Daniel Vázquez Lago

# Teoría de Grupos

PUBLISHED BY PUBLISHER

TEMPLATE-WEBSITE



*First printing, July 2023*

# Índice

# I

# Introducción y Grupos Discretos

# 1. Introducción a la Teoría de Grupos

## 1.1 Definición de Grupo

**Definición 1.1 — Grupo.** Un grupo es un conjunto de elementos $\{g_1, g_2\}$ dotados de una ley de composición (multiplicación) que a cada par ordenado $g_i, g_j \in G$ le asigna otro elemento $g_i g_j$ de forma que se satisfacen las siguientes propiedades:

- **Cierre**: la ley de composición es interna, es decir, si $g_i, g_j \in G$, entonces $g_i \cdot g_j \in G$
- **Asociatividad**: la ley de composición es interna, es decir, si:

$$g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) g_k \tag{1.1}$$

- **Elemento Unidad**: existe un único elemento, denotado usualmente $e$, con la propiedad de que $\forall g_i \in G$:

$$e g_i = g_i e = g_i \tag{1.2}$$

- **Elemento Inverso**: para cada $g_i$ existe un único elemento $g_i^{-1}$ tal que

$$g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1} = e \tag{1.3}$$

En general la multiplicación no es *conmutativa*, tal que $g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i$. Cuando es conmutativa, decimos que el grupo es **abeliano**. El número de elementos de $F$ se denomina *orden* de $F$, y se designa como $\mathcal{O}(G)$. Si el orden es finito, decimos que $G$ es un *grupo finito*.

Dado un grupo, podemos ampliar siempre a un álgebra. Un álgebra es un conjunto de elementos que forman un espacio vectorial sobre un cuerpo (como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), de forma que, junto a la edición se define una operación de multiplicación que verifica los postulados que definen un grupo, excepto que el cero del álgebra no tiene inverso. Así por ejemplo, dado un grupo $G$ con elementos $g_{i(i=1,\ldots,h)}$ las combinaciones lineales $\sum_{i=1}^{h} c_i g_i$, de elementos del grupo con coeficientes en el cuerpo, forman el álgebra del grupo. El producto se define por distributividad como

$$\left(\sum_{i=1}^{h} c_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{h} c_j g_j\right) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{h} c_i c_j g_i g_j \tag{1.4}$$

que por ser $g_i g_j$ un elemento del grupo, es un nuevo elemento del álgebra.

### 1.1.1 Ejemplos

Vamos a enucniar algunos ejemplos a título ilustrativo.

1. $Q_+$, El conjunto de todos los números reales estricatavemnte positivos con la ley de composición siendo la multiplicación ordinaria forma un grupo. Este grupo es abeliano y de orden infinito.
2. $S_n$. Permutaciones de $n$ objetos donde la multiplicación es la simple composición de permutaciones sucesivas. Es uno de los grupos más importantes, y es no abeliano.
3. $GL(N, \mathrm{R})$. El grupo lineal $GL(N, \mathrm{R})$ tiene por elementos todas las matrices de orden $N \times N$ con valores reales y deeterminante no nulo. Análogamente, se define el grupo $GL(N, \mathrm{C})$ como el grupo de matrices complejas.

## 1.2 Clase de Conjugación

**Definición 1.2 — Elementos Conjugados.** Dos elementos $g_1$ y $g_2$ de un grupo $G$ son conjugados si existe un tercer elemento tal que $g_2 = gg_1g^{-1}$. Decimos entonces que $g$ es el elemento conjugante.

En los casos en que se definen los elementos de un grupo como transformaciones lineales sonbre un cierto espacio vectorial, la equialencia bajo conjugación surge de la ambigüedad que existe a la hora de escoger la base de dicho espacio vectorial. Precisaremos este comentario en el capítulo siguiente, con un ejemplo explícito en el grupo $S_n$.

La relación de conjugación entre dos o más elementos es una relación de equivalencia $\sim$. Se verifican las siguietnes propiedades:

1. Reflexiva: $a \sim a$, ya que $a = ea = ae$.
2. Simétrica: $a = gbg^{-1} \Rightarrow b = gag^{-1}$.
3. Transitiva: $a = gbg^{-1}$, $b = hch^{-1}$, $\Rightarrow a = (gh)c(gh)^{-1}$

Dada una relación de equivalencia, la *clase de equivalencia* (conjunto de elementos con relación de equivalencia) de un elemento $a$ escrita como $(a)$ se define como:

$$(a) = \{b | b \sim a\} \tag{1.5}$$

de las propiedades de $\sim$ se sigue que la subdivisión de un conjunto en clases de equivalencia es una *partición en subconjuntos disjuntos*, ya que todo elemento pertenece a alguna calse de equivalencia por la propiedad reflexiva $a \sim a \Rightarrow (a) = \{a\}$. Además, si dos clases $(a)$ y $(b)$ tuvieran algún elemento en común $a \sim c$ y $b \sim c$, por transitividad se verifica que $a \sim b$ y por tanto $(a) = (b)$. Como sabemos, que la propiedad de conjugación es una relación de equivalencia, todo grupo $G$ admite una descomposición en *clases de conjugación*:

$$(g_i) = \left\{g_j \mid g_j = gg_ig^{-1}, \text{para algún } g \in G\right\} \tag{1.6}$$

Lógicamente el número de claes de conjugación es menor que el orden del grupo. Sólo es un grupo abeliano, cada elemento es a la vez toda una clase de conjugación que $a = gbg^{-1} = gg^{-1}b = b$.

## 1.3 Subgrupos

**Definición 1.3 — Subgrupos.** Un subgrupo $H$ de un grupo $G$ es un subconjunto de $G$ que a su vez forma un grupo bajo la misma ley de composición de $G$.

Cuando $G$ es finito, una definición equivalente afirma que $H$ es un subgrupo de $G$ cuando es cerrado (el producto de dos elementos de $H$ generá otro elemento de $H$) bajo la ley de composición de $G$:

$$\forall h_1, h_2 \in H \subset G \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H \tag{1.7}$$

¿Por qué basta con que se verifique esto? Es obvio que la asociatividad es una propiedad heredada de $G$, y la existencia de identidad y de inverso en $H$ se heredan también. El elemento identidad $e$ debe pertenecer necesariamente a cualquier subgrupo. De hecho, en todo grupo $G$ hay dos ejemplos triviales, a saber, $H = \{e\}$ y $H = G$. Cualquier subgrupo que no sea estos dos se llama **subgrupo propio**.

### 1.3.1 Coset

Dados un elemento $g \in G$ y un subgrupo $H = \{h_1, h_2, ...\}$, de un grupo $G$ el **coset** por la izquierda de $g$ se escribe como $gH$ y consiste en el conjunto de elementos obtenidos al multiplicar $g$ por todos los elementos de $H$:

$$gH \equiv \{gh_1, gh_2, ...\} \tag{1.8}$$

Análogamente se define el coset por la derecha. La pertenencia de dos elementos al mismo coset define una relación de equivalencia

$$a \sim b \text{ si } b \in aH \tag{1.9}$$

y se verifican reflexividad, simetría y transitividad:

1. Reflexiva: $a \in aH$, ya que $a = ae$.
2. Simétrica: $b \in aH \Rightarrow b = ah \Rightarrow a = bh^{-1} \Rightarrow a \in bH$.
3. Transitiva: $b \in aH$, $c \in aH$, $b = ah$, $c = ah'$ así que $c = bh^{-1}h' = bh''$, i.e. $c \in bH$.

