

Daniel Vázquez Lago

Física de Partículas



Índice general

Introducción

1 Ejercicios	3
Ejercicios	3
Bibliografia	42

Capítulo 1

Ejercicios

Ejercicio 1.1 – Espinores

Sean ψ_\downarrow y ξ_\uparrow dos espinores de Weyl zurdos y diestros independientes, respectivamente. Demuestre que $\xi_\uparrow^\dagger \sigma^\mu \psi_\uparrow$ y $\xi_\downarrow^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_\downarrow$ son cuatro-vectores contravariantes, donde $\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$.

Al ser $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$, la demostración se puede dividir en dos fases, en demostrar que $v^0 = \xi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow$ y que $v^i = \xi_\downarrow^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_\downarrow$ (así mismo para los espinores R) son efectivamente invariantes Lorentz. Las transformaciones de Lorentz sobre un eje (por ej. el eje x):

$$V^0 \rightarrow V'^0 = \cosh(\eta)V^0 + \sinh(\eta)V^1 \quad (1.1)$$

$$V^1 \rightarrow V'^1 = \cosh(\eta)V^1 + \sinh(\eta)V^0 \quad (1.2)$$

siendo $V'^2 = V^2$ y $V'^3 = V^3$. Con hacerlo sobre un eje basta, ya que siempre podremos encontrar un sistema de referencia donde el boost sea sobre ese eje x. Si nuestros cuatro-vecotres siguen dichas transformaciones, podemos decir que son contravariantes. Veamos uno por uno los dos casos:

- Caso $\xi_\uparrow^\dagger \sigma^\mu \psi_\uparrow$. Una transformación Lorenzt para los espinores de Weyl a derechas es:

$$\Lambda_\uparrow = \exp((-\imath \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (1.3)$$

y recordemos que

$$v^0 = \xi_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow \quad v^i = \xi_\uparrow^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_\uparrow \quad (1.4)$$

Si el boost lo hacemos en el eje x , el único valor no nulo de $\boldsymbol{\eta}$ es $\eta_1 = \eta$. Así pues:

$$\Lambda_\uparrow = \exp(\eta \sigma_1 / 2) \quad (1.5)$$

Ahora tenemos que aplicar esto a nuestro v_0 :

$$v^0 \rightarrow v'^0 = \xi'_\uparrow^\dagger \psi'_\uparrow = (\Lambda_\uparrow \xi_\uparrow^\dagger)(\Lambda_\uparrow \psi_\uparrow) = e^{(\eta \sigma_1)} \xi_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow \quad (1.6)$$

Usando que $e^{(\eta \sigma_1)} = \cosh(\eta) + \sigma^1 \eta$, tenemos que:

$$v'^0 = \cosh(\eta) \xi_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow + \sinh(\eta) \xi_\uparrow^\dagger \sigma^1 \psi_\uparrow = \cosh v^0 + \sinh \eta v^1 = \Lambda v^0 \quad (1.7)$$

q.e.d. Por otro lado, nos queda demostrar para v^i :

$$v^1 \rightarrow v'^1 = \xi'_\uparrow \sigma_1 \psi'_\uparrow = \cosh(\eta) \xi'_\uparrow \sigma^1 \psi_\uparrow + \sinh(\eta) \xi'_\uparrow \psi_\uparrow = \cosh(\eta) v^1 + \sinh(\eta) v^0 \quad (1.8)$$

donde nos hemos saltado algunos de los pasos. Dado que $\eta_2 = \eta_3 = 0$, es trivial que $v'^2 = v^2$ y $v'^3 = v^3$, de lo que se deduce que efectivamente $x i'_\uparrow \sigma^\mu \psi'_\uparrow$ transforma como un 4-vector contravariante.

- El caso para la izquierda es análogo, aunque un poco diferente. En este caso

$$\Lambda_\downarrow = \exp(-\eta \sigma_1/2) \quad \exp(-\eta \sigma_1) = \cosh(\eta) - \sinh(\eta) \eta_1 \quad (1.9)$$

lo cual hace que aparezca un signo menos, pero que debido a $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma)$, desaparece. Como hemos dicho, es repetir pasos.

pág. 267-268 del Maggiore [1].

Ejercicio 1.2 – Transformaciones de Lorentz

Usando la representación quiral, demuestre que las transformaciones de Lorentz de los espines de Dirac pueden escribirse en términos de las matrices γ como

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\Psi.$$

Esta ecuación nos dice que $S^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}/2$ proporciona una representación de dimensión compleja cuatro del álgebra de Lorentz. Compruébelo directamente usando la definición de $\sigma^{\mu\nu}$ en términos de las matrices γ y la relación $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, es decir, verifique la siguiente relación de commutación

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i \left[g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} \right].$$

Ejercicio 1.3 – Identidad de Dirac

Demuestre la relación

$$\frac{i}{q - m} = \frac{i(q + m)}{q^2 - m^2}.$$

Es evidente que si multiplicamos y dividimos por $q + m$, tenemos que:

$$\frac{i}{q - m} \frac{q + m}{q + m} \quad (1.10)$$

y dado que

$$(q - m)(q + m) = q^2 - m^2 \quad (1.11)$$

tal que

$$q^2 = q^\mu \gamma_\mu q^\nu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} q^\mu q^\nu = q \cdot q = q^2 \quad (1.12)$$

de lo que se deduce

$$\frac{i}{q - m} = \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} \quad (1.13)$$

Ejercicio 1.4 – Flujo invariante

Demuestre la siguiente identidad referente al flujo invariante de Lorentz,

$$F = 4E_a E_b (v_a + v_b) = 4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}.$$

Sea F el flujo invariante, definido de la siguiente manera:

$$F = 4E_a E_b (v_a + v_b) \quad (1.14)$$

donde v es la velocidad. Así pues tenemos que:

$$F = 4E_a E_b (v_a + v_b) = 4E_a E_b \left(\frac{p_a}{E_a} + \frac{p_b}{E_b} \right) = 4(E_b p_a + E_a p_b) \quad (1.15)$$

tal que elevando al cuadrado:

$$F^2 = 16(E_b^2 p_a^2 + E_a^2 p_b^2 + 2E_a E_b p_a p_b) = \quad (1.16)$$

Fijémonos que:

$$(p_a \cdot p_b)^2 = (E_a E_b + p_a p_b)^2 = E_a^2 E_b^2 + p_a^2 p_b^2 + 2E_a E_b p_a p_b \quad (1.17)$$

así pues

$$F^2 = 16[E_b^2 p_a^2 + E_a^2 p_b^2 + (p_a \cdot p_b)^2 - E_a^2 E_b^2 - p_a^2 p_b^2] \quad (1.18)$$

Así pues, dado que $E_a = p_a + m_a$ y $E_b = p_b + m_b$:

$$F^2 = 16[(p_a \cdot p_b)^2 + (p_a^2 + m_a^2)p_b^2 + (p_b^2 + m_b^2)p_a^2 - (p_a^2 + m_a^2)(p_a^2 + m_a^2) - p_a^2 p_b^2] \quad (1.19)$$

nos lleva, despejando, a:

$$F^2 = 16[(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2] \quad (1.20)$$

o lo que es lo mismo:

$$F = 4[(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2]^{1/2} \quad (1.21)$$

Ejercicio 1.5 – Helicidad y Hamiltoniano de Dirac

Demuestre que el operador de helicidad conmuta con el hamiltoniano de Dirac, $[\hat{h}, H_D] = 0$, donde

$$\hat{h} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2p} = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m,$$

con

$$\alpha_k = \gamma^0 \gamma^k, \quad \beta = \gamma^0.$$

Recordamos que

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

y que

$$\gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

en verdad esto no lo necesitamos, pero no está de más recordarlo. Dado que $\hat{\mathbf{p}} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ (es decir, puede ser cualquier vector). Así pues

$$\hat{h} \hat{H}_D = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Por otro lado

$$\hat{H}_D \hat{h} = \frac{1}{2p} \left(\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Y como $[\sigma_i, \sigma_j] =$

Ejercicio 1.6 – Sección eficaz diferencial $e^- \mu^-$

Usando amplitudes de helicidad, calcule la sección eficaz diferencial para el proceso

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-,$$

en el límite relativista ($m_e \approx 0, m_\mu \approx 0$), en el sistema del centro de masas.

Nos piden la sección eficaz diferencial del scattering elástico $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Para ello tenemos que usar la ecuación:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (1.26)$$

donde \mathcal{M} podemos hallarlo a través del siguiente diagrama de Feynmann a primer orden Nuestro elemento de matriz

$$i\mathcal{M} = e^2 \underbrace{(\bar{u}^{s'}(p') Q_e \gamma^\mu u^s(p))}_{j_e^\mu} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \underbrace{(\bar{u}^{r'}(k') Q_\mu e \gamma^\nu u^r(k))}_{j_\mu^\nu} \quad (1.27)$$

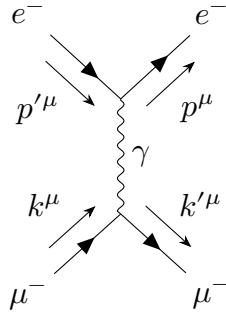


Figura 1.1: Diagrama de Feynman para $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$.

tal que

$$i\mathcal{M} = \frac{e^2}{t} (\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{j}_\mu) \quad (1.28)$$

con $Q = -1$ en ambos casos y $q^2 = t$ el invariante de Mandelstam ($t = |p'^\mu - p^\mu|^2$). Dado que no nos especifican los espines de entrada, podemos considerar que el elemento de matriz total es el no polarizado:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{ss',r,r'} |\mathcal{M}_{s,r}|^2 \quad (1.29)$$

O alternativamente con *las amplitudes de helicidad*:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4} (|\mathcal{M}_{RR}|^2 + |\mathcal{M}_{RL}|^2 + |\mathcal{M}_{LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LL}|^2) \quad (1.30)$$

Solo tenemos que considerar los siguientes spinores (al no haber antipartículas no consideramos v y \bar{v}) con la siguiente forma (ultrarrelativista, masas despreciables)

$$u_\uparrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix} \quad u_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

con $c = \cos(\theta/2)$ y $s = \sin(\theta/2)$, siendo este θ el ángulo de salida de las partículas. Los momentos de nuestras partículas (caso de masa despreciable $m_e \approx m_\mu \approx 0$)

$$p^\mu = (E, 0, 0, E) \quad p'^\mu = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta) \quad (1.32)$$

$$k^\mu = (E, 0, 0, -E) \quad k'^\mu = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta) \quad (1.33)$$

Los autoestados de quiralidad aquí escritos:

$$u_\uparrow(p, \theta = 0) \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p, \theta = 0) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

$$u_\uparrow(p', \theta) \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p', \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

$$u_{\uparrow}(k, \theta = \pi) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(k, \theta = \pi) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

$$u_{\uparrow}(k', \pi + \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ -s \\ c \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(k', \pi + \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

donde hemos aplicado que para los muones $\theta_2 = \pi + \theta_1$, recordando que $s = \sin \theta/2$ y $c = \cos \theta/2$, lo que nos lleva a $c \rightarrow -sy$ $s \rightarrow c$ en el caso de los muones (espinores con k y k'). Usando las relaciones [2, 3].

$$\bar{\psi} \gamma^0 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \phi = \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2 + \psi_3^* \phi_3 + \psi_4^* \phi_4, \quad (1.38)$$

$$\bar{\psi} \gamma^1 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^1 \phi = \psi_1^* \phi_4 + \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 + \psi_4^* \phi_1, \quad (1.39)$$

$$\bar{\psi} \gamma^2 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^2 \phi = -i(\psi_1^* \phi_4 - \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 - \psi_4^* \phi_1), \quad (1.40)$$

$$\bar{\psi} \gamma^3 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \phi = \psi_1^* \phi_3 - \psi_2^* \phi_4 + \psi_3^* \phi_1 - \psi_4^* \phi_2. \quad (1.41)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_0 u_{\uparrow}(p) &= 2Ec \\ \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_1 u_{\uparrow}(p) &= 2Es \\ \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_2 u_{\uparrow}(p) &= -i2Es \\ \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_3 u_{\uparrow}(p) &= 2Ec \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_0 u_{\uparrow}(p) &= 0 \\ \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_1 u_{\uparrow}(p) &= 0 \\ \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_2 u_{\uparrow}(p) &= 0 \\ \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_3 u_{\uparrow}(p) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_0 u_{\downarrow}(p) &= 0 \\ \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_1 u_{\downarrow}(p) &= 0 \\ \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_2 u_{\downarrow}(p) &= 0 \\ \bar{u}_{\uparrow}(p') \gamma_3 u_{\downarrow}(p) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_0 u_{\downarrow}(p) &= 2Ec \\ \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_1 u_{\downarrow}(p) &= 2Es \\ \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_2 u_{\downarrow}(p) &= -i2Es \\ \bar{u}_{\downarrow}(p') \gamma_3 u_{\downarrow}(p) &= 2Ec \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_0 u_{\uparrow}(k) &= 2Ec \\ \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_1 u_{\uparrow}(k) &= -2Es \\ \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_2 u_{\uparrow}(k) &= i2Es \\ \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_3 u_{\uparrow}(k) &= -2Ec \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_0 u_{\uparrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_1 u_{\uparrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_2 u_{\uparrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_3 u_{\uparrow}(k) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_0 u_{\downarrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_1 u_{\downarrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_2 u_{\downarrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\uparrow}(k') \gamma_3 u_{\downarrow}(k) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_0 u_{\downarrow}(k) &= 2Ec \\ \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_1 u_{\downarrow}(k) &= -2Es \\ \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_2 u_{\downarrow}(k) &= -i2Es \\ \bar{u}_{\downarrow}(k') \gamma_3 u_{\downarrow}(k) &= -2Ec \end{aligned}$$

