del Centro de Energía

Ejercicios

Ejercicio 4.1 – Cálculo de S, u_{em} y $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ en solenoide de intensidad variable.

Sea un solenoide de radio a con n vueltas por unidad de longitud y intensidad

$$I = I_0 \frac{t}{\tau} \tag{4.25}$$

Calcula **S** dentro y fuera del solenoide, y compáralo con u_{em} y $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$.

Lo primero que tenemos que calcular es el campo magnético, a través de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{B} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{4.26}$$

(en realidad esta sería la componente **B** generada únicamente por la carga, también deberíamos tener en consideración el campo eléctrico). En este caso tendremos una corriente superficial en el sentido $\boldsymbol{\varphi}$, tal que:

$$\mathbf{K} = nI(t)\boldsymbol{\varphi} \tag{4.27}$$

Luego tenemos qeu aplicar el teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla\times\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} \to \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} \tag{4.28}$$

Dado que $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, tenemos que **B** solo puede tener dos direcciones: $\boldsymbol{\varphi}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Si además tenemos que $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ y $\mathbf{J} \propto \boldsymbol{\varphi}$, tenemos que $\mathbf{B} \propto \hat{\mathbf{z}}$. Debido al propio teorema de Stokes se cumple que $B \neq B(\rho, z, \varphi)$, es decir, debe ser una constante, tanto dentro como fuera del solenoide. Debido también a que $B = 0$ en el infinito, tenemos que $\mathbf{B} = 0$ fuera del solenoide. Así pues, en el interior del solenoide tenemos un campo uniforme en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$: $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Tenemos pues que:

$$B_0 = \mu_0 nI(t) \to \mathbf{B} = \mu_0 nI(t)\hat{\mathbf{z}} \tag{4.29}$$

Ahora el campo eléctrico:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.30}$$

y como $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$, tenemos pues que $\mathbf{E} \propto \hat{\mathbf{z}}$. Por simetría azimutal y en el eje z, solo puede depender de la dirección radial r, i.e. $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{z}}$. Así pues, el campo eléctrico depende de si estamos en el interior o exterior

$$E(r)2\pi\rho = \dot{\mathbf{B}} \qquad \text{si } r < a \tag{4.31}$$

Dado que $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, tenemos que **B** solo puede tener dos direcciones: $\boldsymbol{\varphi}$ y $\hat{\mathbf{z}}$. Si además tenemos que $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ y $\mathbf{J} \propto \boldsymbol{\varphi}$, tenemos que $\mathbf{B} \propto \hat{\mathbf{z}}$. Debido al propio teorema de Stokes se cumple que $B \neq B(\rho, z, \varphi)$, es decir, debe ser una constante, tanto dentro como fuera del solenoide. Debido también a que $B = 0$ en el infinito, tenemos que $\mathbf{B} = 0$ fuera del solenoide. Así pues, en el interior del solenoide tenemos un campo uniforme en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$: $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Tenemos pues que:

$$B_0 = \mu_0 n I(t) \to \mathbf{B} = \mu_0 n I(t)\hat{\mathbf{z}} \tag{4.32}$$

Ahora el campo eléctrico:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.33}$$

y como $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$, tenemos pues que $\mathbf{E} \propto \boldsymbol{\varphi}$. Por simetría azimutal y en el eje z, solo puede depender de la dirección radial r, i.e. $\mathbf{E} = E(r)\boldsymbol{\varphi}$. Así pues, el campo eléctrico depende de si estamos en el interior o exterior

$$\mathbf{E}(r) = -\frac{r}{2}\mu_0 n\dot{I}\boldsymbol{\varphi} \quad \mathbf{B} = \mu_0 n I(t)\hat{\mathbf{z}} \qquad \text{si } r < a \tag{4.34}$$

$$\mathbf{E}(r) = -\frac{a^2}{2r}\mu_0 n\dot{I}\boldsymbol{\varphi} \quad \mathbf{B} = 0 \qquad \text{si } r > a \tag{4.35}$$