En consecuencia, los cosets son *clases de equivalencia*, lo que implica automáticamente que la división en costest es una partición disjunta de $G$. Si $G$ es un grupo finito, podemos enumerar los cosets *distintos* de la forma $\frac{G}{H} = \{g_1H = eH, g_2H, ..., g_sH\}$.

En un grupo finito $G$ de orden $\mathcal{O}(G)$, cada coset $gH$ contiene el mismo número de elementos $r$ que conicide con el orden $\mathcal{O}(H)$ del subgrupo $H$, lo que es evidente ya que $gh_1 = gh_2$ implica necesariamente que $h_1 = h_2$. Como hemos visto que la relación que definen los cosets, produce una partición disjunta de $G$, los elementos de éste se agrupan en $s$ cosets, todos del mismo orden $\mathcal{O}(H)$. Es decir,

$$\mathcal{O}(G) = s\mathcal{O}(H) \tag{1.10}$$

llegando al siguiente teorema:

**Teorema 1.1 — Teorema de Lagrange.** En un grupo finito $G$ el orden de cualquier subgrupo $H \subset G$ es un divisor del orden de $G$.

### 1.3.2 Subgrupos Normales

**Definición 1.4 — Subgrupo Normal.** Un subgrupo normal es un subgrupo $H$ que verifica $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$

A los subgrupos también se les llama *auto-conjugados*. Una definición alternativa es decir que los subgrupos normales están compuestos de *clases de conjugación completas*, ya que $\forall h \in H \Rightarrow$

$ghg^{-1} = h' \in H$. También se puede decir que un subgrupo normal tiene la propiedad de que sus *cosests por la izquierda y derecha coinciden*:

$$gH = Hg \tag{1.11}$$

Cada elemento de un grupo abeliano es una clase de conjugación, lo que nos lleva a decir que todo grupo formado por $\{e, h, h^{-1}\}$ es un subgrupo normal de $G$ ($h \in G$).

> **Definición 1.5 — Grupo Simple.** Decimos que un grupo es simple si no posee ningún subgrupo normal propio. Si ungrupo no posee ningún subgrupo normal aveliano, decimos que es semisimple. Evidentemente todo grupo simple es semisimple.

### 1.3.3 Grupo Cociente

Como sabemos, el *conjunto coset G/H* define una partición disjunta de $G$ cuyos elementos (cosets) denotamos simbólicamente mediante un representatne $g_i H$.Una pregunta natural que podríamos hacernos es si $\frac{G}{H}$ es a su vez un grupo. Para ello debemos diseñar una operación interna que satisfaga los aiomas de grupo $(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_e H$. Si empezamos probando con la simple multiplicación definida en $G$ tal que $(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_1 H g_2 H = g_3 H$ (lógiacamente cada vez que pongamos $H$ nos referimos a cualquier elemento $h \in H$. En general esto no será cierto, salvo en el caso de que $H$ sea un subgrupo normal, ya que entonces por la propia definición de subgrupo normal Ecuación (1.10) se verifica que

$$(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_1 H g_2 H = g_1 g_2 H H = g_3 H \tag{1.12}$$

(aunque no parezca obvio $HH = H$ implica que el producto de *cualquier* elemento de por otro elemento de $H$ lleva a un elemento de $H$, por definición). En consecuencia, podemos concluir que el conjunto de cosets $\{g_i H\}$ admite una estructura de grupo cuando $H$ es un subgrupo normal. Llamamos a este grupo *grupo cociente G/H.*

### 1.3.4 Producto Directo

> **Definición 1.6 — Producto Directo.** Decimos que un grupo $G$ es el producto directo de dos subgrupos $A$ y $B$, $G = A \otimes B$, cuando
> 1. Todos los elementos de $A$ conmutan con todos los de $B$.
> 2. Todo elemento de $G$ admite una expresión única en forma de $g = ab$ donde $a \in A$ y $b \in B$.

De esta definición se generaliza directamente el producto de $n$ subgrupos $G = A \otimes B \otimes ... \otimes J$.

- El único elemento que tienen en común $A$ y $B$ es el elemento neutro/identidad.
- El producto de dos elementos $g_1 = a_1 b_1$ y $g_2 = a_2 b_2$ implica:

$$g_1 g_2 = (a_1 b_1)(a_2 b_2) = a_1 a_2 b_1 b_2 = (a_1 a_2)(b_1 b_2) \tag{1.13}$$

  donde hemos aplicando la conutación $ba = ab$.
- Los grupos $A$ y $B$ son subgrupos normales. Que sean subgrupos es trivial (ya que $a/b$ puede ser el elemento neutro). Que sean subgrupos normales, no es tan trivial, aunque se pueden ver de que al ser $g = ab$:

$$gAg^{-1} = (ab)a_i(ab)^{-1} = aba_i a^{-1} b^{-1} = a a_i a^{-1} \tag{1.14}$$

y como $aa_ia^{-1} \in A$, queda demostrado.

- Los grupos cocientes $\frac{G}{B}$ y $\frac{G}{A}$ son isomorfos a $A$ y $B$ respectivamente. Esto es trivial si pensamos que $\frac{G}{B} = \{g_iB \quad \forall g_i \in G\}$, que al ser $g = ab$, $\frac{G}{B} = \{a_iB \quad \forall a_i \in A\}$. Evidentemente todos los cosets son distintos, ya que si suponemos que $a_1b_1 = a_2b_2$, entonces estaríamos violando la definición de *producto directo*. Entonces es evidente que existe una aplicación 1:1 entre $\frac{G}{B}$ y $A$, tal que $a_iB \longmapsto a_i$ es un *homomorfismo*, y esto se basa en la propiedad de subgrupo normal de $B$, que implica la ley de multiplicación $(a_1B)(a_2B) = a_1a_2N \longmapsto a_1a_2$.

Con frecuencia haremos también el producto directo de dos grupos $G \otimes G'$. Para obtenerlo basta con formar todas las parejas posibles de la forma $(g, g')$. Si $e$ y $e'$ son las identidades respectivas, $(e, e')$ es la identidad del producto directo. Vemos por tanto, qeu el orden del producto directo es el producto de los órdenes. El producto de pares se define mediante

$$(f, f')(g, g') = (fg, f'g') \tag{1.15}$$

Los elementos $(g, e')$ forman un subgrupo $\Gamma$ que es isomorfo a $G$, y lo mismo de $(e, g') \in \Gamma' \sim G$. Entonces el grupo de pares de elementos definido es el producto directo de $\Gamma$ y $\Gamma'$.

### 1.3.5 Centro de un grupo

**Definición 1.7 — Centro.** El centro $Z$ de un grupo $G$ se define como el subconjunto de elementos $z$ que conmutan con todos los elementos del grupo $Z = \{z \in G \quad | \; zg = gz \quad \forall \in G\}$

Claramente $Z$ es un subgrupo abeliano; además la propiedad que define el centro implica que es un subgrupo normal, puesto que cada elemento $z \in Z$ es una clase de conjugación completa $z = gzg(-1)$.