Es decir, *cada vértice debe conservar la helicidad* (que básicamente implica conservar espín). Ahora

tenemos que calcular cada término. Lo que está claro que es que, si en un vértice no se conserva helicidad la amplitud de probabilidad es nula. Así pues:

$$|\mathcal{M}_{\text{LL}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{LL} \rightarrow \text{LL}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2c^2 + 4E^2c^2 + 4E^2s^2 + 4E^2s^2| = \frac{e^4}{t^2} 64E^4 = \frac{e^4}{t^2} 4s^2 \quad (1.42)$$

$$|\mathcal{M}_{\text{RR}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{RR} \rightarrow \text{RR}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2c^2 + 4E^2c^2| = \frac{e^4}{t^2} 64c^4 E^4 = 16E^4(1 + \cos \theta)^2 = \frac{e^4}{t^2} 4u^2 \quad (1.43)$$

$$|\mathcal{M}_{\text{RL}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{RL} \rightarrow \text{RL}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2c^2 + 4E^2c^2 + 4E^2s^2 + 4E^2s^2| = \frac{e^4}{t^2} 64E^4 = \frac{e^4}{t^2} 4s^2 \quad (1.44)$$

$$|\mathcal{M}_{\text{LR}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{LR} \rightarrow \text{LR}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2c^2 + 4E^2c^2| = \frac{e^4}{t^2} 64c^4 E^4 = 16E^4(1 + \cos \theta)^2 = \frac{e^4}{t^2} 4u^2 \quad (1.45)$$

donde hemos usado que $s = (p+k)^2 = 4E^2$ y $u = (p-k')^2 = -2(p \cdot k') = -2E(1 + \cos \theta)$. Luego el elemento de matriz total cuando $m_e \approx m_\mu \approx 0$ es:

$$|\mathcal{M}_{ij}| = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2) \quad (1.46)$$

que es lo que queríamos demostrar. De hecho, podemos hacer el cálculo con trazas para comprobar si da lo mismo. Así pues, tenemos que:

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = e^4 \left[(\bar{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(k') \gamma_\mu u^r(k)) \right] \left[(\bar{u}^{s'}(p') \gamma^\nu u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(k') \gamma_\nu u^r(k)) \right]^* \quad (1.47)$$

Tal que usando el truco de Casimir (Williams [4])

$$\sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma u_2^{s_2}(p_2)] [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma' u_2^{s_2}(p_2)]^* = \text{tr} \left[\Gamma(\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma}'(\not{p}_1 + m_1) \right].$$

tenemos que

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} \text{tr} (\gamma^\mu(\not{p} + m_e) \gamma^\nu(\not{p}' + m_e)) \text{tr} (\gamma^\mu(\not{k} + m_\mu) \gamma^\nu(\not{k}' + m_\mu)) \quad (1.48)$$

tal que:

- La primera traza:

$$\text{tr} (\gamma^\mu(\not{p} + m_e) \gamma^\nu(\not{p}' + m_e)) = \text{tr}(\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}') + 4g^{\mu\nu} m_e^2 \quad (1.49)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr}(\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}') = 4g^{\mu\sigma} p_\sigma g^{\nu\rho} p'_\rho + 4g^{\mu\rho} p'_\rho g^{\nu\sigma} p_\sigma - 4p_{\mu\nu}(p \cdot p') \quad (1.50)$$

$$= 4p^\mu p'^\nu + 4p^\nu p'^\mu - 4g^{\mu\nu}(p \cdot p') \quad (1.51)$$

- La segunda traza:

$$\text{tr} (\gamma_\mu(\not{k} + m_\mu) \gamma_\nu(\not{k}' + m_\mu)) = \text{tr}(\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k}') + 4g_{\mu\nu} m_\mu^2 \quad (1.52)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr}(\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k}') = 4g_{\mu\sigma} k^\sigma g_{\nu\rho} k'^\rho + 4g_{\mu\rho} k'^\rho g_{\nu\sigma} k^\sigma - 4g_{\mu\nu}(k \cdot k') \quad (1.53)$$

$$= 4k_\mu k'_\nu + 4k_\nu k'_\mu - 4g_{\mu\nu}(k \cdot k') \quad (1.54)$$

Directamente multiplicando:

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = 32(p \cdot k)(p' \cdot k') + 32(p \cdot k')(p' \cdot k) - 32(p \cdot p')m_\mu^2 - 32(k \cdot k')m_e^2 + 64m_e^2m_\mu^2 \quad (1.55)$$

Ahora solo tenemos que agrupar y dividir entre $1/4t$.

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8}{t}((p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) - (p \cdot p')m_\mu^2 - (k \cdot k')m_e^2 + 2m_e^2m_\mu^2) \quad (1.56)$$

Usando los invariantes de Mandelstam:

$$s = (p+k)^2 = (p'+k')^2 \quad t = (p-p')^2 = (k-k')^2 \quad u = (p-k')^2 = (p'-k)^2 \quad (1.57)$$

tal que:

$$s = m_e^2 + m_\mu^2 + 2(p \cdot k) = m_e^2 + m_\mu^2 + 2(p' \cdot k') \quad (1.58)$$

$$t = 2m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p \cdot p') = 2m_\mu^2 - 2(k \cdot k') \quad (1.59)$$

$$u = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p \cdot k') = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p' \cdot k) \quad (1.60)$$

Con la relación:

$$s + t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) \quad (1.61)$$

Ahora:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}((s - m_\mu^2 - m_e^2)^2 + (u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + 2t(m_e^2 + m_\mu^2)) \quad (1.62)$$

$$= \frac{2e^4}{t^2}(s^2 + u^2 - 2(s + u)(m_\mu^2 + m_e^2) + 2t(m_e^2 + m_\mu^2) + 2(m_\mu^2 + m_e^2)^2) \quad (1.63)$$

que aplicando $s + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) - t$ tenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}(s^2 + u^2 + 4t(m_\mu^2 + m_e^4) - 2(m_\mu^2 + m_e^2)^2) \quad (1.64)$$

que efectivamente si $m_e \approx m_\mu \approx 0$ tenemos

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}(s^2 + u^2) \quad (1.65)$$

que es lo mismo que obtuvimos antes [4]. Lo que implica que, la sección eficaz diferencial es, en este caso:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{e^4(s^2 + u^2)}{t^2} \quad (1.66)$$

que si queremos expresar con E y $\cos\theta$ explícitamente, tenemos que $t = -2(p_1 \cdot p_3) = -2E(1 - \cos\theta)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16}{64\pi^2 s} \frac{e^4 E^2 (+\frac{1}{4}(1 + \cos\theta))}{4E^2(1 - \cos\theta)^2} \quad (1.67)$$

y la expresión final, usando la constante de estructura fina $2\alpha^2 = 2(e^4/16\pi^2)$ tenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\alpha^2}{s} \frac{+\frac{1}{4}(1 + \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)^2} \quad (1.68)$$

que coincide con la del Thomson [3].

Ejercicio 1.7 – Elemento de matriz en QED con trazas

Use el formalismo de trazas para calcular el elemento de matriz al cuadrado, promediado en espines, de la electrodinámica cuántica (QED) para

$$e^+ e^- \rightarrow f \bar{f},$$

sin despreciar ninguna de las masas de las partículas.

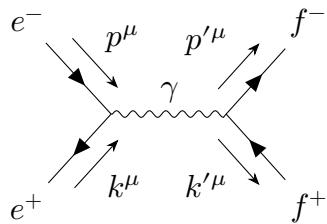


Figura 1.2: Diagrama de Feynman para $e^+ e^- \rightarrow f^+ f^-$.

Nuestro elemento de matriz con $Q = -1$ en ambos casos y $q^2 = s$ el invariante de Mandelstam ($s = |k^\mu + p^\mu|^2$). Dado que no nos especifican los espines de entrada, podemos considerar que el elemento de matriz total es el no polarizado:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} |\mathcal{M}_{s,r}| \quad (1.69)$$

Así pues, tenemos que:

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = e^4 \left[(\bar{v}^{s'}(k) \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(p') \gamma_\mu v^r(k')) \right] \left[(\bar{v}^{s'}(k) \gamma^\nu u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(p') \gamma_\nu v^r(k')) \right]^* \quad (1.70)$$

Tal que usando el truco de Casimir (Williams [4])

$$\sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma u_2^{s_2}(p_2)] [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma' u_2^{s_2}(p_2)]^* = \text{tr} \left[\Gamma(\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma}'(\not{p}_1 + m_1) \right].$$

tenemos que

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{k} - m_e)) \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p}' + m_\mu) \gamma^\nu (\not{k}' - m_\mu)) \quad (1.71)$$

tal que:

- La primera traza:

$$\text{tr} (\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{k} - m_e)) = \text{tr} (\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{k}) - 4g^{\mu\nu} m_e^2 \quad (1.72)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr} (\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{k}) = 4g^{\mu\sigma} p_\sigma g^{\nu\rho} k_\rho + 4g^{\mu\rho} k_\rho g^{\nu\sigma} p_\sigma - 4p_{\mu\nu} (p \cdot k) \quad (1.73)$$

$$= 4p^\mu p'^\nu + 4p^\nu k^\mu - 4g^{\mu\nu} (p \cdot k) \quad (1.74)$$

- La segunda traza:

$$\text{tr}(\gamma_\mu(p' + m_f)\gamma_\nu(k' - m_f)) = \text{tr}(\gamma_\mu p' \gamma_\nu k') - 4g_{\mu\nu}m_f^2 \quad (1.75)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr}(\gamma_\mu p' \gamma_\nu k') = 4g_{\mu\sigma}p'^\sigma g_{\nu\rho}k'^\rho + 4g_{\mu\rho}k'^\rho g_{\nu\sigma}p'^\sigma - 4g_{\mu\nu}(p' \cdot k') \quad (1.76)$$

$$= 4p'_\mu k'_\nu + 4p'_\nu k'_\mu - 4g_{\mu\nu}(p' \cdot k') \quad (1.77)$$

Directamente multiplicando:

$$\frac{s^2}{e^4} |\mathcal{M}_{s,r}|^2 = 32(p \cdot p')(k \cdot k') + 32(p \cdot k')(k \cdot p') + 32(p \cdot k)m_f^2 + 32(p' \cdot k')m_e^2 + 64m_e^2m_f^2 \quad (1.78)$$

Ahora solo tenemos que agrupar y dividir entre $1/4t$.

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} ((p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) - (p \cdot p')m_f^2 - (k \cdot k')m_e^2 + 2m_e^2m_f^2) \quad (1.79)$$

Usando los invariantes de Mandelstam:

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2 \quad t = (p - p')^2 = (k - k')^2 \quad u = (p - k')^2 = (p' - k)^2 \quad (1.80)$$

tal que:

$$s = m_e^2 + m_f^2 + 2(p \cdot k) = m_e^2 + m_f^2 + 2(p' \cdot k') \quad (1.81)$$

$$t = 2m_e^2 + m_f^2 - 2(p \cdot p') = 2m_f^2 - 2(k \cdot k') \quad (1.82)$$

$$u = m_e^2 + m_f^2 - 2(p \cdot k') = m_e^2 + m_f^2 - 2(p' \cdot k) \quad (1.83)$$

Con la relación:

$$s + t + u = 2(m_e^2 + m_f^2) \quad (1.84)$$

Ahora:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} ((t - m_f^2 - m_e^2)^2 + (u - m_e^2 - m_f^2)^2 + 2s(m_e^2 + m_f^2)) \quad (1.85)$$

$$= \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2 - 2(-s + 2(m_e^2 + m_f^2))(m_f^2 + m_e^2) + 2s(m_e^2 + m_f^2) + 2(m_f^2 + m_e^2)^2) \quad (1.86)$$

que aplicando $t + u = 2(m_e^2 + m_f^2) - s$ tenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2 + 4s(m_f^2 + m_e^4) - 2(m_f^2 + m_e^2)^2) \quad (1.87)$$

que es el resultado final [4], y que como podemos ver es igual a la dispersión $e^- f^- \rightarrow e^- f^-$ pero haciendo el cambio $s \leftrightarrow t$.

Ejercicio 1.8 – Dispersión $e^- p$ y transferencia de momento

En un experimento de dispersión $e^- p$, la energía del electrón incidente es $E_1 = 529.5$ MeV y los electrones dispersados se detectan a un ángulo $\theta = 75^\circ$ con respecto al haz incidente. A este ángulo, casi todos los electrones dispersados se miden con una energía de $E_3 \approx 373$ MeV.

