Circuitos de Corriente Continua

Daniel Vázquez Lago

13 de abril de 2023

Índice

1. Circuito de Corriente Continua **3**
1.1. Objetivos 3
1.2. Análisis de datos: Medida de resistencias 3
1.3. Análisis de datos: Circuito Paralelo 4
1.3.1. Medida directa 5
1.3.2. Estimación teórica 5
1.3.3. Estimación indirecta 6
1.4. Comprobación ley de Ohm 8
1.5. Conclusión 9

2. Circuito de Corriente Alterna **10**
2.1. Objetivos 10
2.2. Análisis de datos 10
2.2.1. Frecuencia de corte 10
2.2.2. Desfase entre señales 13
2.3. Conclusiones 14

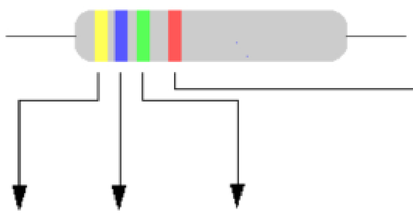
1. Circuito de Corriente Continua

1.1. Objetivos

Los principales objetivos de esta práctica serán:

- Comprobar experimentalmente la Ley de Ohm y de las leyes básicas de asociación de resistencias.
- La demostración de que el alumnado posee los conocimientos necesarios para hacer un riguroso y correcto tratamiento de los datos mediante el uso de la propagación de incertidumbres, el ajuste lineal (usando el método de mínimos cuadrados) y el correcta expresión de los mismos. Para ello contaremos con numerosas gráficas, tablas de datos y ecuaciones que nos permitirán explicar detalladamente el proceso de obtención de los resultados.
- El correcto uso del polímetro y aplicación del código de colores para las resistencias.

1.2. Análisis de datos: Medida de resistencias



COLOR	1ª CIFRA	2ª CIFRA	Nº DE CEROS	TOLERANCIA (+/- %)
NINGUNO	-	-	-	20%
PLATA	-	-	-	10%
ORO	-	-	-	5%
NEGRO	0	0	-	-
MARRÓN	1	1	0	-
ROJO	2	2	00	-
NARANJA	3	3	000	-
AMARILLO	4	4	0000	-
VERDE	5	5	00000	-
AZUL	6	6	000000	-
VIOLETA	7	7	-	-
GRIS	8	8	-	-

Figura 1: Código de colores para las resistencias

Como podemos observar tenemos una tabla de resistencias, que asocia los distintos colores que tiene una resistencia con su valor, calculado por el fabricante, con su tolerancia, que nos da un margen de los posibles valores de la resistencia, es decir, su incertidumbre.

Resistencia	Valor nominal (Ω)	Tolerancia (%)	$R \pm s(R)$ (Ω)
R_1	220000	5	220000 ± 11000
R_2	390000	5	390000 ± 19500

Cuadro 1: Valor de las resistencias e incertidumbres según fabricante

Resistencia	Lectura (Ω)	Resolución (Ω)	$R \pm s(R)$ (Ω)
R_1	$217 \cdot 10^3$	10^3	$22 \cdot 10^3 \pm 10^3$
R_2	$397 \cdot 10^3$	10^3	$39 \cdot 10^3 \pm 10^3$

Cuadro 2: Valor de las resistencias e incertidumbres experimentalmente

En la tabla 1 tenemos las resistencias que nos da el fabricante, en función de los colores de la resistencia y de sus valores asociados en la figura 3. En la tabla 2 tenemos los valores de las resistencias calculadas experimentalmente mediante un polímetro.

Para calcular estos valores experimentales lo que hacemos es coger un polímetro con la parte de medir resistencias seleccionada, y poner los dos terminales en los extremos de las resistencias.

El motivo principal por el que hacemos dos cálculos de los valores de las resistencias es para comprobar si estas resistencias están realmente en los margenes de error que nos da el fabricante, y porque nos da una mayor exactitud para posteriores cálculos que realizaremos. Como podemos observar ambas resistencias están dentro de los márgenes, ya que según el fabricante la resistencia uno debería estar en el rango $(209000,\ 231000)$ en el que claramente 217000 está; y la resistencia 2, con valor de 397000, está en el rango (370500, 4095000).

De esta forma cumplimos el tercer objetivo de esta práctica, ya que hemos aplicado el código de colores para las resistencias y hecho un correcto uso del polímetro para calcular estos valores, aunque esta parte será mas notoria más adelante.

1.3. Análisis de datos: Circuito Paralelo

Como bien sabemos, un circuito en paralelo la tiene la siguiente forma:

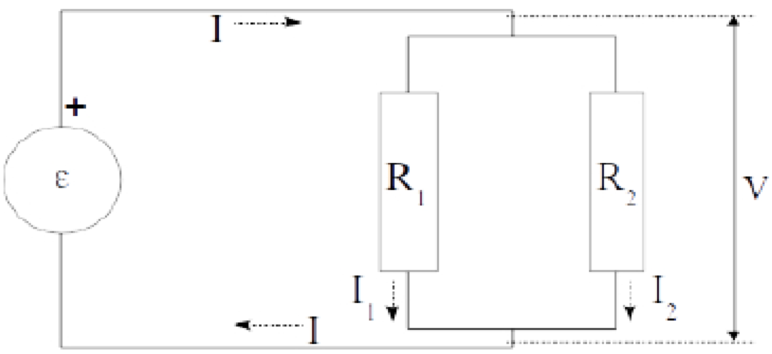


Figura 2: Circuito en paralelo

Ahora bien, como bien nos dice la ley de Ohm, este tipo de circuito equivale a un circuito con una única resistencia (R_T), que tiene el valor de:

$$\frac{1}{R_T} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{1}$$

Ahora bien, vamos a comprobar que esta ley fundamental se cumple mediante una medida directa, una estimación teórica y una estimación indirecta.

