

# Práctica 1

## Estudio de un circuito RLC serie.

Se trata de obtener experimentalmente la curva de impedancia de un circuito resonante serie (ver Figura (1.1)) en función de la frecuencia, deduciendo de las medidas del módulo y argumento de la impedancia la frecuencia de resonancia y el factor de calidad. Estudiaremos un fenómeno de resonancia similar a los que ocurren en otras partes de la física, como en mecánica.

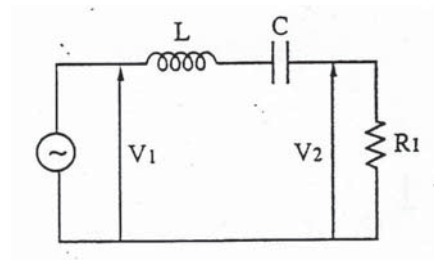


Figura 1.1: Circuito RLC en serie, donde se representan la entrada  $V_1$  y la salida en los extremos de la resistencia,  $V_2$ .

La ecuación diferencial que rige un circuito de este tipo, alimentado por una señal sinusoidal será:

$$V \cos(\omega t) = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR_1 \quad (1.1)$$

que es una ecuación similar a la del oscilador armónico forzado y amortiguado (siendo  $I = dQ/dt$ ). Es útil pasar este problema al plano complejo para simplificar la resolución de la ecuación diferencial cuando se trata de dependencias temporales armónicas. Así:

$$\text{Re}[Ve^{j\omega t}] = \text{Re}\left[Lj\omega Ie^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}Ie^{j\omega t} + R_1Ie^{j\omega t}\right] \quad (1.2)$$

de modo que, obviando la dependencia temporal, podemos establecer una relación entre V e I en el plano complejo similar a la ley de Ohm:

$$V = [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]I \quad (1.3)$$

Con esto podemos definir la impedancia del circuito como el número complejo:

$$Z(\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (1.4)$$

siendo  $\omega = 2\pi f$  y  $j = \sqrt{-1}$ . Expresando ese número complejo en forma de módulo-argumento, podemos obtener lo siguiente:

$$|Z(\omega)| = \sqrt{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)} \quad (1.5)$$

$$\tan \phi = \frac{\omega L - (1/\omega C)}{R} \quad (1.6)$$

Desarrollando estas ecuaciones obtenemos el módulo al cuadrado de la impedancia y la tangente del argumento de la forma:

$$|Z|^2 = \omega^2 L^2 + \left(R^2 - 2\frac{L}{C}\right) + \frac{1}{\omega^2 C^2} \quad (1.7)$$

$$\tan \phi = \omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \quad (1.8)$$

Estas ecuaciones serán utilizadas para hacer los ajustes necesarios para comparar los datos experimentales con la teoría de circuitos a la hora de presentar la memoria.

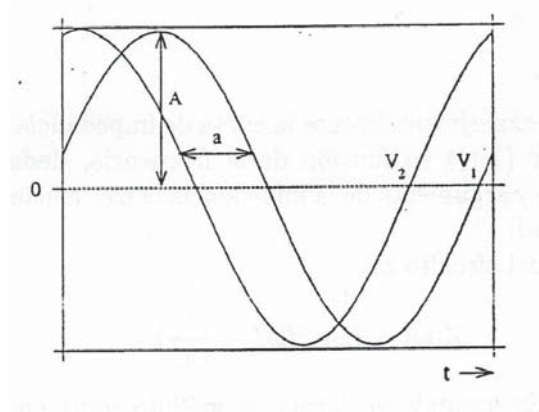


Figura 1.2: Representación de la forma de medir el desfase en el osciloscopio, midiendo el retraso temporal  $a$  entre las dos señales.

## 1.1 Medida de desfases

Aunque en los osciloscopios de los que disponéis en el laboratorio el desfase entre las señales es un parámetro que se mide de forma automática, es necesario que comprendáis cuál es su significado para poder comprender las incertidumbres asociadas al mismo. Para medir el desfase entre dos señales de forma manual habría que seguir el siguiente procedimiento:

1.- Se aplican las tensiones a los dos canales del osciloscopio para observarlas superpuestas, y se sincroniza el barrido del osciloscopio con las señales usando los controles.

2.- Se centran las trazas con respecto al eje horizontal. Se mide la diferencia de tiempos  $a$  (ver Fig 1.2) entre los dos puntos en que las dos trazas cortan dicho eje (es decir, pasan por cero). El desfase de  $V_2$  con respecto a  $V_1$  es:

$$\phi = -2\pi f a$$

de modo que la incertidumbre en la medida del desfase está asociada a una medida en la escala de tiempos.

## 1.2 Procedimiento experimental.

1.- Mídanse la resistencia en corriente continua ( $R_L$ ) de la bobina y la de  $R_1$  (Ver Figura (1.1)). El condensador se considera una capacidad pura. Sea  $R = R_L + R_1$  la resistencia total (en corriente continua) del circuito.

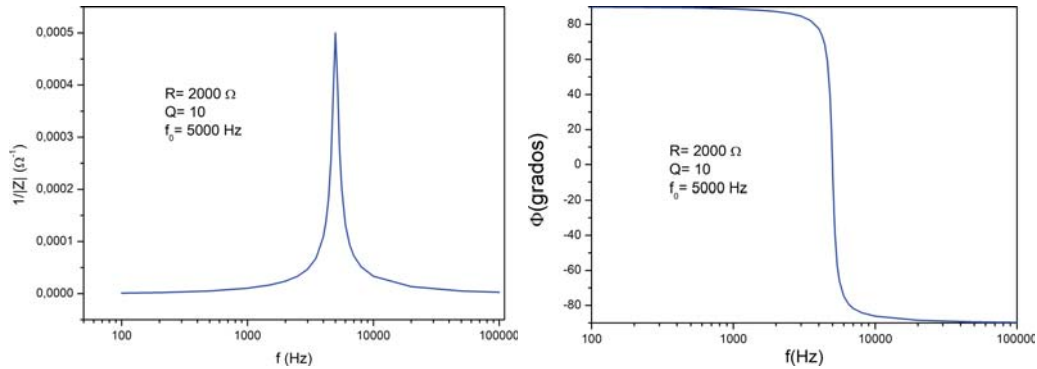


Figura 1.3: Representaciones gráficas del cociente salida/entrada  $V_2/V_1$  y del desfase entre ambos frente a la frecuencia, que responden a las siguientes ecuaciones: (a).-  $|Z|^{-1} = R(1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2)^{1/2}$ . (b).-  $\Phi = -\arctan\{Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})\}$ . Nótese que ambas son simétricas en escala semi-logarítmica.

2.- Usando los valores disponibles hasta el momento calcúlese la frecuencia de resonancia  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  y el factor de calidad  $Q = \omega_0 L/R$  teóricos. Notar que  $L$  y  $C$  vienen dadas con dos cifras significativas. Una tolerancia habitual en el valor de  $L$  y  $C$  dado por los fabricantes está en torno al 3-5 %.

3.- Conéctense los puntos indicados a las entradas verticales del osciloscopio y aplíquese una señal sinusoidal. Búsquese la frecuencia de resonancia, en la cual  $V_2$  tiene un máximo y el desfase  $\phi$  entre la entrada y la salida es 0. Todas las bananas negras deben conectarse a la tierra del circuito.

4.- Variando la frecuencia tómense medidas de la amplitud pico a pico (entre el máximo y el mínimo) de  $V_1$  y  $V_2$  y del desfase  $\phi$  entre ambas, siguiendo la tabla del Anexo. Anótese la escala en la que se realiza cada medida para poder obtener las incertidumbres asociadas de manera correcta. En los límites de frecuencias altas y bajas es recomendable llegar a medir a unos 100 Hz en el límite inferior y 100 KHz en el superior.

5.- Ya que la intensidad que recorre el circuito es  $V_2/R_1$  y, a su vez,  $V_1 = I \cdot Z$ , la impedancia será el número complejo:

$$Z = \frac{V_1}{V_2} R_1 \quad (1.9)$$

Hágase la tabla de  $|Z|$  y de  $\phi$  en función de  $\omega$ . Preséntese la tabla de datos con las correspondientes incertidumbres y con las cifras significativas ade-

cuadas.

6.- Se calcularán  $|Z|^2$  y  $\tan \phi$  y se ajustarán a las funciones que deducíamos antes (eqs. 1.7 y 1.8):

$$a_0 \frac{1}{\omega^2} + a_1 + a_2 \omega^2 \quad , \quad b_0 \frac{1}{\omega} + b_1 \omega \quad (1.10)$$

obteniendo:

$$a_0 = \frac{1}{C^2} \quad , \quad a_1 = R^2 - \frac{2L}{C} \quad , \quad a_2 = L^2 \quad (1.11)$$

y

$$b_0 = \frac{-1}{RC} \quad , \quad b_1 = \frac{L}{R} \quad (1.12)$$

7.- Con los coeficientes de (1.11) se calcularán  $R, L, C, \omega_0$  y  $Q$ . Representése con estos datos la gráfica  $1/|Z(\omega)|$ , y márquense los puntos experimentales.

8.- Obténganse  $\omega_0$  y  $Q$  a partir de (1.12). Hágase la gráfica como en el apartado anterior. Es conveniente que todas las gráficas de esta práctica se presenten en escala semi-logarítmica para una mayor claridad.

9.- Determinése el ancho de la banda de paso  $B$  (llamado abreviadamente **ancho de banda**). Se llama **banda de paso** al intervalo de frecuencias en que la curva de amplitud del apartado 7 cae menos que 3dB ( $1/\sqrt{2}$ ) con respecto a su valor máximo.

$$B = \frac{\omega_0}{2\pi Q} \quad (\text{Hz}) \quad (1.13)$$

10.- Hágase la tabla de los valores de  $R, L, C, \omega_0, Q$  y  $B$  que resulten en cada uno de los apartados de la práctica en que puedan calcularse. Discútase la diferencia entre los valores de  $R$  y  $Q$  obtenidos por los diferentes métodos.

## 1.3 Referencias

**López Rodríguez, V.** *Prácticas de electricidad*. Simancas Ed UNED (1981) Capítulo 5, pag 59.

**Burbano, S.; Burbano, E.; Gracia, C.** *Física General* (1993) Mira Editores, Zaragoza Capítulo XL, pag 635.

**Rosario Bartiromo, Mario de Vincenzi** *Electrical Measurements in the Laboratory Practice* (2016) Springer, Capítulo 6.2.1 (circuito RLC) y Capítulo 8.3 (incertidumbres de un osciloscopio digital).

# ANEXO PRÁCTICA 1: Circuito RLC serie

Tabla de datos para medir la curva de resonancia

$f \text{ (Hz)} \pm \delta f$ (Hz)	$V_{in} \pm \delta V (V_{pp})$ (CH2)	$V_R \pm \delta V (V_{pp})$ (CH1)	Desfase aprox. (°) $\phi \text{ (CH1-CH2)}$	Desfase utilizado (°) $\phi \pm \delta \phi$
			90	
			85	
			80	
			75	
			70	
			65	
			60	
			55	
			50	
			45	
			40	
			35	
			30	
			25	
			20	
			15	
			10	
			5	
$f_0$			0	
			-5 ( $\approx 355$ )	
			-10 ( $\approx 350$ )	
			-15 ( $\approx 345$ )	
			-20 ( $\approx 340$ )	
			-25 ( $\approx 335$ )	
			-30 ( $\approx 330$ )	
			-35 ( $\approx 325$ )	
			-40 ( $\approx 320$ )	
			-45 ( $\approx 315$ )	
			-50 ( $\approx 310$ )	
			-55 ( $\approx 305$ )	
			-60 ( $\approx 300$ )	
			-65 ( $\approx 295$ )	
			-70 ( $\approx 290$ )	
			-75 ( $\approx 285$ )	
			-80 ( $\approx 280$ )	
			-85 ( $\approx 275$ )	
			-90 ( $\approx 270$ )	

## Procedimiento:

Se comienza en la frecuencia de resonancia ( $f_0$ ), en la que el desfase es  $0^\circ$  y se va disminuyendo/aumentando la frecuencia de modo que el desfase vaya variando de  $5^\circ$  en  $5^\circ$  hasta llegar aproximadamente a  $90^\circ/-90^\circ$ .

Para la medida de las incertidumbres de los voltajes se usará la escala vertical utilizada en el osciloscopio, mientras que para los desfases de las señales se considerará el valor medio dado por el osciloscopio y la incertidumbre se calculará restando el valor extremo menos el medio.

## Práctica 2

# Circuito RC. Régimen transitorio. Integrador. Derivador.

El circuito que se propone (véase la Fig 2.1 (a)) divide la tensión suministrada por una fuente entre una resistencia y un condensador. La tensión de alimentación, que podemos llamar también **señal de entrada**, procede en este caso de un generador de onda pero en general será una señal que por algún motivo queramos manipular.