¿Qué se puede concluir a partir de esta observación? Encuentre el valor correspondiente de

$$Q^2 = -q^2.$$

Lo primero que tenemos que hacer es deducir la expresión de la energía del protón. Veamos que por cuadrimomentos:

$$p_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}_1) \quad p_2^\mu = (E_2, \mathbf{p}_2) \quad p_3^\mu = (E_3, \mathbf{p}_3) \quad p_4^\mu = (E_4, \mathbf{p}_4) \quad (1.88)$$

tal que las leyes de conservación en este caso exigen:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \quad (1.89)$$

En particular, dado que tenemos un electrón con 529.5 MeV (ultrarrelativista), si elegimos la dirección de los electrones e^- y un sistema donde el protón está en reposo (el enunciado no nos habla de como es el experimento de dispersión, por lo que son asunciones válidas):

$$p_1^\mu = (E_1, 0, 0, E_1) \quad p_2^\mu = (m_p, 0, 0, 0) \quad (1.90)$$

$$p_3^\mu = (E_3, E_3 \sin \theta, 0, E_3 \cos \theta) \quad p_4^\mu = (E_4, -p_4 \sin \phi, 0, p_4 \cos \phi) \quad (1.91)$$

donde hemos asumido que el electrón saliente sigue siendo relativista (cede poca energía), lo cual es cierto. Las leyes de conservación nos llevan a un sistema de ecuaciones triples:

$$E_4 = E_1 + m_p - E_3 \quad (1.92)$$

$$p_4 \cos \phi = E_1 - E_3 \cos \theta \quad (1.93)$$

$$p_4 \sin \phi = E_3 \sin \theta \quad (1.94)$$

Estas dos últimas podemos elevarlas al cuadrado y sumarlas obteniendo:

$$p_4^2 = E_3^2 + E_1^2 - 2E_1 E_3 \cos \theta \quad (1.95)$$

que usando $p_4 P2 = E_4^2 - m_p^2$ y la conservación de la energía:

$$(E_1 + m_p - E_3)^2 - m_p^2 = E_3^2 + E_1^2 - 2E_1 E_3 \cos \theta \quad (1.96)$$

de lo que se deduce:

$$2m_p(E_1 - E_3) + E_1^2 + E_3^2 - 2E_1 E_3 = E_3^2 + E_1^2 - 2E_1 E_3 \cos \theta \quad (1.97)$$

que nos lleva a:

$$E_3(2m_p + 2E_1(1 - \cos \theta)) = 2m_p E_1 \quad (1.98)$$

tal que:

$$E_3 = \frac{m_p E_1}{m_p + E_1(1 - \cos \theta)} \quad (1.99)$$

que justamente relaciona las tres variables que nos dan: energía de los electrones salientes, los electrones incidentes y el ángulo. ¿Qué pasaría si con los datos los valores no coincidieran? Que estaríamos hablando de un proceso donde por ejemplo aparecería una partícula, u otra partícula se llevaría la energía. Lo que está claro es que no sería una simple dispersión $e^- p$.

Sin embargo para la energía dada de $E_1 = 529.5$ y $\theta = 75^\circ$ los valores coinciden, por lo que podemos inferir que efectivamente estamos bajo un régimen de dispersión usual.

Lo siguiente que tenemos que hacer es hallar $-q^2$ siendo $-q^2 = (p_1 - p_3)^2$ (el momento del fotón virtual), tal que:

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = 2m_e^2 - 2p_1 \cdot p_3 = 2m_e^2 - 2E_1 E_3 (1 - \cos \theta) \approx 2E_1 E_3 (1 - \cos \theta) \quad (1.100)$$

así pues tenemos $Q^2 = -q^2$ tal que

$$Q^2 = 541.3 \text{ MeV} \quad (1.101)$$

Ejercicio 1.9 – Tasa de decaimiento del pión en interacción escalar

Calcule la tasa de decaimiento del pión para una interacción puramente escalar y muestre que la razón predicha de tasas de decaimiento es

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} \approx 5.5.$$

Sugerencia: suponga que la interacción está mediada por una partícula escalar masiva X , de modo que la cantidad escalar asociada al vértice $\ell - \nu_\ell$ con constante de acople g_X sería

$$j_\ell = g_X \bar{u}v.$$

Puede trabajar también en el régimen $q^2 = m_\pi^2 \ll m_X^2$ y tomar el propagador como $1/m_X^2$ (interacción tipo Fermi puntual).

Tenemos que la tasa de decaimiento viene dada por la expresión:

$$\Gamma = \frac{p^*}{8\pi m_a^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (1.102)$$

siendo p^* el momento en el centro de masas de las partículas salientes ($p^* = |\mathbf{p}| = |\mathbf{k}|$), con los siguientes momentos:

$$p_\pi^\mu = (m_\pi, 0, 0, 0) \quad p^\mu = (E_1, 0, 0, p_1) \quad k^\mu = (E_2, 0, 0, -p_1) \quad (1.103)$$

Así pues, solo tenemos que calcular el elemento de matriz \mathcal{M}_{fi} , que se calcula a través del siguiente diagrama:

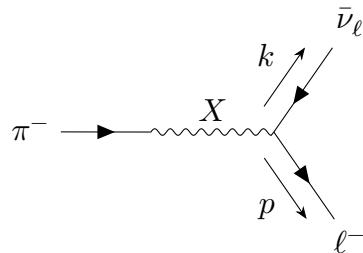


Figura 1.3: Diagrama de Feynman para $\pi^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$.

Al hacer un acople puramente escalar tenemos que:

$$\mathcal{M}_{fi} = f_\pi p_\pi \frac{g_X}{M_X^2} \bar{u}(p)v(k) \quad (1.104)$$

Luego, la única dificultad para calcular $|\mathcal{M}_{ij}|^2$ es hacer:

$$\sum_{\text{espines}} (\bar{u}(p)v(k))(\bar{u}(p)v(k))^\dagger = \text{tr}((\not{p} + m_l)(\not{k} - m_\nu)) = 4p^\mu k_\mu - 4m_l m_\nu \quad (1.105)$$

que es, según los cálculos anteriores, y suponiendo que $m_\nu \rightarrow 0$:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \left[f_\pi m_\pi \frac{g_X}{M_X^2} 2(p \cdot k) \right]^2 \quad (1.106)$$

tal que

$$p_\pi^\mu = p^\mu + k^\mu \rightarrow m_\pi^2 = m_l^2 + 2(p \cdot k) \rightarrow (p \cdot k) = \frac{1}{2}(m_\pi^2 - m_l^2) \quad (1.107)$$

y por tanto:

$$\Gamma = \frac{p^*}{8\pi m_\pi^2} \left[f_\pi m_\pi \frac{g_X}{M_X^2} (m_\pi^2 - m_l^2) \right]^2 \quad (1.108)$$

tal que:

$$\Gamma = \frac{f_\pi^2 g_X^2}{8\pi m_X^2} (m_\pi^2 - m_l^2)^2 \quad (1.109)$$

De lo que se deduce que

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 5.5 \quad (1.110)$$

Ejercicio 1.10 – Vértices gauge en la parte cinética del lagrangiano electrodébil

Muestre explícitamente que la parte cinética del lagrangiano electrodébil contiene dos vértices triple-gauge

$$\gamma W^+ W^-, \quad Z W^+ W^-,$$

y cuatro vértices cuárticos gauge

$$W^+ W^- W^+ W^-, \quad W^+ W^- Z Z, \quad W^+ W^- \gamma \gamma, \quad W^+ W^- Z \gamma.$$

La manera mas rápida de resolver el ejercicio sería aplicar la siguiente ecuación [3],

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = +\frac{1}{2} g_W \epsilon_{ijk} (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) W_{j\mu} W_{k\nu} - \frac{1}{4} g_W^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} W_j^\mu W_k^\nu W_{m\mu} W_{n\nu}. \quad (1.111)$$

con las permutaciones necesarias, de una en una. Aquí decidimos hacerlo por partes, probablemente una decisión equivocada. En cualquier caso ya está resuelto. Veamos que la parte cinética del lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{\mu\nu i} W_{\mu\nu}^i \quad (1.112)$$

Queremos llegar a obtener las relaciones entre W_μ , $W_{\mu\dagger}$, Z_μ y A_μ . Tenemos que usar la que relaciona los elementos 1 y 2 de W^i con los bosones W y W^\dagger :

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \quad (1.113)$$

$$W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu + W_\mu^\dagger) \quad W_\mu^2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(W_\mu - W_\mu^\dagger) \quad (1.114)$$

y la que relaciona B^μ y W^3 con Z y A :

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.115)$$

$$W_\mu^3 = \cos \theta_W W_\mu + \sin \theta_W W_\mu^\dagger \quad B_\mu^\mu = -\sin \theta_W W_\mu + \cos \theta_W W_\mu^\dagger \quad (1.116)$$

Lo siguiente que tenemos que hacer es aplicar lo siguiente a nuestro \mathcal{L}_{kin} :

$$\widetilde{W}_{\mu\nu} \equiv \frac{\sigma^i}{2} W_{\mu\nu}^i, \quad W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_W \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (1.117)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.118)$$

Una vez tenemos esto, solo es sustituir. Lo que está claro es que el término $B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ no va a contribuir a nuestra triple o cuádruple interacción, ya que es evidente que solo contendrá términos de γ y Z . Por otro lado, solo nos interesan los términos que incluyan al menos un $g_W \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$, ya que otros términos no contendrán términos triples y cuádruples. Cuando este esté relacionado con otro $g_W \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$ tendremos los vértices cuádruples, y cuando esté relacionado con $\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i$ los vértices triples. Así:

$$W^{\mu\nu i} W_{\mu\nu}^i = W^{\mu\nu 1} W_{\mu\nu}^1 + W^{\mu\nu 2} W_{\mu\nu}^2 + W^{\mu\nu 3} W_{\mu\nu}^3 \quad (1.119)$$

Veamos término a término:

■ **El primer término:**

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu 1} W_{\mu\nu}^1 = & [(\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1}) - g_W \epsilon^{1ij} W^{\mu i} W^{\nu j}] \times \\ & [(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1) - g_W \epsilon^{1kl} W_\mu^j W_\nu^k] \end{aligned} \quad (1.120)$$

Es evidente que el producto entre los dos primeros términos de cada corchete no generan un vértice triple o cuádruple, ya que W^1 solo va con los bosones W y W^\dagger . Los vértices triples $\mathcal{O}(3)$ se producirán cuando los primeros términos interaccionan con el término que va con la levi-civita. Cuando interactúan los dos términos de la levi-civita se producen los términos que representan los vértices cuárticos $\mathcal{O}(4)$. Así pues, tenemos que, los términos que representan vértices triples son (digamos que $\mathcal{O}(n)$ significa “términos que contienen vértices con n partículas”):

$$\mathcal{O}(3) = -g_W [(\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(\epsilon^{1kl} W_\mu^k W_\nu^l) + (\epsilon^{1ij} W^{\mu i} W^{\nu j})(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)] \quad (1.121)$$

Fijemonos en particular en la primera parte:

$$(\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(\epsilon^{1kl} W_\mu^k W_\nu^l) = (\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(W_\mu^2 W_\nu^3) - (\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(W_\mu^3 W_\nu^2) \quad (1.122)$$

Trivialmente, si intercambiamos los nombres $\mu \leftrightarrow \nu$ en el segundo término nos podemos dar cuenta que es igual al primero (hay dos signos $-$, uno procedente de la Levi-Civita y otra del intercambio de las posiciones de las parciales que se cancelan), por lo que:

$$(\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(\epsilon^{1kl} W_\mu^k W_\nu^l) = 2(\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(W_\mu^2 W_\nu^3) \quad (1.123)$$

donde hemos obviado los términos que no generan vértices dobles (contenidos en $\mathcal{O}(2)$, y que contiene los términos que multiplica $W - W$ y $W^\dagger - W^\dagger$). Luego esto nos lleva a:

$$\begin{aligned} (\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(W_\mu^2 W_\nu^3) &= \frac{i}{2}(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)(W_\mu^\dagger W_\nu^3) \\ &\quad - \frac{i}{2}(\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})(W_\mu W_\nu^3) \\ &\quad + \mathcal{O}(2) \end{aligned} \quad (1.124)$$

Donde aparece un signo menos y el número imaginario procedente de la definición de W^2 (1.114). El divisor 2 procede de la multiplicación de las raíces cuadradas. Finalmente nos quedaría expandir W_ν^3 , de lo que podemos obtener:

$$\begin{aligned} (\partial^\mu W^{\nu 1} - \partial^\nu W^{\mu 1})(W_\mu^2 W_\nu^3) &= \frac{i \cos \theta_W}{2} [(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)(W_\mu^\dagger) \\ &\quad - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})(W_\mu)] Z_\nu \\ &\quad + \frac{i \sin \theta_W}{2} [(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)(W_\mu^\dagger) \\ &\quad - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})(W_\mu)] A_\nu \\ &\quad + \mathcal{O}(2) \end{aligned} \quad (1.125)$$

Sin embargo aun tenemos que fijarnos en la segunda parte del $\mathcal{O}(3)$ (1.137). Aunque no parezca trivial, realmente el problema es simétrico respecto lo que acabamos de decir. Así pues, tenemos que el resultado final será dos veces el anterior (1.125), por lo que, para el primer término, los vértices triples serán:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(3) &= -i 2g_W \cos \theta_W [(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)(W_\mu^\dagger) - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})(W_\mu)] Z_\nu \\ &\quad - i 2g_W \sin \theta_W [(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)(W_\mu^\dagger) - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})(W_\mu)] A_\nu \end{aligned}$$

Ahora queda el término cuártico producido, que es, tal y como dijimos antes, el término producto de multiplicar los dos levi-civita. Así pues:

$$\mathcal{O}(4) = g_W^2 (\epsilon^{1ij} W^{\mu i} W^{\nu j}) (\epsilon^{1kl} W_\mu^k W_\nu^l) \quad (1.126)$$

que usando la propiedad

$$\epsilon_{1ij} \epsilon^{1kl} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k \quad (1.127)$$

nos lleva a:

$$\mathcal{O}(4) = g_W^2 [W^{\mu 2} W^{\nu 3} (W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2) + W^{\mu 3} W^{\nu 2} (W_\mu^3 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^3)] \quad (1.128)$$

si en el segundo término hacemos el cambio trivial de $\mu \leftrightarrow \nu$, podemos ver que tenemos el primer término, tal que:

$$\mathcal{O}(4) = 2g_W^2 [W^{\mu 2} W^{\nu 3} (W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2)] \quad (1.129)$$

Denemos que desarrollar tres términos para obtener esto en función de W, W^\dagger, Z y A :

- El primer término:

$$W^{\mu 2} W_\mu^2 = \frac{-1}{2} (W^{\mu\dagger} - W^\mu) (W_\mu^\dagger - W_\mu) \Rightarrow \quad (1.130)$$

$$W^{\mu 2} W_\mu^2 = \frac{-1}{2} [W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger + W^\mu W_\mu - 2(W^{\mu\dagger} W_\mu)] \quad (1.131)$$

