

### Práctica 4: PROPAGACIÓN EN CONDUCTORES

*La propagación de las ondas electromagnéticas en medios con pérdidas difiere sustancialmente de la propagación en el vacío. Las ondas planas pierden amplitud a medida que avanzan, debido a la potencia disipada en el medio. Además los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , que mantienen su perpendicularidad, ahora no están en fase. En los buenos conductores la fase relativa de los campos es de  $\pi/4$  y la ecuación de ondas degenera en una ecuación de difusión.*

#### Introducción teórica

La ecuación de ondas en un medio conductor

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad [2.1]$$

para un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$  sinusoidal en el tiempo se puede reescribir, obviando la dependencia temporal, de la forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} + (\omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \mathbf{E} = 0 \quad [2.2]$$

Particularizando para una onda plana en la dirección  $X$ , la solución de esta ecuación es una suma de ondas amortiguadas propagándose en las direcciones de  $x$  positivo y negativo,

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_+ e^{-\alpha x} e^{-i\beta x} + \mathbf{E}_- e^{\alpha x} e^{i\beta x} \quad [2.3]$$

cuyos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2} - 1}{2}} \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2} + 1}{2}} \end{aligned} \quad [2.4]$$

El parámetro  $\alpha$  se llama *coeficiente de atenuación*, y es una medida de las pérdidas del material. Su inversa  $\delta = \alpha^{-1}$  es la *profundidad de penetración* de la onda en el medio.  $\beta$  es el *coeficiente de fase*.

En el límite  $\omega\epsilon \ll \sigma$  estas expresiones se simplifican:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \text{ y} \\ \delta &= \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)} \end{aligned} \quad [2.5]$$

#### Dispositivo experimental

Estudiaremos la propagación de una onda de baja frecuencia (hasta unos 200 kHz) en una lámina metálica. Para hacer posible la continuidad de las líneas de corriente, utilizaremos un tubo de espesor  $d \approx 1$  mm y diámetro externo  $2R = 20$  mm (fig. 1). Con esta relación de dimensiones la onda en el conductor se puede considerar aproximadamente plana.

Se genera el campo mediante un solenoide externo. Un segundo solenoide bobinado sobre la muestra permite medir el campo  $\mathbf{E}$  en  $x = 0$  (superficie externa del tubo). Otro solenoide más estrecho, introducido dentro del tubo, permitirá medir el campo en el interior.

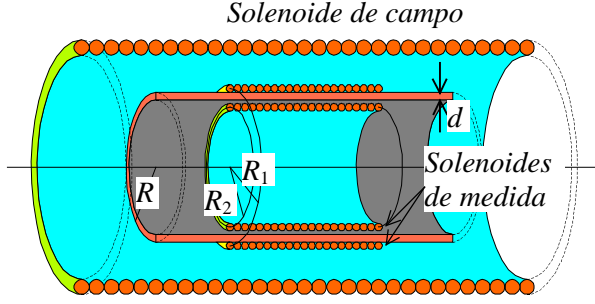


Figura 1: dispositivo experimental.

Dadas las bajas frecuencias con que se va a trabajar, dentro y fuera del cilindro de muestra tendremos una situación cuasiestática para  $\mathbf{B}$ . Salvo en los extremos,  $\mathbf{B} = \mu_0 \frac{N_p I}{l} \mathbf{z}$  ( $N_p$  es el número de espiras,  $I$  la intensidad y  $l$  la longitud del solenoide de campo) fuera del cilindro y otro valor, que depende de la corriente inducida en la muestra, pero uniforme, en el interior. El campo  $\mathbf{E}$  inducido será acimutal <sup>1</sup> y dependiente sólo de la coordenada

radial  $\rho$ :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho) \hat{\phi}$ , siendo

$$E(\rho) = -\frac{\rho}{2} \frac{dB}{dt}, \text{ para } \rho < R. \quad [2.6]$$

La f.e.m.  $\varepsilon$  que se induce en una bobina, de  $N$  espiras y radio  $\rho$ , será:

$$\varepsilon = 2\pi\rho N E(\rho). \quad [2.7]$$

Sin embargo en el cilindro conductor el campo vendrá dado por la suma de dos ondas propagándose hacia dentro y hacia fuera respectivamente:

$$E(x) = E_+ e^{-(1+i)\beta x} + E_- e^{(1+i)\beta x}, \quad [2.8]$$

donde hemos llamado  $x$  a la distancia de un punto del tubo a su superficie exterior.

