

Daniel Vázquez Lago

Física de Partículas



Índice general

Introducción

1 Ejercicios	3
Ejercicios	3
Bibliografía	15

Capítulo 1

Ejercicios

Ejercicio 1.1 – Espinores

Sean ψ_{\downarrow} y ξ_{\uparrow} dos espinores de Weyl zurdos y diestros independientes, respectivamente. Demuestre que $\xi_{\uparrow}^{\dagger} \sigma^{\mu} \psi_{\uparrow}$ y $\xi_{\downarrow}^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \psi_{\downarrow}$ son cuatro-vectores contravariantes, donde $\sigma^{\mu} \equiv (1, \boldsymbol{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^{\mu} \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$.

Al ser $\sigma^{\mu} = (1, \boldsymbol{\sigma})$, la demostración se puede dividir en dos fases, en demostrar que $v^0 = \xi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}$ y que $v^i = \xi_{\downarrow}^{\dagger} \bar{\sigma}^i \psi_{\downarrow}$ (así mismo para los espinores R) son efectivamente invariantes Lorentz. Las transformaciones de Lorentz sobre un eje (por ej. el eje x):

$$V^0 \rightarrow V'^0 = \cosh(\eta) V^0 + \sinh(\eta) V^1 \quad (1.1)$$

$$V^1 \rightarrow V'^1 = \cosh(\eta) V^1 + \sinh(\eta) V^0 \quad (1.2)$$

siendo $V'^2 = V^2$ y $V'^3 = V^3$. Con hacerlo sobre un eje basta, ya que siempre podremos encontrar un sistema de referencia donde el boost sea sobre ese eje x . Si nuestros cuatro-vecotres siguen dichas transformaciones, podemos decir que son contravariantes. Veamos uno por uno los dos casos:

- Caso $\xi_{\uparrow}^{\dagger} \sigma^{\mu} \psi_{\uparrow}$. Una transformación Lorentz para los espinores de Weyl a derechas es:

$$\Lambda_{\uparrow} = \exp((-i\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (1.3)$$

y recordemos que

$$v^0 = \xi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} \quad v^i = \xi_{\uparrow}^{\dagger} \bar{\sigma}^i \psi_{\uparrow} \quad (1.4)$$

Si el boost lo hacemos en el eje x , el único valor no nulo de $\boldsymbol{\eta}$ es $\eta_1 = \eta$. Así pues:

$$\Lambda_{\uparrow} = \exp(\eta \sigma_1 / 2) \quad (1.5)$$

Ahora tenemos que aplicar esto a nuestro v_0 :

$$v^0 \rightarrow v'^0 = \xi_{\uparrow}^{\dagger} \psi'_{\uparrow} = (\Lambda_{\uparrow} \xi_{\uparrow}^{\dagger})(\Lambda_{\uparrow} \psi_{\uparrow}) = e^{(\eta \sigma_1)} \xi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} \quad (1.6)$$

Usando que $e^{(\eta \sigma_1)} = \cosh(\eta) + \sigma^1 \eta$, tenemos que:

$$v'^0 = \cosh(\eta) \xi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} + \sinh(\eta) \xi_{\uparrow}^{\dagger} \sigma^1 \psi_{\uparrow} = \cosh v^0 + \sinh \eta v^1 = \Lambda v^0 \quad (1.7)$$

q.e.d. Por otro lado, nos queda demostrar para v^i :

$$v^1 \rightarrow v'^1 = \xi_{\uparrow}^{\dagger} \sigma_1 \psi'_{\uparrow} = \cosh(\eta) \xi_{\uparrow}^{\dagger} \sigma_1 \psi_{\uparrow} + \sinh(\eta) \xi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} = \cosh(\eta) v^1 + \sinh(\eta) v^0 \quad (1.8)$$

donde nos hemos saltados algunos de los pasos. Dado que $\eta_2 = \eta_3 = 0$, es trivial que $v'^2 = v^2$ y $v'^3 = v^3$, de lo que se deduce que efectivamente $\xi_{\uparrow}^{\dagger} \sigma^{\mu} \psi'_{\uparrow}$ transforma como un 4-vector contravariante.