## 1.4 Ejercicios

**Ejercicio 1.1** Sea $G$ un grupo y considérese el centralizador asociado a un elemento $g \in G$. Demostrar que dicho centralizador es un subgrupo de $G$.

Definimos un centralizador como aquel subonjunto de elementos de $G$ que conmuta con todos los elementos del grupo. Por otro lado, un subgrupo $H$ de un grupo $G$ es un subconjunto de $G$ que a su vez forma un grupo bajo la misma ley de composición $G$.

Sea $h_1, h_2 \in H$, y $g \in G$. Si $H$ es el centro, es obvio que se debe verificar $H = gHg^{-1}$ siendo $H$ en realidad cualquier elemento del conjunto $H$. Así pues, decir que $h \in H$ es lo mismo que decir que $h \in gHg^{-1}$. Veamos que $e = geg^{-1}$, po lo que $e \in gHg^{-1}$, lo que implia que contiene el elemento neutro. Otro aspecto que hay que demostrar es que $gHg^{-1}$ es cerrado. Véase que $gh_1g^{-1}gh_2g^{(-1==gh_1h_2g^{-1}}$ por lo que un $h_1h_2 = h_3 \in H$. Además

$$gh_1g^{-1}gh_1^{-1}g^{-1} = gh_1h_1^{-1}g^{-1} = geg^{-1} \tag{1.16}$$

por lo que se cumple que $h_1h_1^{-1} = e$, y que además $h^{-1} \in H$. La asociatividad se deduce de que $h \in G$. Así pues, $H$ cumple los 4 requisitos para ser un grupo (cierre, asociatividad, elemento unidad y elemento inverso), y como $H \subset G$, podemos decir que *H es un subgrupo de G.*

# 2. Homomorfismos y Reducibilidad

## 2.1 Homomorfismos

Un homomorfismo es una aplicación $f$ de un conjunto $A$ en otro $B$ (escribimos $f : A \longmapsto B$) que preserva alguna estructura interna. En particular estamos interesados en la estructura de grupo de $A$ y $B$.

**Definición 2.1 — Homomorfismo.** sean $A$ y $B$ dos grupos y $f : A \to B$ una aplicación. Decimos enton es que $f$ es un homomorfismo cuando verifica que para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$:

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) \tag{2.1}$$

Cuando $B$ coincide con $A$ decimos que $f$ es un **endomorfismo**. Recordemos la definición de imagen y kernel de una aplicación:

$$\text{Im } f := \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algún } a \in A\} \tag{2.2}$$

$$\text{Ker } f := \{a \in A \mid f(a) = e_B \in B\} \tag{2.3}$$

Una aplicación es **inyecta** cuando Ker $f = e_A$. Si además Im $f = B$, $f$ es **suprayectiva**. Si es biyectiva y suprayectiva a la vez decimos que es la aplicaicón es **biyectiva** o 1:1. Si además $f$ es un homomorfismo (Ecuación (2.1)) es decimos que constituye un *isomorfismo*. Un *isomorfismo* $f : A \longmapsto A$ de un grupo en sí mismo se llama *automorfismo*.

## 2.2 Representaciones

### 2.2.1 Generalidades

**Definición 2.2 — Representación.** Una represetnación de dimensión $n$ de un grupo abstracto $G$ es un homomorfismo $D : G \to GL(n, \mathbb{C})$ el grupo de matrices $n \times n$ invertibles con coeficientes complejos.

En otras palabras, se trata de una aplicación $g \to D(g)$ que preserva la estructura de grupo en el sentido de que

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \tag{2.4}$$

donde en el miembro derecho el producto indica la multiplicación matricial. En virtud de homomorfismo tenemos que $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1}$
Deceimos que una representación es *fiel* si la aplicación es un homomorfismo inyectivo. Es decir, si cada elemento distinto $g$ le corresponde una matriz distinta $D(g)$. EN particular, este hecho impone

que $\mathrm{Ker}(D) = e \in G$, de donde se deduce que el único elemento representado por la matriz unidad es el elemento identidad de grupo.

**Definición 2.3 — Equivalencia entre Representaciones.** Dos representaciones n-dimensionales $D^1$ y $D^2$ de un grupo $G$ son equivalentes si $\forall g \in G$ las matrices $D^1(g)$ y $D^2(g)$ son similares, esto es, están relacionadas por una conjugación en $GL(n, \mathbb{C})$, lo que implica que existe una matriz $S$ independiente de $g$ tal que

$$D^1(g) = SD^2(g)S^{-1} \tag{2.5}$$

De nuevo, esta es una relación de equivalencia, por lo que estamos interesados en la clasificación de clases equivalentes. De forma implícita, a partir de ahora cuando hablemos de una representación, incluiremos todas sus equivalentes; es decir la consideraremos como una representación de la clase.

Todo grupo admite una representación trivial unidimensional en la que todo elemento viene representado por el número 1, aunque no es fiel, por razones evidentes.

## 2.3 Reducibilidad

**Definición 2.4 — Reducibilidad.** Decimos que una representación de dimensión $n + m$ es **reducible** si $D(g)$ admite la forma en bloques siguiente:

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \forall g \in G \tag{2.6}$$

donde $A(g)$ y $B(g)$ son matrices cuadradas de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente.

Por tanto, automáticamente $\{A(g)\}$ y $\{B(g)\}$ constituyen representaciones de $G$ de $n$ y $m$ dimensiones. Además también funciona a la inversa, dadas dos representaciones $A$ y $B$ siempre podemos formar una mayor mediante la suma directa:

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

que en este caso escribimos como $D = A \oplus B$, siendo la dimensión de $D$ la suma de las dimensiones de $A$ y $B$.

**Definición 2.5 — Completamente Reducible.** Una representación que admite (algún representante con) la forma dimensional de bloques

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

se dice que es **completatmente reducible** y se denota como $D = A \oplus B$.

**Definición 2.6 — Completamente Irreducible.** Una representación que *no* admite (algún representante con) la forma dimensional de bloques

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

y que no admite ninguna transformación de equivalencia se dice que es **completatmente irreducible**.

Las representaciones irreducibles de un grupo son las «piedras angulares» en el estudio de la teoría de represetnaciones de grupos, ya que una representación arbitraria siempre puede descomponerse en combinación lineal de representaciones irreducibles.

## 2.4 Ejercicios

**Ejercicio 2.1** Demuéstrese que si $G = H_1 \otimes H_2$, entonces $\frac{G}{H_1} \simeq H_2$ y que $\frac{G}{H_2} \simeq H_1$ donde $\simeq$ significa isomorfo.

