Astrofísica

Daniel Vázquez Lago

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Índice general

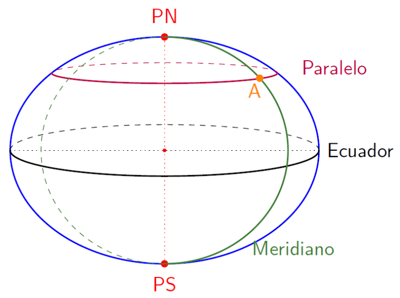
Capítulo 1

Geodesia

1.1. Definiciones básicas

Como sabemos la tierra tiene una forma de una esfera achatada, tomando la forma de un elipsoide de revolución. En palabras de Isaac Newton: «Una forma de equilibrio que tiene una masa bajo el influjo de las leyes de gravitación y girando en torno a su eje es la de un esferoide aplastado en sus polos». Un *esferoide aplastado en sus polos* es básicamente un elipsoide de revolución. Definimos pues:

- **Polos:** puntos de corte entre el eje menor de la elipse y elipsoide. Llamamos polo norte (PN) al corte superior y polo sur (PS) al corte superior.
- **Ecuador terrestre:** línea circular correspondiente al corte entre el plano perpendicular al eje menor que pasa por el centro del elipsoide y este.

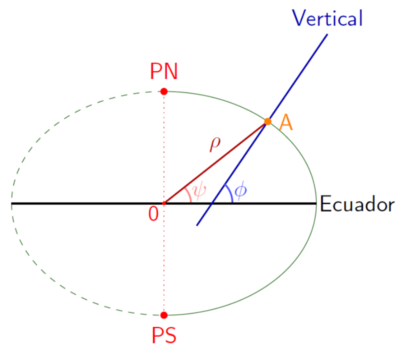


- **Paralelos:** líneas circulares correspondientes a los cortes entre los planos paralelos al ecuador (paralelo cero) y el elipsoide.
- **Meridianos:** líneas elipsoidales determinadas por el corte entre el elipsoide y el hazde planos que define el eje menor. Se considera *meridiano cero* al que pasa por Greenwich.
- **Vertical de lugar:** es la línea normal al elipsoide en un punto dado.

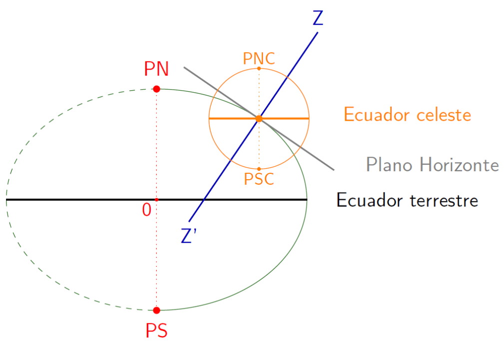
Al conjunto de variables que permiten describir cualquier punto de la Tierra se le llaman *coordenadas terrestres*, y existen dos tipos de coordenadas terrestres, que se definen en función de la *vertical de lugar*

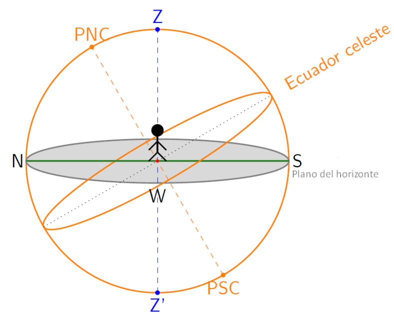
- **Coordenadas geográficas:** son dos variables angulares (ϕ, λ), que se definen como
    - **Latitud geográfica** ϕ. Toma valores de $90°$ a $-90°$. Para un punto A cualquiera el ángulo ϕ es el comprendido entre la vertical de lugar y el ecuador.
    - **Longitud geográfica** λ. Toma valores entre $180°$ y $-180°$. Para un punto A cualquiera el ángulo λ se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.

- **Coordenadas geocéntricas**: consta de tres variables (ρ, ψ, λ), dos angulares y una distancia. Estas son:
    - **Radio vector** ρ. Distancia entre el centro de la tierra (punto 0) y el punto A.
    - **Latitud geocéntrica** ψ. Toma valores de $90°$ a $-90°$. Para un punto A cualquiera el ángulo ψ es el comprendido entre el radio y el ecuador.
    - **Longitud geocéntrica** λ. Se define igual que la longitud geográfica. Toma valores entre $180°$ y $-180°$. Para un punto A cualquiera el ángulo λ se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.