1.3.1. Medida directa

La medida directa no tiene mucho misterio. Al igual que antes, seleccionamos la parte de medir resistencias del polímetro, pero en este caso en vez de colocar los terminales en los extremos de las resistencias los colocaremos justo antes de los dos nodos. La siguiente tabla ilustrará cual es el valor y su incertidumbre:

Resistencia	Lectura (Ω)	Resolución (Ω)	$R \pm s(R)$ (Ω)
R_T	$1406 \cdot 10^2$	10^2	$1406 \cdot 10^2 \pm 10^2$

Cuadro 3: Valor de la resistencia equivalente mediante medida directa

1.3.2. Estimación teórica

La estimación teórica se hace usando la formula 1, y la incertidumbre se calcula mediante la propagación de incertidumbres, cuya fórmula es así:

$$s(y) = \sqrt{\sum_i (\frac{\partial y}{\partial x_i})^2 s^2(x_i)} \tag{2}$$

En nuestro caso será:

$$s(R_T) = \sqrt{(\frac{\partial R_T}{\partial R_1})^2 s^2(R_1) + (\frac{\partial R_T}{\partial R_2})^2 s^2(R_2)} \tag{3}$$

Y que las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial R_T}{\partial R_1} = \frac{\partial(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2})}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_2 + R_1)^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial R_T}{\partial R_2} = \frac{\partial(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2})}{\partial R_2} = \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_1^2}{(R_2 + R_1)^2} \tag{5}$$

Ahora usando las incertidumbres y valores de la medida experimental de resistencias (tabla 2), ya que son las más exactas, y tenemos los siguientes valores:

R_i	Valor nominal (Ω)	Incertidumbre (Ω)	R_i^2	$s(R_i)^2$
R_1	$217 \cdot 10^3$	10^3	$4{,}71 \cdot 10^{10}$	1000000
R_2	$397 \cdot 10^3$	10^3	$1{,}58 \cdot 10^{11}$	1000000
$R_1 + R_2$	$614 \cdot 10^3$	-	$3{,}77 \cdot 10^{11}$	-

Cuadro 4: Valor de los diferentes parámetros que vamos a usar para calcular R_T

Una vez tenemos estos datos, podemos aplicar la fórmula 1 y 3 para calcular R_T y su incertidumbre:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Longrightarrow R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{217 \cdot 10^3 \cdot 397 \cdot 10^3}{397 \cdot 10^3 + 217 \cdot 10^3} = 140310 \cdot 10^1 \ \Omega$$

$$s(R_T) = \sqrt{10^6 \cdot \frac{(0,471 + 1,58) \cdot 10^{11}}{3,77 \cdot 10^{11}}} = 74 \cdot 10^1$$

En el caso de la incertidumbre cogemos 2 cifras significativas porque al realizar cálculos mediante propagación de incertidumbres es la regla que usamos. En el caso de que nos dieran otras unidades posteriormente simplemente realizamos la aproximación. Una vez tenemos estos datos vamos a construir una tabla, que aunque bien sencilla, nos permitirá reflejar mejor los datos y compararlos posteriormente:

Resistencia	Valor nominal (Ω)	Incertidumbre (Ω)	$R_T \pm s(R_T)$
R_T	$14031 \cdot 10^1$	$74 \cdot 10^1$	$14031 \cdot 10^1 \pm 74 \cdot 10^1$

Cuadro 5: Valor de las resistencia equivalente y su incertidumbre teórica

1.3.3. Estimación indirecta

Como bien sabemos, la ley de Ohm nos dice que el voltaje total del sistema es igual a la intensidad por la resistencia:

$$V = I \cdot R \tag{6}$$

Entonces es posible calcular la resistencia de un sistema sabiendo el voltaje y la intensidad que circula por el mismo. Debido a las características de la fórmula, si representamos voltaje frente a la intensidad, la pendiente de la recta será entonces el valor de la resistencia. Entonces tomando varias medidas del voltaje y la intensidad, y haciendo la representación tendremos una estimación indirecta del valor de la resistencia. Para calcular la incertidumbre, los valores de la pendiente... usaremos el método de mínimos cuadrados, haciendo una regresión lineal simple mediante el lenguaje python.

En primer lugar mostraremos los valores calculados experimentalmente, y que mas tarde usaremos:

Medida	V (V)	s(V)	I_1 (A)	$I_2(A)$	$I_1 + I_2$ (A)	I (A)	s(I)
1	1,0	0,1	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$7,7 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
2	2,0	0,1	$9,4 \cdot 10^{-6}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$14,6 \cdot 10^{-6}$	$14,7 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
3	3,0	0,1	$14,1 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$21,7 \cdot 10^{-6}$	$21,7 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
4	4,0	0,1	$18,5 \cdot 10^{-6}$	$10,3 \cdot 10^{-6}$	$28,8 \cdot 10^{-6}$	$28,9 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
5	5,0	0,1	$23,2 \cdot 10^{-6}$	$12,8 \cdot 10^{-6}$	$36,0 \cdot 10^{-6}$	$35,9 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
6	6,0	0,1	$27,8 \cdot 10^{-6}$	$15,3 \cdot 10^{-6}$	$43,1 \cdot 10^{-6}$	$43,2 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
7	7,0	0,1	$32,3 \cdot 10^{-6}$	$17,8 \cdot 10^{-6}$	$50,1 \cdot 10^{-6}$	$50,5 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
8	8,0	0,1	$37,4 \cdot 10^{-6}$	$20,4 \cdot 10^{-6}$	$57,8 \cdot 10^{-6}$	$57,5 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
9	9,0	0,1	$41,7 \cdot 10^{-6}$	$22,9 \cdot 10^{-6}$	$64,6 \cdot 10^{-6}$	$65,5 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$
10	10,0	0,1	$46,4 \cdot 10^{-6}$	$25,4 \cdot 10^{-6}$	$71,8 \cdot 10^{-6}$	$77,0 \cdot 10^{-6}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 6: Valor de las resistencia equivalente y su incertidumbre teórica