El medio para  $\rho < R - d$  no presenta pérdidas (es aire), luego las amplitudes de las dos ondas en la superficie interior serán iguales. Puesto que  $R \ll \lambda$  (longitud de onda en el vacío) el retardo es despreciable y las fases en  $x = d$  deben ser idénticas <sup>2</sup>. Es decir:

$$E_+ e^{-(1+i)\beta d} = E_- e^{(1+i)\beta d}, \text{ y } E(d) = 2E_+ e^{-(1+i)\beta d} \quad [2.9]$$

y podemos obtener el campo en la superficie interna en función de su valor en la externa:

$$E(d) = E(0) \frac{2}{e^{(1+i)\beta d} + e^{-(1+i)\beta d}} = \frac{E(0)}{\cosh \beta d \cos \beta d + i \sinh \beta d \sin \beta d} \quad [2.10]$$

Según esto se puede esperar que la amplitud del campo en  $x = d$  disminuya con la frecuencia, y que las componentes en fase o en cuadratura tengan ceros en frecuencias  $\nu_n = n^2 \nu_0$ .

<sup>1</sup> En realidad, debido a la presencia de los solenoides, existe una fuerte componente longitudinal del campo  $\mathbf{E}$ , aunque no interviene en la propagación ni afecta a la medida. La geometría detallada del campo presenta cierta dificultad, cuya solución queda como ejercicio para el alumno.

<sup>2</sup> Cabría la posibilidad de una inversión de fase, ya que las corrientes en paredes opuestas del tubo son de sentido contrario, pero esto implicaría que el campo en la superficie interior fuese cero, contra lo que se observa.

*Procedimiento experimental*

1. El tubo cilíndrico conductor de cobre está rodeado por una bobina creada con un hilo esmaltado al que se le han dado 100 vueltas<sup>3</sup>. Las perforaciones del tubo permiten sacar los dos extremos y medir el voltaje entre ellos. Anótese las dimensiones del tubo metálico y el radio y el número de espiras de la bobina interior de medida.
2. Introdúzcase la muestra en el dispositivo de medida. El solenoide de campo se conecta a la salida del generador de señal. Las bobinas de medida irán a los dos canales del osciloscopio. Se debe conectar la bobina de la muestra de manera que en bajas frecuencias las señales de los dos canales estén en fase.
3. Se aplica al solenoide de campo una señal sinusoidal, empezando en unos 20 Hz, de amplitud suficiente para poder medir en el osciloscopio las tensiones inducidas en las bobinas. Si en algún momento estas señales se ven distorsionadas, disminúyase la amplitud.
4. Tómense medidas de las amplitudes<sup>4</sup> de  $V_1$  y  $V_2$  (correspondientes al solenoide bobinado sobre la muestra y al que está dispuesto en su interior, respectivamente), y del desfase entre ellas, en frecuencias espaciadas según la secuencia 1, 1.5, 2, 3, 5, 7, 10..., hasta que se observe que el comportamiento del dispositivo es anómalo<sup>5</sup> o la señal sea demasiado pequeña para ser medida. Cada vez que el desfase pase por un múltiplo de  $\pi/2$  búsquese la frecuencia precisa en que esto ocurre, y hágase una medida a esa frecuencia.
5. Obsérvese qué ocurre aplicando señales no sinusoidales, y dibújense  $V_1$  y  $V_2$  de forma aproximada.