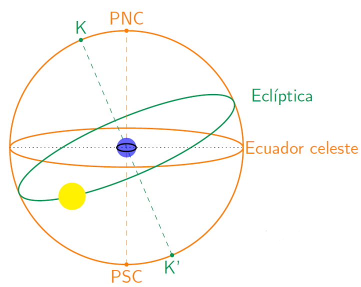
Otra definición importante es la del **plano del horizonte**, que es el plano perpendicular a la vertical de lugar en el punto A. El plano horizonte pertenece a la llamada **esfera celeste topocéntrica**, que es aquella cuyo centro es el observador. En esta esfera, el plano horizonte define lo que una persona diría que es arriba y abajo. La esfera celeste tropocéntrica tiene también un polo norte celeste (PNC) y un polo sur celeste (PSC) paralelo con el eje del mundo, pero no necesariamente con el «arriba» del observador. Al punto Z se le llama **cénit** y al punto Z' se le llama **nádir**.





Como podemos ver el ángulo entre la línea PNC y Z en la esfera topocéntrica es igual a $90° - \phi$, y por tanto independiente al meridiano en el que nos encontremos, solo depende del paralelo en el que se encuentre el punto del observador. A dicho ángulo se le llama **colatitud**.

El **plano de la eclíptica** es el plano que contiene la órbita de la Tierra alrededor del Sol, y está inclinado con respecto al ecuador celeste una cantidad llamada *oblicuidad de la eclíptica* $\varepsilon = 20°26'29''$. En la esfera celeste geocéntrica, cuyo centro es la Tierra, es el Sol quien aparenta moverse a nuestro alrededor. Llamamos **eclíptica** a la intersección del plano de la eclíptica con la esfera celesta.



1.2. Coordenadas astronómicas

Las coordenadas astronómicas nos sirven para designar la posición de un astro en la bóveda celeste. Todos los sistemas de coordenadas que se usan en astronomía son sistemas esféricos/polares, designando cualquier punto de la esfera celeste con dos ángulos. Toda diferencia entre dos sistemas de coordenadas distintos radica en 4 puntos: la definición de lo que llamamos *plano fundamental*, su *eje x*, *el centro de la esfera elegido*, y si el sistema de coordenadas es *dextrógiro* o *levógiro*. Así, tenemos dos clasificaciones:

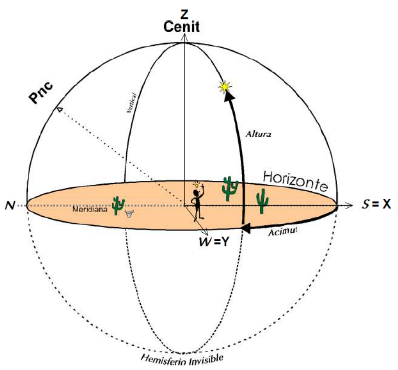
- En función del centro de la esfera:
  - **Topocéntrico:** el centro es el observador.
  - **Geocéntrico:** el centro es la tierra.
  - **Helicéntrico:** el centro es el sol.
- En función del plano fundamental:
  - **Horizontales:** en este caso el plano fundamental es el plano del hoirzonte..
  - **Ecuatoriales:** el plano ecuatorial es el plano fundamental.
  - **Eclíptica:** el plano de la eclíptica es el plano fundamental.

Un sistema es **levógiro** cuando el ángulo azimutal (el que manda en el plano fundamental) sigue el sentido antihorario mirando en el sentido del eje X, mientras que es **dextrógiro** si sigue en el sentido horario. La definición del eje X depende del sistema, y será definida en cada apartado.

