Daniel Vázquez Lago

# Interacción Radiación-Materia

*Partículas Cargadas y No Cargadas*

# Índice general

# Capítulo 1

# Partículas Cargadas

## 1.1. Dispersión de Rutherford

### 1.1.1. Introducción

Rutherford describió la dispersión de una partícula $\alpha$ por núcleos atómicos (con $m_\alpha \ll M, z = 2$) sobre una trayectoria hiperbólica a través del potencial de Coulomb. La energía total viene dada como la suma de la energía cinética y potencial, y permanece *constante* sobre toda la trayectoria:

$$E(r) = E_K(r) + E_p(r) \qquad E_p(r) \tag{1.1}$$

siendo $\theta$ el **ángulo de dispersión**. La distancia de máxima aproximación se define como la distancia a la cual se para una partícula con parámetro de impacto $b = 0$, i.e. colisión frontal. Así, denotando $E_K$ como la *energía cinética inicial*, tenemos que

$$E_K = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{D_{\alpha-N}} \tag{1.2}$$

aunque lógicamente esta expresión no será del todo cierta, ya que el potencial no es infinito en $r = 0$, debido a que el núcleo es finito. Aún así es una buena aproximación.

### 1.1.2. Relación entre el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión

El momento transferido en la interacción, siempre y cuando $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = p$ vale

$$\Delta p = 2p \sin(\theta/2) \tag{1.3}$$

Es fácil de deducir matemáticamente, pero incluso físicamente tiene sentido: cuando $\theta = \pi$ la transferencia de momento es máxima (la partícula se da la vuelta completamente) lo que implicla un intercambio de 2 veces el momento inicial. Definimos como **parámetro de impacto**

$$b = r \sin\theta \tag{1.4}$$

Además, también se conserva el momento angular $L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = Lp \sin\theta$, lo que lleva a la relación

$$v_i b = \omega r^2 \tag{1.5}$$

siendo $\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ en el vértice, definiendo $\phi$ como el ángulo entre el vértice y la partícula desde el núcleo. En el vértice, que es el punto en el cual la posición respecto el átomo y el momento lineal de la partícula son perpendiculares. Por definición $L = m_\alpha r^2 \omega$, y en el infinito se cumple que

$$L_\infty = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m_\alpha b v_i \tag{1.6}$$

El momento transferido $\Delta p$ se calcula como la acción total en el tiempo de la fuerza de Coulomb proyectada sobre el eje de la hipérbola, tal que

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\Delta p} = (\dots) = \tag{1.7}$$

de lo que se puede deducir que el parámetro de impacto $b$ y el ángulo de dispersión se relacionan tal que:

$$b = \frac{1}{2} D_{\alpha-N} \cot(\theta/2) = \frac{1}{2} D_{\alpha-N} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{E_K} \tag{1.8}$$

siendo $\mathrm{d}_{\alpha-N}$ la distancia de máxima aproximación y $E_K$ la energía cinética.

### 1.1.3. La sección eficaz diferencial de Rutherford

La dispersión de las partícuals alfa que halló Rutherford la describió en función de su sección diferencial, tal que:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{Ruth}}}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{E_K} \tag{1.9}$$

En el Ejercicio 1.1 dejamos para hacer la derivación de esta fórmula. Como podemos comprobar, *diverge* para $\theta = 0$, lo cual es debido al carácter ideal del núcleo puntual. La razón por la que en realidad no diverge, o la solución a esta divergencia, es que la carga nuclear está apantallada por los *electrones orbitales atómicos*, lo que conduce a un ángulo mínimo $\theta_{\text{mín}}$. La dispersión hacia atrás ($\theta \to \pi, b \to 0$) tampoco se logra nunca, debido al radio finito del núcleo.

