Astrofísica

Daniel Vázquez Lago

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Índice general

1. Geodesia **5**
1.1. Definiciones básicas . . . 5
1.2. Coordenadas astronómicas . . . 6
1.2.1. Coordenadas Horizontales . . . 7
1.2.2. Coordenadas ecuatoriales horarias . . . 8
1.2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas . . . 8
1.2.4. Coordenadas eclípticas . . . 9
1.3. Ejercicios . . . 9
1.4. Soluciones . . . 10

2. Mecánica Celeste **13**
2.1. Problema de los dos cuerpos . . . 13
2.1.1. Leyes de Kepler . . . 13
2.1.2. Ecuaciones diferenciales fundamentales . . . 13
2.1.3. Solución de la ecuación reducida . . . 14
2.1.4. Plano orbital en función de otro plano de referencia . . . 16
2.1.5. Anomalía verdadera, excéntrica, media y longitud media . . . 17
2.2. Problema de los tres cuerpos . . . 18
2.2.1. Introducción . . . 18
2.2.2. Problema de los tres cuerpos restringido y puntos de Lagrange . . . 18
2.3. Ejercicios . . . 19
2.4. Soluciones . . . 20

3. Astrofísica **23**
3.1. Introducción: escalas de tiempo y distancia . . . 23
3.1.1. Historia temporal del Universo . . . 23
3.1.2. Escalas de distancias . . . 24
3.1.3. Escalas galácticas: estrellas binarias . . . 25
3.1.4. Composición del Universo y el Sistema Solar . . . 26
3.2. Teoría de la radiación . . . 26
3.2.1. Propiedades corpusculares de la radiación . . . 26
3.2.2. Aplicaciones astrofísicas . . . 27
3.2.3. Espectros atómicos . . . 27
3.2.4. Efecto doppler . . . 28
3.2.5. Tipos espetrales de las estrellas . . . 29
3.3. Diagrama de Hertzsprug-Rusell y la secuencia principal . . . 30
3.3.1. Diagrama experimental . . . 30
3.3.2. Diagrama teórico . . . 30
3.3.3. Características del diagrama de Hertzsprung-Rusell . . . 31

3.3.4. Diagrama de Hertzsprung-Rusell y la secuencia principal 31
3.4. Ecuaciones de equilibrio estelar y teorema del virial 31
3.4.1. Introducción 31
3.4.2. Ecuaciones 32
3.4.3. Teorema del virial y pico de Gamow 34
3.5. Energía de las estrellas y nucleosíntesis 34
3.5.1. Distribución de la energía y pico de Gamow 34
3.5.2. Inicio de las reacciones nucleares 35
3.6. Ejercicios 36

4. Cosmología **39**
4.1. ¿Qué es la cosmología? 39

Capítulo 1

Geodesia

1.1. Definiciones básicas

Como sabemos la tierra tiene una forma de una esfera achatada, tomando la forma de un elipsoide de revolución. En palabras de Isaac Newton: «Una forma de equilibrio que tiene una masa bajo el influjo de las leyes de gravitación y girando en torno a su eje es la de un esferoide aplastado en sus polos». Un *esferoide aplastado en sus polos* es básicamente un elipsoide de revolución. Definimos pues:

- **Polos:** puntos de corte entre el eje menor de la elipse y elipsoide. Llamamos polo norte (PN) al corte superior y polo sur (PS) al corte superior.
- **Ecuador terrestre:** línea circular correspondiente al corte entre el plano perpendicular al eje menor que pasa por el centro del elipsoide y este.

- **Paralelos:** líneas circulares correspondientes a los cortes entre los planos paralelos al ecuador (paralelo cero) y el elipsoide.
- **Meridianos:** líneas elipsoidales determinadas por el corte entre el elipsoide y el hazde planos que define el eje menor. Se considera *meridiano cero* al que pasa por Greenwich.
- **Vertical de lugar:** es la línea normal al elipsoide en un punto dado.

Al conjunto de variables que permiten describir cualquier punto de la Tierra se le llaman *coordenadas terrestres*, y existen dos tipos de coordenadas terrestres, que se definen en función de la *vertical de lugar*

- **Coordenadas geográficas:** son dos variables angulares (ϕ, λ), que se definen como
  - **Latitud geográfica** ϕ. Toma valores de $90°$ a $-90°$. Para un punto A cualquiera el ángulo ϕ es el comprendido entre la vertical de lugar y el ecuador.
  - **Longitud geográfica** λ. Toma valores entre $180°$ y $-180°$. Para un punto A cualquiera el ángulo λ se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.

- **Coordenadas geocéntricas**: consta de tres variables (ρ, ψ, λ), dos angulares y una distancia. Estas son:

  - **Radio vector** ρ. Distancia entre el centro de la tierra (punto 0) y el punto A.
  - **Latitud geocéntrica** ψ. Toma valores de $90°$ a $-90°$. Para un punto A cualquiera el ángulo ψ es el comprendido entre el radio y el ecuador.
  - **Longitud geocéntrica** λ. Se define igual que la longitud geográfica. Toma valores entre $180°$ y $-180°$. Para un punto A cualquiera el ángulo λ se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.

Otra definición importante es la del **plano del horizonte**, que es el plano perpendicular a la vertical de lugar en el punto A. El plano horizonte pertenece a la llamada **esfera celeste topocéntrica**, que es aquella cuyo centro es el observador. En esta esfera, el plano horizonte define lo que una persona diría que es arriba y abajo. La esfera celeste tropocéntrica tiene también un polo norte celeste (PNC) y un polo sur celeste (PSC) paralelo con el eje del mundo, pero no necesariamente con el «arriba» del observador. Al punto Z se le llama **cénit** y al punto Z' se le llama **nádir**.

Como podemos ver el ángulo entre la línea PNC y Z en la esfera topocéntrica es igual a $90° - \phi$, y por tanto independiente al meridiano en el que nos encontremos, solo depende del paralelo en el que se encuentre el punto del observador. A dicho ángulo se le llama **colatitud**.

El **plano de la eclíptica** es el plano que contiene la órbita de la Tierra alrededor del Sol, y está inclinado con respecto al ecuador celeste una cantidad llamada *oblicuidad de la eclíptica* $\varepsilon = 20°26'29''$. En la esfera celeste geocéntrica, cuyo centro es la Tierra, es el Sol quien aparenta moverse a nuestro alrededor. Llamamos **eclíptica** a la intersección del plano de la eclíptica con la esfera celesta.

1.2. Coordenadas astronómicas

Las coordenadas astronómicas nos sirven para designar la posición de un astro en la bóveda celeste. Todos los sistemas de coordenadas que se usan en astronomía son sistemas esféricos/polares,

designando cualquier punto de la esfera celeste con dos ángulos. Toda diferencia entre dos sistemas de coordenadas distintos radica en 4 puntos: la definición de lo que llamamos *plano fundamental*, su *eje x*, *el centro de la esfera elegido*, y si el sistema de coordenadas es *dextrógiro* o *levógiro*. Así, tenemos dos clasificaciones:

- En función del centro de la esfera:
  - **Topocéntrico:** el centro es el observador.
  - **Geocéntrico:** el centro es la tierra.
  - **Helicéntrico:** el centro es el sol.
- En función del plano fundamental:
  - **Horizontales:** en este caso el plano fundamental es el plano del hoirzonte..
  - **Ecuatoriales:** el plano ecuatorial es el plano fundamental.
  - **Eclíptica:** el plano de la eclíptica es el plano fundamental.

Un sistema es **levógiro** cuando el ángulo azimutal (el que manda en el plano fundamental) sigue el sentido antihorario mirando en el sentido del eje X, mientras que es **dextrógiro** si sigue en el sentido horario. La definición del eje X depende del sistema, y será definida en cada apartado.

1.2.1. Coordenadas Horizontales

Las coordenadas horizontales usan el horizonte como plano fundamental, es un tipo de sistema levógiro y el eje X para cualquier observador es aquel que apunta al sur (hemisferio norte) o que apunta al norte (hemisferio sur). Las coordenadas son:

- La **altura** h. Tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano horizonte y la línea que conecta el observador y el punto. La *distancia cenital* se define como el ángulo entre el vector normal del plano y la línea que conecta el observador y el punto.
- El **acimut** A se define como el ángulo entre el eje X y la proyección en el plano fundamental del la línea que conecta el observador y el punto, creciendo en el sentido levógiro.