El circuito *RC* proporciona a **bajas frecuencias** una tensión instantánea proporcional a la **derivada** de la de entrada, si tomamos la salida en los extremos de la resistencia, y a **altas frecuencias** nos entrega una salida proporcional a la **integral** de la función de alimentación, esta vez en los extremos del condensador. Se entiende aquí que las frecuencias son “bajas” o “altas” respecto a la de corte del circuito, que se define más adelante.

## 2.1 Régimen transitorio.

### 2.1.1 Descripción.

Antes de comprobar el funcionamiento como integrador y derivador es conveniente entender el comportamiento del circuito en **régimen transitorio**. En este circuito este régimen corresponde al proceso físico de carga y descarga del condensador a través de la resistencia. Si partimos de una situación inicial en la que aquel está descargado y la señal de entrada pasa de ser cero a cierto valor constante  $V_1$ , la tensión aplicada en los extremos de la resis-



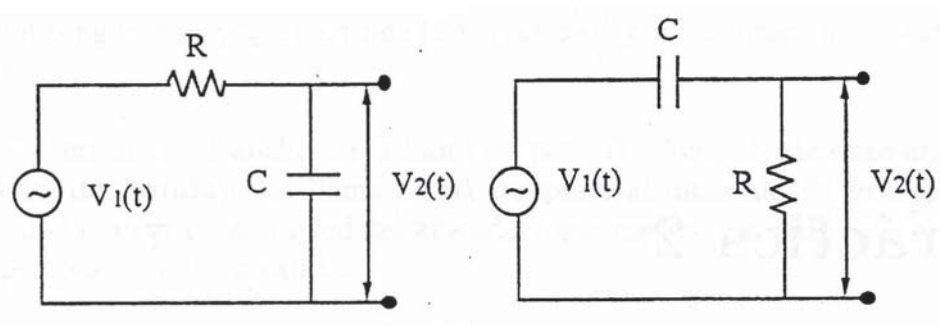


Figura 2.1: Representación del circuito RC en los dos montajes que vamos a estudiar: a) salida en el condensador, b) salida en la resistencia.

cia será súbitamente  $V_1$ , lo que hará que durante cierto tiempo circule una corriente que vaya cargando el condensador. A medida que éste se cargue aumentará la diferencia de potencial entre sus extremos, disminuyendo por tanto la caída en la resistencia (no olvidemos que ambas han de sumar  $V_1$ ) hasta que finalmente ésta sea cero y deje de circular corriente. La escala temporal característica de este proceso es el **tiempo de relajación**,  $\tau$ . Se define la frecuencia de corte,  $f_c$ , como:  $f_c = 1/2\pi\tau$ .

(1.) Resuélvase la ecuación diferencial que describe la intensidad de corriente que atraviesa el circuito durante el proceso descrito (para una señal de entrada cuadrada -constante-, de valor  $V_1$ ):

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad (2.1)$$

Obtégase que tanto el comportamiento de la **intensidad** como de las caídas de **potencial en resistencia** (figura 2.2) y **condensador** son de tipo exponencial (aunque con distintas constantes y condiciones iniciales). Recuerda que  $V_R = I \cdot R$  y  $V_C = V_1 - V_R$ . Habitualmente, la condición inicial es que el condensador se encuentre cargado negativamente a  $t = 0$ , de modo que:  $V_C(t = 0) = -V_0$ , siendo  $V_0$  la mitad del voltaje pico a pico de una entrada cuadrada.

(2.) Se define el tiempo de relajación como **el que hace que el argumento de la exponencial sea de módulo 1**; obtégase su valor en términos de  $R$  y  $C$  (Resultará ser  $\tau = RC$ ). Estímese el tiempo que tarda en completarse a efectos prácticos el proceso de carga del condensador (en múltiplos del tiempo de relajación). Si después de, digamos,  $2\tau$  se vuelve a poner la tensión de alimentación a cero el proceso se invertirá, estableciéndose una corriente

transitoria mediante la cual el condensador se descarga. La ecuación diferencial del proceso es la misma del caso anterior, sólo las condiciones iniciales son distintas. Si la señal de entrada es cuadrada, de frecuencia  $f_c/2$ , por ejemplo, se puede observar bien la alternancia de los procesos de carga y descarga.

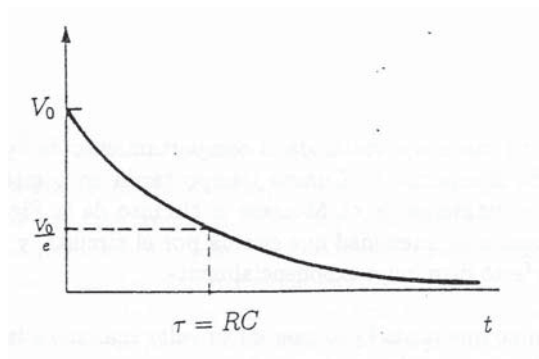


Figura 2.2: Voltaje de salida en la resistencia.

### 2.1.2 Estudio experimental.

Móntese el circuito como en la Fig.2(a), de manera que la tensión entre extremos del condensador pueda llevarse a uno de los canales del osciloscopio, teniendo en el otro la señal de entrada (recuérdese que todas las **masas** o **referencias** —bananas negras— han de conectarse **al mismo punto** del circuito). Aliméntese con una señal cuadrada y varíense la frecuencia del generador y las escalas del osciloscopio hasta que se observen los procesos de carga y descarga descritos más arriba.

(3.) Calcúlense (utilizando los valores de  $R$  y  $C$  del circuito) el tiempo de relajación y la frecuencia de corte del circuito que se ha montado. Calcúlese también la correspondiente frecuencia angular  $\omega_c = 2\pi f_c$ .

(4.) En uno de los procesos de carga o descarga, médase el tiempo que la tensión entre placas del condensador tarda en subir desde 0 hasta  $(1 - 1/e)$  de la altura del escalón de tensión (que hemos llamado  $V_1$ ). ¿Cuánto debería valer, y cuánto vale?. Estúdiese su valor a 3 frecuencias diferentes. Compárese con el valor esperado  $\tau = RC$  considerando las incertidumbres de la medida.

(5.) Represéntese de manera aproximada el comportamiento de  $V_2$  visto en el osciloscopio. ¿Es el esperado? ¿Cuánto tiempo tarda en completarse el

proceso de carga, en unidades de  $\tau$ ? Obsérvese que  $\tau$  nos da una de la escala de tiempo característico en la que sucede este fenómeno de relajación (carga y descarga de un condensador) de un modo análogo al tiempo de vida media de una desintegración radiactiva. Móntese el circuito de la Fig.2(b).  $V_2$  es ahora proporcional a la intensidad que circula por el circuito, y podemos ver cómo ésta en efecto disminuye exponencialmente.

(6.) Mídase el tiempo que tarda  $V_2$  en caer de su valor máximo a la fracción  $1/e$  de éste. ¿Es el de relajación del circuito?

## 2.2 El circuito RC como derivador.

Manteniendo el montaje tal como en el último apartado, aliméntese con una señal cuadrada de frecuencia cercana a la de corte, y obsérvese cómo se modifica la imagen del osciloscopio al disminuir la frecuencia. Nótese que a frecuencias suficientemente bajas la señal de salida (es decir,  $V_2$ ) es cero durante la mayor parte del período, y presenta picos agudos cada vez que la entrada salta entre sus valores máximo y mínimo o viceversa. Este es precisamente el comportamiento de la **derivada** de la señal de entrada: cero en las regiones en las que  $V_1$  es constante, singular en las discontinuidades de esta.

Aliméntese ahora con una señal triangular.

(7.) ¿Que forma tiene la salida? ¿A partir de qué frecuencia parecería justificado decir que  $V_2$  representa la derivada de la señal de entrada? Al elaborar la memoria, presentar una descripción cualitativa (preferiblemente acompañada de dibujos o fotos) del comportamiento como derivador para una entrada cuadrada y triangular, analizando los distintos límites de frecuencia.

(8.) Para describir más cuantitativamente este comportamiento, recuérdese que la derivada de una señal sinusoidal es otra senoide adelantada en  $\pi/2$  respecto a la primera. Si  $V_1$  es sinusoidal sabemos que  $V_2$  también lo será, y estará afectada por cierto desfase: si éste es aproximadamente de  $-\pi/2$ , la salida será la derivada de la entrada (salvo por la posible atenuación de la amplitud). Aliméntese pues con una señal senoidal y mídanse:

(i) las amplitudes  $V_1$  y  $V_2$ , de las señales de entrada y salida respectivamente, (ii) el desfase  $\phi$  de la segunda respecto a la primera, para frecuencias distribuídas en dos o tres décadas (órdenes de magnitud) alrededor de la fre-

cuencia de corte, siguiendo los valores indicativos que se proporcionan en el Anexo.

(9.) Representense (i) el cociente  $V_2/V_1$  y (ii) el desfase  $\phi$ , ambos frente a la frecuencia (no se olvide indicar en la gráfica la frecuencia de corte), en escala semilogarítmica (eje de abscisas en escala logarítmica). ¿En qué rango de frecuencias es tal desfase próximo a  $-\pi/2$ ?

Ese es el rango de frecuencias en que el circuito se comporta como derivador. Las gráficas que se han obtenido se denominan **diagramas de Bode** de amplitud y fase, respectivamente, y son ejemplos de la **respuesta en frecuencia** de un circuito.

## 2.3 El circuito RC como integrador.

Vuélvase al montaje de la Fig.2(a), y aliméntese con una señal cuadrada de baja frecuencia.  $V_2$ , que es ahora la caída de potencial entre extremos del condensador, debe reflejar a esa frecuencia los procesos de carga y descarga estudiados antes. Obsérvese cómo se modifica su aspecto al aumentar la frecuencia, especialmente al sobrepasar  $f_c$  en más de un orden de magnitud.

(10.) Hágase una gráfica representando la señal de entrada y su integral. ¿Se parece esta última a  $V_2$  a partir de alguna frecuencia? Hágase una descripción cualitativa del comportamiento del circuito en modo integrador para una señal de entrada cuadrada y triangular, analizando los distintos límites de frecuencias altas y bajas. Para realizar un análisis más cuantitativo recurrimos de nuevo a una entrada sinusoidal. Su integral es otra vez una senoide, ahora retrasada en  $\pi/2$  respecto a la anterior.

(11.) Procediendo como en (8.) y (9.) elabórense los diagramas de Bode de amplitud y fase correspondientes al presente montaje.

(12.) A la vista del Bode de fases obtenido razónese en qué rango de frecuencias se comporta el circuito como integrador.

## 2.4 Referencias

Burbano, S.; Burbano, E.; Gracia, C. *Física General* (1993) Mira Editores, Zaragoza Capítulo XXXIX, pag 623.

López Rodríguez, V. *Prácticas de electricidad*. Simancas Ed. UNED (1981) Capítulo 4, pag 49.

**Rosario Bartiromo, Mario de Vincenzi** *Electrical Measurements in the Laboratory Practice* (2016) Springer, Capítulos 6.7, 6.8 y 6.10.

# ANEXO PRÁCTICA 2: Circuito RC

## Tablas para medir los diagramas de Bode

### 1. Circuito RC como derivador

$f \pm \delta f$ (Hz)	$V_{in} \pm \delta V$ (V <sub>pp</sub> ) (CH2)	$V_R \pm \delta V$ (V <sub>pp</sub> ) (CH2)	Desfase aprox. (°) $\phi$ (CH1-CH2)	Desfase utilizado (°) $\phi \pm \delta \phi$
			≈90	
			≈85	
			≈80	
			≈75	
			≈70	
			≈65	
			≈60	
			≈55	
			≈50	
$f_c$			≈45	
			≈40	
			≈35	
			≈30	
			≈25	
			≈20	
			≈15	
			≈10	
			≈5	
			≈0	

### 2. Circuito RC como integrador

$f \pm \delta f$ (Hz)	$V_{in} \pm \delta V$ (V <sub>pp</sub> ) (CH2)	$V_C \pm \delta V$ (V <sub>pp</sub> ) (CH2)	Desfase aprox. (°) $\phi$ (CH1-CH2)	Desfase utilizado (°) $\phi \pm \delta \phi$
			0	
			-5 (≈355)	
			-10 (≈350)	
			-15 (≈345)	
			-20 (≈340)	
			-25 (≈335)	
			-30 (≈330)	
			-35 (≈325)	
			-40 (≈320)	
$f_c$			-45 (≈315)	
			-50 (≈310)	
			-55 (≈305)	
			-60 (≈300)	
			-65 (≈295)	
			-70 (≈290)	
			-75 (≈285)	
			-80 (≈280)	
			-85 (≈275)	
			-90 (≈270)	

## Práctica 3

# Circuito RLC paralelo. Análisis de Fourier.

Las características del circuito  $RLC$  hacen que pueda ser utilizado como filtro. Ya se ha visto en la práctica 1 cómo un circuito  $RLC$  responde con preferencia a las señales sinusoidales comprendidas en su banda de paso, alrededor de la frecuencia de resonancia. Por otra parte una función periódica “física” puede siempre descomponerse en suma de sinusoides (esto es, podemos considerar en lugar de la función su desarrollo de Fourier). Para una función  $f(t)$  de periodo  $T$ ,  $f(t) = f(t + T)$  se puede descomponer como la suma discreta de sinusoides (componentes de Fourier o armónicos) en la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] \quad (3.1)$$

siendo  $\omega = 2\pi/T$  y:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(n\omega t) dt \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Así, si un circuito como el considerado aquí es alimentado con una señal periódica de forma cualquiera, responderá preferentemente a aquellos armónicos de frecuencia próxima a la suya de resonancia; los demás armónicos están muy atenuados por el circuito. Tal dispositivo permite separar un determinado intervalo de frecuencias que se presenten mezcladas con otras en una señal compuesta; éste es el principio básico de la sintonía en receptores de radio y televisión.