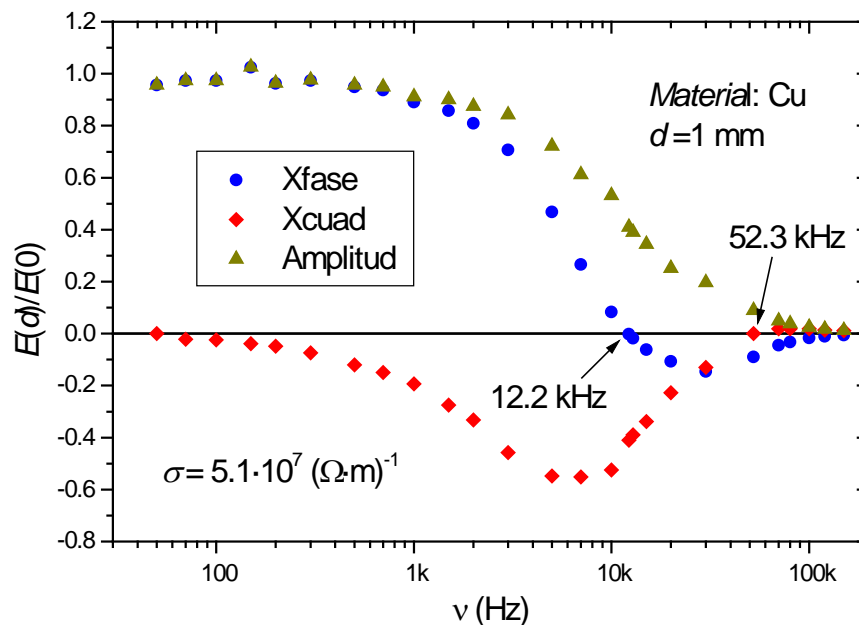


Figura 2

<sup>3</sup> Este bobinado permitirá medir el campo eléctrico en la superficie externa del tubo.

<sup>4</sup> Como estas amplitudes van a ser relativamente pequeñas, se extremará el cuidado para obtener suficiente resolución vertical.

<sup>5</sup> En frecuencias altas pueden aparecer resonancias debidas a las capacidades parásitas.

*Elaboración del trabajo*

6. Hágase una figura mostrando los campos **E**, **B** y el vector de Poynting **S** en la muestra. Muéstrase también, de forma cualitativa, el valor de  $E$  en función de  $\rho$  para frecuencias moderadamente altas.
7. Las ecuaciones [2.6] y [2.7] permiten calcular el campo en las superficies externa e interna del tubo conductor, para cada frecuencia. Preséntense los resultados  $E(d)/E(0)$  en una gráfica semilogarítmica, mostrando separadamente las componentes en fase y en cuadratura (fig. 2).
8. Utilizando las frecuencias en que se anula cada una de las componentes, calcúlese la conductividad del material. **Con este dato se puede calcular la amplitud de la otra componente (no nula) a la misma frecuencia.** Hágase una tabla con todos estos resultados.
9. Compruébese que los ceros aparecen en frecuencias  $\nu_n = n^2 \nu_0$ .
10. Evalúese el comportamiento en bajas frecuencias de las dos componentes de la función calculada. Compruébese si los datos experimentales siguen el comportamiento teórico.

$$\sigma = \frac{n^2 \pi^2}{2 d \omega^2}$$

*Cuestiones relacionadas con la práctica*

11. ¿Qué dimensiones debería tener la lámina conductora del experimento si fuese plana?
12. ¿Por qué cambian de forma las ondas no sinusoidales al atravesar la lámina conductora?

# PROPAGACIÓN DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO NUN CONDUTOR

## 1. Un pouco de teoría

Nesta práctica estudaremos como se propaga o campo electromagnético a través dun condutor. Ao contrario do que viñemos considerando nas prácticas anteriores nas que a onda electromagnética era completamente reflectida polo condutor ao chegar a el, observaremos que non sempre ocorre así. Para condutores reais, caracterizados por teren unha condutividade ( $\sigma$ ) finita, atoparemos un determinado réxime no que o campo electromagnético é capaz de atravesar o condutor. Veremos de que xeito o fai e que lle ocorre aos campos eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) e magnético ( $\mathbf{B}$ ), dependentes do espazo ( $\mathbf{x}$ ) e do tempo ( $t$ ).

