

**Daniel Vázquez Lago**

# **Teoría de Grupos**

Copyright © 2023 Flavio Barisi

PUBLISHED BY PUBLISHER

[TEMPLATE-WEBSITE](#)

Licensed under the Apache 2.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <https://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0> . Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First printing, July 2023*

# Índice

## I

## Introducción y Grupos Discretos

<b>1</b>	<b>Introducción a la Teoría de Grupos</b>	<b>7</b>
1.1	Definición de Grupo	7
1.1.1	Ejemplos	7
1.2	Clase de Conjugación	8
1.3	Subgrupos	8
1.3.1	Coset	9
1.3.2	Subgrupos Normales	9
1.3.3	Grupo Cociente	10
1.3.4	Producto Directo	10
1.3.5	Centro de un grupo	11
1.4	Ejercicios	12
<b>2</b>	<b>Homomorfismos y Reducibilidad</b>	<b>13</b>
2.1	Homomorfismos	13
2.2	Representaciones	13
2.2.1	Generalidades	13
2.3	Reducibilidad	14
2.4	Ejercicios	16
<b>3</b>	<b>Grupos finitos</b>	<b>21</b>
3.1	Introducción	21
3.2	Grupo Cíclico $C_n$	21
3.3	Grupo Dihédrico $D_n$	22
3.3.1	Grupo $D_3$	22
3.4	Grupo Simétrico $S_n$	22
3.4.1	Definición y características	22
3.4.2	Representación de $D_3$ :	24
3.4.3	Teorema de Cayley	25
3.5	Ejercicios	26

## II

## Grupos Continuos

<b>4</b>	<b>Grupos de Lie</b>	<b>39</b>
4.1	Introducción a grupos de Lie	39

<b>4.2 Representaciones de Grupos de Lie</b>	<b>40</b>
4.2.1 Grupos Unitarios	40
4.2.2 Grupos Ortogonales	40
<b>4.3 Estructura Local de los Grupos de Lie</b>	<b>40</b>
4.3.1 Generadores Infinitesimales de un Grupo de Lie	40
4.3.2 Álgebras de Lie y Grupos de Lie	40
<b>4.4 Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie</b>	<b>40</b>
<b>4.5 Ejercicios</b>	<b>41</b>
<b>5 Rotaciones</b>	<b>43</b>
5.1 Grupo $O(3)$	43
5.2 Grupo $SU(2)$	43

# I

# Introducción y Grupos Discretos

<b>1</b>	<b>Introducción a la Teoría de Grupos . . . .</b>	<b>7</b>
1.1	Definición de Grupo . . . . .	7
1.2	Clase de Conjugación . . . . .	8
1.3	Subgrupos . . . . .	8
1.4	Ejercicios . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Homomorfismos y Reducibilidad . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	Homomorfismos . . . . .	13
2.2	Representaciones . . . . .	13
2.3	Reducibilidad . . . . .	14
2.4	Ejercicios . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Grupos finitos . . . . .</b>	<b>21</b>
3.1	Introducción . . . . .	21
3.2	Grupo Cíclico $C_n$ . . . . .	21
3.3	Grupo Dihédrico $D_n$ . . . . .	22
3.4	Grupo Simétrico $S_n$ . . . . .	22
3.5	Ejercicios . . . . .	26



# 1. Introducción a la Teoría de Grupos

## 1.1 Definición de Grupo

**Definición 1.1 — Grupo.** Un grupo es un conjunto de elementos  $\{g_1, g_2\}$  dotados de una ley de composición (multiplicación) que a cada par ordenado  $g_i, g_j \in G$  le asigna otro elemento  $g_i g_j$  de forma que se satisfacen las siguientes propiedades:

- **Cierre:** la ley de composición es interna, es decir, si  $g_i, g_j \in G$ , entonces  $g_i \cdot g_j \in G$
- **Asociatividad:** la ley de composición es interna, es decir, si:

$$g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) g_k \quad (1.1)$$

- **Elemento Unidad:** existe un único elemento, denotado usualmente  $e$ , con la propiedad de que  $\forall g_i \in G$ :

$$e g_i = g_i e = g_i \quad (1.2)$$

- **Elemento Inverso:** para cada  $g_i$  existe un único elemento  $g_i^{-1}$  tal que

$$g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1} = e \quad (1.3)$$

En general la multiplicación no es *conmutativa*, tal que  $g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i$ . Cuando es conmutativa, decimos que el grupo es **abeliano**. El número de elementos de  $F$  se denomina *orden* de  $F$ , y se designa como  $\mathcal{O}(G)$ . Si el orden es finito, decimos que  $G$  es un *grupo finito*.

Dado un grupo, podemos ampliar siempre a un álgebra. Un álgebra es un conjunto de elementos que forman un espacio vectorial sobre un cuerpo (como  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), de forma que, junto a la edición se define una operación de multiplicación que verifica los postulados que definen un grupo, excepto que el cero del álgebra no tiene inverso. Así por ejemplo, dado un grupo  $G$  con elementos  $g_{i(i=1,\dots,h)}$  las combinaciones lineales  $\sum_{i=1}^h c_i g_i$ , de elementos del grupo con coeficientes en el cuerpo, forman el álgebra del grupo. El producto se define por distributividad como

$$\left( \sum_{i=1}^h c_i g_i \right) \left( \sum_{j=1}^h c_j g_j \right) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h c_i c_j g_i g_j \quad (1.4)$$

que por ser  $g_i g_j$  un elemento del grupo, es un nuevo elemento del álgebra.

### 1.1.1 Ejemplos

Vamos a enunciar algunos ejemplos a título ilustrativo.

1.  $\mathbb{Q}_+$ . El conjunto de todos los números reales estrictamente positivos con la ley de composición siendo la multiplicación ordinaria forma un grupo. Este grupo es abeliano y de orden infinito.
2.  $S_n$ . Permutaciones de  $n$  objetos donde la multiplicación es la simple composición de permutaciones sucesivas. Es uno de los grupos más importantes, y es no abeliano.
3.  $GL(N, \mathbb{R})$ . El grupo lineal  $GL(N, \mathbb{R})$  tiene por elementos todas las matrices de orden  $N \times N$  con valores reales y determinante no nulo. Análogamente, se define el grupo  $GL(N, \mathbb{C})$  como el grupo de matrices complejas.

## 1.2 Clase de Conjugación

**Definición 1.2 — Elementos Conjugados.** Dos elementos  $g_1$  y  $g_2$  de un grupo  $G$  son conjugados si existe un tercer elemento tal que  $g_2 = gg_1g^{-1}$ . Decimos entonces que  $g$  es el elemento conjugante.

En los casos en que se definen los elementos de un grupo como transformaciones lineales sobre un cierto espacio vectorial, la equivalencia bajo conjugación surge de la ambigüedad que existe a la hora de escoger la base de dicho espacio vectorial. Precisaremos este comentario en el capítulo siguiente, con un ejemplo explícito en el grupo  $S_n$ .

La relación de conjugación entre dos o más elementos es una relación de equivalencia  $\sim$ . Se verifican las siguientes propiedades:

1. Reflexiva:  $a \sim a$ , ya que  $a = ea = ae$ .
2. Simétrica:  $a = bgb^{-1} \Rightarrow b = gag^{-1}$ .
3. Transitiva:  $a = bgb^{-1}, b = hch^{-1} \Rightarrow a = (gh)c(gh)^{-1}$

Dada una relación de equivalencia, la *clase de equivalencia* (conjunto de elementos con relación de equivalencia) de un elemento  $a$  escrita como  $(a)$  se define como:

$$(a) = \{b | b \sim a\} \quad (1.5)$$

de las propiedades de  $\sim$  se sigue que la subdivisión de un conjunto en clases de equivalencia es una *partición en subconjuntos disjuntos*, ya que todo elemento pertenece a alguna clase de equivalencia por la propiedad reflexiva  $a \sim a \Rightarrow (a) = \{a\}$ . Además, si dos clases  $(a)$  y  $(b)$  tuvieran algún elemento en común  $a \sim c$  y  $b \sim c$ , por transitividad se verifica que  $a \sim b$  y por tanto  $(a) = (b)$ . Como sabemos, que la propiedad de conjugación es una relación de equivalencia, todo grupo  $G$  admite una descomposición en *clases de conjugación*:

$$(g_i) = \{g_j | g_j = gg_i g^{-1}, \text{ para algún } g \in G\} \quad (1.6)$$

Lógicamente el número de clases de conjugación es menor que el orden del grupo. Sólo es un grupo abeliano, cada elemento es a la vez toda una clase de conjugación que  $a = gb g^{-1} = gg^{-1}b = b$ .

## 1.3 Subgrupos

**Definición 1.3 — Subgrupos.** Un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  es un subconjunto de  $G$  que a su vez forma un grupo bajo la misma ley de composición de  $G$ .