- El caso para la izquierda es análogo, aunque un poco diferente. En este caso

$$\Lambda_{\downarrow} = \exp(-\eta \sigma_1 / 2) \quad \exp(-\eta \sigma_1) = \cosh(\eta) - \sinh(\eta) \eta_1 \quad (1.9)$$

lo cual hace que aparezca un signo menos, pero que debido a $\bar{\sigma}^{\mu} = (1, -\boldsymbol{\sigma})$, desaparece. Como hemos dicho, es repetir pasos.

pág. 267-268 del Maggiore [1].

Ejercicio 1.2 – Transformaciones de Lorentz

Usando la representación quiral, demuestre que las transformaciones de Lorentz de los espinores de Dirac pueden escribirse en términos de las matrices γ como

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left(-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}\right) \Psi.$$

Esta ecuación nos dice que $S^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}/2$ proporciona una representación de dimensión compleja cuatro del álgebra de Lorentz. Compruébelo directamente usando la definición de $\sigma^{\mu\nu}$ en términos de las matrices γ y la relación $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$, es decir, verifique la siguiente relación de conmutación

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i \left[g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} \right].$$

Ejercicio 1.3 – Identidad de Dirac

Demuestre la relación

$$\frac{i}{\not{q} - m} = \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2}.$$

Ejercicio 1.4 – Flujo invariante

Demuestre la siguiente identidad referente al flujo invariante de Lorentz,

$$F = 4E_a E_b (v_a + v_b) = 4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}.$$

Ejercicio 1.5 – Helicidad y Hamiltoniano de Dirac

Demuestre que el operador de helicidad conmuta con el hamiltoniano de Dirac, $[\hat{h}, H_D] = 0$, donde

$$\hat{h} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2p} = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m,$$

con

$$\alpha_k = \gamma^0 \gamma^k, \quad \beta = \gamma^0.$$

Ejercicio 1.6 – Sección eficaz diferencial $e^- \mu^-$

Usando amplitudes de helicidad, calcule la sección eficaz diferencial para el proceso

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-,$$

en el límite relativista ($m_e \approx 0$, $m_\mu \approx 0$), en el sistema del centro de masas.

Nos piden la sección eficaz diferencial del scattering elástico $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Para ello tenemos que usar la ecuación:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (1.10)$$

donde \mathcal{M} podemos hallarlo a través del siguiente diagrama de Feynmann a primer orden Nuestro

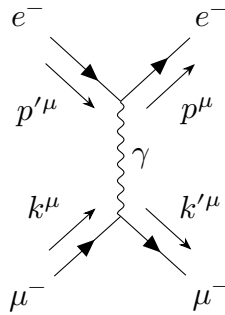


Figura 1.1: Diagrama de Feynman para $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$.

elemento de matriz

$$i\mathcal{M} = e^2 \underbrace{(\bar{u}^{s'}(p') Q_e \gamma^\mu u^s(p))}_{j_e^\mu} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \underbrace{(\bar{u}^{r'}(k') Q_\mu e \gamma^\nu u^r(k))}_{j_\mu^\nu} \quad (1.11)$$

tal que

$$i\mathcal{M} = \frac{e^2}{t} (j_e \cdot j_\mu) \quad (1.12)$$

con $Q = -1$ en ambos casos y $q^2 = t$ el invariante de Mandelstam ($t = |p'^\mu - p^\mu|^2$). Dado que no nos especifican los espines de entrada, podemos considerar que el elemento de matriz total es el no polarizado:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{ss',r,r'} |\mathcal{M}_{s,r}|^2 \quad (1.13)$$

O alternativamente con *las amplitudes de helicidad*:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4} (|\mathcal{M}_{RR}|^2 + |\mathcal{M}_{RL}|^2 + |\mathcal{M}_{LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LL}|^2) \quad (1.14)$$

Solo tenemos que considerar los siguientes espinores (al no haber antipartículas con consideramos v y \bar{v}) con esta forma ($m_e \approx m_\mu \approx 0$), aunque hay que tener en cuenta que al tener momento p_z y $-p_z$ cambian algunos signos:

$$u_\uparrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix} \quad u_\downarrow = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

con $c = \cos(\theta/2)$ y $s = \sin(\theta/2)$, siendo este θ el ángulo de salida de las partículas. Los momentos de nuestras partículas (caso de masa despreciable $m_e \approx m_\mu \approx 0$)

$$p^\mu = (E, 0, 0, E) \quad p'^\mu = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta) \quad (1.16)$$

$$k^\mu = (E, 0, 0, -E) \quad k'^\mu = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta) \quad (1.17)$$