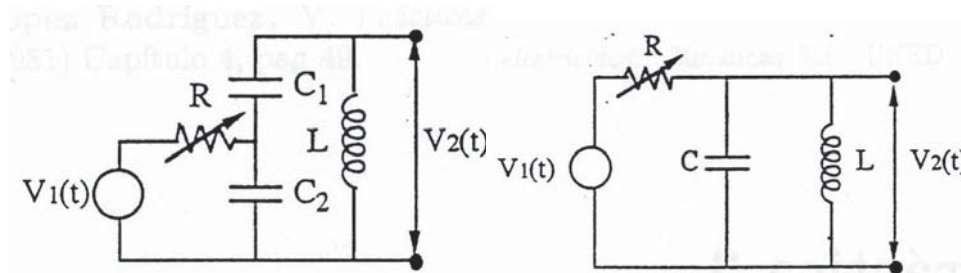


Figura 3.1: Circuito real (izquierda) y equivalente aproximado (derecha).

### 3.1 Procedimiento experimental.

Utilizaremos ahora las propiedades resonantes del circuito de la figura 3.1 para filtrar un determinado armónico de una señal dada; podremos así realizar un estudio de sus distintas componentes espectrales, esto es, realizar físicamente un análisis de Fourier. Esto es lo mismo que haría sobre la luz solar un prisma con una máscara provista de una rendija que permitiera el paso a sólo uno de los colores del arco iris.

El circuito de la figura 3.1(a) es aproximadamente equivalente al 3.1(b) siendo  $C$  la composición de  $C_1$  y  $C_2$  en serie. Utiliza para todos los cálculos este circuito equivalente.

(1.) Calcúlese el valor de la frecuencia de resonancia,  $f_0$ . Utilizando una entrada senoidal, localícese experimentalmente  $f_0$  y estímesese a partir de la observación el ancho de la banda de paso del circuito, como evaluación de su factor de calidad.

(2.) Aliméntese con una onda sinusoidal de la frecuencia de resonancia y determínese la relación de amplitudes  $V_2/V_1$ . Esta es la **atenuación** del circuito.

Nótese que una onda sinusoidal es ella misma la única componente de su desarrollo de Fourier, coincidente pues con el **armónico fundamental**. En este último apartado se ha visto por tanto cómo incluso el armónico fundamental, aún cuando por tener la frecuencia de resonancia sea seleccionado y transmitido por el circuito a su salida, lo es con una atenuación que deberá tenerse en cuenta en medidas posteriores. En este circuito podemos modificar la relación  $V_2/V_1$  por medio de la resistencia variable. Trata de ajustar con la ayuda del profesor la atenuación a la unidad.

Se estudiarán ahora los armónicos de una señal cuadrada, una triangular y un pulso.



(3.) Calcúlense los coeficientes de los desarrollos de Fourier (en senos si la función es impar, y en cosenos si la función se toma como par) de una onda cuadrada y una triangular. Nótese que sus valores dependen de la amplitud, pero no de la frecuencia.

La observación anterior puede expresarse de modo más rústico, pero quizás más claramente útil: la amplitud de un armónico dado de una señal cuadrada vale lo mismo tanto si aquél es de una frecuencia arbitraria como si tiene la frecuencia de resonancia. Esto sugiere que si queremos filtrar un determinado armónico basta cambiar la frecuencia de la señal de entrada hasta que ese armónico tenga la frecuencia de resonancia; entonces aparecerá a la salida, modificado sólomente por la atenuación.

(4.) Considérese una señal periódica cualquiera y su desarrollo de Fourier. Si la frecuencia de la señal es  $f_0$ , ¿cuál es la frecuencia del primer armónico? ¿y la del segundo armónico?. Si la frecuencia de la señal es  $f_0/2$ , ¿cuál es la del segundo armónico?. Finalmente, ¿cuál debe ser la frecuencia fundamental si queremos que la del armónico  $n$ -ésimo sea  $f_0$ ?

(5.) Dadas las características de nuestro circuito: ancho de banda  $B$  y frecuencia de resonancia  $f_0$ . ¿Hasta que armónico se puede medir de forma que no haya más de dos armónicos dentro de la banda de paso?. Razone la respuesta. En caso de que haya dos armónicos, ¿qué tipo de señal aparecería en el osciloscopio?

(6.) Selecciónese la amplitud máxima de la señal cuadrada; anótese. Esto es necesario para realizar la comparativa entre el resultado experimental y la predicción teórica para ese valor de la amplitud de la señal de entrada (que a su vez es una medida experimental, con su incertidumbre de medida propia). Mídanse las amplitudes de salida de la componente fundamental y de todos los armónicos hasta el quinto aplicando señales de frecuencias  $f_0$ ,  $f_0/2$ , ...  $f_0/5$  (búsquense las resonancias o máximos de amplitud de  $V_2$  en torno a esas frecuencias).

**Nótese que:**

- (i) Por no ser  $V_2$  una senoide perfecta debe calcularse su amplitud pico a pico promediando las diferencias entre máximos y mínimos consecutivos.
- (ii) No siempre aparecerán todos los armónicos.

(7.) Procédase como en el apartado ( 6 ) sustituyendo la señal cuadrada

por una triangular.

(8.) Modifíquese la señal triangular del generador el circuito rectificador de que se dispone. Actuando sobre el “offset” (tensión continua que el generador superpone a la señal) hágase que  $V_1$  sea una sucesión de pulsos lo más estrechos que sea posible. Anótese la amplitud y la relación entre el ancho de los pulsos y el período de  $V_1$ . Cuando el ancho del pulso es aproximadamente una décima parte del periodo, la señal puede considerarse un pulso. Repítase el apartado (6) con esta señal (ha de calcularse su desarrollo en serie de Fourier teórico).

(9.) Hágase una tabla comparando las amplitudes de los armónicos obtenidos experimentalmente con las teóricas, con sus respectivas incertidumbres y discútanse los resultados obtenidos. Recuerde que  $n$  es un número entero que carece de incertidumbre.

## 3.2 Referencias

**Edminister, J. A.** *Circuitos eléctricos*. 2ª edición. (1994) McGraw-Hill Capítulo 12, pag 195.

**Rosario Bartiromo, Mario de Vincenzi** *Electrical Measurements in the Laboratory Practice* (2016) Springer, Capítulo 6.2.2.

## Práctica 4

# Ecuación de Laplace en dos dimensiones.

### 4.1 Introducción.

La ecuación de Laplace en dos coordenadas cartesianas aparece en sistemas con simetría traslacional. Si consideramos planos perpendiculares al eje de simetría traslacional del problema, se tiene un problema bidimensional que se puede simular como sigue para la práctica de la que se dispone en el laboratorio:

Sea un plano con resistividad superficial  $\rho_s$  uniforme. Supongamos corrientes superficiales  $\vec{K}$  estacionarias ( $\Rightarrow \text{div}\vec{K} = 0$ ). Sabiendo que  $\vec{E} = \rho_s \vec{K}$  tendremos

$$\text{div}\vec{E} = \rho_s \text{div}\vec{K} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \nabla^2 V = -\text{div}\vec{E} = 0 \quad (4.1)$$

que es la ecuación de Laplace correspondiente al sistema invariante en la dirección Z. Por lo tanto, si en el problema con invarianza traslacional se cumplen, en un plano perpendicular al eje Z, las mismas condiciones de contorno que en el problema en dos dimensiones, su solución será la misma.

En el problema tridimensional las *líneas de campo* estarán incluidas en planos del tipo considerado y las intersecciones con uno de ellos de las superficies equipotenciales serán *líneas equipotenciales*.

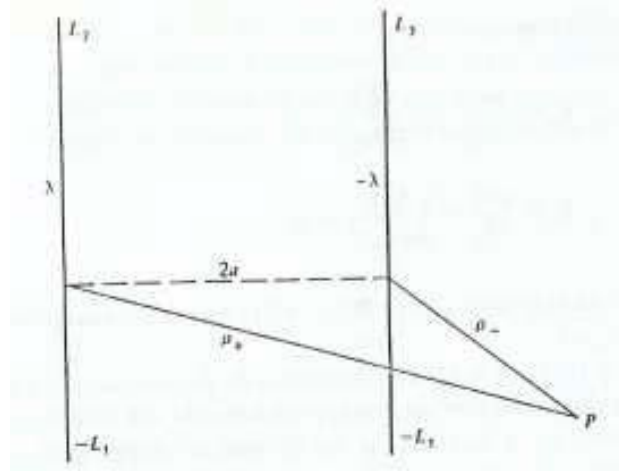


Figura 4.1: Problema electrostático equivalente: dos líneas infinitas cargadas con densidades de carga  $+\lambda$  y  $-\lambda$ . La solución analítica de este problema está disponible en el Campus Virtual de la asignatura.

## 4.2 Dispositivo experimental.

En esta práctica estudiaremos el caso de un plano, que supondremos en principio infinito, con una resistividad superficial  $\rho_s$  uniforme en el cual se han creado dos circunferencias equipotenciales (el contorno de dos círculos plateados) a potenciales distintos. El problema tridimensional equivalente es el de dos líneas paralelas infinitas perpendiculares al plano con densidades lineales de carga  $-\lambda$  y  $\lambda$  (Fig.4.1). Restringiéndonos al plano XY, el potencial en un punto distante  $s_-$  y  $s_+$ , respectivamente, de las líneas es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s_-}{s_+} + V_0 \quad (4.2)$$

siendo  $V_0$  el potencial en el eje vertical de simetría del sistema. Las líneas equipotenciales son circunferencias no concéntricas que satisfacen:

$$\frac{s_-}{s_+} = cte \quad (4.3)$$

En la Fig.4.2 vemos representada la situación real con los efectos de borde por el hecho de que el tablero no sea infinito. Estos efectos de borde deben observarse experimentalmente y discutirse con el profesor en el laboratorio.

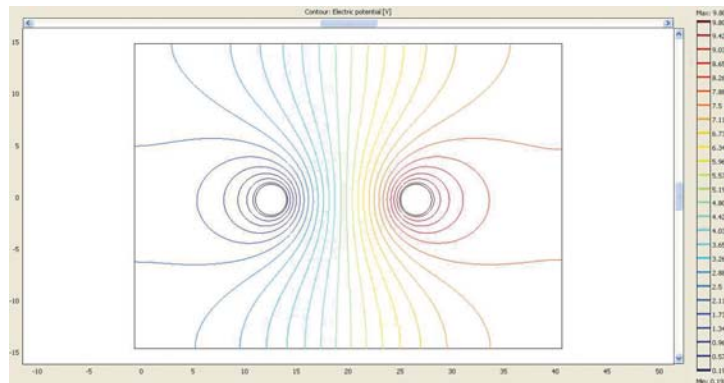


Figura 4.2: Representación de las superficies equipotenciales en nuestro tablero, incluyendo los efectos de borde. Cálculo realizado mediante una simulación numérica utilizando elementos finitos de un problema muy similar. Las unidades en los ejes x e y son cm y la ddp entre los dos electrodos es de 10 V.

### 4.3 Procedimiento experimental.

- 1.- Anótense las medidas necesarias para calcular posteriormente el centro y los radios de los círculos plateados del tablero de simulación.
- 2.- Aplíquese una d.d.p.  $V_1$  de 10V entre los terminales.
- 3.- Tómese como origen de potenciales el terminal negativo. Con ayuda de las reglas vertical y horizontal del tablero búsqense con el polímetro las líneas de 1V, 2V, 3V, 4V, 5V, 8V tomando unos 10 puntos (coordenadas X e Y) de cada una, convenientemente distribuidos. Estos valores son meramente orientativos para realizar la práctica de forma correcta, podría hacerse igualmente poniendo una d.d.p. 20V y buscando las equipotenciales de 2, 4, 6, 8, 10 y 16 V.
- 3'.- Una posibilidad alternativa (que lleva más tiempo) sería tomar medidas de voltaje para una serie de valores x,y equiespaciados en el plano y representar los datos obtenidos mediante mapas de calor. Queda a la elección del estudiante qué método escoger.
- 4.- Mídase la resistencia entre los terminales del tablero con el generador desconectado del tablero.