Antes de poñernos co experimento, cómpre pensar un pouco que é o que nos di a teoría respecto da propagación en condutores. Se nos preguntamos como resumi-la teoría do electromagnetismo, a resposta é coas 4 **ecuacións de Maxwell**:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J}_f + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

onde  $\epsilon$  e  $\mu$  son as constantes dieléctrica e magnética respectivamente,  $\rho_f$  a densidade de carga libre e  $\mathbf{J}_f$  a de corrente, son as chamadas fontes dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

Nestas ecuacións notamos que aparecen acoplados os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

Vexamos agora como se aplican en distintos casos:

- **Baleiro**

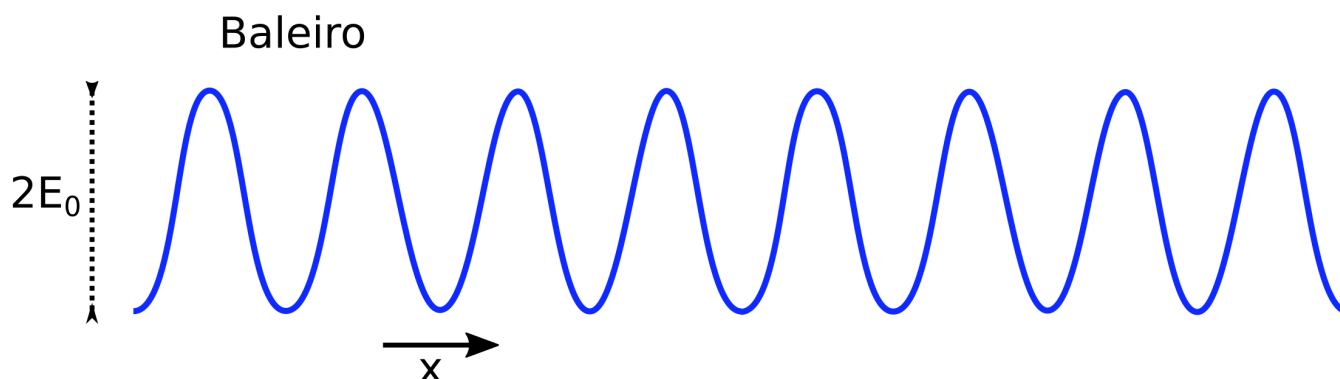
No baleiro non temos cargas libres nin correntes,  $\rho_f = 0$  e  $\mathbf{J}_f = 0$ . Introducendo isto nas ecuacións de Maxwell, multiplicándolas polo rotacional  $\nabla \times$  e aplicando certas identidades vectoriais, chegaríamos ás seguintes ecuacións que desacoplan os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

Abofé que xa recoñecéche-la forma que teñen estas ecuacións. Efectivamente, trátase de ecuacións de ondas (fíxate nas derivadas segundas con respecto ao espazo e ao tempo). Se particularizamos para o caso unidimensional, por exemplo na dirección  $x$ , a solución para o campo eléctrico é a dunha onda plana, cuxa parte real é:

$$E(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t),$$

onde  $E_0$  é a amplitude do campo,  $k$  o vector de onda e  $\omega$  a súa frecuencia angular. Debuxemos esta función para ver como se propaga o campo eléctrico no baleiro:



vemos que no baleiro o campo electromagnético propágase de forma sinusoidal e con amplitude constante no espazo.

### • Condutor

Nun bo condutor podemos considerar que non temos cargas libres acumuladas, así que  $\rho_f = 0$ . Porén, si que vai existir unha densidade de corrente libre. Sabemos que segundo a lei de Ohm esta será  $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$  [1]. Así que, se introducimos isto nas ecuacións de Maxwell, multiplicamos polo rotacional  $\nabla \times$  e aplicamos outra vez as identidades vectoriais, chegaríamos ás seguintes ecuacións que desacoplan os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