(a) Coordenadas horizontales.

(b) Cambio de posición del sol a lo largo del día.

Este sistema es un sistema local, es decir, los astros dependen del lugar del punto en la tierra desde el que se está observando. Además, también varían en función del momento del día. Esto es evidente si pensamos por ejemplo en el sol: para diferentes horas del día se encontrará a diferente altura (y en diferente acimutal).

1.2.2. Coordenadas ecuatoriales horarias

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje z entonces el eje del mundo. Es un sistema levógiro, que define el eje X como aquel que apunta hacia el sur (hemisferio norte) o que apunta hacia el norte (hemisferio sur), pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que la altura para las coordenadas horizontales pero ahora usando como referencia el plano ecuatorial. Tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.

- Definimos el **ángulo horario** H como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

1.2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje z entonces el eje del mundo. Es un sistema dextrógiro, que define el eje X como aquella recta del plano ecuatorial que se interseca con la eclíptica. También se le llama *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano ecuatorial y el plano eclíptico coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica ε). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que en el sistema ecuatorial horario, tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.

- Definimos el **ascensión recta** α como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

1.2.4. Coordenadas eclípticas

Las coordenadas eclípticas (λ, β) son exactamente iguales que las coordendas ecuatorilaes absolutas pero usando el plano eclíptico como plano fundamental. El eje x entre ambos es el mismo, por lo que la única diferencia entre ambos sistemas es una rotación ε (ángulo entre el plano eclíptico y el plano ecuatorial). Es un sistema dextrógiro, que define el eje X como la *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano eclíptico y el plano eclíptico coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica ε). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que en el sistema eclíptico horario, tiene valores desde los $90°$ a $-90°$ Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano eclíptico y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.
- Definimos el **ascensión recta** λ como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano eclíptico de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

Esfera celeste, en este orden: coordenadas eclípticas, horizontales, absolutas. Para que sirve cada uno, cuales son los ángulos de referencia. En las ecuatoriales hay que hablar de los ángulos del equinocio y solscitio del sol. En lass horizontales también. Como se cambia de un sistema de coordenadas a otra. Matrices de rotación. Tiempo sideral. Diferencia entre levógiro y dextrógiro.

Hablar de la precesión y de la nutación, de los equinocios/polos que también preceden. Influencia de la luna en la ntuación. tabmién hablar de que el punto vernal también precede

Hacer una sección con los cambios de coordenadas, posiciones de los diferentes equinocios en cada coordenada, repasar examenes y juntar preguntas.

1.3. Ejercicios

Ejercicio 1.1:

Prueba que el azimut y el ángulo horario de un astro en sus puntos de orto y ocaso, A_0 y H_0, para un observador a una latitud ϕ, satisfacen la siguientes relaciones:

$$\cos(A_0) = -\frac{\sin(\delta)}{\cos(\phi)} \qquad \cos(H_0) = -\tan\delta\tan\phi \tag{1.3.1}$$

Solución en la página 10

Ejercicio 1.2:

¿Cómo relacionarías la información proporcionada por H_0 con el tiempo que un astro permanece por encima del horizonte?

Solución en la página 11

Ejercicio 1.3:

¿Cuántas horas máximas y mínimas del Sol por encima del horizonte a lo largo de un día podemos tener en Santiago de Compostela? Dato: $\phi = 42°, 52', 40''$.

Solución en la página 11

Ejercicio 1.4:

Las coordenadas ecuatoriales absolutas de una estrella son $\alpha = 3^h 45^m 43^s$, y $\delta = 20°8'27''$. ¿Podremos observarla desde la Facultad de Matemáticas ($\phi = 42°52'26''$) en el instante en el que el punto vernal está en la dirección norte? **[Solución:** Dado que $h < 0°$ ($h = -8°24'29''$), la estrella no será visible.**]**

Solución en la página 11

Ejercicio 1.5:

Un cometa tiene coordenadas ecuatoriales absolutas $\alpha = 10^h 3^m 57^s$ y $\delta = 8°24'54''$. ¿Cuáles son sus coordenadas eclípticas? **[Solución:** $\lambda = 150°3'19''$ $\beta = -3°14'31''$.**]**

Solución en la página 12

1.4. Soluciones

Solución del ejercicio 1.1 en la página 9:

Recordamos que el orto y ocaso son los lugares del plano horizonte donde empieza a ser visible y deja de ser visible. Con respecto las coordenadas horizontales, la altura es cero $h = 0°$, o lo que es lo mismo $z = 90°$. Ahora tenemos que usar las coordenadas de Bessel, que relaciona las coordenadas horizonatles (A,h) y horarias (H, δ):

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ \cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

de lo cual se deduce que

$$\sin\delta = -\cos(\phi)\cos A_0 \Rightarrow \cos(A_0) = -\frac{\sin\delta}{\cos\phi} \tag{1.4.2}$$

Y también se deduce que

$$\cos\delta\cos H_0 = \sin\phi\cos A_0 \Rightarrow \cos(H_0) = \frac{\sin\phi}{\cos\delta}\left(-\frac{\sin\delta}{\cos\phi}\right) \Rightarrow \cos(H_0) = -\tan\delta\tan\phi \tag{1.4.3}$$

Solución del ejercicio 1.2 en la página 9:

El tiempo que un astro está encima del horizonte corresponde a $2H_0$. Puso $H_{\text{orto}} = -H_{\text{ocaso}}$.

Solución del ejercicio 1.3 en la página 10:

El máximo de horas ocurre cuando estamos el solsticio de verano. En este caso sabemos que $\delta = \epsilon$. Usando las ecuaicones del primer ejercicio:

$$H_0 = 7^h 34^m 57^s \Rightarrow 2H_0 = 15^h 9^m 54^s \tag{1.4.4}$$

El mínimo de horas del sol es en el solsticio de invierno. En este caso

$$\delta = -\varepsilon \Rightarrow 2H_0 = 8^h 50^m 4^s \tag{1.4.5}$$

Solución del ejercicio 1.4 en la página 10:

Nos dan las coordenadas ecuatoriales absolutas. La condición para no ver un astro desde un punto de la tierra es que dicho astro, en las coordenadas horizontales, verifique que su altura tiene ángulos negativos ($h < 0°$). Consecuentemente solo tenemos que calcular h a partir de α y δ. ¿Cómo lo hacemos?

Primero calculamos el valor de las coordenadas ecuatoriales horarias. Como sabemos $\delta_{\text{horaria}} = \delta_{\text{absolutas}}$ y $\alpha + H = \theta$, siendo θ la posición del punto vernáculo en las horizontales. Cuando nos dicen que el punto vernáculo apunta al norte, nos están dado el dato de θ. Como x en las horarias apunta al sur, $\theta = 180°$. Así pues:

$$H = 12^h - 3^h 45^m 43^s = 8^h 14^m 17^s \approx 120.24° \qquad \delta = 20°8'27'' \tag{1.4.6}$$

Ahora solo tenemos que transformar las coordenadas ecuatoriales horarias en las horizontales. Esto también es sencillo, ya que es rotar un ϕ los ejes x y z, tal que:

$$\begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & -\cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta \cos H \\ \cos\delta \sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1.4.7}$$

Y ya podríamos obtener el valor de h, solo faltando despejar. Teniendo en cuenta que $\phi = 42°52'26''$. Para calcular h (que es lo único que necesitamos en realidad) despejamos:

$$\sin h = \cos\phi \cos\delta \cos H + \sin\phi \sin\delta \tag{1.4.8}$$

que es:

$$\sin h = -0.1125 \quad \Longrightarrow \quad h = -6.46° \tag{1.4.9}$$

La solución correcta es $h = -8°24'29''$. La diferencia es posiblemente culpa de los decimales, porque no hemos convertido correctamente los segundos y minutos.

Solución del ejercicio 1.5 en la página 10:

Para pasar de las coordenadas ecuatoriales absolutas a las coordenadas eclípticas solo tenemos que hacer una rotación, ya que el eje x es el mismo (punto vernal). Así pues, solo tenemos que aplicar la matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon & \sin\epsilon \\ 0 & -\sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1.4.10}$$

Recordamos que $\varepsilon = 20°26'29''$, $\alpha = 10^h3^m57^s$ y $\delta = 8°24'54''$. Primero obtenemos β:

$$\sin\beta = -\sin\epsilon\cos\delta\sin\alpha + \cos\epsilon\sin\delta \tag{1.4.11}$$

$$\sin\beta = 0.05986 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 3.432° \tag{1.4.12}$$

Luego solo tenemos que despejar λ. Sabiendo que

$$\cos\lambda = \frac{\cos\delta\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\lambda = -0.853° \Rightarrow \lambda = 150.19° \tag{1.4.13}$$

Siendo la solución correcta $\lambda = 150°3'19''$ $\beta = -3°14'31''$.