## 4.4 Elaboración del trabajo.

5.- Determinénse las posiciones de las líneas cargadas del sistema equivalente y sus densidades de carga. Señálense en una gráfica.

6.- Dibújense las circunferencias equipotenciales teóricas (por ejemplo usando un compás en papel milimetrado, o si se prefiere mediante una gráfica por ordenador). Para ello se calcularán previamente sus centros y sus radios. No hace falta hacer ningún ajuste a los resultados experimentales en este caso.

7.- Superpónganse los puntos experimentales medidos.

8.- Dibujar algunas líneas de campo.

9.- Calcúlese la resistividad superficial,  $\rho_s$ , del tablero. Para ello hay que resolver el problema electrostático.

10.- Supóngase que una rayadura en el tablero interrumpe algunas líneas de corriente. Dibújense cualitativamente como se modifican éstas y las líneas equipotenciales.

11.- Valorar la eficacia del método: discutir sobre el origen de las incertidumbres y las discrepancias entre teoría y experimento.

## 4.5 Referencias

**Wangness, R. K.** *Campos electromagnéticos* Ed. Limusa (1983) Capítulo 5, pag 104.

**Hayt, W. H.** *Teoría electromagnética* Ed MacGraw-Hill (1992) Capítulo 5, pag 136.

## ANEXO PRÁCTICA 4: Ecuación de Laplace

### Medidas iniciales:

- Centros  $(x_0, y_0)$  y diámetros (D) de cada uno de los círculos plateados.
- Resistividad del tablero (desconectar los terminales de la fuente)

Tabla para la medida de las líneas equipotenciales (anótense las incertidumbres aunque en este caso son las mismas para todas las medidas):

$y \text{ (cm)}$	$x_{1V} \text{ (cm)}$	$x_{2V} \text{ (cm)}$	$x_{3V} \text{ (cm)}$	$x_{5V} \text{ (cm)}$	$x_{8V} \text{ (cm)}$
10.0					
5.0					
3.0					
2.0					
1.5					
1.0					
0.5					
0.0					
-0.5					
-1.0					
-1.5					
-2.0					
-3.0					
-5.0					
-10.0					

# Práctica 5

## Ley de Inducción de Faraday

### 5.1 Introducción

El flujo magnético a través de una superficie  $S$  en un campo magnético de inducción  $B$  se define matemáticamente a través de la integral:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.1)$$

Su unidad en el sistema internacional es el weber.

La ley de Faraday de la inducción establece que la fuerza electromotriz inducida (f.e.m.) en un circuito es directamente proporcional a la variación con respecto al tiempo del flujo magnético a través del circuito:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (5.2)$$

De la definición de flujo magnético, sabemos que su variación se puede producir variando la inducción magnética  $\vec{B}$ , o la superficie  $\vec{S}$ , o el ángulo que forman  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$ . La corriente inducida dura mientras esté variando el flujo magnético. El signo menos en la ecuación anterior nos indica el sentido de la corriente inducida y corresponde a la expresión matemática de la ley de Lenz: “El sentido de la corriente inducida es tal que se opone siempre a la causa que la produce”. En efecto, si el flujo aumenta en el tiempo  $\frac{d\Phi_m}{dt} > 0$  tendremos  $\varepsilon < 0$ , es decir la intensidad debido a esta f.e.m. crea un campo magnético cuyo flujo es opuesto al existente. Si el flujo disminuye,  $\frac{d\Phi_m}{dt} < 0$  tendremos  $\varepsilon > 0$ , es decir el flujo debido a la corriente inducida tiene el mismo sentido que el existente.

Un montaje típico para la comprobación experimental de la ley de inducción de Faraday es una configuración que consta de dos bobinas situadas concéntricas y coaxiales como en la Figura (5.1).



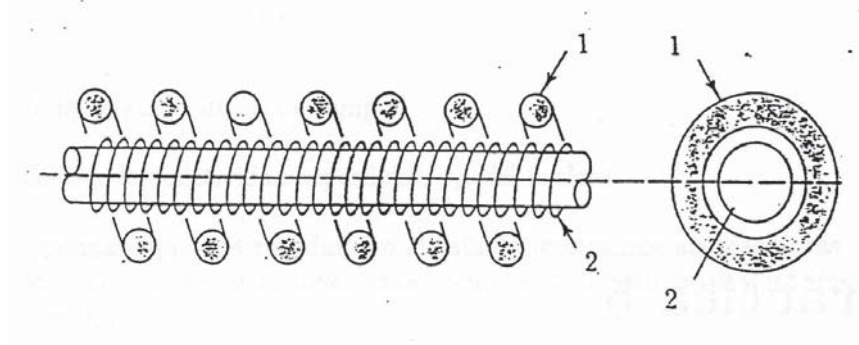


Figura 5.1: Representación del montaje experimental en el que utilizaremos dos bobinas concéntricas: primaria, en la que se introduce un campo magnético variable con el tiempo y secundaria, en la que mediremos la fuerza electromotriz inducida.

La inducción magnética en el interior de una bobina puede ser calculada utilizando la ley de Ampere:

$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (5.3)$$

Esto es la integral de línea del campo magnético  $B$  a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es igual a  $\mu_0$  multiplicado por la corriente neta que atraviesa el área limitada por la trayectoria.

En el caso de una bobina de  $N_1$  vueltas y longitud  $L_1$ , integrando a lo largo del camino mostrado en la figura (5.2), tendremos:

$$B_1 L_1 = \mu_0 N_1 I \quad (5.4)$$

Esto es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I}{L_1} \quad (5.5)$$

El flujo magnético debido a la inducción  $B_1$  que atraviesa la bobina 2 con  $N_2$  vueltas y sección transversal  $A_2$  será:

$$\Phi = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = N_2 \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2 = \mu_0 \frac{N_1 I}{L_1} N_2 A_2 \quad (5.6)$$

En el caso de que por la bobina 1 circule una corriente alterna de intensidad  $I_m$  y frecuencia  $f$  (frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$ ):

$$I = I_m \cos \omega t \quad (5.7)$$

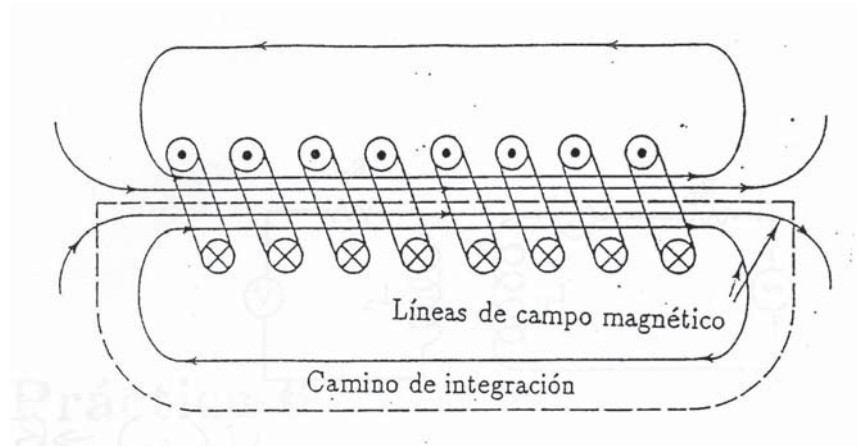


Figura 5.2: Representación de la bobina primaria y del camino de integración para calcular el campo magnético en su interior aplicando la ley de Ampere.

La f.e.m. inducida en la bobina 2 debido a la variación temporal de la intensidad en la bobina 1 será:

$$\varepsilon = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} N_2 A_2 I_m \omega \sin \omega t \quad (5.8)$$

No medimos valores instantáneos sino valores eficaces. Por lo tanto:

$$\varepsilon_e = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} N_2 A_2 I_e \omega \quad (5.9)$$

En general, a la bobina que genera el campo, bobina 1 en nuestro caso, se le llama bobina primaria, mientras que la bobina en la que se mide la f.e.m. inducida, bobina 2, se le denomina bobina secundaria.

## 5.2 Procedimiento experimental

El montaje se realiza según la figura (5.3). La corriente en la bobina se mide con el amperímetro y la f.e.m. inducida con el voltímetro digital. Las frecuencias se deberán seleccionar entre 1KHz y 12 KHz, pues por debajo de 0.5kHz la bobina constituye prácticamente un cortocircuito y por encima de 12 kHz no esta asegurada la exactitud de los instrumentos de medición.

1. Sin introducir ninguna bobina secundaria en el primario y manteniendo constante la amplitud de salida del generador se medirá la intensidad que circula por el primario para distintas frecuencias 2, 4, 6, 8, 10 kHz. ¿Qué le pasa a la intensidad que mides?. ¿Por qué?. Ten en cuenta este hecho en lo

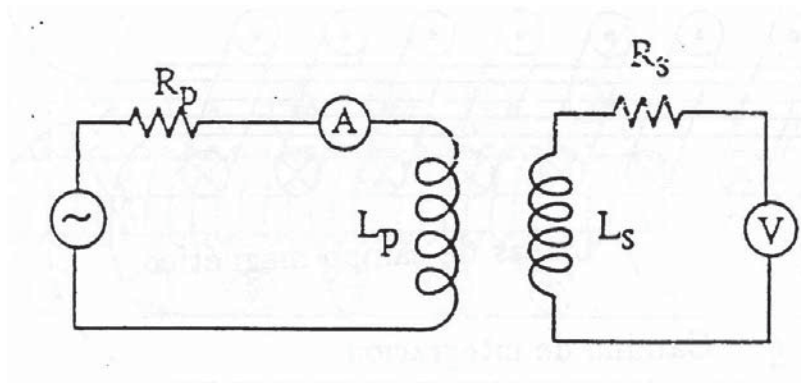


Figura 5.3: Montaje experimental de la bobina primaria, en la que medimos la corriente con el amperímetro, y la bobina secundaria en la que medimos el voltaje inducido.

que sigue.

2. Para las bobinas secundarias de que se dispone, medir la fuerza electromotriz en función de la frecuencia (tomar valores, por ejemplo, a 2, 4, 6, 8 y 10 kHz) manteniendo fija la intensidad de la corriente en el primario y en función de la intensidad de corriente en el primario (tomando valores, por ejemplo, de 20, 30, 40, 50 y 60 mA) manteniendo fija la frecuencia a, por ejemplo, 6 kHz.

## 5.3 Elaboración del trabajo.

3. Haz gráficas (con sus correspondientes ajustes) de la tensión inducida en función:

- a) de la intensidad del campo magnético.
- b) de la frecuencia del campo magnético.
- c) del número de espiras de la bobina de inducción.
- d) de la sección de la bobina de inducción.

Preséntese los resultados para cada apartado de la forma más compacta posible juntando varias rectas en la misma gráfica para mayor claridad.

4. Compara tus resultados experimentales con los teóricos (ecuación (5.9)) y discute las principales fuentes de incertidumbre. Una posible forma de hacer

esto es obtener, para cada ajuste, el valor experimental de  $\mu_0$  con su incertidumbre correspondiente.

## 5.4 Cuestiones

1. Si cambiamos las bobinas secundarias por bobinas de sección cuadrada de la misma área, ¿ se modifican los resultados anteriores?, ¿ por qué?
2. Si en vez de estar en el interior de la bobina primaria, enrollamos una espira secundaria de radio mayor que la primaria por fuera de esta (de forma coaxial y concéntrica con la primaria), ¿ habría f.e.m. inducida?, ¿ cómo se modificarían las ecuaciones anteriores en este caso?

## 5.5 Referencias

**Burbano, S.; Burbano, E.; Gracia, C.** *Física General* (1993) Mira Editores, Zaragoza Capítulo XXXIX, pag 617.

# ANEXO PRÁCTICA 5: Ley de Inducción de Faraday

## 0. Medidas iniciales:

- Características bobina primaria ( $N_1/L_1$ ) y diámetro ( $D_2$ ) y nº de espiras ( $N_2$ ) de cada una de las bobinas secundarias.

## 1. Caracterización del comportamiento del circuito

- Sin introducir ninguna bobina secundaria en el primario y manteniendo constante la amplitud de salida del generador se medirá la intensidad de corriente que pasa por el circuito para distintas frecuencias:

$f$ (kHz)	$I$ (A)
2	
4	
6	
8	
10	

- Analizar y justificar qué le sucede a la corriente al aumentar la frecuencia.

2. Medida de la fuerza electromotriz,  $\varepsilon$ , en función de la frecuencia a corriente constante ( $I=40$  mA). (Nota: por lo visto en el apartado anterior, será necesario variar la amplitud de la señal para mantener la corriente constante al variar la frecuencia)

$f_{aprox}$ (kHz)	Frec. utilizada $f \pm \delta f$ (kHz)	$\varepsilon_{bobina1 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina2 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina3 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina4 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina5 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)
2						
4						
6						
8						
10						

3. Medida de la fuerza electromotriz,  $\varepsilon$ , en función de la intensidad de corriente a frecuencia constante ( $f=6$  kHz).

