

Cósmicos Analógicos

Daniel Vázquez Lago

30 de mayo de 2025

Índice

1. Introducci3n y objetivos	3
2. Montaje experimental	3
3. Incertidumbre en las medidas	5
3.1. Incertidumbre de observables e incertidumbre de la tasa	5
3.2. Test χ^2	7
4. Caracterizaci3n de los detectores	7
4.1. Determinaci3n de la ventana temporal	7
4.2. Determinaci3n de la zona de trabajo	9
4.2.1. Estudio de U_1	9
4.2.2. Estudio de V_1	10
4.2.3. Elecci3n de alto voltaje y umbral	10
5. Caracterizaci3n estadística de la radiaci3n c3smica secundaria	11
5.1. An3lisis del v3deo: red neuronal	11
5.2. L3mite de la Binomial a Poisson y de Poisson a Gauss	12
5.2.1. Chi cuadrado de la distribuci3n	13
5.3. An3lisis: error cometido por la red neuronal.	13
5.4. An3lisis: estudio de las distribuciones	14
5.5. Conclusiones	16
6. Atenuaci3n de la radiaci3n c3smica secundaria	17
6.1. L3minas de hierro	17
6.2. Planchas de plomo	18
6.3. Laminas de hierro y planchas de plomo	19
6.4. Laminas de plomo, planchas de plomo y bloques de plomos	20
6.5. Conclusiones	22
7. Flujo en la superficie	22
8. Dependencia con el 3ngulo	23
8.1. Distribuciones angulares y contraste con los datos	24
8.2. ¿Separaci3n de componente mu3nica y electr3nica?	25
9. Eficiencia geom3trica	26
9.1. Toma de medidas y valor real de la distancia d	26
9.2. Eficiencia geom3trica	27
9.3. Resultados de Monte Carlo y contraste con los datos	28
10. Conclusiones	29
A. C3digo y M3todo Monte Carlo	31
A.1. M3todo Monte Carlo	31
A.2. C3digo	32
B. Tablas	36
B.1. Distribuciones	36
Referencias	41

1. Introducción y objetivos

Para entender nuestros objetivos primero debemos hacer una breve introducción de qué son los rayos cósmicos secundarios, cómo los vamos a medir y por qué tiene que ser así.

Se le llama rayos cósmicos al conjunto de partículas subatómicas, entre los que encontramos los primarios (electrones, protones, helio, carbón...) originados en fuentes astrofísicas como estrellas y los secundarios (litio, berilio y boro) acelerados en nubes de gas por los primarios, que llega a la tierra procedente de fenómenos astrofísicos. Además de las partículas asociadas con llamaradas solares, la radiación cósmica proviene de fuera del sistema solar. Es esta dependencia con las llamaradas solares las que hacen que la intensidad de la radiación cósmica (en el rango de GeV) depende del lugar y el instante en el que se realice el experimento [7].

Sin embargo nosotros, en un laboratorio sobre el nivel del mar (nuestro caso) no medimos directamente estos rayos cósmicos (exceptuando protones y neutrones). Nosotros medimos los productos que se originan tras la interacción entre los rayos cósmicos y la atmósfera, en particular medimos principalmente los muones, tal y como podemos ver en la imagen 1, que nos dice que a una altitud de el flujo entre muones y protones-neutrones difiere en dos órdenes de magnitud. Ya en menor cantidad (3 órdenes de magnitud respecto a los muones) encontramos electrones y positrones.

Entonces, ¿Cuáles son nuestros objetivos? Pues caracterizar la radiación cósmica incidente lo cual haremos diferenciando la *componente dura* (partículas pesadas cargadas) como muones y la *componente blanda* (partículas ligeras cargadas) como electrones/positrones, ver cuál es el ángulo de incidencia principal de los rayos cósmicos y ver cuál es la estadística de la radiación. Sin embargo previo a esto tendremos que hacer un estudio exhaustivo de cómo realizamos las mediciones y cómo son nuestros detectores.

2. Montaje experimental

En el laboratorio constaremos de dos detectores plásticos de centelleo que denotaremos por “1” y “2” con fotomultiplicadores acoplados exactamente iguales colocados en paralelo tratando de superponer al máximo la superficie de entrada de la radiación y con las superficies lo más cercanas posibles (a menos que se indique lo contrario). La normal a la superficie de entrada de los detectores será normal a la normal del suelo en todas las medidas (a menos que se indique lo contrario).

Los detectores de centelleo se basan en la fluorescencia, que es el fenómeno por el cual una partícula excita los electrones del material quedando durante un pequeño periodo de tiempo en niveles superiores, de tal modo que cuando caen emiten fotones en el visible [10]. Cabe destacar que la energía emitida en forma de luz y la energía depositada por la partícula incidente no es estrictamente lineal (fórmula de Birk) [10]. Así pues los detectores de centelleo son sensibles a la energía de la partícula incidente. de tal modo que actúan como un primer discriminador: si no es capaz de excitar al electrón a una capa superior no se emite fotón de luz visible y por tanto no se detecta la partícula, además que es capaz de dar una respuesta muy corta (en nuestro caso de entorno a unos pocos nanosegundos). Esta es una de las razones por las cuales usamos los

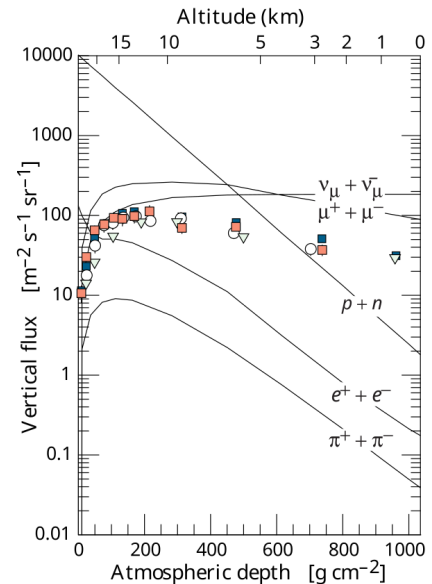


Figura 1: Flujos verticales de rayos cósmicos en función de la altura [7].

centelleadores, ya que nos sirven como un primer discriminador de radiación incidente, ya que nosotros buscamos principalmente muones y electrones cósmicos que tienen un rango de energía en la superficie de la tierra alto (de entorno unos GeV), tal y como se puede ver en el espectro 2.

Sin embargo una de las razones es que nos dan una respuesta muy rápida de unos pocos nanosegundos. Esto nos permite tener una mejor resolución de las partículas incidentes en el material, ya que se minimiza el tiempo de superposición entre dos rayos incidentes, de tal modo que más partículas pueden ser diferenciadas. De hecho esta rapidez también hace que perdamos eficiencia, al menos en comparación con otros centelleadores inorgánicos [9].

A pesar de sus ventajas, por si mismo el centelleador no es capaz de producir suficientes fotones (quizás produce uno o dos) como para producir luz y mucho menos una señal medible en unidades “macroscópicas”, por lo que es necesario que tengamos al final del mismo (en la dirección de los fotones) dos fotomultiplicadores. Su función principal es aumentar el número de fotones gracias a una diferencia de potencial que llamaremos *alto voltaje* o *ganancia* que nos dará el módulo NIM CAEN de alto voltaje. Cuanta más alto sea este voltaje, se generarán más fotones habrá en la señal final. Esto sin embargo es un problema, ya que a partir de cierto voltaje se producirá un fenómeno de avalancha por el cual los fotones tendrán tanta energía que podrán crear pares de electrón-positrón desvirtuando totalmente la medida, de tal modo que se pierda la proporcionalidad entre energía depositada y fotones emitidos. Este fenómeno se estudiará precisamente en el apartado 4.2.

Tras esto lo que se hará es enviar la señal eléctrica producida por los fotones a través de un cable de unos 50-100cm de largo hacia un módulo NIM de umbral, que lo que hará es convertir la señal analógica en una señal lógica con una altura siempre que esta supere un valor regulado por el *voltaje umbral* que podremos controlar en el laboratorio, y que también estudiaremos en 4.2. Si la señal recibida es superior a la dictada por el umbral, se enviará al módulo de conteo y coincidencias, de tal modo que aumentará en una unidad el número de cuentas asociado al detector en cuestión.

Luego este módulo de conteo mostrará en una pantalla el número de cuentas que lleva tanto el detector 1 como el 2, y también enseñará el número de cuentas “en coincidencia”, que son las realmente importantes. Las cuentas en coincidencia se definen como aquellas señales que provenientes de dos detectores diferentes llegan al módulo de conteo en un intervalo de tiempo inferior a la *ventana de coincidencias*, de tal modo que si sucede las “cuentas en coincidencia” aumentará su valor en 1. ¿Por qué son las realmente importantes? Porque las cuentas en coincidencia son las que realmente miden los rayos cósmicos, ya que estos al tener tanta energía son capaces de depositar la energía en el detector 1 y 2 en una diferencia de tiempo de nanosegundos (son partículas prácticamente lumínicas), de tal modo que la distancia entre una señal y otra al llegar al módulo de conteo será muy pequeña. En pocas palabras, todos los rayos cósmicos incidentes serán medibles a través de cuentas en coincidencia, mientras que otras partículas incidentes no serán medibles a través de estas cuentas. Consecuentemente reduciremos el ruido ambiental y el ruido del detector/fotomultiplicador individual de cada detector.

Por tanto caracterizar nuestro detector significa analizar el comportamiento del número de cuentas en coincidencia variando los altos voltajes V_1, V_2 , los voltajes umbral U_1, U_2 y conocer con precisión el valor de la ventana de coincidencias τ_{12} , siendo esta una parte fundamental de esta memoria, particularmente porque de esta caracterización dependerá todo el análisis de los rayos cósmicos.

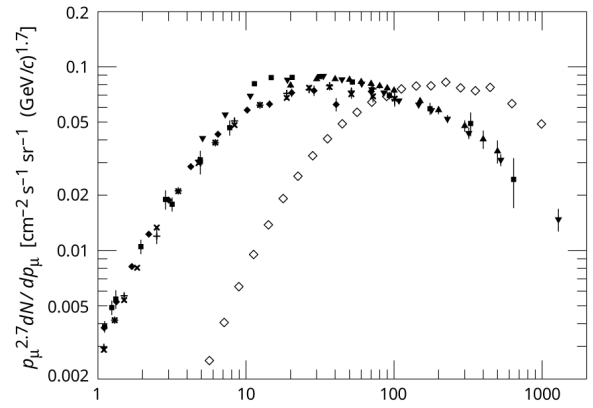


Figura 2: Espectro de la energía muónica al nivel del mar a dos ángulos diferentes [7].

3. Incertidumbre en las medidas

3.1. Incertidumbre de observables e incertidumbre de la tasa

Una de las partes de mayor importancia en la pr3ctica es el an3lisis de las incertidumbres, ya que como en todo experimento ser3n vitales para decidir si dos medidas son estadisticamente compatibles o son mutuamente descartables. Sin embargo su an3lisis no es trivial y mucho menos sencillo. Por eso dedicamos una secci3n entera a tratar las incertidumbres de cada medida que vamos a realizar: posibles fuentes, an3lisis sobre su tipo (A o B, [8]). En el caso de dudas nos acogemos a la secci3n 4.3.7 [8]: «In the absence of any knowledge about the possible values of an input quantity X_i other than that they lie in an interval of width $2a$, and assuming that the values are equally probable, the rectangular distribution should be used». En todas las medidas, dado que no hemos hecho estadística de ninguna de ellas, la incertidumbre asignada ser3 de tipo B.

- **Alto voltaje** (V_1, V_2): como hemos dicho hemos usado varios modulos NIM CAEN modelo 472 de alto voltaje tal y como mostramos en la imagen 3. Consultando el manual dado por el fabricante [5] podemos ver que la incertidumbre asignada a las medidas para una lectura entre el 10 % y el 90 % del rango completo (siendo el m3ximo 6kV), el error m3ximo es 1 % del valor leído. Como nosotros daremos una ganancia de entorno a 1.5 a 2 kV, estamos dentro de ese rango. As3 pues el valor de incertidumbre asignable a cada medida V , como m3ximo ser3:

$$u_1^{\text{m3x}}(V) = \%1 V \quad (1)$$

Sin embargo nosotros interpretamos que el fabricante nos da un intervalo de confianza con todos los valores dentro igual de probables, lo que se corresponde a una distribuci3n rectangular [8]. Eso nos lleva a:

$$u_1(V) = \frac{V}{\sqrt{3} \cdot 100} V \quad (2)$$

donde donde los c3lculos est3n incluidos (secci3n 4.3.7 [8]). Dado que para medir el valor hemos usado unos volt3metros, tambi3n tendremos que tener en cuenta la incertidumbre del volt3metro (independiente respecto al m3dulo). Como no conocemos al volt3metro usamos el valor est3ndar asociada a uno de estos:

$$u_2^{\text{m3x}}(V) = \%1 + 2 \text{ digit } V \rightarrow u_2(V) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\%1 + 2 \text{ digit}) V \quad (3)$$

dando como incertidumbre total de la medida la combinaci3n de ambas $u(V) = \sqrt{u_1(V)^2 + u_2(V)^2}$.

- **Voltaje umbral** (U_1, U_2): para esto usamos un CAEN Mod. N96 – 8 Channel Discriminator (NIM) (véase imagen 3). Sin embargo no aparece la informaci3n de la precisi3n o incertidumbre asociada a cada media en el manual [15], solo se nos dice que la precisi3n es de 1 mV, con lo que tendremos que conformarnos con asignar una incertidumbre a cada medida asociada con la distribuci3n rectangular de anchura $2a$ siendo la anchura a la precisi3n del aparato con la que la medimos, esto es, $a = 0.001 \text{ mV}$. Adem3s incluiremos la precisi3n del pol3metro igual que antes (ecuaci3n 3 en mV), tal que

$$u_1(U) = \frac{0.001}{\sqrt{3}} \text{ mV} \quad u(U) = \sqrt{u_1(U)^2 + u_2(U)^2} \text{ mV} \quad (4)$$



Figura 3: M3dulo NIM CAEN 472 (derecha), discriminador N96 (izquierda)

- **Grosor de las placas (x):** el grosor de las placas las medimos con un calibrador anal3gico de precisi3n 0.05 mm. Al igual que antes, solo sabemos el rango $2a$ en el que caen, asignadole una distribuci3n uniforme tenemos:

$$u(x) = \frac{0.05}{2\sqrt{3}} \text{ mm} \simeq 0.014 \text{ mm} \quad (5)$$

- **Distancias entre detectores (d):** la distancia entre detectores las medimos a partir de un metro con una precisi3n de 1 mm. La fuente de incertidumbre con el metro no solo viene dada por su precisi3n, si no por su poca capacidad para mantenerse recto, a1nadiendo distancia ficticia debido a la posible curvatura del mismo. Le asignamos pues un valor $u_1 = 2\text{mm}$ a la incertidumbre proveniente de este proceso. Adem3s tendremos en cuenta la incertidumbre dada por la precisi3n del aparato (distribuci3n uniforme de anchura 1 mm):

$$u_2(d) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ mm} \simeq 0.28 \text{ mm} \quad (6)$$

tal que $u(d) = \sqrt{u_1(d)^2 + u_2(d)^2} = 2.0 \text{ mm}$.