Capítulo 2

Mecánica Celeste

2.1. Problema de los dos cuerpos

2.1.1. Leyes de Kepler

Podríamos decir que el problema de los dos cuerpos comienza con la formulación de las tres leyes para el movimiento planetario por parte de Kepler. Estas tres leyes trataban de dar cuenta sobre como se movían los astros alrededor del Sol, y entonces los primeros pasos para la descripción de los cuerpos celestes:

- **Ley de las órbitas**: los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos de la elipse.
- **Ley de las áreas**: la línea que conecta un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- **Ley de períodos**: el cuadrado del período orbital de un planeta (T) es proporcional al cubo del a distancia media del planeta al Sol:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \tag{2.1.1}$$

  donde a es el semi-eje mayor de la elipse, que es igual al promedio entre las distancias en perihelio r_p y afelio r_a[1]

2.1.2. Ecuaciones diferenciales fundamentales

El *problema de los dos cuerpos* o *problema de Kepler* es el nombre que se le da al problema de la dinámica de dos cuerpos celestes (suponiendo que estos están completamente aislados). Este problema hoy en día esta asociado a 6 ecuaciones diferenciales no linales, autónomas[2] de segundo orden, las cuales vienen dadas en última instancia por la *ley de gravitación universal de Newton*. Estas ecuaciones diferenciales son:

[1] Más tarde definiremos mejor que es un afelio y perihelio, pero dicho rápidamente, el afelio es el punto de la órbita del planeta más alejado del Sol, y el perhelio el punto más cercano.

[2] Que una ecuación diferencial sea autónoma significa que no depende explícitamente de la coordenada diferencial, en nuestro caso, el tiempo.

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{r} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{r} \end{cases} \tag{2.1.2}$$

donde $\mathbf{r}_1$ es la posición del cuerpo de masa m_1, $\mathbf{r}_2$ la posición del cuerpo de masa m_2 y $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ la distancia entre los dos cuerpos. Podemos ver que son ecuaciones invariantes frente a invariancia temporal. Para resolver este problema de manera analítica se suele usar un cambio de variables muy sencillo:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{2.1.3}$$

tal que $\mathbf{r}_c$ es la *posición del centro de masas* y $\mathbf{r}$ es la *posición reducida*. Veamos que este cambio de coordenadas es invertidble:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c + \frac{m_2}{m_2+m_1}\mathbf{r} \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c - \frac{m_1}{m_2+m_1}\mathbf{r} \tag{2.1.4}$$

Una vez fijamos el nuevo sistema llamado **sistema reducido**, tenemos que las ecuaciones diferenciales pasan a ser mucho más sencilas:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \quad 0 \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{2.1.5}$$

donde μ es la llamada *masa reducida* y se define como $\mu = G(m_1 + m_2)$. a primera ecuación tiene una solución extremadamente sencilla $\mathbf{r}_c(t) = a + bt$, y esta nos lleva a la conservación de las cantidades *momento total* $\mathbf{P}$ y *momento angular total* $\mathbf{L}$, definidos como

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2 \tag{2.1.6}$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$. Siempre podemos encontrar un sistema de referencia donde el centro de masas está quieto, tal que $\mathbf{P} = 0$. A este sistema de referencia lo llamamos *sistema de referencia del centro de masas*, y lo que nos dice es que $\mathbf{r}_c(t) = 0$, y por tanto que el movimiento de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ está determinado únicamente por su movimiento relativo $\mathbf{r}$. A la hora de describir la órbita de dos cuerpos este es el sistema de referencia mas usado, por ser el más sencillo.

2.1.3. Solución de la ecuación reducida

El problema de los dos cuerpos se reduce ahora a obtener la solución de la ecuación reducida

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad \mu = G(m_1 + m_2)$$

Estas 3 ecuaciones diferenciales de grado 2 se pueden expresar como 6 ecuaciones diferenciales de grado 1, tales que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Para solucionar estas ecuaciones diferenciales lo que haremos es suponer que existen varias cantidades conservadas (las cuales efectivamente se cosnervarán). Estas cantidades conservadas son:

- **Momento angular**: $\mathbf{c} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$.

- **Energía**: $h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$.
- **Vector excéntrico**: $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}\mathbf{v} \wedge \mathbf{c} - \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Estas cantidades representan un total de siete constantes del movimiento. Sin embargo, no son completamente independientes, ya que están ligadas por al menos dos relaciones fundamentales:

- Ortogonalidad entre el momento angular y el vector excétrico

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 0. \tag{2.1.8}$$

- Relación entre la excentricidad, energía y momento angular.

$$e^2 = \frac{2hc^2}{\mu^2} + 1 \tag{2.1.9}$$

  siendo c el módulo de $\mathbf{c}$ y e el módulo de $\mathbf{e}$, al que se le llama **excentricidad**.

Debido a estas restricciones, el número de grados de libertad efectivos en el problema de la masa reducida se reduce a cinco, con un parámetro libre que definirá nuestra órbita, a saber, un ángulo. Antes de hablar del ángulo debemos definir el plano en el que dicho ángulo es un ángulo polar, el cual será evidente: si $\mathbf{c}$ se conserva, la posición $\mathbf{r}$ y velocidad $\mathbf{v}$ de neustra partícula virtual forman un plano en el que el movimiento de la masa reducida está restringida. Este plano se llama *plano orbital*, y el movimiento de las partículas 1 y 2 están restrigidas a este plano, y por tanto el movimiento reducido depende de dos coordenadas, de la distancia al punto cero del sistema de referencia (que en general será $\mathbf{r}_c = 0$) y el ángulo con un eje de dicho plano (un eje arbitrariamente elegido). Dado que $\mathbf{c} \times \mathbf{e} = 0$, podemos afirmar que el vector excéntrico $\mathbf{e}$ vive en el plano orbital, y como no varía con el tiempo, es un buen eje para tomarlo como eje de referencia. En general este vector se suele elegir como el ángulo el conformado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{e}$, que llaremos **anomalía verdadera**.

$$\cos(f) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{r}||\mathbf{e}|} \tag{2.1.10}$$

Una vez tenemos todo esto la ecuación diferencial del vector posición reducido tiene la siguiente solución

$$\mathbf{r}(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos(f)} \tag{2.1.11}$$

A la cantidad $l = c^2/\mu$ la llamamos *semilatus rectum* se define como la distancia para la cual $f = \pi/2$. En el caso de una elipse, esta distancia se puede entender como la distancia que hay entre uno de los focos de la elipse y la elipse en una línea perpendicular al semieje mayor. Esta definición es un poco liosa, por eso recomendamos ver el dibujo. La distancia entre el centro y la masa reducida también depende de la anomalía verdadera, y la excentricidadde, que define el tipo de órbita que seguirá nuestra partícula. Las trayectorias son cónicas, tales que:

- **Trayectoria circular**: ocurre cuando $e = 0$, tal que $r = l$.

- **Trayectoria elíptica**: ocurre cuando $e = 0$. En este caso aparecen lo que llamamos la *periapsis*, que es la distancia más pequeña a la que se puede encontrar nuestra partícula reducida del centro del SR, tal que $r_{per} = l/(1+e)$; y la *apoapsis* que es la distancia más grande a la que se puede encontrar nuestra partícula del centro del, tal que $r_{ap} = l/(1-e)$. Cuando estos términos se refieren a la trayecotia de la tierra sobre el sol las llamamos perigeo y apogeo, y cuando es de un planeta cualquiera respecto al sol decimos perihelio y apohelio.
- **Trayecotria parabólico**: ocurre cuando $e = 1$.
- **Trayecotia hiperbólico**: ocurre cuando $e > 1$.

-

Figura 2.1: Órbitas de Kepler en función de la excentricidad. En color rojo $e = 0.7$, en color verde $e = 1$ y en color azul $e = 1.3$. Imagen de la Wikipedia.

Hablar de la dependencia de la trayectoria con la energía + imagen. Begoña le dio bastante importancia.

Imagen de las partes de una elipse (semieje mayor, menor...)

