PROPAGACIÓN DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO NUN CONDUTOR

1. Un pouco de teoría

Nesta práctica estudaremos como se propaga o campo electromagnético a través dun condutor. Ao contrario do que viñemos considerando nas prácticas anteriores nas que a onda electromagnética era completamente reflectida polo condutor ao chegar a el, observaremos que non sempre ocorre así. Para condutores reais, caracterizados por teren unha condutividade (σ) finita, atoparemos un determinado réxime no que o campo electromágnetico é capaz de atravesar o condutor. Veremos de que xeito o fai e que lle ocorre aos campos eléctrico ($\mathbf{E}$) e magnético ($\mathbf{B}$), dependentes do espazo ($\mathbf{x}$) e do tempo (t).

Antes de poñernos co experimento, cómpre pensar un pouco que é o que nos di a teoría respecto da propagación en condutores. Se nos preguntamos como resumi-la teoría do electromagnetismo, a resposta é coas 4 **ecuacións de Maxwell**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_f + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

onde ϵ e μ son as constantes dieléctrica e magnética respectivamente, ρ_f a densidade de carga libre e $\mathbf{J}_f$ a de corrente, son as chamadas fontes dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Nestas ecuacións notamos que aparecen acoplados os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Vexamos agora como se aplican en distintos casos:

- **Baleiro**

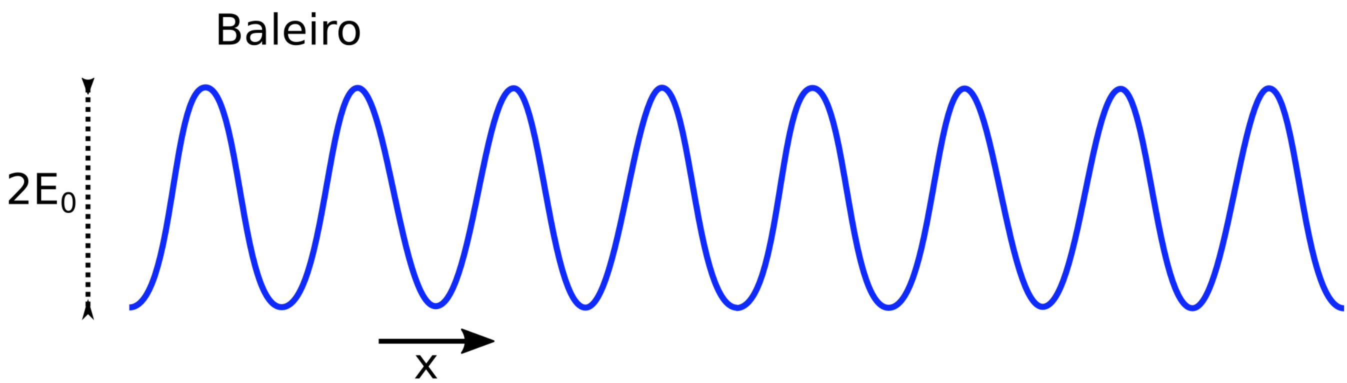
No baleiro non temos cargas libres nin correntes, $\rho_f = 0$ e $\mathbf{J}_f = 0$. Introducindo isto nas ecuacións de Maxwell, multiplicándoas polo rotacional $\nabla\times$ e aplicando certas identidades vectoriais, chegariamos ás seguintes ecuacións que desacoplan os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$
$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

Abofé que xa recoñecéche-la forma que teñen estas ecuacións. Efectivamente, trátase de ecuacións de ondas (fíxate nas derivadas segundas con respecto ao espazo e ao tempo). Se particularizamos para o caso unidimensional, por exemplo na dirección x, a solución para o campo eléctrico é a dunha onda plana, cuxa parte real é:

$$E(x,t) = E_0 cos(kx - \omega t),$$

onde E_0 é a amplitude do campo, k o vector de onda e ω a súa frecuencia angular. Debuxemos esta función para ver como se propaga o campo eléctrico no baleiro:



vemos que no baleiro o campo electromagnético propágase de forma sinusoidal e con amplitude constante no espazo.