- **Tama1os del detector (l):** ciertos tama1os como el grosor del detector los medimos con una regla de precisi3n 1mm. A diferencia de la distancia entre detectores, no tenemos ninguna raz3n para a1adir m3s fuentes que incertidumbre que la precisi3n del aparato. As3 pues:

$$u(l) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ mm} \simeq 0.28 \text{ mm} \quad (7)$$

- **3ngulos (θ):** los 3ngulos los medimos con un transpondedor de 3ngulos de pl3stico de precisi3n 1° . No consideramos que haya otra fuente de incertidumbre, al menos en cuanto a la medici3n. Veamos entonces que:

$$u(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{3}} ^\circ \simeq 0.28 ^\circ \quad (8)$$

- **Medidas de tiempo (t):** las medidas de tiempo son las m3s dif3ciles de analizar, ya que la precisi3n del aparato de medida (cron3metro de nuestros tel3fonos m3viles) es ridículamente peque1a respecto al error asociado al proceso de toma de medidas.

Para tomar una medida del n3mero de cuentas y el tiempo lo que hac3amos era avisarnos mediante gestos verbales o visuales cuando uno apagaba la m3quina del contaje para que el compa1ero inmediatamente parara el cron3metro. En general el proceso era advertido previamente, realizando comentarios del tipo, «En 3, 2, 1...¡Ya!», de tal modo que minimiz3ramos el posible error. No hicimos una estadística del proceso, por lo que el valor que daremos ser3, probablemente, un poco m3s alto del que podr3amos medir con la estadística. Nostros consideramos que como m3ximo nos podemos llegar a desviar entorno a $\Delta t = 0.3 \text{ s}$. Considerando que la mayor parte de las veces habr3 una medida de tiempo inferior a esta, podemos consdierar que sigue una distribuci3n triangular, de tal modo que:

$$u(t) = \frac{0.3}{\sqrt{6}} \approx 0.12 \quad (9)$$

asociada a cada medida. En general esta media ser3 despreciable frente a \sqrt{N} que tendremos en cada medida de cuentas, aunque no por ello la descartaremos.

- **Cuentas:** este es el m3s importante de los observables. A un valor de cuentas N le asignaremos una incertidumbre de $u(N) = \sqrt{N}$ ya que seguir3 la distribuci3n de Poisson, tal y como veremos en el apartado 5. El error relativo es de $u(N)/N = 1/\sqrt{N}$, y siempre tratamos de mantener que sea inferior al 5 %, lo que requiere un n3mero de cuentas de entorno a $N = 400$.

Estas son todas las medidas que realicemos. Los otros valores presentados a lo largo de la pr3ctica ser3 productos o funciones de estos. A continuaci3n vamos a presentar los como es la **tasa** $n = N/t$. La tasa que es un valor proveniente de dos observables con incertidumbre tendr3 una incertidumbre asociada dada por la f3rmula de propagaci3n de incertidumbres (v3ase manual [4]), tal que

$$u(n) = \sqrt{\left(\frac{u(N)}{t}\right)^2 + \left(\frac{u(t)N}{t^2}\right)^2} \quad (10)$$

el otro funcional que vamos a usar es la ventana de coincidencias τ , pero como su f3rmula necesita un poco de contexto lo comentaremos en su respectivo apartado 4.1.

3.2. Test χ^2

El **test chi cuadrado** es una herramienta estadística que nos sirve para descartar o aceptar hip3tesis realizadas sobre los datos con cierto nivel de confianza. El test de chi cuadrado se puede usar tanto para descartar o aceptar distribuciones de probabilidad, medias o bondades de ajuste (secci3n 3.3, [4]).

Nosotros vamos a usarlo en particular para descartar o aceptar las hip3tesis de bondades de ajuste (es decir, de regresiones lineales, exponenciales...). Consideremos entonces que hemos ajustado un conjunto de datos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ a una ecuaci3n $y = f(x)$. Definimos el valor χ^2 de nuestro ajuste como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{s^2(y_i)} \quad (11)$$

Sea $n - r$ el n3mero de grados de libertad de nuestra distribuci3n χ^2 donde r es el n3mero de par3metros con los que hayamos ajustado $f(x)$. Entonces, para un nivel de confianza α rechazamos la hip3tesis (nuestros datos se comportan tal que $y = f(x_i)$) si $\chi_{\alpha, n-r}^2 \leq \chi^2$ donde $\chi_{\alpha, n-r}^2$ es el valor del percentil de la distribuci3n con dichos grados de libertad y un nivel de confianza α , [4]. Cabe destacar que esto asume que y_i se distribuye de modo gaussiano en torno a su valor medio \bar{y}_i . Nosotros para todos los ajustes y su χ^2 usaremos C++ CERN ROOT [3].

4. Caracterizaci3n de los detectores

En esta secci3n vamos a caracterizar los detectores, que tal y como hemos dicho, implica conocer el comportamiento de las cuentas en coincidencia respecto los valores de alto voltaje y de voltaje umbral, as3 como saber cual es el valor de la ventana de coincidencias. Primero determinaremos la zona de trabajo.

4.1. Determinaci3n de la ventana temporal

Adem3s de los eventos en coincidencia, cada detector producir3 un n3mero de pulsos que no pertenecer3n a emisiones en coincidencia. Estos eventos no coincidentes, debido a su naturaleza aleatoria, es posible que se generen en un rango de tiempo suficientemente peque1o como para que sean detectadas como coincidencias. Nuestro objetivo claramente est3 en minimizar esta coincidencia aleatoria y maximiar las coincidencias reales, por ejemplo aumentando el voltaje umbral, o disminuyendo la actividad de la fuente Cap. 18 Knoll [10]. Cabe destacar que el cambio en la geometr3a afecta de igual manera a tanto al as accidentales como a las reales, por lo que podemos usar los valores obtenidos aqu3 en toda la pr3ctica.

Entonces, ¿Cual es el fin 3ltimo de este apartado? Obtener la ventana de coincidencias, ¿Por qu3? Porque es necesario conocerla para poder obtener la tasa de coincidencias accidentales en cada medida, que conociendo

la tasa de coincidencias medidas nos dar3 un valor de la tasa de coindiciencias reales, que usaremos en el resto de la pr3ctica.

As3 pues, sea n_{acc} es la tasa de coincidencias accidentales, n_1 y n_2 son las tasas de cada uno de los detectores individuales, entonces τ que es la ventana de coincidencias viene dada por:

$$n_{acc} = 2\tau n_1 n_2 \quad (12)$$

ecuacion 17.28 [10]. Despejando para obtener τ :

$$\tau = \frac{n_{acc}}{2n_1 n_2} \quad (13)$$

as3 pues, tenemos que la incertidumbre total de la ventana de coincidencias.

$$u(\tau) = \sqrt{\left(\frac{u(n_{acc})}{2n_1 n_2}\right)^2 + \left(\frac{n_{acc}}{2n_1^2 n_2} u(n_1)\right)^2 + \left(\frac{n_{acc}}{2n_1 n_2^2} u(n_2)\right)^2} \quad (14)$$

Sin embargo nosotros no podemos medir n_{acc} , nosotros medimos n_{12} . Para asegurarnos que todas las medidas de n_{12} son accidentales lo que hicimos fue cruzar los detectores de tal modo que $N_{12} \approx N_{acc}$, siendo los datos obtenidos representados en la [tab. 1](#).

Tabla 1: Ventana de coincidencias

N_1	N_2	N_{acc}	t [s]	n_1 [s^{-1}]	n_2 [s^{-1}]	n_{acc} [s^{-1}]	τ [μs]
$4.532(21) \times 10^4$	$1.085(10) \times 10^4$	154(12)	94.21(30)	481.1(27)	115.2(12)	1.63(13)	14.7(12)
$8.490(29) \times 10^4$	$2.146(15) \times 10^4$	268(16)	184.68(30)	459.7(17)	116.19(82)	1.451(89)	13.58(84)
$4.317(21) \times 10^4$	$1.609(13) \times 10^4$	181(13)	101.74(30)	424.3(24)	158.1(13)	1.78(13)	13.3(10)

Cabe destacar que el 3ltimo valor lo medimos con dos voltajes umbrales diferntes $U_1, U_2 = -0.0750(29)$ para as3 aumentar el n3mero de accidentales. En el laboratorio tambi3n medimos una medida extra aqu3 no representada, ya que fueron mal tomados los datos. Aplicando ahora la media ponderada y la incertidumbre de la media ponderada podemos obtener un valor τ :

$$\tau = 13.74 \text{ s}^{-1} \quad u(\tau) = 0.57 \text{ s}^{-1} \quad (15)$$

Este valor es efectivamente un valor que podr3amos esperar. Una ventana de coincidencias mayor har3a que aumentar3 la tasa de coincidencias accidentales sin aumentar las verdaderas, mientras que una menor podr3a hacer que una tasa de coincidencias real no se midiera. ¿Como es esto 3ltimo posible, si hemos dicho al principio que entre una y otra medida proveniente de un rayo c3smico hay entorno a unos pocos nanosegundos? Si, esto 3ltimo es cierto, pero hay m3s procesos aparte de este: la se3al tiene que propagarse por el centelleador, ser multiplicada por el fotomultiplicador, y tiene que enviarse a trav3s de cables con una posible diferencia calidad y tama3o. Una peque3a diferencia de varios cent3metros en el cable ya producir3a esta diferencia. Consdieramos entonces que el valor obtenido es plausible y esperado con nuestro conocimiento te3rico. As3 pues, conocido n_1 y n_2 podemos calcular f3cilmente la **tasa de coincidencias accidentales** n_{acc} y obtener entonces la **tasa de coincidencias reales** n_r como:

$$n_{acc} = 2\tau n_1 n_2 = 2\sqrt{(u(\tau)n_1 n_2)^2 + (u(n_1)\tau n_2)^2 + (u(n_2)\tau n_1)^2} \quad (16)$$

$$n_r = n_{12} - n_{acc} \quad u(n_r) = \sqrt{u(n_{12})^2 + u(n_{acc})^2} \quad (17)$$

4.2. Determinaci3n de la zona de trabajo

Es muy importante elegir bien los pares de valores V_1 , V_2 , U_1 y U_2 . Si, por ejemplo, V fuera demasiado grande, es probable que entr3ramos en una zona de avalancha del multiplicador perdiendo toda la informaci3n de las medidas. Por otro lado, si fuera muy peque1o, es probable que las medidas reales no fueran suficientemente amplificadas para que sean detectadas. Lo mismo ocurre con el valor umbral U , si es muy grande las medidas se reducir3n hasta un punto en el que no veamos nada, mientras que si es muy bajo detectaremos medidas espurias. Lo que queremos nosotros es precisamente estar en la regi3n en la que ambos valores est3n compensados: que todas las medidas de rayos c3smicos sean suficientemente amplificadas y medidos, con el menor ruido. Esto que acabamos de contar de manera naif se conoce en la literatura por *counting plateau*, regi3n en la que el experimento tiene una sensibilidad m3nima al ruido/medidas esp3reas Cap. 4 [10]. Existen varias maneras de detectar un plateau, pero el que nosotros vamos a usar es estudiar la variaci3n de n_{12} respecto uno de los altos voltajes (en particular V_1) dejando constante los otros, luego estudiaremos el valor de n_{12} respecto U_1 (con los otros constantes). Analizando el comportamiento exponencial, nos quedaremos con uno de los valores en los que la exponencial es m3s plana.

4.2.1. Estudio de U_1

En la tabla 2 podemos ver las medidas tomadas, mientras que en la fig. 4 vemos su representaci3n gr3fica. En el proceso de medida lo que hicimos fue coger un valor m3ximo y el m3nimo de U_1 basado en informaci3n dada por otros compa1eros. Entonces decidimos coger tres de valores m3s en el medio, y vimos que efectivamente parec3a que hab3a un comportamiento esperado, con una regi3n plana y un salto exponencial en el rango de $U_1 \approx 90$ mV. Los otros valores constantes fueron: $V_2 = 1.888$ V, $U_2 = -0.101$ V y $V_1 = 1.899$ V.

Como podemos comprobar en la fig. 5 los datos se comportan como esperar3amos, aunque la exponencial est3 claro que no es del todo bueno $\chi \approx 9.7$ que se puede descartar a un nivel de confianza del 97.5 % al ser mayor que 9.3. De esto obtenemos que la exponencial no representa bien el plateau, a diferencia de lo que pens3bamos antes. Ahora bien, centremos en lo relevante ¿con cu3l valor de U_1 nos quedamos? La decisi3n no es trivial, y lo que nosotros decidimos fue coger un valor relativamente peque1o de $U_1 \approx -0.100$ V ya que est3 en el plateau como los otros valores, y al ser un poco m3s laxo con el umbral consideramos que tendr3amos m3s cuentas.

Figura 4: n_{12} frente U_1 con ajuste exponencial [31]

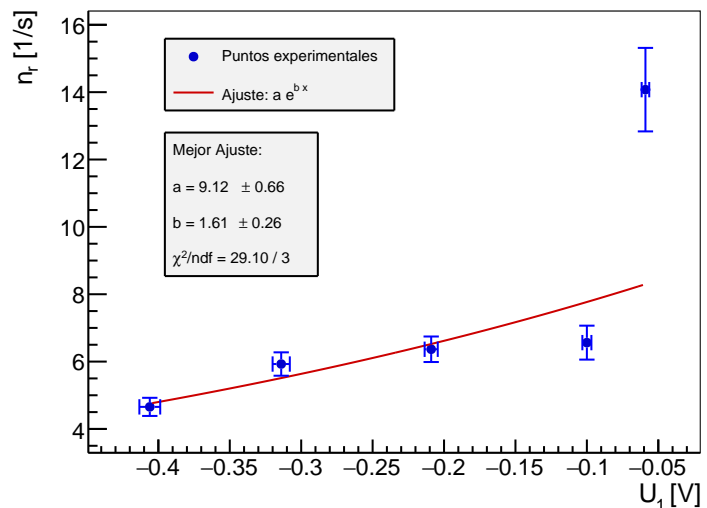


Tabla 2: Medidas variando el alto voltaje U_1 .

U_1 [V]	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{12} [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]
-0.0590(27)	1822(43)	$4.082(20) \times 10^4$	350(19)	15.50(13)	117.5(29)	2633(26)	22.6(12)	8.51(21)
-0.1000(32)	9940(100)	3040(55)	223(15)	29.72(13)	334.6(37)	102.3(19)	7.50(50)	0.940(22)
-0.2090(46)	6250(79)	5667(75)	323(18)	47.52(13)	131.5(17)	119.3(16)	6.80(38)	0.4310(98)
-0.3140(60)	3764(61)	6482(81)	318(18)	51.45(13)	73.2(12)	126.0(16)	6.18(35)	0.2533(59)
-0.4060(73)	8208(91)	3060(55)	320(18)	66.51(13)	123.4(14)	46.01(84)	4.81(27)	0.1560(36)

4.2.2. Estudio de V_1

En la tabla 3 podemos ver las medidas tomadas, mientras que en la fig. 5 vemos su representaci3n gr3fica. A priori parece que la cantidad de datos es muy peque1a, insuficiente para realizar estadística. ¿Por qu3 cogimos tan pocos datos? La raz3n es sencilla: falta de tiempo. Sin embargo tampoco fuimos tan ingenuos. En el proceso de medida lo que hicimos fue coger el valor m3ximo y el m3nimo de V_1 que nos dictaba la seguridad en el laborato y el aparato (respectivamente), con lo que comprobamos efectivamente que no había mucha distancia entre el n_{12} de ambos. Entonces decidimos coger un par de valores en el medio y tras una r3pida representaci3n en Excel nos dimos cuenta de que no parecía comportarse como esper3bamos, no hay una regi3n particularmente plana.