Como podemos ver, tomamos también datos en I_1 e I_2, ya que la ley de asociación de resistencias nos dice que:

$$I = \sum_{k=1}^{n} I_k \tag{7}$$

Entonces las calculamos por comprobar que la intensidad total calculada está correctamente calculada, además que así demostramos una de las leyes de asociaciones de resistencias para los circuitos en paralelo: que la intensidad total es igual a la suma de las intensidades de cada resistencia (colocando n resistencias en paralelo partiendo del mismo nodo).

Como ya mencionamos previamente, vamos a hacer una regresión lineal. Para esto se ha de suponer que existe un parámetro β que relaciona dos magnitudes dadas, x e y, de tal forma que:

$$y = \alpha + \beta x \tag{8}$$

En nuestro caso los valores de y serán los valores del voltaje (V) y los valores de x serán los de la intensidad total (I). Además, debido a los errores existentes en la toma de datos (precisión, aproximaciones...) jamás vamos a poder encontrar β, nos tendremos que conformar una mera aproximación, que será b. La existencia de α (cuya aproximación será a) también nos incomoda, ya que en la fórmula no aparece ningún termino independiente. Sin embargo, realmente nosotros tenemos que asumir que no sabemos la fórmula, y que este parametro tenemos que calcularlo, aunque después veremos que tiende a 0, y que por lo tanto podemos despreciarlo y que se cumple la formula, pero eso aún no lo sabemos. Ahora bien trataremos de que estos valores sean lo mas próximos sus valores reales mediante un proceso que ya mencionamos anteriormente: el método de mínimos cuadrados.

Entonces tenemos que las desviaciones serán de:

$$y_i - bx_i - a \neq 0 \tag{9}$$

Y que entonces la suma de los productos de los cuadrados de estas desviaciones por el peso estadístico en cada punto es la cantidad a minimizar. Para esto respecto a b y a, e igualamos a 0:

$$\mathcal{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i[y_i - bx_i - a]^2 \tag{10}$$

En nuestro caso definimos peso estadístico como:

$$w_i = [s(y_i)]^{-2} \tag{11}$$

Ya que la incertidumbre de y del orden de 5 veces mas grande que la de x (y cuando lo elevamos al cuadrado es del orden de 10), es decir, se puede despreciar. Además como la incertidumbre de los valores de y es constante (0,1) decimos que $w = (0,1)^{-2} = 100$. Entonces tomando w como constante y derivando respecto b y a tendríamos que:

$$-2\sum_{i=1}^{n}[x_i(y_i - bx_i - a)] = 0 \qquad -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) \tag{12}$$

Obteniendo directamente las siguientes fórmulas:

$$b = \frac{n(\Sigma_i x_i y_i) - (\Sigma_i y_i)(\Sigma x_i)}{n(\Sigma x_i^2) - (\Sigma_i x_i)^2} \tag{13}$$

$$a = \frac{(\Sigma_i y_i)(\Sigma_i x_i^2) - (\Sigma_i x_i)(\Sigma_i x_i y_i)}{n(\Sigma_i x_i^2) - (\Sigma_i x_i)} \tag{14}$$

El valor del coeficiente de de regresión lineal:

$$r = \frac{n(\Sigma_i x_i y_i) - (\Sigma_i x_i)(\Sigma_i y_i)}{\sqrt{[n(\Sigma_i x_i^2) - (\Sigma_i x_i)^2][n(\Sigma_i y_i^2) - (\Sigma_i y_i)^2]}} \tag{15}$$

Las incertidumbres asociadas son:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma_i (y_i - a - bx_i)^2}{n-2}} \tag{16}$$

$$s(b) = s\sqrt{\frac{n}{n(\Sigma_i x_i^2) - (\Sigma_i x_i)^2}} \tag{17}$$

$$s(a) = s\sqrt{\frac{\Sigma_i x_i^2}{n(\Sigma_i x_i^2) - (\Sigma_i x_i)^2}} \tag{18}$$

Una vez tenemos dichas fórmulas, solo hay que realizar cálculos. Para esto crearemos las siguientes tablas, para así dejar claro de donde aparecen los datos (aunque no se represente es evidente que $n = 10$):

Substituyendo los datos anteriores en las ecuaciones 14 y 13 tendríamos que:$a = -4{,}17849656 \cdot 10^{-2}$ y $b = 139802$. Probablemente hayamos colocado cifras significativas de más, pero hasta que no hayamos calculado la incertidumbre no sabremos realmente con cuantas hay que representar los números. Por lo tanto colocamos de más, aunque luego representemos dichos números con las cifras significativas correctas. Ahora bien, para calcular s(b) y s(a) hacen falta obtener un dato más, representado en la tabla 8.