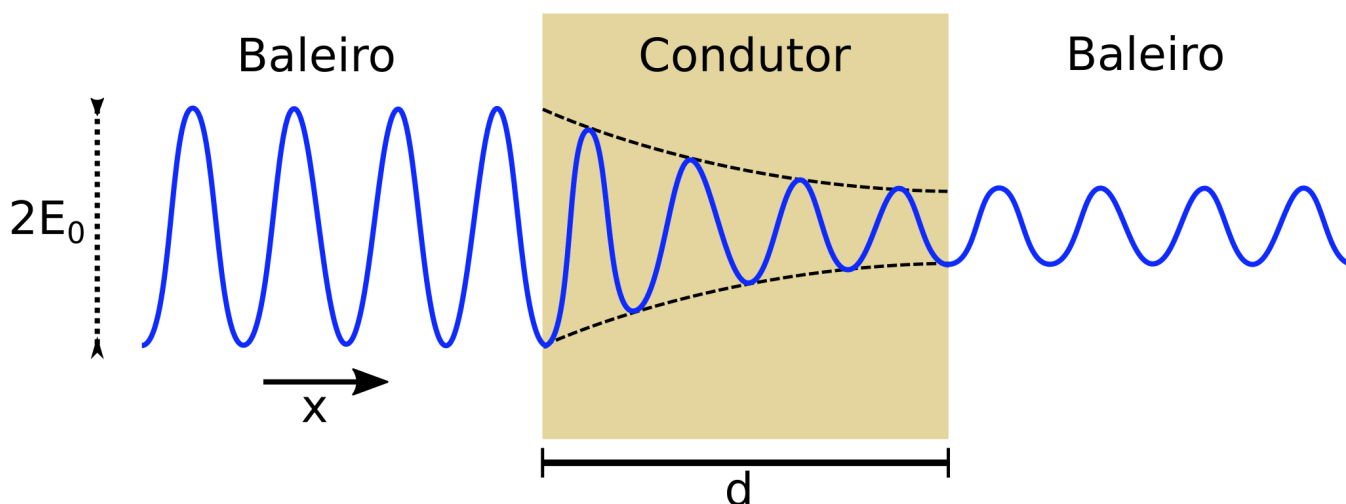
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

vemos que estas ecuacións difiren das do baleiro só no termo da derivada primeira temporal. Recordando un pouco de materias como Mecánica I ou Métodos Matemáticos IV-V, identificaremos estas ecuacións como de ondas amortecidas. Novamente, particularizando na dirección  $x$  e para o caso de bos condutores ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ), a solución é a dunha onda plana amortecida, con parte real:

$$E(x, t) = E_0 \cos(\beta x - \omega t) e^{-\beta x},$$

onde o novo parámetro  $\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$  é o coeficiente de atenuación [2]. Debuxemos  $E(x, t)$  para ver como se propaga o campo eléctrico no condutor:



Vemos que, ao chegar ao condutor, o campo eléctrico comeza a atenuarse debido á exponencial negativa  $e^{-\beta x}$  que multiplica ao coseno (o coseno está modulado pola exponencial). A maiores, se nos fixamos na expresión que obtivemos para o campo  $E$  no condutor observamos que dentro do coseno aparece un termo  $\beta x$  que engade unha fase ao campo. Polo que o condutor, á parte de atenuar, introduce un desfase entre os campos antes e despois de atravesalo. Todo iso en función da frecuencia do campo!

As solucións no baleiro e dentro do condutor que vimos para o campo eléctrico son análogas para o campo magnético. Na seguinte sección explicaremos o experimento que imos realizar para comproba-la teoría que vimos de desenvolver.

### Notas desta sección

[1] Aquí simplemente expuxemos un pouco a teoría e relacións que precisamos para poder face-la práctica. Podedes atopar unha discusión máis detallada sobre a propagación do campo electromagnético en condutores no capítulo 9 (sección 9.4) do libro *Introduction to Electrodynamics* de David J. Griffiths.

[2] Nota a dependencia de  $\beta$  coa frecuencia angular  $\omega$ . No noso caso, por estar tratando cun bo condutor, o coeficiente de atenuación e o de fase coinciden. Bótalle un ollo ao Griffiths para ver o caso xeral.

