Oscilador amortiguado y forzado

Daniel Vázquez Lago

October 23, 2022

Contents

1 Objetivos

- Comprender el movimiento de un oscilador amortiguado (donde aparece una fricción), obtener la fricción en función de la intensidad y la frecuencia de oscilación también en función de la intensidad. También trataremos de buscar si se cumplen las relaciones estudiadas en clase.
- Estudiar el movimiento de un oscilador amortiguado sometido a una fuerza oscilatoria externa (llamado oscilador amortiguado forzado), entender su movimiento, cuando alcanza el máximo de amplitud, como lo hace, que relación tiene con lo que estudiamos...

2 Análisis de datos

2.1 Oscilador Amortiguado

Como sabemos un oscilador amortiguado tiene la siguiente ecuación como solución:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \underbrace{\cos(w_1 t)}_{1} \Longrightarrow \frac{\theta(t)}{\theta_0} = e^{-\gamma t} \Longrightarrow \log\left[\frac{\theta_0}{\theta(t)}\right] = \gamma t \Longrightarrow b = \gamma \tag{1}$$

Y como tenemos los valores de $\theta_0 = -17.6cm$, y los valores de $\theta(t)$ y t pues podemos hacer la regresión lineal de la cual podemos extraer que b=γ. Además podemos obtener las frecuencias para cada intensidad ya que sabemos que:

$$w_1 T = 2\pi \Longrightarrow w_1 = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

Y cuando la intensidad es 0 tenemos que $\gamma \ll 0$ (solo existe la fricción natural del oscilador) y podemos suponer que:

$$w_0 = w_1 \ (I = 0) \tag{3}$$

Entonces para los datos obtenidos podemos extraer los siguientes datos:

I ± 0.02 (A)	γ (s^-1)	$s(\gamma)$ (s^-1) t	ω_1 (s^-1)	$s(\omega_1)$ (s^-1)	$\omega_0^2 - \gamma^2$ (s^{-2})	$s(\omega_0^2 - \gamma^2)$ (s^{-2})
0.00	0.0083	0.0010	3.22977	0.01660	10.431	0.107
0.30	0.0693	0.0031	3.235	0.021	10.43	0.11
0.60	0.2411	0.0091	3.229	0.083	10.37	0.11
0.90	0.594	0.0290	3.29	0.14	10.08	0.11
1.10	1.072	0.0475	3.08	0.25	9.28	0.15

Table 1: valores de la fricción y la frecuencia w_1 en función de su intensidad.

Con estos datos podremos estudiar las relaciones entre frecuencia e intensidad en la figura 1 donde podemos ver que la frecuencia no cambia con la intensidad a menos que sea alta donde podemos ver que empieza a descender. En la figura 2 vemos que la fricción aumenta de manera cuadrática con la intensidad. Sin embargo las figuras mas representativas son la figura 3 y 4. En la figura 3 podemos ver que se representa w_1^2 frente a $w_0^2 - \gamma^2$. ¿Por qué representamos esto? Básicamente porque queremos demostrar (o refutar) si se cumple la relación $w_1^2 = w_0^2 - \gamma^2$ que hemos estudiado. Como podemos observar salvo un dato todos ambos coinciden, e incluso en el que coincide el valor teórico se encuentra dentro de la incertidumbre del valor experimental, por lo que podríamos decir que experimentalmente dicha relación se confirma (aunque para confirmarlo mas rigurosamente queda claro que habría que tomar muchísimos mas datos con una precisión bastante mayor).