i	$V_i \ (y_i)$	$I_i \ (x_i)$	$V_i \cdot I_i \ (x_i y_i)$	$I_i^2 \ (x_i)^2$	$V_i 2 \ (y_i)^2$
1	1,0	7,50E-06	7,50E-06	5,63E-11	1,0
2	2,0	1,47E-05	2,94E-05	2,16E-10	4,0
3	3,0	2,17E-05	6,51E-05	4,71E-10	9,0
4	4,0	2,89E-05	1,16E-04	8,35E-10	16,0
5	5,0	3,59E-05	1,80E-04	1,29E-09	25,0
6	6,0	4,32E-05	2,59E-04	1,87E-09	36,0
7	7,0	5,05E-05	3,54E-04	2,55E-09	49,0
8	8,0	5,75E-05	4,60E-04	3,31E-09	64,0
9	9,0	6,45E-05	5,81E-04	4,16E-09	81,0
10	10,0	7,20E-05	7,20E-04	5,18E-09	100,0
Σ_i	55,0	3,96E-04	2,77E-03	1,99E-08	3025,0

Cuadro 7: Valores necesarios para calcular b (R), a y el coeficiente de regresión lineal (r)

i	$y_i - a - bx_i$	$(y_i - a - bx_i)^2$
1	-0,0067	0,000045
2	-0,0133	0,000177
3	0,0081	0,000065
4	0,0015	0,000002
5	0,0229	0,000523
6	0,0023	0,000005
7	-0,0183	0,000333
8	0,0031	0,000010
9	0,0245	0,000600
10	-0,0240	0,000577
Σ_i	$-4,66 \cdot 10^{-14}$	0,002338

Cuadro 8: Valor de las resistencia equivalente y su incertidumbre mediante la medida indirecta

b	s(b)	a	s(a)	r
$13980 \cdot 10^1$	$26 \cdot 10^1$	-0,042	0,012	0,99998

Cuadro 9: Valores finales de la propagación de incertidumbres

Resistencia	Valor nominal (Ω)	Incertidumbre (Ω)	$R_T \pm s(R_T)$
R_T	$13980 \cdot 10^1$	$26 \cdot 10^1$	$13980 \cdot 10^1 \pm 26 \cdot 10^1$

Cuadro 10: Valor de las resistencia equivalente y su incertidumbre mediante la medida indirecta

Como podemos ver también hemos representado en la tabla 9 los valores de b, a (que ya en la siguiente subsección analizaremos), calculados con las anteriores ecuaciones. Además ahora si representamos a y b con las cifras significativas correctas. También calculamos r, que es una medida para saber cuan bien hecha está la regresión lineal. En nuestro caso nos da 0,99998 lo cual es muy buen indicativo: la regresión lineal esta muy bien hecha.

1.4. Comprobación ley de Ohm

Como ya dijimos, uno de los objetivos de esta práctica es comprobar la ley de Ohm (y la ley de asociaciones de resistencias para el circuito paralelo). Para esto tomamos 3 formas de estudiar las resistencias, una de manera teórica, que es, en teoría, el valor que tiene que tener la resistencia equivalente del circuito. Entonces sabremos que se cumple dichas ecuaciones usadas si los valores que obtenemos de manera experimental están próximos a el valor teórico (dicho de otra forma, que están en el rango de su incertidumbre). El primer método experimental fue una medida directa, que esta evidentemente en el rango de incertidumbre. El segundo método experimental fue una medida indirecta, es decir, mediante la ley de Ohm (ecuación 6), sabiendo la intensidad y voltaje total

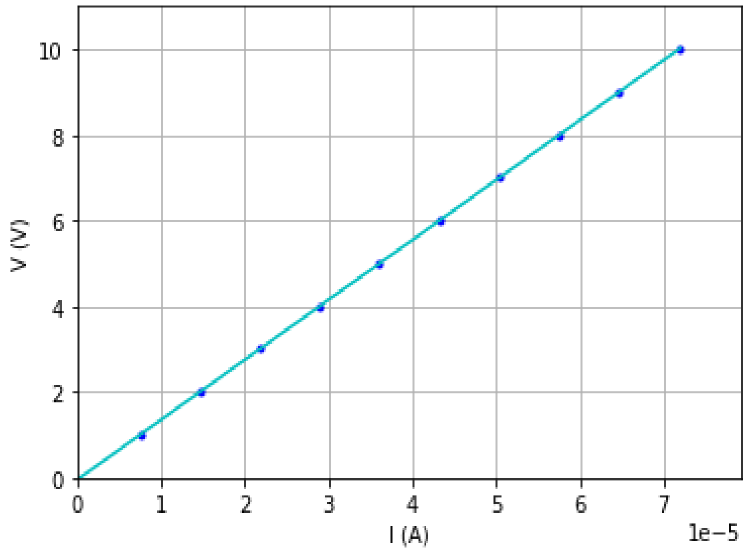


Figura 3: Regresión lineal: Voltaje frente a Intensidad

del circuito, calcular la resistencia total. Como se puede ver en la ley de Ohm, R es una constante que esta multiplicando a I. Es decir, si representamos V frente a I nos aparecerá una recta que en teoría pasa por el origen y cuya pendiente será la propia R. En esta misma relación se basa esta medida: calculamos la intensidad y voltaje del circuito, y tratamos de crear una recta que aproxime mejor los valores obtenidos mediante el método de mínimos cuadrados.