Como podemos comprobar en la fig. 5 los datos no se comportan como esperaríamos (salto abrupto) teniendo un crecimiento exponencial en le rango de valores. Esto tiene tres explicaciones: o estamos en el plateau y somos muy sensibles por tanto al m3s m3nimo cambio de n_{12} , estamos en la zona de crecimiento *hacia* el plateau o estamos fuera del plateau. ¿C3mo saberlo? No podemos. Consecuentemente, ¿con cu3l valor nos quedamos? La decisi3n es complicada, y lo que nosotros decidimos fue coger un valor relativamente grande de $V_1 \approx 1.910$ V ya que al tener m3s ganancia tendríamos m3s cuentas (tampoco podemos decir que estas medidas tienen m3s ruido que cualquier otra).

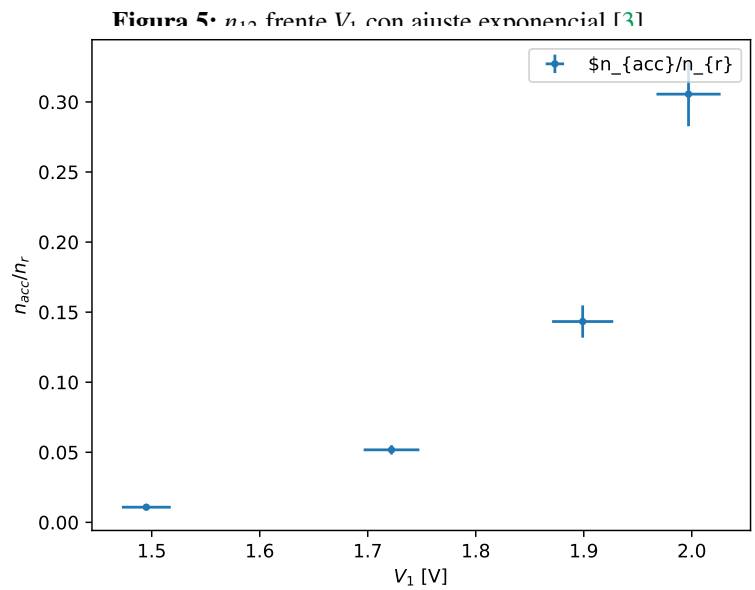


Tabla 3: Medidas variando el alto voltaje V_1 .

V_1 [kV]	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{12} [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]
1.495(23)	1026(32)	7436(86)	300(17)	65.29(13)	15.71(49)	113.9(13)	4.59(27)	0.0492(13)
1.722(26)	4737(69)	5695(75)	308(18)	48.92(13)	96.8(14)	116.4(16)	6.30(36)	0.3098(71)
1.899(28)	9940(100)	3040(55)	223(15)	29.72(13)	334.6(37)	102.3(19)	7.50(50)	0.940(22)
1.997(30)	$2.492(16) \times 10^4$	3904(62)	338(18)	33.79(13)	737.4(55)	115.5(19)	10.00(55)	2.341(53)

4.2.3. Elecci3n de alto voltaje y umbral

Finalmente elegimos los valores de $V_1, V_2 = 1.911(28)$ kV y $U_1 = 101(32)$ mV y $U_2 = 110(36)$ mV para el resto de valores. ¿Por qu3? En primer lugar, consieramos que una valor de alto voltaje alto (sin pasarse de 1.95 kV) es conveniente ya que auemntará el n3mero de cuentas y como hemos podido comprobar no est3 “m3s en el plateau” que cualquier otro valor. Por otro lado, al auemntar los altos voltajes decidimos aumentar ligeramente los valores de U_1 y U_2 ya que podr3 eliminar medidas espureas y a3n estaría en el plateau.

5. Caracterización estadística de la radiación cósmica secundaria

Tras caracterizar nuestro detector y su comportamiento, ahora ya podemos estudiar los rayos cósmicos secundarios. Tal y como se nos dice en el guión de la práctica [14], en principio tanto la radiación cósmica como las coincidencias accidentales siguen una distribución de Poisson. ¿Cómo comprobamos, que, efectivamente, siguen una distribución de Poisson? Pues simplemente estudiando el número de cuentas que hay en diferentes intervalos de tiempo y luego representar el histograma de frecuencias, haciendo una bondad de ajuste a una poissoniana, para luego hacer una comprobación con el test de χ^2 . También incluiremos una gaussiana, por razones que serán comentadas posteriormente. Primero comentaremos un poco la adquisición de datos que realizamos, ya que es peculiar; luego realizaremos un análisis detallado sobre el test χ^2 aplicado a este problema y sobre la distribución de Poisson. Posteriormente comentaremos la tendencia a la distribución de gauss cuando el número de cuentas es elevado y finalmente analizaremos los resultados.

5.1. Análisis del vídeo: red neuronal

El estudio aquí presente se realizó analizando una aproximadamente hora y veinte minutos de vídeo, lo cual, en cuentas con un intervalo de 1 segundo serían aproximadamente unos 5250 datos. Lógicamente nos parecía inviable tomar cada uno de estos a mano, parando el video cada segundo. Lo que hicimos fue con un programa de python (a través de los módulos `cv2` y `pytesseract`) que nos sacaba imágenes de los fotogramas que quisiéramos (así, podíamos ir desde 1 segundo a 0.1 segundos, si quisiéramos). Además no solo contábamos con obtener fotogramas, si no que podíamos cortar la imagen y seleccionar un cacho del video [fig. 6](#) y trasformarlo en blanco y negro [fig. 7](#), lo cual es óptimo para el reconocimiento por una red neuronal.

Figura 6: Fotograma aleatorio del video.



Figura 7: Fotogramas individuales



Dado que no queríamos perder varias horas copiando y pegando datos, hicimos una red neuronal convolucional (CNN) a través de `tensorflow` [12] que reconocía las imágenes de los números una vez segmentadas de cada fotograma (con más de un 99.5 % de precisión). Para entrenarla, se etiquetaron (a mano) sobre 800 imágenes de 4 dígitos cada una, siendo segmentados en los diferentes dígitos, lo que ofrece un total de 3200 dígitos, lo que significa que cada dígito fue entrenado con aproximadamente 320 imágenes, lo cual nos llevo en total 3 horas. Luego se aplico el modelo resultante del entrenamiento a la totalidad de las imagenes (5200) (véase [fig. 8](#) y [9](#)) que fueron exportadas a un fichero csv, y luego tratadas en python y C++ Root.

Figura 8: Fotograma analizado por la red neuronal.

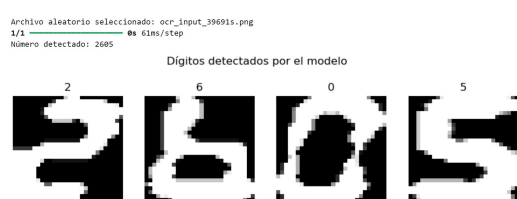
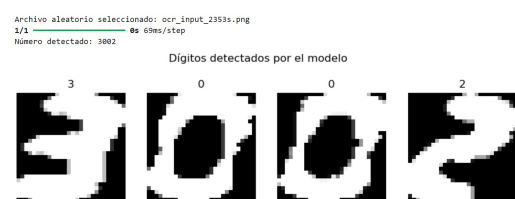


Figura 9: Fotograma analizado por la red neuronal.



Tras tratar los 5250 fotogramas, y realizar los histogramas de 1 segundo y 2 segundos (y luego de 5 y 10, para comprobar que tiende a una gaussiana) nos dimos cuenta de que la media de cuentas est1 en 8.15 (fig. 15), mientras que en el gui3n [14] se nos indica que «(...) la media de coincidencias sea baja, inferior a 5 coincidencias». Por suerte ten1amos una red neuronal ya entrenada, por lo que solo tuvimos que ocoger los fotogramas correspondientes a 0.1 segundos (para asegurarnos que la medida era menor a 5). As1, con m1s de 52500 datos, obtuvimos el histograma de 0.1 seg. (fig. 11), ahora s1, con una media de cuentas de 1.16, tal y como se nos ped1a.

Ahora bien, la red neuronal lee aproximadamente 52500 datos para 0.1 s y 5250 para 1 s, y en algunas ocasiones comete errores, es decir, **etiqueta un n1mero que no sucedi3, por ejemplo 7680 (pantalla) lo lee como 1680**. Esto ocurre aproximadamente con una tasa del 1 %, lo que implica aproximadamente 150 datos en 1 s. y 1500 en 0.1 ms. 3C3mo corregimos estos datos, sin tener que revisar a mano, que al final es lo que quer1amos evitar con esta red neuronal? Lo que hicimos fue un estudio estad1stico de las primeras 800 cuentas (las mismas usadas para entrenar la red), de lo que deducimos un n1mero m1ximo para las cuentas de 1 segundo. Este dato ser1 el valor de corte para el valor de 1 segundo. A sabiendas de que estamos usando un corte usando el 15 % de las cuentas, lo que haremos ser1 incrementar levemente este l1mite. Cu1nto lo comentaremos posteriormente, y como trasladarlo a las frecuencias con otros segundos tambi3n.

5.2. L1mite de la Binomial a Poisson y de Poisson a Gauss

Supongamos que nuestras medidas es analizar el n1mero de 3xitos que hay en un n1mero de pruebas. Cada prueba es un proceso binario, ya que solo hay dos resultados: 3xito o fracaso. En el caso de que el eveneto sea aleatorio con una probabilidad de 3xito en cada instante

En el an1lisis estad1stico de los procesos de detecci3n de radiaci3n, es habitual modelar los eventos observables (como la detecci3n de part1culas) mediante distribuciones de probabilidad discretas. Una de las m1s fundamentales es la distribuci3n binomial, la cual describe la probabilidad de observar x 3xitos en n ensayos independientes, cada uno con una probabilidad de 3xito p :

$$P_{\text{Binomial}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (18)$$

Cuando uno estudia fen3menos que sigan este esquema en el que la probabilidad de 3xito es muy peque1a y el n1mero de fen3menos estudiados es elevado, la distribuci3n binomial puede aproximarse por una distribuci3n de Poisson. Para que la binomial tienda a una distribuci3n de Poisson, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- $n \rightarrow \infty$ (n1mero de ensayos muy grande).
- $p \rightarrow 0$ (probabilidad de 3xito muy peque1a).
- $\mu = np = \text{constante}$ (media finita y fija).

En este l1mite, la distribuci3n binomial converge a:

$$P_{\text{Poisson}}(x) = \frac{(\mu)^x}{x!} e^{-\mu} \quad (19)$$

donde μ es la *media* de la distribuci3n (ec. 3.24 [10]). Por otro lado, cuando el n1mero esperado de eventos μ es suficientemente grande ($\mu \gtrsim 30$), la distribuci3n de Poisson puede aproximarse por una distribuci3n normal (o gaussiana), gracias al teorema del l1mite central:

$$P_{\text{Gauss}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\mu}\right) \quad (20)$$

donde de nuevo $\sigma = \sqrt{\mu}$. En esta secci3n nos centraremos en estudiar las caracaterísticas estadísticas de la radiaci3n c3smica en diferentes intervalos de tiempo. As3, seremos quienes de afirmar si para un tiempo determinado de medida la distribuci3n sigue (o no) una distribuci3n de binomial, de Poisson y/o Gauss.

5.2.1. Chi cuadrado de la distribuci3n

Sea N el n3mero de cuentas, $h(x_i)$ la frecuencia observada de la medida x_i , $P(x_i)$ y $NP(x_i)$ la distribuci3n de probabilidad y la predici3n de una distribuci3n particular (Gauss o Poisson)

$$\chi^2_{\text{Poisson}} = \sum_{i=0}^N \frac{(h(x_i) - NP(x_i))^2}{\sigma(x_i)^2} \quad \chi^2_{\text{Gauss}} = \sum_{i=0}^N \frac{(h(x_i) - NP(x_i))^2}{\sigma(x_i)^2} \quad (21)$$

v3ase Bevington [2] donde i recorre todos los posibles datos. El valor $\sigma(x_i) = \sqrt{NP(x_i)}$, que en el bevington aproximan por $\sigma(x_i) \approx \sqrt{h(x_i)}$. Nosotros usaremos esta 3ltima ya que «the flucutations in the observed frequencies $h(x_j)$ come from the statistical probabilities of making random selections of finite numbers of items and are distributed according to the Poisson distribution (...)». Comprobando si χ^2 es mayor o menor que el valor tabulado, veremos la compatibilidad de los datos con la distribuci3n en cuesti3n. **Los grados de libertad** ser3n siempre el n3mero de bins menos 2, siendo estos dos las dos ligaduras de las distribuciones: la normalizaci3n de la distribuci3n y la media.

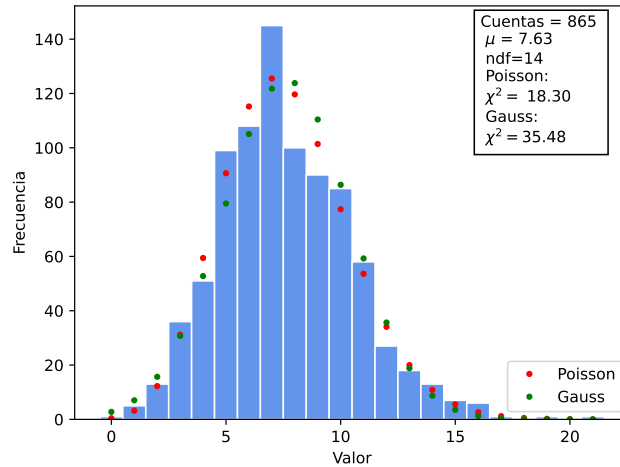
5.3. An3lisis: error cometido por la red neuronal.

Los valores contados a mano son:

Tabla 4: Tabla para 1 s con $\mu = 7.63$, $N = 865$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 18.30$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 35.48$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0-1	7	4.06	1.24	12.54	4.38
2	13	12.26	0.04	15.68	0.55
3	36	31.17	0.65	30.71	0.78
4	51	59.42	1.39	52.76	0.06
5	99	90.64	0.71	79.49	3.84
6	108	115.21	0.48	105.06	0.08
7	145	125.52	2.62	121.78	3.72
8	100	119.66	3.87	123.82	5.67
9	90	101.40	1.44	110.42	4.63
10	85	77.33	0.69	86.37	0.02
11	58	53.62	0.33	59.26	0.03
12	27	34.08	1.85	35.66	2.78
13	18	19.99	0.22	18.82	0.04
14	13	10.89	0.34	8.71	1.41
15	7	5.54	0.31	3.54	1.71
16-21	9	4.63	2.12	1.79	5.77

donde podemos ver que hemos juntado los valores totales posibles para aquellas cuentas inferiores a 5 ya que “si la media de cuentas por intervalo es pequeña (≤ 5), en la distribuci3n de Poisson muestra su car3cter discreto

Figura 10: Histograma para 1 s. con datos tomados a mano.

y asim3trico, y es preferible reagrupar los bins antes de aplicar un test" [14]. La frecuencia entre 0-1 y 16-21 cuentan cada uno como un 3nico grado de libertad. Para la evaluaci3n de la probabilidad claramente $P \cdot N$ tenemos claramente que sumar la probabilidad de 0 y 1 para tener la de 0-1, id3m para 16-21. Aunque reduce la resoluci3n del histograma, este proceso mejora la validez estadística. Este proceso lo seguiremos en todas y cada una de las gr3ficas posteriores.

Los valores de la χ^2 para ambas distribuciones no dejan margen de duda (tabulaci3n procedente del **NIST**). La $\chi^2_{0.9,14} = 21.064$, tal que nuestra distribuci3n de poisson $\chi^2_{\text{Poisson}} = 20.58$, por lo que podemos afirmar que sigue dicha distribuci3n con una alta probabilidad, mientras que $\chi^2_{\text{gauss}} = 58.15$, lo que es descartable con un margen de confianza altísimo ya que $\chi^2_{0.999,14} = 36.123$.