En la figura 4 representamos los valores de la amplitud frente a la intensidad pero en este caso con la aproximación cuadrática realizada por python en la gráfica ademas con dos puntos de interés que describen uno la γ_c y otro la I_c. Cuando aumentamos mucho la intensidad aumentamos la fricción. Experimentalmente vemos que llega un punto donde no oscila, si no que desciende poco a poco y pega al final un revote y regresa, pero de manera casi imperceptible. Cuando es así decimos que esa intensidad es la intensidad crítico y marca la frontera entre los casos sobreamortiguado e infraamortiguado. Teóricamente la fricción que corresponde a esta intensidad debería ser igual a $\gamma = w_0$, sin embargo podemos ver que en la figura no coinciden, ya que:

$$\text{Experimental: } I_c = 1.948 \pm 0.020 \longrightarrow \gamma_c = 3.693 \pm 0.088; \text{ Teórica: } \gamma_c = 3.230 \pm 0.017$$

Ni siquiera con el rango de las incertidumbres cuadran. Esto se puede deber a que quizás no tomamos suficientes valores de la intensidad crítica, y que deberíamos estudiar mas valores, hacer una media... o quizás esa relación no se cumple.

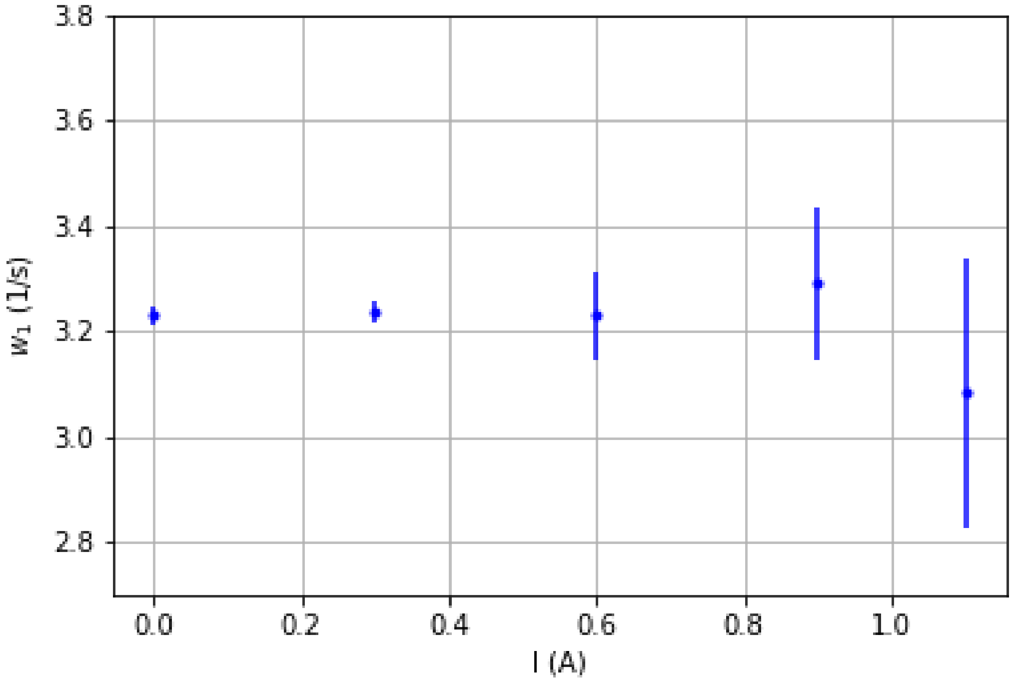

Figure 1: representación gráfica de la frecuencia w_1 frente la intensidad

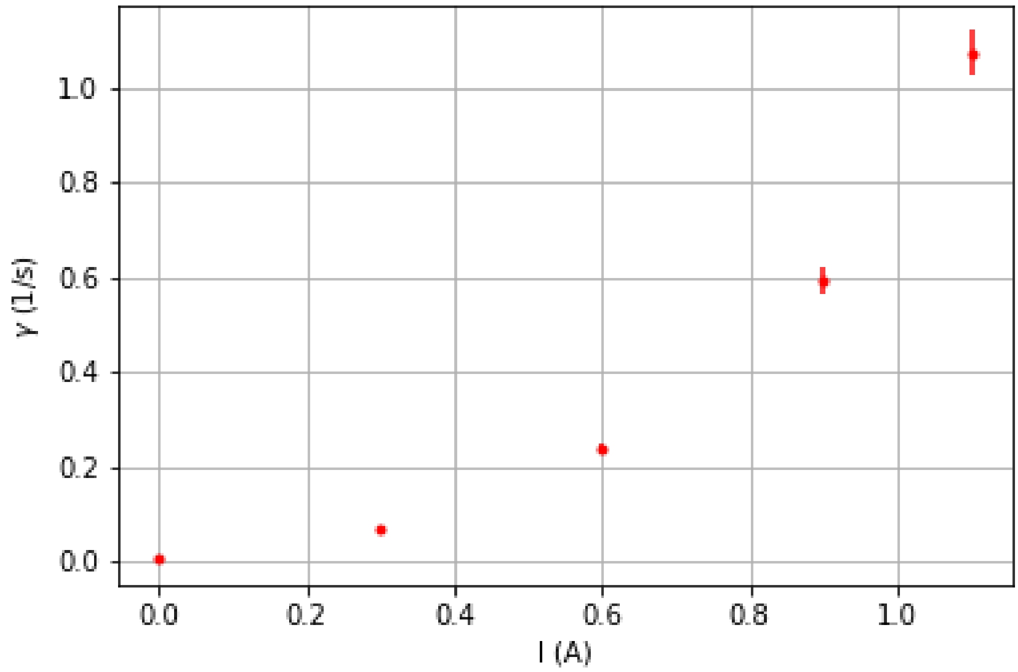

Figure 2: representación gráfica de la fricción frente la intensidad

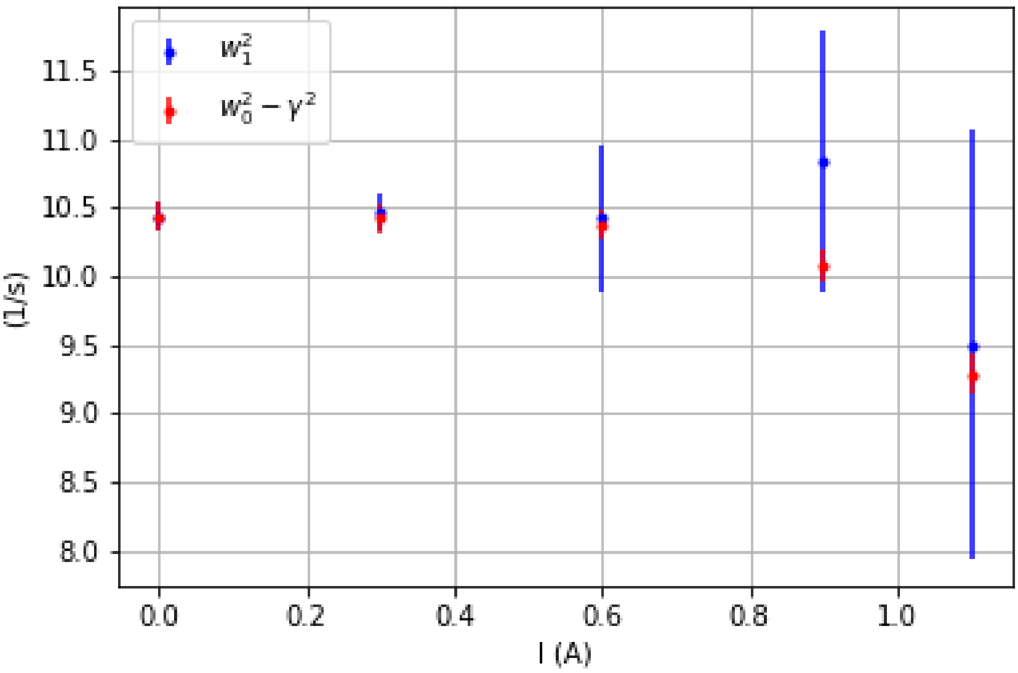

Figure 3: representación gráfica de w_1^2 y $w_0^2 - \gamma^2$.

