

Notas Física Nuclear y de Partículas

Daniel Vazquez Lago

11 de octubre de 2024

Índice general

1. Propiedades generales de los núcleos	5
1.1. Introducción: definiciones.	5
1.1.1. Tipos de desintegraciones	5
1.2. Masas de los núcleos	7
1.2.1. Espectrometría de masas	7
1.2.2. Energía de ligadura	8
1.2.3. Formula semiempírica de masas	8
1.2.4. Aplicaciones de la formula semiempírica: parábola de masas	10
1.3. Abundancia y estabilidad nuclear	10
1.4. Tamaño de los núcleos	10
1.4.1. Sección eficaz diferencial y sección eficaz total	10
1.4.2. Sección eficaz de Rutherford	12
1.4.3. Factor de forma	13
1.4.4. Ejemplos de factores de forma	14
2. Inestabilidad nuclear	17
2.1. Desintegración α	17
2.1.1. Energética de la desintegración α	17
2.1.2. Sistemática de la desintegración α . Regla de Geiger-Nuttal	18
2.1.3. Tratamiento de Gamow, Gurney y Condon	18
2.1.4. Momento angular y paridad en la desintegración α	21
2.2. Desintegración β	21
2.2.1. Energética de la desintegración β .	22
2.2.2. Probabilidad de transición. Regla de oro de Fermi.	23
2.2.3. Teoría de Fermi de la desintegración β	24
2.2.4. Verificación experimental de la teoría de Fermi	27
2.2.5. Clasificación de las desintegraciones. Reglas de selección del momento angular y de la paridad.	29
2.2.6. Desintegración doble β	32
2.3. Transiciones electromagnéticas	33
2.3.1. Energética de la radiación γ	33
2.3.2. Análisis multipolar de la radiación electromagnética.	34
2.3.3. Reglas de selección del momento angular y de la paridad	34
2.3.4. Conversión interna	35
2.3.5. Espectroscopía γ	35
2.4. Teoría continua de la desintegración radiactiva.	35
2.4.1. Sustancia sin ramificación	35
2.4.2. Ramificación. Constantes de desintegración parciales.	36
2.4.3. Varias sustancias. Cadenas radiactivas naturales.	36

3. Reacciones Nucleares	39
3.1. Tipos de reacciones	39
3.2. Leyes de conservación	40
3.2.1. Conservación de la carga eléctrica y el número bariónico	40
3.2.2. Conservación de la energía y del momento lineal	40
3.2.3. Energía umbral de reacción	41
3.2.4. Conservación del momento angular y de la paridad	41
3.3. Dispersión y secciones eficaces	42
3.3.1. Atenuación de un haz al atravesar un blanco	42
3.3.2. Dispersión de Coulomb	43
3.3.3. Dispersión nuclear	44
3.4. Mecanismos de reacciones	44
3.5. Fisión	44
3.6. Fusión	44
3.7. Apéndices	44
4. Estructura nuclear	45
5. La interacción fuerte nucleón-nucleón	47
5.1. Partículas elementales: interacciones y propiedades	48
6. Transformaciones de simetría y leyes de conservación	49
6.1. Paridad \mathcal{P}	49
7. El modelo de quarks y el modelo estándar	51

Capítulo 1

Propiedades generales de los núcleos

1.1. Introducción: definiciones.

Definición 1.1 (número atómico). El número atómico (Z) de un núcleo es un entero que coincide con el número de protones del núcleo.

Definición 1.2 (número másico). El número másico (A) de un núcleo es la suma de número de protones y neutrones $A = Z + N$.

Atendiendo a los valores Z , A y N , los núcleos se clasifican en:

- **Isótopos:** son núcleos con igual Z .
- **Isóbaros:** son núcleos con igual A .
- **Isotónos:** son núcleos con igual N .

Para denotar un núcleo se suele escribir A_ZX_N donde X es el símbolo químico del elemento en cuestión (determinado por el valor Z). Protones y neutrones se denominan genéricamente **nucleones**. Hoy en día se han identificado alrededor de 112 átomos diferentes.

1.1.1. Tipos de desintegraciones

Desintegración α

La desintegración alfa consiste en la emisión de dos protones y dos neutrones (un núcleo de helio) por parte de un núcleo inestable. Produce un desplazamiento hacia la izquierda de dos posiciones de la tabla periódica, y reduce el número másico en 4 unidades $\Delta Z = -2$ y $\Delta A = -4$. Esquemáticamente esta desintegración se puede escribir Coulomb



Aunque en capítulos posteriores estudiaremos en detalle la evolución de las poblaciones de núcleos radioactivos, recordaremos ahora que la **vida media** (τ) de un núcleo es el tiempo necesario para reducir el número de núcleos de una muestra en un factor $1/e$ de su valor inicial (o, en otras palabras, el promedio del tiempo que tarda un núcleo en desintegrarse), mientras que el período de semidesintegración ($t_{1/2}$) es el tiempo necesario para reducirlo a la mitad. Dados N_0 núcleos radioactivos iniciales que no están reponiéndose por medio

de ningún proceso, el número de desintegraciones que se observan por unidad de tiempo es proporcional al propio número de núcleos presentes. La constante de proporcionalidad es característica de cada núcleo y se denomina **constante de desintegración** λ que tiene unidades inversas de tiempo. Esto nos lleva a la ley de desintegración radiactiva:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad (1.1.2)$$

Otras definiciones de interés son el **semi tiempo**, esto es, el tiempo que tarda una muestra en reducirse a la mitad:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (1.1.3)$$

La **actividad de una sustancia** se define como

$$A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad (1.1.4)$$

y en el SI se define como Becquerelio (Bq, una desintegración en cada segundo). Para desarrollar estos conceptos véase el apartado 2.4.1.

Desintegración β

La desintegración beta consiste en la conversión nuclear de neutrones en protones o viceversa. Por decirle de algún modo, es la manera en que el núcleo *corrige* un exceso de protones o neutrones convirtiendo unos en otros. En física nuclear se suele usar los símbolos β^- y β^+ para designar las radiaciones emitidas por las desintegraciones beta. La desintegración por emisión β^- (β^+) produce un desplazamiento hacia la derecha (izquierda) de una posible en la tabla periódica, pero no cambia esencialmente la masa: $\Delta Z = \pm 1$, $\Delta A = 0$. Responsable de este fenómeno es la interacción débil:



La conversión nuclear en protones puede tener lugar de 3 modos distintos. En notación de física de partículas se escribe:



El tercer proceso un electrón de las capas internas (usualmente la K) con cierta probabilidad presencia dentro de la región nuclear es *usado* para la conversión de un protón en un neutrón.

Desintegración γ

Los rayos γ son capaces de penetrar varios milímetros en plomo. No son desviados por los campos electromagnéticos e interaccionan con la materia de manera similar a los rayos X. Se trata de radiación electromagnética, e inicialmente se confundieron con los rayos X emitidos por el reordenamiento de los electrones atómicos que sigue a una conversión interna. La desintegración gamma consiste en la emisión espontánea de fotones altamente energéticos cuando el núcleo pasa de un estado excitado a otro estado de menor energía o

al fundamental. Es, por tanto, un proceso esencialmente análogo al que tiene lugar cuando un átomo se desexcita emitiendo radiación, bien sea en el rango visible o en el de rayos X. La emisión gamma suele acompañar a otros dos tipos de desintegración, porque sus procesos quedan normalmente en estados excitados.

Fisión espontánea

Es un proceso en el que el núcleo pesado se divide en dos más ligeros. No es posible determinar a priori en qué par concreto de núcleos ligeros terminará, sino que habrá una distribución estadística en un cierto rango de números atómicos.

Emisión nuclear

Este es un proceso mediante el que un núcleo inestable, generalmente producto de una fisión o desintegración anterior, emite un nucleón.

1.2. Masas de los núcleos

En el laboratorio se miden masas atómicas, no masas nucleares. A pesar de ello, veremos que en casi todos los casos prácticos de la física nuclear podremos usar masas atómicas en lugar de masas nucleares, porque las masas de los electrones y sus energías de ligadura se cancelarán casi perfectamente en el balance global. Actualmente las masas atómicas se miden en unidades atómicas de masa unificadas (u), y se definen de manera que la masa del átomo ^{12}C sea exactamente de 12u. La conversión de unidades:

$$1u = 931,49432(28)\text{MeV}/c^2 = 1,6605402(10) \times 10^{-27}\text{kg} \quad (1.2.1)$$

Las masas del protón, neutrón y electrón:

$$m_p = 939,272 \text{ MeV}/c^2 = 1836,149 m_e \quad (1.2.2)$$

$$m_p = 939,565 \text{ MeV}/c^2 = 1838,679 m_e \quad (1.2.3)$$

$$m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2 \quad (1.2.4)$$

Otra realación interesante

$$c^2 = 931,494013(37) \text{ MeV}/u \quad (1.2.5)$$

1.2.1. Espectrometría de masas

Para medir las masas de isótopos radioactivos de vida media corta se recurre a las ecuaciones de balance energético en reacciones nucleares. En la reacción $x + X \rightarrow y + Y$, midiendo las energías cinéticas de cada compuesto para determinar la diferencia de masas, que se conoce como el **valor** Q de la reacción:

$$Q = [m(x) + m(X) - m(y) - m(Y)]c^2 = E_c(\text{estado final}) - E_c(\text{estado inicial}) \quad (1.2.6)$$

Donde la letra minúscula denota las masas nucleares. Para que una desintegración sea espontánea debe verificarse que $Q > 0$, lo cual es evidente, ya que la energía cinética del estado final no puede ser negativa, como por ejemplo en el caso de tener una sola partícula, podremos encontrar un sistema de referencia inercial donde esta partícula este en reposo, y por tanto $E_c(\text{estado inicial}) = 0$, de tal manera que si $Q < 0$ implicaría $E_c(\text{final}) < 0$ lo cual no tiene sentido.

1.2.2. Energía de ligadura

Todo sistema compuesto (sistema ligado) tiene una energía de ligadura negativa, de tal manera que es energéticamente más favorable mantener unidos a los constituyentes que mantenerlos separados. En otras palabras: la suma de las masas de los constituyentes de un compuesto estable es mayor que la masa del compuesto. Esto es así porque existe una reacción de carácter atractivo entre los constituyentes que los mantiene unidos, de tal manera que es necesario realizar un trabajo para separarlos y destruir (desintegrar) el compuesto. En el dominio de la física nuclear definiremos la energía de un núcleo de modo que resulte positiva (masas de los constituyentes menos masa del compuesto).

La energía de la ligadura nuclear en términos de las masas atómicas de los elementos considerados que es lo que realmente se mide en el laboratorio. Para aclarar la notación, en lo que sigue usaremos la letra m para representarla masa de una partícula, por ejemplo m_n para la masa de un neutrón. Usaremos la notación $m(Z, A)$ para representar la **masa del núcleo (masa nuclear)**, y la notación $M(Z, A)$ o $M({}_Z^AX_N)$ para designar la **masa de un átomo (masa atómica)** con Z protones y A nucleones. De esta manera podemos relacionar la masa atómica con la masa nuclear de la siguiente manera:

$$M(Z, A) = m_N + Zm_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i \quad (1.2.7)$$

donde B_i son las *energía de ligadura* de los electrones. Este término es despreciable, por lo que la masa atómica y la masa nuclear se pueden relacionar por:

$$M(Z, A) \approx m_N + Zm_e \quad (1.2.8)$$

El valor de la masa nuclear también se puede expresar en función de la masas de sus constituyentes y la **energía de ligadura del núcleo** o **energía de ligadura nuclear** B :

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{1}{c^2} B \quad (1.2.9)$$

Es muy interesante expresar B en función de parámetros conocidos, como son las masas atómicas y las masas de los protones, neutrones y electrones, ya que es la energía de ligadura la que nos va a permitir calcular si una desintegración podría ocurrir de manera espontánea o no. Así:

$$\frac{1}{c^2} B = Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A) \quad (1.2.10)$$

en algunas de las tablas en lugar de tabular $M(Z, A)$ se proporciona el llamado **defecto de masa** $\Delta = (M - A)c^2$ donde M es la masa atómica en *uma* y A es el número másico. Dado Δ se puede deducir la masa atómica.