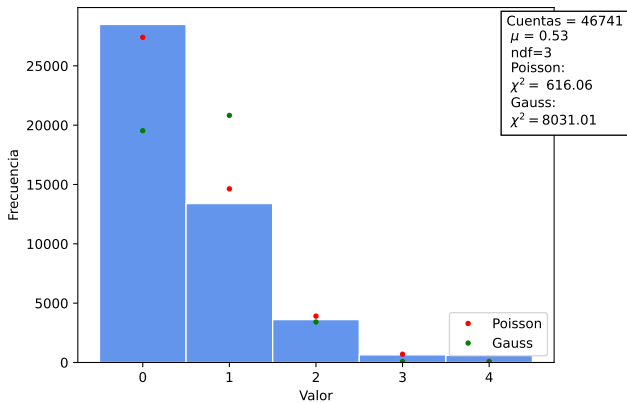
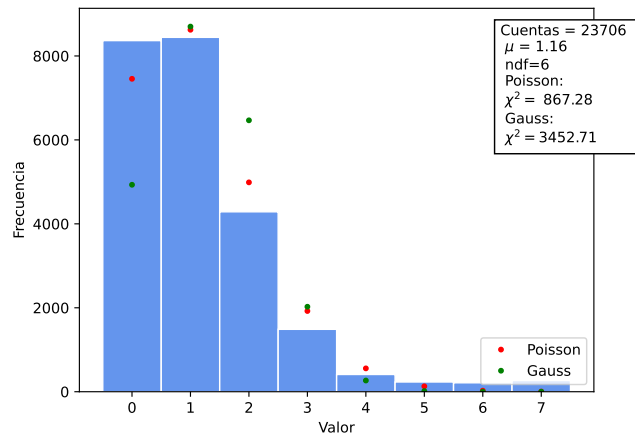
Los datos avalan un comportamiento claramente poissoniano, por lo que podemos usar la distribuci3n de Poisson para dar un margen m3ximo a la distribuci3n. Por ejemplo, para la distribuci3n de poisson con media 7.63, aseguramos que un valor por encima de 30 tiene a un 0.0000001 de posibilidades (10^{-6}). Para el resto haremos lo mismo, es decir, para 0.1 seg. el l3mite estar3 en $k = 4$, para 0.2 seg. estar3 en $k = 7$... calculado a partir de la distribuci3n con la media μ de dicha distribuci3n

Dado que lo que queremos estudiar es la distribuci3n de Poisson, ser3 suficiente comprobar si los datos entre esos l3mites se ajustan o no a la misma distribuci3n, ya que aunque haya m3s datos fuera de la distribuci3n, podremos asumirlos como fallos de la red neuronal, y descartarlos como **errores sistem3ticos**. El n3mero de cuentas usada para normalizar las distribuciones ser3n el n3mero de cuentas encerradas por estos l3mites (0,k).

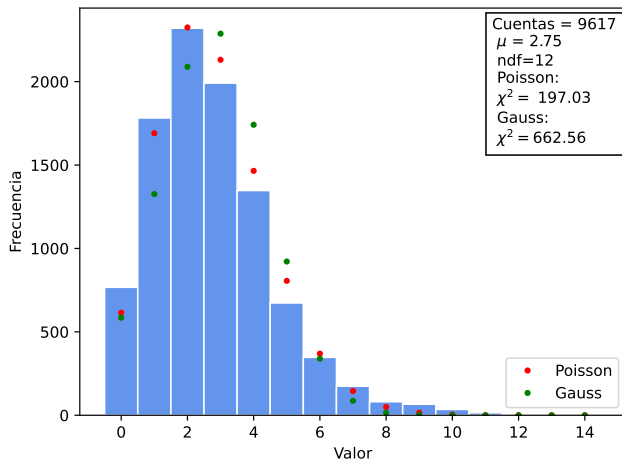
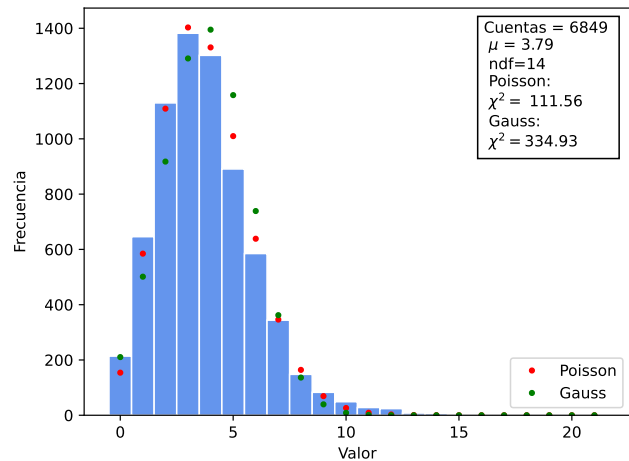
5.4. An3lisis: estudio de las distribuciones

Aqu3 nos limitaremos a comentar con que grado de confianza son compatibles los diferentes resultados. Son valores tabulados fueron tomados del **NIST**. Hemos aplicado a todas las distribuciones el mismo proceso que el anterior. Las tablas para los c3lculos de la χ^2 las colocamos en el ap3ndice B, ya que colocarlas aqu3 nos llevar3a a un problema de espacio bastante grande.

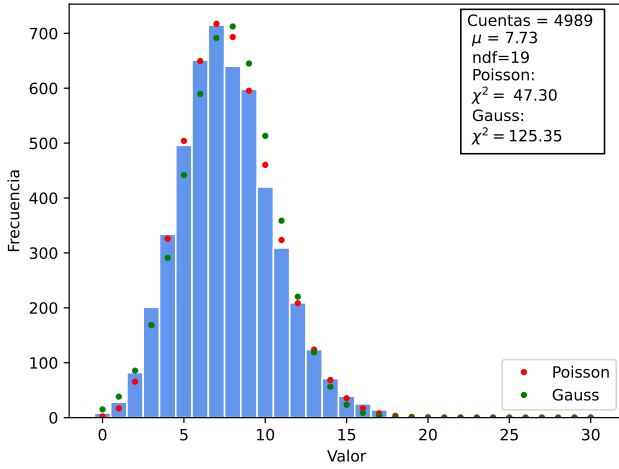
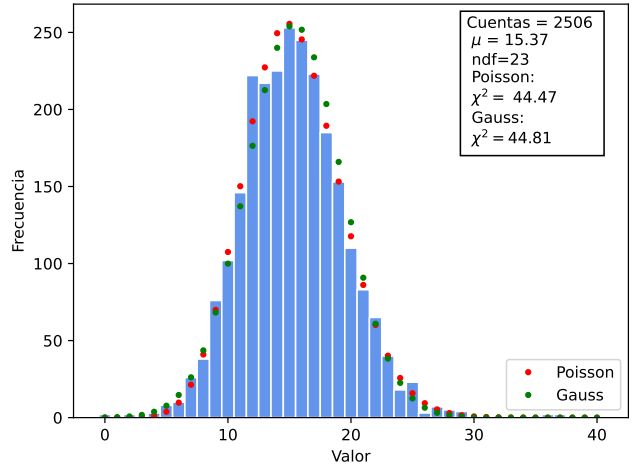
- **Cuentas de 0.1s:** como podemos ver el valor de la χ^2 tanto para la gaussiana como para la poissoniana excede por muchísimo los valores razonables que cabr3a esperar para un $\chi^2_{0.999,3} = 18.467$. Consecuentemente queda descartada la hip3tesis nula: nuestros n3meros de cuentas cada 0.1 s no siguen una distribuci3n poissoniana o gaussiana (con $\alpha = 99.9\%$).
- **Cuentas de 0.2s:** al superar el valor tabulado $\chi^2_{0.999,6} = 22.458$ podemos afirmar que nuestros valores no siguen dichas distribuciones (con $\alpha = 99.9\%$).

Figura 11: Frecuencia para las cuentas en 0.1s**Figura 12:** Frecuencia para las cuentas en 0.2s

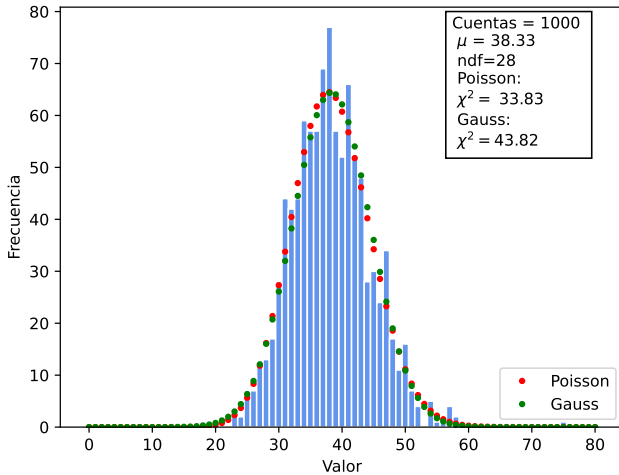
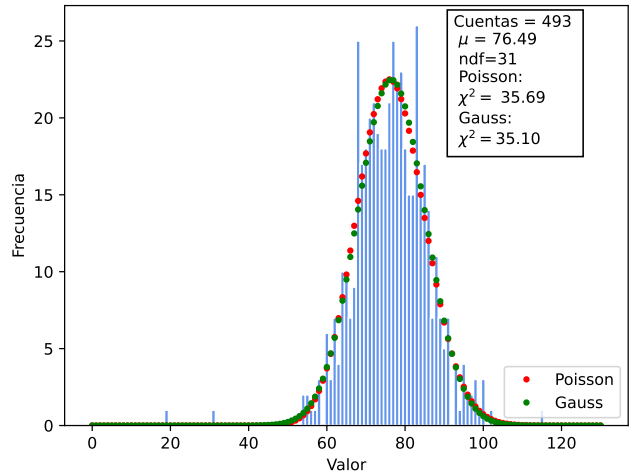
- **Cuentas de 0.5s:** el valor de la chi cuadrado sigue sobrepasando los l3mites tabulados ya que $\chi_{0.999,12} = 32.910$, por lo que podemos afirmar que nuestros valores no siguen dichas distribuciones (con $\alpha = 99.9\%$).
- **Cuentas de 0.7s:** al superar el valor tabulado $\chi_{0.999,14} = 36.123$ podemos afirmar que nuestros valores no siguen dichas distribuciones (con $\alpha = 99.9\%$).

Figura 13: Frecuencia para las cuentas en 0.5s**Figura 14:** Frecuencia para las cuentas en 0.7s

- **Cuentas de 1s:** el valor de la chi cuadrado tabulado para $\alpha = 0.999\%$ y 19 grados de libertad es $\chi_{0.999,19} = 43.820$, por lo que nuestro ajuste poissoniano es descartable con este nivel de confianza, tambi3n nuestro ajuste gaussiano.
- **Cuentas de 2s:** el valor de la chi cuadrado tabulado para $\alpha = 0.999\%$ y 18 grados de libertad es $\chi_{0.999,23} = 49.728$, por lo que nuestro ajuste poissoniano no es descartable con este nivel de confianza, y tampoco nuestro ajuste gaussiano. A3n as3 nuestro ajuste poissoniano y gaussiano es mayor que el valor tabulado para un 99% de confianza $\chi_{0.9,23} = 41.638$, por lo que es descartable para un alto nivel de confianza, pero no tanto como las anteriores distribuciones.

Figura 15: Frecuencia para las cuentas en 1s**Figura 16:** Frecuencia para las cuentas en 2s

- **Cuentas de 5s:** la distribuci3n de poisson verifica $\chi_{0.9,28} = 37.916$, por lo que no es descartable. La gaussiana adem3s est3 por debajo de $\chi_{0.975,28} = 44.461$, por lo que la distribuci3n empieza a ser valida.
- **Cuentas de 10s:** las distribuciones (tanto para gauss como para Poisson) verifican que $\chi^2 < \chi_{0.9,31} = 41.422$, por lo que ambas son buenas distribuciones. En este caso incluso la distribuci3n gaussiana tiene una χ^2 menor que la Poissoniana.

Figura 17: Frecuencia para las cuentas en 5s**Figura 18:** Frecuencia para las cuentas en 10s

5.5. Conclusiones

Lo primero que nos llama la atenci3n es la diferencia de χ^2 entre la distribuci3n de 1 seg. contada manualmente y contada con la ia. Es claro que la red neuronal comete un error sistem3tico que nosotros no podemos controlar (faltar3a m3s entrenamiento, mejor resoluci3n del v3deo...) y que nosotros al realizar el conteje a manualmente no cometemos. L3gicamente si el resultado de la χ^2 manual y por red neuronal fuera igual, podr3amos dudar acerca de este error, sin embargo para unas cuentas los datos siguen la distribuci3n Poissoniana y en otros no. Esta diferencia nos lleva a la conclusi3n de que quiz3s necesitamos m3s entrenamiento para la red, y una comparaci3n con mucho m3s datos.

Quiz3s si fu3ramos capaces de comparar los primeros 850 datos manuales y por red neuronal ser3amos quienes

de cuantificar este error sistem3tico, de dar una soluci3n y evidentemente respaldar mucho m3s los datos y su m3todo de obtenci3n. Ser3a una gran mejora para una futura revisi3n de la memoria.

En cualquier caso, lo que est3 claro es que a partir de varios segundos la distribuci3n de las cuentas empieza a ser una Poissoniana/Gaussiana, lo cual nos hace afirmar que $\sigma(N) = \sqrt{N}$ para el n3mero de cuentas.

6. Atenuaci3n de la radiaci3n c3smica secundaria

En esta secci3n vamos a obtener cuanta de la radiaci3n c3smica incidente pertenece a la parte dura (muones) y cuanta a la parte blanda (electrones, positrones). Cada una de estas llegar3 con una energ3a a nuestro detector dependiente del camino recorrido y su interacci3n con el aire (que depende, por ejemplo, de la masa de la part3cula) por lo que tendr3n diferentes distribuciones de energ3a al llegar a nuestro detector. Sin embargo nuestro aparato de medida no puede diferenciar con que energ3a llega la part3cula, solo detecta las cuentas, por lo que el descarte a trav3s de la energ3a es imposible.

Una de las maneras podr3a ser reducir la tasa electr3nica o mu3nica a pr3cticamente cero, por ejemplo colocando poniendo un material justo encima de nuestro detector sin reducir la otra componente de las coincidencias. De esta manera podr3amos inferir de ah3 un valor aproximado de una de las componentes, y por diferencia con la tasa sin ning3n material, ambas componentes. Este es precisamente el m3todo que vamos a usar, ya que el recorrido libre medio m3sico del electr3n es mucho menor que el del mu3n. En resumen: a trav3s de la colocaci3n de planchas de diferentes metales vamos a tratar de reducir al m3ximo el valor de la componente electr3nica, obteniendo as3 un valor para la tasa mu3nica.

Para estudiar esto necesitamos unas nociones b3sicas sobre el comportamiento de estas dos part3culas en cada material. La atenuaci3n de los rayos c3smicos secundarios puede simplificarse en promedio a trav3s del recorrido libre medio m3sico, λ_m^μ para los muones y λ_m^e para los electrones, donde el n3mero de part3culas $N(x)$ que sobreviven tras atravesar el espesor es:

$$N(x) = N(0)e^{-x\rho/\lambda} \quad (22)$$

siendo $N(0)$ el n3mero de part3culas incidentes sobre dicho material. La diferencia entre $\lambda_\mu = 100 \text{ g/cm}^2$ y $\lambda_e = 1550 \text{ g/cm}^2$ es suficientemente grande como para que uno se atenue significativamente y el otro no. Como podemos ver en la ecuaci3n anterior, la atenuaci3n es significativamente mayor con un material muy denso que con uno poco denso, por lo que nosotros usaremos l3minas de hierro $\rho(\text{Fe}) = 7.874 \text{ g/cm}^3$ y l3minas de plomo $\rho(\text{Pb}) = 11.340 \text{ g/cm}^3$.