## 2. Experimento e tarefa a realizar

No seguinte vídeo vén explicado o experimento que nos axudará a ver como se propaga o campo electromagnético dentro dun condutor. Ao visualizalo trata de fixarte nas seguintes cuestións:

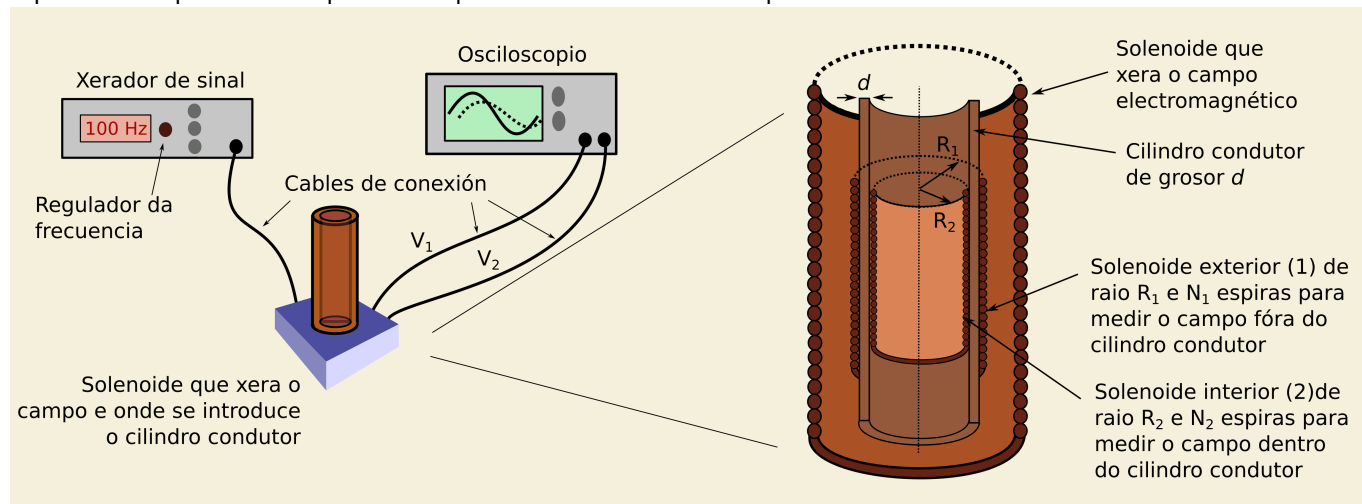
- Que instrumentos se empregan para xera-lo campo electromagnético?
- Cal é a dirección de propagación do campo electromagnético xerado?
- Que se utiliza para medi-lo campo eléctrico antes e despois do condutor?
- O que medimos no osciloscopio é directamente o campo eléctrico ou é outra cousa?
- Por que imos facer un varrido coa frecuencia do campo electromagnético?

### PROPAGACIÓN DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO NUN CONDUCTOR



(<https://youtu.be/PhSxtpFu8k>)

Aquí tes un esquema dos dispositivos experimentais utilizados nesta práctica:



Alguns dos datos que precisas para completa-la práctica son:  $R_1 = 10.0$  mm,  $R_2 = 7.5$  mm,  $N_1 = 100$  espiras e  $N_2 = 200$  espiras. Grosor do cilindro condutor  $d = 1.0$  mm. A forza electromotriz inducida  $V$  nos solenoides de medida vén dada pola seguinte ecuación:

$$V = 2\pi r N E$$

onde  $r$  é o raio do solenoide correspondente,  $N$  o seu número de espiras e  $E$  o campo eléctrico que induce a forza electromotriz nel e que será o que queremos medir de forma indirecta.