1.2.3. Formula semiempírica de masas

Existe una fórmula que describe cualitativamente la energía de ligadura por nucleon. Se trata de **fórmula semiempírica de masas**, también conocida como **fórmula de Wicksäcker**, y es esencialmente una parametrización de la energía de ligadura aunque se la conoce como fórmula de masas porque la relación entre una y otra es directa. Esta parametrización se basa en el **modelo de la gota líquida**. Al igual que en una gota líquido, la densidad en el núcleo es esencialmente constante en función del radio nuclear:

$$M({}_Z^AX_N) \equiv M(Z, A) = ZM({}^1H) + Nm_n - \frac{B(Z, A)}{c^2} \quad (1.2.11)$$

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sy} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (1.2.12)$$

Existen distintas parametrizaciones de la fórmula de masas, pero en todas ellas los términos son los mismos salvo constantes. Una breve descripción de cada uno de los términos es el siguiente:

- **Término de volumen:** sabemos que la energía de ligadura por nucleón es casi constante en función de A , esto es: $B \propto A$, luego el significado de $a_v A$ es obvio. a_v será presumiblemente del orden de 8 MeV. Cada nucleón contribuye aproximadamente lo mismo a la energía de ligadura porque la interacción fuerte es de corto alcance y sólo le permite interactuar con sus vecinos más próximos.
- **Término de superficie:** cerca de la superficie del núcleo es de esperar que los nucleones tengan menos vecinos y por lo tanto contribuyan un poco menos que los interiores a la energía de ligadura. El radio del núcleo va como $A^{1/3}$ y la superficie como $A^{2/3}$, por lo tanto el término de superficie es de la forma $a_s A^{2/3}$, contribuyendo con signo opuesto al de volumen para contrarrestar su excesivo peso.
- **Término de energía coulombiana:** la repulsión coulombiana entre los protones hace disminuir la energía de ligadura y, por lo tanto, aumentar la masa del núcleo. Debido al carácter de largo alcance de esta interacción, este término es proporcional a Z^2 e inversamente proporcional al radio $a_c Z(Z-1)A^{-1/3}$ ¹.
- **Término de simetría:** de la carta de Segré sabemos que la estabilidad nuclear se concreta en valores $Z \approx A/2$, y esto hemos de tenerlo en cuenta de alguna manera en nuestra fórmula de masas, de lo contrario no habría impedimento alguno para que la parametrización resultante no proporcionase isótopos estables con cientos de neutrones. Una posible forma de este parámetro es $-a_{sy}(A-2Z^2)/A$. Así escrito favorece la existencia de núcleos con un número parecido de protones y neutrones, y tiene mayor importancia para los núcleos ligeros, para los que la condición $Z \approx A/2$ es más estricta.
- **Término de pairing o apareamiento.** Un estudio significativo de las masas nucleares muestra que los núcleos más estables tienen un número par de protones y/o neutrones. Esto se debe a una tendencia de los nucleones a acoplarse en parejas de iguales, es decir pp y nn, con espines y momentos antiparalelos. Si tomamos nulo este término ($\delta = 0$) para núcleos con A impar, entonces en núcleos con Z impar y N impar δ contribuye con signo negativo, es decir, tiende a disminuir la energía de ligadura y aumentar la masa del núcleo. Sería ventajoso en estos casos convertir uno de los protones en neutrón o alguno de los neutrones en un protón. Finalmente, para núcleos con Z par y N par, δ contribuye con signo positivo. En la naturaleza sólo existen 4 núcleos impar-impar estables, que son el ^2H , ^6Li , ^{10}B y ^{14}N , mientras que núcleos estables par-par hay unos 167, lo cual da una idea de la importancia del

¹Si realizáramos el cálculo suponiendo una esfera uniformemente cargada obtendríamos una energía potencial dada por la expresión $-(3/5)e^2 Z^2 A^{-1/3}$. Si consideramos objetos puntuales uniformemente distribuidos en la *esfera nuclear*, aparece en lugar de Z^2 el factor $Z(Z-1)$, proporcional al número de parejas de objetos: $-(3/5)e^2 Z(Z-1)A^{-1/3}/(4\pi\epsilon_0 R_0)$. En la fórmula semiempírica de masas puede ser más conveniente dejar una constante global para ajustar los datos que usar un valor como $R_0 = 1,2$ fm en la expresión analítica anterior.

término pairing.

$$\delta(A) = \left\{ \begin{array}{ll} +a_p A^{-3/4} & \text{Núcleos con Z par y N par} \\ 0 & \text{Núcleos con A impar} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{Núcleos con Z impar y N impar} \end{array} \right\} \quad (1.2.13)$$

Las constantes se ajustan a los datos experimentales, con los siguientes valores como su mejor ajuste

a_v (MeV)	a_s (MeV)	a_c (MeV)	a_{sy} (MeV)	a_p (MeV)
15.5	16.8	0.72	23	34

1.2.4. Aplicaciones de la formula semiempírica: parábola de masas

1.3. Abundancia y estabilidad nuclear

1.4. Tamaño de los núcleos

1.4.1. Sección eficaz diferencial y sección eficaz total

En los cursos introductorios de física cuántica se estudia la dispersión o colisión de partículas por potenciales simples en una dimensión. Este tratamiento sencillo es suficiente para ilustrar los conceptos de transmisión y reflexión de partículas, efecto túnel, etc. En el caso de un potencial unidimensional la partícula incidente solo tiene dos posibilidades: seguir hacia delante o rebotar hacia atrás, cada una con cierta probabilidad (asumiendo que los potenciales son incapaces de mantener estados ligados). En tres dimensiones tendremos que considerar todo el continuo posible de direcciones emergentes de la partícula inicial tras la colisión. En el caso de colisiones profundamente inelásticas surge además la complicación adicional de que se pueden crear más partículas en el estado final.

La manera más adecuada de describir la distribución angular de las partículas dispersadas por un centro de fuerzas o potencial se realiza mediante la denominada **sección eficaz**. Veremos que esta distribución angular proporciona importante información sobre el potencial dispersor, y, por tanto, sobre la partícula o sistema que lo crea.

Supongamos un haz incidente que transporta N partículas por unidad de área y por unidad de tiempo, y que lo hacemos incidir sobre un blanco que contiene n centros dispersores. Si suponemos que el flujo incidente no es tan intenso como para provocar interferencia entre las propias partículas incidentes, que se tiene lugar una sola dispersión por partícula u que no hay una disminución apreciable de los centros dispersores del blanco por el retroceso de la partícula golpeada, entonces el número de partículas incidentes que emergen por unidad de tiempo en un pequeño intervalo de ángulo sólido $\Delta\Omega$ centrado en los ángulos θ y ϕ será proporcional a N, n y $\Delta\Omega$:

$$\Delta\mathcal{N} \sim nN\Delta\Omega \quad (1.4.1)$$

Denotando por $\sigma(\theta, \phi)$ la constante de proporcionalidad, podemos escribir ese número de partículas emergentes en $\Delta\Omega$ por unidad de tiempo como:

$$\Delta\mathcal{N} = nN\sigma(\theta, \phi) \quad (1.4.2)$$

o en intervalo diferencial

$$d\mathcal{N} = nN\sigma(\theta, \phi)d\Omega \quad (1.4.3)$$

A la constante de proporcionalidad $\sigma(\theta, \phi)$ se le denomina **sección eficaz diferencial** y, como se puede ver a partir de la ecuación anterior, tiene unidades de área. En efecto $\sigma(\theta, \phi)d\Omega$ es igual al área transversal del haz incidente paralelo que contiene el número de partículas dispersadas $d\Omega$ por un único centro dispersor o partícula del blanco. Evidentemente, a la integral de esa sección eficaz diferencial sobre la esfera se le denomina **sección eficaz total**

$$\sigma_t = \int \sigma(\theta, \phi)d\Omega \quad (1.4.4)$$

En caso de dispersión sobre un blanco fijo la definición anterior de sección eficaz es igualmente válida para el sistema laboratorio ² que para el sistema centro de masas, porque un centro dispersor fijo tiene masa efectiva infinita. Para el caso de una colisión entre partículas de masa finita la definición anterior es en general válida sólo para el sistema de referencia laboratorio, y para la observación de la dispersión de la partícula incidente. No describe la dispersión angular del retroceso de la partícula bombardeada, aunque es por supuesto posible obtenerla a partir de la sección eficaz de la partícula incidente. La definición de la sección eficaz diferencial en el sistema del centro de masas puede hacerse de modo completamente análogo al anterior donde, de nuevo, lo que se observa es la dispersión de las partículas incidentes, pero el flujo incidente tiene que calcularse respecto a las partículas bombardeadas, no respecto al centro de masas. Como en el sistema centro de masas las dos partículas interaccionantes se mueven en sentidos opuestos después de la colisión, la sección eficaz diferencial para la observación del retroceso de la partícula blanco es simplemente $\sigma_{\text{blanco}} = \sigma_{\text{haz}}(\pi - \theta, \phi + \pi)$, (θ y ϕ referidos al centro de masas).

En general, la probabilidad de interacción de dos partículas depende fuertemente de la energía ³. La sección eficaz diferencial también se suele expresar en el intervalo diferencial de energía, de modo que para obtener la sección eficaz total habrá que integrar a todo rango de energías accesibles.

$$\sigma_t = \int \int \sigma(\theta, \phi)d\Omega dE \quad (1.4.5)$$

La sección eficaz total es la suma de las dos partes: la sección eficaz inelástica⁴:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} \quad (1.4.6)$$

La unidad comúnmente usada para las secciones eficaces es el barn

$$1\text{barn} = 10^{-24}\text{cm}^2 = 10^{-28}\text{m}^2 \quad (1.4.7)$$

²Recordemos que el sistema de referencia laboratorio es aquel en el que la partícula blanco está inicialmente en reposo mientras que el sistema de referencia centro de masas es aquel en el que el centro de masas está (siempre) en reposo.

³Por ejemplo, la sección eficaz de captura de neutros térmicos por el uranio varía varios ordenes de magnitud en un pequeño rango de energía.

⁴Más sobre esto en el tema de reacciones nucleares [4](#)

1.4.2. Sección eficaz de Rutherford

La sección eficaz para la dispersión elástica coulombiana de partículas puntuales sin espín se conoce como la sección eficaz de Rutherford. Él fue el pionero en el uso de las técnicas de dispersión para el estudio del mundo subatómico, concretamente bombardeando una lámina de oro con partículas α . Supongamos ahora una colisión elástica entre un electrón y un núcleo en reposo de carga Ze . Despreciemos por el momento efectos de espín y supongamos además que el electrón se aproxima en trayectoria hiperbólica con velocidad no relativista v y que la energía de retroceso del núcleo es despreciable frente a la interacción. Usando mecánica clásica no relativista es sencillo derivar la siguiente expresión para la sección eficaz diferencial de Rutherford:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{(4E)^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.4.8)$$

donde $E = mv^2/2$ es la energía cinética del electrón y θ el ángulo polar de dispersión. Si la energía de retroceso del núcleo no fuera despreciable, entonces deberíamos sustituir la expresión anterior de m_e por la masa reducida $\mu = m_e m_N / (m_e + m_N)$, v sería la velocidad del centro de masas y el ángulo de dispersión θ estaría referido al sistema de referencia del centro de masas.

La mecánica clásica es una teoría completamente determinista, de tal modo que dadas unas ciertas condiciones iniciales es posible predecir exactamente la trayectoria de la partícula y, por tanto, el diferencial de ángulo sólido por el que pasará una vez dispersada. Si imaginamos un haz uniforme de partículas con cierta sección transversal incidiendo sobre una lamina de material a modo de blanco, la ecuación anterior nos da la proporción de partículas que en la unidad de tiempo saldrán dispersadas atravesando una superficie diferencial perpendicular a $d\Omega$. En este problema el campo de fuerzas es central, de modo que existe simetría azimutal y podemos integrar sobre el ángulo ϕ para obtener:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi = 2\pi \sin(\theta) d\theta \quad (1.4.9)$$

por eso escribimos directamente $\sigma = \sigma(\theta)$.

La sección eficaz de Rutherford es una de las pocas fórmulas de la mecánica clásica que también se deduce en el formalismo de la mecánica cuántica. Pero en el *mundo cuántico* su significado es distinta: representa la probabilidad de que una partícula salga dispersada en un ángulo sólido diferencial $d\Omega$, aunque también es cierto que en el caso de un haz de partículas incidiendo sobre el blanco representa una fracción de ellas que en la unidad de tiempo atravesarán una superficie diferencial a $d\Omega$, al igual que en el caso clásico.

Una manera rápida de deducir la sección eficaz de Rutherford en mecánica cuántica es mediante la primera aproximación de Born. Se considera que la función de onda inicial y final del electrón está bien descrita por una onda plana, tal que $\mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_i$ y $\mathbf{p}_f = \hbar \mathbf{k}_f$ (donde $|k| = 2\pi/\lambda$). En ese caso las funciones de onda inicial y final

$$\Psi_i(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad \Psi_f(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (1.4.10)$$

El potencial $V(\mathbf{r})$ del centro dispersor *convierte* la onda plana inicial en la onda plana final, y la amplitud de probabilidad de la transición viene dada, en primera aproximación de Born Por

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) \sim \int \Psi_f^* V \Psi_i d^3\mathbf{r} \sim \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar} V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \sim f(\mathbf{q}) \quad (1.4.11)$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$ es el **momento transferido en la colisión**. La sección eficaz diferencial es el módulo al cuadrado de esta *amplitud de probabilidad*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2 \quad (1.4.12)$$

Por lo que si el potencial es simétrico $V(\mathbf{r}) = V(r)$, podemos integrar sobre los ángulos y obtener:

$$f(\mathbf{q}) \sim \int_0^\infty r V(r) \sin(qr/\hbar) dr \quad (1.4.13)$$

Si escribimos $V(r) = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$ la integral anterior no existe. Sin embargo $V(r)$ no tiene dicha forma, ya que en realidad la carga del núcleo Ze está apantallada por la carga electrónica, de tal manera que a grandes distancias la partícula incidente no ve el potencial eléctrico desnudo del núcleo. Se puede tener en cuenta este apantallamiento añadiendo un factor multiplicativo exponencial

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} e^{-r/a} \quad (1.4.14)$$

donde a es una longitud característica de las dimensiones atómicas. La integral sobre el radio produce entonces el siguiente resultado

$$f(\mathbf{q}^2) \sim \frac{Ze^2}{q^2 + (\hbar/a)^2} \approx \frac{Ze^2}{q^2} \quad (1.4.15)$$

1.4.3. Factor de forma

Consideremos entonces que el núcleo atómico es un objeto extenso con una densidad de carga eléctrica que podamos expresar en la forma $Ze\rho(\mathbf{r}')$, de tal manera que $\rho(\mathbf{r}')$ es una densidad de probabilidad normalizada $\int \rho(\mathbf{r}') d^3(\mathbf{r}') = 1$. Si además la distribución de carga fuese esféricamente simétrica tendríamos

$$4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (1.4.16)$$

La integral restante en la expresión de $f(\mathbf{q})$ se conoce como **factor de forma**

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3\mathbf{r} \quad (1.4.17)$$

En el caso de que tratemos distribuciones esféricamente simétricas, el factor de forma sólo dependerá del cuadrado del momento transferido.