Son así porque por lo que, por ejemplo, para p :

$$u_\uparrow(p) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_\uparrow(p') = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p') = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$u_\uparrow(k) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(k) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_\uparrow(k') = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(k') = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ -s \\ c \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

para k' y p' usaremos la expresión general. Usando las relaciones del Thomson [2]

$$\bar{\psi} \gamma^0 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \phi = \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2 + \psi_3^* \phi_3 + \psi_4^* \phi_4, \quad (1.20)$$

$$\bar{\psi} \gamma^1 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^1 \phi = \psi_1^* \phi_4 + \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 + \psi_4^* \phi_1, \quad (1.21)$$

$$\bar{\psi} \gamma^2 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^2 \phi = -i(\psi_1^* \phi_4 - \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 - \psi_4^* \phi_1), \quad (1.22)$$

$$\bar{\psi} \gamma^3 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \phi = \psi_1^* \phi_3 - \psi_2^* \phi_4 + \psi_3^* \phi_1 - \psi_4^* \phi_2. \quad (1.23)$$

Tenemos que:

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_0 u_\uparrow(p) = 2Ec$$

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_1 u_\uparrow(p) = 2Es$$

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_2 u_\uparrow(p) = -i2Es$$

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_3 u_\uparrow(p) = 2Ec$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_0 u_\uparrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_1 u_\uparrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_2 u_\uparrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_3 u_\uparrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_0 u_\downarrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_1 u_\downarrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_2 u_\downarrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(p') \gamma_3 u_\downarrow(p) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_0 u_\downarrow(p) = 2Ec$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_1 u_\downarrow(p) = 2Es$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_2 u_\downarrow(p) = -i2Es$$

$$\bar{u}_\downarrow(p') \gamma_3 u_\downarrow(p) = 2Ec$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_0 u_\uparrow(k) = 2Ec$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_1 u_\uparrow(k) = -2Es$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_2 u_\uparrow(k) = i2Es$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_3 u_\uparrow(k) = -2Ec$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_0 u_\uparrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_1 u_\uparrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_2 u_\uparrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_3 u_\uparrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_0 u_\downarrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_1 u_\downarrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_2 u_\downarrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow(k')\gamma_3 u_\downarrow(k) = 0$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_0 u_\downarrow(k) = 2Ec$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_1 u_\downarrow(k) = -2Es$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_2 u_\downarrow(k) = -i2Es$$

$$\bar{u}_\downarrow(k')\gamma_3 u_\downarrow(k) = -2Ec$$

Es decir, *cada vértice debe conservar la helicidad* (que básicamente implica conservar espín). Ahora tenemos que calcular cada término. Lo que está claro que es que, si en un vértice no se conserva helicidad la amplitud de probabilidad es nula. Así pues:

$$|\mathcal{M}_{\text{LL}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{LL} \rightarrow \text{LL}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2 c^2 + 4E^2 c^2 + 4E^2 s^2 + 4E^2 s^2| = \frac{e^4}{t^2} 64E^4 = \frac{e^4}{t^2} 4s^2 \quad (1.24)$$

$$|\mathcal{M}_{\text{RR}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{RR} \rightarrow \text{RR}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2 c^2 + 4E^2 c^2| = \frac{e^4}{t^2} 64c^4 E^4 = 16E^4 (1 + \cos \theta)^2 = \frac{e^4}{t^2} 4u^2 \quad (1.25)$$

$$|\mathcal{M}_{\text{RL}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{RL} \rightarrow \text{RL}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2 c^2 + 4E^2 c^2 + 4E^2 s^2 + 4E^2 s^2| = \frac{e^4}{t^2} 64E^4 = \frac{e^4}{t^2} 4s^2 \quad (1.26)$$

$$|\mathcal{M}_{\text{LR}}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{LR} \rightarrow \text{LR}}|^2 = \frac{e^4}{t^2} |4E^2 c^2 + 4E^2 c^2| = \frac{e^4}{t^2} 64c^4 E^4 = 16E^4 (1 + \cos \theta)^2 = \frac{e^4}{t^2} 4u^2 \quad (1.27)$$

donde hemos usado que $s = (p + k)^2 = 4E^2$ y $u = (p - k')^2 = -2(p \cdot k') = -2E(1 + \cos \theta)$. Luego el elemento de matriz total cuando $m_e \approx m_\mu \approx 0$ es:

$$|\mathcal{M}_{ij}| = \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2) \quad (1.28)$$

que es lo que queríamos demostrar. De hecho, podemos hacer el cálculo con trazas para comprobar si da lo mismo. Así pues, tenemos que:

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = e^4 \left[\left(\bar{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^s(p) \right) \left(\bar{u}^{r'}(k') \gamma_\mu u^r(k) \right) \right] \left[\left(\bar{u}^{s'}(p') \gamma^\nu u^s(p) \right) \left(\bar{u}^{r'}(k') \gamma_\nu u^r(k) \right) \right]^* \quad (1.29)$$

Tal que usando el truco de Casimir (Williams [3])

$$\sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma u_2^{s_2}(p_2)] [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma' u_2^{s_2}(p_2)]^* = \text{tr} \left[\Gamma (\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma}' (\not{p}_1 + m_1) \right].$$

tenemos que

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{p} + m_e)) \text{tr} (\gamma^\mu (\not{k} + m_\mu) \gamma^\nu (\not{k} + m_\mu)) \quad (1.30)$$

tal que:

- La primera traza:

$$\text{tr}(\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu(\not{p}' + m_e)) = \text{tr}(\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\not{p}') + 4g^{\mu\nu}m_e^2 \quad (1.31)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr}(\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\not{p}') = 4g^{\mu\sigma}p_\sigma g^{\nu\rho}p'_\rho + 4g^{\mu\rho}p'_\rho g^{\nu\sigma}p_\sigma - 4p_{\mu\nu}(p \cdot p') \quad (1.32)$$

$$= 4p^\mu p'^\nu + 4p^\nu p'^\mu - 4g^{\mu\nu}(p \cdot p') \quad (1.33)$$

- La segunda traza:

$$\text{tr}(\gamma_\mu(\not{k} + m_\mu)\gamma_\nu(\not{k}' + m_\mu)) = \text{tr}(\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu\not{k}') + 4g_{\mu\nu}m_\mu^2 \quad (1.34)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr}(\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu\not{k}') = 4g_{\mu\sigma}k^\sigma g_{\nu\rho}k'^\rho + 4g_{\mu\rho}k'^\rho g_{\nu\sigma}k^\sigma - 4g_{\mu\nu}(k \cdot k') \quad (1.35)$$

$$= 4k_\mu k'_\nu + 4k_\nu k'_\mu - 4g_{\mu\nu}(k \cdot k') \quad (1.36)$$

Directamente multiplicando:

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = 32(p \cdot k)(p' \cdot k') + 32(p \cdot k')(p' \cdot k) - 32(p \cdot p')m_\mu^2 - 32(k \cdot k')m_e^2 + 64m_e^2m_\mu^2 \quad (1.37)$$

Ahora solo tenemos que agrupar y dividir entre $1/4t$.

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8}{t}((p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) - (p \cdot p')m_\mu^2 - (k \cdot k')m_e^2 + 2m_e^2m_\mu^2) \quad (1.38)$$

Usando los invariantes de Middelstam:

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2 \quad t = (p - p')^2 = (k - k')^2 \quad u = (p - k')^2 = (p' - k)^2 \quad (1.39)$$

tal que:

$$s = m_e^2 + m_\mu^2 + 2(p \cdot k) = m_e^2 + m_\mu^2 + 2(p' \cdot k') \quad (1.40)$$

$$t = 2m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p \cdot p') = 2m_\mu^2 - 2(k \cdot k') \quad (1.41)$$

$$u = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p \cdot k') = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p' \cdot k) \quad (1.42)$$

Con la relación:

$$s + t + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) \quad (1.43)$$

Ahora:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}((s - m_\mu^2 - m_e^2)^2 + (u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + 2t(m_e^2 + m_\mu^2)) \quad (1.44)$$

$$= \frac{2e^4}{t^2}(s^2 + u^2 - 2(s + u)(m_\mu^2 + m_e^2) + 2t(m_e^2 + m_\mu^2) + 2(m_\mu^2 + m_e^2)^2) \quad (1.45)$$

que aplicando $s + u = 2(m_e^2 + m_\mu^2) - t$ tenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}(s^2 + u^2 + 4t(m_\mu^2 + m_e^2) - 2(m_\mu^2 + m_e^2)^2) \quad (1.46)$$