As3 pues, solo tendremos que realizar diferentes regresiones exponenciales de los valores de las tasas reales frente al espesor x de los diferentes materiales para obtener as3 tanto $n(0)$ como λ . Si x es el grosor total de las placas colocadas encima del detector (tratando de superponerse lo m3ximo posible) y n_r la tasa real, tenemos que los par3metros a y b ajuste exponencial siguiente

$$n_r = ae^{-bx} \quad (23)$$

se relacionan con los valores que queremos obtener de la siguiente manera:

$$a = n_r(0) \quad b = \frac{\rho}{\lambda} \rightarrow \lambda_m = \frac{\rho}{b} \quad (24)$$

6.1. L3minas de hierro

Primero empezamos colocando planchas de hierro de espesor $x_{\text{Fe}} = 1.600(14) \text{ mm}$, de dos en dos ya que ten3amos 20 planchas y un tiempo limitado. Las incertidumbre total de n planchas lo calculamos como $u(n \cdot x) = n \cdot u(x)$,

ya que la incertidumbre del grosor de cada una de las planchas tiene la misma fuente de incertidumbre: la precisi3n del calibre, y por tanto no son independientes.

En la [fig. 19](#) vemos los datos de la [tab. 5](#) representados gr3ficamente con el ajuste exponencial comentado anteriormente hecho. Como podemos ver el ajuste tiene $\chi^2/\text{ndf} < 1$ de tal modo que es un buen ajuste, y no es descartable por hip3tesis nula. Por otra parte, de los par3metros obtenidos podemos extraer los siguientes datos:

$$n_r(0) = 7.51(18) \text{ cuentas/s} \quad \lambda_m^e = 140(29) \text{ g/cm}^2 \quad (25)$$

Este valor $n_r(0)$ ser3a la suma de las coincidencias procedente de la componente mu3nica y electr3nica, por lo que todav3a no nos permite obtener informaci3n acerca una de estas.

6.2. Planchas de plomo

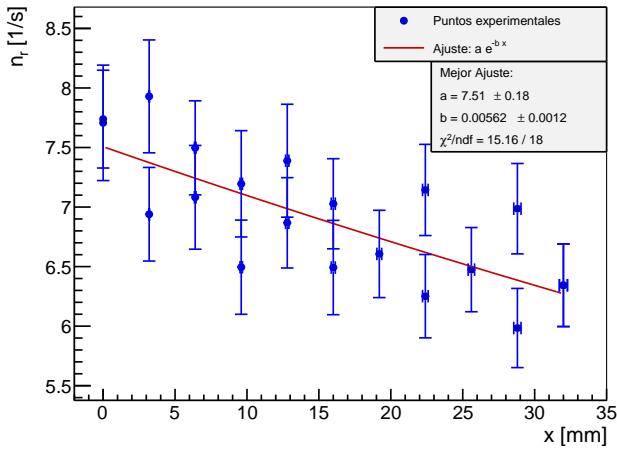
En la [fig. 20](#) vemos los datos de la [tab. 6](#) representados gr3ficamente con el ajuste exponencial comentado anteriormente hecho. Como podemos ver el ajuste tiene $\chi^2 = 22.38$, que para 6 grados de libertad es descartable con un 99 % de confianza ($\chi_{0.99,6}^2 = 16.812$) lo cual nos dice que no es un buen ajuste, y descartable por hip3tesis nula. Por otra parte, de los par3metros obtenidos podemos extraer los siguientes datos:

$$n_r(0) = 6.90(21) \text{ cuentas/s} \quad \lambda = 245(49) \text{ g/cm}^2 \quad (26)$$

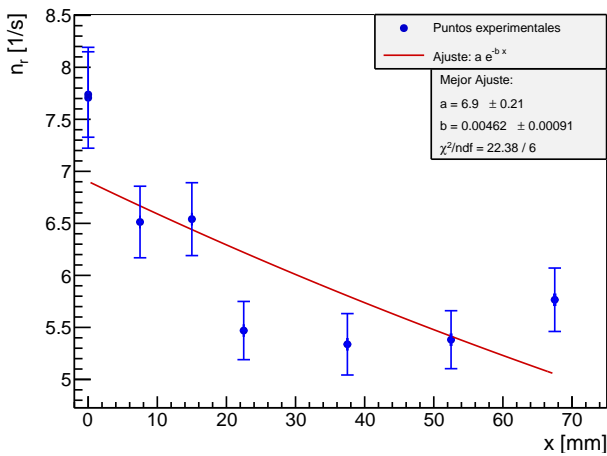
que, adem3s, distan mucho de los valores obtenidos en el apartado anterior.

Tabla 5: Medidas de atenuaci3n blanda usando 3nicamente placas de hierro

x_{Fe} (mm)	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]	n_r [s ⁻¹]
0.0	$1.033(10) \times 10^4$	3988(63)	313(18)	36.60(13)	282.1(30)	109.0(18)	0.845(19)	7.71(48)
0.0	$1.712(13) \times 10^4$	6221(79)	462(21)	52.50(13)	326.0(26)	118.5(15)	1.062(23)	7.74(41)
3.200(28)	$1.118(11) \times 10^4$	3966(63)	341(18)	39.07(13)	286.2(29)	101.5(16)	0.798(18)	7.93(47)
3.200(28)	$1.625(13) \times 10^4$	5668(75)	406(20)	51.41(13)	316.1(26)	110.3(15)	0.958(21)	6.94(39)
6.400(56)	$1.162(11) \times 10^4$	4059(64)	325(18)	41.48(13)	280.2(27)	97.9(16)	0.753(17)	7.08(44)
6.400(56)	$1.725(13) \times 10^4$	6003(77)	461(21)	54.53(13)	316.4(25)	110.1(14)	0.957(21)	7.50(39)
9.600(84)	$1.089(10) \times 10^4$	4153(64)	323(18)	45.53(13)	239.1(24)	91.2(14)	0.599(14)	6.49(40)
9.600(84)	9617(98)	4161(65)	314(18)	39.80(13)	241.6(26)	104.5(17)	0.694(16)	7.20(45)
12.80(11)	$1.450(12) \times 10^4$	3481(59)	314(18)	37.49(13)	386.6(35)	92.9(16)	0.987(23)	7.39(47)
12.80(11)	$1.515(12) \times 10^4$	5310(73)	408(20)	53.38(13)	283.8(24)	99.5(14)	0.776(17)	6.87(38)
16.00(14)	$1.298(11) \times 10^4$	4297(66)	333(18)	46.18(13)	281.1(26)	93.0(14)	0.719(16)	6.49(40)
16.00(14)	$1.488(12) \times 10^4$	5181(72)	421(21)	54.36(13)	273.7(23)	95.3(13)	0.717(16)	7.03(38)
19.20(17)	$1.702(13) \times 10^4$	5593(75)	415(20)	55.71(13)	305.5(24)	100.4(14)	0.843(19)	6.61(37)
22.40(20)	$1.488(12) \times 10^4$	5291(73)	426(21)	54.03(13)	275.3(24)	97.9(14)	0.741(17)	7.14(38)
22.40(20)	$1.737(13) \times 10^4$	5844(76)	411(20)	58.06(13)	299.1(24)	100.7(13)	0.827(18)	6.25(35)
25.60(22)	$1.585(13) \times 10^4$	5617(75)	417(20)	57.88(13)	273.8(23)	97.0(13)	0.730(16)	6.47(35)
28.80(25)	$1.474(12) \times 10^4$	5358(73)	417(20)	53.93(13)	273.2(23)	99.4(14)	0.746(17)	6.99(38)
28.80(25)	$1.771(13) \times 10^4$	5842(76)	413(20)	61.26(13)	289.0(23)	95.4(13)	0.757(17)	5.98(33)
32.00(28)	$1.609(13) \times 10^4$	5557(75)	415(20)	58.84(13)	273.4(22)	94.4(13)	0.710(16)	6.34(35)
32.00(28)	$1.609(13) \times 10^4$	5557(75)	415(20)	58.84(13)	273.4(22)	94.4(13)	0.710(16)	6.34(35)

Figura 19: N3mero de coincidencias reales en funci3n del espesor de hierro con ajuste exponencial.**Tabla 6:** Medidas de atenuaci3n dura usando 3nicamente placas de plomo sin planchas de hierro

x_{Pb} (mm)	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]	n_r [s ⁻¹]
0.0	$1.033(10) \times 10^4$	3988(63)	313(18)	36.60(13)	282.1(30)	109.0(18)	0.845(19)	7.71(48)
0.0	$1.712(13) \times 10^4$	6221(79)	462(21)	52.50(13)	326.0(26)	118.5(15)	1.062(23)	7.74(41)
7.500(14)	$1.745(13) \times 10^4$	5952(77)	448(21)	61.68(13)	282.9(22)	96.5(13)	0.750(17)	6.51(34)
15.000(28)	$1.633(13) \times 10^4$	5467(74)	429(21)	59.26(13)	275.6(22)	92.3(13)	0.699(16)	6.54(35)
22.500(42)	$1.975(14) \times 10^4$	6151(78)	466(22)	77.30(13)	255.5(19)	79.6(10)	0.559(12)	5.47(28)
37.500(70)	$1.888(14) \times 10^4$	5947(77)	413(20)	69.00(13)	273.6(21)	86.2(11)	0.648(14)	5.34(30)
52.500(98)	$2.155(15) \times 10^4$	6703(82)	471(22)	78.07(13)	276.0(19)	85.9(11)	0.651(14)	5.38(28)
67.50(13)	$1.878(14) \times 10^4$	5993(77)	444(21)	69.26(13)	271.2(20)	86.5(11)	0.645(14)	5.77(30)

Figura 20: N3mero de coincidencias reales en funci3n del espesor de plomo.

6.3. Laminas de hierro y planchas de plomo

En la [fig. 21](#) vemos los datos de la [tab. 7](#) representados gr3ficamente con el ajuste exponencial comentado anteriormente hecho. Como podemos ver el ajuste tiene $\chi^2/\text{ndf} < 1$ de tal modo que es un buen ajuste, y no

es descartable por hip3tesis nula. Por otra parte, de los par3metros obtenidos podemos extraer los siguientes datos:

$$n_r(0) = 6.02(14) \text{ cuentas/s} \quad \lambda_m^\mu = 667(219) \text{ g/cm}^2 \quad (27)$$

Este valor $n_r(0)$ ser3a la suma de las coincidencias procedente de la componente mu3nica, ya que podemos consdierar que hemos frenado la compoennte electr3nica con las 20 planchas de hierro, por lo que ya podemos extraer informaci3n de estas. Por otro lado, el recorrido libre medio m3sico tambi3n corresponder3a a la componente mu3nica.

Tabla 7: Medidas de atenuaci3n dura usando 3nicamente placas de plomo con 20 de hierro

x_{pb} (mm)	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]	n_r [s ⁻¹]
0.0	$1.609(13) \times 10^4$	5557(75)	415(20)	58.84(13)	273.4(22)	94.4(13)	0.710(16)	6.34(35)
0.0	$1.609(13) \times 10^4$	5557(75)	415(20)	58.84(13)	273.4(22)	94.4(13)	0.710(16)	6.34(35)
7.500(14)	$1.709(13) \times 10^4$	5418(74)	406(20)	62.22(13)	274.7(22)	87.1(12)	0.657(15)	5.87(32)
7.500(14)	$1.689(13) \times 10^4$	5633(75)	412(20)	60.66(13)	278.4(22)	92.9(13)	0.710(16)	6.08(34)
15.000(28)	$1.794(13) \times 10^4$	5424(74)	409(20)	65.31(13)	274.7(21)	83.1(11)	0.627(14)	5.64(31)
15.000(28)	$1.832(14) \times 10^4$	6061(78)	415(20)	67.13(13)	272.9(21)	90.3(12)	0.677(15)	5.50(30)
15.000(28)	$1.801(13) \times 10^4$	5570(75)	406(20)	64.86(13)	277.6(21)	85.9(12)	0.655(15)	5.60(31)
22.500(42)	$1.665(13) \times 10^4$	5288(73)	414(20)	62.50(13)	266.3(21)	84.6(12)	0.619(14)	6.00(33)
37.500(70)	$1.734(13) \times 10^4$	5496(74)	408(20)	66.00(13)	262.7(21)	83.3(11)	0.601(13)	5.58(31)
45.000(84)	$1.765(13) \times 10^4$	5710(76)	405(20)	66.66(13)	264.7(21)	85.7(11)	0.623(14)	5.45(30)
52.500(98)	$1.804(13) \times 10^4$	5662(75)	419(20)	67.57(13)	266.9(21)	83.8(11)	0.615(14)	5.59(30)
60.00(11)	$1.809(13) \times 10^4$	5698(75)	410(20)	67.74(13)	267.1(21)	84.1(11)	0.617(14)	5.44(30)
67.50(13)	$1.704(13) \times 10^4$	5252(72)	404(20)	63.49(13)	268.4(21)	82.7(12)	0.610(14)	5.75(32)
67.50(13)	$1.825(14) \times 10^4$	5732(76)	416(20)	67.06(13)	272.1(21)	85.5(11)	0.639(14)	5.56(30)
75.00(14)	$1.937(14) \times 10^4$	5953(77)	407(20)	72.19(13)	268.4(20)	82.5(11)	0.608(13)	5.03(28)

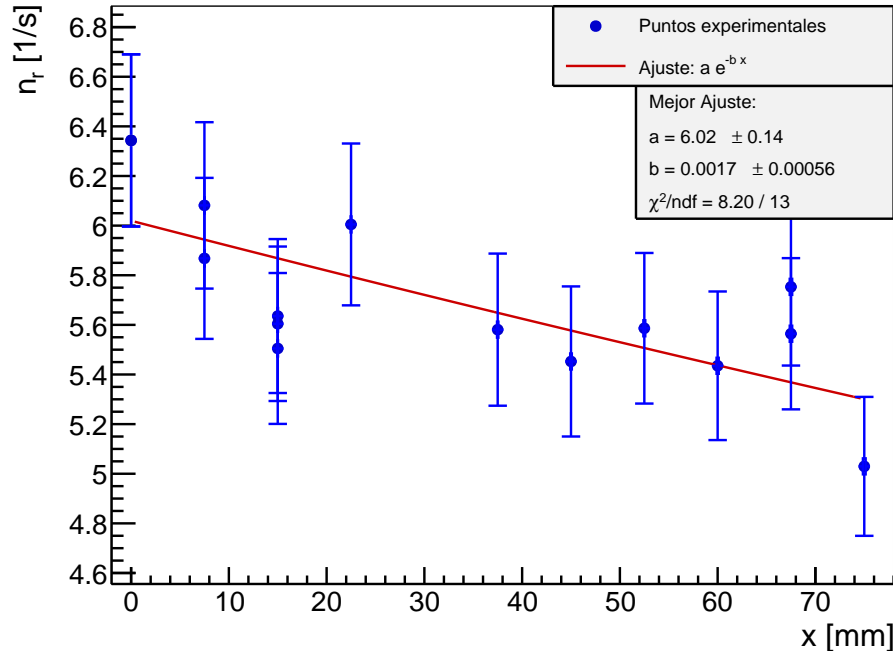
6.4. Laminas de plomo, planchas de plomo y bloques de plomos

En este apartado vamos a usar los datos de Celtia Jabares ya que nosotros no medimos datos sin bloques de plomo (de espesor 8.5 cm) ya que no se nos indico en la pr3ctica que pod3amos usarlos y nosotros considerabamos que eran importantes para parar la radiaci3n de la fuente de alta radiaci3n del cesio. Los datos de sus pr3cticas los hemos incluido en el anexo, [tab. 8](#) y [tab. 9](#). Por desgracia, para extraer los resultados de este apartado necesitamos sus valores de $n_r(0)$, ya que al tener diferentes voltajes umbrales y altos voltajes, medirse en d3as/horas diferentes, contar con diferentes sistemas de toma de datos, las fuentes de error que aparecer3an por usar nuestro $n_r(0)$ ser3an muy elevadas.