2.1.4. Plano orbital en función de otro plano de referencia

Como hemos visto, los cuerpos se mueven en el llamado plano orbital. Su movimiento, en este plano, depende de 3 parámetros: el momento angular **c** (el cual define la dirección del plano y el *semilatus rectum*), la anomalía verdadera f[3] y el valor de la excentricidad e. Sin embargo nosotros

[3] Se emplea el tiempo de paso por el periastro τ, la anomalía media M y la longtidu media L.

no usaremos como referencia el plano orbital, sino otro. Para definir el plano orbital respecto al *plano de referencia* (esto es, el eje de coordenadas), usamos 3 coordenadas, para las cuales es importante definir el *vector nodo ascendente* $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{c}$. Este vector define lo que llamamos el punto nodo ascendente, y está contenido tanto en el plano orbital como en el plano de referencia. Las 3 coordenadas:

- **Inclinación** (i): ángulo entre el plano de la órbita y el plano referencia.

$$\cos(i) = \frac{\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{c}||\hat{\mathbf{z}}|} \tag{2.1.12}$$

- **Longitud del nodo ascendente** (Ω). Ángulo medido en plano de referencia desde la dirección de referencia hasta la dirección del nodo ascendente:

$$\cos(\Omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{N}||\hat{\mathbf{x}}|} \tag{2.1.13}$$

- **Argumento del periastro** (ω). Ángulo medido en el plano de la órbita desde la dirección del nodo ascendente hasta el periastro.

$$\cos(\omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{N}||\mathbf{e}|} \tag{2.1.14}$$

Figura 2.2: Definición de los 3 parámetros necesarios para describir un plano orbital en el de referencia.

2.1.5. Anomalía verdadera, excéntrica, media y longitud media

Hizo todo el cálculo sobre como obtener **e** (demostración de que se conserva), como obtener e y su relación con la energía (fácil, pero zzz).

Figura 2.3

Tambíen hizo un dibujo, donde el eje x es la energía, el eje y el momento angular, y reprsento cual es el tipo de órbita en función de la región de dicho espacio de fases (elíptico, hiperbólico, parabólico, colisión...)

Se está centrnado bastante en las características de la anomalía media (dice que varía a velocidad constante). Hablar de las demas cosas, significado, uso, razón. (Video de true anomaly vs mean anomaly), así vemos la relación entre ellas.

2.2. Problema de los tres cuerpos

2.2.1. Introducción

Se le llama al problema de los tres cuerpos al problema de la dinámica de tres masas m_1, m_2 y m_3 que se mueven por la acción gravitacional mutua entre ellos. En general este probema no tiene solución analítica, dado que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones que podemos emplear.

2.2.2. Problema de los tres cuerpos restringido y puntos de Lagrange

El problema restringido o problema de euler al problema de la dinámica de 3 cuerpos en el que despreciamos el efecto gravitacional sobre los otros dos, que orbitan entre sí. Esto se puede hacer cuando una de las masas es mucho menor que las otras dos (los llamados *cuerpos primarios*) $m_1, m_2 \gg m_3$. Un ejemplo de un cuerpo al que se le podría aplicar este tipo de dinámica es a un asteroide en el sistema solar donde m_1 y m_2 son el Sol y Júpiter. Este problema sí que es intregable, y se obtiene a partir de los siguientes pasos:

- Se considera que los cuerpos masivos m_1 y m_2 se mueven en órbtia circular alrededor de su centro de masas (O) y en el mismo plano de movimiento. Obtenemos la dinámica de ambos cuerpos.

- Luego obtenemos la posición y velocidad de m_3 a partir de las posiciones y velocidades de m_1 y m_2 en cada momento.

En el el problema de los tres cuerpos restringido aparecen 5 puntos de equilibrio (en un instante dado). A estos puntos se le llaman *puntos de Lagrange*, y los dividimos en 2 tipos:

- *Colineales*: L_1, L_2 y L_3. Son inestables tipo *silla*, también poseen una parte tipo *centro*, que se emplea para situar satélites. En el caso Sol-Tierra econtramos por ejemplo el telescopio James Webb en L_2 o la sonda SOHO en L_1.

- *Triangulares*: L_4 y L_5. Son estables siempre que se verifique $\mu = m_2/(m_1 + m_2) < 0.0385$ (cuando $m_1 > m_2$) son linealmente estables, en caso contrario, son inestables. Cuando son estables (por ejemplo, Sol-Júpiter) encontramos asteroides confinados en estos puntos. También podemos encontrar algunos asteroides en los sistemas Sol-Tierra o Sol-Marte.

2.3. Ejercicios

Ejercicio 2.1:

Prueba que el vector excentricidad, o eje excéntrico, $\vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \wedge \vec{c}) - \frac{\vec{r}}{r}$, lleva sentido hacia la periapsis.

Solución en la página 20

Ejercicio 2.2:

El pasado mes de octubre se pudo observar desde nuestra posición geográfica el cometa C/2023 A3 (Tsuchinshan-ATLAS) en su acercamiento en movimiento parabólico al Sistema Solar. Queremos calcular su distancia más cercana al Sol y para ello nos hemos descargado sus efemérides del Small-Body Database (https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/) para el día 12/10/2024 a las 22:00 horas:

$$\vec{r} = (5.3823308478186 \times 10^{-1}, 9.0771915790989 \times 10^{-2}, 9.6661892045926 \times 10^{-2}) \text{ ua}$$
$$\vec{v} = (1.7983375835632 \times 10^{-2}, -1.7986317330981 \times 10^{-2}, 2.0201122328974 \times 10^{-2}) \text{ ua/d}$$

Así, obten/responde a las siguientes preguntas:

a) Obtén el perihelio de eeste cometa.

b) En la misma base de datos se indica que el perihelio es de 0.3914 ua, ¿es la misma que has encontrado? ¿Por qué?

Datos: $G = 6.6738 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2} = 1.4881×10^{-34} ua^{3}d^{-2}kg^{-1}. Masa del Sol: 1.989×10^{30} kg. [Solución: 2.1.) 0.3787 ua.]

Solución en la página 21

Ejercicio 2.3:

Marte tiene dos satélites naturales, Phobos y Deimos, que orbitan a su alrededor en órbita elíptica, del mismo modo que Marte orbita alrededor del Sol. Hemos observado que el período orbital de Phobos es de 0.319033 días y su semi-eje mayor es de 9400 km. Sabiendo que el período y semi-eje mayor de Marte son de 686.98 días y 227.956×10^6 km, respectivamente, halla la masa de Marte. Dato: Masa del Sol 1.989×10^{30} kg. [Solución: 6.46×10^{23} kg.]

Solución en la página 21

Ejercicio 2.4:

La Estación Espacial Internacional (ISS) realiza 15.5 órbitas alrededor de la Tierra en un día y alcanza una altitud sobre la superficie terrestre de 413 km en el perigeo y de 422 km en el apogeo.

a) Halla el semi-eje mayor, la excentricidad y el período de la órbita de la ISS alrededor de la Tierra.

b) Calcula las velocidades máxima y mínima alcanzadas.

c) Estima la masa de la Tierra. ¿Es el mismo valor que encontramos en las bases de datos?

Datos: $G = 6.6738 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, radio medio de la Tierra $R = 6367.44$ km. [Solución: 5.1) $a = 6784.945$ km, $e = 0.00066$, $T = 92.9$ min. 5.2) $v_{\text{máx}} = 7777.01$ m/s, $v_{\text{mín}} = 7521.52$ m/s. 5.3) $M_T = 5.946912 \times 10^{24}$ kg.]

Solución en la página 22

2.4. Soluciones

Solución del ejercicio 2.1 en la página 19:

Tenemos que demostrar que el vector excentricidad lleva el sentido hacia la periapsis.

Tenemos que $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{u}}_3$ donde $\hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{u}}_1 \wedge \hat{\mathbf{u}}_2$. Supongo que $m_2 \gg m_1$. Entonces:

$$\mathbf{r}_c \simeq \mathbf{r}_2 = 0 \qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \qquad \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_2 \tag{2.4.1}$$

Y por tanto $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$. Ahora hacemos que

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_2 & \hat{\mathbf{u}}_3 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = vc\hat{\mathbf{u}}_1 \tag{2.4.2}$$

Y por tanto:

$$\mathbf{e} = \frac{vc}{\mu}\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1 \Rightarrow \mathbf{e} = \left[\frac{vc}{\mu} - 1\right]\hat{\mathbf{u}}_1 \tag{2.4.3}$$

quedando demostrado que lleva el sentido de la periapsis.