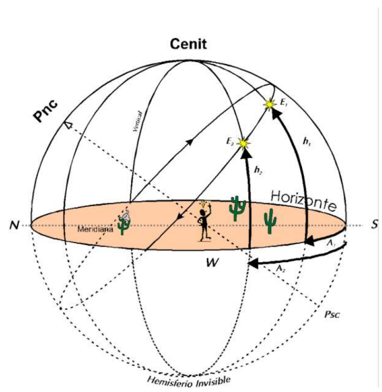
1.2.1. Coordenadas Horizontales

Las coordenadas horizontales usan el horizonte como plano fundamental, es un tipo de sistema levógiro y el eje X para cualquier observador es aquel que apunta al sur (hemisferio norte) o que apunta al norte (hemisferio sur). Las coordenadas son:

- La **altura** h. Tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano horizonte y la línea que conecta el observador y el punto. La *distancia cenital* se define como el ángulo entre el vector normal del plano y la línea que conecta el observador y el punto.
- El **acimut** A se define como el ángulo entre el eje X y la proyección en el plano fundamental del la línea que conecta el observador y el punto, creciendo en el sentido levógiro.



(a) Coordenadas horizontales.



(b) Cambio de posición del sol a lo largo del día.

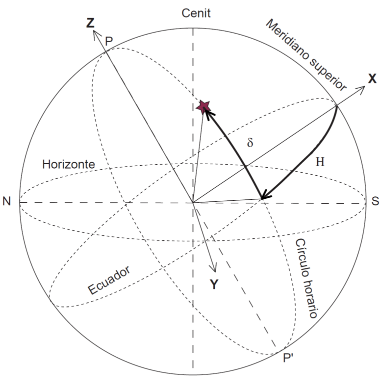
Este sistema es un sistema local, es decir, los astros dependen del lugar del punto en la tierra desde el que se está observando. Además, también varían en función del momento del día. Esto es evidente si pensamos por ejemplo en el sol: para diferentes horas del día se encontrará a diferente altura (y en diferente acimutal).

1.2.2. Coordenadas ecuatoriales horarias

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje z entonces el eje del mundo. Es un sistema levógiro, que define el eje X como aquel que apunta hacia el sur (hemisferio norte) o que apunta hacia el norte (hemisferio sur), pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que la altura para las coordenadas horizontales pero ahora usando como referencia el plano ecuatorial. Tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.

- Definimos el **ángulo horario** H como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

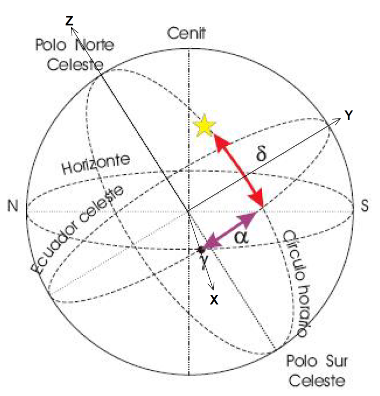


1.2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje z entonces el eje del mundo. Es un sistema dextrógiro, que define el eje X como aquella recta del plano ecuatorial que se interseca con la eclíptica. También se le llama *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano ecuatorial y el plano eclíptico coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica ε). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que en el sistema ecuatorial horario, tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.

- Definimos el **ascensión recta** α como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.



1.2.4. Coordenadas eclípticas

Las coordenadas eclípticas (λ, β) son exactamente iguales que las coordendas ecuatorilaes absolutas pero usando el plano eclíptico como plano fundamental. El eje x entre ambos es el mismo, por lo que la única diferencia entre ambos sistemas es una rotación ε (ángulo entre el plano eclíptico y el plano ecuatorial). Es un sistema dextrógiro, que define el eje X como la *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano eclíptico y el plano eclíptico coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica ε). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que en el sistema eclíptico horario, tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano eclíptico y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.

- Definimos el **ascensión recta** λ como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano eclíptico de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

Aquí tenemos que hablar de las coordenadas horizontales y horarias de la esfera celeste. Para que sirven cada una, como se definen. Relaciones entre ellas.

Esfera celeste, en este orden: coordenadas eclípticas, horizontales, absolutas. Para que sirve cada uno, cuales son los ángulos de referencia. En las ecuatoriales hay que hablar de los ángulos del equinocio y solscitio del sol. En lass horizontales también. Como se cambia de un sistema de coordenadas a otra. Matrices de rotación. Tiempo sideral. Diferencia entre levógiro y dextrógiro.