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3\mathbf{r} \quad (1.4.18)$$

Recordando que $d\sigma/d\Omega = |f|^2$ tenemos que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{extenso}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth.}} \cdot |F(\mathbf{q}^2)|^2 \quad (1.4.19)$$

donde la etiqueta *extenso* hace referencia a que hemos considerado al núcleo como un objeto extenso y no como una partícula puntual.

Para pasar de $F(\mathbf{q}^2)$ a la distribución de carga $\rho(r)$ podríamos pensar, en principio, en invertir la ecuación del factor de forma:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{q}^2) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3q \quad (1.4.20)$$

1.4.4. Ejemplos de factores de forma

Las primeras medidas de factores de forma nucleares fueron llevados a cabo a principios de la década de los 50 en SLAC⁵. Se midieron secciones eficaces para una gran variedad de núcleos con electrones de energía hasta 500 MeV. Los resultados muestran un rápido decrecimiento de la sección eficaz para grandes ángulos, que se corresponde con el hecho de que la dependencia con el momento transferido va como $1/\mathbf{q}^4$, (recuérdese que $|\mathbf{q}| = 2|\mathbf{p}|\sin(\theta/2)$). Para distribuciones simétricas de carga podemos integrar sobre el ángulo sólido y obtener:

$$F(\mathbf{q}^2) = 4\pi \int \rho(r) \frac{\sin(|\mathbf{q}|r/\hbar)}{|\mathbf{q}|r/\hbar} r^2 dr \quad (1.4.21)$$

Introduciendo en la expresión anterior distribuciones sencillas de carga de modo que podamos realizar la integral, obtendremos ejemplos de factores de forma a comparar con las mediciones y así hacernos una idea intuitiva de la distribución de carga nuclear. En las figuras tenemos varios ejemplos. Para una carga puntual (delta de Dirac) el factor de forma es una constante (la unidad). Cuanto más extensa sea la distribución espacial de carga más rápidamente decrecerá con \mathbf{q} el factor de forma. En el límite de una distribución extendida por todo el espacio tendríamos una delta de Dirac para el factor de forma. Para una distribución gaussiana tendríamos otra distribución gaussiana. Para una esfera homogénea tendríamos oscilaciones típicas de un patrón de difracción con mínimos que se anulan. Para una esfera con superficie difusa tendríamos oscilaciones difuminadas, con mínimos que no llegan a anularse.

El valor medio del cuadrado del radio $\langle r^2 \rangle$ está dado por la fórmula

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) d\mathbf{r}^3 = 4\pi \int r^2 \rho(r) r^2 dr \quad (1.4.22)$$

Se observa que los núcleos no tienen una superficie bien definida, sino más bien difusa. En su interior la distribución de carga es aproximadamente constante, y en la superficie decrece en un cierto rango hasta hacerse nula. Una buena parametrización de esta distribución se consigue con la llamada **función de Fermi de dos parámetros** también llamada **distribución de Wood-Saxon**:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}} \quad (1.4.23)$$

donde c es el radio al que $\rho(r)$ decrece a la mitad del valor del plató⁶. El parámetro a está relacionado con el grosor de la piel⁷ (skin thickness) mediante $t = (4 \ln 3)a$. Los resultados experimentales indican para núcleos pesados y medios se cumplen

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 A^{1/3} \quad r_0 = 0,94 \text{ fm} \quad (1.4.24)$$

El volumen nuclear es, por lo tanto, proporcional al número de nucleones A , y la densidad de carga nuclear es aproximadamente constante (comportamiento similar a líquidos o sólidos). El radio a mitad de densidad y el grosor de la piel satisfacen, aproximadamente, la siguiente relación:

⁵Stanford Lineal Accelerator.

⁶Caamaño llama a la constante $R_{1/2} \equiv c$

⁷ t es la distancia que necesita la densidad de carga para caer del 90 % al 10 % de su valor

$$c(\text{fm}) = 1,18A^{1/3} - 0,48 \quad t \approx 2,4\text{fm} \quad (1.4.25)$$

También se suele utilizar la **función de Fermi de tres parámetros** que se define como

$$\rho(r) = \left(1 + \frac{\omega r^2}{c^2}\right) \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}} \quad (1.4.26)$$

Se puede determinar la distribución de carga a partir de los datos experimentales con un método casi independiente del modelo si la escribimos como una superposición de gaussianas:

$$\rho(r) \propto \sum_{i=1}^N A_i \exp \left[-\frac{(r - R_i)^2}{\delta_i} \right] \quad (1.4.27)$$

Es preciso tener en cuenta, sin embargo, que la dispersión de electrones proporciona información sobre la distribución de carga eléctrica, pero para investigar la distribución de materia nuclear necesitamos proyectiles hadrónicas.

Capítulo 2

Inestabilidad nuclear

2.1. Desintegración α

La desintegración α produce lo que originalmente se llamó rayos α , identificados en su época como la radiación menos penetrante emitida por los elementos radioactivos naturales.

La desintegración por emisión alfa produce un desplazamiento hacia la izquierda de dos posiciones en la tabla periódica, y reduce el número másico en 4 unidades: $\Delta Z = -2$, $\Delta A = -4$. Esquemáticamente escribiríamos



La desintegración α es un fenómeno que en esencia se debe a la repulsión coulombiana de los protones en un núcleo, que crece a un ritmo más rápido (va como Z^2) que la energía nuclear¹ (que va como A).

2.1.1. Energética de la desintegración α

En la desintegración α intervienen la interacción electromagnética y la fuerte. Entre otras cosas que veremos más tarde, en este proceso se conserva la energía, el momento lineal, el momento angular total y la paridad. Si suponemos que el átomo está inicialmente en reposo, la energía del sistema en el estado inicial es simplemente la energía de la masa en reposo de este átomo. En el estado final tenemos una partícula α y un núcleo hijo con cierta energía cinética. Usando masas nucleares podríamos entonces escribir las ecuaciones de balance energético como:

$$m_X c^2 = m_Y c^2 + T_Y + m_\alpha c^2 + T_\alpha \quad (2.1.2)$$

$$m_X c^2 - m_Y c^2 - m_\alpha c^2 = T_Y + T_\alpha = Q \quad (2.1.3)$$

$$Q = (m_X - m_Y - m_\alpha) c^2 \quad (2.1.4)$$

Este proceso está energéticamente permitido sólo si $Q > 0$. Aunque la expresión anterior está escrito en términos de las masas nucleares, podemos calcular Q usando las masas atómicas porque la masa electrónese cancela en la operación (en las desintegraciones α no se eliminan ni generan electrones). Despreciando las energías de ligadura electrónicas:

$$Q/c^2 = M({}^A_Z X_N) - M({}^{A-4}_{Z-2} Y_{N-2}) - M({}^4_2 \text{He}) \quad (2.1.5)$$

¹Recuérdese que la energía de ligadura por nucleón es aproximadamente constante $B/A \sim \text{cte}$.

Si el núcleo inicial estaba en reposo, los momentos lineales de los productos deben ser iguales en magnitud y opuestos en sentido

$$p_\alpha = p_Y \quad (2.1.6)$$

Las energías típicas de las partículas α en desintegraciones naturales suelen estar alrededor de los 5 MeV, de modo que podemos usar cinemática no relativista, y escribir $T = p^2/2$. Por lo tanto:

$$Q = T_\alpha + T_Y = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_Y^2}{2m_Y} = \frac{p_\alpha^2}{2} \left(\frac{m_\alpha + m_Y}{m_\alpha m_Y} \right) = T_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{m_Y} + 1 \right) \quad (2.1.7)$$

De donde se deduce la ecuación que nos relaciona energía cinética con Q :

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + (m_\alpha/m_Y)} \quad (2.1.8)$$

La emisión α comienza a ser espontáneamente posible ya para $A > 150$, pero la mayoría de los emisores α tienen $A > 190$. Dado que para A grande:

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + (m_\alpha/m_Y)} \approx \frac{Q}{1 + (4/(A-4))} = \frac{Q}{1 - 4/A} \approx Q \left(1 - \frac{4}{A} \right) \quad (2.1.9)$$

En una desintegración típica la partícula α se lleva alrededor del 98 % de Q . El 2 % que se lleva el núcleo Y no es despreciable, puede ser del orden de 100 keV y es bastante mayor que la energía de ligadura de los átomos en los sólidos, lo cual quiere decir que si el átomo está cerca de la superficie puede ser expulsado de la muestra radiactiva. En ciertas circunstancias esta dispersión del material radiactivo debe ser tenida en cuenta, pero en cualquier caso el rango de penetración en materia de núcleos tan masivos es muy pequeño.

La energía cinética de la partícula α se puede determinar por medio de un espectrómetro magnético y así también el valor de Q de la reacción. Esto nos da un método de determinación de masas atómicas en el caso de un núcleo X longevo que se desintegra en uno Y demasiado efímero para que la espectrometría de masas sea aplicable, tal como hemos visto en el capítulo anterior.

2.1.2. Sistemática de la desintegración α . Regla de Geiger-Nuttall

Geiger y Nuttall observaron ya en 1911 una relación inversamente proporcional entre el logaritmo del período de semidesintegración del núcleo emisor y la raíz cuadrada de las partículas α emitida., esto es:

$$\ln(\tau_{1/2}) = k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{Q}} \quad (2.1.10)$$

2.1.3. Tratamiento de Gamow, Gurney y Condon

En 1928 Gamow, Gurney y Condon aplicaron casi simultáneamente los principios de la nueva mecánica cuántica al estudio de la desintegración α . La idea esencial consiste en considerar la partícula α *preformada* en el potencial creado por el núcleo hijo, que puede

aproximarse a un pozo esférico profundo² con una frontera en forma de barrera coulombiana. La partícula α tendrá cierta probabilidad de cruzar la barrera por efecto túnel, que puede calcularse sin muchas dificultades, al menos aproximadamente. Este modelo proporciona resultados numéricos razonables que demuestran una compresión semicuantitativa del fenómeno de la desintegración α , pero no significa que la *imagen* de una partícula α *preformada* en el interior del núcleo sea un buen reflejo de la realidad, sino más bien que en ciertas condiciones se comporta aproximadamente como tal.

Vamos ahora a realizar un cálculo para estimar la probabilidad de desintegración α , y para ello usaremos un modelo semiclásico en una dimensión. El potencial coulombiano se corta a una distancia a que se puede considerar como la suma de los radios del núcleo hijo y de la partícula α . En la región interior ($r < a$), la partícula α se mueve con una energía cinética dada por $Q + |V_0|$. La región $a < r < b$ forma una barrera del potencial.

En el contexto de nuestro sencillo modelo anterior, la constante de desintegración vendrá dada por $\lambda = fP$, donde f es la *frecuencia con la que la partícula incide sobre la barrera* y P es la *probabilidad de que la cruce*. No es complicado calcular el coeficiente de transmisión para esa simple barrera coulombiana. Recordemos que el coeficiente de transmisión viene dado a través de una barrera arbitraria en una dimensión viene dado aproximadamente por

$$T = \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_a^b \sqrt{V(r) - Q} dr \right) \quad (2.1.11)$$

donde la integración se realiza entre los límites que marcan la intersección de la recta $V(r) = Q$ con el pozo de potencial nuclear por la izquierda y la cola de la barrera coulombiana por la derecha. Se suele denominar **factor de Gamov** a

$$G = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_a^b \sqrt{V(r) - Q} \quad (2.1.12)$$

de manera que el cociente de transmisión es

$$T = e^{-2G} \quad (2.1.13)$$

Escribimos ahora para $V(r)$ la energía coulombiana de la partícula alfa

$$V(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.1.14)$$

y obtenemos la siguiente integral

$$G = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{b} \right)} \right] \quad (2.1.15)$$

donde $2e$ es la carga de la partícula α , $(Z-2)e$ la carga del núcleo hijo y μ la masa reducida del sistema. Denotando por B la altura de la barrera coulombiana en el punto $r = a$, tenemos

$$B = V(r = a) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad Q = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (2.1.16)$$

Porque Q es precisamente el valor que $V(r)$ toma en el radio $R = b$. De aquí deducimos que $a/b = Q/B$ y puesto que $Q/B \ll 1$ hacemos la siguiente aproximación

²En el capítulo que trata de la estructura nuclear (capítulo ??) veremos con algo más de detalle por qué el potencial nuclear se puede aproximar a un pozo de potencial, y en el capítulo sobre la interacción nucleón-nucleón veremos cuantitativamente la profundidad estimada del pozo.

$$\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (2.1.17)$$

con lo cual tenemos que

$$G \approx \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \quad (2.1.18)$$

Ahora todo lo que tenemos que hacer es multiplicar la probabilidad de penetración ya calculada por una frecuencia f que exprese, de una manera simple, el número de impactos o intentos que la partícula α hace contra la barrera. Esta frecuencia es del orden de $f \sim v/a$, donde v es su velocidad anterior del núcleo, que podemos expresar como $v = \sqrt{2(Q + |V_0|)}/\mu$. Esto nos lleva a la siguiente expresión para la constante de desintegración α :

$$\lambda = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2(Q + |V_0|)}{\mu}} \exp \left[-2 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right] \quad (2.1.19)$$

$$(2.1.20)$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2(Q + |V_0|)}{\mu}} \exp \left[4\alpha c \sqrt{\frac{2\mu}{Q}} (Z-2) \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right] \quad (2.1.21)$$

Donde $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ es la constante de estructura fina. El período de semidesintegración o semivida sería:

$$\tau_{1/2} = a(\ln(2)) \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \exp \left[4\alpha c \sqrt{\frac{2\mu}{Q}} (Z-2) \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right] \quad (2.1.22)$$

De esta ecuación se deduce³ que el logaritmo de $\tau_{1/2}$ tiene una relación lineal inversa con la raíz cuadrada de la energía cinética de la partícula α :

$$\log \tau_{1/2} = k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{Q}} \quad (2.1.23)$$

donde k_1 y k_2 son constantes. Esta es la **ley o regla de Geiger y Nuttall** encontraron empíricamente en torno a 1911.