- El segundo término:

$$W^{\mu 2} W_\mu^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^{\mu\dagger} - W^\mu) (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) \Rightarrow \quad (1.132)$$

$$W^{\mu 2} W_\mu^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(W^{\mu\dagger} - W^\mu) \cos \theta_W Z_\mu + (W^{\mu\dagger} - W^\mu) \sin \theta_W A_\mu] \quad (1.133)$$

- El tercer término:

$$W^{\mu 3} W_\mu^3 = (\cos \theta_W Z^\mu + \sin \theta_W A^\mu) (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) \quad (1.134)$$

$$W^{\mu 3} W_\mu^3 = \cos^2 \theta_W Z^\mu Z_\mu + 2(\cos \theta_W \sin \theta_W) Z^\mu A_\mu + \sin^2 \theta_W A^\mu A_\mu \quad (1.135)$$

Una vez tenemos esto queda claro que:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(4)/2g_W^2 &= -\cos^2 \theta_W \{ [W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger + W^\mu W_\mu - 2(W^{\mu\dagger} W_\mu)] Z^\mu Z_\mu \} \\ &\quad - \sin^2 \theta_W \{ [W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger + W^\mu W_\mu - 2(W^{\mu\dagger} W_\mu)] A^\mu A_\mu \} \\ &\quad - 2 \sin \theta_W \cos \theta_W \{ [W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger + W^\mu W_\mu - 2(W^{\mu\dagger} W_\mu)] Z^\mu A_\mu \} \end{aligned} \quad (1.136)$$

- Aún queda evaluar el **segundo término**, que será:

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu 2} W_{\mu\nu}^2 &= [(\partial^\mu W^{\nu 2} - \partial^\nu W^{\mu 2}) - g_W \epsilon^{2ij} W^{\mu i} W^{\nu j}] \times \\ &\quad [(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2) - g_W \epsilon^{2kl} W_\mu^j W_\nu^k] \end{aligned} \quad (1.137)$$

Trivialmente, los términos de vértices *triples* generados serán exactamente igual a los anteriores, ya que estos contienen igual que antes un producto de W^\dagger y W , por lo que da igual que en los términos de tensor de campo esté W^2 y que con la levi-civita este W^1 , el resultado será el mismo:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(3) &= -i2g_W \cos \theta_W [(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)(W_\mu^\dagger) - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})(W_\mu)] Z_\nu \\ &\quad - i2g_W \sin \theta_W [(\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu)(W_\mu^\dagger) - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger})(W_\mu)] A_\nu \end{aligned}$$

No igual será el término que representa los vértices cuárticos, ya que es diferente $W^{\mu 2} W_\mu^2$ a $W^{\mu 1} W_\mu^1$. Así pues, veamos que:

- El término

$$W^{\mu 1} W_{\mu}^1 = \frac{1}{2} (W^{\mu\dagger} + W^{\mu}) (W_{\mu}^{\dagger} + W_{\mu}) \Rightarrow \quad (1.138)$$

$$W^{\mu 1} W_{\mu}^1 = \frac{1}{2} [W^{\mu\dagger} W_{\mu}^{\dagger} + W^{\mu} W_{\mu} + 2(W^{\mu\dagger} W_{\mu})] \quad (1.139)$$

- El otro término:

$$W^{\mu 1} W_{\mu}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^{\mu\dagger} + W^{\mu}) (\cos \theta_W Z_{\mu} + \sin \theta_W A_{\mu}) \Rightarrow \quad (1.140)$$

$$W^{\mu 1} W_{\mu}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(W^{\mu\dagger} + W^{\mu}) \cos \theta_W Z_{\mu} + (W^{\mu\dagger} + W^{\mu}) \sin \theta_W A_{\mu}] \quad (1.141)$$

Lo que claramente nos lleva al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(4)/2g_W^2 &= \cos^2 \theta_W \{ [W^{\mu\dagger} W_{\mu}^{\dagger} + W^{\mu} W_{\mu} + 2(W^{\mu\dagger} W_{\mu})] Z^{\mu} Z_{\mu} \} \\ &+ \sin^2 \theta_W \{ [W^{\mu\dagger} W_{\mu}^{\dagger} + W^{\mu} W_{\mu} + 2(W^{\mu\dagger} W_{\mu})] A^{\mu} A_{\mu} \} \\ &+ 2 \sin \theta_W \cos \theta_W \{ [W^{\mu\dagger} W_{\mu}^{\dagger} + W^{\mu} W_{\mu} + 2(W^{\mu\dagger} W_{\mu})] Z^{\mu} A_{\mu} \} \end{aligned} \quad (1.142)$$

- Lo último que tenemos que calcular es el **tercer término**, con un vértice triple representado por tensor de campo con Z^{μ} y A^{μ} y términos cuárticos $WWWW$. Como antes:

$$\mathcal{O}(3) = -g_W [(\partial^{\mu} W^{\nu 3} - \partial^{\nu} W^{\mu 3})(\epsilon^{3kl} W_{\mu}^k W_{\nu}^l) + (\epsilon^{3ij} W^{\mu i} W^{\nu j})(\partial_{\mu} W_{\nu}^3 - \partial_{\nu} W_{\mu}^3)] \quad (1.143)$$

Dado que el proceso para obtener los resultados finales es igual al del primer término, nos tomamos algunas licencias y vamos directamente a ver que:

$$\mathcal{O}(3) = -i4g_W \{ \cos \theta_W [(\partial^{\mu} Z^{\nu} - \partial^{\nu} Z^{\mu}) W_{\mu} W_{\nu}^{\dagger}] + \sin \theta_W [(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) W_{\mu} W_{\nu}^{\dagger}] \} \quad (1.144)$$

donde ha hemos descartado todos los términos de orden 2. Aparece un término 2 debido a que ahora debemos tener en cuenta el producto $W^1 W^2$ y no $W^1 W^3$ o $W^2 W^3$. El término cuártico

$$\mathcal{O}(4) = g_W^2 [W^{\mu 1} W^{\nu 2} (W_{\mu}^1 W_{\nu}^2 - W_{\mu}^2 W_{\nu}^1) + W^{\mu 2} W^{\nu 1} (W_{\mu}^2 W_{\nu}^1 - W_{\mu}^1 W_{\nu}^2)] \Rightarrow \quad (1.145)$$

$$\mathcal{O}(4)/2g_W^2 = ((W^{\mu 1} W_{\mu}^1)(W^{\nu 2} W_{\nu}^2) - (W^{\mu 1} W_{\mu}^2)(W^{\nu 1} W_{\nu}^2)) \quad (1.146)$$

ahora contiene el producto de los términos $W^{\mu 1} W_{\mu 1}$, $W^{\mu 2} W_{\mu}^2$ y $W^{\mu 1} W_{\mu}^2$. Evaluamos este último:

- El término

$$W^{\mu 1} W_{\mu}^2 = \frac{i}{2} (W^{\mu\dagger} + W^{\mu}) (W_{\mu}^{\dagger} - W_{\mu}) \Rightarrow \quad (1.147)$$

$$W^{\mu 1} W_{\mu}^2 = \frac{i}{2} [W^{\mu\dagger} W_{\mu}^{\dagger} + W^{\mu} W_{\mu} - 2(W^{\mu\dagger} W_{\mu})] \quad (1.148)$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(4)/2g_W^2 &= \frac{-1}{4} [W^{\mu\dagger}W_\mu^\dagger + W^\mu W_\mu - 2(W^{\mu\dagger}W_\mu)] [W^{\mu\dagger}W_\mu^\dagger + W^\mu W_\mu + 2(W^{\mu\dagger}W_\mu)] \\ &\quad + \frac{1}{4} [W^{\mu\dagger}W_\mu^\dagger + W^\mu W_\mu - 2(W^{\mu\dagger}W_\mu)]^2\end{aligned}\tag{1.149}$$

Finalmente

$$\mathcal{O}(4)/2g_W^2 = ((W^\mu W_\mu)(W^{\nu\dagger}W_\nu^\dagger) - (W^{\mu\dagger}W_\mu)(W^\nu W_\nu^\dagger))\tag{1.150}$$

Una vez tenemos estos resultados, podemos llegar a los resultados de los apuntes. Cabe destacar dos cosas. La primera es que hay términos de $\mathcal{O}(3)$ que se anulan entre los generados por el primer término y el segundo, los cuales ya restamos. Lo segundo que hay que destacar es que hemos sustituido ya estas relaciones:

$$g_W = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad \cot \theta_W = \frac{\cos \theta_W}{\sin \theta_W}\tag{1.151}$$

Además recordemos que los valores de \mathcal{L} tienen un término $1/4$ delante del término $W^{\mu\nu i}W_{\mu\nu}^i$. Ahora sí:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 &= ie \cot \theta_W \left\{ (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) W_\mu^\dagger Z_\nu - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger}) W_\mu Z_\nu + W_\mu W_\nu^\dagger (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) \right\} \\ &\quad + ie \left\{ (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) W_\mu^\dagger A_\nu - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger}) W_\mu A_\nu + W_\mu W_\nu^\dagger (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &= -\frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left\{ (W_\mu^\dagger W^\mu)^2 - W_\mu^\dagger W^{\mu\dagger} W_\nu W^\nu \right\} \\ &\quad - e^2 \cot^2 \theta_W \left\{ W_\mu^\dagger W^\mu Z_\nu Z^\nu - W_\mu^\dagger Z_\mu W_\nu Z^\nu \right\} \\ &\quad - e^2 \cot \theta_W \left\{ 2W_\mu^\dagger W^\mu Z_\nu A^\nu - W_\mu^\dagger Z_\mu W_\nu A^\nu - W_\mu^\dagger A_\mu W_\nu Z^\nu \right\} \\ &\quad - e^2 \left\{ W_\mu^\dagger W^\mu A_\nu A^\nu - W_\mu^\dagger A_\mu W_\nu A^\nu \right\}.\end{aligned}$$

Ejercicio 1.11 – Expansión del potencial alrededor del vacío

Dados

$$\mathcal{U} = \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad \mu^2 = -\lambda v^2, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi),$$

verifique la ecuación (2.108), a saber:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\eta, \xi) &= -\frac{1}{2} \lambda v^2 [(v + \eta)^2 + \xi^2] + \frac{1}{4} \lambda [(v + \eta)^2 + \xi^2]^2 \\ &= -\frac{1}{4} \lambda v^4 + \lambda v^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \frac{1}{4} \lambda \xi^4 + \lambda v \eta \xi^2 + \frac{1}{2} \lambda \eta^2 \xi^2 = \lambda v^2 \eta^2 + \mathcal{U}_{\text{int}} - \frac{1}{4} \lambda v^4.\end{aligned}$$

Este es aplicar directamente la ecuaciónon. El *primer término* es

$$-\mu^2\phi^2 = \lambda v^2\phi^2 \quad (1.152)$$

Veamos que sustituyendo tenemos:

$$-\mu^2\phi^2 = \frac{\lambda v^2}{2}[(v + \eta)^2 + \xi^2] = \frac{\lambda v^2}{2}[v^2 + 2v\eta + \eta^2 + \xi^2] \quad (1.153)$$

mientras que el *segundo término* es

$$-\lambda\phi^4 \quad (1.154)$$

Veamos que sustituyendo tenemos:

$$-\lambda\phi^4 = -\frac{\lambda}{4}[(v + \eta)^2 + \xi^2]^2 = -\frac{\lambda}{4}[v^4 + 8v^2\eta^2 + \eta^4 + \xi^4 + 2v^2\xi^2 + 4v\eta\xi^2 + 2\eta^2\xi^2] \quad (1.155)$$

Sumando el segundo y tercer término llegamos a:

$$-\mathcal{U} = -\mu^2\phi^2 - \lambda\phi^4 = \lambda\left[\frac{v^4}{4} + v^3\eta - v^2\eta^2 - \frac{1}{4}\eta^4 - \frac{1}{4}\xi^4 - v\eta\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2\right] \quad (1.156)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{4}\lambda v^4 + \lambda v^2\eta^2 + \lambda v\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda\xi^4 + \lambda v\eta\xi^2 + \frac{1}{2}\lambda\eta^2\xi^2 \quad (1.157)$$

tal y como queríamos demostrar, tal que

$$\mathcal{U}_{\text{int}} = +\lambda v\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda\xi^4 + \lambda v\eta\xi^2 + \frac{1}{2}\lambda\eta^2\xi^2 \quad (1.158)$$

Ejercicio 1.12 – Invariancia gauge de un escalar complejo

Verifique que el lagrangiano

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \mathcal{U}(\phi^2),$$

donde ϕ es un campo escalar complejo, es invariante bajo transformaciones de norma (gauge) del tipo

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ig\alpha(x)}\phi,$$

siempre que el campo gauge se transforme como

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu\alpha(x),$$

con el derivado covariante $D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu$.

Si aplicamos la transformación gauge a nuestro complejo es:

$$\mathcal{L}' = (D'_\mu\phi')^*(D'^\mu\phi') - \mathcal{U}(\phi^2) \quad (1.159)$$

Tenemos que:

$$D'_\mu \phi' = (\partial_\mu + igB'_\mu) e^{ig\alpha(x)} \phi = (\partial_\mu - ig\partial_\mu(\alpha(x)) + igB_\mu) e^{ig\alpha(x)} \phi \quad (1.160)$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\partial_\mu e^{ig\alpha(x)} \phi = e^{ig\alpha(x)} (\partial_\mu \phi + ig\partial_\mu(\alpha(x))) \quad (1.161)$$

Sustituyendo esto en (1.160) tenemos que:

$$D'_\mu \phi' = e^{ig\alpha(x)} (\partial_\mu + ig\partial_\mu(\alpha(x)) - ig\partial_\mu(\alpha(x)) + igB_\mu) \phi = e^{ig\alpha(x)} D_\mu \phi \quad (1.162)$$

y dado que

$$(D'_\mu \phi')^* = (e^{ig\alpha(x)} D_\mu \phi)^* = e^{-ig\alpha(x)} (D_\mu \phi)^* \quad (1.163)$$

si lo sustituimos en (1.159):

$$\mathcal{L}' = e^{-ig\alpha(x)} e^{ig\alpha(x)} (D_\mu \phi)^* (D_\mu \phi) + \mathcal{U}(\phi^2) = \mathcal{L} \quad (1.164)$$

y por tanto es \mathcal{L} es *invariante bajo transformaciones gauge*.