Cuando  $G$  es finito, una definición equivalente afirma que  $H$  es un subgrupo de  $G$  cuando es cerrado (el producto de dos elementos de  $H$  generará otro elemento de  $H$ ) bajo la ley de composición de  $G$ :



$$\forall h_1, h_2 \in H \subset G \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H \quad (1.7)$$

¿Por qué basta con que se verifique esto? Es obvio que la asociatividad es una propiedad heredada de  $G$ , y la existencia de identidad y de inverso en  $H$  se heredan también. El elemento identidad  $e$  debe pertenecer necesariamente a cualquier subgrupo. De hecho, en todo grupo  $G$  hay dos ejemplos triviales, a saber,  $H = \{e\}$  y  $H = G$ . Cualquier subgrupo que no sea estos dos se llama **subgrupo propio**.

### 1.3.1 Coset

Dados un elemento  $g \in G$  y un subgrupo  $H = \{h_1, h_2, \dots\}$ , de un grupo  $G$  el **coset** por la izquierda de  $g$  se escribe como  $gH$  y consiste en el conjunto de elementos obtenidos al multiplicar  $g$  por todos los elementos de  $H$ :

$$gH \equiv \{gh_1, gh_2, \dots\} \quad (1.8)$$

Análogamente se define el coset por la derecha. La pertenencia de dos elementos al mismo coset define una relación de equivalencia

$$a \sim b \text{ si } b \in aH \quad (1.9)$$

y se verifican reflexividad, simetría y transitividad:

1. Reflexiva:  $a \in aH$ , ya que  $a = ae$ .
2. Simétrica:  $b \in aH \Rightarrow b = ah \Rightarrow a = bh^{-1} \Rightarrow a \in bH$ .
3. Transitiva:  $b \in aH, c \in aH, b = ah, c = ah'$  así que  $c = bh^{-1}h' = bh''$ , i.e.  $c \in bH$ .

En consecuencia, los cosets son *clases de equivalencia*, lo que implica automáticamente que la división en cosets es una partición disjunta de  $G$ . Si  $G$  es un grupo finito, podemos enumerar los cosets *distintos* de la forma  $\frac{G}{H} = \{g_1H = eH, g_2H, \dots, g_sH\}$ .

En un grupo finito  $G$  de orden  $\mathcal{O}(G)$ , cada coset  $gH$  contiene el mismo número de elementos  $r$  que coincide con el orden  $\mathcal{O}(H)$  del subgrupo  $H$ , lo que es evidente ya que  $gh_1 = gh_2$  implica necesariamente que  $h_1 = h_2$ . Como hemos visto que la relación que definen los cosets, produce una partición disjunta de  $G$ , los elementos de éste se agrupan en  $s$  cosets, todos del mismo orden  $\mathcal{O}(H)$ . Es decir,

$$\mathcal{O}(G) = s\mathcal{O}(H) \quad (1.10)$$

llegando al siguiente teorema:

**Teorema 1.1 — Teorema de Lagrange.** En un grupo finito  $G$  el orden de cualquier subgrupo  $H \subset G$  es un divisor del orden de  $G$ .

### 1.3.2 Subgrupos Normales

**Definición 1.4 — Subgrupo Normal.** Un subgrupo normal es un subgrupo  $H$  que verifica  $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$

A los subgrupos también se les llama *auto-conjugados*. Una definición alternativa es decir que los subgrupos normales están compuestos de *clases de conjugación completas*, ya que  $\forall h \in H \Rightarrow$

$ghg^{-1} = h' \in H$ . También se puede decir que un subgrupo normal tiene la propiedad de que sus *cosets por la izquierda y derecha coinciden*:

$$gH = Hg \quad (1.11)$$

Cada elemento de un grupo abeliano es una clase de conjugación, lo que nos lleva a decir que todo grupo formado por  $\{e, h, h^{-1}\}$  es un subgrupo normal de  $G$  ( $h \in G$ ).

**Definición 1.5 — Grupo Simple.** Decimos que un grupo es simple si no posee ningún subgrupo normal propio. Si un grupo no posee ningún subgrupo normal abeliano, decimos que es semisimple. Evidentemente todo grupo simple es semisimple.

### 1.3.3 Grupo Cociente

Como sabemos, el *conjunto coset*  $G/H$  define una partición disjunta de  $G$  cuyos elementos (cosets) denotamos simbólicamente mediante un representante  $g_i H$ . Una pregunta natural que podríamos hacernos es si  $\frac{G}{H}$  es a su vez un grupo. Para ello debemos diseñar una operación interna que satisfaga los axiomas de grupo  $(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_e H$ . Si empezamos probando con la simple multiplicación definida en  $G$  tal que  $(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_1 H g_2 H = g_3 H$  (lógicamente cada vez que pongamos  $H$  nos referimos a cualquier elemento  $h \in H$ ). En general esto no será cierto, salvo en el caso de que  $H$  sea un subgrupo normal, ya que entonces por la propia definición de subgrupo normal Ecuación (1.10) se verifica que

$$(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_1 H g_2 H = g_1 g_2 H H = g_3 H \quad (1.12)$$

(aunque no parezca obvio  $HH = H$  implica que el producto de *cualquier* elemento de por otro elemento de  $H$  lleva a un elemento de  $H$ , por definición). En consecuencia, podemos concluir que el conjunto de cosets  $\{g_i H\}$  admite una estructura de grupo cuando  $H$  es un subgrupo normal. Llamamos a este grupo *grupo cociente*  $G/H$ .

### 1.3.4 Producto Directo

**Definición 1.6 — Producto Directo.** Decimos que un grupo  $G$  es el producto directo de dos subgrupos  $A$  y  $B$ ,  $G = A \otimes B$ , cuando

1. Todos los elementos de  $A$  conmutan con todos los de  $B$ .
2. Todo elemento de  $G$  admite una expresión única en forma de  $g = ab$  donde  $a \in A$  y  $b \in B$ .

De esta definición se generaliza directamente el producto de  $n$  subgrupos  $G = A \otimes B \otimes \dots \otimes J$ .

- El único elemento que tienen en común  $A$  y  $B$  es el elemento neutro/identidad.
- El producto de dos elementos  $g_1 = a_1 b_1$  y  $g_2 = a_2 b_2$  implica:

$$g_1 g_2 = (a_1 b_1)(a_2 b_2) = a_1 a_2 b_1 b_2 = (a_1 a_2)(b_1 b_2) \quad (1.13)$$

donde hemos aplicado la conmutación  $ba = ab$ .

- Los grupos  $A$  y  $B$  son subgrupos normales. Que sean subgrupos es trivial (ya que  $a/b$  puede ser el elemento neutro). Que sean subgrupos normales, no es tan trivial, aunque se pueden ver de que al ser  $g = ab$ :

$$gAg^{-1} = (ab)a_i(ab)^{-1} = aba_i a^{-1} b^{-1} = aa_i a^{-1} \quad (1.14)$$

y como  $aa_i a^{-1} \in A$ , queda demostrado.

- Los grupos cocientes  $\frac{G}{B}$  y  $\frac{G}{A}$  son isomorfos a  $A$  y  $B$  respectivamente. Esto es trivial si pensamos que  $\frac{G}{B} = \{g_i B \mid \forall g_i \in G\}$ , que al ser  $g = ab$ ,  $\frac{G}{B} = \{a_i B \mid \forall a_i \in A\}$ . Evidentemente todos los cosets son distintos, ya que si suponemos que  $a_1 b_1 = a_2 b_2$ , entonces estaríamos violando la definición de *producto directo*. Entonces es evidente que existe una aplicación 1:1 entre  $\frac{G}{B}$  y  $A$ , tal que  $a_i B \mapsto a_i$  es un *homomorfismo*, y esto se basa en la propiedad de subgrupo normal de  $B$ , que implica la ley de multiplicación  $(a_1 B)(a_2 B) = a_1 a_2 B \mapsto a_1 a_2$ .

Con frecuencia haremos también el producto directo de dos grupos  $G \otimes G'$ . Para obtenerlo basta con formar todas las parejas posibles de la forma  $(g, g')$ . Si  $e$  y  $e'$  son las identidades respectivas,  $(e, e')$  es la identidad del producto directo. Vemos por tanto, que el orden del producto directo es el producto de los órdenes. El producto de pares se define mediante

$$(f, f')(g, g') = (fg, f'g') \quad (1.15)$$

Los elementos  $(g, e')$  forman un subgrupo  $\Gamma$  que es isomorfo a  $G$ , y lo mismo de  $(e, g') \in \Gamma' \sim G$ . Entonces el grupo de pares de elementos definido es el producto directo de  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ .

### 1.3.5 Centro de un grupo

**Definición 1.7 — Centro.** El centro  $Z$  de un grupo  $G$  se define como el subconjunto de elementos  $z$  que conmutan con todos los elementos del grupo  $Z = \{z \in G \mid zg = gz \quad \forall g \in G\}$

Claramente  $Z$  es un subgrupo abeliano; además la propiedad que define el centro implica que es un subgrupo normal, puesto que cada elemento  $z \in Z$  es una clase de conjugación completa  $z = gzg(-1)$ .

