Trabajo de Astrofísica 2:
Universo dominado por materia y esférico ($k = +1$)

Daniel Vázquez Lago

May 2025

En el presente documento vamos a tratar de resolver un universo dominado por materia y esférico.

1. Expresión de la ecuación de velocidad de Friemdan

La ecuación de Friedman para la velocidad en este universo es;

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon$$

donde ya hemos supuesto $k = 1$. Esta sería la ecuación de friemdan para la velocidad, que de momento no podemos integrar dado que $\epsilon(t)$ es una función que depende del tiempo cósmico. Aquí tenemos que aplicar qeu el universo está dominado por materia, de tal modo qeu la ecuación de fluido:

$$\dot{\epsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P)$$

y sustituyendo la ecuación de estado de la materia $P_m \simeq 0$ tenemos que:

$$\frac{\epsilon(t)}{\epsilon_0} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3}$$

que podemos sustituir en la primera ecuación para obtener:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\epsilon_0 a_0^3}{a^3}$$

Ahora solo tenemos que expresar:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_0 - \frac{c^2}{a_0^2} \qquad \epsilon_{0,c} = \frac{3H_0^2c^2}{8\pi G} \qquad \Omega_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{0,c}}$$

A partir de estas definiciones hacemos los cambios:

$$\frac{c^2}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - H_0^2 = H_0^2(\Omega_0 - 1) \qquad \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon_0 = H_0^2\frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2}\epsilon_0 = H_0^2\Omega_0$$

tal que podemos obtener:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = H_0^2\left(\Omega_0\frac{a_0^3}{a^3}\right) - (\Omega_0 - 1)\frac{a_0^2}{a^2}$$

2. Integración

Para integrar las ecuaciones tenemos que hacer un par de cambios de variable. El primero:

$$x = \frac{a}{a_0} \longrightarrow a = xa_0 \quad \dot{a} = a_0\dot{x}$$

de lo que se deduce que:

$$\dot{x}^2 = H_0^2\left(\Omega_0 x^{-1} - (\Omega_0 - 1)\right)$$

Así tenemos que:

$$\frac{1}{H_0}\int_0^x \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\Omega_0 - (\Omega_0 - 1)x}} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_0}}\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0}x}} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

donde hemos aplicado la condición más sencilla: en el instante Big Bang ($t = 0$) no existía el espacio ($x = 0$). Aplicando el cambio de variable

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}}\sin\theta \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}}\mathrm{d}\sin\theta \quad \mathrm{d}x = 2\left(\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\sin\theta$$

y por tanto

$$\frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_0}}\left(\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}\right)^{3/2}\int\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_0}}\left(\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}\right)^{3/2}\int\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^t \mathrm{d}t$$

usando que

$$\int\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

Cuando $x = 0 \longrightarrow \sin\theta = 0 \longrightarrow \theta = 0$[1] y por tanto

$$t = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_0}}\left(\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}\right)^{3/2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

[1] En realidad esto último no es estrícatamente cierto, pero elegimos esto por ser una solución con menos términos.

Ahora definimos $H_0 t$ en función de x

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}} \left(\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)} \right)^{3/2} \left[\arcsin \left(\left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} x \right)^{1/2} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \arcsin \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} x \right)^{1/2} \right) \right]$$

y por tanto $H_0 t$ queda en función de x y Ω_0. Podemos observar que si $\Omega_0 = 2$ tenemos

$$H_0 t = 2 \left[\arcsin \left(\left(\frac{x}{2} \right)^{1/2} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \arcsin \left(\left(\frac{x}{2} \right)^{1/2} \right) \right) \right]$$

lo que significa que $x \in [0, 2]$. Representamos la gráfica en la figura 1.

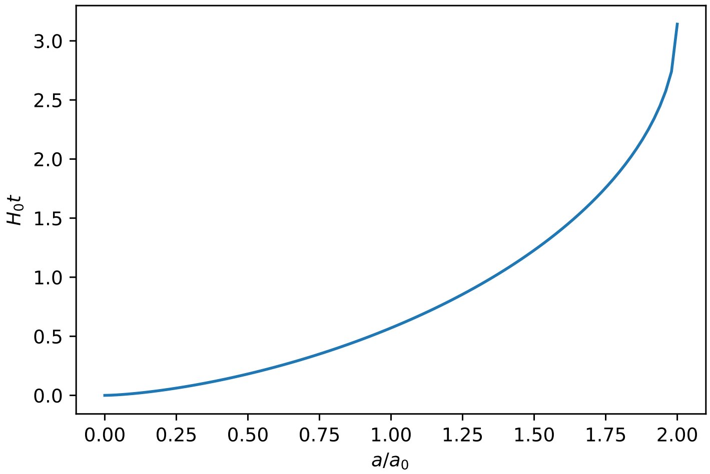

Figura 1: Representación gráfica $H_0 t$ frente a/a_0.