Como podemos ver χ^2 de la [fig. 22](#) es descartable para un 99 % de confianza $\chi_{0.95,5}^2 = 11.070$, por lo que sus datos no podemos extraer conclusiones de sus datos. Sin embargo, si podemos obtener datos de [fig. 23](#), ya que χ^2 no es descartable $\chi_{0.90,3}^2 = 6.251$. Sin embargo, como hemos dicho, no podemos obtener un valor de n_r para la componente mu3nica sin el valor de $n_r^\mu(0)$ dado por la atenuaci3n de planchas de hierro o plomo. Lo que si podemos coger es un valor de λ para los bloques de plomo, de tal modo que:

$$\lambda_m^\mu = 1163(155) \text{ g/cm}^2 \quad (28)$$

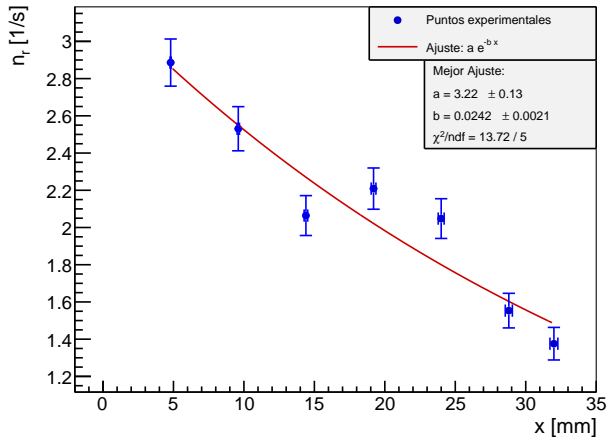
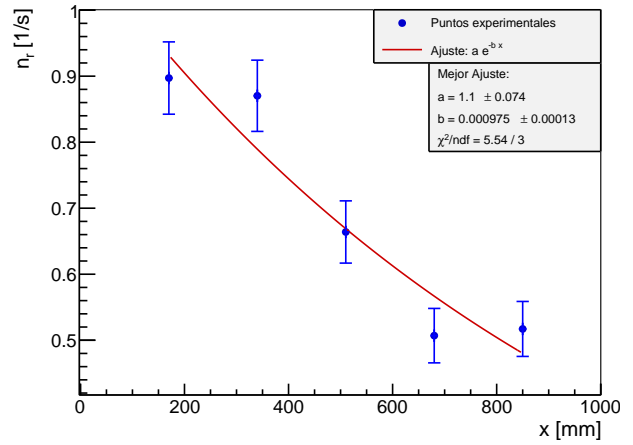
que como podemos ver es casi el doble del que obtuvimos nosotros en el apartado anterior.

Figura 21: N3mero de coincidencias reales en funci3n del espesor de plomo y 20 l3minas de hierro con ajuste exponencial.**Tabla 8:** Medidas de atenuaci3n blanda usando 3nicamente placas de hierro,. Datos de Celtia Jabares.

x_{Fe} (mm)	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]	n_r [s ⁻¹]
4.800(42)	1200(35)	2700(52)	520(23)	180.00(13)	6.67(19)	15.00(29)	$2.748(74) \times 10^{-3}$	2.89(13)
9.600(84)	1200(35)	2600(51)	456(21)	180.00(13)	6.67(19)	14.44(28)	$2.646(72) \times 10^{-3}$	2.53(12)
14.40(13)	1100(33)	2700(52)	372(19)	180.00(13)	6.11(18)	15.00(29)	$2.519(69) \times 10^{-3}$	2.06(11)
19.20(17)	1000(32)	2500(50)	398(20)	180.00(13)	5.56(18)	13.89(28)	$2.120(59) \times 10^{-3}$	2.21(11)
24.00(21)	1000(32)	2500(50)	369(19)	180.00(13)	5.56(18)	13.89(28)	$2.120(59) \times 10^{-3}$	2.05(11)
28.80(25)	1000(32)	2500(50)	280(17)	180.00(13)	5.56(18)	13.89(28)	$2.120(59) \times 10^{-3}$	1.553(93)
32.00(28)	1000(32)	2400(49)	248(16)	180.00(13)	5.56(18)	13.33(27)	$2.036(57) \times 10^{-3}$	1.376(87)

Tabla 9: Medidas de atenuaci3n dura usando 20 l3minas de hierro, 10 planchas de plomo y bloques de plomo. Datos de Celtia Jabares.

x_{Pb} (mm)	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]	n_r [s ⁻¹]
170.000(28)	1900(44)	4900(70)	270(16)	300.00(13)	6.33(15)	16.33(23)	$2.843(70) \times 10^{-3}$	0.897(55)
340.000(56)	2000(45)	5000(71)	262(16)	300.00(13)	6.67(15)	16.67(24)	$3.053(75) \times 10^{-3}$	0.870(54)
510.000(84)	1800(42)	4900(70)	200(14)	300.00(13)	6.00(14)	16.33(23)	$2.693(67) \times 10^{-3}$	0.664(47)
680.00(11)	2000(45)	5000(71)	153(12)	300.00(13)	6.67(15)	16.67(24)	$3.053(75) \times 10^{-3}$	0.507(41)
850.00(14)	1900(44)	5000(71)	156(12)	300.00(13)	6.33(15)	16.67(24)	$2.901(72) \times 10^{-3}$	0.517(42)

Figura 22: Atenuaci3n solo con l3minas de hierro. Datos de Celtia Jabares tab. 8.**Figura 23:** Atenuaci3n solo con bloques de plomo, 20 l3minas de hierro y 10 planchas de plomo. Datos de Celtia Jabares tab. 9.

6.5. Conclusiones

En este apartado vamos a extraer los resultados finales de los apartados anteriores. Como hemos dicho, los valores de $n_r^e(0)$ y $n_r^\mu(0)$ no los podemos extraer de los datos de Celtia, ya que el ajuste exponencial para el hierro no supera el test de chi cuadrado, por lo que estos los tendremos que obtener de nuestros resultados que si son aceptables. De los datos de Celtia lo 3nico relevante que podemos extraer es **el recorrido libre medio m3sico mu3nico** ya que ella si tomo medidas de la atenuaci3n con bloques de plomo, que como hemos podido ver tiene un valor:

$$\lambda_m^\mu = 1163(155) \text{ g/cm}^2 \quad (29)$$

el cual es similar al que nos dan te3ricmente, al menos en orden. L3gicamente con 5 datos pocos resultados concluyentes podemos tomar. Por otro lado, los valores de la tasa de coincidencias los vamos a obtener usando nuestros datos, tal que:

$$n_r(0) = 7.51(18) \text{ cuentas/s} \quad n_r^\mu(0) = 6.02(14) \text{ cuentas/s} \quad (30)$$

con los que podemos extraer $n_r^e(0)$, que ser3a:

$$n_r^e(0) = 1.49(22) \text{ cuentas/s} \quad (31)$$

donde hemos aplicado trivialmente que la componente electr3nica es la diferencia de la total y la mu3nica:

$$n_r^e(0) = n_r(0) - n_r^\mu(0) \quad u(n_r^e(0)) = \sqrt{u(n_r(0))^2 + u(n_r^\mu(0))^2} \quad (32)$$

7. Flujo en la superficie

En este apartado vamos a obtener el flujo de las componentes mu3nicas y electr3nicas a partir de los valores anteriores y el 3rea activa A . Aunque sea trivial, la ecuaci3n para obtener el flujo J y la incertidumbre del flujo a partir del 3rea A y la tasa de cuentas $n_r(0)$ es:

$$J = \frac{n_r(0)}{A} \quad u(J) = \frac{u(n_r(0))}{A} \quad (33)$$

El area activa que usamos es 300 cm^{-2} que es un valor ya dado para los centelleadores que ten3amos. aAs3 obtenemos:

$$J = 250.3(60) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1} \quad J^\mu = 200.6(46) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1} \quad J^e = 49.7(73) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (34)$$

Los valores medidos en situaciones parecidas son de $J \sim 180 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$, con flujos parciales de $J^\mu \sim 130 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ para la componente mu3nica y $J^e \sim 50 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ para la electromagn3tica, al menos eso seg3n el guion [14]. Otros datos como Jeng-Wei Lin [11] arrojan valores m3s parecidos a los nuestros con $J^\mu \sim 190 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ (en EEUU), siendo la componente electr3nica entorno a $1/4$, compatible con nuestros datos. Los resultados que obtuvimos est3 claro que no son muy concluyentes, al menos si nos basamos en los resultados dados por el gu3n, ya que aunque la componente electr3nica casa bastante, la componente total y mu3nica distan mucho (incluso sin hacer un test de chi cuadrado podemos ver que no son compatibles). Esto es un posible indicio de que estamos midiendo m3s accidentales de las que podr3amos pensar, bien sea porque estamos midiendo part3culas de otras fuentes o bien que sean coincidencias espurias/ruido (de nuevo, respecto los datos [14].)

Para mejorar los resultados evidentemente tendr3amos que tomar m3s datos, sobretodo para estudiar si existe alguna fuente de error desconocida. Con m3s control sobre la disposici3n geom3trica podr3amos reducir posibles errores, ya que recordemos que al estar tapadas con una lona negra, no nos percatamos de posibles fallos en el transcurso de las medidas, a pesar de que hici3ramos comprobaciones permanentes. Adem3s medir flujos de electrones y muones en un laboratorio de f3sica nuclear en el que hay presentes m3s fuentes y radiaci3n de la que podr3a haber en una situaci3n normal tambi3n puede afectar a nuestras medidas, aunque posibles errores y mejoras para tomar las medidas ser3n discutidas con mas desarrollo en la secci3n de conclusiones. En cualquier caso, parece que las l3minas de hierro si pueden llegar a ser suficientes para parar la radiaci3n electr3nica, sin reducir significativamente las mu3nicas, al menos nuestros datos avalan esa conclusi3n.

8. Dependencia con el 3ngulo

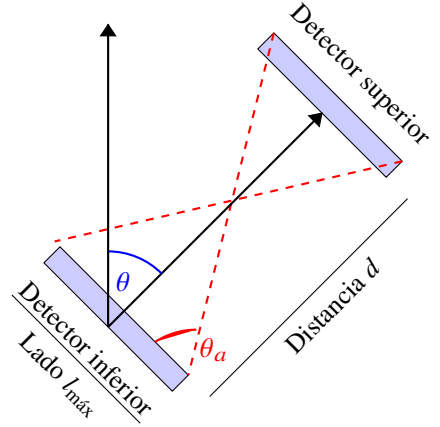
En esta secci3n vamos a estudiar la dependencia de la radiaci3n c3smica con el 3ngulo al que orientamos el detector respecto al suelo, i.e. $\theta = 0$ significa que la perpendicular del detector y el suelo son paralelos. Cabe destacar que las medidas se realizaron a una distancia de $d = 36.10(21) \text{ cm}$ entre ellos, por razones que ser3n comentadas m3s adelante, primero vamos a explicar porqu3 es interesante estudiar esta $n_r(\theta)$. El punto es que uno esperar3a que la mayor parte de la radiaci3n c3smica lleguera efectivamente con 0° y que para $\theta = 90^\circ$ no llegara pr3cticamente radiaci3n c3smica. Esto 3ltimo se deber3a, en parte, a que los rayos c3smicos horizontales tendr3an que atravesar una gran cantidad de atm3sfera siendo atenuados mucho m3s que los verticales (fen3meno similar al que ocurre cuando hay un atardecer y la dispersi3n Rayleigh). Tambi3n es cierto que existen coincidencias accidentales las cuales no tendr3an por que dejar de verse si estuvieran a 90° . Sin embargo la parte mas interesante es que nos ayuda a entender como funciona el 3ngulo s3lido/distancia.

Ahora tratemos c3mo medimos los 3ngulos, ya que es una cuesti3n interesante. Sea $\Delta\theta$ la diferencia entre el 3ngulo real de entrada de una part3cula y el 3ngulo con el que la etiquetamos. Para poder afirmar que una part3cula incide con un 3ngulo θ (definido como el 3ngulo entre la vertical del laboratorio y la trayectoria de la part3cula), es necesario separar suficientemente los detectores. ¿Por qu3? Porque la separaci3n entre detectores define un 3ngulo de aceptaci3n θ_a , que puede interpretarse como la desviaci3n angular m3xima $\Delta\theta^{\text{m3x}}$ compatible con una coincidencia.

$$\tan(\theta_a) = \frac{l^{\text{m3x}}}{d} \quad (35)$$

donde l_{m3x} es el lado m3s largo del detector, y d la distancia entre ellos. Cuanto mayor sea d , m3s estrecho ser3 el cono de aceptaci3n, lo que implica una mayor precisi3n angular, pero tambi3n una menor tasa de detecci3n.

No obstante, esto no significa que la incertidumbre angular sea simplemente $u(\theta) = \theta_a^{\text{m3x}}$, ya que la probabilidad de detecci3n de una part3cula con 3ngulo exactamente igual a θ_a es muy baja. Es decir, el 3ngulo de aceptaci3n nos da el rango geom3trico m3ximo de desviaci3n posible entre la trayectoria real y el 3ngulo con el que clasificamos la part3cula. Por ello, conviene minimizarlo aumentando la separaci3n entre detectores. En la imagen de la derecha hecha en tikz tratamos de reflejar este 3ngulo de aceptancia, en el que podemos ver que una part3cula en el rango de $(-\theta_a + \theta, \theta + \theta_a)$ podr3a ser etiquetada como θ . De hecho ser3a un estudio interesante calcular esta incertidumbre dada por la apertura.



8.1. Distribuciones angulares y contraste con los datos

A la energ3a que llegan los muones 2 GeV se considera una buena distribuci3n angular una que vaya con el coseno cuadrado respecto el 3ngulo de incidencia:

$$j(\theta) = j_0 \cos^2(\theta) \quad (36)$$

sin embargo otros (Jeng-Wei Lin, [11]) apuntan a que el exponente podr3a ser un par3metro libre para $\theta \leq 70^\circ$:

$$j(\theta) = j_0 \cos^n(\theta) \quad (37)$$

Nosotros consideraremos ambos, adem3s de a3adir un t3rmino constante que ser3a esta “incidencia c3smica horizontal” (aunque tambi3n podr3a haber una gran parte de coincidencias accidentales). As3 pues, nosotros estudiaremos dos ajustes:

$$j_1(\theta) = a_1 + b_1 \cos^2(\theta) \quad j_2(\theta) = a_2 + b_2 |\cos(\theta)|^n \quad (38)$$

donde trivialmente $a_{1,2} = j_{\text{horizontal}}$ y $b_{1,2} = j_0$. Ahora bien, hemos dicho que esta ecuaci3n sirve para los muones, ¿tambi3n sirve para los electrones? Dado que la masa del muon es unas 200 veces superior, uno podr3a pensar que aparecen m3s t3rminos angulares (al ser m3s relativista) o que cambia al ser m3s ralentizada. Sin embargo es una buena aproximaci3n, al menos a primer orden [14]. Luego comentaremos el posible contraste de esto con nuestros datos.