## 1.4 Ejercicios

**Ejercicio 1.1** Sea  $G$  un grupo y considérese el centralizador asociado a un elemento  $g \in G$ . Demostrar que dicho centralizador es un subgrupo de  $G$ .

Definimos un centralizador como aquel subconjunto de elementos de  $G$  que conmuta con todos los elementos del grupo. Por otro lado, un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  es un subconjunto de  $G$  que a su vez forma un grupo bajo la misma ley de composición  $G$ .

Sea  $h_1, h_2 \in H$ , y  $g \in G$ . Si  $H$  es el centro, es obvio que se debe verificar  $H = gHg^{-1}$  siendo  $H$  en realidad cualquier elemento del conjunto  $H$ . Así pues, decir que  $h \in H$  es lo mismo que decir que  $h \in gHg^{-1}$ . Veamos que  $e = geg^{-1}$ , por lo que  $e \in gHg^{-1}$ , lo que implica que contiene el elemento neutro. Otro aspecto que hay que demostrar es que  $gHg^{-1}$  es cerrado. Véase que  $gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = g(h_1h_2)g^{-1}$  por lo que un  $h_1h_2 = h_3 \in H$ . Además

$$gh_1g^{-1}gh_1^{-1}g^{-1} = gh_1h_1^{-1}g^{-1} = geg^{-1} \quad (1.16)$$

por lo que se cumple que  $h_1h_1^{-1} = e$ , y que además  $h^{-1} \in H$ . La asociatividad se deduce de que  $h \in G$ . Así pues,  $H$  cumple los 4 requisitos para ser un grupo (cierre, asociatividad, elemento unidad y elemento inverso), y como  $H \subset G$ , podemos decir que  $H$  es un subgrupo de  $G$ .

## 2. Homomorfismos y Reducibilidad

### 2.1 Homomorfismos

Un homomorfismo es una aplicación  $f$  de un conjunto  $A$  en otro  $B$  (escribimos  $f : A \mapsto B$ ) que preserva alguna estructura interna. En particular estamos interesados en la estructura de grupo de  $A$  y  $B$ .

**Definición 2.1 — Homomorfismo.** sean  $A$  y  $B$  dos grupos y  $f : A \rightarrow B$  una aplicación. Decimos entonces que  $f$  es un homomorfismo cuando verifica que para cualesquiera  $a_1, a_2 \in A$ :

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) \quad (2.1)$$

Cuando  $B$  coincide con  $A$  decimos que  $f$  es un **endomorfismo**. Recordemos la definición de imagen y kernel de una aplicación:

$$\text{Im } f := \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algún } a \in A\} \quad (2.2)$$

$$\text{Ker } f := \{a \in A \mid f(a) = e_B \in B\} \quad (2.3)$$

Una aplicación es **inyecta** cuando  $\text{Ker } f = e_A$ . Si además  $\text{Im } f = B$ ,  $f$  es **suprayectiva**. Si es biyectiva y suprayectiva a la vez decimos que es la aplicación es **biyectiva** o 1:1. Si además  $f$  es un homomorfismo (Ecuación (2.1)) es decimos que constituye un *isomorfismo*. Un *isomorfismo*  $f : A \mapsto A$  de un grupo en sí mismo se llama *automorfismo*.

### 2.2 Representaciones

#### 2.2.1 Generalidades

**Definición 2.2 — Representación.** Una representación de dimensión  $n$  de un grupo abstracto  $G$  es un homomorfismo  $D : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  el grupo de matrices  $n \times n$  invertibles con coeficientes complejos.

En otras palabras, se trata de una aplicación  $g \mapsto D(g)$  que preserve la estructura de grupo en el sentido de que

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \quad (2.4)$$

donde en el miembro derecho el producto indica la multiplicación matricial. En virtud de homomorfismo tenemos que  $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1}$

Decimos que una representación es *fiel* si la aplicación es un homomorfismo inyectivo. Es decir, si cada elemento distinto  $g$  le corresponde una matriz distinta  $D(g)$ . EN particular, este hecho impone

que  $\text{Ker}(D) = e \in G$ , de donde se deduce que el único elemento representado por la matriz unidad es el elemento identidad de grupo.

**Definición 2.3 – Equivalencia entre Representaciones.** Dos representaciones  $n$ -dimensionales  $D^1$  y  $D^2$  de un grupo  $G$  son equivalentes si  $\forall g \in G$  las matrices  $D^1(g)$  y  $D^2(g)$  son similares, esto es, están relacionadas por una conjugación en  $GL(n, \mathbb{C})$ , lo que implica que existe una matriz  $S$  independiente de  $g$  tal que

$$D^1(g) = S D^2(g) S^{-1} \quad (2.5)$$

De nuevo, esta es una relación de equivalencia, por lo que estamos interesados en la clasificación de clases equivalentes. De forma implícita, a partir de ahora cuando hablemos de una representación, incluiremos todas sus equivalentes; es decir la consideraremos como una representación de la clase.

Todo grupo admite una representación trivial unidimensional en la que todo elemento viene representado por el número 1, aunque no es fiel, por razones evidentes.

## 2.3 Reducibilidad

**Definición 2.4 – Reducibilidad.** Decimos que una representación de dimensión  $n + m$  es **reducible** si  $D(g)$  admite la forma en bloques siguiente:

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \forall g \in G \quad (2.6)$$

donde  $A(g)$  y  $B(g)$  son matrices cuadradas de dimensiones  $n \times n$  y  $m \times m$  respectivamente.

Por tanto, automáticamente  $\{A(g)\}$  y  $\{B(g)\}$  constituyen representaciones de  $G$  de  $n$  y  $m$  dimensiones. Además también funciona a la inversa, dadas dos representaciones  $A$  y  $B$  siempre podemos formar una mayor mediante la suma directa:

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

que en este caso escribimos como  $D = A \oplus B$ , siendo la dimensión de  $D$  la suma de las dimensiones de  $A$  y  $B$ .

**Definición 2.5 – Completamente Reducible.** Una representación que admite (algún representante con) la forma dimensional de bloques

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

se dice que es **completamente reducible** y se denota como  $D = A \oplus B$ .

**Definición 2.6 — Completamente Irreducible.** Una representación que *no* admite (algún representante con) la forma dimensional de bloques

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

y que no admite ninguna transformación de equivalencia se dice que es **completamente irreducible**.

Las representaciones irreducibles de un grupo son las «piedras angulares» en el estudio de la teoría de representaciones de grupos, ya que una representación arbitraria siempre puede descomponerse en combinación lineal de representaciones irreducibles.

## 2.4 Ejercicios

**Ejercicio 2.1** Demuéstrese que si  $G = H_1 \otimes H_2$ , entonces  $\frac{G}{H_1} \simeq H_2$  y que  $\frac{G}{H_2} \simeq H_1$  donde  $\simeq$  significa isomorfo.

Definimos como isomorfismo a cualquier a cualquier homomorfismo biyectivo (1:1), esto es, que la aplicación  $f : A \rightarrow B$  (siendo  $A$  y  $B$  dos grupos cualquiera), verifique

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) \quad a_1, a_2 \in A \quad (2.10)$$

y que además sea inyectivo  $f(e_A) = e_B$  y suprayectivo. La notación de nos dice que

$$\frac{G}{A} = \{eA, g_2A, g_3A, \dots, g_sA\} \quad (2.11)$$

Así pues  $\frac{G}{A}$  representa el conjunto de cosets por la izquierda, que es grupo por ser  $A$  normal (lo que viene, a su vez, del producto directo). Por otro lado, que  $G = A \otimes B$  implica que todos los elementos  $a \in A$  conmuta con  $b \in B$ , y que

$$\forall g \in G \quad g = ab \quad a \in A \quad b \in B \quad (2.12)$$

además  $g = ab = a'b' \Rightarrow a = a', b = b'$ . Resulta casi trivial entonces que es un isomorfismo. Dado que

$$\frac{G}{A} = \{eA, g_2A, g_3A, \dots, g_sA\} \quad (2.13)$$

y que  $g_i = a_i b_i$ . Entonces es obvio que los elementos de  $\frac{G}{A}$  son de la forma  $\frac{G}{A} = \{b_1A, b_2A, b_3A, \dots, b_sA\}$  ya que  $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$ . La aplicación  $f : \frac{G}{A} \rightarrow B$  es evidente:

$$f(g_iA) = f(b_iA) = b_i A A^{-1} = b \quad (2.14)$$

Veamos que:

- Es un homomorfismo:

$$f(b_i A b_j A) = f(b_i b_j A) = b_i b_j \quad f(b_i A) f(b_j A) = b_i b_j \quad (2.15)$$

donde hemos usado que  $b_i A b_j A = b_i b_j A$  que se deduce de que  $A$  y  $B$  conmutan (sus elementos).

- Es inyectiva:

$$f(e_B e_A) = e_B \quad (2.16)$$

siendo obviamente  $e_B e_A$  el elemento neutro de  $\frac{G}{A}$  y  $e_B$  el elemento neutro de  $B$ .