3. Edad del universo en función de H_0 y Ω_0

Nos piden la edad del universo. Es este caso estamos hablando de que $x = 1$ ya que $t = t_0 \longrightarrow a = a_0$. Consecuentemente

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}} \left(\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)} \right)^{3/2} \left[\arcsin \left(\left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{1/2} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \arcsin \left(\left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{1/2} \right) \right) \right]$$

En esta ocasión ya no tenemos restricción en el rango de Ω_0 ya que $\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} < 1$. Lo único que acota los valores es que el modelo es esférico, lo que exige que $\Omega_0 > 1$. Representamos:

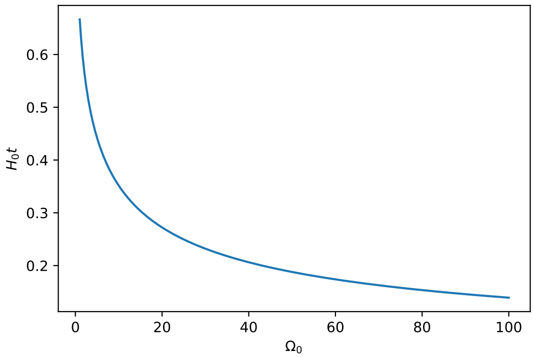

Figura 2: Representación H_0t frente Ω_0.

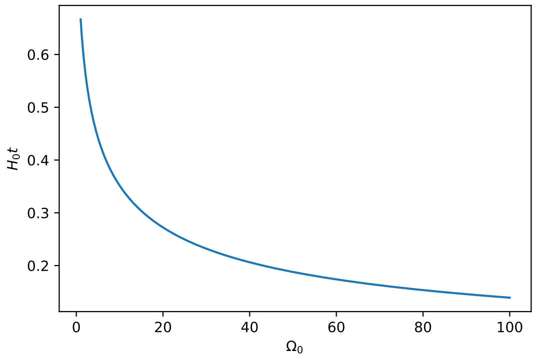

Figura 3: Representación H_0t frente Ω_0.

Y ahroa calculamos el valor para $\Omega_0 = 2$:

$$t_0 = \frac{2}{H_0}\left[\arcsin\left(1/\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\left(1/\sqrt{2}\right)\right)\right] = \frac{2}{H_0}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

para calcularla:

$$\frac{1}{H_0} = \frac{1}{70}\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = \frac{3 \times 10^{11}}{70 \times 3.26}\text{year} = 1.31 \times 10^{10}\,\text{year}$$

por lo que simplemente

$$t_0 = 7.51 \times 10^9\,\text{year}$$

obteniendo que $t_0 \approx 0.57 \cdot (1/H_0)$ resultado interesante para comprobar si los resultados de las gráficas posteriores son compatibles, ya que a $x = 1 \longrightarrow H_0 \cdot t_0 \approx 0.57$. [2]

4. Cálculo de $x(t)$ y su representación gráfica

Tenemos la ecuación, para $\Omega_0 = 2$:

$$H_0 \cdot t = 2\left[\arcsin\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot \arcsin\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}\right)\right)\right]$$

Lógicamente esta función no es invertible. Podríamos hacer aproximaciones para x pequeño, usando taylor, pero no sería preciso para $x \approx 1$ que es el la región del unierso en la que estamos . Sin embargo para *representarlo* no necesitamos la expresión analítica, basta con invertir los ejes 4.

[2] Ponemos *year* porque LaTeXno interpreta bien la ñ en las ecuaciones.

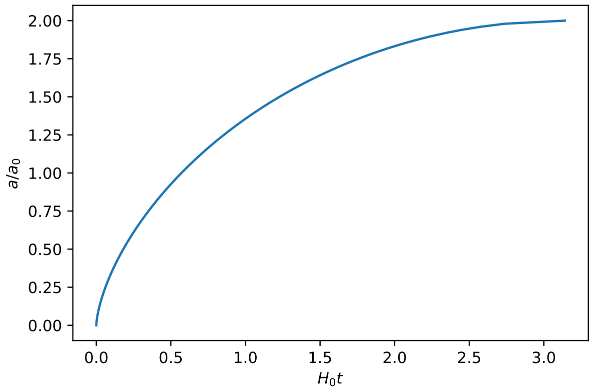

Figura 4: Representación gráfica a/a_0 frente H_0t.

La interpretación es clara: a medida que avanza el universo este se expande pero cada vez de manera más lenta, i.e. estamos en un universo con expansión decelerada, lo que efectivamente corresponde a un universo dominado por materia según lo visto en clase. Como podemos ver para 6 veces la edad del universo actual (recordamos $t_0H_0 \approx 0.57$) tenemos que el universo prácticamente se ha dejando de expandir llegando a un universo estático, que tampoco se contrae. Sin embargo sabemos que tras llegar al máximo de $a(t)/a_0$ este tendrá que colapsar por ser un universo compuesto únicamente por materia y no tener contribución de la cosntante cosmológica, aunque no se puede deducir de nuestra representación.