Vemos que la fórmula deducida para $\tau_{1/2}$ mediante este sencillo modelo proporciona valores que están más o menos dentro del mismo orden de magnitud que las medidas experimentales, lo cual es un logro importante si se tiene en cuenta que éstas últimas abarcan más de 22 órdenes de magnitud y que hemos simplificado considerablemente el problema: no hemos tenido en cuenta la función de ondas inicial y final del núcleo (regla de oro de Fermi) ¡, ni tampoco el momento angular de la partícula α . La forma y radio del núcleo tiene también una influencia importante en el valor numérico final⁴.

³Aunque es cierto que Q también aparece en la raíz que multiplica la exponencial, la dependencia más fuerte de $\tau_{1/2}$ con Q proviene de la exponencial en sí misma. El factor multiplicativo, que es esencialmente la velocidad de la partícula α , tiene una variación con Q despreciable comparada con la variación generada por la exponencial.

⁴Por ejemplo, pasar de un radio nuclear medio de $1,25A^{1/3}$ fm a $1,20A^{1/3}$ fm implica introducir un cambio de hasta un factor 5 en $\tau_{1/2}$ respecto al radio nuclear se puede usar incluso como un método para estimar el radio nuclear, o más bien, el radio de un núcleo más el de la partícula alfa.

2.1.4. Momento angular y paridad en la desintegración α

En una desintegración α han de conservarse el momento angular total y la paridad. En cuanto al primerm tenemos que $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \mathbf{I}_\alpha + \boldsymbol{\ell}_\alpha$, donde $\boldsymbol{\ell}_\alpha$ es el momento angular orbital de la partícula α relativo al núcleo emisor⁵ y \mathbf{I}_α su espín nuclear. Ahora bien, el núcleo de Helio tiene los nucleons apareados de manera que su espín es cero, por lo tanto $\mathbf{I}_\alpha = 0$ y $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \boldsymbol{\ell}_\alpha$. Con lo cual el momento angular orbital que se lleva la partícula α en la Desintegración debe cumplir la **regla del momento angular**

$$|I_i - I_f| \leq \ell_\alpha \leq I_i + I_f \quad (2.1.24)$$

Por otro lado, la ley de conservación de la paridad exige $\pi_i = \pi_f \times \pi_\alpha \times (-1)^{\ell_\alpha}$, donde π_i y π_f son las paridades del núcleo inicial (padre) y del núcleo final (hijo), y π_α es la paridad de la partícula α , que resulta ser positiva⁶, por lo tanto tenemos que $\pi_i = \pi_f (-1)^{\ell_\alpha}$. Concluimos, finalmente, que si la paridad nuclear inicial y final es la misma, entonces ℓ_α tiene que ser par, mientras que en caso contrario tiene que ser impar:

$$\begin{aligned} \pi_i = \pi_f &\implies \ell_\alpha \text{ par} \\ \pi_i = -\pi_f &\implies \ell_\alpha \text{ impar} \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

2.2. Desintegración β

La desintegración β^- fue descubierta ya en 1896 por Becquerel. En 1932 se descubrió el positrón en el estudio de los rayos cósmicos, y más tarde (1934) se produjeron artificialmente elementos que se desintegraban emitiendo positrones, poniendo así de manifiesto la desintegración β^+ . La captura electrónica, esto es, la captura de un electrón orbital por parte del núcleo fue descubierta por Álvarez en 1938. Los rayos β^- tiene carga negativa y un poder de penetración de alrededor de 1mm. en plomo. Durante algún tiempo hubo confusión entre estos dos electrones emitidos en la desintegración β y los electrones emitidos en la **conversión interna** de los núcleos. En física nuclear se suelen usar los símbolos β^- y β^+ para designar estas radiaciones. La desintegración por emisión β^- (β^+) produce un desplazamiento hacia la derecha (izquierda) de una posición en la tabla periódica, pero no cambia esencialmente la masa: $\Delta Z = \pm 1$, $\Delta A = 0$. Responsable de este fenómeno es la interacción débil. Las principales diferencias con la radiación α son:

- El electrón y el neutrino se *crean* en la desintegración.
- Debido a sus energías y masas, son relativistas.
- Sus distribuciones de energía son continuas.

El *reemplazo* de una neutrón por un protón, o viceversa, tiene lugar en los núcleos a través de los siguientes procesos:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{desintegración } \beta^- \quad (2.2.1)$$

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \quad \text{desintegración } \beta^+ \quad (2.2.2)$$

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu_e \quad \text{captura electrónica (CE } e^-) \quad (2.2.3)$$

siendo el primero de ellos energéticamente imposible para los protones libres o átomos de hidrógeno.

⁵Consideramos que el hijo se queda aproximadamente en reposo.

⁶El primer estado excitado del núcleo ${}^4_2\text{He}$ tiene una energía de 20,1 MeV y también $I^\pi = 0^+$.

2.2.1. Energética de la desintegración β .

Experimentalmente se observa que la energía cinética de las partículas β forma una distribución continua, en marcado contraste con el carácter monoenergética de las partículas α emitidas radiactivamente. Recordemos que la energía cinética de la partícula α es igual a la diferencia de energía de ligadura del núcleo padre y del núcleo hijo (excepto por pequeñas correcciones debidas al retroceso del núcleo emisor). En un principio no se conocía la existencia de neutrinos y se creía que la desintegración β sólo intervenían los núcleos padre e hijo, y el electrón emitido. No obstante, el hecho de que el proceso fuese continuo indicaba que en el proceso deben intervenir más de dos partículas, como mínimo tres, que se repartan estadísticamente la energía cinética liberada por la desintegración.

Esquematisamos el proceso de desintegración β^- del siguiente modo:

$${}^A_Z X_N \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N-1} + e^- \bar{\nu}_e \quad \text{con} \quad Q_{\beta^-} = (m_X - m_Y - m_e)c^2 \quad (\text{masas nucleares}) \quad (2.2.4)$$

Recordemos que

$$M(Z, A) = m_N + Zm_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i \quad m(Z, A) = M_N - Zm_e + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i$$

donde las B_i son las energías de ligadura de los electrones atómicos. Por lo tanto

$$\frac{Q_{\beta^-}}{c^2} = [M({}^A_Z X_N) - Zm_e] - [M({}^A_{Z+1} Y) - (Z+1)m_e] - m_e + \left[\sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \right] \quad (2.2.5)$$

Vemos que las masas de los electrones se cancelan en la ecuación anterior. Despreciando las pequeñas diferencias de ligadura electrónicas, expresamos la energía de la desintegración en términos de masas atómicas de la siguiente manera:

$$Q_{\beta^-} = [M(X) - M(Y)]c^2 \quad Q_{\beta^-} \approx T_e + T_\nu \quad (2.2.6)$$

La aproximación de la segunda expresión consiste en despreciar la energía de retroceso del núcleo emisor. Está claro entonces que

$$(T_e)_{\text{máx}} = (T_\nu)_{\text{mín}} = Q_{\beta^-} \quad (2.2.7)$$

En términos de masas atómicas:

$$\frac{Q_{\beta^+}}{c^2} = [M({}^A_Z X_N) - Zm_e] - [M({}^A_{Z-1} Y_{N+1}) - (Z-1)m_e] - m_e + \left[\sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z-1} B_i \right] \quad (2.2.8)$$

$$Q_{\beta^+} = [M(X) - M(Y) - 2m_e]c^2 \quad (2.2.9)$$

Para la captura electrónica (denotada por C.E. o ε) tenemos:

$${}^A_Z X_N + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + \nu_e \quad Q_{\text{CE}} = Q_\varepsilon = M(X)c^2 - [M(Y)c^2 + B_n] \quad (2.2.10)$$

donde B_n es la energía de ligadura del electrón correspondiente a la capa n (K,L,M...) que coincide con los rayos X (uno o varios) que se emiten cuando el resto de los electrones atómicos bajan en cascado a ocupar la vacante dejada por el electrón capturado⁷. La energía de esos rayos X puede parametrizarse de acuerdo con la ley de Moseley:

$$\sqrt{\frac{E}{hc}} = A_n(Z - B_n) \quad (2.2.11)$$

donde las A_n y B_n son constantes que dependen de la capa de la que haya sido capturado (o expulsado) el electrón. Esto es, tendríamos $A_K, A_L, A_M, B_K, B_L, B_M$ etc.

Obsérvese que si la desintegración β^+ es energéticamente posible entonces la captura electrónica también, pero el recíproco no es cierto. Para que la desintegración β^+ sea posible es necesario que la diferencia entre las masas atómicas del padre y del hijo sea al menos de $2m_e c^2 \approx 1,022$ MeV.

2.2.2. Probabilidad de transición. Regla de oro de Fermi.

Antes de profundizar en el estudio de la teoría de Fermi de la desintegración β detengámonos un momento a examinar las transiciones entre estados energéticos de un sistema cuántico. Recordemos que en un estado estrictamente estacionario la densidad de probabilidad no cambia con el tiempo ($|\Psi|^2 = \text{cte}$). Además, la energía que corresponde a ese estado está perfectamente definida en el sentido de que tiene dispersión nula:

$$(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = 0 \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \Rightarrow \Delta t \sim \infty \quad (2.2.12)$$

Esto quiere decir que si un sistema (átomo, núcleo, etc.) se encontrase en un estado estacionario sería imposible que pudiese realizar transiciones fuera de él.

Un estado que se aparta un poco de ser estacionario ya no tiene la energía perfectamente definida, tendrá una cierta dispersión $\Delta E \neq 0$ que se llama *anchura del estado* y se suele representar por Γ . Es posible relacionar, mediante el principio de incertidumbre, la vida media τ de ese estado haciéndolo corresponder con el intervalo de tiempo Δt que uno tendría disponible para realizar la medida de la energía del estado. Esto implica que $\tau = \hbar/\Gamma$. La probabilidad de desintegración o transición λ , es el inverso de la vida media,

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \quad (2.2.13)$$

Es posible realizar en mecánica cuántica un cálculo aproximado de la probabilidad de transición por unidad de tiempo, γ . El resultado, conocido como **regla de oro de Fermi** (que dedujo *Paul Dirac*), puede escribirse como

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V'_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (2.2.14)$$

donde el término V'_{fi} es el valor esperado del débil potencial perturbador entre los estados final e inicial de transición, también conocido como elemento de matriz:

⁷ Justo a continuación de la captura, la capa electrónica del núcleo hijo queda altamente excitada porque tiene una vacante en uno de sus orbitales bajos. Al ser ocupada la vacante se emiten rayos X característicos cuya energía coincide con B_n , lo cual implica que la masa o contenido energética del átomo hijo justo después de la captura excede en B_n a la masa atómica del átomo en su estado fundamental. Debe tenerse en cuenta que la corteza electrónica del átomo también puede desexcitarse mediante la emisión de electrones Auger. Este fenómeno compite con la emisión de los rayos X característicos, y es más probable en átomos ligeros.

$$V'_{fi} = \int \Psi_f^* V' \Psi_i dv \quad (2.2.15)$$

donde Ψ_i y Ψ_f son los estados nucleares cuasiestacionarios inicial y final. El término $\rho(E_f)$ es la **densidad de estados finales**, es decir, el número de estados por unidad de energía. Si el estado final es un estado aislado con energía en una estrecha distribución alrededor de E_f entonces la probabilidad de transición será mucho menor que si tenemos un conjunto de muchos estados finales densamente concentrados en un pequeño intervalo alrededor de E_f , tal que

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad (2.2.16)$$

2.2.3. Teoría de Fermi de la desintegración β

Existen diferencias importantes entre la desintegración β y la desintegración α . En los procesos β^- no hay barrera coulombiana que atravesar, y en los β^+ un cálculo sencillo muestra que el factor de Gamow es del orden de la unidad ($e^{-2G} \approx 1/e^2$). Otra diferencia es que en los procesos β el electrón o positrón y el neutrino o antineutrino no existían previamente en el núcleo, son partículas creadas en el proceso de desintegración. Por último, las partículas β tienen un espectro energético continuo, y no energías precisas. De acuerdo con la regla de oro de Fermi (2.2.14) la probabilidad de transición por unidad de tiempo⁸ puede calcularse como:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V'_{fi}|^2 \rho(E_F) \quad (2.2.17)$$

Como en el estado final del proceso tenemos el núcleo y dos leptones:

$$V'_{fi} = g \int_v \left(\Psi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^* \right) V' \Psi_i dv = g M_{fi} \quad (2.2.18)$$

En esta expresión hemos puesto explícita una constante de *acoplamiento*, g , que representa la intensidad de interacción responsable de la desintegración β (el mismo papel que la constante de estructura fina desempeña en la determinación de la intensidad de la interacción electromagnética). Suponiendo que las funciones de onda de los dos leptones finales (ϕ_e la del electrón, ϕ_ν la del neutrino) se comportan como ondas planas :

$$\phi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left(i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} \right) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[1 + i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right] \quad (2.2.19)$$

$$\phi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left(i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} \right) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[1 + i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right] \quad (2.2.20)$$

siendo \mathbf{p} y \mathbf{q} el momento del electrón/positrón y del neutrino/antineutrino respectivamente. El volumen V es una constante de normalización, que no interferirá en el resultado final. Recordemos que el número de estados por unidad de energía confinada en un volumen V viene dado por:

⁸Ya sabemos que esta probabilidad, multiplicada por el número de núcleos presente en cierto instante, da precisamente el número de desintegraciones por unidad de tiempo en ese mismo instante, la actividad.

$$dn = \frac{V}{h^3} d^3\mathbf{p} = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (2.2.21)$$

Usaremos la segunda porque sólo estamos interesados en el módulo de \mathbf{p} denotado por p , puesto que lo que al final queremos hacer es obtener el espectro energético de los electrones, y obviamente su energía no depende de la dirección de \mathbf{p} .