Solución del ejercicio 2.2 en la página 19:

Tenemos la ecuación para conocer el ángulo:

$$r(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos(f)} \tag{2.4.4}$$

Cuando $e = 1$ tenemos perihelio $f = 0$. El valor de $r_p = c^2/2\mu$. El valor de la masa reducida

$$\mu = G(m_{\text{sol}} + m_{\text{cometa}}) \simeq Gm_{\text{sol}} = 2.95 \cdot 10^{-4}\text{ua}^3/d$$

(ddespreciamos la masa del cometa).Ahora calculamos

$$c = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = 0.015ua^2/ \tag{2.4.5}$$

de lo que puedo obtener el valor de r_p:

$$r_p = \frac{c^2}{2\mu} = 0.379\text{ua} \tag{2.4.6}$$

Solución del ejercicio 2.3 en la página 20:

Para este ejercicio tenemos que aplicar la tercera ley de Kepler. Dado que $M_{Sol} \gg M_{Marte} \gg M_{Fobos}$, tenemos que la leyes de Kepler de Marte orbitando al Sol y Fobos orbitando a Marte son (donde hemos supuesto que la masa reducida es igual a la masa del objeto masivo, siendo una buena aproximación si tenemos en cuenta los muchos ordenes de magnitud que las separan entre sí):

$$T^2_{\text{Marte}} = \frac{4\pi a^2_{\text{Marte}}}{GM_{\text{Sol}}} \qquad T^2_{\text{Fobos}} = \frac{4\pi a^2_{\text{Fobos}}}{GM_{\text{Marte}}} \tag{2.4.7}$$

Es evidente que podemos despejar M_{Marte}:

$$M_{\text{Marte}} = \frac{a^3_{\text{Fobos}}}{a^3_{\text{Marte}}}\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Fobos}}}M_{\text{Sol}} \tag{2.4.8}$$

de lo que se deduce $M_{\text{Marte}} \approx 6.475 \cdot 10^{23}$ kg.

Solución del ejercicio 2.4 en la página 20:

prueba

Capítulo 3

Astrofísica

3.1. Introducción: escalas de tiempo y distancia

3.1.1. Historia temporal del Universo

Los hallazgos de la física de partículas permiten conocer cual era la forma del universo en los primeros instantes tras el Big Bang. Esta historia en los primeros instantes está dividida en diferentes eras, a su vez divididas en épocas y períodos. Los límites que se le dan a estos períodos son estimaciones basadas en los mejores modelos cosmológicos, dando una idea de cual fue el comportamiento en los primeros instantes del universo.

Figura 3.1: Historia del universo.

Las eras son 3, a saber:

- **Era de la radiación**: desde el inicio hasta aproximadamente 4.2×10^4 a. Debe su nombre a que la mayor parte de la densidad de energía provenía de fotones y neutrinos.
- **Era de la materia**: desde 4.2×10^4 a a 2.7×10^9 a. Debe su nombre a que la mayor parte de la densidad de energía proviene de la materia (protones, neutrones, electrones...) tal y como la conocemos hoy en día.
- **Era de la energía oscura**: desde 2.7×10^9 a al fin del universo. Debe su nombre a que la mayor parte de la densidad de energía proviene de la energía oscura.

Nos centraremos en las dos primeras ya que son aquellas que más influencia tienen sobre nosotros. Veamos cuales son las subdivisiones de estas, y cuales son los eventos más interesantes que tienen lugar en esta época.

3.1.2. Escalas de distancias

Cuando hablamos de longitudes en el unvierso hay que tener en cuenta la gran diferencias en cuanto órdenes de magnitud tanto en distancia de un objeto a otro como en el tamaño de los objetos. Los objetos con los que trata la astrofísica van desde unos miles de kilómetros $\sim 10^7$ m, como exoplanetas; hasta tamaños galáticos o cumulares ($\sim 10^{25}$ m). En cuanto a distancias ocurre lo mismo, alpha centauri (la estrella más cercana) está a unos 3.5 años luz, mientras que solo nuestra galaxia tiene ~200000 años luz de diámetro.

Por esa misma razón medir distancias es tan complicado, y necesitamos varios métodos en función de lo lejos que esté el objeto y de lo grande que es. En este apartado lo que vamos a hacer es un recorrido desde los métodos para objetos más cercanos hasta aquellos más lejanos.

Objetos cercanos: paralaje estelar

El paralaje estelar es una medida de distancia que nos permite hallar la distancia a la que se encuentran objetos desde aproximadamente a $1/5$ kpc (estos últimos con una gran incertidimbre).

Magnitudes aparences, absolutas y relación con la distancia

Podemos usar el brillo de las estrellas/objetos para calcular la distancia a la que están los objetos. Sin embargo, existe un problema que hay que solventar: no todas las estrellas brillan igual, y por tanto la luminosidad como tal no es una magnitud, por si sola, buena para obtener distancias.

Escalas Galácticas y extragalácticas

Existen otras maneras que permiten las distancias cuando ya no funciona el paralaje. Los métodos se van solapando en una escalera de distancas cósmicas mediante la utilzación de candelas estándar, objetos que tienen luminosidad L conocida o una característica que permite usarlas para medir la distancia en función del flujo observado. A escala galáctica tendremos:

- *Paralaje dinámico de estrellas binarias.*
- *Variables Cefeida.*

- *Variables RR Lyrae*.
- *Paralaje espectroscópico*.
- *Binarias eclipsantes*.

Para completar la escalera de distancas cósmicas tenemos las escalas extragalácticas:

- *Candela estelar*. Son cefeidas que se pueden detectar, sobretodo las más luminosas.
- *Características comúns*. Podemos supoenr que algunos cúmulos son parecidos a los que ya conocemos y relacionar entonces la luminosdidad vista con la distancia.
- *Supernovas tipo I*. Este es el método que más se usa junto con el corrimiento al rojo. Usa las violentas explosiones de supernovas, de las cuales conocemos el brillo esperado, para poder determinar cuan lejos está.
- *Corrimiento al rojo*.

3.1.3. Escalas galácticas: estrellas binarias

Las estrellas dobles o binarias son pares de estrellas que orbitan alrededor del centro común de masas. Estímase que la mitad de las estrellas observables en el cielo agrúpanse en estrellas binarioas o sistemas múltiples. El estudio de las estrellas binarias permite calcular la masa y radios estelares y lasd istancias relativas de las estrellas, mediante procedimientos básicos de determinación de elementos orbitales.

- Binarias visuales: las dos estrellas son detectables opticamente y sus elementos orbitaels pueden determinarse a través de observaiones seperaadas en el tiempo. Coñecese alrededor de mil setecientos binarias visuales.
- Binarias astrométricas: solo una de las estrellas es visible (por ejemplo una gigante roja y una estrella de neutrones, una será visible y otra no, pero la masa será similar, lo que hace que orbiten respecto un centro de masas, lo que si permitirá detectarlas, pero solo con el movimiento oscilatorio).
- Binarias eclipsantes: si las estrellas están orientadas con su plano orbital en la línea de visión cara la tierra, la curvatura de luz detectada mostrará variaciones (mínimos) periódicos cuando una de las estrellas eclipse total o parcialmente a la luz de la compañera. En muchas ocasiones permite medir las deformaciones y distorsiones o incluso la transferencia de masa entre estrellas.
- Binarias especcrtrales: en la media del espectro de las estrellas se observa características que corresponden a dos tipos de espectralesdiferentes, en ocasiones con corrimientos Doppler diferentes
- Binarias espectroscópicas: las líena espectrales de cada componente del par se desplazan en diferente sentido (cara azul o rojo) alterantivamente.

Esta clasificación no es mutuamente exclusiva: ciertas binarias se estudian por diferentes procedimientos. La primera ley de kepler nos dice que todos los objetos en una línea vinaria se mueve alrededor del centro de masas en órbitas elípticas, siendo el centro de masa uno de los focos de la

elipse. La segunda ley de Kepler nos dice que el radio vcto entre dos objetos en órbita y el centro de masa recorre áreas iguales en tiempos iguales

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}$$

La tercera ley de kepler nos dice que el cuadrado del período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica alrededor del centro de masa e inversamente propircional a la masa total del sistema.