Definimos como isomorfismo a cualquier a cualquier homomorfismo biyectivo (1:1), esto es, que la aplicación $f : A \to B$ (siendo $A$ y $B$ dos grupos cualquiera), verifique

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) \quad a_1, a_2 \in A \tag{2.10}$$

y que además sea inyectivo $f(e_A) = e_B$ y suprayectivo. La notación de nos dice que

$$\frac{G}{A} = \{eA, g_2 A, g_3 A, ..., g_s A\} \tag{2.11}$$

Así pues $\frac{G}{A}$ representa el conjunto de cosets por la izquierda, que es grupo por ser $A$ normal (lo que viene, a su vez, del producto directo). Por otro lado, que $G = A \otimes B$ implica que todos los elementos $a \in A$ conmuta con $b \in B$, y que

$$\forall g \in G \quad g = ab \quad a \in A \quad b \in B \tag{2.12}$$

además $g = ab = a'b' \Rightarrow a = a', b = b'$. Resulta casi trivial entonces que es un isomorfismo. Dado que

$$\frac{G}{A} = \{eA, g_2 A, g_3 A, ..., g_s A\} \tag{2.13}$$

y que $g_i = a_i b_i$. Entonces es obvio que los elementos de $\frac{G}{A}$ son de la forma $\frac{G}{A} = \{b_1 A, b_2 A, b_3 A, ..., b_s A\}$ ya que $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$. La aplicación $f : \frac{G}{A} \to B$ es evidente:

$$f(g_i A) = f(b_i A) = b_i A A^{-1} = b \tag{2.14}$$

Veamos que:

- Es un homomorfismo:

$$f\left(b_i A b_j A\right) = f\left(b_i b_j A\right) = b_i b_j \quad f(b_i A) f\left(b_j A\right) = b_i b_j \tag{2.15}$$

  donde hemos usado que $b_i A b_j A = b_i b_j A$ que se deduce de que $A$ y $B$ conmutan (sus elementos).

- Es inyectiva:

$$f(e_B e_A) = e_B \tag{2.16}$$

  siendo obviamente $e_B e_A$ el elemento neutro de $\frac{G}{A}$ y $e_B$ el elemento neutro de $B$.

- Es sobreyectiva, ya que se generan todos los elementos de $B$ al hacer la aplicación $f\left(\frac{G}{A}\right)$.

por lo que hemos demostrado que efectivamente $\frac{G}{A} \simeq B$. De manera análoga para $\frac{G}{B} \simeq A$. Se optó por la notación $A, B$ frente a $H_1, H_2$ por que es, para el autor, más claro.

**Ejercicio 2.2** Considérese el conjunto de las matrices complejas de dimensión $n \times n$ no singulares $GL(n)$: no singulares con determinante 1, $SL(n)$; unitarias, $U(n)$; y unitarias con determinante 1, $SU(n)$. Demuestre que $GL(n)$ es un grupo y que $SL(n)$, $U(n)$ y $SU(n)$ son subgrupos de $GL(n)$.

Lo primero que tenemos que demostrar es que $GL(n)$ es grupo, lo que lleva a demostrar la *propieda de cierre, inversa y neutro*. Así:

- **Cierre**. Sean $A, B \in GL(n)$. Entonces
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0, \tag{2.17}$$
ya que $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$. Por tanto
$$AB \in GL(n) \tag{2.18}$$
.
- **Asociatividad**. La asociatividad del producto se hereda del producto matricial en $M_{n(F)}$:
$$(AB)C = A(BC) \quad \forall A, B, C \in GL(n). \tag{2.19}$$
- **Elemento neutro**. El elemento neutro es la matriz identidad $I_n$, que verifica
$$I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in GL(n), \tag{2.20}$$
y además
$$\det(I_n) = 1 \neq 0. \tag{2.21}$$
Luego
$$I_n \in GL(n) \tag{2.22}$$
.
- **Inverso**. Sea $A \in GL(n)$. Como $\det(A) \neq 0$, la matriz $A$ es invertible y existe
$$A^{-1} \in M_{n(F)} \tag{2.23}$$
tal que
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n. \tag{2.24}$$
Además,
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \neq 0, \tag{2.25}$$
por lo que
$$A^{-1} \in GL(n) \tag{2.26}$$
.

Como se satisfacen las propiedades de cierre, asociatividad, elemento neutro e inverso, concluimos que $GL(n)$ es un grupo.

La única propiedad que tenemos que demostrar es la *propiedad de cierre*, inversa y neutro, ¿Son también subgrupos?

- El conjunto $SL(n)$. La relación de determinantes exige que

$$A \cdot B = C \quad \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(C) \tag{2.27}$$

  por lo que $C \in SL(n)$. Luego, ¿$A^{-1} \in SL(n)$? Veamos que

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)} \tag{2.28}$$

  y como $\det(A) = 1 \Rightarrow \det\left(A^{-1}\right) = 1$. La asociatividad se hereda, y dado que el neutro de $SL(n)$ es la matriz identidad de determinante 1, queda claro que $SL(n)$ es subgrupo de $GL(n)$.

- La característica de unitario implica que

$$\forall U \in U(n) \quad UU^\dagger = \mathbb{I} \tag{2.29}$$

  . Supogamos entonces que $U, V \in U(n)$, entonces

$$UV = W \quad W^\dagger = (UV)^\dagger \text{ tal que } WW^\dagger = (UV)(UV)^\dagger = (UV)\left(V^\dagger U^\dagger\right) = \mathbb{I} \tag{2.30}$$

  por lo que se demuestra la propieda de cierre. La inversa de $U$ sería $U^\dagger$, y como $U^\dagger \in U(n)$, también se verifica la propiedad de inverso. La propiedad de nuetro es trivial si recordamos que es la identidad su neutro. Es obvio que $\mathbb{I}\mathbb{I}^\dagger = \mathbb{I}$ ya que $\mathbb{I}^\dagger = \mathbb{I}$.

- La característica de unitario implica que

$$\forall U \in SU(n) \quad UU^\dagger = \mathbb{I} \tag{2.31}$$

  . Supogamos entonces que $U, V \in SU(n)$, entonces

$$UV = W \quad W^\dagger = (UV)^\dagger \text{ tal que } WW^\dagger = (UV)(UV)^\dagger = (UV)\left(V^\dagger U^\dagger\right) = \mathbb{I} \tag{2.32}$$

  por lo que se demuestra la propieda de cierre. Por otro lado la relación de determinantes exige que, si $U, V \in SU(2)$:

$$U \cdot V = W \quad \det(U, V) = \det(U) \cdot \det(V) = \det(W) \tag{2.33}$$

  por lo que $W \in SU(n)$. Luego, ¿$U^{-1} \in SU(n)$? Veamos que:

$$\det\left(U^{-1}\right) = \frac{1}{\det(U)} \tag{2.34}$$

  y como

$$\det(U) = 1 \Rightarrow \det\left(U^{-1}\right) = 1 \tag{2.35}$$

.La inversa de $U$ sería $U^\dagger$, y como $U^\dagger \in SU(n)$, también se verifica la propiedad de inverso. Por ser la identidad $\mathbb{I}$ eutro y unitario, también se veriifca neutro y por la asociatividad es heredada.

# 3. Grupos finitos

## 3.1 Introducción

Un grupo finito de elementos se llama *grupo finito*. El número de elementos es el *orden* del grupo.