- Es sobreyectiva, ya que se generan todos los elementos de  $B$  al hacer la aplicación  $f(\frac{G}{A})$ .

por lo que hemos demostrado que efectivamente  $\frac{G}{A} \simeq B$ . De manera análoga para  $\frac{G}{B} \simeq A$ . Se optó por la notación  $A, B$  frente a  $H_1, H_2$  por que es, para el autor, más claro.



**Ejercicio 2.2** Considérese el conjunto de las matrices complejas de dimensión  $n \times n$  no singulares  $GL(n)$ ; no singulares con determinante 1,  $SL(n)$ ; unitarias,  $U(n)$ ; y unitarias con determinante 1,  $SU(n)$ . Demuestre que  $GL(n)$  es un grupo y que  $SL(n)$ ,  $U(n)$  y  $SU(n)$  son subgrupos de  $GL(n)$ .

Lo primero que tenemos que demostrar es que  $GL(n)$  es grupo, lo que lleva a demostrar la *propiedad de cierre, inversa y neutro*. Así:

- **Cierre.** Sean  $A, B \in GL(n)$ . Entonces

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0, \quad (2.17)$$

ya que  $\det(A) \neq 0$  y  $\det(B) \neq 0$ . Por tanto

$$AB \in GL(n) \quad (2.18)$$

- **Asociatividad.** La asociatividad del producto se hereda del producto matricial en  $M_{n(F)}$ :

$$(AB)C = A(BC) \quad \forall A, B, C \in GL(n). \quad (2.19)$$

- **Elemento neutro.** El elemento neutro es la matriz identidad  $I_n$ , que verifica

$$I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in GL(n), \quad (2.20)$$

y además

$$\det(I_n) = 1 \neq 0. \quad (2.21)$$

Luego

$$I_n \in GL(n) \quad (2.22)$$

- **Inverso.** Sea  $A \in GL(n)$ . Como  $\det(A) \neq 0$ , la matriz  $A$  es invertible y existe

$$A^{-1} \in M_{n(F)} \quad (2.23)$$

tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \quad (2.24)$$

Además,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \neq 0, \quad (2.25)$$

por lo que

$$A^{-1} \in GL(n) \quad (2.26)$$

Como se satisfacen las propiedades de cierre, asociatividad, elemento neutro e inverso, concluimos que  $GL(n)$  es un grupo.

La única propiedad que tenemos que demostrar es la *propiedad de cierre*, inversa y neutro, ¿Son también subgrupos?

- El conjunto  $SL(n)$ . La relación de determinantes exige que

$$A \cdot B = C \quad \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(C) \quad (2.27)$$

por lo que  $C \in SL(n)$ . Luego, ¿ $A^{-1} \in SL(n)$ ? Veamos que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (2.28)$$

y como  $\det(A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1$ . La asociatividad se hereda, y dado que el neutro de  $SL(n)$  es la matriz identidad de determinante 1, queda claro que  $SL(n)$  es subgrupo de  $GL(n)$ .

- La característica de unitario implica que

$$\forall U \in U(n) \quad UU^\dagger = \mathbb{I} \quad (2.29)$$

. Supongamos entonces que  $U, V \in U(n)$ , entonces

$$UV = W \quad W^\dagger = (UV)^\dagger \text{ tal que } WW^\dagger = (UV)(UV)^\dagger = (UV)(V^\dagger U^\dagger) = \mathbb{I} \quad (2.30)$$

por lo que se demuestra la propiedad de cierre. La inversa de  $U$  sería  $U^\dagger$ , y como  $U^\dagger \in U(n)$ , también se verifica la propiedad de inverso. La propiedad de neutro es trivial si recordamos que es la identidad su neutro. Es obvio que  $\mathbb{I}\mathbb{I}^\dagger = \mathbb{I}$  ya que  $\mathbb{I}^\dagger = \mathbb{I}$ .

- La característica de unitario implica que

$$\forall U \in SU(n) \quad UU^\dagger = \mathbb{I} \quad (2.31)$$

. Supongamos entonces que  $U, V \in SU(n)$ , entonces

$$UV = W \quad W^\dagger = (UV)^\dagger \text{ tal que } WW^\dagger = (UV)(UV)^\dagger = (UV)(V^\dagger U^\dagger) = \mathbb{I} \quad (2.32)$$

por lo que se demuestra la propiedad de cierre. Por otro lado la relación de determinantes exige que, si  $U, V \in SU(2)$ :

$$U \cdot V = W \quad \det(U, V) = \det(U) \cdot \det(V) = \det(W) \quad (2.33)$$

por lo que  $W \in SU(n)$ . Luego, ¿ $U^{-1} \in SU(n)$ ? Veamos que:

$$\det(U^{-1}) = \frac{1}{\det(U)} \quad (2.34)$$

y como

$$\det(U) = 1 \Rightarrow \det(U^{-1}) = 1 \quad (2.35)$$

.La inversa de  $U$  sería  $U^\dagger$ , y como  $U^\dagger \in SU(n)$ , también se verifica la propiedad de inverso. Por ser la identidad  $\mathbb{I}$  neutro y unitario, también se verifica neutro y por la asociatividad es heredada.



# 3. Grupos finitos

## 3.1 Introducción

Un grupo finito de elementos se llama *grupo finito*. El número de elementos es el *orden* del grupo.

La forma más inmediata de representar un grupo finito consiste en mostrar su tabla de multiplicación, también llamado *cuadrado latino*. Por ejemplo, el grupo cíclico  $C_3$  es el conjunto de elementos  $\{e, b, c\}$  dotados de la tabla de multiplicación:

	e	b	c
e	e	b	c
b	b	c	e
c	c	e	b

Aunque precisa, esta forma de caracterizar un grupo es engorrosa para grupos finitos de orden alto, por ser tan exhaustiva. Otra manera comunmente utilizada para determinar un grupo finito consiste en especificar su *presentación*. Una presentación consiste en un conjunto de relaciones que indentifican elementos de  $\mathcal{F}_n$ , el grupo libre de  $n$  generadores. por ejemplo, un grupo libre abeliano es un grupo libre ordenado donde imponemos la identificación de elementos  $x_i x_j = x_j x_i$  para cualquier  $i, j$ .

## 3.2 Grupo Cíclico $C_n$

**Definición 3.1 — Grupo Cíclico.** El **grupo cíclico**  $C_n$  es el grupo de transformaciones de simetría de un polígono regular con  $n$  lados y direccionado. Por «direccionar» entendemos que el polígono lleva asociado un sentido de recorrido alrededor de su perímetro (equivalente a decir «en el sentido de las agujas del reloj»). Los elementos del grupo son rotaciones discretas del ángulo  $2\pi \frac{r}{n}$  con  $r = 0, 1, \dots, n-1$  alrededor de este eje de rotación, que atravesaría el «centro de gravedad» del polígono.

Llamando a estos elementos  $c_n^r$  es evidente que podemos obtener este elemento a partir de una rotación elemental  $c_n^1 = c$ , es decir,

$$c_n^r = c^r \quad (3.1)$$

En principio el grupo está generado por potencias arbitrariamente altas de esta operación elemental,  $c$ . Sin embargo, notemos que el grupo finito debido a que una rotación de ángulo  $2\pi$  es equivalente a la identidad:

$$c^n = e \quad (3.2)$$

podemos por tanto definir matemáticamente el grupo cíclico de orden  $n$  como el grupo de elementos *generados* por  $c$ , consistente en elementos  $\{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$ .

Obviamente se trata de un grupo Abeliano, ya que

$$c^r c^s = c^{r+s} = c^s c^r \quad (3.3)$$

de hecho es *isomorfo* al grupo  $\mathbb{Z}_n$ . La correspondencia es 1:1 tal que

$$c^r \in C_n \longleftrightarrow r \in \mathbb{Z}_n \quad (3.4)$$

y esta correspondencia es un homomorfismo, lo que hace que preserve las operaciones respectivas de ambos conjuntos. Al tratarse de un grupo abeliano, cada elemento constituye su propia clase de conjugación.

**Ejemplo 3.1** Vamos a representar el grupo  $C_6$  como el producto directo de subgrupos. Fácilmente  $C_6 = A \otimes B$  implica que

$$A = \{e, c^2, c^4\} \quad B = \{e, c^3\} \quad (3.5)$$

### 3.3 Grupo Dihédrico $D_n$

**Definición 3.2 – Grupo Dihédrico.** El **grupo dihédrico**  $D_n$  es el grupo de transformaciones de simetría de un polígono regular con  $n$  lados no direccionado.