Ejercicio 1.13 – Lagrangiano con campo escalar complejo

Considere el siguiente lagrangiano para un campo escalar complejo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 - ig B_\mu \phi^* (\partial^\mu \phi) + ig (\partial_\mu \phi^*) B^\mu \phi + g^2 B_\mu B^\mu \phi^* \phi,$$

donde B_μ es un campo gauge y

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu.$$

Haga la sustitución

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x) + i\xi(x)),$$

y verifique que se obtiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 v^2 B_\mu B^\mu - \mathcal{U}_{\text{int}} + gv B_\mu (\partial^\mu \xi),$$

junto con la expresión explícita para \mathcal{U}_{int} .

Basta con sustituir en el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 - ig B_\mu \phi^* (\partial^\mu \phi) + ig (\partial_\mu \phi^*) B^\mu \phi + g^2 B_\mu B^\mu \phi^* \phi,$$

el término

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x) + i\xi(x)),$$

Iremos término por término.

- El *primer término* es

$$(\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) \quad (1.165)$$

Veamos que sustituyendo tenemos:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu(v + \eta(x) + i\xi(x)))^*(\partial^\mu(v + \eta(x) + i\xi(x))) = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)] \quad (1.166)$$

- El *segundo término* es

$$-\mu^2 \phi^2 = \lambda v^2 \phi^2 \quad (1.167)$$

Veamos que sustituyendo tenemos:

$$-\mu^2 \phi^2 = \frac{\lambda v^2}{2}[(v + \eta)^2 + \xi^2] = \frac{\lambda v^2}{2}[v^2 + 2v\eta + \eta^2 + \xi^2] \quad (1.168)$$

mientras que el *tercer término* es

$$-\lambda \phi^4 \quad (1.169)$$

Veamos que sustituyendo tenemos:

$$-\lambda \phi^4 = -\frac{\lambda}{4}[(v + \eta)^2 + \xi^2]^2 = -\frac{\lambda}{4}[v^4 + 8v^2\eta^2 + \eta^4 + \xi^4 + 2v^2\xi^2 + 4v\eta\xi^2 + 2\eta^2\xi^2] \quad (1.170)$$

Sumando el segundo y tercer término llegamos a:

$$-\mu^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 = \lambda \left[\frac{v^4}{2} + v^3\eta - v^2\eta^2 - \eta^4 - \xi^4 - v\eta\xi^2 + 2\eta^2\xi^2 \right] \quad (1.171)$$

Usando que

$$\mathcal{U}_{\text{int}}^1 = \lambda v\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda\xi^4 + \lambda v\eta\xi^2 + \frac{1}{2}\lambda\eta^2\xi^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4 \quad (1.172)$$

que es diferente al del ejercicio 11. Usando esto, tenemos que el segundo y tercer término juntos:

$$-\mu^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 = -\lambda v^2 \eta^2 - \mathcal{U}_{\text{int}} \quad (1.173)$$

aún faltan términos por añadir a esta \mathcal{U}_{int} , por eso lo denotamos por con un índice superior.

- El *cuarto término* viene dado por:

$$-igB_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = -\frac{ig}{2} B_\mu(v + \eta(x) - i\xi(x)) \partial^\mu(\eta(x) + i\xi(x)) \quad (1.174)$$

y el *quinto término* por

$$igB^\mu \phi \partial_\mu \phi^* = \frac{ig}{2} B^\mu(v + \eta(x) + i\xi(x)) \partial_\mu(\eta(x) - i\xi(x)) \quad (1.175)$$

que al sumarse:

$$-igB_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + igB^\mu \phi \partial_\mu \phi^* = -igB^\mu \eta \partial_\mu \xi + igB^\mu \xi \partial_\mu \eta + igB^\mu v \partial_\mu \eta \quad (1.176)$$

tal que el término de interacción \mathcal{U}_{int} generado por estos dos términos:

$$\mathcal{U}_{\text{int}}^2 = -igB^\mu \eta \partial_\mu \xi + igB^\mu \xi \partial_\mu \eta \quad (1.177)$$

denotando el superíndice 2 que es un \mathcal{U}_{int} no es este término, si no la suma de otros.

■ El *sexto término*

$$g^2 B_\mu B^\mu \phi^* \phi = \frac{1}{2} g^2 v^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 v \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 \xi^2 B_\mu B^\mu \quad (1.178)$$

nos lleva a un término de interacción

$$\mathcal{U}_{\text{int}}^3 = \frac{1}{2} g^2 \eta^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 v \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 \xi^2 B_\mu B^\mu \quad (1.179)$$

Finalmente, la suma nos lleva a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 v^2 B_\mu B^\mu - \mathcal{U}_{\text{int}} + g v B_\mu (\partial^\mu \xi), \quad (1.180)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\text{int}} &= \mathcal{U}^1 + \mathcal{U}^2 + \mathcal{U}^3 = \\ &= \lambda v \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \frac{1}{4} \lambda \xi^4 + \lambda v \eta \xi^2 + \frac{1}{2} \lambda \eta^2 \xi^2 + \frac{1}{4} \lambda v^4 + -ig B^\mu \eta \partial_\mu \xi + ig B^\mu \xi \partial_\mu \eta \\ &\quad + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 v \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 \xi^2 B_\mu B^\mu \end{aligned} \quad (1.181)$$

conteniendo todos los vértices triples y cuárticos.

Ejercicio 1.14 – Término del lagrangiano del Modelo Estándar con derivadas covariantes

Verifique que el término del lagrangiano del Modelo Estándar que contiene las derivadas covariantes del campo de Higgs puede escribirse como:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu h) (\partial^\mu h) + \frac{1}{8} g_W^2 (W_\mu^{(1)} + i W_\mu^{(2)}) (W^{(1)\mu} - i W^{(2)\mu}) (v + h)^2 \\ &\quad + \frac{1}{8} (g_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu) (g_W W^{(3)\mu} - g' B^\mu) (v + h)^2. \end{aligned}$$

Dado que

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad (1.182)$$

y

$$D_\mu = \frac{1}{2} [2 \partial_\mu + i(g_W \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W}_\mu + g' B_\mu)] \quad (1.183)$$

Tal que, las matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

nos llevan a:

$$D_\mu \phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ig_W (W_\mu^1 - i W_\mu^2) (v + h) \\ 2 \partial_\mu h(x) - i(-g_W W_\mu^3 + g' B_\mu) (v + h) \end{pmatrix} \quad (1.184)$$

tal queda

$$(D_\mu \phi)^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(i \frac{g_W}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2)(v+h) - 2\partial_\mu h(x) + i(-g_W W_\mu^3 + g' B_\mu)(v+h) \right) \quad (1.185)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi &= \frac{1}{8} \left[4(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + (g_W W^{3\mu} - g' B^\mu)(g_W W_{3\mu} - g' B_\mu)(v+h)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_W}{2} (W^{\mu 1} - iW^{\mu 2})(W_\mu^1 + iW_\mu^2)(v+h)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.186)$$

Ejercicio 1.15 – Transformación del doblete de Higgs bajo $SU(2)$

Demuestre que el campo ϕ_c transforma bajo $SU(2)$ de la misma forma que ϕ (el doblete de Higgs), donde

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \phi_c = -i\sigma_2 \phi^* = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 - i\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi^{0*} \\ \phi^{+*} \end{pmatrix}.$$

Veamos que $SU(2)$ implica la transformación

$$\phi \rightarrow \phi' = U\phi \quad (1.187)$$

siendo $U = e^{\frac{i}{2}\mathbf{W}\sigma}$. Así pues tenemos queda

$$\phi'_c = -i\sigma_2 \phi'^* = -i\sigma_2 (U\phi)^* = -i\sigma_2 U^* \phi^* \quad (1.188)$$

Basta ver que

$$U^* = e^{-i\mathbf{W}\sigma^*} \approx 1 - i\sigma^*\mathbf{W} \rightarrow \sigma_2 U^* \sigma_2 \approx \sigma_2 (1 - i\sigma^*\mathbf{W}) \sigma_2 = 1 - i\sigma_2 \sigma^* \sigma_2 \mathbf{W} \quad (1.189)$$

lo que demostremos para una rotación infinitesimal se verifica para la rotación completa $SU(2)$. Para evaluar los términos $\sigma_2 \sigma^* \sigma_2$ vemos que:

$$\sigma_2 \sigma_1^* \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = -(\sigma_2 \sigma_2) \sigma_1 = -\sigma_1 \quad (1.190)$$

$$\sigma_2 \sigma_2^* \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_2 \sigma_2 = -(\sigma_2 \sigma_2) \sigma_2 = -\sigma_2 \quad (1.191)$$

$$\sigma_2 \sigma_3^* \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 = -(\sigma_2 \sigma_2) \sigma_3 = -\sigma_3 \quad (1.192)$$

y por tanto:

$$1 - i\sigma_2 \sigma^* \sigma_2 \mathbf{W} = 1 + \sigma \mathbf{W} \quad (1.193)$$

De lo que se deduce que:

$$\sigma_2 (1 - i\sigma \mathbf{W}) \sigma_2 = 1 + \sigma \mathbf{W} \implies \sigma^2 U^* \sigma^2 = U \quad (1.194)$$

y por tanto

$$\phi'_c = -i\sigma_2 U^* \phi^* = -i\sigma_2 U^*(\sigma_2 \sigma_2) \phi^* = -iU\sigma_2 \phi^* = U(-i\sigma_2 \phi^*) = U\phi_c \quad (1.195)$$

demonstrando que transforma igual que ϕ bajo SU(2).

Ejercicio 1.16 – Estados físicos del fotón y del bosón Z

A partir de la matriz de masas de los campos $W^{(3)}$ y B , demuestre que los autoestados en la base diagonal son

$$A_\mu = \frac{g' W_\mu^{(3)} + g_W B_\mu}{\sqrt{g_W^2 + g'^2}}, \quad Z_\mu = \frac{g_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu}{\sqrt{g_W^2 + g'^2}},$$

donde A_μ y Z_μ son los campos físicos correspondientes al fotón y al bosón Z .

Tenemos que la matriz de masas de los campos $W^{(3)}$ y B es:

$$M = \begin{pmatrix} g_W^2 & -g_W g' \\ -g_W g' & g'^2 \end{pmatrix} \quad (1.196)$$

Primero calculamos los autovalores:

$$\det \begin{pmatrix} g_W^2 - \lambda & -g_W g' \\ -g_W g' & g'^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - (g_W^2 + g'^2)\lambda = 0 \quad (1.197)$$

Así pues:

$$\lambda_1 = (g_W^2 + g'^2) \quad \lambda_2 = 0 \quad (1.198)$$

Una vez tenemos la matriz de autovalores, sacar los autoestados es trivial:

- El *primer autoestado*:

$$M Z_\mu = (g_W^2 + g'^2)v \rightarrow \begin{pmatrix} g_W^2 - & -g_W g' \\ -g_W g' & g'^2 - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (g_W^2 + g'^2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (1.199)$$

de donde se deducen las ecuaciones:

$$v_1(g_W^2 - (g_W^2 + g'^2)) = g_W g' v_2 \quad v_2(g'^2 - (g_W^2 + g'^2)) = g_W g' v_1 \quad (1.200)$$

tal que:

$$v_2 = -\frac{g'}{g_W} v_1 \quad (1.201)$$

y por tanto:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -g'/g_W \end{pmatrix} v \rightarrow \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g_W^2}} \begin{pmatrix} g_W \\ -g' \end{pmatrix} \quad (1.202)$$

donde \hat{v} es el autovector normalizado.

- El segundo autoestado:

$$MZ_\mu = (g_W^2 + g'^2)u \rightarrow \begin{pmatrix} g_W^2 & -g_W g' \\ -g_W g' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.203)$$

de donde se deducen las ecuaciones:

$$u_1(g_W^2) = g_W g' u_2 \quad u_2(g'^2) = g_W g' u_1 \quad (1.204)$$

tal que:

$$u_2 = \frac{g_W}{g'} u_1 \quad (1.205)$$

y por tanto:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ g_W/g \end{pmatrix} u \rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g_W^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g_W \end{pmatrix} \quad (1.206)$$

donde \hat{u} es el autovector normalizado.

Con los autovectores calculados queda claro entonces que la matriz S de cambio de base es:

$$S = \frac{1}{\sqrt{g_W^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g_W & g' \\ -g' & g_W \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W_\mu^{(3)} \\ B_\mu \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (1.207)$$

de lo que se deduce que efectivamente:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} W_\mu^{(3)} \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (1.208)$$

nos lleva a

$$Z_\mu = \frac{G_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu}{\sqrt{g_W^2 + g'^2}} \quad A_\mu = \frac{g_W W_\mu^{(3)} + g' B_\mu}{\sqrt{g_W^2 + g'^2}} \quad (1.209)$$

que es lo que queríamos demostrar, correspondiendo a Z_μ asociado con la masa $m_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g_W^2 + g'^2}$ y con $m_A = 0$.

Ejercicio 1.17 – Decaimiento del W^-

Calcule los elementos de matriz para el decaimiento

$$W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$$

considerando las tres posibles polarizaciones iniciales del bosón W^- . Puede trabajar en el límite ultrarrelativista y despreciar las masas de las partículas finales.