De todos modos hay algo que no termina de encajar: si en teoría la relación I y V es directa, ¿Por qué a la hora de calcular dicha relación aparece un términmo independiente a? La respuesta es bien sencilla: realmente no conocemos a ciencia cierta la ley de Ohm, ya que también estamos tratando de demostrarla, por lo tanto esta relación directa es *desconocida* para nosotros. Sin embargo, se puede ver que este término independiente es irrisorio comparado con b. Podríamos casi considerarlo como consecuencia de la incertidumbre de tipo B, producto de la falta de precisión de los aparatos, condiciones ambientales no medibles... En resumen: se puede despreciar. De esta forma también comprobamos la propia ley de Ohm: ya que si la relación V e I se puede escribir como $V = bI$, y reescribimos b como R (cuadro 10) tenemos que $V = RI$.

De hecho, si escribimos la resistencia equivalente del circuito de las 3 formas que calculamos nos daremos cuenta de su similitud:

$$140600^1 \approx 140310^2 \approx 139800^3$$

Como podemos ver si que están próximas. En conclusión: si que se cumple la ley de asociación de resistencias, y la ley de Ohm, cumpliendo parte del objetivo de esta práctica. No cabe olvidar que todo se ha realizado de manera rigurosa y exhaustiva, no cabiendo duda de la veracidad de dichas afirmaciones.

1.5. Conclusión

Durante la práctica hemos usado tanto leyes básicas de la física y electricidad como las leyes de asociaciones de resistencias, ley de Ohm... así como las fórmulas de propagación de incertidumbres, recursos como LaTeX, excel, python...

Con lo cual, si me preguntan cual es el significado de la práctica, yo diría que es probar que el alumnado tiene la capacidad de realzar un proyecto, que aunque no sea muy riguroso, ni tampoco complejo, de forma precisa, limpia y ordenada, comprobar su capacidad de expresarse correctamente usando un lenguaje científico, y si tiene que realizarlo en el día del mañana, estar preparado para abordarlo con unas nociones básicas.

[1] Medida directa
[2] Estimación teórica
[3] Medida indirecta

2. Circuito de Corriente Alterna

2.1. Objetivos

Los objetivos para esta práctica son:

- El uso de osciloscopio por parte del alumno, y que comprenda el funcionamiento de un circuito de corriente alterna y del condensador.
- Obtener los parámetros característicos de la respuesta de un circuito RC, comprobar como funciona un condensador y mediante regresiones lineales representar gráficamente estos comportamientos.
- Específicamente en esta parte trataremos de calcular la frecuencia de corte, una frecuencia realmente importante en el mundo de la física e ingeniería, ya que es la frecuencia con la que la potencia se reduce un 50 % , sabiendo que $V_{mR}/V_{mC} = 1$, mediante un ajuste lineal; y como se comporta el desfase de la corriente alterna en función de la frecuencia y que para la frecuencia de corte el desfase tenemos un desfase de 45º.

2.2. Análisis de datos

2.2.1. Frecuencia de corte

En primer lugar tenemos que construir una tabla básica con los elementos que vamos a necesitar, obteniéndolos directamente del osciloscopio, que nos da directamente las amplitudes de los potenciales. En primer lugar configuramos el circuito así:

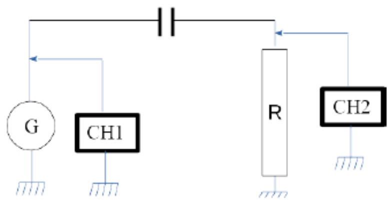


Figura 4: Configuración del osciloscopio para calcular V_{mR}

De esta forma obtendríamos los diferencies valores de V_{mR} en función de la frecuencia. La siguiente configuración sirve para calcular V_{mC}. Cabe destacar que aunque no salga la conexión a tierra del osciloscopio (CH1) esta justamente debajo de G (que es la fuente fem).

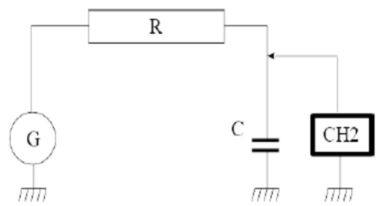


Figura 5: Configuración del osciloscopio para calcular V_{mC}

Antes de continuar con la regresión lineal (que es lo que nos ataña) daremos cuenta de las incertidumbres de los elementos que vamos a usar. Teniendo en cuenta la ecuación 2 tenemos que:

$$s(V_{mR}/V_{mC}) = \sqrt{(-\frac{V_{mR}}{V_{mC}^2})^2 s^2(V_{mR}) + (\frac{1}{V_{mC}})^2 s^2(V_{mR})} \tag{19}$$

y sabiendo que las incertidumbres de tanto V_{mr},V_{mC} y f, son las propias incertidumbres de los aparatos tenemos la incertidumbre de todo. Esto en realidad es bastante importante, ya que como se puede ver s(f) es despreciable frente a s(V_{mR}/V_{mC}). Además para facilitar los cálculos, haremos que s(V_{mR}/V_{mC}) sea constante, y la más alta de ellas (0,48), ya que hacerlo de otra forma llegaría a complicar mucho los cálculos, aunque sepamos que esto