Estudianmos $\mathbf{S}$ en función del punto. Veamos que:

$$\mathbf{S} = -\frac{r}{2}I(t)\dot{I}\boldsymbol{\rho} \quad \text{si } r < a \tag{4.36}$$

$$\mathbf{S} = 0 \quad \text{si } r > a \tag{4.37}$$

Por otro lado:

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\frac{r}{2}\mu_0\dot{I}\right]^2 + \frac{1}{2\mu_0}[\mu_0 I]^2 \quad \text{si } r < a \tag{4.38}$$

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\frac{r}{2}\mu_0\dot{I}\right]^2 \quad \text{si } r > a \tag{4.39}$$

De lo que se deduce que fuera $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$. Así pues, solo existe un flujo de energía $\mathbf{S}$ dentro del solenoide, que se pierde en el efecto joule y en la densidad de energía u_{em}. Veamos que

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = \frac{a}{2}\mu_0 I\dot{I} \tag{4.40}$$

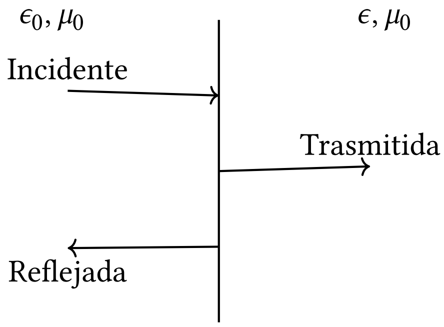
Ejercicio 4.2 – Cálculo de F en el caso de ondas incidentes en un medio dieléctrico.

Sea una onda incidente con campos $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ tal que

$$\mathbf{E}_i = E_i\hat{\mathbf{x}}e^{i(kz-wt)} \qquad \mathbf{B}_i = \frac{E_i}{c}\hat{\mathbf{y}}e^{i(kz-wt)} \tag{4.41}$$

Cálculese la fuerza y el vector de Poyting en todos los puntos.

Tenemos que considerar las condiciones de frontera para hallar los campos reflejados y trasmitidos, pues:



Los campos entonces

$$\mathbf{E}_i = E_i \hat{\mathbf{x}} e^{i(kz-wt)} \qquad \mathbf{B}_i = \frac{E_i}{c} \hat{\mathbf{y}} e^{i(kz-wt)} \tag{4.42}$$

$$\mathbf{E}_r = E_r \hat{\mathbf{x}} e^{i(-kz-wt)} \qquad \mathbf{B}_r = -\frac{E_r}{c} \hat{\mathbf{y}} e^{i(-kz-wt)} \tag{4.43}$$

$$\mathbf{E}_t = E_t \hat{\mathbf{x}} e^{i(kz-wt)} \qquad \mathbf{B}_t = \frac{E_t}{v} \hat{\mathbf{y}} e^{i(kz-wt)} \tag{4.44}$$

las condiciones de frotnera son:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \tag{4.45}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{4.46}$$

Lo que nos lleva a las siguientes ecuaciones acopladas que relacionan E_i, E_t y E_r:

$$\left\{ \begin{aligned} E_i + E_r - E_t &= 0 \\ \sqrt{\epsilon_0} E_i - \sqrt{\epsilon_0} E_r - \sqrt{\epsilon} E_t &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\sqrt{\epsilon_0} E_i = E_t[\epsilon_0 + \epsilon] \Rightarrow E_t = \frac{2\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon}} E_i \tag{4.47}$$

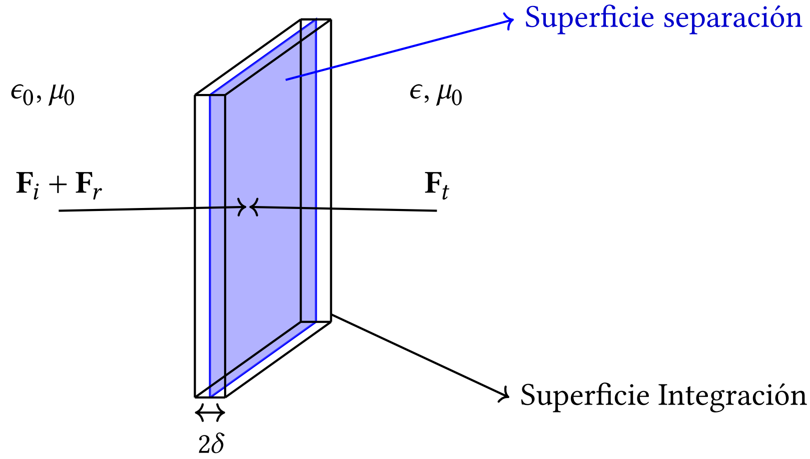
y la parte reflejada es:

$$E_r = -\frac{\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon_0}} E_i \tag{4.48}$$