Veamos que el diagrama de Feynman de menor orden es:

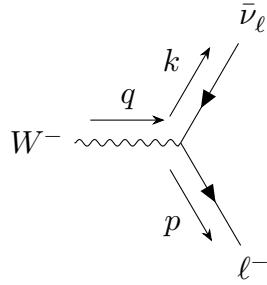


Figura 1.4: Diagrama de Feynman para $W^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$.

Y ahora tenemos que:

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \epsilon_\mu (\bar{u}(p)(\gamma^\mu(1 - \gamma^5))v(k)) \quad (1.210)$$

Como ya se ha dicho, debemos calcularlo para las tres posibles polarizaciones iniciales de W^- , que son:

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad \epsilon_L^\mu = \frac{1}{m_W}(p_Z, 0, 0, E) \quad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (1.211)$$

representando ϵ_{\pm} el estado donde el espín esta en un estado de polarización circular y ϵ_L el estado donde está longitudinal.

$$q^\mu = (m_W, 0, 0, 0) \quad p^\mu = (E_l, p \sin \theta E, 0, p \cos \theta) \quad k^\mu = (E_\nu, -p \sin \theta E, 0, -p \cos \theta) \quad (1.212)$$

Es obvio que debido al factor $(1 - \gamma^5)$ que elige los estados de helicidad -1 para partículas y estados de helicidad +1 para antipartículas actuará sobre nuestros. Sin embargo si las partículas tienen masa (o si la masa es comparable a la energía) helicidad \neq quiralidad. Dado que estamos en el límite ultrarrelativista, podemos suponer que efectivamente $E_l = p$ y $E_\nu = -p$, y que el anterior elemento de matriz se puede reescribir como:

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \epsilon_\mu (\bar{u}_\uparrow(p)\gamma^\mu v_\downarrow(k)), \quad j_l^\mu = (\bar{u}_\uparrow(p)\gamma^\mu v_\downarrow(k)) \quad (1.213)$$

Los autoestados de quiralidad aquí escritos:

$$u_\downarrow(p, \theta_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad v_\uparrow(k, \theta_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -c \\ -s \\ c \end{pmatrix} \quad (1.214)$$

y como $\theta_2 = \pi + \theta_1$ y $s = \sin \theta/2$ y $c = \cos \theta/2$, tenemos que ($\theta_1 \equiv \theta$)

$$u_\downarrow(p, \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad v_\uparrow(k, \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} \quad (1.215)$$

donde hemos usado también las reglas trigonométricas $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta$ y $\sin(\pi/2 + \theta) = \cos \theta$. Usando las relaciones [2, 3]

$$\bar{\psi} \gamma^0 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \phi = \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2 + \psi_3^* \phi_3 + \psi_4^* \phi_4, \quad (1.216)$$

$$\bar{\psi} \gamma^1 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^1 \phi = \psi_1^* \phi_4 + \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 + \psi_4^* \phi_1, \quad (1.217)$$

$$\bar{\psi} \gamma^2 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^2 \phi = -i(\psi_1^* \phi_4 - \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 - \psi_4^* \phi_1), \quad (1.218)$$

$$\bar{\psi} \gamma^3 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \phi = \psi_1^* \phi_3 - \psi_2^* \phi_4 + \psi_3^* \phi_1 - \psi_4^* \phi_2. \quad (1.219)$$

podemos llegar a:

$$\begin{aligned}\bar{u}_\downarrow(p) \gamma_0 v_\uparrow(k) &= 0 \\ \bar{u}_\downarrow(p) \gamma_1 v_\uparrow(k) &= 2s^2 - 2c^2 = -2E \cos(\theta) \\ \bar{u}_\downarrow(p) \gamma_2 v_\uparrow(k) &= -i(-c^2 + s^2 + c^2 + s^2) = -i2E \\ \bar{u}_\downarrow(p) \gamma_3 v_\uparrow(k) &= 4cs = 2E \sin(\theta)\end{aligned}$$

tal que

$$j_l^\mu = 2E(0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (1.220)$$

y recordando que (hacemos que $q = 0$ y $E_W = m_W$)

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad \epsilon_L^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (1.221)$$

que es exactamente lo que se quería demostrar [2, 3]. Ahora, veamos el producto de la corriente leptónica con el estado de polarización:

$$\mathcal{M}_- = \epsilon_{-\mu} j_l^\mu = \frac{g_W E}{2}(1 + \cos(\theta)) \quad (1.222)$$

$$\mathcal{M}_+ = \epsilon_{+\mu} j_l^\mu = \frac{g_W E}{2}(1 - \cos(\theta)) \quad (1.223)$$

$$\mathcal{M}_L = -\epsilon_{L\mu} j_l^\mu = \frac{g_W E}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad (1.224)$$

y dado que:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{3}(|\mathcal{M}_-|^2 + |\mathcal{M}_+|^2 + |\mathcal{M}_L|^2) \quad (1.225)$$

tenemos que:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{3}(g_W M_W)^2 \quad (1.226)$$

Ejercicio 1.18 – Elemento de matriz y razón de decaimiento del Z

Calcule en detalle el elemento de matriz asociado al diagrama de Feynman de orden más bajo para el proceso

$$Z \rightarrow f\bar{f},$$

y determine la correspondiente tasa de decaimiento parcial, expresando el resultado en términos de los acoplos vectorial y axial del bosón Z . Tomando $\sin^2 \theta_W = 0.2315$, demuestre que

$$R_\mu = \frac{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(Z \rightarrow \text{hadrons})} \approx \frac{1}{20}.$$

Puede suponer que se trabaja en el límite ultrarrelativista, donde las masas de los fermiones son despreciables y los autoestados quirales se aproximan a autoestados de helicidad. También puede utilizar técnicas de trazas y realizar el cálculo completo.

Veamos que el diagrama de Feynman de menor orden es:

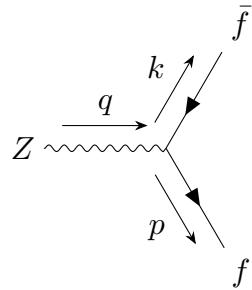


Figura 1.5: Diagrama de Feynman para $Z \rightarrow f^- \bar{f}$.

Este ejercicio sería trivial habiendo hecho el anterior (ejercicio 1.17), de no ser porque el acoplamiento del Z no es puramente a izquierdas, si no que tiene una componente a derechas. Así pues:

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \epsilon_\mu (\bar{u}(p) c_L (\gamma^\mu (1 + \gamma^5)) v(k) + \bar{u}(p) c_R (\gamma^\mu (1 - \gamma^5)) v(k)) \quad (1.227)$$

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \epsilon_\mu (c_L \bar{u}_\uparrow(p) \gamma^\mu v_\downarrow(k) + c_L \bar{u}_\downarrow(p) \gamma^\mu v_\uparrow(k)) = \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} \epsilon_\mu (c_L j_L^\mu + c_R j_R^\mu) \quad (1.228)$$

Con los mismos estados de helicidad que el bosón W en el ejercicio anterior.

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0) \quad \epsilon_L^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) \quad (1.229)$$

Los autoestados de quiralidad aquí escritos:

$$u_\uparrow(p, \theta_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p, \theta_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad (1.230)$$

$$v_{\uparrow}(k, \theta_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -c \\ -s \\ c \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(k, \theta_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad (1.231)$$

y como $\theta_2 = \pi + \theta_1$ y $s = \sin \theta/2$ y $c = \cos \theta/2$, tenemos que ($\theta_1 \equiv \theta$)

$$u_{\uparrow}(p, \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(p, \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad (1.232)$$

$$v_{\uparrow}(k, \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(k, \theta) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ -s \\ c \end{pmatrix} \quad (1.233)$$

donde hemos usado también las reglas trigonométricas $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta$ y $\sin(\pi/2 + \theta) = \cos \theta$. Usando las relaciones [2, 3]

$$\bar{\psi}\gamma^0\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4, \quad (1.234)$$

$$\bar{\psi}\gamma^1\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1, \quad (1.235)$$

$$\bar{\psi}\gamma^2\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1), \quad (1.236)$$

$$\bar{\psi}\gamma^3\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 - \psi_4^*\phi_2. \quad (1.237)$$

podemos llegar a:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\downarrow}(p)\gamma_0v_{\uparrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\downarrow}(p)\gamma_1v_{\uparrow}(k) &= 2s^2 - 2c^2 = -2E\cos(\theta) \\ \bar{u}_{\downarrow}(p)\gamma_2v_{\uparrow}(k) &= -i(-c^2 + s^2 + c^2 + s^2) = -i2E \\ \bar{u}_{\downarrow}(p)\gamma_3v_{\uparrow}(k) &= 4cs = 2E\sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\uparrow}(p)\gamma_0v_{\downarrow}(k) &= 0 \\ \bar{u}_{\uparrow}(p)\gamma_1v_{\downarrow}(k) &= 2c^2 - 2s^2 = 2E\cos(\theta) \\ \bar{u}_{\uparrow}(p)\gamma_2v_{\downarrow}(k) &= -i2E \\ \bar{u}_{\uparrow}(p)\gamma_3v_{\downarrow}(k) &= -4cs = -2E\sin(\theta) \end{aligned}$$

que junto con

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad \epsilon_L^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (1.238)$$

nos permite obtener:

$$\mathcal{M}_- = \epsilon_{-\mu} j_l^\mu = \frac{g_W E}{2} ((c_L + c_R) + (c_L - c_A) \cos(\theta)) \quad (1.239)$$

$$\mathcal{M}_+ = \epsilon_{+\mu} j_l^\mu = \frac{g_W E}{2} ((c_L + c_R) - (c_L - c_A) \cos(\theta)) \quad (1.240)$$

$$\mathcal{M}_L = -\epsilon_{L\mu} j_l^\mu = \frac{g_W E}{\sqrt{2}} (c_L - c_R) \sin \theta \quad (1.241)$$

y usando que

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{3} (|\mathcal{M}_-|^2 + |\mathcal{M}_+|^2 + |\mathcal{M}_L|^2) \quad (1.242)$$

tenemos que, usando $c_V = c_L + c_R$ y $c_A = c_L - c_R$:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{3} (g_W M_Z)^2 (c_A^2 + c_V^2) \quad (1.243)$$

Como podemos ver tiene un valor diferente en función de la partícula ya que:

f	c_V	c_A
e^-, μ^-, τ^-	-0.037	-0.5
u, c, t	0.192	0.5
d, s, b	-0.346	-0.5

Tabla 1.1: Valores numéricos de los acoplos vectoriales y axiales para $\sin^2 \theta_W = 0.2315$.

donde hemos sustituido $\sin^2 \theta_W = 0.2315$ en las respectivas tablas [2, 3]. Así pues:

$$\mu : c_V^2 + c_A^2 = 0.2516, \quad d : c_V^2 + c_A^2 = 0.3725 \quad \text{and} \quad u : c_V^2 + c_A^2 = 0.2861,$$

de lo que se deduce (el cociente de los Γ solo depende de $c_V^2 + c_A^2$ ya que en la producción de los quarks o leptones estamos en el régimen ultrarrelativista):

$$R = \frac{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(Z \rightarrow \text{hadrons})} = \frac{0.2516}{9 \times 0.3725 + 6 \times 0.2861} \approx 0.0497 \approx \frac{1}{20} \quad (1.244)$$

teniendo 3 quarks del tipo d (d,s,b) y 2 del tipo u (u,c, el quark top es demasiado pesado $m_t > m_Z$ como para generarse por una desintegración). El factor 3 extra viene de los 3 posibles estados de color que pueden producirse.

Ejercicio 1.19 – Número de sabores de neutrinos ligeros

Tras corregir los efectos de QED (incluyendo la radiación del estado inicial), las secciones eficaces medidas en la resonancia del Z para los procesos $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ y $e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}$ son:

$$\sigma^0(e^+ e^- \rightarrow Z \rightarrow \mu^+ \mu^-) = 1.9993 \text{ nb}, \quad \sigma^0(e^+ e^- \rightarrow Z \rightarrow \text{hadrons}) = 41.476 \text{ nb}.$$

Asumiendo la universalidad leptónica, determine $\Gamma_{\ell\ell}$ y Γ_{hadrons} . Usando el valor medido de $\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023$ GeV y el valor teórico de $\Gamma_{\nu\nu}$ dado por

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{g_Z^2 m_Z (c_V^2 + c_A^2)}{48\pi},$$

obtenga una estimación del número de sabores de neutrinos ligeros.

Asumiendo que Solo tenemos que usar que

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	0.5	0.5
e^-, μ^-, τ^-	−0.037	−0.5
u, c, t	0.192	0.5
d, s, b	−0.346	−0.5

Tabla 1.2: Valores numéricos de los acoplos vectoriales y axiales para $\sin^2 \theta_W = 0.2315$.

$$m_Z = 91.19 \text{GeV} \quad g_Z = 0.745 \quad (1.245)$$

de lo que se deduce que

$$\frac{g_Z m_Z}{48\pi} \approx 0.336 \text{GeV} \quad (1.246)$$

$$\Gamma_{\ell\ell} = 3(0.336 \times (0.5^2 + 0.037^2)) \approx 0.253 \text{GeV} \quad (1.247)$$

$$\Gamma_{\text{hadrones}} = 9(0.336 \times (0.5^2 + 0.346^2)) + 6(0.336 \times (0.5^2 + 0.192^2)) \approx 1.128 + 0.578 = 1.706 \text{GeV} \quad (1.248)$$

Ahora solo tenemos que calcular el número de neutrinos. Primero:

$$\Gamma_{\nu\nu} = (0.336 \times (0.5^2 + 0.5^2)) \approx 0.168 \quad (1.249)$$

Tla que entonces:

$$n\Gamma_{\nu\nu} = \Gamma_Z - \Gamma_{\ell\ell} - \Gamma_{\text{hadrones}} \quad (1.250)$$

tal que:

$$n = \frac{2.4952 - 1.706 - 0.253}{0.168} \approx 3.2 \quad (1.251)$$

es decir, tendríamos *tres sabores de neutrinos* (es el entero más proximo).