El número de estados teniendo en cuenta el electrón/positrón y al neutrino/antineutrino simultáneamente con los momentos p y q apropiados es:

$$d^2n = \frac{V^2}{h^6} (4\pi)^2 p^2 q^2 dp dq \quad (2.2.22)$$

En los procesos β la energía típica del electrón es 1 MeV, lo cual implica un momento de $pc \sim 1,4MeV$, luego $p/\hbar \sim 0,007 \text{ fm}^{-1}$ y podemos hacer la aproximación $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ sobre el volumen nuclear⁹. Esto nos lleva a considerar la comúnmente denominada **aproximación permitida** en la desintegración β (*allowed approximation*), que consiste en tomar únicamente el primer término en las expansiones de las ondas planas de las ecuaciones (2.2.19) y (2.2.20):

$$\exp\left(i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) \approx 1 \quad \exp\left(i\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) \approx 1 \quad (2.2.23)$$

Si tuviéramos en cuenta los otros términos no triviales tendríamos las *aproximaciones prohibidas* (de segundo orden, tercer orden... en función de hasta que términos escogemos), que no es que no ocurran, solo que son menos probables. Entonces la probabilidad diferencial es¹⁰:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 (4\pi)^2 \frac{p^2 q^2}{h^6} \frac{dp dq}{dE_f} \quad (2.2.24)$$

Suponemos que M_{fi} es independiente de los momentos neutrino/electrón¹¹. Así, suponiendo que el neutrino prácticamente no tenga masa (o que es una partícula ultrarrelativista), nótese que $E_f = E_e + E_\nu = E_e + qc$ y por lo tanto $dq/dE_f = 1/c$. Agrupando todos los factores que no contienen el momento del electrón p , en una constante global C , podemos escribir:

$$d\lambda = Cp^2 q^2 dp \implies N(p) dp = Cp^2 q^2 dp \quad (2.2.25)$$

donde $N(p)$ es el número de e^\pm emitidos por unidad de momento p , es decir, su espectro de momentos. En esta ecuación (2.2.25) está implícito el paso a un sistema de muchos núcleos. Esto es, si para un sólo núcleo $d\lambda$ es la probabilidad diferencial de emisión beta con el

⁹Al realizar la integración que aparece es el elemento de matriz, M_{fi} , sólo es necesario considerar distancias del orden del tamaño nuclear, porque es obvio que sólo en esa región las funciones de onda del núcleo inicial y final toman valores significativamente distintos de cero.

¹⁰Obsérvese que el volumen V , que aparece en la densidad de estados finales se cancela con el que aparece en la normalización de las funciones de onda planas de los leptones ϕ_e y ϕ_ν .

¹¹Supongamos por ahora que M_{fi} no depende de p , pero más tarde veremos que la inclusión de cierta dependencia con el momento nos llevará a establecer correcciones sobre la fórmula que vamos a obtener.

momento del e^\pm en el intervalo diferencial dp , para un sistema de muchos núcleos $d\lambda$ es precisamente el espectro diferencial de momentos.

El momento del e^\pm y del neutrino están relacionados mediante la expresión $Q = T_e + T_\nu = T_e + qc$ (despreciamos la energía de retroceso del núcleo), por lo tanto podemos escribir el espectro únicamente en función de p :

$$q = \frac{Q - T_e}{c} = \frac{1}{c} \left[Q - \left(\sqrt{p^2 c^2 + m_e^4 c^4} - m_e c^2 \right) \right] \quad (2.2.26)$$

de lo cual se deduce que:

$$N(p)dp = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 dp = \frac{C}{c^2} p^2 \left[Q - \left(\sqrt{p^2 c^2 + m_e^4 c^4} - m_e c^2 \right) \right] dp \quad (2.2.27)$$

Obsérvese que la función se anula si $p = 0$ y $T_e = Q$. Para poder obtener el espéctro de energía cinética solo tenemos que relacionar momento y energía

$$p = \sqrt{2m_e T_e + (T_e/c)^2} \quad (2.2.28)$$

de lo cual obtenemos que

$$N(T_e)dT_e = \frac{C}{c^5} \sqrt{2m_e c^2 T_e + T_e^2} (m_e c^2 + T_e) (Q - T_e)^2 dT_e \quad (2.2.29)$$

No debería sorprender al lector que se diga que existe una discrepancia entre los espectros de las ecuaciones deducidas con las reales, ya que no hemos tenido en cuenta, entre otros factores, la influencia del campo coulombiano del núcleo.

El campo coulombiano repele al positrón y atrae al electrón, de manera que los respectivos espectros deben estar desplazados respecto a la predicción de la ecuación (2.2.29). La pregunta ahora es ¿Como cuantizar este desplazamiento? La respuesta está en la llamada **función de Fermi** $F(Z', p)$ o $F(Z', T_e)$ siendo Z' el número atómico del núcleo hijo. La función de Fermi, viene dada por

$$F(Z', T_e) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad \eta = \mp \frac{Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar v_e} = \mp \frac{Z' \alpha}{v_e/c} \quad \text{para } \beta^\mp \quad (2.2.30)$$

Además, si tomamos el siguiente miembro de la expansión de las ondas de los leptones, estaremos introduciendo dependencia con su momento. A las desintegraciones para las que la **aproximación permitida** ($e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$) es suficientemente buena las llamamos **desintegraciones permitidas**. Si es necesario añadir un término no trivial la llamamos **desintegración prohibida de primer orden**. Si hay que añadir un segundo término, diremos **desintegración de segundo orden** (y así *ad infinitum*). A pesar del nombre hay que recordar que estas desintegraciones suceden, aunque son menos probables (y menos probables en tanto en cuanto aumentamos el orden de la prohibición). Resumiendo, el *espectro β completo incluye los siguientes factores*

- Un factor estadístico $p^2(Q - T_e)^2$ que proviene del número de estados finales accesibles a las partículas finales.

- La función de Fermi $F(Z', p)$ que tiene en cuenta la influencia del campo coulombiano nuclear.
- El elemento de matriz nuclear $|M_{fi}|^2$, que tiene en cuenta los efectos de los estados nucleares inicial y final.

Al escribir las ecuaciones precedentes hemos supuesto que toda la dependencia del momento del electrón/positrón está en el facto estadístico $p^2(Q - T_e)^2$. Sin embargo esto es sólo una aproximación, y en general hemos de tener en cuenta también una posible dependencia con el momento del electrón/positrón proveniente de la integral $\int_v (\Psi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^*) V' \Psi_i dv$ en el caso de que la aproximación permitida no sea buena y tengamos que añadir más términos que el primero en la expansión de las ondas planas de los leptones. Esta dependencia del momento de los leptones se suele poner separadamente en lo que se conoce como *shape factor* $S(p, q)$. Todos estos factores nos llevan a:

$$N(p)dp \sim p^2 (Q - T_e)^2 F(Z', p) |M_{fi}|^2 S(p, q) dp \quad (2.2.31)$$

2.2.4. Verificación experimental de la teoría de Fermi

La forma del espectro

En la aproximación permitida ($S(p, q) = 1$) podemos escribir la expresión anterior como

$$(Q - T_e) \sim \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}} \quad (2.2.32)$$

de tal manera que el gráfico de $\sqrt{N(p)/(p^2 F(Z', p))}$ frente a T_e debería ser una línea recta cuya intersección con el eje de abscisas es precisamente la energía de desintegración Q . Esto es lo que se llama la **gráfica de Fermi-Kurie**. En el caso de desintegraciones prohibidas es necesario incluir la dependencia con el momento a través del *shape factor* $S(p, q)$:

$$(Q - T_e) \sim \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p) S(p, q)}} \quad (2.2.33)$$

En algunos casos simples de procesos prohibidos de primer orden el *shape factor* viene dado por la sencilla expresión $S(p, q) = p^2 + q^2$.

La tasa de desintegración total

Para encontrar la tasa de desintegración total hemos de integrar la tasa de desintegración parcial o diferencial que, introduciendo la función de Fermi en la ecuación (2.2.24), viene dada en la aproximación permitida por

$$d\lambda = \frac{4g^2 |M_{fi}|^2}{(2\pi)^3 \hbar^7 c^3} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp \quad (2.2.34)$$

por consiguiente:

$$\lambda = \frac{4g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{\text{máx}}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp \quad (2.2.35)$$

donde, como antes, Z' es el número atómico del núcleo hijo. Esta integral depende, en última instancia, de Z' y de la energía relativista total máxima del electrón, denotada por $E_0 \approx Q_0 + m_e c^2$ siendo $cp_{\text{máx}} = \sqrt{E_0^2 - m_e^2 c^4}$. Se define la **función integral de Fermi** como

$$f(Z', E_0) = \frac{1}{(m_e c)^3 (m_e c^2)^2} \int_0^{p_{\text{máx}}} F(Z', p) p^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (2.2.36)$$

que es una cantidad adimensional y se encuentra tabulada para diversos valores de Z' y E_0 . Obsérvese que en (2.2.36) aparece la diferencia entre las energías relativistas totales, que coincide obviamente con la diferencia de energías cinéticas: $E_0 - E_e = (Q + m_e c^2) - (T_e + m_e c^2) = Q - T_e$. Con esta definición podemos escribir:

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (m_e c)^3 (m_e c^2)^2 f(Z', E_0) = \frac{g m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} f(Z', E_0) \quad (2.2.37)$$

y como $\lambda = \ln(2)/t_{1/2}$ tendremos

$$ft_{1/2} = (\ln(2)) \frac{2\pi^3 \hbar^7 c^3}{g m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2} \quad (2.2.38)$$

A estos **valores ft** se les conoce como **semividas comparativas**. Los valores ft nos proporcionan una manera de comparar las probabilidades de emisión β para diferentes núcleos. Las diferencias en los valores ft de los distintos núcleos deben provenir de diferencias en el elemento de matriz nuclear, es decir, en diferencias entre las funciones de onda nucleares.

Al igual que en el caso de la desintegración α , tenemos un rango enorme de valores de $t_{1/2}$ (de 10^3 a 10^7 segundos para ft). Por consiguiente se suelen tabular los logaritmos decimales $\log_{10} ft$ con el tiempo en segundos. Los procesos con las semividas comparativas más bajas tienen valores de $\log_{10} ft \sim 3 - 4$, y se conocen como **desintegraciones superpermitidas**¹² (*superallowed decays*).

Algunos de estos procesos superpermitidos son transiciones $0^+ \rightarrow 0^+$, y en estos casos la matriz nuclear es muy simple: $M_{fi} = \sqrt{2}$, lo cual quiere decir que los valores $\log_{10} ft$ de todos ellos deberían ser iguales, lo cual es aproximadamente cierto. Sabiendo que $M_{fi} = \sqrt{2}$ para las transiciones superpermitidas, podemos usar la expresión () y los valores experimentales de $ft_{1/2}$ para deducir la magnitud de la constante de acoplamiento g introducida al principio. Se obtiene que

$$g \approx 0,88 \times 10^{-4} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3 \quad (2.2.39)$$

Podemos conseguir una magnitud adimensional G a partir de g que nos permita comparar esta con otras constantes fundamentales de la naturaleza. Esta G es:

$$G = g \frac{m_p^2 c}{\hbar^3} \approx 1,0 \times 10^{-5} \quad (2.2.40)$$

menor que la fuerza fuerte y la electromagnética, pero mayor que la gravitatoria.

¹²Cuando la función de ondas nuclear inicial y final se superponen perfectamente, la probabilidad de transición tiene los mismos números cuánticos que el neutrón o protón destruido, es decir, los dos estados se encuentran en el mismo multiplete de isospin. Estas desintegraciones superpermitidas, y sus valores ft coinciden esencialmente con el valor ft de la desintegración del neutrón libre.

2.2.5. Clasificación de las desintegraciones. Reglas de selección del momento angular y de la paridad.

La clasificación de las desintegraciones β , de manera breve, se puede ver en la tabla 2.1, con las reglas de selección del momento angular y de la paridad.

Tipo de desintegración	$\Delta\pi$	ΔI
Permitidas	0	0,1
Prohibidas (1º orden)	± 2	0,1,2
Prohibidas (2º orden)	0	2,3
Prohibidas (3º orden)	± 2	2,3
Prohibidas (4º orden)	0	4,5
Prohibidas (5º orden)	± 2	5,6

Tabla 2.1: Reglas de selección del momento angular y de la paridad de las desintegraciones β .

Desintegraciones permitidas (*allow decays*)

Recordemos que en la denominada aproximación permitida hemos sustituido las funciones de onda del electrón y del neutrino, por su valor en el origen, esto es, consideremos que fueron *creados* en $r = 0$. En este caso no puede llevarse ningún momento angular orbital, y el único cambio posible de espín nuclear debe provenir del espín del electrón y del neutrino, que ambos son fermiones de espín $s_e = s_\nu = 1/2$. En la aproximación permitida ($\ell = 0$), podemos tener entonces los siguientes casos

- El espín del sistema de dos leptones (e y ν) es $S = 0$ (configuración singlete). En este caso no puede haber cambio en el espín nuclear: $\Delta I = |I_i - I_f| = 0$. Se les llama **Fermi decays**.
- El espín del sistema de dos leptones (e y ν) es $S = 1$ (configuración triplete). En este caso \mathbf{I}_i e \mathbf{I}_f están acoplados a través de un vector de longitud unidad: $\mathbf{I}_f + \vec{1} = \mathbf{I}_i$, $I_i = |I_f - 1|, I_f, |I_f + 1|$, lo cual quiere $\Delta I = 0, 1$. Se les llama **Gamow-Teller decays**. Obsérvese que si $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f = 0$ tenemos también $\Delta I = 0$, pero no es posible que exista una transición Gamow-Teller en este caso, porque los leptones no pueden ser emitidas en configuración triplete ($0 \neq 0 + 1$).