Tabla 10: Medidas de coincidencias a una distancia 33.3 cm entre los detectores a diferentes 3ngulos.

θ (mm)	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]	n_r [s ⁻¹]
0.00(28)	$4.404(21) \times 10^4$	$1.830(14) \times 10^4$	324(18)	172.80(13)	254.9(12)	105.89(79)	0.742(16)	1.13(11)
10.00(28)	$5.579(24) \times 10^4$	$2.545(16) \times 10^4$	399(20)	227.83(13)	244.9(10)	111.71(70)	0.752(16)	1.000(89)
25.00(28)	$5.122(23) \times 10^4$	$2.289(15) \times 10^4$	331(18)	210.60(13)	243.2(11)	108.71(72)	0.726(15)	0.845(88)
45.00(28)	$6.526(26) \times 10^4$	$2.737(17) \times 10^4$	316(18)	259.87(13)	251.11(99)	105.34(64)	0.727(15)	0.489(70)
60.00(28)	$5.212(23) \times 10^4$	$2.361(15) \times 10^4$	303(17)	219.38(13)	237.6(11)	107.63(70)	0.703(15)	0.678(81)
67.00(28)	$5.680(24) \times 10^4$	$2.745(17) \times 10^4$	315(18)	218.25(13)	260.3(11)	125.75(76)	0.899(19)	0.544(84)
77.00(28)	$6.866(26) \times 10^4$	$2.940(17) \times 10^4$	301(17)	267.50(13)	256.65(99)	109.90(64)	0.775(16)	0.350(67)
90.00(28)	$7.219(27) \times 10^4$	$3.016(17) \times 10^4$	292(17)	280.01(13)	257.82(97)	107.72(62)	0.763(16)	0.280(63)

En la [tab. 10](#) mostramos los valores obtenidos, mientras que en las figuras [fig. 24](#) y [fig. 25](#) mostramos las representaciones gr3ficas y los ajustes. En particular en la primera representamos todos los datos y en la segunda eliminamos los valores de 60° y 67° , ya que consideramos incluso en el mismo laboratorio que hubo alg3n tipo de error con la geometr3a pudiendo hacer que las superficies activas dejaran de estar superpuestas. Como podemos ver para la primera imagen $\chi^2_{0.99,5} = 15.086$ la primera regresi3n no es un buen ajuste, mientras que $\chi^2_{0.95,4} = 9.488$ el ajuste es un poco mejor solo descartable con un 95 % probabilidad. Como podemos ver dista bastante del $n = 2$ el mejor ajuste, lo que afianza nuestra creencia de que en dichos datos hubo un fallo en el transcurso de la medida que afect3 a los datos.

Para la figura [fig. 25](#) los valores de la $\chi^2/\text{ndf} < 1$ para $n = 4.63$, y el ajuste $n = 2$ $\chi^2/\text{ndf} \sim 1$ por lo que tanto el ajuste con $n = 2$ como el que deja n como par3metro libre son compatibles, por lo que podemos considerar que efectivamente las coincidencias obtenidas son compatibles con una distribuci3n angular $j_1(\theta)$ y $j_2(\theta)$. Sin embargo est3 claro que $n = 4.63$ ajusta mucho mejor nuestros datos que $n = 2$, por lo que es probable que para el rango de energ3as de nuestros muones $n = 4.63$ sea mejor ajuste.

Figura 24: Ajuste $a + b \cos^2(\theta)$ y $a + b \cos^n(\theta)$ a los valores experimentales.

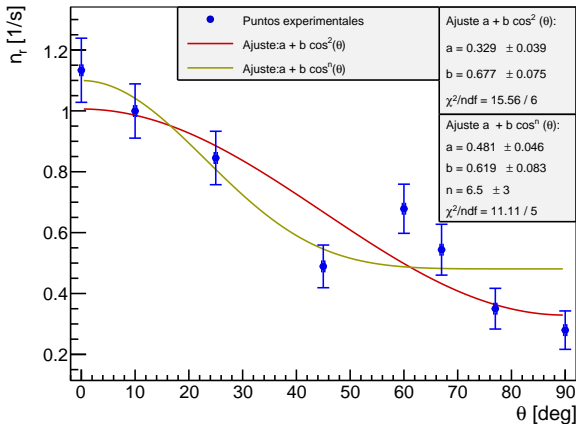
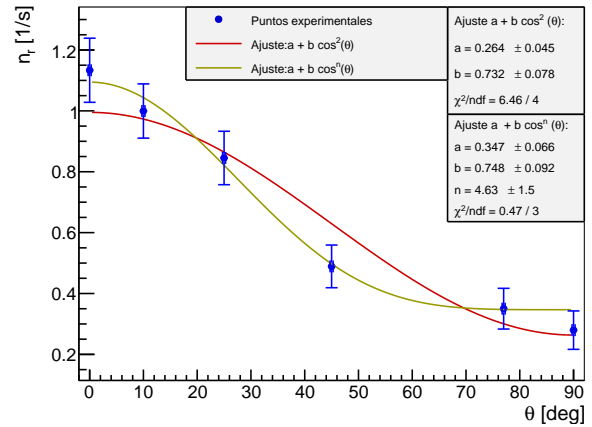


Figura 25: Ajuste $a + b \cos^2(\theta)$ y $a + b \cos^n(\theta)$ a los valores experimentales eliminando 60° y 67° .



8.2. ¿Separaci3n de componente mu3nica y electr3nica?

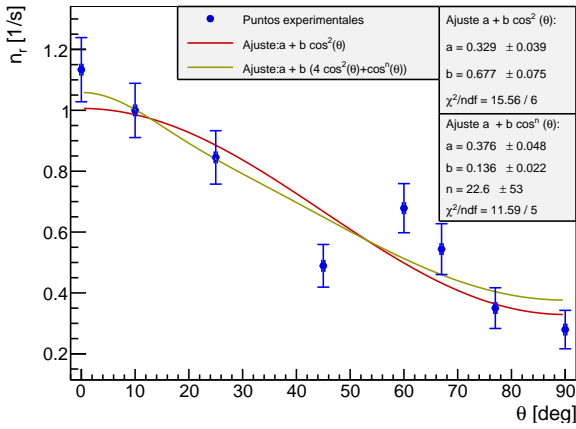
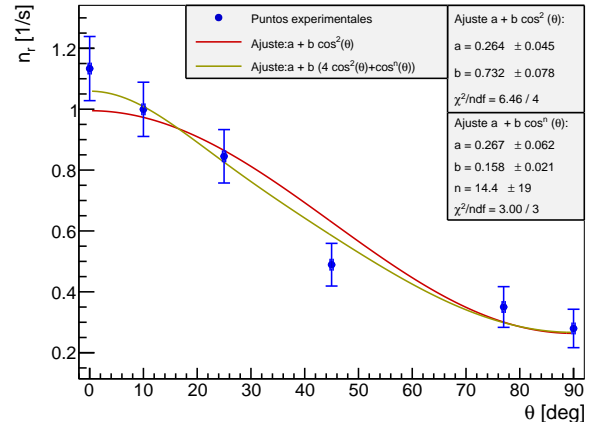
En el guion se nos pide que evaluemos con nuestros resultados si la componente blanda (electr3nica) sigue realmente la misma distribuci3n que la componente dura. Sin una atenuaci3n es complicado comprobarlo, la 3nica manera ser3a estudiando un comportamiento quiz3s como la suma de dos potencias del coseno:

$$j(\theta) = a \cos^{n_1}(\theta) + b \cos^{n_2}(\theta) + c \quad (39)$$

pero ni siquiera as3 podr3amos afirmar que no siguen la misma distribuci3n, ya que en los datos no parece haber este comportamiento, y si se ajusta mejor tambi3n se deber3 a la gran cantidad de par3metros libres. Francamente no nos parece que con los datos que tenemos podemos afirmar que no sigue la misma distribuci3n, aunque tampoco podemos afirmar lo contrario. El 3nico indicio que nos parece hablar de ello es que en [fig. 25](#) es ajustable para 2 valores de n diferentes. Otra manera ser3a suponer que efectivamente $n_1 = 2$ tal que:

$$j_3(\theta) = a \cos^2(\theta) + b \cos^{n_2}(\theta) + c \quad (40)$$

o incluso con $b = a/4$ obteniendo igual que antes 3 par3metros libres (considerando que efectivamente la radiaci3n electr3nica incidente es un cuarto de la radiaci3n mu3nica). Como podemos ver en [fig. 26](#) y [fig. 27](#), el ajuste j_3 es compatible con nuestros datos, aunque no se ajusta mejor que $j_2(\theta)$, por lo que no podemos concluir ning3n resultado sobre si la componente mu3nica y electr3nica son diferentes.

Figura 26: Ajuste j_1 y j_3 a los valores experimentales.**Figura 27:** Ajuste j_1 y j_3 a los valores experimentales eliminando 60° y 67° .

9. Eficiencia geom3trica

9.1. Toma de medidas y valor real de la distancia d

Para tomar cada medida simplemente separamos los detectores una distancia d a trav3s de un mueble de manera tratando que es la que tomaremos como base, ya que con tan poca distancia de superponer al m3ximo las superficies activas, tap3ndo en cada medida el conjunto con una lona. Las medidas de la distancia se realizaron entre el borde de metal que protege a un centelleador y el otro. Luego medimos la distancia entre el centelleador real y la parte de metal (con una regla), obteniendo una distancia $d_1 = 0.500(28)$ cm. Adem3s el grosor del centelleador $d_2 = 1.7950(14)$ cm (medido con un calibrador) tambi3n ser3 un valor de inter3s, ya que si la medida se realiza en la superficie externa o interna del detector superior cambia el valor real de d (es decir, m3s cerca o m3s lejos del otro detector). Nosotros tendremos en cuenta estos valores, de tal modo que sumaremos a la distancia d realmente medida 2 veces el valor d_1 (ya que hay dos protectores de metal) y una vez d_2 (supondremos que en promedio las detecciones se hacen en medio del centelleador, que, aunque no sea verdad, es mejor que tomar un valor l3mite como las superficies externas):

$$d_{\text{real}} = d_{\text{medida}} + 2 \cdot d_1 + d_2 \quad (41)$$

tal que

$$u(d_{\text{real}}) = \sqrt{u(d_{\text{medida}})^2 + (2u(d_1))^2 + u(d_2)^2} \quad (42)$$

obteniendo $u(d_{\text{real}}) = 2.1$ mm para cada medida. Esto que acabamos de contar hace que jam3s tengamos una distancia $d = 0$, lo cual es cierto, las superficies de contacto nunca estar3n pegadas. El valor m3s peque1o que se puede alcanzar es $d_0 = 2.80(21)$ cm, que tomaremos como referencia para los resultados posteriores. Los observables est3n en la [tab. 11](#).

Tabla 11: Medidas de coincidencias a una distancia d entre los detectores.

d_{real} (cm)	N_1	N_2	N_{12}	t [s]	n_1 [s ⁻¹]	n_2 [s ⁻¹]	n_{acc} [s ⁻¹]	n_r [s ⁻¹]
2.80(21)	$1.032(10) \times 10^4$	4468(67)	301(17)	41.16(13)	250.7(26)	108.6(17)	0.748(17)	6.57(42)
6.10(21)	8569(93)	3684(61)	212(15)	35.74(13)	239.8(27)	103.1(17)	0.679(16)	5.25(41)
6.10(21)	$1.646(13) \times 10^4$	7216(85)	408(20)	69.11(13)	238.1(19)	104.4(12)	0.683(15)	5.22(29)
11.10(21)	$2.259(15) \times 10^4$	9313(97)	411(20)	80.65(13)	280.1(19)	115.5(12)	0.889(19)	4.21(25)
11.10(21)	$2.444(16) \times 10^4$	9930(100)	430(21)	89.91(13)	271.8(18)	110.4(11)	0.825(18)	3.96(23)
16.40(21)	$2.986(17) \times 10^4$	$1.225(11) \times 10^4$	416(20)	113.48(13)	263.1(16)	107.97(98)	0.781(17)	2.89(18)
21.60(21)	$3.708(19) \times 10^4$	$1.596(13) \times 10^4$	406(20)	141.68(13)	261.7(14)	112.68(90)	0.810(17)	2.06(14)
26.30(21)	$4.858(22) \times 10^4$	$2.069(14) \times 10^4$	419(20)	190.68(13)	254.8(12)	108.52(76)	0.760(16)	1.44(11)
31.00(21)	$3.716(19) \times 10^4$	$1.660(13) \times 10^4$	313(18)	152.24(13)	244.1(13)	109.01(85)	0.731(16)	1.32(12)
36.10(21)	$4.404(21) \times 10^4$	$1.830(14) \times 10^4$	324(18)	172.80(13)	254.9(12)	105.89(79)	0.742(16)	1.13(11)
41.00(21)	$5.354(23) \times 10^4$	$2.343(15) \times 10^4$	338(18)	218.30(13)	245.2(11)	107.32(70)	0.723(15)	0.825(86)
51.00(21)	$5.997(24) \times 10^4$	$2.672(16) \times 10^4$	325(18)	243.63(13)	246.1(10)	109.67(67)	0.742(16)	0.592(76)
57.30(21)	$4.451(21) \times 10^4$	$1.994(14) \times 10^4$	210(14)	180.40(13)	246.8(12)	110.54(79)	0.750(16)	0.415(82)

9.2. Eficiencia geom3trica

En este apartado trataremos de estudiar la eficiencia geom3trica de nuestro experimento. As3 pues compararemos los datos tomados en la pr3ctica y los contrastaremos con un estudio Monte Carlo. Para esto 3ltimo nos basaremos en el art3culo N8 [13]. Definimos como eficiencia ϵ_T la tasa de eventos detectados y la tasa de eventos realmente ocurrentes, tal que:

$$\epsilon_T = \frac{J_{\text{detectadas}}}{J_{\text{reales}}} \quad (43)$$

Podemos separar la eficiencia total en eficiencia intr3nseca ϵ_i y la eficiencia geom3trica ϵ_g , tal que:

$$\epsilon_t = \epsilon_g \times \epsilon_i \quad (44)$$

Definimos eficiencia geom3trica ϵ_g como el cociente entre el n3mero de sucesos que llegan al detector y el n3mero de sucesos que es emitidos por la fuente y relacionarlo con la distancia que separa los detectores d [6] tal que

$$\epsilon_g(d) = \frac{J(d)}{J(0)} \quad u(\epsilon_g(d)) = \sqrt{\left(\frac{u(J(d))}{J(0)}\right)^2 + \left(\frac{J(d)u(J(0))}{J(0)^2}\right)^2} \quad (45)$$

siendo $J(d)$ el flujo de rayos c3smicos incidentes cuando los detectores estan separados una distancia d . L3gicamente el flujo se relaciona con nuestros datos tal y como hemos descrito previamente:

$$J(d) = \frac{n_r(d)}{A} \quad (46)$$

siendo $A = 300 \text{ m}^2$. As3 pues, a trav3s de un Monte Carlo vamos a tratar de calcular $\epsilon_g(d)$ para las mismas distancias que las que tenemos.