La forma más inmediata de representar un grupo finito consiste en mostrar su tabla de multiplicación, también llamado *cuadrado latino*. Por ejemplo, el grupo cíclico $C_3$ es el conjunto de elementos $\{e, b, c\}$ dotados de la tabla de multiplicación:

| | e | b | c |
|---|---|---|---|
| e | e | b | c |
| b | b | c | e |
| c | c | e | b |

Aunque precisa, esta forma de caracterizar un grupo es engorrosa para grupos finitos de orden alto, por ser tan exhaustiva. Otra manera conmunmente utilizada para determinar un grupo finito consiste en especificar su *presentación*. Una presentación consiste en un conjunto de relaciones que indentifican elementos de $\mathcal{F}_n$, el grupo libre de $n$ generadores. por ejemplo, un grupo libre abeliano es un grupo libre ordenado donde imponemos la identificación de elementos $x_i x_j = x_j x_i$ para cualquier $i, j$.

## 3.2 Grupo Cíclico $C_n$

**Definición 3.1 — Grupo Cíclico.** El **grupo cíclico $C_n$** es el grupo de transformaciones de simetría de un polígono regular con $n$ lados y direccionado. Por «direccionar» entendemos que el polígono lleva asociado un sentido de recorrido alrededor de su perímetro (equivalente a decir «en el sentido de las agujas del reloj»). Los elementos del grupo son rotaciones discretas del ángulo $2\pi \frac{r}{n}$ con $r = 0, 1, \ldots n - 1$ alrededor de este eje de rotación, que atraversaría el «centro de gravedad» del polígono.

Llamando a estos elementos $c_n^r$ es evidente que podemos obtener este elemento a partir de una rotación elemental $c_n^1 = c$, es decir,

$$c_n^r = c^r \tag{3.1}$$

En principio el grupo está generado por potencias arbitrariamente altas de esta operación elemental, $c$. Sin embargo, notemos que el grupo finito debido a que una rotación de ángulo $2\pi$ es equivalente a la identidad:

$$c^n = e \tag{3.2}$$

podemos por tanto definir matemáticamente el grupo cíclico de orden $n$ como el grupo de elementos *generados* por $c$, consistente en elementos $\left\{e, c, c^2, \ldots, c^{\{n-1\}}\right\}$.

Obviamente se trata de un grupo Abeliano, ya que

$$c^r c^s = c^{r+s} = c^s c^r \tag{3.3}$$

de hecho es *isomorfo* al grupo $\mathbb{Z}_n$. La correspondencia es 1:1 tal que

$$c^r \in C_n \longleftrightarrow r \in \mathbb{Z}_n \tag{3.4}$$

y esta correspondencia es un homomorfismo, lo que hace que preserve las opraciones respectivas de ambos conjuntos. Al tratarse de un grupo abeliano, cada elemento constituye su propia clase de conjugación.

**Ejemplo 3.1** Vamos a representar el grupo $C_6$ como el producto directo de subgrupos. Fácilmente $C_6 = A \otimes B$ implica que

$$A = \{e, c^2, c^4\} \qquad B = \{e, c^3\} \tag{3.5}$$

# 3.3 Grupo Dihédrico $D_n$

**Definición 3.2 — Grupo Dihédrico.** El **grupo dihédrico $D_n$** es el grupo de transformaciones de simetría de un polígono regular con $n$ lados no direccionado.

Ahora, no solo tenemos «rotaciones», como el grupo cíclico. Este grupo contiene otras simetrías, como podrían ser las «simetrías espejo» (por ejemplo, por ejemplo cambiar el lado izquierdo y el derecho de un cuerpo humano, lo cual no se puede hacer con rotaciones). Para entenderlo estudiaremos el grupo $D_3$ y $D_4$

## 3.3.1 Grupo $D_3$

Este grupo contiene trivialmente los elementos $\{e, c, c^2\}$ del grupo cíclico. Además tendrá los elementos $x, y, z$, que serían las rotaciones de 180 grados en torno a los ejes $x, y, z$. Estas operaciones satisfacen $x^2 = y^2 = z^2 = e$

Se puede entender el grupo $D_3$ como el *grupo de simetrías del triángulo*. Entonces

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, y, z\} \tag{3.6}$$

Además como $y = cx$ y $z = c^2x$, Entonces

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, xc, xc^2\} \tag{3.7}$$

Dado que $e = c^3$ o $e = x^2$, es obvio que todos los elementos de $D_3$ pueden ser construidos a partir de dos elementos $c$ y $x$.

# 3.4 Grupo Simétrico $S_n$

## 3.4.1 Definición y características

El grupo simétrico es uno de los grupos más interesantes. Desde el punto de vista de un físico, los grupos simétricos aparecen en sistemas qeu involucran conjuntos de partículas idénticas. Dentro del ámbito de la teoría de grupos es importante en virtud del teorema de Cayley.

**Definición 3.3 — Grupo Simétrico.** El **grupo simétrico** $S_n$ se define como las posibles permutaciones o sustituciones de $n$ elementos (o índices qeu los etiquetan), conteniendo por tanto $n!$ elementos, de lo que se deduce que el orden es $n!$. La *ley de composición* es la aplicación sucesiva. De esto se deduce que el grupo es *no abeliano* (no conmuta).

Existen dos represetnaciones análogas, a saber, la **forma canónica** y la **descomposición en ciclos**. La forma canónica básicamente implica que un *elemento genérico* p se puede escribir como

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

que nos dice que el índice $i$ es cambiado por el índice $p(i)$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

nos dice que el elemento 1 corresponde con índice 1, el elemento 2 al índice 2 y el elemento 3 al índice 3. Sin embargo si nos fijamos en

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Vemos que lo que antes era el índice 2 ahora se denota por 3 y el elemento 3 se denota por 2, es decir, *el elemento de índice 2 y 3 se intercambian.* Esto se puede ver en la parte inferior. Así pues, la multiplicación es la aplicación sucesiva.
Por ejemplo, el objeto resultante de la aplicación sucesiva de un primer objeto intercambia 2 y 3, y un segundo que intercambia 1 y 2, lo que ocurrirá es que en el objeto objeto resultante el elemento 1 tendrá índice 3, el elemento 2 índice 1 y el elemento 3 índice 2. Veamos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Una vez se entienda lo que queremos decir el resto será un simple ejercicio abstracto sistemático más o menos complejo, pero sin misterios. Esta que hemos trabajado ahora es la *forma canónica.*

La **descompsición en ciclos** de los elementos nos dice que $(ijkl...z)$ representa un elemento donde el elemento de índice $i$ se intercambia con el elemento de índice $j$, el $j$ con la del $k$... y así sucesivamente hasta que el último $z$ se intercambia por el primero $i$. Si un índice no se intercambia no aparece en la representación. Así obviamente el *elemento neutro* (no intercambio) para cualquier grupo es $()$. Veamos un ejemplo relacionando ambas notaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (123) \tag{3.12}$$

A priori puede parecer que tiene más complicación la descomposición en ciclos, aunque es evidente que ocupan menos espacio. Veamos que:

- Dos ciclos son el mismo si coinciden salvo permutación cíclica de sus elementos.
- Cíclos de un elemento pueden ser omitidos.
- Ciclos disjuntos conmutan entre sí.

- Ciclos que tengan un sólo elemento en común se encadenan (1234)(43) = (124)

Independietemente de la forma que el lector considere más adecuadas, el punto más importante que queremos hacer aquí es que todo elemento $S_n$ puede escribirse en forma de un producto de ciclos disjuntos.