Puesto que la paridad asociado al momento angular orbital l es $(-1)^l$, se deduce que hay cambio de paridad en estas transiciones ($l = 0$). Las **reglas de selección** para las desintegraciones β **permitidas** son entonces:

$$\Delta I = 0, 1 \quad \Delta\pi = 0 \quad (\text{no hay cambio de paridad}) \quad (2.2.41)$$

Ejemplos de transiciones β permitidas:

- $^{14}\text{O} \longrightarrow ^{14}\text{N}^* (0^+ \rightarrow 0^+)$. Es una transición Fermi (F) pura, no puede haber contribución de la transición Gamow-Teller (GT) porque $I_i = I_f = 0$.
- $^6\text{He} \longrightarrow ^6\text{Li} (0^+ \rightarrow 1^+)$. Es una transición GT pura.

- $n \longrightarrow p \left(\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ \right)$. Tenemos $\Delta I = 0$ y se trata de una transición mezcla (F) y (GT), porque es posible que los dos leptones se encuentran tanto la configuración triplete del espín ($S = 1$) como en la singlete ($S = 0$)¹³. Las proporciones exactas en que contribuyen cada una de estas transiciones al proceso global dependen de las funciones de onda nuclear inicial y final. Se suele definir el cociente entre las amplitudes de Fermi y de Gamow-Teller de la siguiente manera:

$$y = \frac{g_F M_F}{g_{GT} M_{GT}} \quad (2.2.42)$$

donde M_F y M_{GT} son los *elementos de matriz nucleares* de Fermi y de Gamow-Teller. En la constante de transición global tendríamos que sustituir $g^2 |M_{fi}|^2$ por $(g_F^2 |M_F|^2 + g_{GT}^2 |M_{GT}|^2)$. Suponemos que g_F es idéntica a la g deducida para las transiciones superpermitidas de Fermi ($0^+ \rightarrow 0^+$). Para la desintegración del neutrón el elemento de matriz nuclear es simplemente $|M_F| = 1$. Puesto que la constante de transición (decay rate) es proporcional a $g_F^2 |M_F|^2 (1 + y^{-2})$, la tasa de desintegración del neutrón permite el cálculo del cociente y , que arroja un valor de $y = 0,467 \pm 0,003$. Es decir, la desintegración del neutrón libre tiene lugar en un 82 % de las ocasiones según un proceso de Gamow-Teller, y en el 18 % restante según un proceso de Fermi¹⁴.

En general el cálculo de M_F y M_{GT} es complicado, pero en el caso especial de núcleos espejo resulta particularmente simple porque las funciones de onda inicial y final son las mismas (excepto por pequeñas correcciones coulombianas). Un protón se convierte en neutrón más el positrón y el neutrino, y el cociente de amplitudes (F) y (GT) es similar al de la desintegración del neutrón libre antes vista.

Desintegraciones prohibidas (*forbidden decays*)

Se denominan *first forbidden decays* o *desintegraciones prohibidas de primer orden* a aquellas transiciones β en la que los leptones se llevan una unidad de momento angular orbital $\ell = 1$. El término *desintegración prohibida* es realmente desafortunado, ya que aunque son transiciones poco probables, no son imposibles. Al igual que las desintegraciones permitidas, las dividimos en transiciones de Fermi (F) y de Gamow-Teller (GT), dependiendo de que los leptones emitidos se encuentren en la configuración singlete de espín ($S = 0$) o la triplete ($S = 1$), respectivamente.

- Para las *desintegraciones Fermi prohibidas de primer orden* hemos de acoplar $S = 0$ con $\ell = 1$, lo cual proporciona $I_i = I_f \oplus 1$ ($I_i = |I_f - 1|, I_f, |I_f + 1|$), y por lo tanto $\Delta I = 0, 1$ (pero no podemos tener $0 \rightarrow 0$, porque entonces los leptones no se podrían llevar una unidad de momento angular orbital y encontrarse en un estado singlete de espín).
- Para las *desintegraciones de Gamow-Teller de primer orden* hemos de acoplar $S = 0$ con $\ell = 1$, lo cual proporciona $I_i = I_f \oplus 2$ ($I_f \in \{|I_f - 2|, |I_f - 1|, I_f, |I_f + 2|, |I_f + 1|\}$) y por tanto $\Delta = 0, 1, 2$.

¹³Las dos combinaciones que satisfacen la conservación del momento angular serían $\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$, para el estado singlete: $\frac{1}{2} \otimes 0 = \frac{1}{2}$

¹⁴De acuerdo con

$$\frac{g_F^2 |M_F|^2}{g_F^2 |M_F|^2 (1 + y^{-2})} = \frac{1}{1 + y^{-2}} = 0,179$$

Por otro lado, si $\ell = 1$, habrá un cambio de paridad en la transición. Tenemos, por consiguiente, las siguientes reglas de selección para las transiciones prohibidas de primer orden:

$$\Delta I = 0, 1, 2 \quad \Delta\pi = \pm 2 \quad (\text{hay cambio de paridad}) \quad (2.2.43)$$

Algunos ejemplos de transiciones prohibidas de primer orden son:

- $^{17}_7\text{N} \longrightarrow ^{17}_8\text{O} \quad \left(\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^+\right)$
- $^{76}_{35}\text{Br} \longrightarrow ^{76}_{34}\text{Se} \quad (1^- \rightarrow 0^+)$
- $^{122}_{51}\text{Sb} \longrightarrow ^{122}_{50}\text{Sn}^* \quad \left(\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^+\right)$

Las desintegraciones β **prohibidas de segundo orden** son aquellas en las que los leptones se lleva unidades de momento angular $\ell = 2$, con lo cual no hay cambio de paridad. El proceso para obtener las reglas de selección es el mismo que el de las anteriores desintegraciones: las subdividimos en Fermi o Gamow-Teller, de tal manera que combinando tenemos que $\Delta I = 0, 1, 2, 3$ (pero no siempre, porque las transiciones $0 \rightarrow 0$ u $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ no permiten que los leptones se lleven dos unidades de momento angular). Por otro lado como los casos $\Delta = 0, 1$ están comprendidos en las desintegraciones permitidas, por lo que la contribución de las prohibidas de segundo orden a la tasa de desintegración es completamente despreciable en estos casos, por lo que debemos ignorarlos. Así, las reglas de selección son:

$$\Delta I = 2, 3 \quad \Delta\pi = \pm 2 \quad (\text{no hay cambio de paridad}) \quad (2.2.44)$$

Algunos ejemplos:

- $^{22}_{11}\text{Na} \longrightarrow ^{22}_{10}\text{Ne} \quad (3^+ \rightarrow 0^+)$
- $^{137}_{55}\text{Cs} \longrightarrow ^{137}_{56}\text{Ba} \quad \left(\frac{7}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^+\right)$

Las desintegraciones β **prohibidas de tercer orden** son aquellas en las que los leptones se llevan un momento angular $\ell = 3$. Así, tendrían las siguientes reglas de selección:

$$\Delta I = 3, 4 \quad \Delta\pi = \pm 2 \quad (\text{hay cambio de paridad}) \quad (2.2.45)$$

- $^{87}_{37}\text{Rb} \longrightarrow ^{87}_{38}\text{Sr} \quad \left(\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{9}{2}^+\right)$
- $^{40}_{19}\text{K} \longrightarrow ^{40}_{20}\text{Ca} \quad (4^- \rightarrow 0^+)$

Incluso es posible encontrar desintegraciones prohibidas de cuarto (y quinto) orden, pero cuanto más alto es el orden más improbable es que se produce. En la práctica estas transiciones son tan improbables que sólo pueden observarse cuando las otras son realmente imposibles. En cualquier caso dejamos en la tabla 2.1 las reglas de selección de las transiciones permitidas y prohibidas hasta 5º orden.

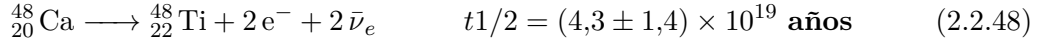
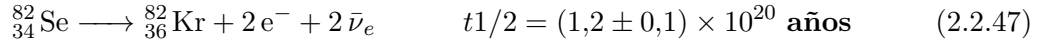
2.2.6. Desintegración doble β

La desintegración doble β (o $\beta\beta$) es un proceso mediante el cual dos neutrones se convierten “simultáneamente” en dos protones, dos electrones y dos antineutrinos. Un ejemplo es el siguiente:



Es necesario insistir en que se trata de un proceso único y no dos desintegraciones β sucesivas muy seguidas en el tiempo. En este caso, el proceso ${}^{82}_{34}\text{Se} \longrightarrow {}^{82}_{35}\text{Br} + e^{-} + \bar{\nu}_e$ está prohibido por la ley de conservación de energía ($Q < 0$), por lo que la desintegración β no puede tener lugar. Sin embargo $\beta\beta$ tiene un $Q > 0$. Esta es una característica común a la mayoría de las desintegraciones doble β : el núcleo intermedio que resultaría de la desintegración β simple es más pesado que el núcleo padre, mientras que el resultante de la doble β , no.

Mediciones experimentales de los períodos de semidesintegración para algunas desintegraciones $\beta\beta$ mencionan arrojan tiempos de vida medio ridículos,



Es decir, se trata de procesos sumamente improbables, ya que sabiendo que la probabilidad de transición de β viene dada por

$$\lambda_{\beta} = \frac{m_e c^2}{\hbar} \left(f g^2 \frac{m_e^4 c^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^6} \right) \quad (2.2.49)$$

podemos estimar que la tasa de desintegración $\beta\beta$, salvo por el factor inicial, el cuadrado del anterior:

$$\lambda_{\beta\beta} = \frac{m_e c^2}{\hbar} \left(f g^2 \frac{m_e^4 c^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^6} \right)^2 \quad (2.2.50)$$

aunque este tratamiento simplista no se debe tomar demasiado en serio a efectos de predicciones cuantitativas. La búsqueda experimental de desintegraciones doble β sin emisión de neutrinos¹⁵ (*neutrinoless double beta decay*) es campo de investigación activo e interesante, porque su existencia sería una confirmación más de que los neutrinos no tienen masa nula¹⁶.

¹⁵Obsérvese que la desintegración doble β sin emisión de neutrinos no está prohibida por la ley de conservación de la energía y el momento, tal y como sucede para las desintegraciones β simple sin emisión de neutrinos.

¹⁶Sin entrar en detalles, se puede considerar que la desintegración doble β sin emisión de neutrinos tiene lugar mediante dos procesos virtuales. En el primero de ellos un neutrón se desintegra y emite un neutrino que luego es absorbido por otro neutrón para iniciar una reacción beta inversa que lo convierte en protón. Para que esto pueda ocurrir es necesario que el neutrino emitido en el primer proceso virtual cambie de helicidad, lo cual implicaría que tiene masa.

2.3. Transiciones electromagnéticas

Los rayos γ son capaces de penetrar varios milímetros en plomo. No son desviados por los campos electromagnéticos e interaccionan con la materia de manera similar a los rayos X. Se trata de radiación electromagnética, e inicialmente se confundieron os rayos X emitidos por el reordenamiento de los electrones atómicos que sigue a una conversión interna. La desintegración γ consiste en la emisión espontánea de fotones altamente energéticos cuando el núcleo pasa de un estado excitado a otro estado de menor energía o al fundamental. Es por tanto un proceso análogo al que tiene lugar cuando un átomo se desexcita emitiendo radiación, bien sea en el rango visible o en el de los rayos X. La emisión gamma suele acompañar a los otros dos tipos de radiación, porque sus productos quedan normalmente excitados. La vida media típica para una emisión γ es de unos 10^{-9} segundos, pero a veces se observan vidas medias significativamente mayores. Estas transiciones se denominan **isoméricas**, y a los estados excitados de vida media larga se les llama estados **metaestables**, estados isoméricos, o isómeros. Se suele denotar esta característica con un superíndice en el símbolo del elemento $^{110}\text{Ag}^m$. Los rayos γ provenientes de transiciones nucleares electromagnéticas están en un rango de energías de entre 0.1 y 10 MeV, lo cual implica una longitud de onda λ entre 10^4 y 10^2 fm.

2.3.1. Energética de la radiación γ

Si denotamos por E_i y E_f las energías de los estados excitados nucleares inicial y final respectivamente, la ley de conservación de energía para una transición electromagnética nos permite escribir:

$$E_i = E_f + E_\lambda + T_R, \quad \Delta E = E_i - E_f = E_\gamma + T_r = p_\gamma c + \frac{p_R^2}{2M}$$

dado que el momento se tiene que conservar:

$$\Delta E = p_\gamma c + \frac{p_R^2 c^2}{2Mc^2} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} = E_\gamma \left(1 + \frac{E_\gamma}{2Mc^2} \right)$$

Es evidente que T_R no puede ser otra cosa que la *energía de retroceso del núcleo emisor*. Podemos ver que podemos escribir la ecuación de arriba como una ecuación de segundo grado:

$$E_\gamma^2 + 2Mc^2 E_\gamma - 2Mc^2 \Delta E = 0$$

la cual nos lleva a la solución (elegimos la positiva evidentemente):

$$E_\gamma = Mc^2 \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}} \right] \quad (2.3.1)$$

Aproximando $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8 \dots$ tenemos que:

$$E_\gamma = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2} \right) \quad (2.3.2)$$

Vemos entonces que la energía del fotón no es exactamente igual a la diferencia de energías entre los dos estados excitados, ya que para conservar el momento debemos tener en cuenta la energía de retroceso del núcleo, aunque para la mayoría de propósitos podemos despreciar esta relación y escribir $E_\gamma = \Delta E$.