$I_{aprox}$ (mA)	Corr. utilizada $I \pm \delta I$ (mA)	$\varepsilon_{bobina1 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina2 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina3 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina4 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)	$\varepsilon_{bobina5 \pm \delta \varepsilon}$ (mV)
20						
30						
40						
50						
60						

# PRÁCTICA 6

## MEDIDA DE LA CONSTANTE DIELECTRICA

### 1. Objetivos

Con esta práctica se determinará la permitividad del vacío,  $\epsilon_0$ , midiendo la carga que adquiere un condensador plano en función del voltaje aplicado. En segundo lugar, se introducirá una muestra de plástico entre las placas de dicho condensador para determinar su permitividad dieléctrica estática.

### 2. Fundamento teórico

Despreciando efectos de borde, la capacidad de un condensador de placas plano-paralelas en el vacío viene dada por

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (1)$$

donde  $S$  representa la superficie de las placas,  $d$  es la distancia de separación entre ellas y  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío. En nuestro caso, el espacio entre placas se encontrará ocupado por aire a presión atmosférica. Dentro de la incertidumbre de nuestras medidas será indistinguible del caso en que estuviese en el vacío.

Si el espacio entre las placas se encuentra relleno por un medio dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r$ , la capacidad pasa a ser

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que la variación de la capacidad del condensador al introducir el dieléctrico viene dada por:

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (3)$$



La medida directa de un condensador de placas plano-paralelas de dimensiones “humanas” (i.e. del orden de centímetros) implica varias dificultades para ser realizada con el instrumental del que disponemos. Por un lado, las cantidades de carga almacenadas en un condensador de tales dimensiones son muy pequeñas para los rangos de diferencia de potencial que proporciona un generador de funciones (como máximo, unos 10 V). Consecuentemente, conviene cargar el condensador a potenciales relativamente elevados. Sin embargo, esto último implica a su vez más

dificultades puesto que el aire se vuelve apreciablemente conductor a partir de valores del campo eléctrico del orden de unos pocos kV/mm.

El montaje experimental que utilizaremos en esta práctica, descrito en la sección 4, trata de evitar estas dificultades.

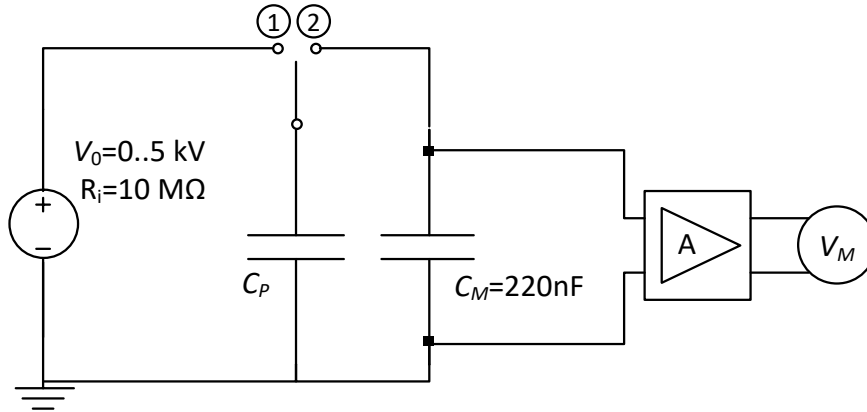
### 3. Instrumental

Para la realización de esta práctica utilizaremos:

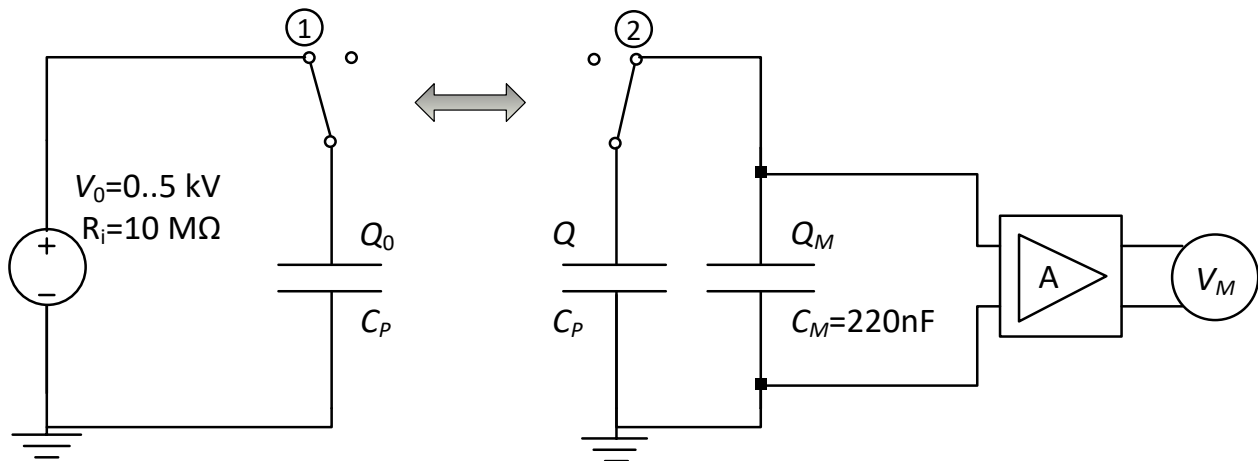
- **Condensador de placas plano-paralelas  $C_P$**  (radio 130 mm), con espaciado regulable por medio de una rosca, en el que se colocará el dieléctrico bajo prueba. Incluye una escala graduada con un nonio para la medida de la distancia entre las placas.
- **Condensador de medida  $C_M=220$  nF**. Es esencial tener en cuenta que  $C_M \gg C_P$ .
- **Fuente de alta tensión  $V_0$** , que proporciona una diferencia de potencial continua (DC) que puede establecerse en el rango de 1 a 5 kV. La tensión aplicada es visible por medio de un indicador digital en el frontal del aparato.
- **Resistencia de  $10\text{ M}\Omega$** , se conectará en serie con la fuente por razones de seguridad. 
- **Amplificador de medida A**. Se utiliza con ganancia unidad. Su función es permitir la medida de la caída de potencial en  $C_M$  a través de una alta impedancia de entrada (del orden de  $10^{13}\ \Omega$ ). De este modo se evita la descarga de  $C_M$  durante la medida. El amplificador tiene un botón de descarga que pone a cero la diferencia de potencial a la entrada. 
- **Polímetro**, con el que se medirá la diferencia de potencial del condensador  $C_M$ .
- Conjunto de cables de conexión, incluyendo cables de alta tensión.

### 3. Montaje experimental

En la Fig. 1 se muestra el montaje experimental utilizado, en el que, según conectemos el terminal ① ó ② al condensador  $C_P$ , tendremos una configuración distinta. En dicho circuito, para la toma de cada dato, se procede en dos fases:



**Fig. 1.** Montaje experimental utilizado. En función de la conexión realizada indicada en el conmutador de la figura, estaremos en la **configuración 1** (Fig. 2) o en la **configuración 2** (v. Fig. 3).



**Fig. 2.** Esquema del circuito en la **configuración 1**, para la carga de  $C_P$ .

**Fig. 3.** Esquema del circuito en la **configuración 2**, en la que el condensador plano se conecta en paralelo al de medida  $C_M$ .

- Configuración 1: carga del condensador plano (Fig. 2).** En primer lugar, se conecta el condensador plano objeto de estudio,  $C_P$ , por un lado a tierra y por otro a un generador que lo carga a un potencial alto  $V_0$  (del orden de varios kilovoltios), adquiriendo una carga  $Q_0 = C_P V_0$ .
- Configuración 2: carga del condensador de medida  $C_M$  (Fig. 3).** A continuación, se desconecta  $C_P$  del generador y se conecta en paralelo a otro condensador  $C_M$  ( $C_M \gg C_P$ ), previamente descargado. La conexión ha de hacerse de forma rápida pero cuidadosa para que no se fugue la carga  $Q_0$ , que pasará a distribuirse entre  $C_P$  y  $C_M$ . Puede demostrarse (véase la cuestión nº 1) que la carga que adquiere el condensador de medida ( $Q_M$ ), es




aproximadamente igual a la carga que adquirió el condensador plano durante el proceso de carga en la configuración 1 ( $Q_0$ ).

Midiendo el potencial a que está sometido el condensador de medida,  $V_M$ , obtendremos la carga  $Q_M$ , o lo que es lo mismo,  $Q_0$ . A partir de ahí, puesto que  $V_0$  es conocido, podremos obtener la capacidad del condensador plano objeto de estudio ( $V_M \rightarrow Q_M \rightarrow Q_0 \rightarrow C_P$ ).

#### 4. Procedimiento experimental para toma de datos y resultados

El procedimiento básico para la toma de cada medida es el siguiente:

1. Asegurándonos de que el circuito está en la **configuración 2**, descargaremos ambos condensadores, para lo cual pulsamos el interruptor  del amplificador.
2. Fijamos la distancia deseada entre las placas,  $d$ , e introducimos el dieléctrico si es necesario.
3. Conectamos la salida de la fuente al condensador plano (pasado a la **configuración 1, Fig. 2**) y fijamos el valor de la tensión de salida  $V_0$ .
4. Conectamos el condensador plano ( $C_P$ ) al condensador de medida ( $C_M$ ), pasando a la **configuración 2, Fig 3**. Esta conexión ha de hacerse de *forma rápida y cuidadosa* para evitar la descarga del condensador plano, especialmente cuando la distancia entre placas es menor de 0,5 cm.
5. Tomamos la lectura del voltímetro ( $V_M$ ).

#### Determinación de la permitividad dieléctrica del aire

- Sin introducir el dieléctrico entre las placas del condensador, ajústese el voltaje de la fuente  $V_0$  a 1.5 kV. Variando la distancia entre las placas desde 0.20 cm a 0.30 cm en intervalos de 0.02 cm, médase el voltaje en el condensador  $C_M$  ( $V_M$ ). Con los datos obtenidos, calcule la carga inicial que adquiere el condensador plano durante el proceso de carga ( $Q_0$ ) así como su capacidad ( $C_P$ ).

**P1**

*IMPORTANTE: Es fundamental descargar el condensador de medida tras cada lectura, siguiendo el procedimiento descrito anteriormente. Para estas distancias, es importante realizar el cambio de la conexión de la configuración 1 a la 2 de forma rápida. Si en alguna de las medidas se obtuviese un valor de  $V_M$  demasiado bajo, conviene repetir la medida.*

- **Análisis de resultados:** represente gráficamente  $C_P$  frente al inverso de la distancia. Realice un análisis de regresión y obtenga  $\epsilon_0$  de la pendiente.

**P2**

- Repita las medidas anteriores fijando la distancia entre placas a 0.25 cm y variando el voltaje aplicado entre 0.5 y 3.0 kV en intervalos de 0.5 kV. Con los datos obtenidos, calcule la carga que adquiere el condensador plano durante el proceso de carga ( $Q_0$ ). P3

- **Análisis de resultados:** represente gráficamente  $Q_0$  frente al voltaje aplicado. Realice un análisis de regresión y obtenga  $\varepsilon_0$  de la pendiente. P4

### Determinación de la permitividad dieléctrica de una lámina de plástico

- Introdúzcase la lámina de plástico entre las placas del condensador, de forma que quede bien sujeta (distancia  $d=0.98$  cm). Variando el voltaje aplicado entre 1.0 y 5.0 kV en intervalos de 1.0 kV, mídase el voltaje  $V_M$ . Con los datos obtenidos, calcule la carga inicial que adquiere el condensador plano durante el proceso de carga ( $Q_0$ ). P5

- Para minimizar la influencia de los efectos de borde, repítase la medida anterior retirando la lámina de plástico y fijando la distancia a  $d=0.98$  cm. Al igual que antes, variando el voltaje aplicado entre 1.0 y 5.0 kV en intervalos de 1.0 kV, mídase el voltaje  $V_M$ . Con los datos obtenidos, calcule la carga inicial que adquiere el condensador plano durante el proceso de carga ( $Q_0$ ). P6

- **Análisis de resultados:** represente gráficamente  $Q_0$  frente al voltaje aplicado utilizando los datos de las tablas P5 y P6. Realice un análisis de regresión para cada caso y calcule la capacidad del condensador con el plástico y con el aire. El cociente de dichas capacidades nos permitirá obtener la permitividad del dieléctrico (3). P7

## 5. Cuestiones

1. Sabiendo que  $C_M \gg C_P$ , demuestra que la carga que adquiere el condensador de medida ( $Q_M$ ) al pasar a la configuración 2 (Fig. 3) es aproximadamente igual a la carga inicial que adquiere el condensador plano en la configuración 1 ( $Q_0$ ).



## 6. Referencias

Wangness, R. K., Campos Electromagnéticos, Ed. Limusa, (1983). Capítulo 6 página 125.