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}a^3$$

Partiendo de los elementos orbitales del par de estrellas se puede determinar el **coceinte de las masas**. Para este cálculo tenemos qeu determinar el plano orbital y proyectar las observaciones en ese plano, por definición del centro de masas.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Existe una clara relación entre la medida de la masa y la luminosidad (en magnitudes absolutas o en normalizada a Sol). Nótese que la escala logarítmica en ambos casos y en ambos ejes (la magnitud es una escala logarítmica). Más adelante veremos qeu esto fue uno de los indicativos para construir el diagrama de Herzsprung-Russel (luminosidad-temperatura).

3.1.4. Composición del Universo y el Sistema Solar

El orgen de los elementos en la creación del sistema solar: el sistema solar se formo a partir del colapso de una nebulosa gaseosa con abundancias químicas e isotópicas uniformes y coincidentes con las observadas en otras partes del universo (obtenidas mediante mediciones espectroscópicas, granos presolares en meteoritos primitivos). Las abundancias químicas se obtiene la forma independiente y complementaria:

- Observacioens de la fotoesfera solar.
- Análisis de una clase particular de meteoritos.

3.2. Teoría de la radiación

3.2.1. Propiedades corpusculares de la radiación

Para explicar el cuerpo negro es improtante recordar las siguiente deficiones y conceptos:

- Radiación térmica: la emitida por un cuerpo como consecuencia de su temperatura.
- Cuerpo negro: emisor ideal, aquel cuya superifice abosrbe toda radiación que incide sobre él.
- Radiación espectral: energía emitida en forma de radiación por un cuerpo negro a una temperatura T constante, con frecuencia en el intervalo $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$, por unidad de ángulo sólido, área proyectada y tiempo.

A finales del siglo XIX las observaciones de los espectros térmicos no concordaban con con las prediciones:

- Ley de Stefan-Boltzman. La referencia total emiitda por $B_T = \sigma T^4$.
- Ley del desplazamiento de Wien. $\lambda_{\text{máx}} = C/T$ siendo C una constante y $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda del máximo de $B(\lambda)$.
- Teoría de Plank: la densidad de energía (energía por volujmen y longitud de onda/frecuencia) en una caja es:
$$\rho_\tau(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi\hbar c^2}{\lambda^5}\frac{\mathrm{d}\lambda}{e^{hc/k_BT}-1} \tag{3.2.1}$$
qeu se deduce a partir del postulado de Plank: los entes físicos con un grado de liberatad, dode su coordenada característica es función sinosuidal con el timepo, solo pueden tener energías totales cuantizadas, según $E = nh\nu$ con $n = 1, 2, 3...$ El ajuste de los datos experimentales con la teoría es impresionante.

3.2.2. Aplicaciones astrofísicas

La radiancia espectrtal (intensidad de radiación o energía por unidad de área, tiempo y ángulo sólidio emitida en el rango de una longiturd de onda entre λ y $\lambda + \mathrm{d}\lambda$). Una vez integrada podemos obtener la luminosidad:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \tag{3.2.2}$$

3.2.3. Espectros atómicos

Los átomos pueden estar en diferentes estados de ionización con espectros característicos diferenciaddos. Los espectroes observadores correspodnen a sistemas gaseosos en equilibrio local. En particular, a ua t empreatura T dada, el cociente de posibildia de ocupación d los estados a y b con degernación g_a y g_b vendrá dada por el *factor de Boltzmann*:

$$\frac{N_b}{N_a} \simeq \frac{P(S_b)}{P(S_a)} = \frac{g_b}{g_a}e^{-(E_a-E_b)/k_BT} \tag{3.2.3}$$

De las relaciones entre las diferentes entre las energías de los estados y de la tempratura podremos obtener el cociente de las ocupaciones de cadda uno de los estados accesibles. Es preciso hacer un cálculo cuántico riguroso para determinar la degenración g de un estado determinado.

La ecuación de Saha calcula el grado de ionización del gas cuando está en equlibrio térmico a partir de la funión de partición para cada estado ionizado. El cocientre enter el número de átomos en cada posible estado ionizado viene dado por:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_eZ_i}\left(\frac{2\pi m_eK_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{x_i}{kT}} \tag{3.2.4}$$

donde n_e es la densidad numérica de elctrones libres, y la función de partición Z_i para lelgar al estado ionizado:

$$Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} g_j e^{-(E_j-E_i)/kT} \tag{3.2.5}$$

Con todo, el significado de las leyes espectroscópicas de Krichoff para la astrofíscia ahora resultan evidentes:

- Un gas denso y caliente o un objeto sólido produce un espectro continuo de radiaciíon de acuerdo con la emisión de un cuerpo negro para una determianda tempratura, descrito por la raidanza espectral descrita por Plank.
- Un gas difuso produce líneas de emisión birllantes cuando se producen transiciones de electrones de una órbita a otra mas ligada. Las relaciones se Saha y Boltzmann permiten avaliar la itensidade relativa entre líneas tanto en los espectros de emisión como en los de absorción.
- Un gas difuso más frío qeu una fuente espectral captura de lso fotones y ciertas(...)
- (...)

3.2.4. Efecto doppler

El **corrimiento Doppler** se produce cuando un movimiento del emisor de una onda modifica la longitud de onda observada. Llamando v_f a la velocidad radial entre emisión y receptor v_s a la velocidad de trasmisión de la onda en el medio:

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{v_r}{v_s} \tag{3.2.6}$$

Esta relación es válida para ondas de sonido, pero no se puede aplciar a la luz. Para la luz necesitamos una formualción relativista que tenga en cuenta la dilatación temporal relativista y la distancai adicional que percorre la luz. Si la fuente se mueve, respecto al observador, u ($\beta = u/c$) y la luz se emite entre los tiempos t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{rest}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.7}$$

Teniendo que tener en cuenta el incremrento de la distancia:

$$\Delta D = \frac{u \Delta t_{rest} \cos(\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.8}$$

Con todo, el efecto global es:

$$\Delta t_{obs} = \frac{\Delta_{rest}}{\sqrt{1-\beta^2}}(1 + \beta\cos(\theta)) \tag{3.2.9}$$

El corrimiento Doppler relativista se obtiene de la diferencia temporal Δt_{obs}. Aplicándolas para determinar las frecuencias según el observador:

$$v_{obs} = \frac{v_{rest}}{\gamma(1 + \beta\cos(\theta))} \tag{3.2.10}$$

para el desplazamiento radial:

$$v_{obs} = v_{res}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{3.2.11}$$

Observamos un desplazmaiento al rojo de las longitudesde onda cuando los objetos que meiten la luz se lejan a altas velcoidades de nosotros, de igual forma, en el caso de acercaser, veríamos un desplazamiento al azul. Definimos el parmaétro z como el **parámetro del corrimiento al rojo** como:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{res}} \tag{3.2.12}$$

Los efectos tienen que tener en cuenta las variaciones de las frecuencias de las líneas espectrales observadas pero tamibén en los efectos periódicos, en los que ha que calcular el tiempo propio del sistema qeu recede. El parámetro z del corrimento al rojo puede venir motivado por el corrimiento doppler relativista, pero también por la meisión de radiación en un campo gravitatorio (corrimiento al rojo gravitacional) y también por la expansión propia del Universo (corrimiento al rojo cosmológico).

3.2.5. Tipos espetrales de las estrellas

La clasificación moderna de Harvadr o Morgan-Keenan asigna letras a lso tipos espctrales en una secuencia decreciente de temperaturas: O, B, A, F, G, K, M, L, T. Cdaa clase posee subdivisiones (10, del 0 al 9) en función las características que paulatinamente se van suciediendo. Existen otras clases (D,S,C) para espectros de estrellas especiales que no se enmarcan en la categorización anterior. De forma adicional (veremos más adelante el diagrama HR y su importancia), diferntes características de espectros diferentes entrellas que llevan a añadir:

- 0 o Ia+: hipergigantes o supergigantes estremadamente luminosas.
- Ia: supergigantes muy luminosas.
- Iab: supergigantes luminosas de tamaño intermedio.
- Ib: supergigantes menos luminosas.
- II: gigantes brillantes.
- III:

Hay muchos detalles más que a veces aparecen como subíndices, notas, paréntesis... Además hay clases adicionales para estrellas especiales novas o que no entran bien en la categoriazación: W (tipo Wolf-Rayet), L, T, Y (especroes infrarrojos), estrellas con carbón (C-R,C-J,C-H,C-Hd) clase *S* similar a la *M* pero con fuertes líneas de absorción de ZrO, y clases P y Q para objetos estelares. Además una completa caracterización para las ennanas blancas.