2.3.2. Análisis multipolar de la radiación electromagnética.

2.3.3. Reglas de selección del momento angular y de la paridad

La teoría electromagnética clásica predice la transmisión de momento lineal y angular por parte de los campos electromagnéticos. Se han hecho experimentos precisos para medir ambos fenómenos, tanto la presión ejercida por la radiación como la transferencia de momento angular. Si hacemos incidir fotones circularmente polarizados a derechas sobre un disco absorbente que pueda girar sobre su eje veremos que efectivamente gira para garantizar la conservación del momento angular. La tasa de *radiación* del momento angular es proporcional a la tasa de radiación de energía. En la teoría cuántica esta proporcionalidad se mantiene si asignamos a cada fotón un cuanto preciso de momento angular. El operador multipolar de orden 2^L incluye el armónico esférico $Y_L^M(\theta, \phi)$ que está asociado con un momento angular L . Un multipolo de orden 2^L transfiere por lo tanto un momento angular $L\hbar$ un fotón¹⁷.

Consideremos una transición γ entre un estado nuclear inicial con espín \mathbf{I}_i y un estado final con espín \mathbf{I}_f , tal que $I_i \neq I_f$. Está claro que la conservación del momento angular implica que

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \mathbf{L} \rightarrow |I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \quad (2.3.3)$$

Si por ejemplo $I_i = 3/2$ y $I_f = 5/2$, el momento angular podría valer $L = 1, 2, 3, 4$, pudiendo tener radiación dipolar, cuadrupolar, octupolar o hexadecapolar. El carácter magnético o eléctrico de la radiación emitida en cada caso dependerá de la paridad de los estados nucleares inicial y final. Recordemos que $\pi(EL) = (-1)^L$ y que $\pi(ML) = (-1)^{L+1}$, por lo que las reglas de selección para la emisión de radiación electromagnética del siguiente modo:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \mathbf{L} \implies |I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \quad (\text{excepto } L = 0) \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta\pi = 0 &\implies EL \text{ par} \quad \text{o} \quad ML \text{ impar} \\ \Delta\pi = 2 &\implies EL \text{ impar} \quad \text{o} \quad ML \text{ par} \end{aligned}$$

La excepción para $L = 0$ se debe a que no existe radiación electromagnética multipolar de orden uno (radiación monopolar). En electromagnetismo clásico el momento monopolar eléctrico es simplemente una carga, que no varía con el tiempo y no puede dar lugar a un campo con radiación. Esto quiere decir que no es posible una transición γ entre dos estados con espín cero¹⁸. En estos casos la desexcitación nuclear tiene lugar a través de la conversión interna, un proceso que veremos más adelante en el capítulo.

¹⁷En general no es posible descomponer sin ambigüedad el momento angular total del fotón en una parte intrínseca y otra orbital, porque las dos están *acopladas* y no son independientes.

¹⁸Analizando el proceso en términos de física de partículas, diríamos que una transición $\gamma \ 0^+ \rightarrow 0^+$ viola la ley de conservación del momento angular total.

2.3.4. Conversión interna

En la conversión interna el núcleo se desexcita expulsando un electrón de la corteza atómica. Es un proceso que compete con la emisión γ .

2.3.5. Espectroscopía γ

2.4. Teoría continua de la desintegración radiactiva.

La **actividad** de una muestra de átomos radioactivos se define como el número de desintegraciones que tienen lugar en la unidad de tiempo. Esta definición que tiene sentido si la desintegración es un fenómeno que involucra individualmente¹⁹ a cada átomo, no un fenómeno colectivo. Así definida, es obvio que la actividad es proporcional al tamaño de la muestra radioactiva. Rutherford y Soddy establecieron experimentalmente a principios del siglo XX que la actividad de una muestra disminuye de forma exponencial con el tiempo. Desde un punto de vista mecanocuántico esto tiene sencilla justificación, por que se deriva de la existencia de una probabilidad fundamental de transición por unidad de tiempo para cada núcleo, lo cual implica a su vez que la probabilidad de que un átomo se desintegra de forma independiente de los demás, el número de desintegraciones por unidad de tiempo sigue una distribución de Poisson²⁰. Es decir, la probabilidad de observar n desintegraciones en n intervalo de tiempo Δt viene dada por la siguiente expresión:

$$P(n, \Delta t) = \frac{m^n}{n!} \exp(-m) \quad (2.4.2)$$

donde m es el número promedio de desintegraciones por segundo en el período Δt . La desviación de esta distribución es $\sigma = \sqrt{m}$.

2.4.1. Sustancia sin ramificación

De las condiciones discutidas en el párrafo anterior resulta sencillo deducir la evolución exponencial de la población de una sustancia radioactiva. Denotando por $N(t)$ el número de núcleos de la muestra en función del tiempo:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.4.3)$$

donde λ es la **constante de desintegración**. Definimos como **actividad** de una muestra como

¹⁹Algo que parece evidente hoy en día estaba lejos de serlo para los descubridores de la radiactividad. Durante varios años no se tuvo claro que los fenómenos radioactivos son procesos que afectan a cada átomo individualmente.

²⁰En realidad es una distribución binomial que en el límite de un número muy elevado de núcleos tiende a una distribución de Poisson. Supongamos que una muestra con N núcleos radioactivos, cada uno con probabilidad p de desintegrarse por unidad de tiempo Δt . Queremos calcular la probabilidad de que en el intervalo de tiempo Δt se desintegren n núcleos. Si las desintegraciones son realmente independientes entre sí podremos escribir:

$$P_n^N(\Delta T) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n} = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \quad (2.4.1)$$

En el límite $N \rightarrow \infty$ manteniéndose $Np = m$ constante, la ecuación anterior tiende a la distribución de Poisson.

$$A(t) = \lambda N(t) \quad (2.4.4)$$

Son datos de interés el valor medio del tiempo de desintegración τ llamado **vida media**, y el tiempo en que tarda una muestra en reducirse a la mitad $t_{1/2}$ llamado **período de semidesintegración**. Ambos se calculan como:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (2.4.5)$$

En el sistema internacional la unidad de medida de la actividad es el **Becquerelio (Bq)**. El **Curio (Ci)** también se usa. Originalmente se definió como la actividad de un gramo de radio ^{226}Ra pero hoy en día se define como $1\text{Ci} = 3,7 \times 10^{10}\text{Bq}$. La actividad de una muestra radioactiva indica únicamente el número de desintegraciones que se producen por segundo. Las fuentes más radiactivas tienen una actividad de microcurios μCi . Las ecuaciones para una población de núcleos radioactivos que se desintegran de un modo son muy sencillas. Suponiendo que la desintegración es $X \rightarrow Y$, tenemos que las ecuaciones diferenciales que rigen la desintegración:

$$\frac{dN_X(t)}{dt} = -\lambda N_x \quad \frac{dN_Y(t)}{dt} = \lambda N_x \quad (2.4.6)$$

de tal modo que su solución es:

$$N_X(t) = N_X(0)e^{-\lambda t} \quad (2.4.7)$$

$$N_Y(t) = N_X(0)(1 - e^{-\lambda t}) + N_Y(0) \quad (2.4.8)$$

donde suponemos que Y es estable, esto es, no se desintegra en otra sustancia.

2.4.2. Ramificación. Constantes de desintegración parciales.

Supongamos que los núcleos de una muestra pueden desintegrarse siguiendo dos mecanismos o modos alternativos (por ejemplo la desintegración α y β). A cada uno de estos modos le corresponde una constante de desintegración diferente, de tal modo que la ecuación diferencial será:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda_a N(t) - \lambda_b N(t) = -\lambda N(t) \quad (2.4.9)$$

donde $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$.

2.4.3. Varias sustancias. Cadenas radiactivas naturales.

Es frecuente que el producto de desintegración de un núcleo radioactivo sea también radioactivo. Supongamos que en el instante inicial $t = 0$ tenemos k sustancias que forman una cadena radiactiva. Para calcular el número de átomos en un instante posterior hemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 \\
\frac{dN_2}{dt} &= -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 \\
\frac{dN_3}{dt} &= -\lambda_3 N_3 + \lambda_2 N_2 \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \\
\frac{dN_k}{dt} &= -\lambda_k N_k + \lambda_{k-1} N_{k-1}
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Lógicamente en función de las condiciones iniciales obtendremos una solución u otra. Una de las mas preeminentes es la de suponer que tan solo la sustancia 1 se halla presente al principio. La solución general con estas condiciones viene dada por las **ecuaciones de Bateman**. Por ejemplo para 3 sustancias, tendríamos que:

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\
N_2(t) &= N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \\
N_3(t) &= N_1(0)\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right)
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Si por ejemplo el núcleo 3 fuera estable, de tal modo que la cadena fuera $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, con suponer que $\lambda_3 = 0$ en la ecuación anterior sería suficiente:

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\
N_2(t) &= N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) + N_2(0)e^{-\lambda_2 t} \\
N_3(t) &= N_1(0) \left[1 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t} \right) \right] + N_3(0)
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Capítulo 3

Reacciones Nucleares

Las reacciones nucleares más comunes tienen lugar cuando una partícula enérgica incide sobre un núcleo y éste se transforma: existándose, rompiéndose o simplemente absorbiendo la partícula incidente. Estas partículas incidentes son generalmente neutrones, protones, partículas α o fotones γ . Para que penetren dentro del núcleo sobre el que inciden es necesario que lleven cierta energía. En la Tierra esa energía se puede conseguir con aceleradores o reactores nucleares, y también a partir de fuentes naturales radiactivas. Las reacciones nucleares permiten el estudio de las interacciones que gobiernan el mundo subnuclear y, por otro lado, proporcionan la mayor parte de los datos tabulados sobre las propiedades nucleares. Estas dos cosas, están obviamente relacionadas, porque sólo es posible entender las propiedades de los núcleos, si se posee al mismo tiempo una buena comprensión de las interacciones nucleares.

3.1. Tipos de reacciones

Representamos una reacción nuclear típica de las siguientes dos maneras equivalentes:

$$a + A \longrightarrow B + b \qquad A(a, b)B \qquad (3.1.1)$$

donde a es el proyectil o partícula acelerada que se hace incidir sobre el núcleo blanco, A , en reposo en el sistema laboratorio. De las partículas en el segundo miembro de la reacción, B suele ser un núcleo pesado que no abandona el material del blanco, y b una partícula para referirse a un conjunto de reacciones del mismo tipo. Así diríamos reacciones (α, n) o (n, γ) , por ejemplo. Hay muchas maneras de clasificar las reacciones nucleares. He aquí unas cuantas:

- Se suele hablar de una **reacción de dispersión** (*scattering process*) cuando las partículas iniciales y finales son las mismas¹. La dispersión puede ser **elástica** si las partículas o núcleos B y b se encuentran en su estado fundamental, o **inelástica** si alguna de las dos queda en un estado excitado, que posteriormente se suele desexcitar por emisión gamma. En una dispersión elástica la energía cinética se conserva ($Q = 0$) y simplemente se redistribuye entre las partículas interaccionantes.
- Si las partículas a y b son la misma, y además tenemos otro nucleón en el estado final (3 partículas como productos) se suele denominar una **reacción knockout**.

¹En física de partículas de altas energías se usa el término *scattering* de un modo más general, no sólo para referirse a reacciones en las que las partículas iniciales coinciden con las finales. En el *deep inelastic scattering* por ejemplo, la energía del proyectil es tan alta que se producen muchas partículas en el estado final

- Tenemos una **reacciones de transferencia** (*transfer reaction*) cuando se transfieren uno o varios nucleones entre el proyectil y el blanco.

Se puede hacer una clasificación de las reacciones atendiendo al mecanismo por el que proceden, aunque es necesario advertir que la división entre ellas no es estricta, y que una misma reacción puede proceder de varias anteriores:

- En las **reacciones directas** sólo unos cuantos nucleones intervienen en la reacción. Las reacciones de transferencia antes citadas pertenecerían a este grupo.
- En las **reacciones de núcleo compuesto** el proyectil y el núcleo blanco llegan a compartir brevemente toda su energía en un único modelo compuesto antes de emitir, por ejemplo, el nucleón expulsado. Una lejana analogía de la emisión nuclear en un núcleo compuesto podría ser la evaporación de una molécula de la superficie de un líquido caliente.
- Las reacciones que proceden a través de **resonancias** estarían en un punto intermedio a los dos extremos anteriores. Se llega a formar un estado *cuasi-ligado* antes de que se emita la partícula expulsada.

3.2. Leyes de conservación

3.2.1. Conservación de la carga eléctrica y el número bariónico

Aunque veremos en un capítulo posterior estas leyes de conservación con algo más de detalle, conviene mencionarlas ya aquí. La carga eléctrica total de las partículas iniciales de la reacción es siempre igual a la de las partículas finales. La **conservación de la carga eléctrica** es una ley *muy fundamental* en nuestro entendimiento actual de la física, al mismo nivel que la ley de conservación de la energía.

Si asignamos a cada barión² una unidad positiva de *número bariónico* y a cada antibarión una unidad negativa, podemos formular una ley de **conservación del número de bariónico** en cualquier reacción diciendo que la suma de números bariónicos para las partículas iniciales debe coincidir con la misma suma para las partículas finales. Obsérvese que el proceso



viola la ley de conservación del número bariónico, y desde luego no se observa. En otras palabras: el átomo de hidrógeno es estable. En reacciones ordinarias en las que la energía no es suficiente para la creación de antipartículas, esta ley se reduce a la **conservación del número total de nucleones**. En reacciones simples esto quiere decir que el número másico A se conserva.