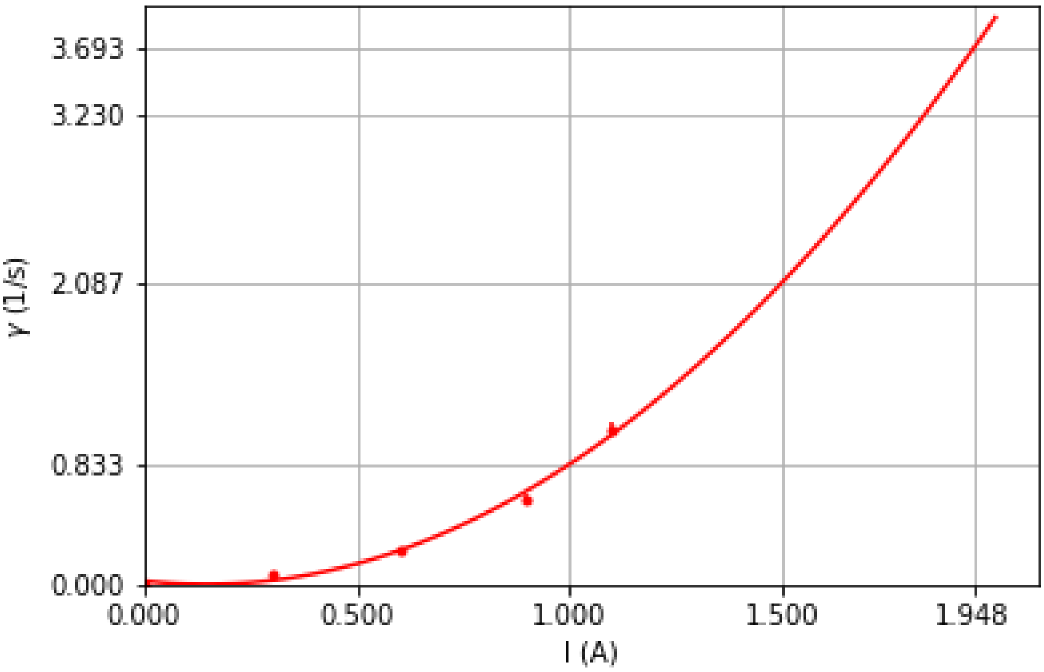

Figure 4: representación gráfica de la fricción de la intensidad con $\gamma_c = \omega_0$ y I_c

2.2 Oscilador Amortiguado y forzado

$\omega\ s^{-1}$	$s(\omega)\ (s^-1)$	A ±0.2 (cm)	$\omega\ (s^-1)$	$s(\omega)\ (s^-1)$	A ± 0.2 (cm)
0.4045	0.0013	1.2	0.6819	0.0037	1.1
1.2506	0.0124	1.2	1.4626	0.0170	1.2
2.0648	0.0339	1.2	2.3445	0.0437	1.3
2.8651	0.0653	2.0	2.8303	0.0637	1.6
3.6256	0.1046	1.2	3.0680	0.0749	2.6
4.4436	0.1571	1.2	3.3817	0.0910	2.6
2.6478	0.0558	1.4	3.4410	0.0942	1.9
2.9792	0.0706	4.5	4.4498	0.1576	1.2
3.1830	0.0806	8.7	3.1260	0.0778	2.8
3.3297	0.0882	5.0	3.1894	0.0810	3.0
3.2221	0.0826	9.7	0.0000	0.0000	0.0
3.2674	0.0850	7.8	0.0000	0.0000	0.0

Table 2: los valores de la frecuencia única para cada voltaje del motor y las amplitudes asociadas a dicha frecuencia, a la izquierda para I=0.3 A y a la derecha I=0.6A

Como podemos ver la frecuencia de resonancia tanto para la intensidad I=0.3A como para I=0.6A es la misma, pudiendo además tomar una incertidumbre "pequeña" (seleccionada de manera arbitraria) ya que como podemos ver hay puntos que se nota que ascienden y otros en los que bajan, por lo que podemos saber con más o menos certeza que debe estar