---

**Ejemplo 3.2** Uno podría preguntarse cuales son los elementos del grupo $S_3$. Dado que $3 \neq 6$, sabemos que tiene 6. Estos son:

$$S_3 = \{(), (12), (23), (13), (123), (321)\} \tag{3.13}$$

Es evidente que $(21) = (12)$, $(123) = (312)$... En ese sentido cada elemento tiene varias representaciones.

---

### 3.4.2 Representación de $D_3$:

Vamos a hacer una representación de $D_3$ Obviamente ccogeremos la representación con los vectores

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Dado que todos los elementos del grupo $S_3 = \{(), (123), (132), (12), (23), (13)\}$ están compuestos por $(12)$ y $(123)$, basta con conocer las representaciones de $(12)$, $(123)$. Evidentemente en esta base

$$D(()) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \tag{3.15}$$

y tenemos que

$$D((12))^2 = \mathbb{I} \qquad D((123))^3 = \mathbb{I} \tag{3.16}$$

Podemos obviamente escribir $D((123)) = D((12)) = \mathbb{I}$, obteniendo la representación trivial, o escribir $D((123))) = \mathbb{I}$ y $D((12)) = -\mathbb{I}$. En general, podemos calcularlo suponiendo que $D((12)))$ y $D((123))$ son matrices $3 \times 3$ generales y usar propiedades como la anteriores para deducir término a término. Sin embargo esto sería largo y tedioso. No es dificil ver que para llegar a la representación podemos aplicar conceptos «sencillos».

Está claro que (12) representa la permutación del 1 con el 2, es decir que si $D((12))\hat{e}_1 = \hat{e}_2$, y que si $D((12))\hat{e}_2 = \hat{e}_1$. La matriz que verifica esto es:

$$D((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Por otro lado, la matriz D(123) es aquella tal que $D((123))\hat{e}_i = \hat{e}_i + 1$ (para $i = 1, 2, 3$ y $i = 4 = 1$). Así pues:

$$D((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Con estas dos podmeos encontrar la expresión de las demás, o seguir aplicando estos conceptos sencillos. En cualquier caso la descomposición natural:

$$D((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

### 3.4.3 Teorema de Cayley

Ya hemos dicho que el grupo simétrico es uno de los más importantes, ¿por qué? Por el teorema de Cayley:

**Teorema 3.1 — Teorema de Cayley.** El **teorema de Cayley** afirma que todo grupo $G$ finito de orden $n$ es isomofro a algún subgrupo de $S_n$.

## 3.5 Ejercicios

**Ejercicio 3.1** Construir la tabla de multiplicación del grupo diédrico $D_3$ o grupo de simetrías del triángulo equilátero.

El grupo $D_3$ está formado por

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, y, z\} \tag{3.20}$$

La tabla de multiplicación es:

| | $e$ | $c^1$ | $c^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $c^1$ | $c^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $c^1$ | $c^1$ | $c^2$ | $e$ | $y$ | $z$ | $x$ |
| $c^2$ | $c^2$ | $e$ | $c_1$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $x$ | $x$ | $z$ | $y$ | $e$ | $c_2$ | $c_1$ |
| $y$ | $y$ | $x$ | $z$ | $c_1$ | $e$ | $c_2$ |
| $z$ | $z$ | $y$ | $x$ | $c_2$ | $c_1$ | $e$ |

donde hemos supuesto que multiplica por la izquierda primero, así pues

| | $b$ |
|---|---|
| $a$ | $ab$ |

**Ejercicio 3.2** Haciendo uso de la notación mediante ciclos, constrúyase la tabla de multiplicación del grupo simétrico $S_3$. Compárese esta tabla con la obtenida para el grupo diérico $D_3$ y estúdiese si estos grupos son isomorfos.

El grupo simétrico $S_3$ está formado por

$$S_3 = \{(), (12), (23), (31), (123), (132)\} \tag{3.21}$$

tal que la tabla de multiplicación es:

| | $()$ | $(12)$ | $(23)$ | $(31)$ | $(123)$ | $(132)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $()$ | $()$ | $(12)$ | $(23)$ | $(31)$ | $(123)$ | $(132)$ |
| $(12)$ | $(12)$ | $()$ | $(132)$ | $(123)$ | $(31)$ | $(23)$ |
| $(23)$ | $(23)$ | $(123)$ | $()$ | $(132)$ | $(12)$ | $(31)$ |
| $(31)$ | $(31)$ | $(132)$ | $(123)$ | $()$ | $(23)$ | $(12)$ |
| $(123)$ | $(123)$ | $(23)$ | $(31)$ | $(12)$ | $(132)$ | $()$ |
| $(132)$ | $(132)$ | $(31)$ | $(12)$ | $(23)$ | $()$ | $(123)$ |

Si comparámos esta tabla con $D_3$ encontramos la relación $f : D_3 \to S_3$ tal que:

$$e \to () \quad x \to (12) \quad y \to (23) \quad z \to (31) \quad c \to (123) \quad c^2 \to (132) \tag{3.22}$$

vemos que se preserva tanto la tabla de multiplicación, lo que implica qeu es un homomorfismo. Además, dado que $f(e) = ()$ es inyectivo (i.e. ker(f)=e), y como $\mathrm{Im}(f) = S_3$, también es sobreyectivo. Por ser homomorfismo y biyectivo, $D_3$ y $S_3$ son isomorfos.

> **Ejercicio 3.3** Demúestre que las clases de conjugación del grupo simétrico $S_n$ están formadas por los elementos de $S_n$ que en la notación de ciclos tiene la misma estructura.

Las clases de conjugación son el conjunto de elementos con la relación de conjugación. Decimos que $g_1$ y $g_2$ son *conjugados* si

$$g_1 = g g_2 g^{-1} \quad \text{para algún} \quad g \in S_n \tag{3.23}$$

Es trivial que para un grupo abeliano cada elemento es su propia clase de conjugación. Sin embargo estamos ante un grupo no abeliano, por lo que no es trivial.

Definimos longitud $\lambda$ como el número de elementos de $h = (h_1, ..., h_\lambda)$. Queremos demostrar que $g_1$ y $g_2$ tienen la misma longitud. Supongamos que $g_1$ y $g_2$ tal que $g_2 = gg$ Sea $g$:

$$g = (a_1, a_2, ..., a_k) = (a_1 a_2)(a_2 a_3)...(a_{k-1} a_k)(a_k a_1) \tag{3.24}$$

por otro lado

$$g^{-1} = (a_1 a_k)(a_k a_{k-1})...(a_2 a_1) \tag{3.25}$$

es decir, tenemos la misma longitud tanto en $g$ como en $g^{-1}$. Por otro lado, si descomponemos $g_1$ a la vez:

$$g_1 = (b_1 b_2)...(b_{r-1} b_r) \tag{3.26}$$

donde $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$, $(i, j = 1, 2, ...r)$, por que si fuera así, podríamos expresar $g_1$ con $r - 1$ términos. Vemos claramente que podemos hacer

$$g_1 = (b_1 b_2) g^{-1} g (b_2 b_3) g^{-1} g ... g^{-1} g (b_{r-1} b_r) \tag{3.27}$$

dado qeu $g^{-1} g = e$. De esto se deduce que

$$g_2 = g(b_1 b_2) g^{-1} g (b_2 b_3) g^{-1} ... g (b_{r-1} b_r) g^{-1} \tag{3.28}$$