5. Representación de t_z

Como sabemos la definición:

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t_z)} \longrightarrow x = \frac{1}{1+z}$$

Por lo que sencillamente en realidad la solución es bien sencilla, ya que solo tenemos que sustituir en el caso anterior:

$$H_0t = 2\left[\arcsin\left(\left(\frac{1}{2\cdot(1+z)}\right)^{1/2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\arcsin\left(\left(\frac{1}{2\cdot(1+z)}\right)^{1/2}\right)\right)\right]$$

tal que representamos en 5.

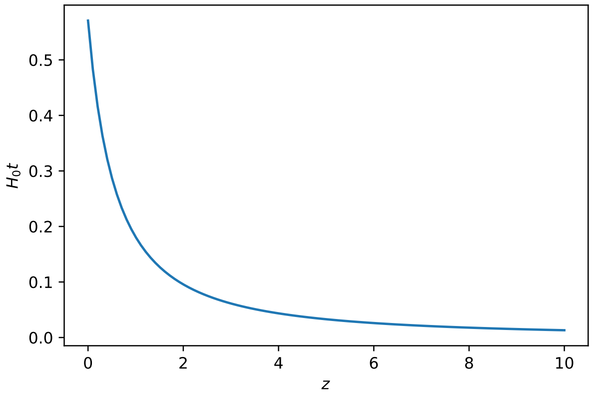

Figura 5: Representación gráfica $H_0 t$ frente z con $\Omega_0 = 2$.

6. Conclusiones

Como podemos ver no tenemos muchos puntos compatibles con el universo benchmark. Tratemos las diferencias una por una:

- **Geometría del universo:** En el Universo Benchmark tenemos que $k = 0$, mientras que aquí estamos tratando con un universo esférico $k = 1$ tal que $\Omega_0 > 1$.
- **Proporción de energía:** En el Universo Benchmark tenemos una dominación de materia bariónica/no bariónica de entorno 0.32 (a t_0), mientras aquí estamos asumiendo que es de 1 (dominado completamente por materia).
- **Edad del Universo:** la edad del universo en el modelo Benchmark es de 13.8 mil millones de años, mientres que en este universo sería de entorno a 7.8 mil millones de años, poco más de la mitad.
- **Expansión del universo**: En el modelo Benchmark el universo se expande de manera acelerada, mientras que en este universo la expansión es decelerada, y lo más probable es que posteriormente colapse por la atracción gravitatoria de la materia. Esto ocurre al no tener apenas contribución por parte de la constante cosmológica.

Como podemos ver no es muy compatible con el universo benchmark abalado por las observaciones de SNeIa y microondas. De hecho

Código para las gráficas

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def cosmological_time(Omega0, x):
    """ Funcion que obtiene el valor tH0

    Args:
        Omega0 (double, array): _description_
        x (double, array): _description_

```

```python
    Returns:
        H0t (double, array): _description_
    """

    prefactor = 1 / np.sqrt(Omega0)
    factor = (Omega0 / (Omega0 - 1)) ** (3 / 2)
    sqrt_arg = ((Omega0 - 1) / Omega0) * x
    sqrt_val = np.sqrt(sqrt_arg)

    arcsin_term = np.arcsin(sqrt_val)
    sin_double_arcsin = np.sin(2 * arcsin_term)

    result = prefactor * factor * (arcsin_term - 0.5 * sin_double_arcsin
   )
    return result

# Dibuamos las graficas:

# Ejercicio 2
x = np.linspace(0,2,100)
Omega0=2

plt.figure()
plt.plot(x,cosmological_time(Omega0,x))
plt.xlabel("$a/a_0$")
plt.ylabel("$H_0 t$")
plt.savefig("Figura_1.pdf",bbox_inches="tight")

# Ejercicio 3
x = 1
Omega0= np.linspace(1.001,100,1000)

plt.figure()
plt.plot(Omega0,cosmological_time(Omega0,x))
plt.xlabel("$\Omega_0$")
plt.ylabel("$H_0 t$")
plt.savefig("Figura_2.pdf",bbox_inches="tight")

x = 1
Omega0= np.linspace(1.001,10,1000)

plt.figure()
plt.plot(Omega0,cosmological_time(Omega0,x))
plt.xlabel("$\Omega_0$")
plt.ylabel("$H_0 t$")
plt.savefig("Figura_3.pdf",bbox_inches="tight")

# Ejercicio 4
x = np.linspace(0,2,100)
Omega0=2

plt.figure()
plt.plot(cosmological_time(Omega0,x),x)
plt.ylabel("$a/a_0$")
plt.xlabel("$H_0 t$")
plt.savefig("Figura_4.pdf",bbox_inches="tight")

```

```
# Ejercicio 5
z=np.linspace(0,10,100)
x=1/(1+z)

plt.figure()
plt.plot(z,cosmological_time(Omega0,x))
plt.xlabel("$z$")
plt.ylabel("$H_0 t$")
plt.savefig("Figura_5.pdf",bbox_inches="tight")
```