$f\ (Hz)$	$s(f)(Hz)$	$V_{mR}\ (V)$	$s(V_{mR})(V)$	$V_{mC}\ (V)$	$s(V_{mC})(V)$	V_{mR}/V_{mC}	$s(V_{mR}/V_{mC})$
100	10^{-6}	1,52	0,02	20,0	0,20	0,0760	0,0039
200	10^{-6}	3,02	0,02	19,8	0,20	0,1535	0,0079
300	10^{-6}	4,44	0,02	19,6	0,20	0,227	0,012
400	10^{-6}	5,80	0,02	19,2	0,20	0,302	0,016
500	10^{-6}	7,04	0,02	18,8	0,20	0,374	0,020
600	10^{-6}	8,30	0,02	18,3	0,20	0,454	0,025
700	10^{-6}	9,4	0,20	17,7	0,20	0,531	0,031
800	10^{-6}	10,4	0,20	17,2	0,20	0,605	0,036
900	10^{-6}	11,2	0,20	16,7	0,20	0,671	0,041
1000	10^{-6}	12,1	0,20	16,0	0,20	0,756	0,048
1300	10^{-6}	14,0	0,20	14,4	0,20	0,972	0,069
1600	10^{-6}	15,4	0,20	13,0	0,20	1,185	0,093
1900	10^{-6}	16,4	0,20	11,6	0,20	1,414	0,124
2200	10^{-6}	17,0	0,20	10,4	0,20	1,635	0,160
2500	10^{-6}	17,6	0,20	9,5	0,20	1,853	0,199
2800	10^{-6}	18,0	0,20	8,70	0,02	2,069	0,238
3100	10^{-6}	18,5	0,20	8,50	0,02	2,176	0,256
3400	10^{-6}	18,7	0,20	7,48	0,02	2,500	0,334
3700	10^{-6}	18,9	0,20	7,00	0,02	2,700	0,386
4000	10^{-6}	19,0	0,20	6,52	0,02	2,914	0,447

Cuadro 11: Potenciales vs frecuencia

es incorrecto, o al menos no todo lo correcto que podría ser.

Ahora si, tendríamos los datos necesarios para realizar la regresión lineal, y calcular la frecuencia de corte a partir de esta, ya que sabemos teóricamente que el valor de $V_{mR}/V_{mC} = 1$ para esta frecuencia particular. Sin embargo, antes de ello calcularemos la frecuencia de corte teórica, ya que si no, no podremos comprobar la veracidad de dichas formulas (que es parte del objetivo de la práctica). Además así podremos estimar lo cerca (o lejos) que están nuestro cálculo de dicho valor. Sabemos que la frecuencia de corte es un valor que cumple:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \tag{20}$$

Y como $R = 10k\Omega$, $C = 12 \cdot 10^{-9}$, tendríamos que $f_c = 1326Hz$, y calculando su incertidumbre tendríamos que s(f_c)=133. Una vez hecho esto, el siguiente paso es construir la regresión lineal. Para esto introducimos la tabla 12, con aquellos datos necesarios para calcular la regresión lineal. Debemos recordar que en esta regresión estamos calculando el cociente de los voltajes frente la frecuencia, por lo tanto x_i serán los valores de la frecuencia, y y_i el del cociente..

Entonces la regresión lineal quedará como: $\frac{V_{mR}}{V_{mC}} = b \cdot f + a$, y si $\frac{V_{mR}}{V_{mC}} = 1$ tenemos que $f = \frac{1-a}{b} = 1354$. Representando gráficamente los valores calculados experimentalmente en azul, y el valor donde $\frac{V_{mR}}{V_{mC}} = 1$ con un punto negro. Los valores con los que calculamos f_c están en la tabla número 13, calculados con las ecuaciones anteriores (13, 14, 15, 17 y 18).

Tal y como podemos observar la regresión lineal se cumple: prácticamente todos los puntos están en la línea, todos menos uno. Si quisiéramos mejorar la regresión lineal lo que podríamos hacer es repetir (o incluso de descartar) dicho valor, ya que se sobresale bastante de los datos anteriores. De todos modos el coeficiente de regresión lineal es muy bueno, (recordemos que cuanto mas se acerque a la unidad mejor) y en este caso es de 0,9996. Comparando el valor de f_c calculado teóricamente y el recién calculado podemos ver que se acercan mucho, ya que $1326 \approx 1354$, aunque esto lo discutiremos profundamente mas adelante.

Medida (i)	$x_i(f)$	$y_i(V_{mR}/V_{mC})$	$xi \cdot yi$	(xi^2)	(yi^2)	$\Sigma_i(y_i - a - bx_i)$	$\Sigma_i(y_i - a - bx_i)^2$
1	100	0,076	7,6	10000	0,0058	-0,015	0,00023
2	200	0,153	30,5	40000	0,0233	-0,011	0,00013
3	300	0,227	68,0	90000	0,0513	-0,010	0,000094
4	400	0,302	120,8	160000	0,0913	-0,00659	0,000043
5	500	0,374	187,2	250000	0,1402	-0,00667	0,000045
6	600	0,454	272,1	360000	0,2057	-0,00005	0,0000000029
7	700	0,531	371,8	490000	0,2820	0,0050	0,000025
8	800	0,605	483,7	640000	0,3656	0,00611	0,000037
9	900	0,671	603,6	810000	0,4498	-0,00034	0,000000
10	1000	0,756	756,3	1000000	0,5719	0,013	0,00016
11	1300	0,972	1263,9	1690000	0,9452	0,011	0,00013
12	1600	1,185	1895,4	2560000	1,4033	0,0064	0,000040
13	1900	1,414	2686,2	3610000	1,9988	0,018	0,00033
14	2200	1,635	3596,2	4840000	2,6720	0,022	0,00046
15	2500	1,853	4631,6	6250000	3,4322	0,022	0,00049
16	2800	2,069	5793,1	7840000	4,2806	0,021	0,00045
17	3100	2,176	6747,1	9610000	4,7370	-0,089	0,00788
18	3400	2,500	8500,0	11560000	6,2500	0,017	0,00030
19	3700	2,700	9990,0	13690000	7,2900	-0,000036	0,0000000013
20	4000	2,914	11656,44	16000000	8,4920	-0,00332	0,000011
Σ_1	32000	23,565	59661,4	81500000	43,6881	-	0,011