Lo siguiente que tenemos que hacer es demostrar que $g(b_i b_j) g^{-1}$ tiene longitud 2 consideremos dos casos

- Pongamos que $(b_i b_j)$ no conicide con ningún $a_i \in g$. Entonces es disjunto de $g$, lo que implica que podemos hacer $g(b_i b_j) = (b_i b_j) g$ de lo que se deduce que $g(b_i b_j) g^{-1} = (b_i b_j)$ y por tanto que tiene longitud 2.
- Otro caso es aquel en el que solo uno de los elementos $(b_i, b_j)$ sí coincide con algún $a_i \in g$ (por ejemplo $b_i = a_i$, sin pérdida de generalidad) Dado que podemos hacer rotaciones cíclicas en $g$, siempre podremos expresar $g(b_i b_j) g^{-1}$ como $(a_i a_{i+1})(b_i b_j)(a_{i+1} a_i) = (a_i a_{i+1})(a_i b_j)(a_{i+1} a_i) = (a_i a_{i+1} a_i b_j a_{i+1}) = (b_j a_{i+1})$ que también tiene longitud 2.
- Si $(b_i, b_j)$ coindice con un par de $g$, $(b_i, b_j) = (a_i, a_{i+1})$, es evidente que $g(b_i b_j) g^{-1} = (b_i b_j)$ por la misma razón.

Al no coincidir $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$, se verifica que

$$g(b_1 b_2)g^{-1} g(b_2 b_3)g^{-1} ... g(b_{r-1} b_r)g^{-1} \tag{3.29}$$

se puede expresar con longitud $r$, demostrando que $g_2$ y $g_1$ tienen la misma estructura (longitud). La razón por la que es indispensable $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$ es obvia: $a_{i+1}$ puede coincidir con un $b_k$ cualquiera, lo que haría que $g(b_k b_{k+1})g^{-1} = a_{i+2} b_k$, haciendo que el $a_{i+1}$ que aparecería antes volviese a ser único. Podríamos hacer esto recurrisivamente, pero siempre va a pasar que el $a_{i+1}$ se enontrará solo (dado que estamos denotando índices, *todo mantiene la máxima generalidad*). Si ocurriera que $b_i = b_j$ si $i \neq j$, entonces aparecerían 2 $a_{i+1}$, lo que implicaría que se podría expresar con $r - 1$.

Sin embargo como hemos impuesto que esto no pasa, hemos demostrado el enunciado, probablemente de la forma más tosca, bruta y fea posible, pero lo hemos hecho.

> **Ejercicio 3.4** Considérese el grupo formado por tres elementos $A$, $B$ y $C$ satisfaciendo las relaciones $A^p = B^q = C^r = 1$ con $p, q, r \in Z^+$. Si $p = 3$, $q = 2$ y $r = 2$, se tiene un grupo isomorfo al grupo diédrico $D_3$.

A primera vista parece que nuestro grupo tiene ciertas similitudes con un *grupo cíclico*. La pregunta es, ¿cuales son los elementos del grupo? Primero tenemos que descartar algunos. Es evidente que los elementos inversos de $B$ y $C$ son ellos mismos $BB = CC = e$. Por otro el elemebnto inverso de $A$ es $A^2$ ya que $AA^2 = e$.

Luego tenemos la relación $ABC = e$, con el que podemos obtener algunas relaciones más. (132)

$$ABC = e \to ABCC^{-1} = C^{-1} \to AB = C \tag{3.30}$$

El hecho de que $C = AB$ nos elimina todas los elementos con $C$ al ser redundantes. Como solo tenemos esta «ligadura», no podemos deducir más términos, por lo que $G$ estará compuesto de $e, A, A^2, B$ y sus términos cruzados:

$$G = \{e, A, A^2, B, BA, BA^2, AB, A^2B\} \tag{3.31}$$

Por definición $AB$ será el inverso de $BA^2$, y $A^2B$ será el inverso de $BA$.

$$ABC = e \to AB(AB) = e \to ABA = B \to AB = BA^2 \tag{3.32}$$

de lo que se deduce que $BA$ y $BA^2$ son mutuamente inversos. En conclusión, el $G$ que pusimos antes *no es correcto*, por lo que

$$G = \{e, A, A^2, B, BA, BA^2\} \tag{3.33}$$

Y esto si se puede relacionar con $D_3$, ya que la tabla de multiplicación:

| | $e$ | $A$ | $A^2$ | $B$ | $BA$ | $BA^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $A$ | $A^2$ | $B$ | $BA$ | $BA^2$ |
| $A$ | $A$ | $A^2$ | $e$ | $BA^2$ | $B$ | $BA$ |
| $A^2$ | $A^2$ | $e$ | $A$ | $BA$ | $BA^2$ | $B$ |
| $B$ | $B$ | $BA$ | $BA^2$ | $e$ | $A$ | $A^2$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $BA$ | $BA$ | $B$ | $A$ | $A^2$ | $e$ | $A$ |
| $BA^2$ | $BA^2$ | $A^2$ | $B$ | $A$ | $A^2$ | $e$ |

la cual es mucho más sencilla de calcular que $D_3$ o $S_3$. Si comparamos las tablas de multiplicar se ve la siguiente aplicación

$$f : D_3 \to G \qquad e \to e \quad x \to B \quad y \to BA \quad z \to BA^2 \quad c \to AA \quad c^2 \to A^2 \tag{3.34}$$

que se ve, por preservar la tabla de multiplicación, por el kernel y por la imagén, que es biyectiva.

**Ejercicio 3.5** Determinar todos los subgrupos del grupo diédrico $D_3$. Estudiar cuales son subgrupos invariantes y para cada ellos construir un espacio de cosets.

El grupo diédrico $D_3$ tiene la siguiente tabla de multiplicar:

| | $e$ | $c^1$ | $c^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $c^1$ | $c^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $c^1$ | $c^1$ | $c^2$ | $e$ | $y$ | $z$ | $x$ |
| $c^2$ | $c^2$ | $e$ | $c_1$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $x$ | $x$ | $z$ | $y$ | $e$ | $c_2$ | $c_1$ |
| $y$ | $y$ | $x$ | $z$ | $c_1$ | $e$ | $c_2$ |
| $z$ | $z$ | $y$ | $x$ | $c_2$ | $c_1$ | $e$ |

de lo que se pueden deducir los 6 subgrupos son:

$$H_1 = \{e\}, \quad H_2 = \{e, c, c^2\} \quad H_3 = D_3 \tag{3.35}$$

$$H_4 = \{e, x\}, \quad H_5 = \{e, y\} \quad H_6 = \{e, z\} \tag{3.36}$$

Mirando la tabla de multiplicar se deduce que sus coindiciones de cerrados. Además verifican el inverso, asociatividad y neutro, aunque estas 3 son propiedades heredadas. Expresemos $D_3$ en su forma canónica:

$$D_3 = \left\{e, c, c^2, x, xc, xc^2\right\} \tag{3.37}$$

Por otro lado, nos piden el espacio de cosets para $\frac{D_3}{H}$ siendo $H$ los subgrupos. Supongamos un elemento $g \in G$. El *conjunto de elementos* ***coset*** $gH$ es:

$$gH = \left\{gh_1, g_{h_2}, ...\right\} \tag{3.38}$$

Definimos el **espacio de cosets** $\frac{G}{H}$ como el conjunto de conjutos coset, es decir:

$$\frac{G}{H} = \{g_1 H, g_2 H ...\} = \{\{g_1 h_1, g_1 h_2 ...\}, \{g_2 h_1, g_2 h_2 ...\} ...\} \tag{3.39}$$