Tipo O

El tipo O son gigantes (más de 16 masas solares) azules, extremadamente calientes (3.3×10^4 K) y luminosas, que radian ampliamente en el UV. Son escassas pero comprenden alguna de las estrellas más conocidas. Tienen líneas de absorción dominantes para el He II. Son estrellas que no tienen atmósferas grandes debido al viento estelar que producen. Tienen enormes cores calientes y quemddan de forma rápida su hidrógeno, qeudando poco tiempo en la secuencia princicpal.

Tipo B

Son estrellas calientes ($1 - 3.3 \times 10^4$ K) azules de tamaño medio-gradne (mas de dos masas solares), muy luminosas. El 0.125 % de las estrellas en la secuencia principal son del tipo A.

Tipo A

Son estrellas blancas-azuladas calientes (7500-10000 K), grandes (del promedio de dos masas solares, de 1 a 15) cuando están en la secuencia principal y de las más brillates en el cielo nocturno. El 0.625 % de las estrellas en la secuencia principal son del tipo A.

Tipo F

Estrella blanco amarillenta (6000-7500 K) del tamñaño del sol. El 3 % de las estrellas en la secuencia principal son del tipo F.

Tipo G

Son estrellas amarillas (5200-6000 K) del tamaño del Sol

Tipo K

TIpo M

Son estrellas rojas, enannas en la secuencia principal con bajo brillo que las hacen invisibles al ojo humano. Cerca del 76 % de las estrellas.

Ordenando en la Información

3.3. Diagrama de Hertzsprug-Rusell y la secuencia principal

3.3.1. Diagrama experimental

En el diagrama Hertzsprug-Russel (HR) se nos muestra el ídnice de color (temperatura en la superficie) frente al brillo (luminosidadd o magnitud aparente). Por lo tanto la información de la distancia estelar es muy importante. La larga diagonal denominada **secuencia principal** donde las estrellas están en la etapa de quemado H en He. Las estrellas mas masivas se encuentran en la zona superior (gigantes) y las menos masivas en la parte inferior.

En función de la zona del espacio en la que apuntemos podremos hacer un diagrama HR u otro.

3.3.2. Diagrama teórico

Usando las leyes de Sthepan-Boltzmann pdemos conocer las relaciones de radios entre dos estrellas con la misma temperatura y diferente luminosidad. Para una estrella esférica de radio R, la ley de Stefan Boltzmann permite relacionar lumonisdiad L, flujo de energía en la superficie F y temperatura efectiva de la estrella T_e:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \qquad R = \frac{1}{T_e^2}\sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}} \tag{3.3.1}$$

Así una estrella 100 veces más lumonosa tiene que tener un radio 10 veces más grande. Hay varios tipos de cúmulos: cúmulo abierto podría ser la nebulosa de orión, cúmulo cerrado y cúmulo globular.

3.3.3. Características del diagrama de Hertzsprung-Rusell

3.3.4. Diagrama de Hertzsprung-Rusell y la secuencia principal

3.4. Ecuaciones de equilibrio estelar y teorema del virial

3.4.1. Introducción

Las estrellas son enormes concentraciones de gas a distintas temperaturas, densidades, composiciones, sufriendo procesos termo e hidrodinámicos complejos fuera del equilibrio, bajo intearcciones nucleares, gravitatorias y electromagnéticas. Así que tenemos qe simplificar el problema. Las estrellas están en una permanente lucha contra la gravedad, en un equlibrio temporal en el que gastan enormes cantidades de energía. Por ejemplo el sol emite $3.8 \cdot 10^{26}$ J/s. Esto no puede permanecer eternamente, ya que el Sol tiene una reservas de hidrógeno limitas, y actualmente quema entorno a 600 millones de toneladas de hidrógeno en helio por segundo.

Hemos de asumir un modelo sencillo, para poder estudiar aunque sea de manera las propiedades sencillas. Así, asumimos un *modelo esféricamente simétrico quasi-estático*, en el que cada elemento de masa de la estrella no sufra aceleraciones permanentes y en las qeu podemos definir *funciones densidad, temperatura, luminosidad y presión dependeintes del radio*.

Además tendremos que suponer *equilibrio termodinámico local* (igual en temperatura de la materia y de los fotones). Esto ocurre generalmente, ya que el recorrido medio de los fotones es muy inferior a las longitudes de onda donde la temperatura cambia notablemente.

Estudiaremos las ecuaciones fundamentales que definen la estrucutra de la estrella a partir de las siguientes ecuaciones fundamentales:

- La condición de *equilibrio hidrostático* que exige un gradiente de presión debido a diferentes fenómenos (nuclear, radiativo) que venzca a la gravedad.
- La *conservación de la masa*, que define el gradiente de la masa en función de la distancia al centro.
- La *variación de la luminosidad* en cada capa producida por la energía generada en su interior.
- El *gradiente de temperatura* para procesos radiativos y para procesos convectivos adiabáticos.
- El *teorema de Vogt-Russel*.

La masa y la composición detallada de una estrella determinan unequívocamente su radio, luminosidad, estructura interna así como la evolución. A su vez, la masa y la composición cambian a lo largo del tiempo en el seno de las estrellas, a través de los procesos de quemado nuclaer accesibles en cada momento.

3.4.2. Ecuaciones

Veamos cada una de las ecuaciones paso por paso.

Equlibrio hidrostático

La ecuación del equilibrio hidrostático *describe el equilibrio entre la fuerza gravitatoria de la estrella y la presión del gas*. La fuerza neta que siente un cilindro de masa dm y densidad ρ a una distancia r del centro es:

$$\mathrm{d}m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{M_{\mathrm{Rintd}m}}{r^2} - A\mathrm{d}P \tag{3.4.1}$$

donde M_{Rint} es la masa total encerrada en el radio r, A es la superficie de una de las tapas del cilindro que define la masa dm, tal que $\mathrm{d}m = A\rho\mathrm{d}r$. Así pues:

Ecuación de distribución de masa

La producción de energía y lumonosidad

La luminosidad producida por las fuentes energéticas (nuclear y gravitatoria) da lugar a una ecuación de equilibrio que nos indica como cambia la luminosidad con el radio de la estrella. Si la contribución por cada diferencia lde masa dm a un ardio r cuando libera la energía a un ritmo ε es $\mathrm{d}L = \varepsilon\mathrm{d}m$, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}r} = 4\imath r^2\rho(\varepsilon - \varepsilon_\nu) \tag{3.4.2}$$

donde L_r *es la luminosidad "interior" producido dentro de cada esfera de radio r considerada*. El término ε_ν es *la lumonisidad producida en forma de neutrinos*. Para obtener esta ecuación basta con consdierar que dm es la masa del cascarón:

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho$$

Fuera del core de estrella donde se producen las reacciones nucleares, no hay producción de energía y la luminosidad permanece constante. Si el modelo estelar es estático, toda la energía consdierada es de energía nuclear, pero puede darse un caso de un modelo dinámico donde la mitad de la variación de la energía potencial gravitatoria se traduce en calor liberado al medio (teorema del Virial).

Transporte de energía

El calor generado en los procesos nucleares de contracción gravitatoria traspórtase cara el exterior de la estrella. Hay tres mecanismos de trasnporte fundamentales:

- **Radiativo:** mediante fotones (en parte tamibén neutrinos que no intearccionan).
- **Convectivo:** donde los elementos másicos calientes suben de capa sumergiendo trozos más fríos.

- **Conductivo:** mediante colisiones de las partículas constituyentes. En la mayoría de las estrellas no contribuye durante su vida al transporte energétio frente a otros dos modos. En enanas blancas puede contribuir, siendo el gradiente de la temperatura:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\kappa}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{3.4.3}$$

  donde κ es la conductividad térmica.