Ejercicio 1.20 – Asimetría izquierda-derecha en el SLC

El colisionador lineal e^+e^- de Stanford (SLC), operando a $\sqrt{s} = m_Z$, utilizó haces longitudinalmente polarizados (izquierda y derecha). Esto permitió medir la sección eficaz $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow f\bar{f}$ de forma separada para electrones de helicidad izquierda y derecha. Suponiendo que el haz de electrones está 100 % polarizado y que el haz de positrones no lo está, demuestre que la asimetría izquierda-derecha está dada por:

$$A_{LR} = \frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R} = \frac{(c_L^e)^2 - (c_R^e)^2}{(c_L^e)^2 + (c_R^e)^2} = A_e.$$

El diagrama de Feynamann que mas nos interesa en este caso es el siguiente pudiendo despreciar el elemento de QED debido a que $\sqrt{s} = m_Z$ (estamos en una resonancia). El elemento de matriz del diagrama de Feynman es [3]

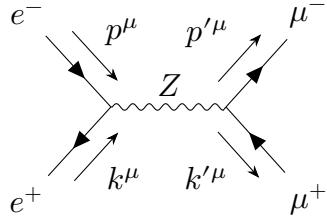


Figura 1.6: Diagrama de Feynman para $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{g_Z^2}{(s - m_Z^2 + im_Z\Gamma_Z)} g_{\mu\nu} \left[\bar{v}(k)\gamma^\mu \frac{1}{2} (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u(p) \right] \times \left[\bar{u}(p')\gamma^\nu \frac{1}{2} (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v(k') \right]. \quad (1.252)$$

donde Γ_Z es la anchura de la partícula Z, que hemos visto en el ejercicio anterior 1.19. De otra forma:

$$\mathcal{M}_{fi} = -g(s) g_{\mu\nu} j_e^\mu j_\mu^\nu \quad (1.253)$$

$$j_e^\mu = c_L j_{eLR}^\mu + c_R j_{eRL}^\mu \quad j_\mu^\nu = c_L j_{\mu LR}^\mu + c_R j_{\mu RL}^\mu \quad (1.254)$$

Nos dicen básicamente que el haz de electrones está 100 % polarizado. Es decir, tenemos que calcular dos elementos matriz diferentes. En el primero, los electrones estarán exclusivamente a izquierdas y en el segundo exclusivamente a derechas. En resumen, básicamente tenemos que calcular los dos siguientes elementos de matriz:

$$\mathcal{M}_{fi\ LR \rightarrow LR} = g(s) \frac{1}{2} c_L^e j_{eLR}^\mu c_L^\mu j_{\mu LR}^\mu \quad \mathcal{M}_{fi\ LR \rightarrow RL} = g(s) \frac{1}{2} c_L^e j_{eRL}^\mu c_R^\mu j_{\mu RL}^\mu \quad (1.255)$$

$$\mathcal{M}_{fi\ RL \rightarrow LR} = g(s) \frac{1}{2} c_R^e j_{eLR}^\mu c_L^\mu j_{\mu LR}^\mu \quad \mathcal{M}_{fi\ RR \rightarrow RL} = g(s) \frac{1}{2} c_R^e j_{eRL}^\mu c_R^\mu j_{\mu RL}^\mu \quad (1.256)$$

Así pues queremos calcular

$$|\mathcal{M}_L|^2 = \frac{1}{2} \left(|\mathcal{M}_{fi\ LR \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{fi\ RL \rightarrow RL}|^2 \right) \quad (1.257)$$

$$|\mathcal{M}_R|^2 = \frac{1}{2} \left(|\mathcal{M}_{fi\ RL \rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{fi\ RR \rightarrow RL}|^2 \right) \quad (1.258)$$

Lógicamente el primero corresponderá a σ_L y el segundo a σ_R .

Lo primero que hay que hacer es calcular todas las posibilidades con los estados de helicidad (como en el ejercicio 1.6) para luego seleccionar cuales corresponden al elemento de matriz de izquierdas y cuales al elemento a derechas. Estamos en el caso ultrarrelativista, ya que estamos con $\sqrt{s} = m_Z$ tal que $m_e, m_\mu \ll m_Z$. Así pues, los cuadrimomentos:

$$p^\mu = (E, 0, 0, E) \quad k^\mu = (E, 0, 0, -E) \quad (1.259)$$

$$p'^\mu = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta) \quad k'^\mu = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta) \quad (1.260)$$

Los spinores que usaremos:

$$u_\uparrow(p, 0, 0) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p, 0) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.261)$$

$$v_{\uparrow}(k, \pi, \pi) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(k, \pi, 0) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.262)$$

$$u_{\uparrow}(p, \theta, 0) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(p, \theta, 0) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad (1.263)$$

$$v_{\uparrow}(k, \pi - \theta, \pi) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(k, \pi - \theta, \pi) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ c \\ -s \\ c \end{pmatrix} \quad (1.264)$$

(recordamos que cuando $\theta + \pi$ tenemos que hacer el cambio $c \rightarrow s, s \rightarrow c$, con $\phi = \pi$). Usando las relaciones [2, 3]

$$\bar{\psi}\gamma^0\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4, \quad (1.265)$$

$$\bar{\psi}\gamma^1\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1, \quad (1.266)$$

$$\bar{\psi}\gamma^2\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1), \quad (1.267)$$

$$\bar{\psi}\gamma^3\phi = \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 - \psi_4^*\phi_2. \quad (1.268)$$

podemos llegar a:

$\bar{v}_{\downarrow}(k)\gamma_0u_{\uparrow}(p) = 0$	$\bar{v}_{\uparrow}(k)\gamma_0u_{\downarrow}(p) = 0$
$\bar{v}_{\downarrow}(k)\gamma_1u_{\uparrow}(p) = 2E$	$\bar{v}_{\uparrow}(k)\gamma_1u_{\downarrow}(p) = -2E$
$\bar{v}_{\downarrow}(k)\gamma_2u_{\uparrow}(p) = i2E$	$\bar{v}_{\uparrow}(k)\gamma_2u_{\downarrow}(p) = i2E$
$\bar{v}_{\downarrow}(k)\gamma_3u_{\uparrow}(p) = 0$	$\bar{v}_{\uparrow}(k)\gamma_3u_{\downarrow}(p) = 0$
$\bar{u}_{\downarrow}(p')\gamma_0v_{\uparrow}(k') = 0$	$\bar{u}_{\uparrow}(p')\gamma_0v_{\downarrow}(k') = 0$
$\bar{u}_{\downarrow}(p')\gamma_1v_{\uparrow}(k') = -2E \cos \theta$	$\bar{u}_{\uparrow}(p')\gamma_1v_{\downarrow}(k') = 2E \cos \theta$
$\bar{u}_{\downarrow}(p')\gamma_2v_{\uparrow}(k') = -i2E$	$\bar{u}_{\uparrow}(p')\gamma_2v_{\downarrow}(k') = -i2E$
$\bar{u}_{\downarrow}(p')\gamma_3v_{\uparrow}(k') = 2E \sin \theta$	$\bar{u}_{\uparrow}(p')\gamma_3v_{\downarrow}(k') = -2E \sin \theta$

Ahora tenemos todos las corrientes leptónicas, por lo que directamente

$$\mathcal{M}_{fi\ LR \rightarrow LR} = g(s)c_L^e c_L^{\mu} 4E(1 + \cos \theta) \quad (1.269)$$

$$\mathcal{M}_{fi\ LR \rightarrow RL} = g(s)c_L^e c_R^{\mu} 4E(1 - \cos \theta) \quad (1.270)$$

$$\mathcal{M}_{fi\ RL \rightarrow LR} = g(s)c_R^e c_L^{\mu} 4E(1 - \cos \theta) \quad (1.271)$$

$$\mathcal{M}_{fi\ RL \rightarrow RL} = g(s)c_R^e c_R^{\mu} 4E(1 + \cos \theta) \quad (1.272)$$

de lo que se deduce ($s = 4E^2$, siendo ahora la variable de Mandelstam $s = (p + k)^2$):

$$|\mathcal{M}_L|^2 = (g(s)sc_L^e)^2 \left\{ [c_L^{\mu}(1 + \cos \theta)]^2 + [c_R^{\mu}(1 - \cos \theta)]^2 \right\} \quad (1.273)$$

$$|\mathcal{M}_R|^2 = (g(s)sc_R^e)^2 \left\{ [c_L^{\mu}(1 + \cos \theta)]^2 + [c_R^{\mu}(1 - \cos \theta)]^2 \right\} \quad (1.274)$$

Dado que $\sigma_L \propto |\mathcal{M}_L|^2$ y $\sigma_R \propto |\mathcal{M}_R|^2$, y siendo la constante de proporción igual en ambos casos (es cinética, y en ambas polarizaciones las energías cinéticas son iguales) nos llevan a:

$$A_{LR} = \frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R} = \frac{(c_L^e)^2 - (c_R^e)^2}{(c_L^e)^2 + (c_R^e)^2} \quad (1.275)$$

siendo trivial viendo los elementos de matriz arriba.

Ejercicio 1.21 – Determinación de $\sin^2 \theta_W$ a partir de la asimetría del muón

A partir de la medida del parámetro de asimetría del muón,

$$A_\mu = 0.1456 \pm 0.0091,$$

determine el valor correspondiente de $\sin^2 \theta_W$ junto con su incertidumbre.

En el caso del muón tenemos que la constante que relaciona A_μ con θ_W es:

$$c_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \quad c_A = 1/2 \quad (1.276)$$

En Saborido [2] tenemos que ya aparece la expresión del parámetro de antisimetría A :

$$A_\mu = \frac{2c_V c_A}{c_V^2 + c_A^2} \quad (1.277)$$

donde $c_A = 1/2$. Así pues tenemos que

$$c_V^2 - \frac{2c_A}{A_\mu} c_V + c_A^2 = 0 \quad (1.278)$$

de aquí se deduce que:

$$c_V = \frac{1}{2} \left(6.86 \pm \sqrt{6.86^2 - 1} \right) \rightarrow c_V = 0.0366, 6.82 \quad (1.279)$$

y por tanto

$$\sin^2 \theta_W = \frac{1}{2} \left(c_V + \frac{1}{2} \right) \quad (1.280)$$

tal que c_V solo puede coger el primer valor para dar un resultado físico:

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.269 \quad (1.281)$$

La incertidumbre por otro lado corresponde a:

$$s(\sin^2 \theta_W) = \frac{1}{2} \sin(c_V) = \frac{1}{4} \left(1 \pm \frac{A_\mu^{-1}}{\sqrt{A_\mu^{-2} - 1}} \right) \frac{1}{A_\mu^2} s(A_\mu) = 0.00115 \quad (1.282)$$

Ejercicio 1.22 – Decaimiento del quark top

Despreciando la masa del quark b y trabajando en el sistema de referencia del centro de masas (CM), demuestre que el elemento de matriz al cuadrado promediado sobre los espines para el decaimiento

$$t \rightarrow b W^+$$

es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} g_W^2 m_t p^* \left(2 + \frac{m_t^2}{m_W^2} \right),$$

donde p^* es el momento del quark b o del bosón W^+ en el sistema CM.

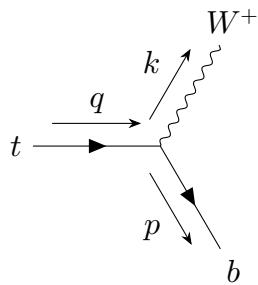


Figura 1.7: Diagrama de Feynman para $t \rightarrow bW^+$.

El elemento de matriz de orden mas bajo, del diagrama de Feynman de arriba:

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}} (\bar{u}(q)(\gamma^\mu(1-\gamma^5))v(p))\epsilon_\mu^*(k) \quad (1.283)$$

Los cuadrimomentos:

$$q^\mu = (m_t, 0, 0, 0) \quad p^\mu = (p, 0, 0, p) \quad k^\mu = (E_W, 0, 0, -p) \quad (1.284)$$

donde $p_W = -p_b = -p$, y si suponemos que $m_b \approx 0$ (despreciamos la masa del quark b frente su momento) tenemos que

$$q^\mu = (m_t, 0, 0, 0) \quad p^\mu = (0, 0, 0, p_b) \quad k^\mu = (E_W, 0, 0, p_W) \quad (1.285)$$

Debemos calcularlo para las tres posibles polarizaciones iniciales de W^+ , que son:

$$\epsilon_-^{\mu*}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad \epsilon_L^{\mu*}(k) = \frac{1}{m_W}(-p, 0, 0, E_W) \quad \epsilon_+^{\mu*}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (1.286)$$

representando ϵ_{\pm}^* el estado donde el espín esta en un estado de polarización circular y ϵ_L^* el estado donde está longitudinal. Entonces tenemos que calcular la corriente hadrónica

$$j_h^\mu = (\bar{u}(q)(\gamma^\mu(1-\gamma^5))v(p)) = (\bar{u}_\downarrow(p)(\gamma^\mu)u(q)) \quad (1.287)$$

ya que para el quark top helicidad y quiralidad no coinciden, al no poder considerarlo ultrarrelativista. Entonces para el quark top consideraremos los estados más generales posibles, los spinores de