Ahora, no solo tenemos «rotaciones», como el grupo cíclico. Este grupo contiene otras simetrías, como podrían ser las «simetrías espejo» (por ejemplo, por ejemplo cambiar el lado izquierdo y el derecho de un cuerpo humano, lo cual no se puede hacer con rotaciones). Para entenderlo estudiaremos el grupo  $D_3$  y  $D_4$

#### 3.3.1 Grupo $D_3$

Este grupo contiene trivialmente los elementos  $\{e, c, c^2\}$  del grupo cíclico. Además tendrá los elementos  $x, y, z$ , que serían las rotaciones de 180 grados en torno a los ejes  $x, y, z$ . Estas operaciones satisfacen  $x^2 = y^2 = z^2 = e$

Se puede entender el grupo  $D_3$  como el *grupo de simetrías del triángulo*. Entonces

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, y, z\} \quad (3.6)$$

Además como  $y = cx$  y  $z = c^2x$ , Entonces

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, xc, xc^2\} \quad (3.7)$$

Dado que  $e = c^3$  o  $e = x^2$ , es obvio que todos los elementos de  $D_3$  pueden ser construidos a partir de dos elementos  $c$  y  $x$ .

### 3.4 Grupo Simétrico $S_n$

#### 3.4.1 Definición y características

El grupo simétrico es uno de los grupos más interesantes. Desde el punto de vista de un físico, los grupos simétricos aparecen en sistemas que involucran conjuntos de partículas idénticas. Dentro del ámbito de la teoría de grupos es importante en virtud del teorema de Cayley.

**Definición 3.3 — Grupo Simétrico.** El **grupo simétrico**  $S_n$  se define como las posibles permutaciones o sustituciones de  $n$  elementos (o índices que los etiquetan), conteniendo por tanto  $n!$  elementos, de lo que se deduce que el orden es  $n!$ . La *ley de composición* es la aplicación sucesiva. De esto se deduce que el grupo es *no abeliano* (no conmuta).

Existen dos representaciones análogas, a saber, la **forma canónica** y la **descomposición en ciclos**. La forma canónica básicamente implica que un *elemento genérico*  $p$  se puede escribir como

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

que nos dice que el índice  $i$  es cambiado por el índice  $p(i)$ . Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

nos dice que el elemento 1 corresponde con índice 1, el elemento 2 al índice 2 y el elemento 3 al índice 3. Sin embargo si nos fijamos en

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Vemos que lo que antes era el índice 2 ahora se denota por 3 y el elemento 3 se denota por 2, es decir, *el elemento de índice 2 y 3 se intercambian*. Esto se puede ver en la parte inferior. Así pues, la multiplicación es la aplicación sucesiva.

Por ejemplo, el objeto resultante de la aplicación sucesiva de un primer objeto intercambia 2 y 3, y un segundo que intercambia 1 y 2, lo que ocurrirá es que en el objeto objeto resultante el elemento 1 tendrá índice 3, el elemento 2 índice 1 y el elemento 3 índice 2. Veamos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Una vez se entienda lo que queremos decir el resto será un simple ejercicio abstracto sistemático más o menos complejo, pero sin misterios. Esta que hemos trabajado ahora es la *forma canónica*.

La **descomposición en ciclos** de los elementos nos dice que  $(ijkl\dots z)$  representa un elemento donde el elemento de índice  $i$  se intercambia con el elemento de índice  $j$ , el  $j$  con la del  $k\dots$  y así sucesivamente hasta que el último  $z$  se intercambia por el primero  $i$ . Si un índice no se intercambia no aparece en la representación. Así obviamente el *elemento neutro* (no intercambio) para cualquier grupo es  $()$ . Veamos un ejemplo relacionando ambas notaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (123) \quad (3.12)$$

A priori puede parecer que tiene más complicación la descomposición en ciclos, aunque es evidente que ocupan menos espacio. Veamos que:

- Dos ciclos son el mismo si coinciden salvo permutación cíclica de sus elementos.
- Ciclos de un elemento pueden ser omitidos.
- Ciclos disjuntos conmutan entre sí.

- Ciclos que tengan un sólo elemento en común se encadenan  $(1234)(43) = (124)$

Independientemente de la forma que el lector considere más adecuadas, el punto más importante que queremos hacer aquí es que todo elemento  $S_n$  puede escribirse en forma de un producto de ciclos disjuntos.

**Ejemplo 3.2** Uno podría preguntarse cuales son los elementos del grupo  $S_3$ . Dado que  $3 \neq 6$ , sabemos que tiene 6. Estos son:

$$S_3 = \{(), (12), (23), (13), (123), (321)\} \quad (3.13)$$

Es evidente que  $(21) = (12)$ ,  $(123) = (312)$ ... En ese sentido cada elemento tiene varias representaciones.

### 3.4.2 Representación de $D_3$ :

Vamos a hacer una representación de  $D_3$ . Obviamente cogeremos la representación con los vectores

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Dado que todos los elementos del grupo  $S_3 = \{(), (123), (132), (12), (23), (13)\}$  están compuestos por  $(12)$  y  $(123)$ , basta con conocer las representaciones de  $(12)$ ,  $(123)$ . Evidentemente en esta base

$$D(()) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad (3.15)$$

y tenemos que

$$D((12))^2 = \mathbb{I} \quad D((123))^3 = \mathbb{I} \quad (3.16)$$

Podemos obviamente escribir  $D((123)) = D((12)) = \mathbb{I}$ , obteniendo la representación trivial, o escribir  $D((123)) = \mathbb{I}$  y  $D((12)) = -\mathbb{I}$ . En general, podemos calcularlo suponiendo que  $D((12))$  y  $D((123))$  son matrices  $3 \times 3$  generales y usar propiedades como la anteriores para deducir término a término. Sin embargo esto sería largo y tedioso. No es difícil ver que para llegar a la representación podemos aplicar conceptos «sencillos».

Está claro que  $(12)$  representa la permutación del 1 con el 2, es decir que si  $D((12))\hat{e}_1 = \hat{e}_2$ , y que si  $D((12))\hat{e}_2 = \hat{e}_1$ . La matriz que verifica esto es:

$$D((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Por otro lado, la matriz  $D(123)$  es aquella tal que  $D((123))\hat{e}_i = \hat{e}_{i+1}$  (para  $i = 1, 2, 3$  y  $i = 4 = 1$ ). Así pues:



$$D((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Con estas dos podmeos encontrar la expresión de las demás, o seguir aplicando estos conceptos sencillos. En cualquier caso la descomposición natural:

$$D((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

### 3.4.3 Teorema de Cayley

Ya hemos dicho que el grupo simétrico es uno de los más importantes, ¿por qué? Por el teorema de Cayley:

**Teorema 3.1 — Teorema de Cayley.** El **teorema de Cayley** afirma que todo grupo  $G$  finito de orden  $n$  es isomorfo a algún subgrupo de  $S_n$ .

### 3.5 Ejercicios

**Ejercicio 3.1** Construir la tabla de multiplicación del grupo diédrico  $D_3$  o grupo de simetrías del triángulo equilátero.

El grupo  $D_3$  está formado por

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, y, z\} \quad (3.20)$$

La tabla de multiplicación es:

	$e$	$c^1$	$c^2$	$x$	$y$	$z$
$e$	$e$	$c^1$	$c^2$	$x$	$y$	$z$
$c^1$	$c^1$	$c^2$	$e$	$y$	$z$	$x$
$c^2$	$c^2$	$e$	$c_1$	$z$	$x$	$y$
$x$	$x$	$z$	$y$	$e$	$c_2$	$c_1$
$y$	$y$	$x$	$z$	$c_1$	$e$	$c_2$
$z$	$z$	$y$	$x$	$c_2$	$c_1$	$e$

donde hemos supuesto que multiplica por la izquierda primero, así pues

$$\begin{array}{c|c} & b \\ \hline a & ab \end{array}$$

**Ejercicio 3.2** Haciendo uso de la notación mediante ciclos, constrúyase la tabla de multiplicación del grupo simétrico  $S_3$ . Compárese esta tabla con la obtenida para el grupo diédrico  $D_3$  y estúdiense si estos grupos son isomorfos.

El grupo simétrico  $S_3$  está formado por

$$S_3 = \{(), (12), (23), (31), (123), (132)\} \quad (3.21)$$

tal que la tabla de multiplicación es:

	$()$	$(12)$	$(23)$	$(31)$	$(123)$	$(132)$
$()$	$()$	$(12)$	$(23)$	$(31)$	$(123)$	$(132)$
$(12)$	$(12)$	$()$	$(132)$	$(123)$	$(31)$	$(23)$
$(23)$	$(23)$	$(123)$	$()$	$(132)$	$(12)$	$(31)$
$(31)$	$(31)$	$(132)$	$(123)$	$()$	$(23)$	$(12)$
$(123)$	$(123)$	$(23)$	$(31)$	$(12)$	$(132)$	$()$
$(132)$	$(132)$	$(31)$	$(12)$	$(23)$	$()$	$(123)$

Si comparáramos esta tabla con  $D_3$  encontramos la relación  $f : D_3 \rightarrow S_3$  tal que:

$$e \rightarrow () \quad x \rightarrow (12) \quad y \rightarrow (23) \quad z \rightarrow (31) \quad c \rightarrow (123) \quad c^2 \rightarrow (132) \quad (3.22)$$

vemos que se preserva tanto la tabla de multiplicación, lo que implica que es un homomorfismo. Además, dado que  $f(e) = ()$  es inyectivo (i.e.  $\ker(f)=e$ ), y como  $\text{Im}(f) = S_3$ , también es sobreyectivo. Por ser homomorfismo y biyectivo,  $D_3$  y  $S_3$  son isomorfos.