## HOJA DE RESULTADOS

<b>Tabla (P1).</b> Medidas sin dieléctrico, con voltaje $V_0=1.5$ kV y variando la distancia $d$						
$d$ (cm)	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
$V_M$ (V)						
$1/d$ (cm <sup>-1</sup> )						
$Q_0$ (nC)						
$C_P$ (pF)						

<b>Regresión (P2).</b>				
Pendiente	$r^2$	$\epsilon_0$ (exp)	incert $\epsilon_0$	$\epsilon_0$ (tabulado)

<b>Tabla (P3).</b> Medidas sin dieléctrico, distancia $d=0.25$ cm y variando el voltaje						
$V_0$ (kV)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$V_M$ (V)						
$Q_0$ (nC)						

<b>Regresión (P4).</b>				
Pendiente	$r^2$	$\epsilon_0$ (exp)	incert $\epsilon_0$	$\epsilon_0$ (tabulado)

<b>Tabla (P5).</b> Medidas <u>con</u> dieléctrico (plástico), distancia $d=0.98$ cm y variando el voltaje					
$V_0$ (kV)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$V_M$ (V)					
$Q_0$ (nC)					

<b>Tabla (P6).</b> Medidas <u>sin</u> dieléctrico, distancia $d=0.98$ cm y variando el voltaje					
$V_0$ (kV)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$V_M$ (V)					
$Q_0$ (nC)					

<b>Regresión (P7).</b>					
	Pendiente	$r^2$	$C_P$	$\epsilon_r$	incert $\epsilon_r$
Con dieléctrico (plástico)					
Sin dieléctrico (aire)					

# Práctica 7

## Fuerza y energía electrostáticas.

El campo electrostático tiene asociada una energía  $U_e = \frac{1}{2} \int \vec{E} \vec{D} dV$ , donde esta integral se extiende a todo el espacio. Esto da lugar a que aparezcan fuerzas  $F_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \alpha}$ , donde  $\alpha$  es una coordenada generalizada del sistema y  $U$  la energía total, asociadas a variaciones de la geometría de un sistema cargado. Esta práctica ofrece la posibilidad de estudiar las fuerzas que actúan sobre las armaduras de un condensador cilíndrico.

### 7.1 Introducción

La energía electrostática que almacena un condensador es:

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 \quad (7.1)$$

siendo  $C$  la capacidad y  $V$  la diferencia de potencial entre sus armaduras. Suponiendo que se carga el condensador conectándolo a una batería de fuerza electromotriz  $V$ , ésta realizará un trabajo  $W_b = qV = CV^2$  de modo que si varía la capacidad del condensador la energía del sistema completo experimenta una variación  $\Delta U = -\Delta CV^2/2$ . Entonces si el condensador cilíndrico de la figura 7.1 tiene una capacidad  $c$  por unidad de longitud  $h$  ( $C = c.h$ ), al establecer una diferencia de potencial  $V$  entre los dos conductores actuará una fuerza:

$$F_z = -\frac{1}{2} cV^2 \quad (7.2)$$

que tiende a introducir una armadura en la otra y a aumentar la capacidad (compruébense estas ecuaciones).

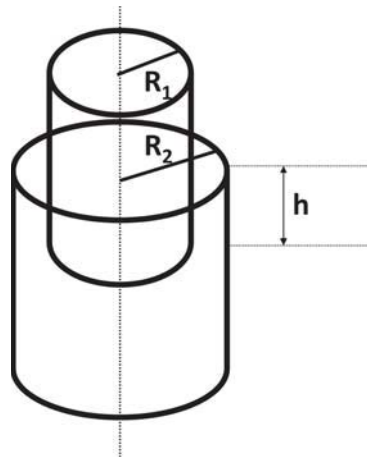


Figura 7.1: Esquema del condensador de caras paralelas cilíndricas. Una de las placas se introduce una altura  $h$  en la otra.

## 7.2 Procedimiento experimental

La fuerza se medirá con una balanza preparada para tal efecto. Téngase en cuenta que la balanza es un instrumento de precisión muy delicado.

**1.-** Móntese el dispositivo. Las armaduras deben colocarse lo más concéntricas que sea posible. El diámetro de la armadura interior es de 5 cm y el de la armadura exterior de 6 cm. Conéctense los terminales a la fuente de alta tensión. Colóquese la sonda atenuadora 1000:1 al polímetro. Póngase el cable de masa de la sonda al punto correspondiente.

**2.-** Para distintos potenciales  $V$  se pesará el electrodo interno, restando en cada caso el peso que se mida con  $V = 0$ . Una forma posible de realizar estas medidas sería ir aumentando la masa medida en la balanza unos pocos mg y aumentar el voltaje hasta que se equilibre. Recordar que la fuerza es proporcional al voltaje al cuadrado, un mismo aumento de fuerza representa un cambio mayor en voltajes a valores de voltaje bajos que a valores altos.

**3.** Repítase la medida con los terminales de la fuente de alta tensión invertidos. ¿Se nota algún cambio?.

## 7.3 Elaboración del trabajo

**4.-** Las fuerzas  $F_z = mg$  (siendo  $m$  la masa y  $g$  la aceleración de la gravedad) se ajustarán por mínimos cuadrados frente a  $V$  o a  $V^2$ . De los coeficientes del ajuste se calculará la permitividad del vacío. Para ello hay que tener en

cuenta la expresión de la capacidad de un condensador cilíndrico como el que se utiliza en la práctica, dados sus radios externo e interno.

5.- Dibújese aproximadamente la sección del dispositivo, con las líneas del campo electrostático y los efectos de borde que dan lugar a la aparición de una fuerza vertical. Téngase en cuenta que el campo es normal a las superficies de los conductores.

6.- Discútanse los resultados obtenidos, las principales fuentes de incertidumbre y la comparativa entre los valores que salen del ajuste y los resultados esperados, como por ejemplo el valor tabulado para la permitividad eléctrica del vacío o aire.

## 7.4 Referencias

**Wangness, R. K.** *Campos electromagnéticos* Ed. Limusa (1983) Capítulo 6, pag 128 , problema 6.10 y Capítulo 7, pag 137, apartado 7.4.

## PRÁCTICA 8

### MEDIDA DE LA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CORRIENTES ESTACIONARIAS. BALANZA DE CORRIENTE

#### 1. Objetivos

Con esta práctica se trata, en primer lugar, de verificar la existencia de la fuerza magnética (fuerza de Lorentz) que actúa sobre una corriente eléctrica estacionaria que fluye en una región del espacio en la que existe un campo magnético estático. En segundo lugar determinaremos, con la ayuda de una balanza de precisión, la dependencia de esta fuerza con la intensidad de la corriente circulante y con el módulo del campo magnético.

#### 2. Fundamento teórico

Una partícula cargada (carga  $q$ ) que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  en el seno de un campo magnético de inducción magnética  $\mathbf{B}$  se ve sometida a la fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

Una corriente eléctrica estacionaria consiste esencialmente en el movimiento ordenado a velocidad constante de un gran número de portadores de carga. Si la corriente fluye en el seno de un campo magnético de inducción magnética  $\mathbf{B}$ , cada portador experimenta una fuerza de origen magnético (1) de modo que el conductor que transporta la corriente se verá sometido a una fuerza neta magnética. Si se trata de una corriente de intensidad  $I$ , cada elemento de corriente de longitud  $d\mathbf{l}$  experimenta una fuerza:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

La expresión (2) se integra trivialmente para un tramo rectilíneo de longitud  $L$  de un circuito por el que fluye una corriente de intensidad  $I$  y se encuentra inmerso en un campo magnético de densidad de flujo  $\mathbf{B}$  uniforme y perpendicular al hilo. El módulo de esta fuerza es:

$$F = ILB \quad (3)$$

y su dirección es la del producto vectorial de los vectores involucrados.

En el experimento que se va a realizar, el campo magnético que actúa sobre el segmento de corriente está producido por un electroimán. En el entrehierro del núcleo del electroimán existe un campo magnético razonablemente uniforme, siendo el módulo del vector inducción magnética  $B$

proporcional a la intensidad  $I_M$  de la corriente que fluye por el bobinado que excita el electroimán, esto es,  $B = CI_M$ , siendo  $C$  una constante que depende de las características del electroimán. En consecuencia, para el experimento que nos concierne, podemos escribir la fuerza en términos de las intensidades de las corrientes que fluyen por la espira de tramos rectos  $I$  y por el bobinado del electroimán  $I_M$  así como de la longitud del tramo recto sumergido en el campo del electroimán  $L$ , esto es:

$$F = I B L = C I L I_M \quad (4)$$

En este experimento comprobaremos la validez de las expresiones (3) y (4) Y determinaremos la constante  $C$  experimentalmente. El resultado se contrastará con medidas directas del campo magnético entre las piezas polares del electroimán usando un teslámetro de efecto Hall.

### 3. Instrumental

Para la realización de esta práctica utilizaremos:

- Un generador de corriente con dos salidas, una de ellas para activar el electroimán y la otra para activar las espiras. Como el generador de que disponemos tiene una salida de corriente continua y otra de corriente alterna, la salida de alterna es transformada en salida de continua mediante el uso de un rectificador de puente de diodos.
- Dos amperímetros para medir las intensidades de corriente  $I$  e  $I_M$ .
- Un electroimán formado por dos solenoides, un núcleo de hierro laminado y una pareja de piezas polares.
- Un teslámetro para medir el módulo del campo magnético en el entrehierro del electroimán.
- Conjunto de espiras rectangulares de  $n$  vueltas ( $n = 1, 2$ ) con un tramo rectilíneo de longitud conocida  $l$ . En la ecuación (4)  $L = n l$ .
- Balanza de precisión para medir las fuerzas.
- Conjunto de cables de conexión.



#### 4. Procedimiento y resultados

- Conecte los diversos aparatos como se muestra en la figura 1. Observe que los dos solenoides del electroimán deben estar conectados en serie. El electroimán se conecta a la fuente de corriente alterna a través de un rectificador, un conmutador y un amperímetro.
- Las espiras rectangulares se cuelgan de la balanza y se sumergen cuidadosamente entre las piezas polares de modo que quede su parte inferior convenientemente centrada. Las bandas metálicas que alimentan las espiras deben colgar sólo ligeramente y estar separadas lo más posible para que no influyan en la medida de la fuerza.

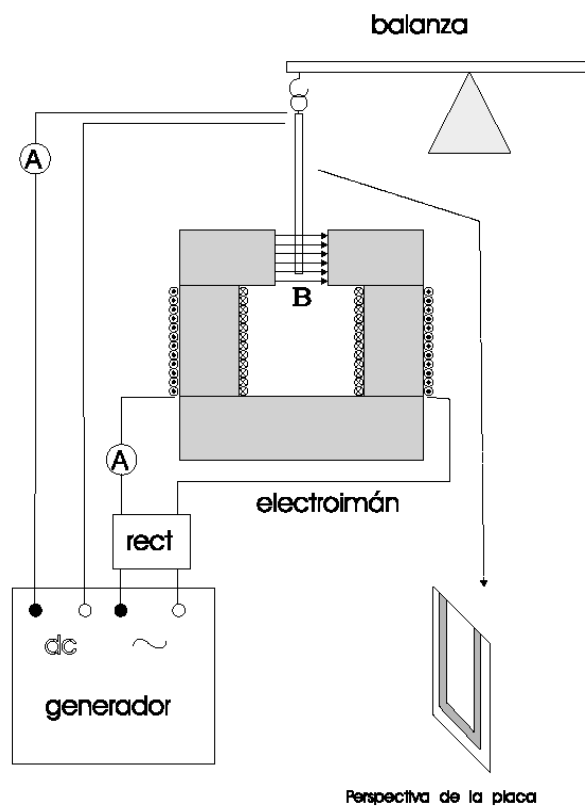


Figura 1: Esquema del montaje experimental.

- Ajuste la corriente del electroimán a (aproximadamente) 1 A, colocando el lector de tensión de la salida de alterna del generador en 12 V. Mida con el teslámetro el módulo del vector inducción magnética  $B$  en el entrehierro del electroimán. Mida con el amperímetro el valor exacto de la intensidad de corriente en el electroimán  $I_M$ . P1
- Coloque la espira de 25 mm y registre su masa (cuando no fluye corriente ni por la espira ni por P2

el electroimán). Mida la fuerza que actúa sobre la espira cuando por ella pasan corrientes de diversas intensidades (barras el intervalo de 0.5 A a 5 A en intervalos de 0.5 A, colocando el selector de tensión de la salida de continua del generador en 10 V). Observe que lo que leemos en la balanza es la masa aparente en gramos. La masa en Kg debe ser multiplicada por la aceleración  $g$  para obtener la fuerza en newtons. Dicha fuerza es la suma del peso de la espira y de la fuerza magnética:  $FT = mg + IBL$ . En las rectas de regresión el término  $mg$  aparece simplemente como la ordenada en el origen. El proceso descrito debe ser repetido para las espiras de 50 mm y 100 mm, realizando en cada caso la medida de  $B$  e  $I_M$  antes de colocar la espira, ya que estos valores pueden sufrir alguna deriva.