1.3. Ejercicios

Ejercicio 1.1:

Prueba que el azimut y el ángulo horario de un astro en sus puntos de orto y ocaso, A_0 y H_0, para un observador a una latitud ϕ, satisfacen la siguientes relaciones:

$$\cos(A_0) = -\frac{\sin(\delta)}{\cos(\phi)} \qquad \cos(H_0) = -\tan\delta\tan\phi \tag{1.3.1}$$

Solución en la página 10

Ejercicio 1.2:

¿Cómo relacionarías la información proporcionada por H_0 con el tiempo que un astro permanece por encima del horizonte?

Solución en la página 11

Ejercicio 1.3:

¿Cuántas horas máximas y mínimas del Sol por encima del horizonte a lo largo de un día podemos tener en Santiago de Compostela? Dato: $\phi = 42°, 52', 40''$.

Solución en la página 11

Ejercicio 1.4:

Las coordenadas ecuatoriales absolutas de una estrella son $\alpha = 3^h 45^m 43^s$, y $\delta = 20°8'27''$. ¿Podremos observarla desde la Facultad de Matemáticas ($\phi = 42°52'26''$) en el instante en el que el punto vernal está en la dirección norte? **[Solución:** Dado que $h < 0°$ ($h = -8°24'29''$), la estrella no será visible.]

Solución en la página 11

Ejercicio 1.5:

Un cometa tiene coordenadas ecuatoriales absolutas $\alpha = 10^h 3^m 57^s$ y $\delta = 8°24'54''$. ¿Cuáles son sus coordenadas eclípticas? **[Solución:** $\lambda = 150°3'19''$ $\beta = -3°14'31''$.]

Solución en la página 12

1.4. Soluciones

Solución del ejercicio 1.1 en la página 9:

Recordamos que el orto y ocaso son los lugares del plano horizonte donde empieza a ser visible y deja de ser visible. Con respecto las coordenadas horizontales, la altura es cero $h = 0°$, o lo que es lo mismo $z = 90°$. Ahora tenemos que usar las coordenadas de Bessel, que relaciona las coordenadas horizonatles (A,h) y horarias (H, δ):

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ \cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

de lo cual se deduce que

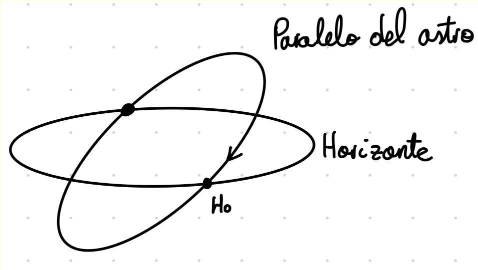
$$\sin\delta = -\cos(\phi)\cos A_0 \Rightarrow \cos(A_0) = -\frac{\sin\delta}{\cos\phi} \tag{1.4.2}$$

Y también se deduce que

$$\cos\delta\cos H_0 = \sin\phi\cos A_0 \Rightarrow \cos(H_0) = \frac{\sin\phi}{\cos\delta}\left(-\frac{\sin\delta}{\cos\phi}\right) \Rightarrow \cos(H_0) = -\tan\delta\tan\phi \tag{1.4.3}$$

Solución del ejercicio 1.2 en la página 9:

El tiempo que un astro está encima del horizonte corresponde a $2H_0$. Puso $H_{\text{orto}} = -H_{\text{ocaso}}$.



Solución del ejercicio 1.3 en la página 10:

El máximo de horas ocurre cuando estamos el solsticio de verano. En este caso sabemos que $\delta = \epsilon$. Usando las ecuaicones del primer ejercicio:

$$H_0 = 7^h34^m57^s \Rightarrow 2H_0 = 15^h9^m54^s \tag{1.4.4}$$

El mínimo de horas del sol es en el solsticio de invierno. En este caso

$$\delta = -\varepsilon \Rightarrow 2H_0 = 8^h50^m4^s \tag{1.4.5}$$

Solución del ejercicio 1.4 en la página 10:

Nos dan las coordenadas ecuatoriales absolutas. La condición para no ver un astro desde un punto de la tierra es que dicho astro, en las coordenadas horizontales, verifique que su altura tiene ángulos negativos ($h < 0°$). Consecuentemente solo tenemos que calcular h a partir de α y δ. ¿Cómo lo hacemos?