**Ejercicio 3.3** Demuestre que las clases de conjugación del grupo simétrico  $S_n$  están formadas por los elementos de  $S_n$  que en la notación de ciclos tiene la misma estructura.

Las clases de conjugación son el conjunto de elementos con la relación de conjugación. Decimos que  $g_1$  y  $g_2$  son *conjugados* si

$$g_1 = gg_2g^{-1} \quad \text{para algún } g \in S_n \quad (3.23)$$

Es trivial que para un grupo abeliano cada elemento es su propia clase de conjugación. Sin embargo estamos ante un grupo no abeliano, por lo que no es trivial.

Definimos longitud  $\lambda$  como el número de elementos de  $h = (h_1, \dots, h_\lambda)$ . Queremos demostrar que  $g_1$  y  $g_2$  tienen la misma longitud. Supongamos que  $g_1$  y  $g_2$  tal que  $g_2 = gg_1g^{-1}$ . Sea  $g$ :

$$g = (a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1a_2)(a_2a_3)\dots(a_{k-1}a_k)(a_ka_1) \quad (3.24)$$

por otro lado

$$g^{-1} = (a_1a_k)(a_ka_{k-1})\dots(a_2a_1) \quad (3.25)$$

es decir, tenemos la misma longitud tanto en  $g$  como en  $g^{-1}$ . Por otro lado, si descomponemos  $g_1$  a la vez:

$$g_1 = (b_1b_2)\dots(b_{r-1}b_r) \quad (3.26)$$

donde  $b_i \neq b_j$  si  $i \neq j$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, r$ ), por que si fuera así, podríamos expresar  $g_1$  con  $r - 1$  términos. Vemos claramente que podemos hacer

$$g_1 = (b_1b_2)g^{-1}g(b_2b_3)g^{-1}g\dots g^{-1}g(b_{r-1}b_r) \quad (3.27)$$

dado que  $g^{-1}g = e$ . De esto se deduce que

$$g_2 = g(b_1b_2)g^{-1}g(b_2b_3)g^{-1}\dots g(b_{r-1}b_r)g^{-1} \quad (3.28)$$

Lo siguiente que tenemos que hacer es demostrar que  $g(b_ib_j)g^{-1}$  tiene longitud 2 consideremos dos casos

- Pongamos que  $(b_ib_j)$  no coincide con ningún  $a_i \in g$ . Entonces es disjunto de  $g$ , lo que implica que podemos hacer  $g(b_ib_j) = (b_ib_j)g$  de lo que se deduce que  $g(b_ib_j)g^{-1} = (b_ib_j)$  y por tanto que tiene longitud 2.
- Otro caso es aquel en el que solo uno de los elementos  $(b_i, b_j)$  sí coincide con algún  $a_i \in g$  (por ejemplo  $b_i = a_i$ , sin pérdida de generalidad) Dado que podemos hacer rotaciones cíclicas en  $g$ , siempre podremos expresar  $g(b_ib_j)g^{-1}$  como  $(a_ia_{i+1})(b_ib_j)(a_{i+1}a_i) = (a_ia_{i+1})(a_ib_j)(a_{i+1}a_i) = (a_ia_{i+1}a_ib_ja_{i+1}) = (b_ja_{i+1})$  que también tiene longitud 2.
- Si  $(b_i, b_j)$  coincide con un par de  $g$ ,  $(b_i, b_j) = (a_i, a_{i+1})$ , es evidente que  $g(b_ib_j)g^{-1} = (b_ib_j)$  por la misma razón.

Al no coincidir  $b_i \neq b_j$  si  $i \neq j$ , se verifica que

$$g(b_1 b_2) g^{-1} g(b_2 b_3) g^{-1} \dots g(b_{r-1} b_r) g^{-1} \quad (3.29)$$

se puede expresar con longitud  $r$ , demostrando que  $g_2$  y  $g_1$  tienen la misma estructura (longitud). La razón por la que es indispensable  $b_i \neq b_j$  si  $i \neq j$  es obvia:  $a_{i+1}$  puede coincidir con un  $b_k$  cualquiera, lo que haría que  $g(b_k b_{k+1}) g^{-1} = a_{i+2} b_k$ , haciendo que el  $a_{i+1}$  que aparecería antes volviese a ser único. Podríamos hacer esto recurisivamente, pero siempre va a pasar que el  $a_{i+1}$  se enontrará solo (dado que estamos denotando índices, *todo mantiene la máxima generalidad*). Si ocurriera que  $b_i = b_j$  si  $i \neq j$ , entonces aparecerían 2  $a_{i+1}$ , lo que implicaría que se podría expresar con  $r - 1$ .

Sin embargo como hemos impuesto que esto no pasa, hemos demostrado el enunciado, probablemente de la forma más tosca, bruta y fea posible, pero lo hemos hecho.

**Ejercicio 3.4** Considérese el grupo formado por tres elementos  $A, B$  y  $C$  satisfaciendo las relaciones  $A^p = B^q = C^r = 1$  con  $p, q, r \in \mathbb{Z}^+$ . Si  $p = 3, q = 2$  y  $r = 2$ , se tiene un grupo isomorfo al grupo diédrico  $D_3$ .

A primera vista parece que nuestro grupo tiene ciertas similitudes con un *grupo cíclico*. La pregunta es, ¿cuales son los elementos del grupo? Primero tenemos que descartar algunos. Es evidente que los elementos inversos de  $B$  y  $C$  son ellos mismos  $BB = CC = e$ . Por otro el elemebnto inverso de  $A$  es  $A^2$  ya que  $AA^2 = e$ .

Luego tenemos la relación  $ABC = e$ , con el que podemos obtener algunas relaciones más. (132)

$$ABC = e \rightarrow ABCC^{-1} = C^{-1} \rightarrow AB = C \quad (3.30)$$

El hecho de que  $C = AB$  nos elimina todas los elementos con  $C$  al ser redundantes. Como solo tenemos esta «ligadura», no podemos deducir más términos, por lo que  $G$  estará compuesto de  $e, A, A^2, B$  y sus términos cruzados:

$$G = \{e, A, A^2, B, BA, BA^2, AB, A^2 B\} \quad (3.31)$$

Por definición  $AB$  será el inverso de  $BA^2$ , y  $A^2 B$  será el inverso de  $BA$ .

$$ABC = e \rightarrow AB(AB) = e \rightarrow ABA = B \rightarrow AB = BA^2 \quad (3.32)$$

de lo que se deduce que  $BA$  y  $BA^2$  son mutuamente inversos. En conclusión, el  $G$  que pusimos antes *no es correcto*, por lo que

$$G = \{e, A, A^2, B, BA, BA^2\} \quad (3.33)$$

Y esto si se puede relacionar con  $D_3$ , ya que la tabla de multiplicación:

	$e$	$A$	$A^2$	$B$	$BA$	$BA^2$
$e$	$e$	$A$	$A^2$	$B$	$BA$	$BA^2$
$A$	$A$	$A^2$	$e$	$BA^2$	$B$	$BA$
$A^2$	$A^2$	$e$	$A$	$BA$	$BA^2$	$B$
$B$	$B$	$BA$	$BA^2$	$e$	$A$	$A^2$

$$\begin{array}{c|cccccc} BA & BA & B & A & A^2 & e & A \\ BA^2 & BA^2 & A^2 & B & A & A^2 & e \end{array}$$

la cual es mucho más sencilla de calcular que  $D_3$  o  $S_3$ . Si comparamos las tablas de multiplicar se ve la siguiente aplicación

$$f : D_3 \rightarrow G \quad e \rightarrow e \quad x \rightarrow B \quad y \rightarrow BA \quad z \rightarrow BA^2 \quad c \rightarrow AA \quad c^2 \rightarrow A^2 \quad (3.34)$$

que se ve, por preservar la tabla de multiplicación, por el kernel y por la imagen, que es biyectiva.

**Ejercicio 3.5** Determinar todos los subgrupos del grupo diédrico  $D_3$ . Estudiar cuales son subgrupos invariantes y para cada ellos construir un espacio de cosets.