que efectivamente si $m_e \approx m_\mu \approx 0$ tenemos

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{t^2}(s^2 + u^2) \quad (1.47)$$

que es lo mismo que obtuvimos antes [3]. Lo que implica que, la sección eficaz diferencial es, en este caso:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{e^4(s^2 + u^2)}{t^2} \quad (1.48)$$

que si queremos expresar con E y $\cos \theta$ explícitamente, tenemos que $t = -2(p_1 \cdot p_3) = -2E(1 - \cos \theta)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16}{64\pi^2 s} \frac{e^4 E^2 \left(+\frac{1}{4}(1 + \cos \theta)\right)}{4E^2(1 - \cos \theta)^2} \quad (1.49)$$

y la expresión final, usando la constante de estructura fina $2\alpha^2 = 2(e^4/16\pi^2)$ tenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\alpha^2 + \frac{1}{4}(1 + \cos \theta)}{s (1 - \cos \theta)^2} \quad (1.50)$$

que coincide con la del Thomson [2].

Ejercicio 1.7 – Elemento de matriz en QED con trazas

Use el formalismo de trazas para calcular el elemento de matriz al cuadrado, promediado en espines, de la electrodinámica cuántica (QED) para

$$e^+ e^- \rightarrow f \bar{f},$$

sin despreciar ninguna de las masas de las partículas.

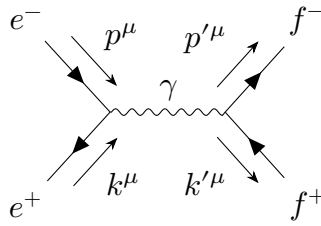


Figura 1.2: Diagrama de Feynman para $e^+ e^- \rightarrow f^+ f^-$.

Nuestro elemento de matriz con $Q = -1$ en ambos casos y $q^2 = s$ el invariante de Mandelstam ($s = |k^\mu + p^\mu|^2$). Dado que no nos especifican los espines de entrada, podemos considerar que el elemento de matriz total es el no polarizado:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} |\mathcal{M}_{s,r}|^2 \quad (1.51)$$

Así pues, tenemos que:

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = e^4 \left[(\bar{v}^{s'}(k) \gamma^\mu u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(p') \gamma_\mu v^r(k')) \right] \left[(\bar{v}^{s'}(k) \gamma^\nu u^s(p)) (\bar{u}^{r'}(p') \gamma_\nu v^r(k')) \right]^* \quad (1.52)$$

Tal que usando el truco de Casimir (Williams [3])

$$\sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma u_2^{s_2}(p_2)] [\bar{u}_1^{s_1}(p_1) \Gamma' u_2^{s_2}(p_2)]^* = \text{tr} \left[\Gamma (\not{p}_2 + m_2) \bar{\Gamma}' (\not{p}_1 + m_1) \right].$$

tenemos que

$$|\mathcal{M}_{s,r}|^2 = \frac{2e^4}{t^2} \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{k} - m_e)) \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p}' + m_\mu) \gamma^\nu (\not{k}' - m_\mu)) \quad (1.53)$$

tal que:

- La primera traza:

$$\text{tr} (\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu (\not{k} - m_e)) = \text{tr} (\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{k}) - 4g^{\mu\nu} m_e^2 \quad (1.54)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr} (\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{k}) = 4g^{\mu\sigma} p_\sigma g^{\nu\rho} k_\rho + 4g^{\mu\rho} k_\rho g^{\nu\sigma} p_\sigma - 4p_{\mu\nu} (p \cdot k) \quad (1.55)$$

$$= 4p^\mu p'^\nu + 4p^\nu k^\mu - 4g^{\mu\nu} (p \cdot k) \quad (1.56)$$

- La segunda traza:

$$\text{tr} (\gamma_\mu (\not{p}' + m_f) \gamma_\nu (\not{k}' - m_f)) = \text{tr} (\gamma_\mu \not{p}' \gamma_\nu \not{k}') - 4g_{\mu\nu} m_f^2 \quad (1.57)$$

Ahora la traza más compleja

$$\text{tr} (\gamma_\mu \not{p}' \gamma_\nu \not{k}') = 4g_{\mu\sigma} p'^\sigma g_{\nu\rho} k'^\rho + 4g_{\mu\rho} k'^\rho g_{\nu\sigma} p'^\sigma - 4g_{\mu\nu} (p' \cdot k') \quad (1.58)$$

$$= 4p'_\mu k'_\nu + 4p'_\nu k'_\mu - 4g_{\mu\nu} (p' \cdot k') \quad (1.59)$$

Directamente multiplicando:

$$\frac{s^2}{e^4} |\mathcal{M}_{s,r}|^2 = 32(p \cdot p')(k \cdot k') + 32(p \cdot k')(k \cdot p') + 32(p \cdot k) m_f^2 + 32(p' \cdot k') m_e^2 + 64 m_e^2 m_f^2 \quad (1.60)$$

Ahora solo tenemos que agrupar y dividir entre $1/4t$.