Un modelo que tiene en cuenta el apantallamiento es el *modelo atómico estadístico de Fermi*, el cual introduce una exponencial tabulada por un *radio efectivo* $\alpha_{TF}$ de tal modo que el potencial de Coulomb no caiga "lentamente". Así pues:

$$V_{TF}(r) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{a_{TF}}} \tag{1.10}$$

el *radio efectivo* $a_{TF}$ de la nube electrónica (de Thomas-Fermi) decrece por debajo del radio de Bohr $\alpha_0$ al aumentar $Z$, como $a_{TF} = \frac{\zeta a_0}{\sqrt[3]{Z}}$, debido a la disminución del tamaño de los orbitales más internos, por el teorema de Gauss.

La aproximación de Born requiere ahora, con $\Delta k = K = (2p/h)\sin(\theta/2)(p = p_i)$ el momento de onda transferido ($p = hk$), el cálculo de la transformada seno de $V_{TF}(r)$, que es finita. Rutherford reciba entonces un *factor corrector* tal qeu:

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \left| \frac{2m_\alpha}{h^2} \int_0^\infty r^2 V_{TF}(r) \frac{\sin Kr}{Kr} dr \right|^2 = (\ldots) = \left( \frac{D_{\alpha-N}}{4} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{K^2 a_{TF}^2}} \right) \tag{1.11}$$

Cuando $\theta$«1, tenemos que:

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \frac{D_{\alpha-N}^2}{\theta^4} \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\theta_{\text{mín}}^2}{\theta^2} \right)^2 \right]} = \frac{D_{\alpha-N}^2}{\theta^2 + \theta_{\text{mín}}^2} \tag{1.12}$$

donde se introduce el concepto el concepto de ángulo mínimo, que como podemos ver viene expresado:

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{h}{p a_{TF}} = \frac{h \sqrt[3]{Z}}{p a_{TF}} = \frac{hc \sqrt[3]{Z}}{a_0 \sqrt[root]{E_K (E_K + 2Mc^2)}} \tag{1.13}$$

La mejora de la aparición de este ángulo mńimo es que ahora *la sección eficaz total es finita*, lo cual se corresponde a un resultado mucho más físico. Este ángulo mínimo tiene un *origen cuántico* debido al *principio de incertidumbre*. Se produce por la localización de la partícula sobre el radio $a_{TF}$, que le imprime un momento *transversal* inevitable $\Delta p$, relacionado con la longitud de onda:

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{h}{p a_{TF}} = \frac{\lambda}{a_{TF}} \tag{1.14}$$

### 1.1.4. Corrección por radio finito del núcleo

El potencial que vve una carga elemental $z$ cerca del núcleo $V(r)$ tiene un plateu en su interior hasta $r = R$ y para $r > R$ adopta la forma de Coulomb $E_p(r)$.

### 1.1.5. Dispersión de Mott

### 1.1.6. Correciones por espín del electrón y retroceso del núcleo

## 1.2. Poder de frenado másico de partículas cargadas en la materia

## 1.3. El rango másico $R_{CSDA}$

**Ejemplo 1.1**

Hola buenas tardes, como están los máquinas

**Teorema 1.1**

Hola buenas tardes, como están los máquinas

**Definición 1.1**

Hola buenas tardes, como están los máquinas

Hola buenas tardes, como están los máquinas

## Ejercicios

### Ejercicio 1.1

Obten la expresión de la sección de eficaz de Rutherford, con el potencial de Coulomb, usando la aproximación de Born con ondas planas incidentes y salientes

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \qquad D_{\alpha-N} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{E_K}$$

### Ejercicio 1.2

Obten la expresión de la sección de eficaz de Rutherford, ahora con el potencial del modelo atómico estadístico de Fermi, usando la aproximación de Born con ondas planas incidentes y salientes

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \left(\frac{D_{\alpha-N}}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{K^2 a_{TF}^2}}\right)$$

y luego llegar a la expresión final cuando $\theta \ll 1$:

# Capítulo 2

# Partículas no cargadas

# Bibliografía


[1] Marcos Sánchez-Élez. *Introducción a la programación en VHDL*.

[2] Wayne Wolf. *FPGA-Based System Design*. USA: Prentice Hall PTR, 2004. ISBN: 0131424610.