El grupo diédrico  $D_3$  tiene la siguiente tabla de multiplicar:

	$e$	$c^1$	$c^2$	$x$	$y$	$z$
$e$	$e$	$c^1$	$c^2$	$x$	$y$	$z$
$c^1$	$c^1$	$c^2$	$e$	$y$	$z$	$x$
$c^2$	$c^2$	$e$	$c_1$	$z$	$x$	$y$
$x$	$x$	$z$	$y$	$e$	$c_2$	$c_1$
$y$	$y$	$x$	$z$	$c_1$	$e$	$c_2$
$z$	$z$	$y$	$x$	$c_2$	$c_1$	$e$

de lo que se pueden deducir los 6 subgrupos son:

$$H_1 = \{e\}, \quad H_2 = \{e, c, c^2\} \quad H_3 = D_3 \quad (3.35)$$

$$H_4 = \{e, x\}, \quad H_5 = \{e, y\} \quad H_6 = \{e, z\} \quad (3.36)$$

Mirando la tabla de multiplicar se deduce que sus coindiciones de cerrados. Además verifican el inverso, asociatividad y neutro, aunque estas 3 son propiedades heredadas. Expresemos  $D_3$  en su forma canónica:

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, xc, xc^2\} \quad (3.37)$$

Por otro lado, nos piden el espacio de cosets para  $\frac{D_3}{H}$  siendo  $H$  los subgrupos. Supongamos un elemento  $g \in G$ . El conjunto de elementos **coset**  $gH$  es:

$$gH = \{gh_1, gh_2, \dots\} \quad (3.38)$$

Definimos el **espacio de cosets**  $\frac{G}{H}$  como el conjunto de conjuntos coset, es decir:

$$\frac{G}{H} = \{g_1H, g_2H, \dots\} = \{\{g_1h_1, g_1h_2, \dots\}, \{g_2h_1, g_2h_2, \dots\}, \dots\} \quad (3.39)$$

Así pues los espacios de cosets para cada subgrupo:

- Sea  $H = \{e\}$ . Entonces:  $\frac{D_3}{H} = \{\{e\}, \{c\}, \{c^2\}, \{x\}, \{xc\}, \{xc^2\}\}$  que se ded

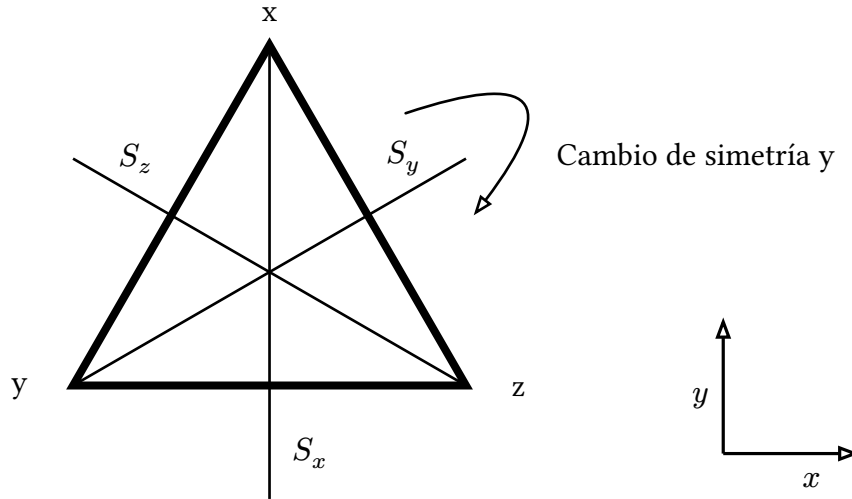
- Sea  $H = \{e, c, c^2\}$ . Entonces:  $\frac{D_3}{H} = \{\{e, c, c^2\}, \{x, c, c^2\}\}$
- Sea  $H = \{e, x\}$ . Entonces:  $\frac{D_3}{H} = \{\{e, x\}, \{c, xc\}, \{x, c^2\}\}$
- Sea  $H = \{e, xc\}$ . Entonces:  $\frac{D_3}{H} = \{\{e, xc\}, \{c, xc^2\}, \{c^2, x\}\}$
- Sea  $H = \{e, xc^2\}$ . Entonces:  $\frac{D_3}{H} = \{\{e, xc^2\}, \{c, x\}, \{c^2, xc\}\}$
- Sea  $H = \{D_3\}$ . Entonces:  $\frac{D_3}{H} = \{D_3\}$

**Ejercicio 3.6** Constrúyase una representación bidimensional del grupo diédrico  $D_3$  estudiando su acción en el espacio bidimensional  $\mathbb{R}^2$ . Estúdiense si se trata de una representación irreducible.

La representación bidimensional es relativamente trivial, ya que solo hay que considerar que significan las rotaciones. Dado que  $D_3$  es el grupo de transformaciones de un polígono regular con  $n$  lados no direccionado, podemos ver que a cada elemento de

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, y, z\} \quad (3.40)$$

podemos asignarle una rotación en 2D. Si definimos los ejes de simetría del triángulo:



En la imagen de arriba, con un ejemplo del cambio de simetría por  $x, y, z$ , queda claro que es cada cosa. Por ejemplo  $c$  sería una rotación de  $120^\circ$ , mientras que  $c^2$  de  $240^\circ$ . Por otro lado,  $x$  representa una rotación donde se conserva el vector  $(0,1)$ ,  $y$  donde se conserva el vector  $(\cos 30, \sin 30)$  y  $z$  donde se conserva el vector  $(-\cos 30, \sin 30)$ . Sin embargo, como en realidad  $y = xc$  y  $z = xc^2$ , y dado que una *representación debe conservar la estructura de grupo*, podemos calcular las representaciones de  $c^2, y, z$  a partir de  $x, c$ . Así pues, tenemos por un lado que

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} \cos(120) & -\sin(120) \\ \sin(120) & \cos(120) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

donde  $x$  es el cambio de  $x \rightarrow -x$ , de forma trivial tenemos:

$$c^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad y = xc = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad z = xc^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Ahora tenemos que estudiar si se trata de una representación irreducible. La forma en la que yo veo que se trata de un grupo irreducible es la siguiente.

Supongamos que la representación  $D$  fuese reducible. Entonces el espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^2$  se descompondría como suma directa de dos subespacios invariantes unidimensionales,

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad (3.43)$$

En tal caso, la representación  $D$  sería equivalente a la suma directa de dos representaciones unidimensionales de  $D_3$ . Sin embargo, las únicas representaciones unidimensionales de  $D_3$  son la trivial y la del signo, por lo que para todo  $g \in D_3$  las matrices  $D(g)$  tendrían únicamente autovalores reales  $\pm 1$ .

Consideremos ahora el elemento  $c \in D_3$  correspondiente a la rotación de ángulo  $2\pi/3$ . En la representación construida,  $D(c)$  es una rotación de  $\mathbb{R}^2$  de ángulo  $2\pi/3$ , cuyos autovalores son  $e^{\pm 2\pi i/3}$ , que no son reales.

Esto contradice la posibilidad de que  $D$  sea suma directa de representaciones unidimensionales. Por tanto, la representación  $D$  es irreducible.

**Ejercicio 3.7** Descompóngase la representación natural de dimensión tres de  $S_3$  en términos de sus representaciones irreducibles.

Podemos aplicar algunos teoremas para hallar las dimensiones que necesitamos. El primer teorema es aquel que nos dice que *el número de representaciones irreducibles no equivalente de un grupo finito  $G$  es igual al número de clases de conjugación*. Dado que  $S_3$  tiene 3 clases de conjugación, el número máximo de representaciones irreducibles es 3.

Otro teorema nos dice que *la suma de cuadrados de las dimensiones de las representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo finito  $G$  es igual al orden del grupo*. Es decir,  $\sum_i (\dim(D_i))^2 = 6$ , lo que nos dice que 1 representación tiene dimensión 2, y hay otras 2 representaciones con dimensión 1.

Sabemos que la representación natural  $3 \times 3$  viene dada por

$$D(()) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$D((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Esta representación natural en  $3 \times 3$ . Lógicamente la representación irreducible hará que  $D(g) = A_{1 \times 1} \oplus B_{2 \times 2}$ , por lo dicho.

Lo primero es que, si nos fijamos, la representación natural  $3 \times 3$  deja invariante al vector  $u_1 \propto (1, 1, 1)$ . Algebráicamente está claro, solo hay que hacer la cuenta. Sin embargo, también tiene sentido desde el punto de vista del significado de  $S_3$ . Dado que esta es la matriz de permutaciones,

un vector que tenga todos sus componentes iguales, es invariante frente a cualquier cambio de componentes.

Algunas preguntas claves que nos hacemos aquí es ¿qué hacemos con esta invariancia? ¿cómo relacionamos que  $\mathbf{u}_1$  sea invariante con  $A_{1 \times 1}$  y  $B_{2 \times 2}$ ? Puede que la respuesta no sea tan obvia, pero la clave está en pensar que si expresáramos las matrices en función de una base con  $\mathbf{u}_1$ , todos los elementos  $D(g)_{11} = 1$ , ya que si  $D(g)_{11} \neq 1$  no se respetaría la invariancia de  $\mathbf{u}_1$  (siendo aquí  $D_{11}$  el elemento de la matriz  $D$  en la fila 1 columna 1, y siendo  $g \in S_3$ ). Es decir, un cambio de base a  $e_1 \rightarrow \mathbf{u}_1$  hará que  $A_{1 \times 1} = 1$ .