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left((p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) - (p \cdot p') m_f^2 - (k \cdot k') m_e^2 + 2m_e^2 m_f^2 \right) \quad (1.61)$$

Usando los invariantes de Mandelstam:

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2 \quad t = (p - p')^2 = (k - k')^2 \quad u = (p - k')^2 = (p' - k)^2 \quad (1.62)$$

tal que:

$$s = m_e^2 + m_f^2 + 2(p \cdot k) = m_e^2 + m_f^2 + 2(p' \cdot k') \quad (1.63)$$

$$t = 2m_e^2 + m_f^2 - 2(p \cdot p') = 2m_f^2 - 2(k \cdot k') \quad (1.64)$$

$$u = m_e^2 + m_f^2 - 2(p \cdot k') = m_e^2 + m_f^2 - 2(p' \cdot k) \quad (1.65)$$

Con la relación:

$$s + t + u = 2(m_e^2 + m_f^2) \quad (1.66)$$

Ahora:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} \left((t - m_f^2 - m_e^2)^2 + (u - m_e^2 - m_f^2)^2 + 2s(m_e^2 + m_f^2) \right) \quad (1.67)$$

$$= \frac{2e^4}{s^2} \left(t^2 + u^2 - 2(-s + 2(m_e^2 + m_f^2))(m_f^2 + m_e^2) + 2s(m_e^2 + m_f^2) + 2(m_f^2 + m_e^2)^2 \right) \quad (1.68)$$

que aplicando $t + u = 2(m_e^2 + m_f^2) - s$ tenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2 + 4s(m_f^2 + m_e^4) - 2(m_f^2 + m_e^2)^2) \quad (1.69)$$

que es el resultado final [3], y que como podemos ver es igual a la dispersión $e^- f^- \rightarrow e^- f^-$ pero haciendo el cambio $s \leftrightarrow t$.

Ejercicio 1.8 – Dispersión $e^- p$ y transferencia de momento

En un experimento de dispersión $e^- p$, la energía del electrón incidente es $E_1 = 529.5 \text{ MeV}$ y los electrones dispersados se detectan a un ángulo $\theta = 75^\circ$ con respecto al haz incidente. A este ángulo, casi todos los electrones dispersados se miden con una energía de $E_3 \approx 373 \text{ MeV}$.

¿Qué se puede concluir a partir de esta observación? Encuentre el valor correspondiente de

$$Q^2 = -q^2.$$

En este ejercicio tenemos que usar los cuadrimomentos para ver la energía y momento del protón para el ángulo con el que salen los electrones.

Ejercicio 1.9 – Tasa de decaimiento del pión en interacción escalar

Calcule la tasa de decaimiento del pión para una interacción puramente escalar y muestre que la razón predicha de tasas de decaimiento es

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} \approx 5.5.$$

Sugerencia: suponga que la interacción está mediada por una partícula escalar masiva X , de modo que la cantidad escalar asociada al vértice $\ell - \nu_\ell$ con constante de acoplo g_X sería

$$j_\ell = g_X \bar{u}v.$$

Puede trabajar también en el régimen $q^2 = m_\pi^2 \ll m_X^2$ y tomar el propagador como $1/m_X^2$ (interacción tipo Fermi puntual).

