Práctica 4 - apéndice: **Propagación en condutores**

Nun medio condutor, suposto homoxéneo, lineal e isótropo, con conductividade σ, permitividade dieléctrica ε permeabilide magnética μ, e en ausencia de fontes, a ecuación de ondas do campo eléctrico é

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

Igual que calquera medio con perdas, un condutor é un medio dispersivo, e só as ondas monocromáticas se poden propagar nel mantendo a forma[1] como ondas planas. Expresando o campo en forma complexa segundo o convenio

$$\mathbf{E}_{fís}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}\right\} \tag{2}$$

, a ecuación anterior[2] quedaría

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \tag{3}$$

sendo $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\sigma = (\beta - i\alpha)^2$ unha constante de propagación complexa. Unha solución en forma de *onda plana* sería

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

con $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}$ constante, onde a dependencia temporal, incluída a fase, vén dada polo convenio (2) e $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{v}}k$ un vector na dirección $\hat{\mathbf{v}}$de propagación.

No caso dun bo conductor (un metal, por exemplo), $\omega\varepsilon \ll \sigma$ e as partes real e imaxinaria de k serían

$$\alpha \simeq \beta \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\epsilon}{2}}$$

Nestas condicións unha onda plana, polarizada linealmente e propagándose na dirección z, podería expresarse como

$$E(z) = E^{+}e^{-\alpha z}e^{-i\beta z} + E^{-}e^{\alpha z}e^{i\beta z}$$

sendo E^{+} e E^{-} as amplitudes das ondas que se propagan nas direccións positiva e negativa (onda reflectida), respectivamente, do eixo z.

Se o condutor é unha lámina plana de espesor uniforme coas supeficies en $z = 0$ e $z = d$, un campo eléctrico aplicado paralelamente á superficie en $z = 0$ propagarase polo conductor como onda plana atenuada, reflexándose na outra cara. A relación entre os campos nas dúas caras resulta[3]

$$E(d) = \frac{E(0)}{\cosh(\alpha d)\cos(\beta d) + i\,\mathrm{senh}(\alpha d)\,\mathrm{sen}(\beta d)} \tag{4}$$

Na práctica a lámina está pechada formando un tubo cilíndrico de radio R. Neste caso as expresións dos campos son máis complicadas (inclúen funcións de Bessel), pero se $d \ll R$ a relación (4) cúmprese aproximadamente tomando a orixe de z nunha das caras.

[1] Non a amplitude.
[2] $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ toma valores complexos.
[3] Problema 8 do boletín 2.