Dado que la matriz de cambio de base siempre se puede representar como

$$\Lambda = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3) \quad (3.46)$$

y por ser una matriz cambio de base tiene varias propiedades. La primera: que es especial (determinante 1) y que es unitaria, y por tanto

$$\Lambda^{-1} = \Lambda^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \\ \mathbf{u}_3^* \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

que al verificar  $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{I}$ , nos lleva a las relaciones:

$$\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2^* \cdot \mathbf{u}_2 = 1, \quad \mathbf{u}_3^* \cdot \mathbf{u}_3 = 1 \quad (3.48)$$

$$\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{u}_3 = 0, \quad \mathbf{u}_2^* \cdot \mathbf{u}_3 = 0 \quad (3.49)$$

Donde literalmente hemos reducido un problema de resolver 6 parámetros a 5 ecuaciones prácticamente triviales, que se puede resolver de memoria. Veamos que una solución es, considerando que  $\mathbf{u}_1 \propto (1, 1, 1)$ :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1) \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ -1 \ 0) \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 1 \ -2) \quad (3.50)$$

Por lo que la matriz cambio de base será:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \Lambda^{-1} = \Lambda^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Y por tanto el elemento  $D_{\text{irreducible}}(g) \equiv D'(g)$  se calculará a partir de  $D(g)$  como

$$D'(g) = \Lambda^{-1} D(g) \Lambda \quad (3.52)$$

Por lo que, para obtener las nuevas matrices en su representación irreducible, solo tenemos que hacer los siguientes cálculos. Veamos que

$$D'(( )) = \Lambda^{-1} D(( )) \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$



Veamos el cálculo de uno no trivial:

$$D((12))\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$D'((12)) = \Lambda^{-1}D((12))\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

De lo que obtenemos:

$$D'((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$D'((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

$$D'((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$D'((13)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

$$D'((123)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$D'((132)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Por lo que hemos representado  $D(g) = A_{1 \times 1} \oplus B_{2 \times 2}$ , que es lo que queríamos (representación irreducible), siendo en particular  $A_{1 \times 1} = 1$  tal y como se habí

$$D'((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

$$D'((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$D'((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

$$D'((13)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

$$D'((123)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

$$D'((132)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

a demostrado naivamente antes.

**Ejercicio 3.8** Constrúyase todas las representaciones del grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n$

Este es un grupo abeliano y todas las representaciones de los grupos abelianos son unidimensionales. Sea

$$z_m = \exp\left(2\pi i \frac{m}{N}\right) \quad (3.68)$$

entonces

$$z_m^* = \exp\left(-2\pi i \frac{m}{N}\right) = \exp\left(2\pi i \frac{N-m}{N}\right) = z_{\{N-m\}} \quad (3.69)$$

y además

$$z_n z_m = z_{\{n+m\}} = z_m z_n \quad (3.70)$$

.

Por tanto, dado que el grupo es abeliano y conjugado consigo mismo, cada elemento del grupo es una clase de conjugación, por lo que hay  $N$  representaciones irreducibles. Es evidente entonces que las representaciones irreducibles de  $\mathbb{Z}_N$  son los propios elementos de  $\mathbb{Z}_N$ .

**Ejercicio 3.9** Construir la representación irreducible de dimensión 2 del grupo simétrico  $S_3$  y demostrar que es equivalente a la obtenida a partir del grupo diédrico  $D_3$ .

Las representaciones irreducibles de dimensión 2 del grupo diédrico:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad c^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

Si nos fijamos ya obtuvimos en un ejercicio anterior,

$$D'(( )) = 1 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D'((12)) = 1 \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

$$D'((23)) = 1 \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D'((13)) = 1 \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

$$D'((123)) = 1 \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D'((132)) = 1 \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Si nos fijamos en ambos, vemos que ambas son equivalentes, con las siguientes relaciones:

$$e \sim ( ) \quad x \sim (12) \quad y \sim (23) \quad z \sim (13) \quad c \sim (123) \quad c^2 \sim (132) \quad (3.76)$$



# II

## Grupos Continuos

<b>4 Grupos de Lie</b>	<b>39</b>
4.1 Introducción a grupos de Lie	39
4.2 Representaciones de Grupos de Lie	40
4.3 Estructura Local de los Grupos de Lie	40
4.4 Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie	40
4.5 Ejercicios	41
<b>5 Rotaciones</b>	<b>43</b>
5.1 Grupo $O(3)$	43
5.2 Grupo $SU(2)$	43



# 4. Grupos de Lie

## 4.1 Introducción a grupos de Lie

En los grupos continuos los elementos pueden parametrizarse en un entorno pueden parametrizarse en un entorno de cualquier punto mediante un conjunto de variables reales. Escribimos entonces para un elemento genérico  $g(x_1, x_2, \dots, x_d) = g(x)$  Si  $d$  es el número de mínimos parámetros necesarios para alcanzar a cualquier elemento, hablamos de un grupo de *dimensión*  $d$ .

Es evidente que no podemos escribir una tabla de multiplicar en el mismo sentido que para un grupo finito. Si el producto  $g(x)$  por  $(g(y))$  es  $g(z)$  tenemos que

$$g(x_1, x_2, \dots, x_d)g(y_1, y_2, \dots, y_d) = g(z_1, z_2, \dots, z_d) \quad (4.1)$$

entonces los parámetros  $z_1, \dots, z_d$  son funciones de  $x_i, y_i$ . Es decir, la tabla de multiplicación consta de  $n$  funciones reales de  $2d$  argumentos,  $z_i = f_i(x, y)$  tal que  $i = 1, \dots, d$ .

Las propiedades que definen un grupo imponen restricciones sobre las posibles funciones  $f_i$ . La más severa es la que proviene de la asociatividad:

$$(g(x)g(y))g(z) = g(x)(g(y)g(z))$$

**Definición 4.1 — Grupo de Lie.** Un **grupo de Lie** es un grupo continuo en el cual las funciones  $f_i$  que expresan las multiplicaciones a parte de satisfacer los requisitos que provienen de las propiedades de grupo son  $C^\infty$  (continuas e infinitamente derivables)

## 4.2 Representaciones de Grupos de Lie

### 4.2.1 Grupos Unitarios

### 4.2.2 Grupos Ortogonales

## 4.3 Estructura Local de los Grupos de Lie

### 4.3.1 Generadores Infinitesimales de un Grupo de Lie

### 4.3.2 Álgebras de Lie y Grupos de Lie

**Definición 4.2 — Álgebra de Lie.** Un **álgebra de Lie**  $\mathcal{L}$  de dimensión  $d \geq 1$  es un espacio vectorial real de dimensión  $d$ , dotado de una operación interna llamada **corchete de Lie**  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , definida para todo par  $u, v \in \mathcal{L}$  y que satisface las siguientes propiedades:

- **Cierre:**  $[u, v] \in \mathcal{L} \quad \forall u, v \in \mathcal{L}$
- **Antisimetría:**  $[u, v] = -[v, u]$
- **Linealidad:**  $[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$  para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- **Identidad de Jacobi**  $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$

El concepto álgebra de Lie es una definición abstracta que en cada caso requiere una definición para el concreto de Lie subyacente. Así pues, en la mecánica clásica tendríamos uno, al igual que en la mecánica cuántica, siendo ambos diferentes.

Dada una base  $L_1, \dots, L_d$ , un álgebra de Lie viene especificada por un conjunto de  $d^3$  números  $f_{ij}^k$  denominados **constantes de estructura** que se definen según la siguiente expresión:

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^d f_{ij}^k L_k \quad i, j = 1, \dots, d$$

Estos números no son independientes como se deduce de las propiedades de *antisimetría e identidad de Jacobi*.

Frente a cambios de base  $L_i \rightarrow \tilde{L}_i$  con  $i = 1, \dots, d \dots$

**Teorema 4.1 — Tercer teorema de Lie.** A cada grupo de Lie lineal,  $G$ , le corresponde un álgebra de Lie  $\mathcal{L}$  de la misma dimensión. De forma más precisa, si  $\mathcal{L}$  tiene dimensión  $d$ , entonces los generadores infinitesimales  $L_1, \dots, L_d$  forman una base de  $\mathcal{L}$ .

## 4.4 Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie



## 4.5 Ejercicios

**Ejercicio 4.1** Realiza los siguientes apartados.

1. Demostrar la relación

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

2. Comprobar que la matriz  $3 \times 3$

$$A_{ij} = \delta_{ij}(e_0^2 - |e|^2) + 2e_i e_j + 2\varepsilon_{ijk} e_0 e_k \quad (4.3)$$

donde

$$e_0 = \cos \frac{\Phi}{2} \quad e = \mathbf{u} \sin \frac{\Phi}{2} \quad (4.4)$$

siendo  $\mathbf{u}$  un vector unitario, es ortogonal.



# 5. Rotaciones

## 5.1 Grupo $O(3)$

## 5.2 Grupo $SU(2)$