Tenemos que la tasa de decaimiento viene dada por la expresión:

$$\Gamma = \frac{p^*}{8\pi m_a^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (1.70)$$

siendo p^* el momento en el centro de masas de las partículas salientes ($p^* = |\mathbf{p}| = |\mathbf{k}|$), con los siguientes momentos:

$$p_\pi^\mu = (m_\pi, 0, 0, 0) \quad p^\mu = (E_1, 0, 0, p_1) \quad k^\mu = (E_2, 0, 0, -p_1) \quad (1.71)$$

Así pues, solo tenemos que calcular el elemento de matriz \mathcal{M}_{fi} , que se calcula a través del siguiente diagrama:

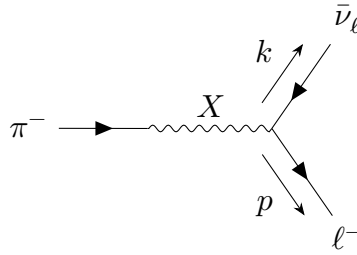


Figura 1.3: Diagrama de Feynman para $\pi^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$.

Al hacer un acoplo puramente escalar tenemos que:

$$\mathcal{M}_{fi} = f_\pi p_\pi \frac{g_X}{M_X^2} \bar{u}(p) v(k) \quad (1.72)$$

Luego, la única dificultad para calcular $|\mathcal{M}_{ij}|^2$ es hacer:

$$\sum_{\text{espines}} (\bar{u}(p) v(k)) (\bar{u}(p) v(k))^\dagger = \text{tr}((\not{p} + m_l)(\not{k} - m_\nu)) = 4p^\mu k_\mu - 4m_l m_\nu \quad (1.73)$$

que es, según los cálculos anteriores, y suponiendo que $m_\nu \rightarrow 0$:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \left[f_\pi m_\pi \frac{g_X}{M_X^2} 2(p \cdot k) \right]^2 \quad (1.74)$$

tal que

$$p_\pi^\mu = p^\mu + k^\mu \rightarrow m_\pi^2 = m_l^2 + 2(p \cdot k) \rightarrow (p \cdot k) = \frac{1}{2}(m_\pi^2 - m_l^2) \quad (1.75)$$

y por tanto:

$$\Gamma = \frac{p^*}{8\pi m_\pi^2} \left[f_\pi m_\pi \frac{g_X}{M_X^2} (m_\pi^2 - m_l^2) \right]^2 \quad (1.76)$$

tal que:

$$\Gamma = \frac{f_\pi^2 g_X^2}{8\pi m_X^2} (m_\pi^2 - m_l^2)^2 \quad (1.77)$$

De lo que se deduce que

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 5.5 \quad (1.78)$$

Ejercicio 1.10 – Vértices gauge en la parte cinética del lagrangiano electrodébil

Muestre explícitamente que la parte cinética del lagrangiano electrodébil contiene dos vértices triple-gauge

$$\gamma W^+ W^-, \quad Z W^+ W^-,$$

y cuatro vértices cuárticos gauge

$$W^+ W^- W^+ W^-, \quad W^+ W^- Z Z, \quad W^+ W^- \gamma \gamma, \quad W^+ W^- Z \gamma.$$

La parte cinética del lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + W^{\mu\nu i} W_{\mu\nu}^i \quad (1.79)$$

Queremos llegar a obtener las relaciones entre W_μ , W_{μ^\dagger} , Z_μ y A_μ . Tenemos que usar la que relaciona los elementos 1 y 2 de W^i con los bosones W y W^\dagger :

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad W_\mu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \quad (1.80)$$

$$W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu + W_\mu^\dagger) \quad W_\mu^2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(W_\mu - W_\mu^\dagger) \quad (1.81)$$

y la que relaciona B^μ y W^3 con Z y A :

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

$$W_\mu^3 = \cos \theta_W W_\mu + \sin \theta_W W_\mu^\dagger \quad B_\mu = -\sin \theta_W W_\mu + \cos \theta_W W_\mu^\dagger \quad (1.83)$$

Lo siguiente que tenemos que hacer es aplicar lo siguiente a nuestro \mathcal{L}_{kin} :

$$\widetilde{W}_{\mu\nu} \equiv \frac{\sigma^i}{2} W_{\mu\nu}^i, \quad W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_W \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (1.84)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.85)$$

Una vez tenemos esto, solo es sustituir. Lo que está claro es que el término $B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ no va a contribuir a nuestra triple o cuádruple interacción, ya que es evidente que solo contendrá términos de γ y Z . Por otro lado, solo nos interesan los términos que incluyan al menos un $g_W \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$, ya que otros términos no contendrán términos triples y cuádruples. Cuando este esté relacionado con otro $g_W \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$ tendremos los vértices cuádruples, y cuando esté relacionado con $\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i$ los vértices triples. Así:

$$W^{\mu\nu i} W_{\mu\nu}^i = W^{\mu\nu 1} W_{\mu\nu}^1 + W^{\mu\nu 2} W_{\mu\nu}^2 + W^{\mu\nu 3} W_{\mu\nu}^3 \quad (1.86)$$