Usamos $\beta = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$:

$$E_t = \frac{2}{1+\beta} E_i \qquad E_r = \frac{1-\beta}{1+\beta} E_i \tag{4.49}$$

que lógicamente podemos multiplicar y dividir por $\sqrt{\mu_0}$ y por tanto poder expresarlo en términos de la velocidad de la luz en el medio o incluso el índice de refracción. Lógicamente para calcular la fuerza que se ejerce tendremos que considerar un volumen, tal que:



Tenemos que integrar en la superficie de arriba, cuyo $2\delta \to 0$. Así pues, la fuerza la calculamos como:

$$\mathbf{F} = \oint \langle \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \rangle \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{4.50}$$

y dado que $\mathbf{E}, \mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{z}}$, tenemos que la fuerza puede describirse a través de

$$\mathbf{F} = \int \langle \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{i+r} \rangle (-\hat{\mathbf{z}}) \mathrm{d}S + \int \langle \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_t \rangle (\hat{\mathbf{z}}) \mathrm{d}S \tag{4.51}$$

donde el tensor, con un abuso de notación, es ahora mismo este escalar:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \epsilon \frac{|E|^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{|B|^2}{2} \tag{4.52}$$

Esto nos lleva básicamente a:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}} \int \left(\langle \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{i+r} \rangle - \langle \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_t \rangle \right) \mathrm{d}S \tag{4.53}$$

y dado que los tensores/campos no dependen de x, y, podemos sacarlos a fuera, y toda la fuerza dependerá de:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}} \int \left(\langle \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{i+r} \rangle - \langle \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_t \rangle \right) \mathrm{d}S \tag{4.54}$$

Si ahora desarrollamos los tensores (que ya hemos indicado que eran escalares), teniendo en cuenta que son *promedios temporales*

$$\left\langle \frac{\mathbf{F}}{S} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}} \left(\epsilon_0 \left\langle \frac{|E_{i+r}|^2}{2} \right\rangle + \frac{1}{\mu_0} \left\langle \frac{|B_{i+r}|^2}{2} \right\rangle - \epsilon \left\langle \frac{|E_t|^2}{2} \right\rangle - \frac{1}{\mu_0} \left\langle \frac{|B_t|^2}{2} \right\rangle \right) \tag{4.55}$$

En este caso hay que tener en cuenta *la diferencia de signos en las exponenciales de los campos reflejados*. Así pues ($\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$):

$$\left\langle |E_{i+r}|^2 \right\rangle = \left[1 + \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 + 2 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \cos(2kz) \right] |E_i|^2 = \left[\left(\frac{2+2\beta^2}{(1+\beta)^2} \right) + 2 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \cos(2kz) \right] |E_i|^2 \tag{4.56}$$

$$\left\langle |B_{i+r}|^2 \right\rangle = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \left[\left(\frac{2+2\beta^2}{(1+\beta)^2} \right) - 2 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \cos(2kz) \right] |E_i|^2 \tag{4.57}$$

$$\left\langle |E_t|^2 \right\rangle = \left(\frac{2}{1+\beta} \right)^2 |E_i|^2 \qquad \left\langle |B_t|^2 \right\rangle = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{2}{1+\beta} \right)^2 |E_i|^2 \tag{4.58}$$

Así pues:

$$\left\langle \frac{\mathbf{F}}{S} \right\rangle = \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{\beta^2 - 2\beta + 1}{(1+\beta)^2} \right] 2\epsilon_0 |E_i|^2 = \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2} \right] 2\epsilon_0 |E_i|^2 \tag{4.59}$$

Bibliografía

[1] Andrew Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press.