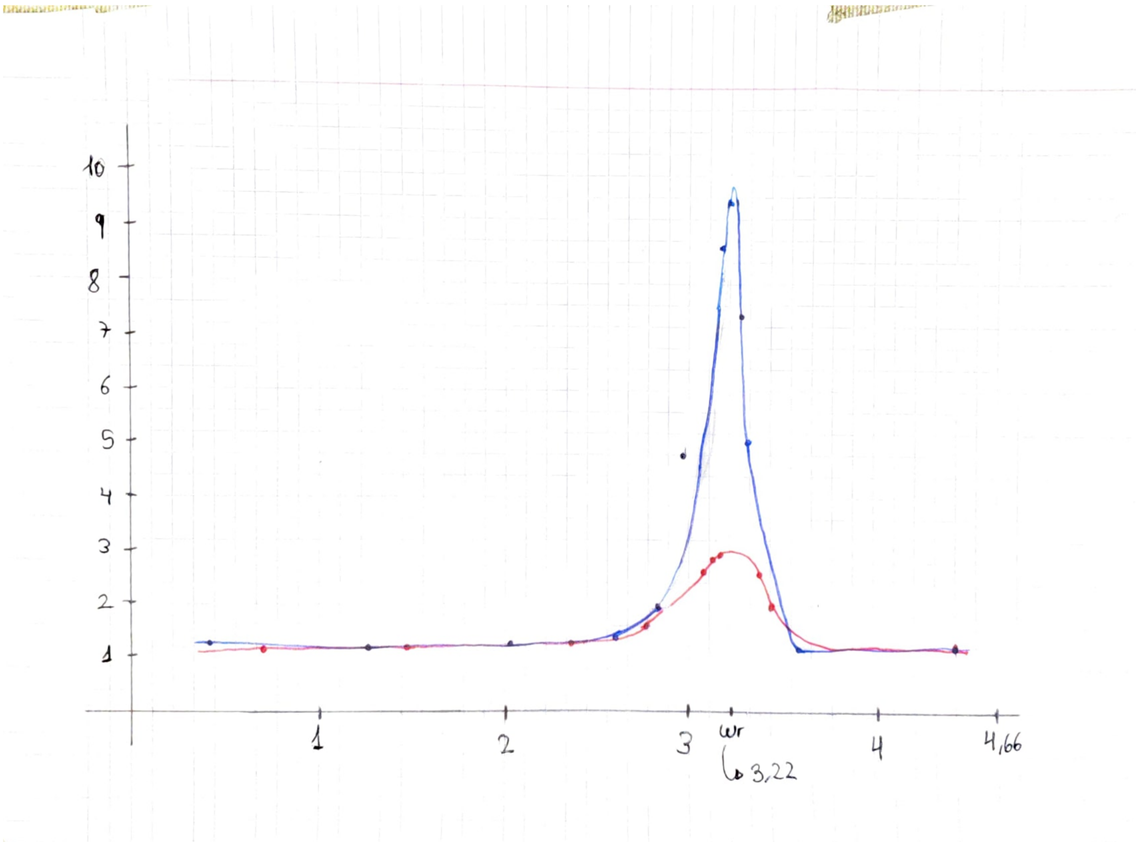

Figure 5: amplitud frente a frecuencia del motor dibujado a mano alzada (no es una regresión)

ahí. Por lo tanto:

$$\omega_R = 3.22 s^{-1} \pm 0.05$$

Para los valores en los que $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$ tenemos que la curva tiende a una amplitud de 1.2 cm aproximadamente. Experimentalmente vemos que prácticamente no cambia el oscilador, como si alrededor del mismo punto hubiera una pequeñísima oscilación. Experimentalmente es algo difícil explicar porque, aunque lo que se me ocurriría a mi es que la fuerza creada por el motor y la fuerza de recuperación natural son divergentes (se destruyen entre sí reduciendo mucho la amplitud). Entonces cuando la frecuencia natural y la frecuencia de la fuerza coinciden tenemos que es máxima la amplitud. Ahora bien echando un vistazo a la literatura tenemos que realmente para que la amplitud sea máxima también está por el medio la fricción, pero si es muy pequeña realmente si que ocurre esto: para que la amplitud sea máxima $\omega \approx \omega_0$. Además otro fenómeno interesante es el desfase, entre el el motor y el oscilador, estudiado mas bien de manera cualitativa. Cuando $\omega \to 0$ vemos que giran a la vez, que siguen el mismo movimiento ($\gamma = 0$), cuando $\omega = \omega_R$ tenemos que cuando el motor está en la posición arbitraria 0 el oscilador está en uno de los máximos, por lo que $\gamma = \pi/2$; y cuando la $\omega \to \infty$ tenemos que si el oscilador está en uno de los máximos el otro está en el máximo contrario ($\gamma = \pi$).

Tenemos que hallar a partir de la curva obtenida los valores de ω para los que $A(\omega_1, \omega_2) =$

$A(\omega_R)/\sqrt{2}$. De manera cualitativa usando la gráfica hecha a mano tenemos que esos valores son:

$$I = 0.3: \ \omega_1 = 3.15, \ \omega_2 = 3.29; \ I = 0.6: \ \omega_1 = 2.95, \ \omega_2 = 3.44$$

El error para estos datos tiene que ser relativamente alto, ya que la manera de obtenerlos es, como poco, bastante rudimentaria. Sin embargo tampoco poseemos conocimientos para extraer con certeza una incertidumbre, por lo que seleccionarlos de manera totalmente arbitraria 0.1. Con estos datos obtenidos podemos ahora si obtener el *factor calidad* que viene dado por la expresión:

$$Q = \omega_R/\Delta\omega \tag{4}$$

Entonces para cada intensidad tenemos que los factores calidad son:

$$I = 0.3\ A: \ Q_1 = 23.00; \ I = 0.6\ A: \ Q_2 = 6.57$$

Investigando un poco sobre este factor de calidad en la literatura (e internet) encontré que es una medida de cuanta energía puede almacenar un oscilador respecto a cuanta energía disipa. Es decir, a mas alto factor de calidad menos energía disipa en función de la almacenada, y a mas bajo el factor calidad mas energía disipa en función de la energía almacenada. Por lo que es evidente que a mayor fricción tiene que disiparse muchísima mas energía, lo que comprobamos experimentalmente.

3 Conclusión:

Como podemos comprobar a lo largo de toda la práctica hemos estudiado el comportamiento de osciladores bajo diferentes casos: en el primero con una fricción muy elevada y en el segundo bajo las mismas condiciones pero ademas ejerciendo una fuerza externa oscilatoria. Como a lo largo de la memoria fuimos comentando los resultados no queda mucho mas que decir, salvo algún punto: en general tuvimos datos con incertidumbres elevadas ya que la medida de tiempos (para hallar las frecuencias) las hacemos con un cronómetro y a ojo, y aunque nos servimos de los móviles para reducirla, sigue siendo bastante grande. Además no tomamos muchos datos debido al tiempo. Esto hasta cierto punto reduce mucho la calidad de la memoria, que en el caso de querer mejorarla podríamos tomar mas datos y mejorar los que ya tomamos. Otra cosa que podríamos hacer es una regresión no lineal tanto para hallar la fricción como para hallar la frecuencia de resonancia y otros valores de interés, pero eso va mas allá de los objetivos. A pesar de esto hemos comprobado hasta cierto punto lo que hemos estudiado teóricamente, lo cual era nuestro principal objetivo.

4 Comentarios adicionales

Aquí escribiré ciertas incertidumbres de datos tomados directamente y su naturaleza:

- s(T) = 0.25 s $\longrightarrow$ tomamos 0.25 s por ser el tiempo de respuesta medio humano.
- s(I) = 0.02 $\longrightarrow$ la intensidad oscilaba 0.02 A en el aparato.
- s(A) = 0.2 cm $\longrightarrow$ es la precisión del aparato de medida.