Primero calculamos el valor de las coordenadas ecuatoriales horarias. Como sabemos $\delta_{\text{horaria}} = \delta_{\text{absolutas}}$ y $\alpha + H = \theta$, siendo θ la posición del punto vernáculo en las horizontales. Cuando nos dicen que el punto vernáculo apunta al norte, nos están dado el dato de θ. Como x en las horarias apunta al sur, $\theta = 180°$. Así pues:

$$H = 12^h - 3^h45^m43^s = 8^h14^m17^s \approx 120.24° \qquad \delta = 20°8'27'' \tag{1.4.6}$$

Ahora solo tenemos que transformar las coordenadas ecuatoriales horarias en las horizontales. Esto también es sencillo, ya que es rotar un ϕ los ejes x y z, tal que:

$$\begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & -\cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta \sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1.4.7}$$

Y ya podríamos obtener el valor de h, solo faltando despejar. Teniendo en cuenta que $\phi = 42°52'26''$. Para calcular h (que es lo único que necesitamos en realidad) despejamos:

$$\sin h = \cos\phi\cos\delta\cos H + \sin\phi\sin\delta \tag{1.4.8}$$

que es:

$$\sin h = -0.1125 \quad \Longrightarrow \quad h = -6.46° \tag{1.4.9}$$

La solución correcta es $h = -8°24'29''$. La diferencia es posiblemente culpa de los decimales, porque no hemos convertido correctamente los segundos y minutos.

Solución del ejercicio 1.5 en la página 10:

Para pasar de las coordenadas ecuatoriales absolutas a las coordenadas eclípticas solo tenemos que hacer una rotación, ya que el eje x es el mismo (punto vernal). Así pues, solo tenemos que aplicar la matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon & \sin\epsilon \\ 0 & -\sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1.4.10}$$

Recordamos que $\varepsilon = 20°26'29''$, $\alpha = 10^h 3^m 57^s$ y $\delta = 8°24'54''$. Primero obtenemos β:

$$\sin\beta = -\sin\epsilon\cos\delta\sin\alpha + \cos\epsilon\sin\delta \tag{1.4.11}$$

$$\sin\beta = 0.05986 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 3.432° \tag{1.4.12}$$

Luego solo tenemos que despejar λ. Sabiendo que

$$\cos\lambda = \frac{\cos\delta\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\lambda = -0.853° \Rightarrow \lambda = 150.19° \tag{1.4.13}$$

Siendo la solución correcta $\lambda = 150°3'19''$ $\beta = -3°14'31''$.

Capítulo 2

Mecánica Celeste

2.1. Introducción

La mecánica celeste es la rama de la astronomía que se ocupa del movimiento de los objetos celestes, como planetas, satélites y cometas.

Consideremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con vectores de posción $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ aislados en un sistema inercial ccon origen en su centro de masas $\mathbf{r}_c$.

El sistema está compuesto por 6 EDOs no lineales, autónomas y de 2º orden (que sean autónomas significa que no dependen del tiempo explícitamente).

Estudiamos el movimiento el movimiento relativo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Así podemos reescribir el sistema como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{2.1.1}$$

donde μ es la **masa reducida** definida por $\mu = G(m_1 + m_2)$. El sistema así escrito está compeusto por 3 EDOs no lineales y autónomas de segundo orden, que podeos reescribir como un sistema de 6 EDOs de orden 1:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \qquad \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{2.1.2}$$

La solución del problema de Kepler es el movimiento que satisface la ecuación anterior $\mathbf{r}(t)$., y también satisfará $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$. Encontramos tres canti dades conervadas: momento angular, energía y vector excéntrico.

- Definimos el **momento angular** $\mathbf{c} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$.
- La **energía** se define como $h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$. Se define como la energía por unidad de masas, ya que al pasar al problema de masa reducida aparece así.
- El **vector excéntrico** se define como $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}\mathbf{v} \times \mathbf{c} - \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Hablar del vector excéntrico, por que se usa este en vez de el momento lineal en el problema de dos cuerpos, cual es el significado físico, de donde viene, hablar de la sobredeterminación de los momentos angulares

En lugar de utilizar el momento lineal total **P**, el momento angular **L** y la energía E, es más conveniente emplear **L**, E y el vector excéntrico **e** para describir las órbitas en el problema de dos cuerpos. Esta elección se debe a que estas cantidades conservadas permiten una parametrización geométrica más clara de la órbita.