- **Análisis de los resultados:** Represente gráficamente la fuerza medida en el apartado anterior frente a la intensidad  $I$  para las tres espiras de 25 mm, 50 mm y 100 mm. Realice el análisis de regresión para las tres rectas. Compare la pendiente de las rectas con el valor estimado a partir del valor de  $B$  medido con el teslámetro y del valor de  $L$  de cada espira. P3
- Para la espira de 100 mm atravesada por una corriente de 5 A, realice mediciones de la fuerza para corrientes de electroimán ( $I_M$ ) comprendidas entre 0.2 A y 1 A (selector de tensión de la salida de alterna del generador en 4, 6, 8, 10 y 12 V). Para cada valor de  $I_M$ , mida la masa para  $I = 0$  A y la masa aparente para  $I = 5$  A y registre la diferencia entre  $F_T(I = 5A)$  y  $F(I = 0A) = mg$ . P4
- **Análisis de los resultados:** Represente gráficamente los datos experimentales obtenidos en el apartado anterior como  $F_T(I = 5A) - mg$  frente a  $I_M$  y obtenga la recta de regresión. Halle la constante  $C$  del electroimán con su incertidumbre a partir de la pendiente de la recta (que corresponde a  $CIL$ ) y compare con el valor medio que se obtiene a partir de los valores de  $B$  e  $I_M$  obtenidos en el apartado P1. P5

## 5. Cuestiones

1. En la expresión de la fuerza que actúa sobre la espira aparece la dimensión del tramo horizontal inmerso entre las piezas polares, pero nada se dice acerca de la fuerza que actúa sobre las partes de los tramos verticales que también están sometidas al campo magnético. ¿Podría explicar a qué se debe esto?

## 6. Referencias

Wangness, R. K., Campos Electromagnéticos, Ed. Limusa, (1983). Capítulo 14 página 280 y capítulo 20 página 419.

## PRÁCTICA 8

MEDIDA DE LA FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CORRIENTES ESTACIONARIAS.

BALANZA DE CORRIENTE

### HOJA DE RESULTADOS

Tabla (P1)

$B$ (teslám.)	$I_M$

Tabla (P2)

25 mm		50 mm		100 mm	
$I$	$F$	$I$	$F$	$I$	$F$
0		0		0	
0.5		0.5		0.5	
1		1		1	
1.5		1.5		1.5	
2		2		2	
2.5		2.5		2.5	
3		3		3	
3.5		3.5		3.5	
4		4		4	
4.5		4.5		4.5	
5		5		5	

Regresión (P3)

	Pendiente	Ordenada	$r^2$	Pendiente (tesl.)
25 mm				
50 mm				
100 mm				

Tabla (P4)			
$I_M$	$F_T(I=0) = mg$	$F_T(I=5A)$	$F_T(I=5A) - mg$

Regresión (P5)	
Pendiente	
$r^2$	
C (regres.)	
Incert.	
C (tesl.)	

# PRÁCTICA 9

## INTERACCIÓN ENTRE CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME Y MOMENTOS MAGNÉTICOS

### 1. Objetivos

En esta práctica se estudia la interacción de un dipolo magnético de momento dipolar  $\mathbf{m}$  con un campo magnético estático de inducción magnética  $\mathbf{B}$ . El dipolo magnético consiste en una espira circular por la que circula una corriente continua de intensidad  $I$ . Comprobaremos que si el vector  $\mathbf{m}$  no está alineado con  $\mathbf{B}$ , la espira experimenta un par de fuerzas cuya magnitud y dirección se investiga en esta práctica en términos de las diversas variables de las que depende.

### 2. Fundamento teórico

Se define el momento magnético  $\mathbf{m}$  de un circuito cerrado filiforme como sigue:

$$\mathbf{m} = \frac{I_1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (1)$$

donde  $I_1$  es la intensidad de la corriente que fluye por el circuito y  $C$  el camino cerrado que define su geometría. En el caso particular de una espira plana de superficie  $S$ , la expresión anterior se reduce a

$$\mathbf{m} = I_1 S \mathbf{n} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario perpendicular a la superficie cuya orientación viene definida por la regla de Maxwell en términos del sentido de la corriente. Si esta espira se encuentra sometida a un campo magnético localmente uniforme de inducción magnética  $\mathbf{B}$ , la espira experimenta un par de fuerzas que viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

En esta práctica, obtenemos una región con un campo magnético prácticamente uniforme por medio de una pareja de bobinas circulares de radio  $R$  en *configuración Helmholtz*: las bobinas se encuentran alineadas y paralelamente dispuestas a una distancia igual a su radio. La corriente, de intensidad  $I_2$ , fluye en el mismo sentido (conexión serie). De esta forma se consigue un valor de  $\mathbf{B}$  aproximadamente constante en torno al punto medio del segmento que une los centros de las bobinas en una distancia del orden de la mitad de su radio. En esa zona, el valor de  $\mathbf{B}$  es:

$$\mathbf{B} = K I_2 \mathbf{u}_z \quad (4)$$

donde  $K$  es una constante que depende de las características geométricas de las bobinas y que se determinará experimentalmente con la ayuda de un teslámetro.

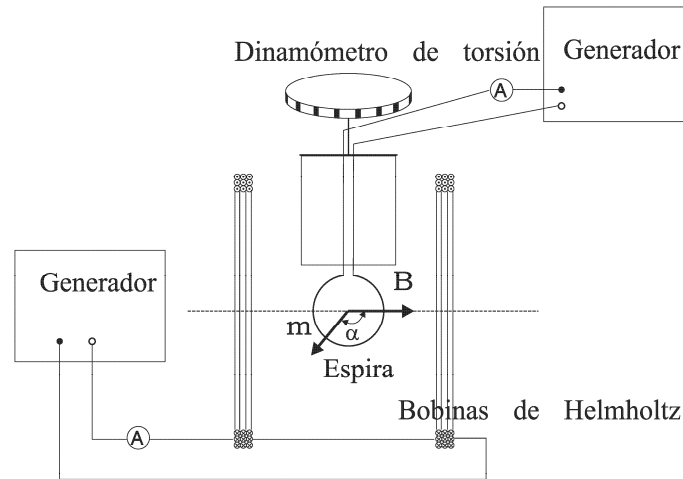


Fig. 1. Esquema del montaje experimental

Bajo estas condiciones, el módulo del par de fuerzas que actúa sobre las espiras se puede escribir como sigue:

$$|\mathbf{N}| = nK I_1 I_2 S \sin(\alpha) \quad (5)$$

donde el nuevo parámetro  $n$  es el número de vueltas del conductor filiforme utilizado en la construcción de la espira (en nuestro experimento  $n = 1, 2, 3$ ) y  $\alpha$  es el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{B}$ . En esta práctica se investiga la dependencia de  $|\mathbf{N}|$  con  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $n$ ,  $\alpha$  y  $S$ .

### 3. Instrumental

Para la realización de esta práctica utilizaremos el siguiente instrumental:

- Pareja de bobinas de Helmholtz.
- Balanza de torsión con accesorio para suspender las espiras circulares.
- Conjunto de espiras circulares.
- Dos generadores de corriente continua para alimentar las espiras (momentos magnéticos) y las bobinas de Helmholtz.
- Dos amperímetros para medir la corriente que fluye por las bobinas de Helmholtz y por las espiras.
- Conjunto de cables de conexión.

#### 4. Procedimiento y resultados

- Interconecte los diversos aparatos como se muestra en la figura 1. Observe que las dos bobinas de Helmholtz deben conectarse en serie para producir el campo cuasiuniforme en la región central. El selector de tensión de la salida de continua del generador conectado a las bobinas de Helmholtz debe situarse en 15 V.
- Los cables que alimentan la espira suspendida de la balanza de torsión deben colgar suavemente y estar trenzados, para que no introduzcan pares de fuerzas adicionales.

**ATENCIÓN:** Las espiras deben manipularse cogiéndolas por su soporte plástico, NUNCA por la circunferencia (o circunferencias) metálicas.

- Debe ajustarse frecuentemente el cero de la balanza de torsión (reduciendo a cero la corriente que fluye por las espiras), ya que ésta puede desajustarse cuando se producen rotaciones bruscas, al desplazarse los cables de alimentación de la espira. Se aconseja evitar las rotaciones bruscas ajustando progresiva y alternativamente la intensidad que alimenta a las espiras y el ángulo de torsión de la balanza.

**ATENCIÓN:** La alimentación de las bobinas de Helmholtz debe estar limitada a  $I_2=3\text{A}$  de intensidad máxima. La de las espiras puede elevarse hasta  $I_1=5\text{A}$ , pero sólo durante un tiempo corto (el justo para efectuar la lectura del par en la balanza de torsión) a fin de evitar un calentamiento excesivo de las espiras.

- Ajustando la corriente que circula por las bobinas de Helmholtz,  $I_2$ , a 1, 2 y 3 A, mida con el teslámetro el módulo del vector inducción magnética **B** en el centro del dispositivo. Antes de realizar la medida asegúrese de ajustar a 0 el teslámetro. Utilizando dichos datos, calcule el valor de la constante  $K$  de la expresión (4) para cada caso. En lo que sigue, tómese como  $K$  el valor medio de los 3 obtenidos. **P1**
- Mida el par que actúa sobre la espira de  $n = 3$  (cuando por ésta circula  $I_1=5\text{A}$  y por la bobina de Helmholtz  $I_2 = 3\text{A}$ ) para diversos ángulos de orientación ( $\alpha = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$  y  $15^\circ$ ). **P2**  
NOTA: Antes de realizar ninguna medida, compruebe que el sistema está correctamente alineado verificando que el par de fuerzas vale 0 cuando  $\alpha = 0^\circ$ . Recuerde que debe reducir

la intensidad de corriente a través de la espira después de cada lectura. **IMPORTANTE:** La escala del dinamómetro está graduada en milinewtons (mN), esto es, en unidades de fuerza. Para obtener el par, hay que multiplicar la fuerza en mN por la longitud del brazo de la balanza, que mide 0.1 m.

- **Análisis de los resultados:** Represente gráficamente el par medido en función del seno del ángulo, haga el análisis de la recta de regresión y compare con la predicción teórica. P3
- Para un ángulo  $\alpha = 90^\circ$ , mida el par de fuerzas que experimenta la espira de  $n = 3$  en dos situaciones: 1) Fije  $I_1 = 5\text{ A}$  y varíe  $I_2$  entre 0.5 A y 3 A a intervalos de 0.5 A; 2) Fije  $I_2 = 3\text{ A}$  y varíe  $I_1$  entre 1 A y 5 A a intervalos de 1 A. P4

**ATENCIÓN:** Después de cada medida del par hay que bajar a cero la corriente que pasa por la espira, para evitar su calentamiento.

- **Análisis de resultados:** Represente los valores obtenidos en el apartado anterior y obtenga las correspondientes rectas de regresión, una para  $N$  frente a  $I_1$  y otra para  $N$  frente a  $I_2$ . Compare los resultados obtenidos con la predicción teórica. P5
- Para un ángulo  $\alpha = 90^\circ$ ,  $I_1 = 5\text{ A}$  e  $I_2 = 3\text{ A}$  mida el par de fuerzas que actúa sobre las espiras con  $n = 1, 2$  y 3. P6
- **Análisis de los resultados:** Represente gráficamente los resultados obtenidos para  $N$  frente a  $n$ . Compare con la predicción teórica. P7
- Con  $I_2 = 3\text{ A}$ ,  $I_1 = 5\text{ A}$  y  $\alpha = 90^\circ$ , mida el par de fuerzas para espiras de distintos radios (diferentes valores de  $S$ ) y con  $n = 1$ . P8
- **Análisis de los resultados:** Represente gráficamente los resultados obtenidos para  $N$  frente a  $S$ . Compare con la predicción teórica. P9

## 5. Cuestiones

1. Hemos utilizado un dispositivo denominado pareja de bobinas de Helmholtz con el fin de crear el campo magnético. ¿Qué tiene de especial este dispositivo?
2. ¿Hubieran variado los resultados de haber usado espiras cuadradas?

## 6. Referencias

Wangness, R. K., Campos Electromagnéticos, Ed. Limusa, (1983). Capítulo 19 página 377.



## HOJA DE RESULTADOS

Tabla (P1)			
$I_2$	1.0 A	2.0 A	3.0 A
$B$			

Tabla (P2), $I_1=5$ A, $I_2=3$ A		
$\alpha$	$\text{sen } \alpha$	$N$
90°		
75°		
60°		
45°		
30°		
15°		

Regresión (P3)		
Pendiente	$r^2$	Pendiente teórica

Tabla (P4), $I_1=5$ A, $\alpha=90^\circ$	
$I_2$	$N$
0.5 A	
1.0 A	
1.5 A	
2.0 A	
2.5 A	
3.0 A	

Tabla (P4), $I_2=3$ A, $\alpha=90^\circ$	
$I_1$	$N$
1 A	
2 A	
3 A	
4 A	
5 A	

Regresión (P5)			
	Pendiente	$r^2$	Pendiente teórica
$I_1$ cte.			
$I_2$ cte.			