- **Condutor**

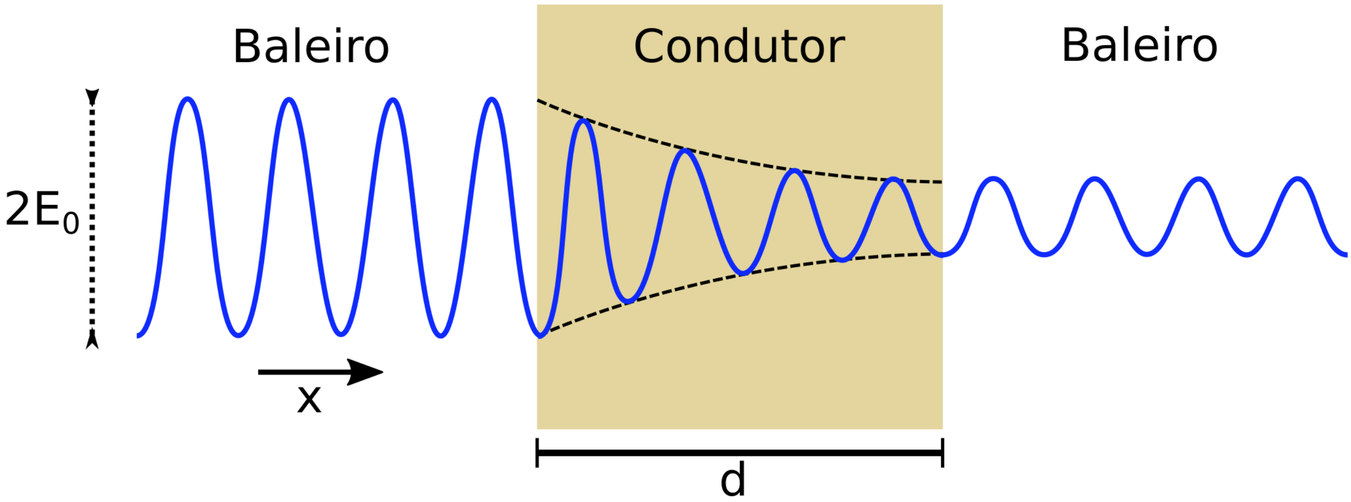
Nun bo condutor podemos considerar que non temos cargas libres acumuladas, así que $\rho_f = 0$. Porén, si que vai existir unha densidade de corrente libre. Sabemos que segundo a lei de Ohm esta será $\mathbf{J_f} = \sigma\mathbf{E}$ [1]. Así que, se introducimos isto nas ecuacións de Maxwell, multiplicamos polo rotacional $\nabla\times$ e aplicamos outra vez as identidades vectoriais, chegariamos ás seguintes ecuacións que desacoplan os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

vemos que estas ecuacións difiren das do baleiro só no termo da derivada primeira temporal. Recordando un pouco de materias como Mecánica I ou Métodos Matemáticos IV-V, identificaremos estas ecuacións como de ondas amortecidas. Novamente, particularizando na dirección x e para o caso de bos condutores ($\sigma >> \omega\epsilon$), a solución é a dunha onda plana amortecida, con parte real:

$$E(x,t) = E_0 cos(\beta x - \omega t)e^{-\beta x},$$

onde o novo parámetro $\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ é o coeficiente de atenuación [2]. Debuxemos $E(x,t)$ para ver como se propaga o campo eléctrico no condutor:



Vemos que, ao chegar ao condutor, o campo eléctrico comeza a atenuarse debido á exponencial negativa $e^{-\beta x}$ que multiplica ao coseno (o coseno está modulado pola exponencial). A maiores, se nos fixamos na expresión que obtivemos para o campo E no condutor observamos que dentro do coseno aparece un termo βx que engade unha fase ao campo. Polo que o condutor, á parte de atenuar, introduce un desfase entre os campos antes e despois de atravesalo. Todo iso en función da frecuencia do campo!

As solucións no baleiro e dentro do condutor que vimos para o campo eléctrico son análogas para o campo magnético. Na seguinte sección explicaremos o experimento que imos realizar para comproba-la teoría que vimos de desenvolver.

Notas desta sección

> [1] Aquí simplemente expuxemos un pouco a teoría e relacións que precisamos para poder face-la práctica. Podedes atopar unha discusión máis detallada sobre a propagación do campo electromagnético en condutores no capítulo 9 (sección 9.4) do libro *Introduction to Electrodynamics* de David J. Griffiths.
>
> [2] Nota a dependencia de β coa frecuencia angular ω. No noso caso, por estar tratando cun bo condutor, o coeficiente de atenuación e o de fase coinciden. Bótalle un ollo ao Griffiths para ver o caso xeral.