Veamos término a término:

- El primer término:

$$W^{\mu\nu 1} W_{\mu\nu}^1 = [(\partial_\mu W^{\nu 1} - \partial_\nu W^{\mu 1}) - g_W \epsilon^{1ij} W^{\mu j} W^{\nu i}] \times [(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1) - g_W \epsilon^{1kl} W_\mu^j W_\nu^k] \quad (1.87)$$

Es evidente que el producto entre los dos primeros términos de cada corchete no generan un vértice triple o cuádruple, ya que W^1 solo va con los bosones W y W^\dagger . Los vértices triples se producirán cuando los primeros términos interaccionan con el término que va con la levi-civita se producen los vértices triples. Cuando interaccionan los dos términos de la levi-civita se producen los términos que representan los vértices cuárticos. Así pues, tenemos que:

Ejercicio 1.11 – Expansión del potencial alrededor del vacío

Dados

$$\mathcal{U} = \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad \mu^2 = -\lambda v^2, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi),$$

verifique la ecuación (2.108), a saber:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\eta, \xi) &= -\frac{1}{2} \lambda v^2 [(v + \eta)^2 + \xi^2] + \frac{1}{4} \lambda [(v + \eta)^2 + \xi^2]^2 \\ &= -\frac{1}{4} \lambda v^4 + \lambda v^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \frac{1}{4} \lambda \xi^4 + \lambda v \eta \xi^2 + \frac{1}{2} \lambda \eta^2 \xi^2 = \lambda v^2 \eta^2 + \mathcal{U}_{\text{int}} - \frac{1}{4} \lambda v^4. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.12 – Invariancia gauge de un escalar complejo

Verifique que el lagrangiano

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mathcal{U}(\phi^2),$$

donde ϕ es un campo escalar complejo, es invariante bajo transformaciones de norma (gauge) del tipo

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ig\alpha(x)} \phi,$$

siempre que el campo gauge se transforme como

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \alpha(x),$$

con el derivado covariante $D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu$.

Ejercicio 1.13 – Lagrangiano con campo escalar complejo

Considere el siguiente lagrangiano para un campo escalar complejo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^2 - \lambda\phi^4 - igB_\mu\phi^*(\partial^\mu\phi) + ig(\partial_\mu\phi^*)B^\mu\phi + g^2B_\mu B^\mu\phi^*\phi,$$

donde B_μ es un campo gauge y

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu.$$

Haga la sustitución

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\xi(x)),$$

y verifique que se obtiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \lambda v^2\eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2v^2B_\mu B^\mu - \mathcal{U}_{\text{int}} + gvB_\mu(\partial^\mu\xi),$$

junto con la expresión explícita para \mathcal{U}_{int} .

Ejercicio 1.14 – Término del lagrangiano del Modelo Estándar con derivadas covariantes

Verifique que el término del lagrangiano del Modelo Estándar que contiene las derivadas covariantes del campo de Higgs puede escribirse como:

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{8}g_W^2(W_\mu^{(1)} + iW_\mu^{(2)})(W^{(1)\mu} - iW^{(2)\mu})(v+h)^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}(g_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu)(g_W W^{(3)\mu} - g' B^\mu)(v+h)^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.15 – Transformación del doblete de Higgs bajo $SU(2)$

Demuestre que el campo ϕ_c transforma bajo $SU(2)$ de la misma forma que ϕ (el doblete de Higgs), donde

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \phi_c = -i\sigma_2\phi^* = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 - i\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi^{0*} \\ \phi^{+*} \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

- [1] Michele Maggiore. *A Modern introduction to quantum field theory*. Oxford Master Series in Physics. 2005. ISBN: 978-0-19-852074-0.
- [2] Mark Thomson. *Modern particle physics*. New York: Cambridge University Press, oct. de 2013. ISBN: 978-1-107-03426-6, 978-1-139-52536-7. DOI: [10.1017/CB09781139525367](https://doi.org/10.1017/CB09781139525367).
- [3] Anthony G. Williams. *Introduction to Quantum Field Theory: Classical Mechanics to Gauge Field Theories*. Cambridge University Press, 2022.