Tabla (P6), $I_1=5$ A, $I_2=3$ A, $\alpha=90^\circ$		
$n$	$N$	$N$ (teórico)
1		
2		
3		

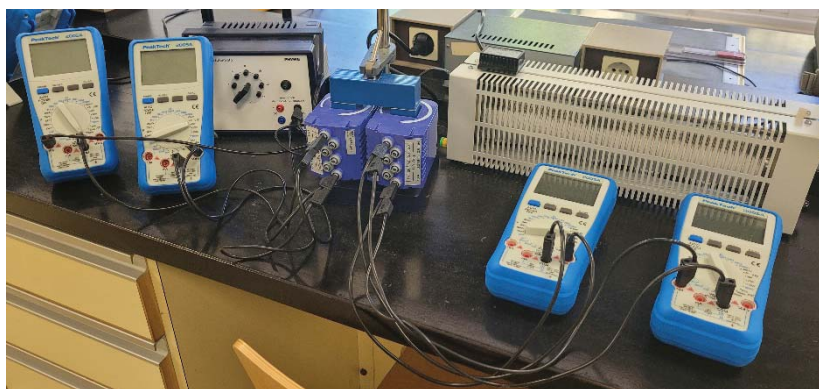
Tabla (P8), $I_1=5$ A, $I_2=3$ A, $\alpha=90^\circ$		
$S$	$N$	$N$ (teórico)

# PRÁCTICA 10

## EL TRANSFORMADOR

### 1. Objetivos

En esta práctica (Figura 1) se estudia el comportamiento de un dispositivo eléctrico cuyo funcionamiento se basa en el fenómeno de la inducción electromagnética: el transformador. Básicamente, un transformador consta de dos solenoides acoplados magnéticamente mediante un núcleo laminado de hierro. Se hace fluir una corriente alterna (en nuestro caso, con una variación sinusoidal en el tiempo) por uno de los solenoides (primario). La mayor parte del flujo del campo magnético asociado a esta corriente atraviesa el otro solenoide (secundario) gracias a la alta permeabilidad del núcleo de hierro. Como consecuencia de ello, y en virtud de la ley de inducción de Faraday, en el secundario se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) proporcional al voltaje en el primario y a la relación entre el número de espiras en los bobinados primario y secundario.



*Figura 1. Configuración similar a la que encontrareis en el laboratorio. En ella aparecen el generador, el reóstato, cuatro polímetros y el transformador formado por dos bobinas conectadas a través de un núcleo ferromagnético.*

### 2. Fundamento teórico

Consideremos el sistema electromagnético representado en la Figura 2. Como vemos, se trata de dos hilos conductores arrollados en un núcleo común de hierro. Supongamos que por uno de los hilos circula una corriente variable en el tiempo de intensidad  $i_1(t)$  (por el otro solenoide no circula corriente porque está en circuito abierto: en nuestro caso, para mantener el circuito abierto basta con desconectar el polímetro que actúa como amperímetro cerrando el circuito). El núcleo magnético de hierro actúa como guía de las líneas de campo magnético, esto es, la mayor parte del flujo magnético,  $\Phi(t)$ , está confinado en el interior del hierro. El flujo total que atraviesa el solenoide que transporta la corriente es  $N_1\Phi$ , donde  $N_1$  es el número de vueltas de este solenoide. La ley de inducción de Faraday nos dice que en él se induce una f.e.m. que viene dada por la expresión:

$$\varepsilon_{ind} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

Esta f.e.m. tiene la polaridad opuesta a la diferencia de potencial (d.d.p.)  $v_1$  en los bornes (extremos) de la bobina. El flujo total del campo magnético que fluye por la segunda bobina (que tiene  $N_2$  espiras) es  $N_2\Phi$ . Así, la d.d.p.  $v_2$  en los extremos de este segundo devanado (secundario) se relaciona con la que existe en el primer devanado (primario) de la siguiente forma:

$$v_2 = \frac{N_2}{N_1} v_1 \quad (1)$$

Esta conversión de voltaje es el cometido del transformador.

También es posible obtener la relación entre las intensidades que fluyen por los circuitos primario y secundario cuando el secundario no está en circuito abierto (esto es, cuando por el secundario fluye intensidad). En este caso, podemos asumir que el amperímetro ejerce como un cortocircuito. En general, para dos bobinas acopladas electromagnéticamente, los flujos de campo magnético que las atraviesan,  $\Phi_1(t)$  y  $\Phi_2(t)$ , están linealmente relacionados con las intensidades  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  que fluyen por esas bobinas a través de la matriz de inducción de la estructura:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

donde  $L_1$  y  $L_2$  son las autoinducciones de cada una de las bobinas y  $M$  es la inducción mutua. Estos parámetros se miden en el sistema internacional de unidades en henrios (H). Dependen solamente de la geometría de los circuitos en interacción y de las características magnéticas del medio material en que se encuentran inmersos. En el caso que nos ocupa se tiene que  $M = -\sqrt{L_2 L_1}$ . La ecuación que rige el comportamiento del circuito secundario en cortocircuito será la siguiente:

$$-\frac{d\Phi_2}{dt} = -(L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}) = i_2 R_2$$

Si consideramos el caso particular de régimen sinusoidal estacionario (esto es, las intensidades, flujos y voltajes dependen del tiempo como  $\cos[\omega t + \psi]$ ), los fasores de intensidades,  $I_1$  e  $I_2$ , se relacionarían mediante la expresión siguiente:

$$I_2(R_2 + i\omega L_2) = -Mi\omega I_1$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria  $\sqrt{-1}$ . Para el caso particular del transformador que tenemos en la figura, podemos asumir la siguiente aproximación:  $R_2 \ll \omega L_2$ . y por tanto se cumple que:

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (2)$$

dado que  $\frac{M}{L_2} = -\frac{N_1 N_2}{N_2^2}$

Para comprobar que estamos en el límite correcto, recordemos que el valor de  $L_2$  que da el fabricante para la bobina es un dato sin incluir el núcleo ferromagnético.

Observe también que en el experimento vais a trabajar con los valores eficaces de las intensidades, con lo cual el signo menos que aparece en la fórmula (2) es irrelevante.

Finalmente, hay que precisar que en todas las expresiones anteriores se han hecho importantes simplificaciones. Así, no se han tenido en cuenta importantes efectos como son las pérdidas por efecto Joule en los conductores, las pérdidas en el núcleo por esta misma causa y otras de origen magnético (pérdidas por relajación e histéresis), y las fugas de campo magnético debido al guiado imperfecto de las líneas de campo. Como consecuencia de las simplificaciones realizadas, en la práctica, las ecuaciones (1) y (2) serán sólo aproximadamente correctas.

### 3. Instrumental

Para la realización de esta práctica utilizaremos:

- Generador de corriente alterna para excitar el primario.
- Reóstato de 10 ohmios (resistencia variable) para controlar la intensidad que fluye en el primario.
- Transformador múltiple (con diversos devanados). Consta de dos conjuntos de bobinas, núcleo de hierro laminado y soporte.
- Cuatro multímetros para medir las intensidades y las tensiones en el primario y el secundario. Téngase en cuenta que los multímetros proporcionan tensiones e intensidades eficaces cuando miden en la posición AC. Así en todo lo que sigue nos referiremos a **valores eficaces** tanto de tensión como de intensidad.
- Conjunto de cables de conexión.

### 4. Procedimiento experimental para toma de datos y resultados

- Observa que el montaje experimental está dispuesto como se indica en la Figura 2. En el laboratorio os encontraréis la práctica montada.

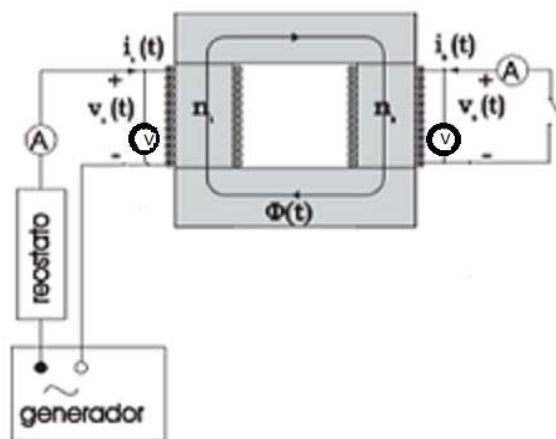


Figura 2. Esquema del montaje experimental.

**ATENCIÓN:** No se debe desmontar el bloque de hierro que cierra el circuito magnético en forma de U mientras la fuente de alimentación está encendida, pues en ese caso la intensidad de corriente que fluiría por el primario sería excesiva

- Dado que la fuente de alimentación funciona con un voltaje constante, la intensidad de corriente en el primario ( $I_1$ ) ha de ser regulada mediante el reóstato.
- Con el secundario en circuito abierto (transformador descargado, sin que el amperímetro sirva para cerrar el circuito), varíe el voltaje del primario ( $V_1$ ) mediante el selector del generador desde 2 hasta 14 V (a intervalos de 2 V) y mide el voltaje del secundario  $V_2$ . Haz esto para  $N_1 = N_2 = 140$ .

P1

**ATENCIÓN:** Asegúrate en todo momento de que los conectores de los dos cables que salen del secundario no se tocan entre si.

**Análisis de los resultados:** Representa  $V_2$  frente a  $V_1$  y obtén la pendiente de la recta de regresión.

- Fijando  $V_1 = 2$  V, mide  $V_2$  con  $N_2 = 70$  para  $N_1 = 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126$  y 140. Mantén en todo momento el secundario en circuito abierto.

P2

- **Análisis de los resultados:** Representa  $V_2$  frente a  $N_1$  y calcula la pendiente mediante análisis de regresión.

- Fijando  $V_1 = 4$  V, mide  $V_2$  con  $N_1 = 70$  para  $N_2 = 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126$  y 140. Mantén en todo momento el secundario en circuito abierto.

**P3**

- **Análisis de los resultados:** Representa  $V_2$  frente a  $N_2$  y calcula la pendiente mediante análisis de regresión.

- Con el secundario cortocircuitado a través del polímetro como amperímetro, varía la corriente  $I_1$  entre 1 y 4,5 A (a intervalos de 0,5 A y manteniendo el selector del generador en la posición de 10 V) midiendo la corriente  $I_2$ . Tome  $N_1 = N_2 = 140$ .

**P4**

**ATENCIÓN:** Al cortocircuitar el secundario con el polímetro, debe colocar el conector de entrada de 10 A del polímetro, ya que se van a medir intensidades de corriente superiores a 2 A.

- Manteniendo el selector del generador en la posición +4 V y fijando  $I_1 = 1$  A, mide  $I_2$  con  $N_2 = 70$  para  $N_1 = 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126$  y 140. Representa  $I_2$  frente a  $N_2$  y calcula la pendiente mediante análisis de regresión.

**P5**

- Manteniendo el selector del generador en la posición +4 V y fijando  $I_1 = 1$  A, mide  $I_2$  con  $N_1 = 70$  para  $N_2 = 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126$  y 140. Representa  $I_2$  frente a  $N_1$  y calcula la pendiente mediante análisis de regresión.

**P6**

## 5. Cuestiones

1. La conexión entre el generador y el primario del transformador no se hace de forma directa, sino a través de un reóstato (resistencia ajustable) que permite variar de forma continua la resistencia entre 0 y 10 ohmios. ¿Puedes explicar la razón por la que ese reóstato esté ahí?
2. La relación existente entre las intensidades que fluyen por el primario y el secundario se determina suponiendo que el secundario está cortocircuitado. Sin embargo, a la hora de realizar las medidas de las citadas intensidades el secundario está conectado a un amperímetro. ¿Puedes explicar por qué esta forma de proceder es correcta?
3. Si se abriera el circuito magnético que acopla los dos bobinados del transformador levantando la pieza superior, ¿qué ocurriría con la intensidad de la corriente que atraviesa el primario? Razona la respuesta.

**PRÁCTICA 10:**  
**TRANSFORMADOR**  
**HOJA DE RESULTADOS**

Tabla (P1)		
$V_I$	$V_1$ real	$V_2$
2 V		
4 V		
6 V		
8 V		
10 V		
12 V		
14 V		

Tabla (P2)	
$N_1$	$V_2$
28	
42	
56	
70	
84	
98	
112	
126	
140	

Tabla (P3)	
$N_2$	$V_2$
28	
42	
56	
70	
84	
98	
112	
126	
140	

Tabla (P4)	
$I_1$	$I_2$
1 A	
1.5 A	
2.0 A	
2.5 A	
3.0 A	
3.5 A	
4.0 A	
4.5 A	

Tabla (P5)	
$N_1$	$I_2$
28	
42	
56	
70	
84	
98	
112	
126	
140	

Tabla (P6)	
$N_2$	$I_2$
28	
42	
56	
70	
84	
98	
112	
126	
140	