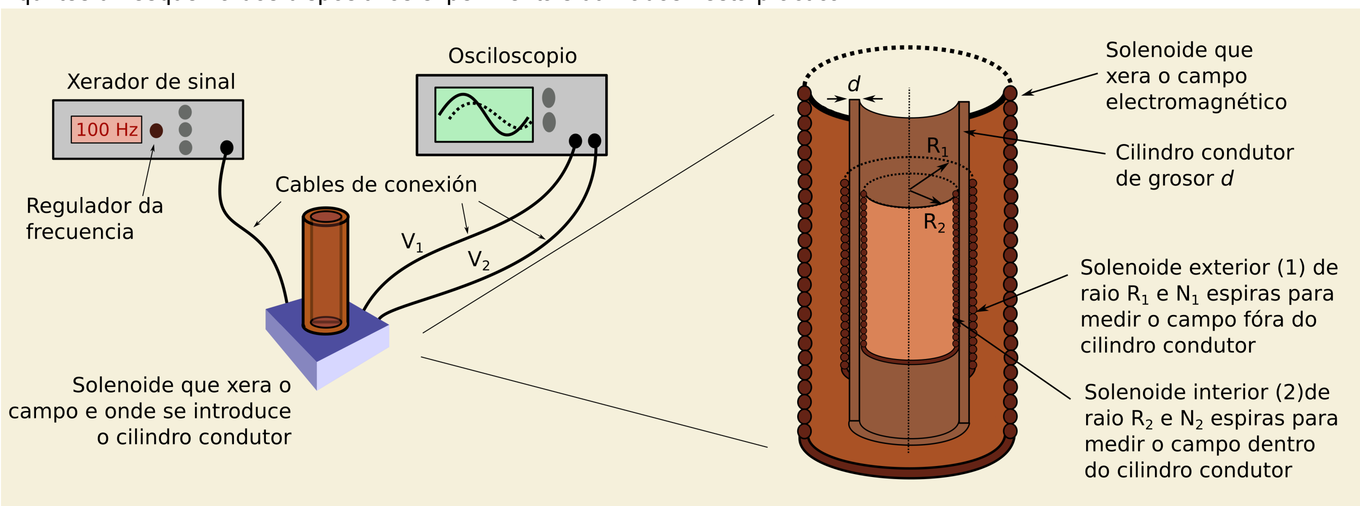
2. Experimento e tarefa a realizar

No seguinte vídeo vén explicado o experimento que nos axudará a ver como se propaga o campo electromagnético dentro dun condutor. Ao visualizalo trata de fixarte nas seguintes cuestións:

- Que instrumentos se empregan para xera-lo campo electromagnético?
- Cal é a dirección de propagación do campo electromagnético xerado?
- Que se utiliza para medi-lo campo eléctrico antes e depois do condutor?
- O que medimos no osciloscopio é directamente o campo eléctrico ou é outra cousa?
- Por que imos facer un varrido coa frecuencia do campo electromagnético?

(https://youtu.be/PhSxptpFu8k)

Aquí tes un esquema dos dispositivos experimentais utilizados nesta práctica:



Algúns dos datos que precisas para completa-la práctica son: $R_1 = 10.0$ mm, $R_2 = 7.5$ mm, $N_1 = 100$ espiras e $N_2 = 200$ espiras. Grosor do cilindro condutor $d = 1.0$ mm. A forza electromotriz inducida V nos solenoides de medida vén dada pola seguinte ecuación:

$$V = 2\pi r N E$$

onde r é o raio do solenoide correspondente, N o seu número de espiras e E o campo eléctrico que induce a forza electromotriz nel e que será o que queremos medir de forma indirecta.

O seguinte programa en python simula o experimento. Terás que introduci-lo valor para cada frecuencia (f) [1]. O programa darache a forza electromotriz inducida fóra (V_1) e dentro (V_2) do condutor. Tamén che dará o desfase entre eles (ϕ). A idea é facer un varrido en frecuencia e completa-la seguinte táboa:

f (Hz)	V_1 (V)	V_2 (V)	ϕ (○)