3.2.2. Conservación de la energía y del momento lineal

Las interacciones nucleares tienen lugar a distancia mucho más pequeñas que la separación típica entre los núcleos de un material ordinario, por eso se puede considerar a las partículas interaccionantes en una reacción nuclear como un sistema aislado y aplicar la ley

²Un barión es un hadrón (partícula sensible a la interacción fuerte) con espín semientero. Los bariones más ligeros son los familiares protón y neutrón.

de conservación de la energía total y del momento lineal total. De acuerdo con la notación expresada en (3.1.1) escribimos la **conservación de la energía**

$$T_a + m_a c^2 + T_A + m_A c^2 = T_b + m_b c^2 + T_B + m_B c^2 \quad (3.2.2)$$

tal que $E_A = T_A + m_A c^2$... El valor Q del proceso o de la reacción se define como la diferencia entre la energía cinética inicial y final

$$Q \equiv T_B + T_b - T_A - T_a = (m_A + m_a - m_B - m_b) c^2 \quad (3.2.3)$$

Si, como es habitual, estamos analizando un experimento en el que el núcleo blanco se encuentra en reposo en el sistema laboratorio ($T_A = 0$), entonces tenemos que $Q = T_B + T_b - T_a$. La energía cinética del núcleo T_B es difícil de medir, y son las energías del proyectil y la de la partícula emergente (T_a y T_b) las que suelen medirse. La De todos modos veremos que podemos encontrar una expresión para Q (ecuación ()) que no incluye la energía cinética.

3.2.3. Energía umbral de reacción

Si queremos conocer qué energía cinética, T_a , tenemos que comunicarle al proyectil, para alcanzar un nivel excitado concreto en el núcleo final B , resulta más sencillo realizar los cálculos en el sistema de referencia del centro de masas (CM).

3.2.4. Conservación del momento angular y de la paridad

El momento angular total de las partículas que interaccionan en una reacción nuclear se conserva, así como su proyección sobre una dirección seleccionada (usualmente el eje z , que se toma como el eje de la colisión). En una reacción del tipo



podemos denotar por $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_a$ el espín total de las partículas iniciales y $\mathbf{I}_f = \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_b$ el espín total de las partículas finales, ℓ_{Aa} el momento angular orbital que caracteriza el movimiento relativo de las partículas iniciales, y ℓ_{Bb} el correspondiente a las partículas finales. Con esta notación, la ley de conservación del momento angular total se escribe como

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_a + \ell_{Aa} = \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_b + \ell_{Bb} \quad (3.2.5)$$

Como es sabido, los espines nucleares (o de las partículas intervinientes), \mathbf{I}_i e \mathbf{I}_f pueden ser enteros o semienteros, mientras que los momentos angulares orbitales ℓ_{Aa} y ℓ_{Bb} deben ser enteros.

La paridad de la función de ondas que describe el movimiento relativo de las partículas A y a viene determinada por su momento angular orbital. La paridad global del sistema inicial será el producto de las paridades intrínsecas³ de las partículas (que a su vez pueden ser subsistemas compuestos) y la paridad de su movimiento relativo:

$$\pi_i = \pi_A \pi_a (-1)^{\ell_{Aa}} \quad (3.2.6)$$

³Más detalles sobre lo que es la paridad intrínseca puede encontrarse en la sección 6.1

Escribiríamos entonces la ley de conservación de la paridad Como

$$\pi_A \pi_a (-1)^{l_{Aa}} = \pi_B \pi_b (-1)^{l_{Bb}} \quad (3.2.7)$$

La conservación de la paridad en las reacciones nucleares no es estricta. Aunque podemos decir que la fuerza nuclear fuerte es la gran responsable de estos procesos, es necesario tener en cuenta que la fuerza nuclear débil también está presente e introducirá pequeños efectos de violación de la paridad. Ya veremos la aplicación concreta de estas leyes de conservación, aunque en realidad ya las hemos estado discutiendo para los distintos tipos de desintegraciones en los núcleos.

3.3. Dispersión y secciones eficaces

Lo que usualmente se mide en las reacciones nucleares es el momento de las partículas ligeras emitidas (y por lo tanto su energía cinética, supuesto que se conozca la identidad de la partícula) y su distribución angular. Esto permite observar la partícula emergente en un cierto elemento diferencial de ángulo sólido $d\sigma/d\Omega$ a veces también representada por $\sigma(\theta, \phi)$. Si estamos interesandos en encontrar a la partícula emergente no sólo a un cierto ángulo, sino también con una cierta energía, hablamos de la sección eficaz diferencial doble, $d^2\sigma/d\Omega dE$, pero usualmente no se pone de modo explícita esta dependencia con la energía porque se supone implícita a menos que se diga lo contrario. Integrando la sección eficaz diferencial sobre el ángulo sólido obtendríamos la sección eficaz diferencial total a una energía dada $d\sigma/dE$. Por último, si también integramos esta energía, obtendríamos la sección eficaz total absoluta σ_t , que representa la probabilidad de formar al núcleo B en el estado final (en reacciones del tipo $a + A \rightarrow B + b$).

Para ciertos estudios más detallados se suelen medir también secciones eficaces dependiendo de la orientación de los espines de las partículas emergentes. Esto, junto con la observación del espectro γ de desexcitación de los núcleos formados, permite acumular información para asignar espines y paridades a los estados de los núcleos bajo estudio.

3.3.1. Atenuación de un haz al atravesar un blanco

Una disposición experimental frecuente en física nuclear consiste en hacer incidir un haz de partículas sobre un blanco fijo para producir cierto tipo de reacción. Dada la probabilidad de interacción por unidad de longitud, podemos calcular en qué medida se atenuará el haz incidente al atravesar el blanco delgado ⁴ Denotemos por $1/\lambda$ la probabilidad de interacción de las partículas del haz por unidad de longitud en el material del blanco. Queremos calcular la probabilidad de que una partícula del haz atraviese un intervalo de longitud X en el blanco sin sufrir ninguna interacción. Para ello dividimos el intervalo X en una serie de intervalos infinitesimales cuyo tamaño podemos expresar como X/n siendo n un número suficientemente grandes. La probabilidad infinitesimal dP de que la partícula incidente logre atravesar el intervalo de longitud X/n será $dP = 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{X}{n}$, haciendo tender n a infinito al mismo tiempo que aplicamos n veces la fórmula anterior obtenemos:

$$dP = 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{X}{n} \quad P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \frac{X}{n} \right)^n = e^{-X/\lambda} \quad (3.3.1)$$

⁴Blanco delgado quiere decir que a cada núcleo del blanco está llegando aproximadamente el mismo flujo de partículas del haz. Si el blanco es demasiado grueso podría ocurrir que las partículas del haz fuesen completamente absorbidas en el interior del blanco, de modo que sobre los núcleos de la parte posterior de este último ya no incidiría ninguna partícula del haz.

Por lo tanto, si ϕ_0 es el flujo del haz incidente, representando el número de de partículas que en la unidad de tiempo atraviesan una unidad de área perpendicular a la dirección del haz, y ϕ es el flujo de salida (detrás) del blanco delgado de espesor X , deducimos que están relacionados por medio de la siguiente ecuación

$$\phi = \phi_0 e^{-X/\lambda} \quad (3.3.2)$$

λ representa el recorrido libre medio (*mean free path*) de las partículas del haz en el material del blanco⁵. Se puede expresar en términos de la sección eficaz de esta manera⁶:

REVISAR

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{N} \sigma_0 \frac{\rho N_A}{M_A} \sigma \quad (3.3.3)$$

donde \mathcal{N} es la densidad de átomos blanco (número de átomos por unidad de volumen), que puede expresarse como $\rho N_A / M_A$, siendo N_A el número de Avogadro, ρ la densidad del blanco y M_A su masa atómica (en unidades compatibles con las de ρ , por supuesto).

En lugar de utilizar el espesor del blanco, X , es habitual usar el *espesor másico*, que se define como $X_m = X\rho$, es decir, se trata de la densidad por unidad de superficie. De este modo tendremos

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{X\rho}{\lambda\rho} = \frac{X_m}{\lambda\rho} = \frac{X_m}{\rho} \mathcal{N} \sigma = \frac{X_m}{\rho} \frac{\rho N_A}{M_A} \sigma = \frac{X_m \mathcal{N} \sigma}{M_A} \quad (3.3.4)$$

También podríamos escribir $X/\lambda = X_m/\lambda_m$, siendo $\lambda_m = M_A/(N_A \sigma) = \lambda\rho$. Una de las aplicaciones de las reacciones nucleares inducidas por el hombre consiste en la creación de radioisótopos para aplicaciones médicas o industriales.

3.3.2. Dispersión de Coulomb

Cuando las partículas que intervienen en la reacción tienen carga eléctrica, se producirá siempre una dispersión del proyectil en el campo coulombiano del blanco: a esto se le denomina dispersión de Coulomb. En reacciones de partículas cargadas a baja energía el proceso dominante que tendrá lugar será la **dispersión elástica coulombiana** o dispersión de Rutherford, cuya sección eficaz hemos visto ya en otro capítulo:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E^2}{|\mathbf{q}c|^4} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(4E)^2 \sin^2(\theta/2)} \quad (3.3.5)$$

⁵Podemos comparar esto con la ley de exponencial de la desintegración radiactiva $N = N_0 e^{-t/\tau}$, donde τ es la vida media, que en el contexto actual equivaldría al recorrido libre medio, y t es el tiempo transcurrido (distancia temporal), que en el contexto actual equivaldría a distancia física recorrida. El inverso de τ es la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo, y ahora hablaríamos de la probabilidad de interacción por unidad de longitud espacial, no temporal.

⁶Supongamos que una partícula atraviesa una región cúbica de lado L en el blanco. Calculemos la probabilidad de que sufra alguna interacción en ese viaje. Supondremos que la trayectoria de la partícula es paralela a una de las caras en las posiciones de los núcleos, donde σ es obviamente la sección eficaz total de interacción con un núcleo. El área total cubierta por las secciones eficaces de todos los núcleos del cubo es $A_\sigma = \mathcal{N} L^3 \sigma$, mientras que el área total que el cubo presenta en la dirección perpendicular a la del avance de la partícula es $A_t = L^2$. el cociente entre ambas nos da la probabilidad de que la partícula interaccione al travesar el cubo $P_L = A_\sigma / A_t = \mathcal{N} L^3 \sigma / L^2$. La probabilidad de interacción por unidad de longitud es entonces $P = P_L / L = \mathcal{N} \sigma$

Obsérvese que esta sección eficaz decrece rápidamente con la energía del proyectil (E) y con ángulo de dispersión (θ). Cuando la energía sea suficientemente alta, podremos tener además una **dispersión inelástica coulombiana**, que también se llama excitación coulombiana. En este caso el núcleo final se encuentra en un estado que luego decae rápidamente, ente mediante la emisión de fotones γ .

3.3.3. Dispersión nuclear

En el caso de que el proyectil no tenga carga eléctrica (como en dispersión de neutrones), no será posible, obviamente, que exista dispersión coulombiana. Se produce entonces la denominada dispersión nuclear, que tiene lugar en el campo nuclear no coulombiano⁷ creado por el núcleo. Para partículas cargadas, aparte de la dispersión coulombiana podrá existir dispersión nuclear siempre que la energía del proyectil sea lo suficientemente alta como para vencer la barrera coulombiana del núcleo.

En una reacción de tipo $A + a \rightarrow B + b$, la medida directa de la cantidad de partículas b emergentes a través de un pequeño intervalo de ángulo sólido dado se hace, obviamente, en el sistema de referencia del laboratorio. Sin embargo, para comparar los resultados experimentales con las predicciones teóricas es necesario que los traslados al sistema de referencia del centro de masas de las partículas *entrantes* A, a . Resulta de especial utilidad, por ejemplo, graficar las llamadas **funciones de excitación** que muestran la dependencia de la sección eficaz $d\sigma/d\Omega$, respecto a la energía cinética del canal entrante en el sistema centro de masas, (que en la aproximación no relativista es $m_A T_a / (m_A + m_a)$), para la observación de una partícula concreta b dispersada en cierto $d\Omega$.

La **distribución angular** de la emisión de la partícula seleccionada b en el sistema centro de masas con respecto a la dirección de incidencia contiene información sobre el cambio de momento angular y paridad de los estados inicial y final de los núcleos, puesto que el momento angular y la paridad se conservan en reacciones nucleares gobernadas por la interacción fuerte y la electromagnética.

3.4. Mecanismos de reacciones

3.5. Fisión

3.6. Fusión

La mayor dificultad para lograr la fusión nuclear a gran escala consiste en mantener el material fusible confinado a altas temperaturas durante el tiempo suficiente. Hasta el momento se está investigando en dos métodos: el confinamiento magnético y el confinamiento inercial. En el primero se hace circular plasma caliente de núcleos ^2H y ^3H en una región confinada por campos electromagnéticos. En el segundo se inyecta luz láser en una pequeña región que contiene el material fusible. En cualquier caso, el aprovechamiento comercial de la energía de fusión parece todavía una posibilidad lejana.

3.7. Apéndices

⁷La fuerza nuclear fuerte es la interacción fundamental entre los quarks, y la que de alguna forma mantiene unidos a los nucleones en el núcleo y crea ese campo nuclear no coulombiano con el que interaccionan los proyectiles masivos sin carga eléctrica.

Capítulo 4

Estructura nuclear

Capítulo 5

La interacción fuerte nucleón-nucleón

5.1. Partículas elementales: interacciones y propiedades

Capítulo 6

Trasformaciones de simetría y leyes de conservación

6.1. Paridad \mathcal{P}

Capítulo 7

El modelo de quarks y el modelo estándar

Mejoras para el futuro

- Mejorar la parte de sección eficaz: captura...
- Añadir boletín de ejercicios