Daniel Vázquez Lago

Física de Partículas

Índice general

Introducción

Capítulo 1

Ejercicios

Ejercicio 1.1 – Espinores

Sean ψ_L y ξ_R dos espinores de Weyl zurdos y diestros independientes, respectivamente. Demuestre que $\xi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$ y $\xi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L$ son cuatro-vectores contravariantes, donde $\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$.

Al ser $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$, la demostración se puede dividir en dos fases, en demostrar que $v^0 = \xi_L^\dagger \psi_L$ y que $v^i = \xi_L^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_L$ (así mismo para los espinores R) son efectivamente invariantes Lorentz. Las transformaciones de Lorentz sobre un eje (por ej. el eje x):

$$V^0 \to V'^0 = \cosh(\eta) V^0 + \sinh(\eta) V^1 \tag{1.1}$$

$$V^1 \to V'^1 = \cosh(\eta) V^1 + \sinh(\eta) V^0 \tag{1.2}$$

siendo $V'^2 = V^2$ y $V'^3 = V^3$. Con hacerlo sobre un eje basta, ya que siempre podremos encontrar un sistema de referencia donde el boost sea sobre ese eje x. Si nuestros cuatro-vecotres siguen dichas transformaciones, podemos decir que son contravariantes. Veamos uno por uno los dos casos:

- Caso $\xi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$. Una transformación Lorenzt para los espinores de Weyl a derechas es:

$$\Lambda_R = \exp\left((-i\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \tag{1.3}$$

y recordemos que

$$v^0 = \xi_R^\dagger \psi_R \qquad v^i = \xi_R^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_R \tag{1.4}$$

Si el boost lo hacemos en el eje x, el único valor no nulo de $\boldsymbol{\eta}$ es $\eta_1 = \eta$. Así pues:

$$\Lambda_R = \exp\left(\eta \sigma_1 / 2\right) \tag{1.5}$$

Ahora tenemos que aplicar esto a nuestro v_0:

$$v^0 \to v'^0 = \xi_R'^\dagger \psi_R' = (\Lambda_R \xi_R^\dagger)(\Lambda_R \psi_R) = e^{(\eta\sigma^1)} \xi_R^\dagger \psi_R \tag{1.6}$$

Usando que $e^{(\eta\sigma_1)} = \cosh(\eta) + \sigma^1 \eta$, tenemos que:

$$v'^0 = \cosh(\eta) \xi_R^\dagger \psi_R + \sinh(\eta) \xi_R^\dagger \sigma^1 \psi_R = \cosh v^0 + \sinh \eta v^1 = \Lambda v^0 \tag{1.7}$$

q.e.d. Por otro lado, nos queda demostrar para v^i:

$$v^1 \to v'^1 = \xi'^{\dagger}_R \sigma_1 \psi'_R = \cosh(\eta) \xi^{\dagger}_R \sigma^1 \psi_R + \sinh(\eta) \xi^{\dagger}_R \psi_R = \cosh(\eta) v^1 + \sinh(\eta) v^0 \tag{1.8}$$

donde nos hemos saltados algunos de los pasos. Dado que $\eta_2 = \eta_3 = 0$, es trivial que $v'^2 = v^2$ y $v'^3 = v^3$, de lo que se deduce que efectivamente $xi'^{\dagger}_R \sigma^\mu \psi'_R$ transforma como un 4-vector contravariante.

- El caso para la izquierda es análogo, aunque un poco didferente. En este caso

$$\Lambda_L = \exp\left(-\eta\sigma_1/2\right) \qquad \exp\left(-\eta\sigma_1\right) = \cosh(\eta) - \sinh(\eta)\eta_1 \tag{1.9}$$

lo cual hace que aparezca un signo menos, pero que debido a $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$, desaparece. Como hemos dicho, es repetir pasos.

pág. 267-268 del Maggiore [1].

Ejercicio 1.2 – Transformaciones de Lorentz

Usando la representación quiral, demuestre que las transformaciones de Lorentz de los espinores de Dirac pueden escribirse en términos de las matrices γ como

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = \exp\!\left(-\tfrac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\Psi.$$

Esta ecuación nos dice que $S^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}/2$ proporciona una representación de dimensión compleja cuatro del álgebra de Lorentz. Compruébelo directamente usando la definición de $\sigma^{\mu\nu}$ en términos de las matrices γ y la relación $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, es decir, verifique la siguiente relación de conmutación

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i\Big[g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma}\Big].$$

Ejercicio 1.3 – Identidad de Dirac

Demuestre la relación

$$\frac{i}{\not{q} - m} = \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2}.$$

Ejercicio 1.4 – Flujo invariante

Demuestre la siguiente identidad referente al flujo invariante de Lorentz,

$$F = 4E_a E_b(v_a + v_b) = 4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}.$$

Ejercicio 1.5 – Helicidad y Hamiltoniano de Dirac

Demuestre que el operador de helicidad conmuta con el hamiltoniano de Dirac, $[\hat{h}, H_D] = 0$, donde

$$\hat{h} = \frac{\mathbf{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2p} = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m,$$

con

$$\alpha_k = \gamma^0 \gamma^k, \qquad \beta = \gamma^0.$$

Bibliografía

[1] Michele Maggiore. *A Modern introduction to quantum field theory*. Oxford Master Series in Physics. 2005. ISBN: 978-0-19-852074-0.