Cuadro 12: Datos para la regresión lineal

a	s(a)	b	s(b)	r
0,01881	0,0090	0,00072466	0,0000045	0,9996

Cuadro 13: Datos finales de la regresión lineal

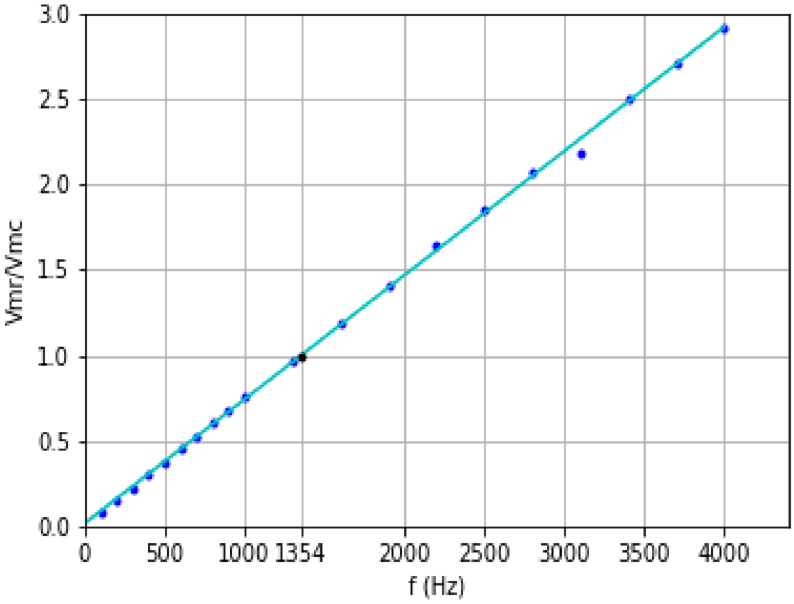
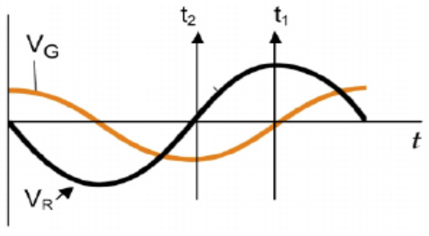


Figura 6: Regresión lineal: potenciales vs frecuencia

2.2.2. Desfase entre señales

Para calcular el desfase entre señales hay que configurar el osciloscopio en modo dual para visualizar las señales del generador (V_G) y de la resistencia (V_R). El desfase entre señales es la diferenia de fase que hay entre un máximo de la onda en el generador y la resistencia, lo que conlleva a que en un determinado instante uno tenga el máximo, y en otro instante la otra tenga su máximo. La diferencia de tiempo es la diferencia entre ambos tiempos. En función de cual sea nuestra señal de referencia, tendremos que esta diferencia (Δt) será positiva o negativa. En nuestro caso cogimos como referencia (t_1) el máximo de V_R, y t_2 el máximo de V_G. Esto lo que conllevo es que nuestra fase es negativa, pero realmente no cambia nada, ya que al cambiar la referencia no cambiarían los datos, solo el signo.

Como hemos dicho, la fase depende de Δt, ya que si nos fijamos en la siguiente imagen:



la diferencia de fase y esta diferencia del tiempo están directamente relacionados, de tal manera que:

$$\varphi = -2\pi f \Delta t \tag{21}$$

Esto nos permite obtener la siguiente tabla a partir de la diferencia del tiempo, y con sus incertidumbres, calculadas con la fórmula 2:

$f(Hz)$	$s(f)(Hz)$	$\log f$	φ (rad)	φ (º)	$s(\varphi)$ (º)	Δt (νseg)	$s(\Delta t)(s)$
100	10^{-6}	2	1,508	86,4	3,6	0,0024	10^{-4}
200	10^{-6}	2,30	1,407	80,6	0,072	0,001120	10^{-6}
300	10^{-6}	2,48	1,357	77,8	0,11	0,000720	10^{-6}
400	10^{-6}	2,60	1,257	72,0	0,14	0,000500	10^{-6}
500	10^{-6}	2,70	1,225	70,2	0,18	0,000390	10^{-6}
600	10^{-6}	2,78	1,206	69,1	0,22	0,000320	10^{-6}
700	10^{-6}	2,85	1,232	70,6	0,25	0,000280	10^{-6}
800	10^{-6}	2,90	1,056	60,5	0,29	0,000210	10^{-6}
900	10^{-6}	2,95	1,018	58,3	0,32	0,000180	10^{-6}
1000	10^{-6}	3,00	0,880	50,4	0,36	0,000140	10^{-6}
1300	10^{-6}	3,11	0,817	46,8	0,47	0,000100	10^{-6}
1600	10^{-6}	3,20	0,704	40,3	0,58	0,000070	10^{-6}
1900	10^{-6}	3,28	0,597	34,2	0,68	0,000050	10^{-6}
2200	10^{-6}	3,34	0,498	28,5	0,79	0,000036	10^{-6}
2500	10^{-6}	3,40	0,408	23,4	0,90	0,000026	10^{-6}
2800	10^{-6}	3,45	0,387	22,2	1,0	0,000022	10^{-6}
3100	10^{-6}	3,49	0,390	22,3	1,1	0,000020	10^{-6}
3400	10^{-6}	3,53	0,385	22,0	1,2	0,000018	10^{-6}
3700	10^{-6}	3,57	0,302	17,3	1,3	0,000013	10^{-6}
4000	10^{-6}	3,60	0,276	15,8	1,4	0,000011	10^{-6}