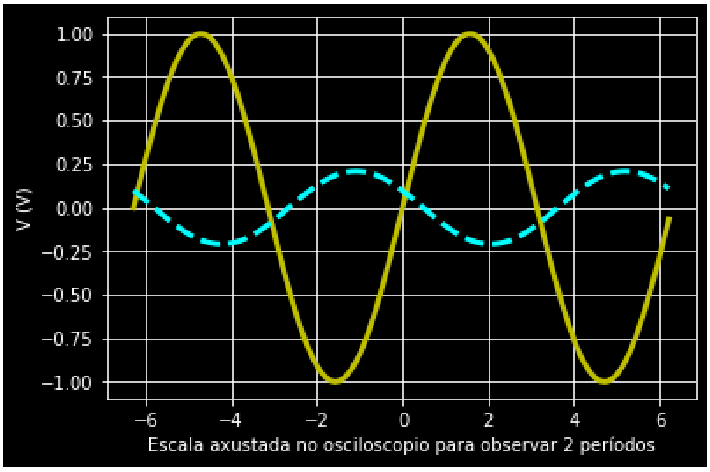
f (Hz)	V_1 (V)	V_2 (V)	ϕ ($\circ$)
100			
150			
200			
300			
500			
700			
1000			
1500			
2000			
3000			
5000			
7000			
10000			
15000			
20000			
30000			
50000			
70000			
100000			

Corre o seguinte código (shift+enter) tantas veces como precises ata ter completada a táboa [2]:

In [2]:
```
%run -i "propcondu.py"
```

```
-> Escribe en Hz a frecuencia (f) que queiras introducir no xerador de sinal e pulsa ENTER:


-> Imaxe que veriamos no osciloscopio, a liña contínua amarela é V_1 e a liña a trazos azul é V_2:
```




```
-> Resultados das medidas:

    Forza electromotriz inducida V_1 (V): 1.03
    Forza electromotriz inducida V_2 (V): 0.2
    Desfase (º): 152.7
```

Agora, coa táboa completa, xa podes realiza-las seguintes análises:

- Dos datos que obtiveches poderás obte-lo campo eléctrico fóra (E_1) e dentro (E_2) do condutor. Terás que realizar unha gráfica na que pintes o cociente E_2/E_1 como función do logaritmo da frecuencia (f) [3,4]. Representa tamén $E_2/E_1 cos(\phi)$ e $E_2/E_1 sen(\phi)$ como función do logaritmo da frecuencia. Que interpretas dos resultados? Poderiamos dicir que o condutor actúa como un filtro? De que tipo?
- Outra das medidas que obtiveches é o desfase ϕ entre os campos dentro e fóra. Sabendo que $\phi = \beta d$ e que o condutor non é magnético (isto é, $\mu = \mu_0$), obtén a condutividade (σ) do cilindro.

Moi ben, xa temos unha idea do que lle ocorre a unha onda electromagnética nun condutor como función da súa frecuencia, olla o seguinte vídeo e trata de responder á cuestión que nel se formula.

(https://youtu.be/EYFhZhnxDNY)

No vídeo o xerador de corrente envía un sinal triangular ao solenoide que crea o campo electromgnético. Despois mídese o sinal dentro do cilindro condutor. Observamos que, se a frecuencia do sinal é baixa dentro do condutor, medimos un sinal triangular; pola contra, se a frecuencia é alta, ao atravesar o condutor o que obtemos é un sinal sinusoidal. Explica por que ocorre isto.

Notas desta sección

> [1] Non confundir f con ω.
>
> [2] Recoméndoche anota-os datos nunha folla de cálculo que che permita analizalos posteriormente con maior facilidade. O código introduce un pequeno erro de xeito aleatorio en cada unha das medidas. Polo que cada vez que realices unha medida a unha mesma frecuencia esta non será completamente igual. Se che interesa, recorda que podes abrir o código e fozar nel!
>
> [3] Podes pinta-lo eixo x da frecuencia en escala logarítmica.
>
> [4] A relación entre os campos dentro e fóra do cilindro non vén determinada pola onda plana atenuada que vimos na primeira sección. A relación entre os campos é algo máis complexa e vén dada pola seguinte ecuación:
>
> $$E_2 = \frac{E_1}{cosh(\beta d)cos(\beta d) + isenh(\beta d)sen(\beta d)}$$

Por se quixeres cavilar máis

Noraboa por ter rematado a práctica de hoxe. Se aínda segues aquí é porque quedaches con gana de pensar un pouco máis sobre o que estivemos a ver.

No seguinte video musical aparece Miguel Mosqueira, guitarra e unha das voces das Ataque Escampe. Podes velo co móbil na man saíndo do metro na estación de Chambers Street, New York. Hoxe en día, a maioría de grandes cidades que teñen metro permiten ir conectadas ao whatsapp, instagram ou google maps para non perdernos e saber en que parada baixar. Este tipo de telecomunicacións funcionan con frecuencias da orde de GHz. Pero... segundo o que acabamos de ver na nosa práctica... ¿é entón posible comunicarse no metro cun móbil? Terase que implementar algún sistema para que a comunicación sexa posible?

(https://www.youtube.com/watch?v=wDu9W01DHuo)