- El momento angular **L** define el **plano orbital**.
- El vector excéntrico **e** determina la **orientación dentro del plano**.
- La energía E fija el **tamaño de la órbita**.

La ecuación de la órbita en coordenadas polares está dada por:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \tag{2.1.3}$$

donde p es el semilatus rectum de la trayectoria, dado por:

$$p = \frac{L^2}{\mu GM}. \tag{2.1.4}$$

Esta parametrización facilita el análisis de las órbitas en términos de sus propiedades geométricas y permite obtener soluciones explícitas del problema de Kepler de manera más intuitiva.

Hizo todo el cálculo sobre como obtener **e** (demostración de que se conserva), como obtener e y su relación con la energía (fácil, pero zzz).

2.2. Solución general y orbitas cónicas

Llagamos a las solución general:

$$r(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos(f)} \tag{2.2.1}$$

donde $f \in [0, 2\pi)$ es ángulo de los vectores **e** y **r**. Siendo l el semilatus rectum, que es la distancia entre el foco de la elíptica y la elíptica en la recta perpedicular a la daigonal mayor. La ecuación polar de una sección cónica es

$$r(f) = \frac{l}{1 + e\cos(f)} \tag{2.2.2}$$

En función de e tendremos varios tipos de movimiento:

- $e = 0$. Movimiento circular
- $0 < e < 1$. Movimiento elíptico.
- $e = 1$. Movimiento parabólico.
- $1 < e$. Movimiento hiperbólico.

Las soluciones al problema de kepler son movimietos a lo largo de cónicas. El tipo de cónica lo determina e, y también h, en virtud de la relación

$$e^2 = 1 + \frac{2}{\mu^2} c^2 h \tag{2.2.3}$$

Podemos ver aquí que e es mayor, menor o igual que uno depende únicamente de si h es positivo, negativo o cero, por lo que la energía también nos permite calcular que tipo de movimiento tiene nuestra órbita.

Insertar dibujo sobre la semilaptus rectum. Tambíen hizo un dibujo, donde el eje x es la energía, el eje y el momento angular, y reprsento cual es el tipo de órbita en función de la región de dicho espacio de fases (elíptico, hiperbólico, parabólico, colisión...)

2.3. Leyes de Kepler

Hay 3 leyes de Kepler:

- Ley de las órbitas: los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos de la elipse.
- Ley de las áreas: la línea que conecta un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- Ley de los períodos. El cuadrado del período orital de un planeta T es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \tag{2.3.1}$$

  donde a es el semieje mayor de la elipse, que es igual al promedio entre las distancias y en afelio r_a.

Definimos el **perhelio** como $f = 0$, el punto mas cercano del centro de la órbita, y el **afelio** como $f = \pi$, el punto más alejado del centro de la órbita. Asi, tenemos que

$$r_{\text{perhelio}} = \frac{c^2/\mu}{1+e} = a(1-e) \qquad r_{\text{afelio}} = \frac{c^2/\mu}{1-e} = a(1+e) \tag{2.3.2}$$

Definimos $a = r_p + r - a/2$. Para otro tipo de órbitas se define periapsis y apoapsis como los puntos

2.4. Elementos orbitales

Son 6 parámetros que definen la órbita de un cuerpo celeste con respecto a un plano de referencia, así como la posición del cuerpo en la órbita. Tres de ellos ya los hemos estudiado: semieje mayor a (distancia media del cuerpo al foco), excentricidad e (medida de la forma de la órbita) y anomalía verdadera f (posición del cuerpo en su órbita en un momento dado). En algunas ocasiones, en lugar de la anomalía verdadera, se emplea el tiempo de paso por el periastro (τ), la anomalía media (M) o la longitud media (L).

Se está centrnado bastante en las características de la anomalía media (dice que varía a velocidad constante). Hablar de las demas cosas, significado, uso, razón. (Video de true anomaly vs mean anomaly), así vemos la relación entre ellas.