Transporte de energía: procesos radiativos

Los fotones poseen un momento $p = h\nu/c$ y puden proporcionar un impulso cuando se absorben, emiten o reflejan, dando lugar a una **presión de radiación**, que es un tércio de la densidad de energía, la energía de radiación por unidad de volumen:

$$P_{rad} = \frac{1}{3}\int_0^\infty h\nu n_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{\mathrm{d}\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1} \tag{3.4.4}$$

Integrando la expresión de Plank del cuerpo negro se obtiene que

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4 \tag{3.4.5}$$

que se denomina presión de radiación del cuerpo negro dodne $a = 4\sigma/c$ siendo esta la constante de radiación y σ la constante de Stephan-Boltzmann. Derivando:

$$\frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r} = \frac{4}{3}aT^3\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \tag{3.4.6}$$

También se puede derivar el gradiente de presión producido por la radiación un flujo radiactivo desplazándose de las zonas de mayor presión de radiación las de menor presión:

$$\frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r} = -\frac{\kappa\rho}{c}F_{rad} \tag{3.4.7}$$

donde F_{rad} es el flujo radiativo saliente y κ la **opacidad óptica del medio** obtenida como promedio de la opacidad de los procesos que absorben fotones del medio ($\kappa = \kappa_{fon} + (\ldots)$). Consecuentemente:

$$\frac{\mathrm{d}P_{rad}}{\mathrm{d}r} = \frac{4}{3}aT^3\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\kappa\rho}{c}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{3.4.8}$$

Con todo, juntando los resultados de la trasnparencia anterior y los de esta, el gradiente de tempratura asociado al transporte de radiación toma la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3}{16\sigma}\frac{\kappa\rho}{T^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{3.4.9}$$

Transporte de energía: procesos convectivos

Los procesos convectivos con transporte de masa son aún más complicados de describir, ya que estan basados en las turbulencias de gases:

- Aparecen grandes gradientes de la temperatura, resolviéndose usando las ecuaciones de Navier-Stokes.

- En las estrellas hay además una compleja dependencia entre la viscosidad y las fuerzas disipativas del radio.

Bajo grandes aproximaciones, los procesos convectivos estelares tendrán la misma forma que para *un gas monoatómica con convección adiabática*:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \tag{3.4.10}$$

donde γ es el índice adiabático. En el Sol, los procesos convectivos siguen este comportamiento cerca del núcleo, pero no parece ser el caso cerca de la superficie.

3.4.3. Teorema del virial y pico de Gamow

El **teoerma del virial** relaciona el promedio temporal de la energía cinética $\langle K \rangle$ de un sistema de N partículas estable, discreto y ligado por fuertas potenciales con la energía potencial del sistema, tenemos que

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \rangle \tag{3.4.11}$$

este teorema permtie calcular la energía cinética total promedio en sistemas complejos. Para un potencial $U(r) = ar^n$ entonces el teorema virial afirma: $2\langle T \rangle = n\langle U_T \rangle$. En el caso gravitatorio $n = -1$, y por tanto

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}\langle U_G \rangle \tag{3.4.12}$$

El teorema del virial se aplica a problemas variados, desde la ecuación de los gases ideales y en las ecuacioens que definen los equilibrios internos dentro de las estrellas hasta los movimientos en cúmulos galácticos.

3.5. Energía de las estrellas y nucleosíntesis

3.5.1. Distribución de la energía y pico de Gamow

En un plasma estelar, la energía cinética de los núcleos corresponde a su movimiento térmico, razón por la cual las reacciones iniciadas así se llaman reacciones termonucleares. El plasma no es relativista ni degenerado (con pocas excepcioens), y las vel ocidades de los núcleos siguen la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$P(E)\mathrm{d}E = \frac{2}{\pi^{1/2}}\frac{1}{(k_B T)^{3/2}}E^{1/2}e^{E/k_B T}\mathrm{d}E \tag{3.5.1}$$

el cociente de la reaacción de pares de partículas puede obtenerse a partir del promedio en velociaddes o energías e velocidades de Maxwell-Boltzmann.

$$\langle \sigma \rangle = \left(\frac{8}{m\pi^{1/2}}\right)^2 \frac{1}{(k_B T)^{3/2}}\int_0^\infty E\sigma(E)e^{-E/k_B T}\mathrm{d}E \tag{3.5.2}$$

La dependencia con la temperatura de la distribución vanos a decir cuantas partículas tendremos en cada intervalo de energía con capacidad de generar una reacción termonuclear. A mayor temperatura, mayor cantidad de protones con energía suficiente para tener una reacción.

$$N_A\langle\sigma\rangle = \left(\frac{8}{m\pi^{1/2}}\right)^2 \frac{N_A}{(k_BT)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-2\pi\eta} S(E) e^{-E/k_BT} \mathrm{d}E \tag{3.5.3}$$

donde $S(E)$ varía suavemente. Como el factor de Maxwell cae a cero a altas energías y el término de Gamow se hace cero a bajas energías, la mayor contribución a la integral solo peude venir dada a partir de las energías que maximizan el producto de ambos factores. Esta región se conoce como **pico de Gamow**.

3.5.2. Inicio de las reacciones nucleares

Al inicio, la gravedad es la fuerza fundamental que hace que la estrella se forme. Las estrellas se van condensando en las zonas de mayor densidad de gas. Luego la gravedad comprime y calienta el gas hasta alcanzar las temperaturas y presionces necesarias para iniciar las reacciones nucleares entre protones. Las distintas reaccioens nucleares, responsables de la producción do calor y de las diferentes tipos de radiación, dependen de la composición química de la estrella, de su mada, temperatura y densidad. Estos parámetros definen la evolución estelar y el destino final de la estrella.

Reacciones nucleares

Las reacciones nucleares producen energía que evitan el colapso gravitariorio. Las cadenas pp hacen que se produzca Helio-4, hasta el equilibrio químico. El paso clave es la reacción qeu crea el deuterio, ya uqe es una reacción muy lenta determinada por la intearcción débil, que determina la temperatura de inicio de la cadena. Las distintas cadenas comienzan y dominan a ciertas temperaturas, y producen un número distinto de neutrinos. La enorme energía producida globalmente es (parte escapa con los neutrinos, que tienen de recorrido libre medio 10^{18} m y escapan de la estrella):

$$E = \tag{3.5.4}$$

Según se crean los núcleos pesados se abren canales nuevos:

- Los ciclos CNO son reacciones donde se queman protones para crear helio-4. El resto de núcleos pesados actúan como catalizadores de la reacción. Según crece el número de nucleos pesados, abriéndose nuevos canales. Los ciclos CNO son muy dependientes de la temperatura, apareciendo a mayor temperatura que los ciclos pp. Tienen una mayor producción de energía que los ciclos pp.
- Los ciclos triple α.

3.6. Ejercicios

Ejercicio 1

Este es el enunciado

Tenemos que calcular el valor de un parsec

Ejercicio 2

Este es el enunciado así

Tenemos que

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 3.97 \cdot 10^{-19}\text{J} \tag{3.6.1}$$

tal que

$$P = 1000\ \text{W} = \frac{E}{t} \tag{3.6.2}$$

Y así:

$$n\gamma = \frac{P}{E\gamma} = \frac{100\text{J/s}}{3.97 \cdot 10^{-19}\text{J}} = 2.5 \cdot 10^{20}\gamma/\text{s} \tag{3.6.3}$$

Ejercicio 3

Este es el enunciado

Los datos son:

$$L_\odot = 3.8 \cdot 10^{26}\ \text{W} \quad R_\odot = 7 \cdot 10^{8}\ \text{m} \quad d = 10\text{UA} \tag{3.6.4}$$

Y los cálculos obtenemos

$$F_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2} = 1344\ [\text{W/m}^2] \tag{3.6.5}$$

Y la radiancia B [W/m^2 sr]

$$B = \frac{\partial^2 L}{\partial\Omega\partial(A\cos\theta)} =\simeq \frac{L}{4\pi r^2 \mathrm{d}\Omega} \tag{3.6.6}$$

tal que:

$$B = \frac{F}{\alpha} = \frac{L_\odot}{4\pi^2 R_\odot^2} = 1.97 \cdot 10^7 \mathrm{Wsr/m^2} \tag{3.6.7}$$

Ejercicio 4

Este es el enunciado

Obtenemos

$$K_\odot = 1.4 \cdot 10^3 \mathrm{W/m^2} \quad \alpha = 32' = \arcsin\left(\frac{d}{2D}\right) \quad \omega = 6.8 \cdot 10^{-5}\mathrm{sr} \tag{3.6.8}$$

Ejercicio 5

Tenemos $I(r) = I_0 \exp(-r/R)$ tal qeu

$$F = \int_{\text{galaxia}} I(r)\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} I_0 \exp\left(-r/R\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{3.6.9}$$

Capítulo 4

Cosmología

4.1. ¿Qué es la cosmología?

El universa es un todod