¡

Cuadro 14: Desfases en función de la frecuencia

La siguiente figura representa gráficamente los valores de la fase en grados sexagesimales en función de las diferentes frecuencias [4]. La curva que podemos ver es una aproximación hecha por python con un polinomio de grado dos, de forma que se pueda observar la curva, ya que representarlo por una regresión lineal no solo sería

[4]En escala logarítimica

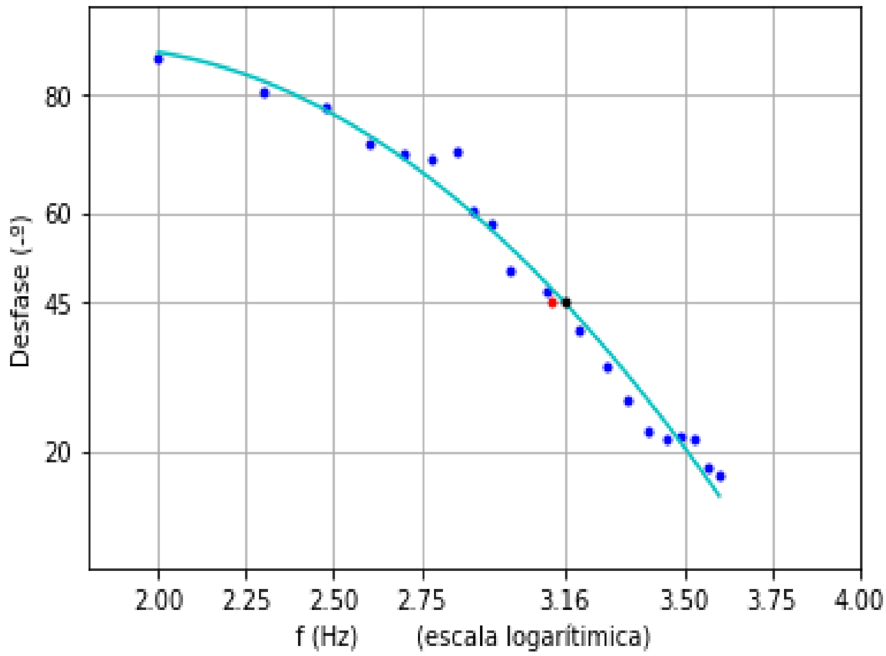


Figura 7: Desafase vs frecuencia

una mala aproximación, si no que tampoco nos ayuda a ver como es la gráfica, ya que realmente es una curva, pero repito: no es mas que una aproximación, por lo tanto no es realista, ni mucho menos. Por esa misma razón la frecuencia equivalente a los 45 grados (en nuestro caso los -45º, aunque realmente la diferencia de fase no cambia) está bastante distorsionada .

De hecho, si calculamos $10^{3,26}$, que es el valor que nos da según dicha aproximación tenemos 1445 Hz, que aunque próximo, no es el valor calculado teóricamente, que sería el punto rojo (con frecuencia de 1326 Hz, en escala logarítmica $10^{3,12}Hz$). Como vemos no se distancian mucho realmente, y dicha diferencia se podría explicar perfectamente mediante la propagación de incertidumbre.

2.3. Conclusiones

Bien, una vez recopilados todos los datos y representadas las gráficas podemos discutir sobre el principal quid de esta parte de la práctica, que nos marcamos como objetivo: ¿Se cumple realmente que para la frecuencia de corte $V_{mR}/V_{mC} = 1$ y que $\varphi = -45^{o}$?

Como ya hemos adelantado antes, que para la frecuencia de corte $V_{mR}/V_{mC} = 1$ se cumple, ya que ambos datos son muy similares, teniendo en cuenta el número de medidas y la precisión de los aparatos (y que hay un dato que se sale por mucho de la medida) las cifras son muy similares:

$$1326 \approx 1354$$

(y teniendo en cuenta que la incertidumbre teórica es de 133 todavía más). Por lo tanto se puede afirmar con cierta seguridad que se cumple dicha regla..

La segunda parte de la pregunta es mas difícil de afirmar, sobretodo por la no existencia de una regresión lineal, con lo cual la representación gráfica es mucho más inexacta, y sobretodo las conclusiones que podamos obtener de ella. Sin embargo, se puede ver como en la imagen 7 el punto rojo [5] esta prácticamente al lado del negro [6]. Como antes no podemos afirmar que se cumple con total seguridad, ya que requeriría un estudio mas detallado (y más precisión), pero con dichos resultados podemos intuir la respuesta: que si se cumple.

[5] Frecuencia de corte teórica

[6] Valor de la frecuencia de corte para los 45º aproximándonos por una parábola realizada por python

Además, cumplimos el resto de los objetivos casi de manera indirecta, ya que para realizar estos gráficos e incertidumbres ya hace falta poseer un mínimo conocimiento del osciloscopio, como funciona un condensador, y entender como es un circuito de corriente alterna.

A diferencia de la primera parte de la práctica, que se centraba más en como se propagaban las incertidumbres, los cálculos y como hacer un riguroso estudio experimental, esta parte se centra más en realmente aprender sobre un circuito de corriente alterna y condensadores, aunque no hay que ignorar que también perfeccionamos esta parte e incluso reforzamos los conocimientos las representaciones gráficas.