Dirac [2, 3]:

$$u_1(q) = \sqrt{2m_t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2(q) = \sqrt{2m_t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.288)$$

$$u_\downarrow(p, 0) = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.289)$$

mientras que para el bottom usamos el espinor de helicidad al ser ultrarrelativista. Usando las relaciones [2, 3]

$$\bar{\psi}\gamma^0\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4, \quad (1.290)$$

$$\bar{\psi}\gamma^1\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1, \quad (1.291)$$

$$\bar{\psi}\gamma^2\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1), \quad (1.292)$$

$$\bar{\psi}\gamma^3\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 - \psi_4^*\phi_2. \quad (1.293)$$

podemos llegar a:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_0u_1(q) &= 0 & \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_0u_2(q) &= \sqrt{2m_tp} \\ \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_1u_1(q) &= -\sqrt{2m_tp} & \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_1u_2(q) &= 0 \\ \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_2u_1(q) &= -i\sqrt{2m_tp} & \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_2u_2(q) &= 0 \\ \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_3u_1(q) &= 0 & \bar{u}_\downarrow(p)\gamma_3u_2(q) &= \sqrt{2m_tp} \end{aligned}$$

$$j_1^\mu = \sqrt{2m_tp}(0, -1, -i, 0) \quad j_2^\mu = \sqrt{2m_tp}(1, 0, 0, 1) \quad (1.294)$$

que debemos multiplicar por los estados de polarización:

$$\epsilon_-^{\mu*}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad \epsilon_L^{\mu*}(k) = \frac{1}{m_W}(-p, 0, 0, E_W) \quad \epsilon_+^{\mu*}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0)$$

que nos lleva a dos términos que no se cancelan (trivial, es evidente que el resto se cancela):

$$\mathcal{M}_1 = \frac{g_W}{\sqrt{2}}j_1 \cdot \epsilon_+^* = -g_W\sqrt{2m_tp} \quad (1.295)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{g_W}{\sqrt{2}}j_1 \cdot \epsilon_+^* = -\frac{g_W}{m_W}\sqrt{m_tp}(p + E_W) \quad (1.296)$$

y por tanto:

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{2}(|\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}g_W^2m_tp\left(2 + \left(\frac{p + E_W}{m_W}\right)^2\right) \quad (1.297)$$

que es casi lo que se nos pide. Está claro que tenemos que hallar $(p + E_W)$. Si nos fijamos en los cuadrimomentos y su conservación es obvio que:

$$q^\mu = p^\mu + k^\mu \rightarrow m_t = p + E_W \quad (1.298)$$

por lo que efectivamente:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2}(|\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}g_W^2 m_t p \left(2 + \left(\frac{m_t}{m_W} \right)^2 \right) \quad (1.299)$$

Ejercicio 1.23 – Producción del bosón de Higgs en el LHC

Suponiendo una sección eficaz total de producción del Higgs de 20 pb y una luminosidad integrada de 25 fb^{-1} , calcule el número esperado de eventos $H \rightarrow \gamma\gamma$ y $H \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ en cada uno de los detectores ATLAS y CMS.

Lo primero que tenemos que calcular es cuantos Higgs se producen N , que dado el valor de la luminosidad integrada L y la sección eficaz total σ es trivial:

$$N = L\sigma = 2.0 \times 10^{-11} \times 2.5 \times 10^{16} = 5 \times 10^5 \quad (1.300)$$

Ahora tenemos que usar los *branching ratios* de cada evento, en este caso

$$Br(H \rightarrow \gamma\gamma) = 0.2 \% \quad (1.301)$$

$$Br(H \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-) = Br(H \rightarrow ZZ)(Br(Z \rightarrow \mu^-\mu^+))^2 = (2.7 \%)(3.5 \%)^2 \quad (1.302)$$

Otra opción sería $H \rightarrow \tau^+\tau^-$, pero también produciría neutrinos tauónicos. Así pues:

$$N_{\gamma\gamma} = 10^3 \quad N_{\mu^+\mu^-\mu^+\mu^-} = 17.5 \quad (1.303)$$

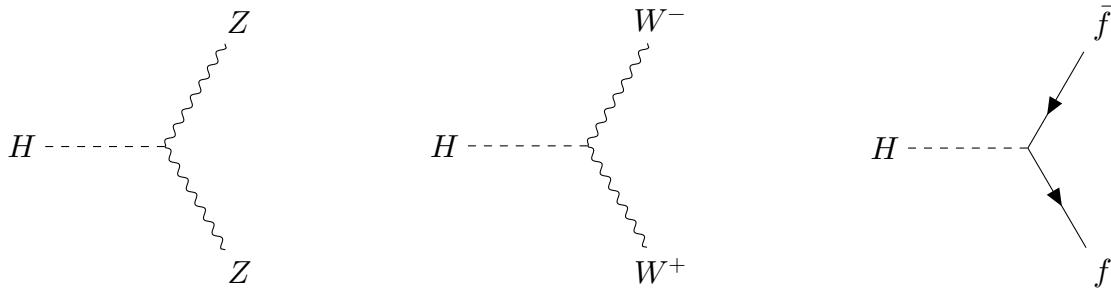
Ejercicio 1.24 – Diagramas de Feynman para la producción de Higgs

Dibuje los diagramas de Feynman de orden más bajo para los procesos

$$e^+e^- \rightarrow HZ \quad \text{y} \quad e^+e^- \rightarrow H\nu_e\bar{\nu}_e,$$

que son los mecanismos principales de producción de Higgs en un colisionador lineal de alta energía.

Los vértices que hemos visto en clase que nos interesan son:



Así pues, los diagramas de menor orden son:

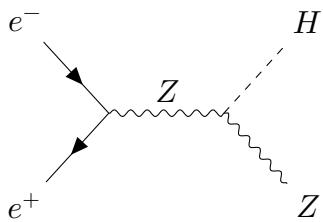


Figura 1.8: $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow ZH$.

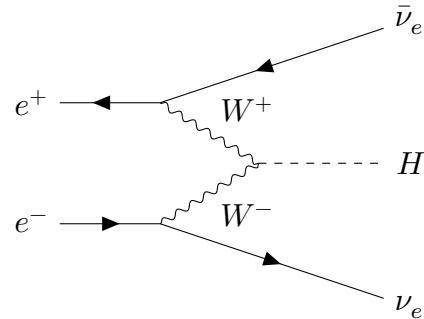


Figura 1.9: $e^+e^- \rightarrow H\nu_e\bar{\nu}_e$.

Ejercicio 1.25 – Producción directa del Higgs en un colisionador de muones

En el futuro podría ser posible construir un colisionador de muones donde el bosón de Higgs se produzca directamente mediante

$$\mu^+\mu^- \rightarrow H.$$

Compare las secciones eficaces de los procesos

$$e^+e^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}, \quad \mu^+\mu^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}, \quad e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow b\bar{b} \quad \text{a} \quad \sqrt{s} = m_H.$$

Discuta las conclusiones que se pueden extraer de los resultados obtenidos.

Como sabemos, para un bosón escalar (espín cero) interno tenemos que la línea es:

$$\frac{1}{q^2 - m_H^2 + im_H\Gamma_H} \quad (1.304)$$

mientras que la constante de interacción es [2, 3] (que llamaremos e' para distinguirlo de e):

$$-ie' = -im_f \frac{g_W}{2m_W} = -i \frac{m_f}{v} \quad (1.305)$$

siendo m_f la masa del fermión que interacciona. Suponiendo que el principal elemento de matriz de transición se corresponde con el diagrama de menor orden (diagrama de árbol s):

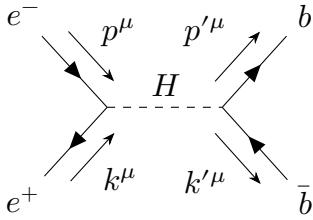


Figura 1.10: $e^+e^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$.

Las secciones eficaces vienen dadas por:

Figura 1.11: $\mu^+\mu^- \rightarrow H \rightarrow b\bar{b}$.

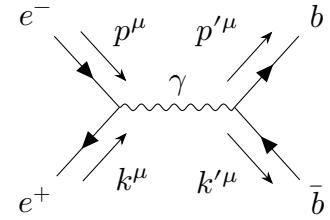


Figura 1.12: $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow b\bar{b}$.

El calculo para el fotón ya está resuelto en el ejercicio 1.7, tal que para ese proceso:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{fi,QED}|^2 \rangle &= \frac{2e^4}{s^2}(t^2 + u^2 + 4s(m_f^2 + m_e^4) - 2(m_f^2 + m_e^2)^2) \\ &\approx \frac{2e^4}{s^2}(t^2 + u^2) = \frac{2e^4}{s^2}4E^2(1 + \cos^2\theta) = 2e^4(1 + \cos^2\theta) \end{aligned} \quad (1.307)$$

El proceso para dos fermiones iniciales cualquiera (con la única condición de que $m_f, m_b \ll m_H$):

$$\langle |\mathcal{M}_{fi,H}|^2 \rangle = \frac{m_f^2 m_b^2}{v^4} \frac{s^2}{\Gamma_H^2 m_H^2} \quad (1.308)$$

donde $s = m_H^2$. Ahora solo tenemos que integrar. Como podemos ver, en el caso de QED, hay un término con $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, tal que:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int (1 + \cos^2\theta) d\cos\theta = 2\pi \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} \quad (1.309)$$

Las sección eficaz para el bosón de Higgs es trivial, ya que no hay dependencia angular en el elemento de matriz. Se deduce que, al verificararse $p_f = p_i$ (las masas son despreciables, tanto los quarks bottom como los fermiones incidentes $p \approx m_H/2$):

$$\sigma_{QED} = \frac{e^4}{4\pi} \frac{1}{3m_H^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3m_H^2} \quad (1.310)$$

$$\sigma_H = \frac{1}{16\pi} \frac{m_f^2 m_b^2}{v^4 \Gamma_H^2} \quad (1.311)$$

Ahora, los cálculos, para:

$$m_H = 126 \text{ GeV} \quad v = 246 \text{ GeV} \quad \alpha = \frac{1}{127} \quad m_b = 5 \text{ GeV} \quad \Gamma_H = 4 \times 10^{-3} \text{ GeV} \quad (1.312)$$

$$\sigma_{e^+e^-H} = 2.2 \times 10^{-12} \text{ GeV}^{-2} \quad \sigma_{\mu^+\mu^-H} = 9.5 \times 10^{-8} \text{ GeV}^{-2} \quad \sigma_{e^+e^-QED} = 7.1 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2} \quad (1.313)$$

que coincide con los valores del Thomson [3]. Es evidente que en un colisionador e^+e^- obtener procesos con el Higgs será muy complicado, al haber un orden 3 de diferencia en la sección eficaz. Por otro lado, como hemos visto σ_{QED} no depende de la masa de la partícula incidente (a altas energías),

por lo que los muones verificarán que $\sigma_{\text{QED}} < \sigma_H$, por lo que será una gran opción y permitirá ver muchos más procesos Higgs.

Sin embargo no hemos demostrado la expresión del elemento de matriz para la dispersión H (1.308). No lo hicimos para no perder el hilo, pero lo hacemos a continuación. Tenemos que calcular:

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = g_H \left[(\bar{v}^{s'}(k) u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(p') v^r(k')) \right] \left[(\bar{v}^{s'}(k) u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(p') v^r(k')) \right]^* \quad (1.314)$$

donde g_H agrupa todos la constante de acoplamiento. Usando el truco de Casimir (Williams [4])

$$\sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma u_2^{s_2}(p_2)] [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma' u_2^{s_2}(p_2)]^* = \text{tr} \left[\Gamma(\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma}'(\not{p}_1 + m_1) \right].$$

tenemos que

$$\langle |\mathcal{M}_{s,r}|^2 \rangle = \frac{g_H^2}{4} \text{tr} ((\not{p} + m_f)(\not{k} - m_f)) \text{tr} ((\not{p}' + m_b)(\not{k}' - m_b)) \quad (1.315)$$

tal que:

- La primera traza:

$$\text{tr} ((\not{p} + m_f)(\not{k} - m_f)) = \text{tr}(\not{p}\not{k}) - 4m_f^2 = 4(p \cdot k) - 4m_f^2 \quad (1.316)$$

- La segunda traza:

$$\text{tr} ((\not{p} + m_f)(\not{k} - m_f)) = \text{tr}(\not{p}\not{k}) - 4m_b^2 = 4(p' \cdot k') - 4m_b^2 \quad (1.317)$$

Directamente multiplicando:

$$\langle |\mathcal{M}_{s,r}|^2 \rangle = \frac{g_H^2}{4} (4(p \cdot k) - 4m_f^2)(4(p' \cdot k') - 4m_b^2) \quad (1.318)$$

Dado que $s = (p+k)^2 = (p'+k')^2 \rightarrow (p \cdot k) = s/2 - m_f^2, (p' \cdot k') = s/2 - m_b^2$

$$\langle |\mathcal{M}_{s,r}|^2 \rangle = g_H^2 (s - 4m_f^2)(s - 4m_b^2) \quad (1.319)$$

que si $m_f, m_b \ll s$:

$$\langle |\mathcal{M}_{s,r}|^2 \rangle = g_H^2 s^2 = \frac{s^2}{\Gamma_H^2 m_H^2} \frac{m_f^2 m_b^2}{v^4} \quad (1.320)$$

que es lo mismo que tenemos arriba.

Bibliografía

- [1] Michele Maggiore. *A Modern introduction to quantum field theory*. Oxford Master Series in Physics. 2005. ISBN: 978-0-19-852074-0.
- [2] Juan Jose Saborido Silva. *Particle Physics I: Fundamentals of QED and Electro-Weak Theory. Handouts*. Academic year 2025/2026. Lecture notes. Santiago de Compostela, Spain, sep. de 2025.
- [3] Mark Thomson. *Modern particle physics*. New York: Cambridge University Press, oct. de 2013. ISBN: 978-1-107-03426-6, 978-1-139-52536-7. doi: [10.1017/CBO9781139525367](https://doi.org/10.1017/CBO9781139525367).
- [4] Anthony G. Williams. *Introduction to Quantum Field Theory: Classical Mechanics to Gauge Field Theories*. Cambridge University Press, 2022.