O seguinte programa en python simula o experimento. Terás que introduci-lo valor para cada frecuencia ( $f$ ) [1]. O programa darache a forza electromotriz inducida fóra ( $V_1$ ) e dentro ( $V_2$ ) do condutor. Tamén che dará o desfase entre eles ( $\phi$ ). A idea é facer un varrido en frecuencia e completa-la seguinte táboa:

$f$ (Hz)	$V_1$ (V)	$V_2$ (V)	$\phi$ (°)
----------	-----------	-----------	------------

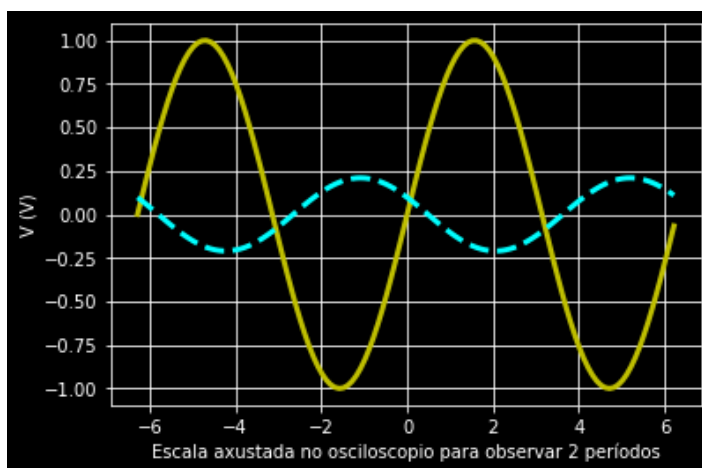
$f$ (Hz)	$V_1$ (V)	$V_2$ (V)	$\phi$ (°)
100			
150			
200			
300			
500			
700			
1000			
1500			
2000			
3000			
5000			
7000			
10000			
15000			
20000			
30000			
50000			
70000			
100000			

Corre o seguinte código (shift+enter) tantas veces como precises ata ter completada a táboa [2]:

```
In [2]: %run -i "propcondu.py"
```

-> Escribe en Hz a frecuencia (f) que queiras introducir no xerador de sinal e pulsa ENTER:

-> Imaxe que veríamos no osciloscopio, a liña contínua amarela é  $V_1$  e a liña a trazos azul é  $V_2$ :



-> Resultados das medidas:

Forza electromotriz inducida  $V_1$  (V): 1.03  
 Forza electromotriz inducida  $V_2$  (V): 0.2  
 Desfase (°): 152.7



Agora, coa táboa completa, xa podes realiza-las seguintes análises:

- Dos datos que obtiveches poderás obter o campo eléctrico fóra ( $E_1$ ) e dentro ( $E_2$ ) do condutor. Terás que realizar unha gráfica na que pintes o cociente  $E_2/E_1$  como función do logaritmo da frecuencia ( $f$ ) [3,4]. Representa tamén  $E_2/E_1 \cos(\phi)$  e  $E_2/E_1 \sin(\phi)$  como función do logaritmo da frecuencia. Que interpretas dos resultados? Poderíamos dicir que o condutor actúa como un filtro? De que tipo?
- Outra das medidas que obtiveches é o desfase  $\phi$  entre os campos dentro e fóra. Sabendo que  $\phi = \beta d$  e que o condutor non é magnético (isto é,  $\mu = \mu_0$ ), obtén a condutividade ( $\sigma$ ) do cilindro.

Moi ben, xa temos unha idea do que lle ocorre a unha onda electromagnética nun condutor como función da súa frecuencia, olla o seguinte vídeo e trata de responder á cuestión que nel se formula.



(<https://youtu.be/EYFhZhnxDNY>)

No vídeo o xerador de corrente envía un sinal triangular ao solenoide que crea o campo electromagnético. Despois mídese o sinal dentro do cilindro condutor. Observamos que, se a frecuencia do sinal é baixa dentro do condutor, medimos un sinal triangular; pola contra, se a frecuencia é alta, ao atravesar o condutor o que obtemos é un sinal sinusoidal. Explica por que ocorre isto.

#### Notas desta sección

[1] Non confundir  $f$  con  $\omega$ .

[2] Recomendóche anota-os datos nunha folia de cálculo que che permita analizalos posteriormente con maior facilidade. O código introduce un pequeno erro de xeito aleatorio en cada unha das medidas. Polo que cada vez que realices unha medida a unha mesma frecuencia esta non será completamente igual. Se che interesa, recorda que podes abrir o código e fozar nel!