Además tenemos los siguientes elementos orbitales. Se define $\mathbf{N}$ como el vector nodo ascendente tal que $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{c}$. Apunta en dirección al nodo ascentende y está contenido en ambos planos.

- Inclinación i. ángulo entre el plano de la órbita y el plano de referencia.

$$\cos(i) = \frac{\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{c}||\hat{\mathbf{z}}|} \tag{2.4.1}$$

- Longitud del nodo ascendente Ω. Ángulo medido en plano de referencia desde la dirección referencia hasta la dirección del modo ascendente.

$$\cos(\Omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{N}||\hat{\mathbf{x}}|} \tag{2.4.2}$$

- Argumento del periastro ω. (Periastro y periapsis es el mismo concepto, pero la segunda para conicas generales y el primero para cuando implican astros).

$$\cos(\omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{N}||\mathbf{e}|} \tag{2.4.3}$$

Resumen los elementos i, Ω de terminan el plano de la órbita con respecto al de referencia., mientras qeu e, ω y a/c (a si $e < 1$ o c si $e \geq 1$) determiann la forma y orientación de la órbita en el plano de órbita El elemento f determinar la posición del campo en su órbita.

2.5. Ejercicios

Ejercicio 2.1:

Solución en la página 16

Ejercicio 2.2:

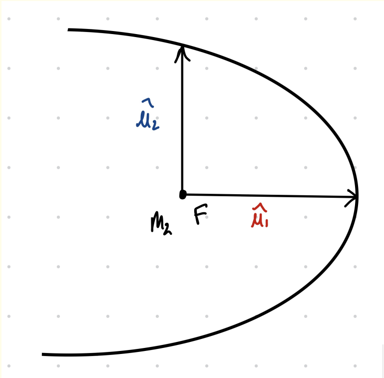
Hola

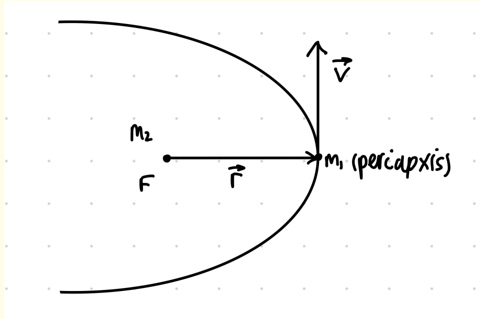
Solución en la página 17

2.6. Soluciones

Solución del ejercicio 2.1 en la página 16:

Tenemos que demostrar que el vector excentricidad lleva el sentido hacia la periapsis.





Tenemos que $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{u}}_3$ donde $\hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{u}}_1 \wedge \hat{\mathbf{u}}_2$. Supongo que $m_2 \gg m_1$. Entonces:

$$\mathbf{r}_c \simeq \mathbf{r}_2 = 0 \qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \qquad \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_2 \tag{2.6.1}$$

Y por tanto $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$. Ahora hacemos que

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_2 & \hat{\mathbf{u}}_3 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = vc\hat{\mathbf{u}}_1 \tag{2.6.2}$$

Y por tanto:

$$\mathbf{e} = \frac{vc}{\mu}\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1 \Rightarrow \mathbf{e} = \left[\frac{vc}{\mu} - 1\right]\hat{\mathbf{u}}_1 \tag{2.6.3}$$

quedando demostrado que lleva el sentido de la periapsis.

Solución del ejercicio 2.2 en la página 16:

Tenemos la ecuación para conocer el ángulo:

$$r(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos(f)} \tag{2.6.4}$$

Cuando $e = 1$ tenemos perihelio $f = 0$. El valor de $r_p = c^2/2\mu$. El valor de la masa reducida

$$\mu = G(m_{\text{sol}} + m_{\text{cometa}}) \simeq Gm_{\text{sol}} = 2.95 \cdot 10^{-4}\text{ua}^3/d$$

(ddespreciamos la masa del cometa).Ahora calculamos

$$c = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = 0.015ua^2/ \tag{2.6.5}$$

de lo que puedo obtener el valor de r_p:

$$r_p = \frac{c^2}{2\mu} = 0.379\text{ua} \tag{2.6.6}$$