Así pues los espacios de cosets para cada subgrupo:

- Sea $H = \{e\}$. Entonces: $\frac{D_3}{H} = \{\{e\}, \{c\}, \{c^2\}, \{x\}, \{xc\}, \{xc^2\}\}$ que se ded

- Sea $H = \{e, c, c^2\}$. Entonces: $\frac{D_3}{H} = \{\{e, c, c^2\}, \{x, c, c^2\}$
- Sea $H = \{e, x\}$. Entonces: $\frac{D_3}{H} = \{\{e, x\}, \{c, xc\}, \{x, c^2\}\}$
- Sea $H = \{e, xc\}$. Entonces: $\frac{D_3}{H} = \{\{e, xc\}, \{c, xc^2\}, \{c^2, x\}\}$
- Sea $H = \{e, xc^2\}$. Entonces: $\frac{D_3}{H} = \{\{e, xc^2\}, \{c, x\}, \{c^2, xc\}\}$
- Sea $H = \{D_3\}$. Entonces: $\frac{D_3}{H} = \{D_3\}$

**Ejercicio 3.6** Constrúyase una representación bidimensional del grupo diédrico $D_3$ estudiando su acción en el espacio bidimensional $\mathbb{R}^2$. Estúdiese si se trata de una representación irreducible.

**Ejercicio 3.7** Descompóngase la representación natural de dimensión tres de $S_3$ en términos de sus representaciones irreducibles.

Podemos aplicar algunos teoremas para hallar las dimensiones que necesitamos. El primer teorema es aquel que nos dice que *el número de representacioens irreducibles no equivalente de un grupo finito $G$ es igual al número de clases de conjugación.* Dado qeu $S_3$ tiene 3 clases de conjugación, el número máximo de representaciones irreducibles es 3.

Otro teorema nos dice que *la suma de cuadrados de las dimensiones de las representaciones irreducibles no equivalentes de un gurpo finito $G$ es igual al orden del grupo.* Es decir, $\sum_i (\dim(D_i))^2 = 6$, lo que nos dice que 1 representación tiene dimensión 2, y hay otras 2 representaciones con dimensión 1.

**Ejercicio 3.8** Costrúyase todas las representaciones del grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$

**Ejercicio 3.9** Construir la representación irreducible de dimensión 2 del grupo simétrico $S_3$ y demostrar que es equivalente a la obtenida a partir del gurpo diédrico $D_3$.

# II

# Grupos Continuos

# 4. Grupos de Lie

## 4.1 Introducción a grupos de Lie

En los grupos continuos los elementos pueden parametrizarse en un entorno pueden parametrizarse en un entorno de cualquier punto mediante un conjunto de variables reales. Escribimos entonces para un elemento genérico $g(x_1, x_2, ..., x_d) = g(\boldsymbol{x})$ Si $d$ es el número de mínimos parámetros necesarios para alcanzar a cualqueir elemento, hablamos de un grupo de *dimensión* $d$.

Es evidente que no podemos escribir una tabla de multiplicar en el mismo sentido que para un grupo finito. Si el producto $g(\boldsymbol{x})$ por $(g(\boldsymbol{y}))$ es $g(\boldsymbol{z})$ tenemos qeu

$$g(x_1, x_2, ..., x_d) g(y_1, y_2, ..., y_d) = g(z_1, z_2, ..., z_d) \tag{4.1}$$

entonces los parámetros $z_1, ..., z_d$ son funciones de $x_i, y_i$. Es decir, la tabla de multiplicación consta de $n$ funciones reales de $2d$ argumentos, $z_i = f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tal que $i = 1, ..., d$.

Las propiedades que definen un grupo imponen restricciones sobre las posibles funciones $f_i$. La más severa es la que proviene de la asociatividad:
$(g(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}))g(\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{x})(g(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{z}))$

**Definición 4.1 — Grupo de Lie.** Un **grupo de Lie** es un grupo continuo en el cual las funciones $f_i$ que expresan las multiplicaciones a parte de satisfacer los requisitos que provienen de las proviedades de grupo son $C^\infty$ (contínuas e infinitamente derivables)

## 4.2 Represetnaciones de Grupos de Lie

### 4.2.1 Grupos Unitarios

### 4.2.2 Grupos Ortogonales

## 4.3 Estructura Local de los Grupos de Lie

### 4.3.1 Generadores Infinitesimales de un Grupo de Lie

### 4.3.2 Álgebras de Lie y Grupos de Lie

**Definición 4.2 — Álgebra de Lie.** Un **álgebra de Lie** $\mathcal{L}$ de dimensión $d \geq 1$ es un espacio vectorial real de dimensión $d$, dotado de una operación interna llamada **corchete de Lie** $[,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, definida para todo par $u, v \in \mathcal{L}$ y que satisface las siguientes propiedades:

- **Cierre**: $[u, v] \in \mathcal{L} \quad \forall u, v \in \mathcal{L}$
- **Antisimetría**: $[u, v] = -[v, u]$
- **Linealidad**: $[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$ para $a, b \in \mathbb{R}$
- **Identidad de Jacobi** $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$

El concepto álgebra de Lie es una defineión abstracta qeu en cada caso requiere una defineión para el concrete de Lie subyacente. Así pues, en la mecánica clásica tendríamos uno, al igual que en la mecánica cuántica, siendo ambos diferentes.

Dada una base $L_1, .., L_d$, un álgebra de Lie viene especificada por un conjunto de $d^3$ números $f_{ij}^k$ denominados **constantes de estructura** que se definen según la siguiente expresión:
$[L_i, L_j] = \sum_{\{k=1\}}^{d} f_{\{ij\}}^{k} L_k \qquad i, j = 1, ..., d$
Estos números no son independientes como se deduce de las propiedades de *antisimetría e identidad de Jacobi.*

Frente a cambios de bae $L_i \to \widetilde{L_\imath}$ con $i = 1, ..., d$ ...

**Teorema 4.1 — Tercer teorema de Lie.** A cada grupo de Lie lineal, $G$, le corresopnde un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de la misma dimensión. De forma maś precisa, si $\mathcal{L}$ tiene dimensión $d$, entonces los generadores infenitesimales $L_1, ..., L_d$ forman una base de $\mathcal{L}$.

## 4.4 Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie

## 4.5 Ejercicios

# 5. Rotaciones

## 5.1 Grupo $O(3)$

## 5.2 Grupo $SU(2)$