[3] Podes pinta-lo eixo x da frecuencia en escala logarítmica.

[4] A relación entre os campos dentro e fóra do cilindro non vén determinada pola onda plana atenuada que vimos na primeira sección. A relación entre os campos é algo máis complexa e vén dada pola seguinte ecuación:

$$E_2 = \frac{E_1}{\cosh(\beta d) \cos(\beta d) + i \sinh(\beta d) \sin(\beta d)}$$

## Por se quixeres cavilar máis

Noraboa por ter rematado a práctica de hoxe. Se aínda segues aquí é porque quedaches con gana de pensar un pouco máis sobre o que estivemos a ver.

No seguinte video musical aparece Miguel Mosqueira, guitarra e unha das voces das Ataques Escampe. Podes velo co móbil na man saíndo do metro na estación de Chambers Street, New York. Hoxe en día, a maioría de grandes cidades que teñen metro permiten ir conectadas ao whatsapp, instagram ou google maps para non perdernos e saber en que parada baixar. Este tipo de telecomunicacións funcionan con frecuencias da orde de GHz. Pero... segundo o que acabamos de ver na nosa práctica... ¿é entón posible comunicarse no metro cun móbil? Terase que implementar algún sistema para que a comunicación sexa posible?



(<https://www.youtube.com/watch?v=wDu9W01DHuo>)

## Práctica 4 - apéndice: Propagación en condutores

Nun medio condutor, suposto homoxéneo, lineal e isotrópico, con conductividade  $\sigma$ , permitividade dieléctrica  $\varepsilon$  permeabilidade magnética  $\mu$ , e en ausencia de fontes, a ecuación de ondas do campo eléctrico é

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Igual que calquera medio con perdas, un condutor é un medio dispersivo, e só as ondas monocromáticas se poden propagar nel mantendo a forma<sup>1</sup> como ondas planas. Expresando o campo en forma complexa segundo o convenio

$$\mathbf{E}_{fis}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \} \quad (2)$$

, a ecuación anterior<sup>2</sup> quedaría

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

sendo  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - i\omega \mu \sigma = (\beta - i\alpha)^2$  unha constante de propagación complexa. Unha solución en forma de *onda plana* sería

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

con  $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}$  constante, onde a dependencia temporal, incluída a fase, vén dada polo convenio (2) e  $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{v}}k$  un vector na dirección  $\hat{\mathbf{v}}$  de propagación.

No caso dun bo condutor (un metal, por exemplo),  $\omega\varepsilon \ll \sigma$  e as partes real e imaxinaria de  $k$  serían

$$\alpha \simeq \beta \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

Nestas condicións unha onda plana, polarizada linealmente e propagándose na dirección  $z$ , podería expresarse como

$$E(z) = E^+ e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} + E^- e^{\alpha z} e^{i\beta z}$$

sendo  $E^+$  e  $E^-$  as amplitudes das ondas que se propagan nas direccións positiva e negativa (onda reflectida), respectivamente, do eixo  $z$ .

Se o condutor é unha lámina plana de espesor uniforme coas supeficies en  $z = 0$  e  $z = d$ , un campo eléctrico aplicado paralelamente á superficie en  $z = 0$  propagarase polo condutor como onda plana atenuada, reflexándose na outra cara. A relación entre os campos nas dúas caras resulta<sup>3</sup>

$$E(d) = \frac{E(0)}{\cosh(\alpha d) \cos(\beta d) + i \sinh(\alpha d) \sin(\beta d)} \quad (4)$$

Na práctica a lámina está pechada formando un tubo cilíndrico de radio  $R$ . Neste caso as expresións dos campos son máis complicadas (inclúen funcións de Bessel), pero se  $d \ll R$  a relación (4) cúmprese aproximadamente tomando a orixe de  $z$  nunha das caras.

---

<sup>1</sup>Non a amplitude.

<sup>2</sup> $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  toma valores complexos.

<sup>3</sup>Problema 8 do boletín 2.