Se trata de determinar cual es la mejor aproximaci3n a los resultados experimentales. Para esto calcularemos (v3ase N6 [1])

$$\chi_{\text{MC}}^2 = \sum_i \frac{(\epsilon_T(d_i) - P_{\text{MC}} \epsilon_{\text{MC}}(d_i))^2}{[u(E_t(d_i))]^2} \quad (47)$$

tratando de obtener el valor P que minimice χ^2 . As3, el valor P corresponder3 al multiplicador a aplicar a ϵ_g para que las distancias entre ϵ_T y ϵ_g sean m3nimas. De esta forma, minimizando el χ^2 en cada una de las aproximaciones encontraremos cual es la mejor y encontraremos el mejor par3metro P para cada uno. ¿El significado de P ? Queda claro que es la eficiencia intr3nseca tal que:

$$P \equiv \epsilon_i \quad (48)$$

en este apartado nuestro principal objetivo ser3 obtener χ^2 para nuestro montecarlo, el par3metro P para cada aproximaci3n y cu3l ser3 la mejor aproximaci3n (y por qu3) en funci3n de χ^2 [1]. Como nosotros vamos a hacerlo en un principio para la tasa:

$$\chi_{MC}^2 = \sum_i \frac{(n_r(d_i) - \alpha \epsilon_{MC}(d_i))^2}{[u(n_r(d_i))]^2} \quad (49)$$

Para nosotros:

$$\epsilon_g(d = 2.8\text{cm}) = 1 \quad (50)$$

de lo que se deduce que

$$\epsilon_i = \alpha / n_r \quad (51)$$

usando el valor obtenido en el apartado 6.5 $n_r = 7.51(18) \text{ s}^{-1}$. El valor:

$$\epsilon_g(d_i) = \frac{n_r(d_i)}{n_r(d_0)} \quad \epsilon_{MC}(d_i) = \frac{n_{MC}(d_i)}{n_r(d_0)} \quad (52)$$

9.3. Resultados de Monte Carlo y contraste con los datos

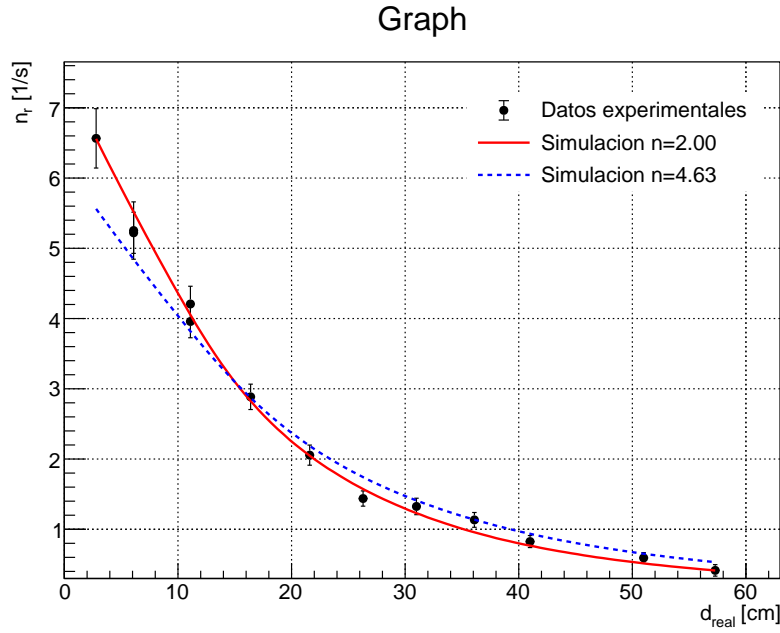
Los resultados de montecarlo los presentamos en la tabla tab. 12 (con $N = 10^7$ pruebas por posici3n) donde indicamos con super3ndice 1 al de $n = 2$ y con super3ndice 2 al obtenido con $n = 4.73$. Como podemos

$$n = 2 : \alpha_{MC} = 7.48425 \quad \chi^2 = 8.63226 \quad n = 4.63 : \alpha_{MC} = 6.19439 \quad \chi^2 = 24.837 \quad (53)$$

para 11 grados de libertad. As3 podemos ver que el resultado para $n = 2$ es bastante bueno y es compatible con los datos, mientras que para $n = 4.63$ no lo es porque $\chi_{0.999,11}^2 = 24.725$ lo cual vemos que sobrepasa completamente, siendo no compatibles con los datos. Obtenemos a partir del dato concluyente de ϵ_i usando que $n_r = 7.51(18) \text{ s}^{-1}$. as3 pues:

$$\epsilon_i = 0.996(23) \quad (54)$$

lo cual es un resultado f3sico $\epsilon_i < 1$ y que cuadra con el guion [14] que dice ‘‘la eficiencia intr3nseca de los pl3sticos org3nicos gruesos para part3culas cargadas energ3ticas a las energ3as de los rayos c3smicos es cercana del 100 %’’.

Figura 28: Montecarlo para $n = 2$ y $n = 4.63$ **Tabla 12:** Medidas de la eficiencia.

d_{real} (cm)	ϵ_g	ϵ_{MC}^1	ϵ_{MC}^2
2.80(21)	1.000(64)	0.998 99(12)	0.847 135(90)
6.10(21)	0.800(62)	0.840 20(16)	0.737 64(12)
6.10(21)	0.795(45)	0.840 34(16)	0.737 77(12)
11.10(21)	0.641(38)	0.617 08(18)	0.581 75(15)
11.10(21)	0.603(35)	0.617 19(18)	0.581 97(15)
16.40(21)	0.439(28)	0.430 49(17)	0.437 86(15)
21.60(21)	0.313(22)	0.312 30(16)	0.333 51(14)
26.30(21)	0.219(17)	0.239 48(15)	0.265 26(13)
31.00(21)	0.202(18)	0.187 29(13)	0.214 86(13)
36.10(21)	0.173(16)	0.145 63(12)	0.173 15(12)
41.00(21)	0.126(13)	0.116 52(11)	0.142 38(11)
51.00(21)	0.090(12)	0.078 610(91)	0.099 328(92)
57.30(21)	0.063(12)	0.062 868(82)	0.081 014(84)

10. Conclusiones

Durante esta memoria hemos tratado de caracterizar detalladamente tanto los detectores como la radiaci3n c3smica. Como en la mayor parte de los apartados ya hemos incluido algunas conclusiones, aqu3 nos limitaremos a resumirlas y a comentar, finalmente, nuestras sensaciones y posibles mejoras de cara al futuro.

En la primera parte caracterizamos nuestro detector, obteniendo una ventana de coincidencias $\tau_1 3.74(57) \text{ s}^{-1}$ que era un valor concluyente, ya que est3 en el orden de lo que nos imagin3bamos. Esta ventana de coincidencias es fundamental ya que la hemos usado en todos los apartados posteriores para calcular n_r a partir de n_{12} . Consecuentemente me hubiera gustado tomar m3s medidas de la misma, ya que tomamos 3 medidas cada una

con un 5/10 % de incertidumbre relativa.

Luego caracterizamos el comportamiento de n_r frente a $U_{1,2}$ y $V_{1,2}$ obteniendo un resultado extraño, ya que el alto voltaje no parecía mostrar ningún *plateau* claro, lo cual nos dejo ciertas dudas para elegir adecuadaente V_1 y V_2 para los siguientes apartados. Nosotros elegimos un alto voltaje alto, por razones explicadas anteriormente, aunque con cierta desconfianza. De hecho este creo que es el primer aspecto que mejoraría de esta práctica, haber tomado más datos y con mayor tiempo para obtener así un valor de V y U con ciertas garantías, minimizando las accidentales.

Posteriormente tratamos de caracterizar la distribución que seguía nuestros datos. Las conclusiones extraídas en este apartado eran claras: los datos siguen una distribución de poisson para coincidencias medidas en un intervalo temporal mayor a 1s. Un análisis que nos hubiera gustado hacer sería incluir el ajuste binomial de alguna forma, ya que en [10] afirmaba que este es el *modelo más general y con mayores campos de aplicación*.

La caracterización de la componente dura y blanda fue un éxito parcial, ya que no tomamos los datos de los bloques de plomo, lo cual no nos permitió caracterizar adecuadamente λ_m^μ , e incluso con los datos de Celtia Jabares tampoco obtuvimos el resultado esperado. Sin embargo, los resultados obtenidos con nuestros propios datos frenando la radiación electrónica solo con las planchas de hierro fue sorprendentemente bien, obteniendo un flujo electrónica $J_e = 50 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$, y un valor de flujo muónico compatible con los datos de Jeng-Wei Lin [11]. De hecho que los resultados sean compatibles con un frenado electrónico únicamente con 20 planchas de hierro es un éxito, y lo considero uno de los grandes resultados de esta práctica.

Luego estudiamos la distribución angular de los rayos cósmicos enfrentando varios modelos, obteniendo como resultado que $j_1(\theta) \propto \cos^2(\theta)$ es efectivamente compatible con los datos pero que el mejor ajuste a la distribución angular del flujo en la superficie terrestre para nuestros datos es $j_2(\theta) \propto \cos^4.63(\theta)$. También tratamos de diferenciar componente electrónica y muónica con nuestros datos, para ver si la componente blanda seguía la misma relación que la muónica, aunque sin ningún resultado concluyente.

Finalmente estudiamos la eficiencia geométrica, donde podríamos en el punto de mira los resultados obtenidos en el apartado anterior. La eficiencia geométrica puso en entredicho directamente que j_2 sera la mejor forma de describir la tasa, ya que como podemos ver en fig. 28 ni siquiera es compatible con los resultados, mientras que j_1 es compatible tanto con la distribución angular como con la eficiencia geométrica. Nuestro estudio de montecarlo describe perfectamente la distribución geométrica obtenida, con un $\chi^2/\text{ndf} < 1$. Como resultado concluimos que nuestros datos son compatibles con una distribución $j(\theta) \propto \cos^2(\theta)$.

Lógicamente faltarían tomar más medidas para obtener un buen estudio en todos los puntos. Un factor que me parece interesante a mejorar de cada a futuro es la disposición, debiendo estar todo el aparataje de medida en la parte más adentro del laboratorio, ya que al medir rayos cósmicos debería estar pegado a la ventana al lado de rayos cósmicos digital. Otro factor podría ser que el aparato experimental estar mas aislado del resto del laboratorio, ya que hay fuentes de electrones que pueden afectar a nuestras medidas.

para final me gustaría agradecer la ayuda de Celtia Jabares por pasarme sus datos de la atenuación y a mi padre por ayudarme a realizar la red neuronal. También fue de vital importancia la memoria de Raul Lois [6].

A. Codigo y M3todo Monte Carlo

En este apartado comentaremos un poco en qu3 nos hemos basado para desarrollar el c3digo, qu3 hemos tenido en cuenta y, finalmente, escribiremos el c3digo.

A.1. M3todo Monte Carlo

Para simular direcciones aleatorias de incidencia de rayos c3smicos, se tiene en cuenta que la densidad de probabilidad asociada a una direcci3n dada por los 3ngulos θ y ϕ se puede obtener como el producto de dos distribuciones angulares independientes. En particular, se asume que la distribuci3n en θ (3ngulo polar) est3 modulada por un factor $\cos^{n+1} \theta$, el cual proviene de considerar el 3ngulo de incidencia respecto a un detector plano [13].

La funci3n de densidad de probabilidad toma la forma:

$$f(\theta, \phi) d\theta d\phi = A (\cos \theta)^{n+1} \frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \quad (55)$$

donde A es una constante de normalizaci3n, que se determina imponiendo la condici3n de que la integral total sobre el hemisferio sea 1. De ah3 se obtiene:

$$A = n + 2 \quad (56)$$

As3, la funci3n de distribuci3n acumulada $F(\theta, \phi)$ se calcula integrando la densidad de probabilidad, dando como resultado:

$$F(\theta, \phi) = \iint f(\theta, \phi) d\theta d\phi = \frac{\phi}{2\pi} (1 - \cos^{n+2} \theta) \quad (57)$$

Dado que las variables θ y ϕ son estad3sticamente independientes, se pueden generar de forma separada utilizando variables aleatorias uniformes $u_1, u_2 \in [0, 1]$. Aplicando la inversa de la funci3n acumulada se obtienen:

$$\theta = \arccos \left((1 - u_1)^{\frac{1}{n+2}} \right), \quad \phi = 2\pi u_2 \quad (58)$$

Para determinar el punto en el que el rayo c3smico incide en el primer detector, se generan coordenadas aleatorias (x_1, y_1) dentro del 3rea activa del mismo, usualmente delimitada por $x_1 \in [0, 30]$ cm y $y_1 \in [0, 10]$ cm.

Luego, empleando consideraciones geom3tricas y suponiendo una trayectoria rectil3nea, la posici3n en el segundo detector separado una distancia d se calcula como:

$$x_2 = x_1 - d \tan \theta \cos \phi, \quad y_2 = y_1 - d \tan \theta \sin \phi \quad (59)$$

Se registra una coincidencia si las coordenadas (x_2, y_2) tambi3n se encuentran dentro del 3rea activa del segundo detector, es decir, si $x_2 \in [0, 30]$ cm y $y_2 \in [0, 10]$ cm. Nosotros no consideraremos aqu3 el grosor del detector, ya que habr3a que aumentar la distancia d usada en una variable aleatoria nueva tal que $d = d + u_3$ siendo $u_3 \in [-0.7975, 0.7975]$ el cual es bastante peque1o en comparaci3n de las distancias tomadas. Se puede dejar para un revisi3n posterior, si hiciera falta.

A.2. Código

El código usado fue el presentado justo abajo. Es importante mencionar dos puntos: sin la ayuda de las inteligencias artificiales (chatGPT) este código no habría sido posible, ya que nos ayudo a depurar los numerosos fallos en cada momento y a comentar cada paso que hacíamos (aunque el código dipuesto abajo está sin comentar). También fue de gran ayuda e inspiración el código realizado por Raúl Lois Coins [6], del que tomamos alguna idea.

```

1  #include <iostream>
2  #include <fstream>
3  #include <sstream>
4  #include <vector>
5  #include <cmath>
6  #include <string>
7  #ifndef M_PI
8  #define M_PI 3.14159265358979323846
9  #endif
10 #include "TRandom3.h"
11 #include "TCanvas.h"
12 #include "TGraphErrors.h"
13 #include "TGraph.h"
14 #include "TLegend.h"
15 #include "TAxis.h"
16 #include "TR00T.h"
17 #include "TApplication.h"
18 #include "TString.h"
19
20 const int Nparticles = 10000000;
21 const double detectorRadius = 10.0;
22
23 void SetEstiloPublicacion() {
24     gStyle->SetOptStat(0);
25     gStyle->SetOptTitle(0);
26     gStyle->SetTitleFont(42, "XYZ");
27     gStyle->SetLabelFont(42, "XYZ");
28     gStyle->SetTitleSize(0.05, "XYZ");
29     gStyle->SetLabelSize(0.045, "XYZ");
30     gStyle->SetFrameLineWidth(1.3);
31     gStyle->SetLineWidth(2.3);
32     gStyle->SetHistLineWidth(1.3);
33     gStyle->SetTickLength(0.03, "X");
34     gStyle->SetTickLength(0.03, "Y");
35 }
36
37 bool LeerDatosCSV(const char* filename,
38                  std::vector<double> &dist, std::vector<double> &errDist,
39                  std::vector<double> &rate, std::vector<double> &errRate)
40 {
41     std::ifstream infile(filename);
42     if (!infile.is_open()) {
43         std::cerr << "No se pudo abrir el archivo: " << filename << std::endl;
44         return 1;
45     }
46
47     std::string linea;
48     std::getline(infile, linea); // saltar cabecera
49
50     std::vector<double> x, sx, y, sy;
51
52     while (std::getline(infile, linea)) {

```

```

53     std::stringstream ss(linea);
54     std::string campo;
55     std::vector<double> fila;

57     while (std::getline(ss, campo, ',')) {
58         fila.push_back(std::stod(campo));
59     }

61     if (fila.size() == 4) {
62         x.push_back(fila[0]);
63         sx.push_back(fila[1]);
64         y.push_back(fila[2]);
65         sy.push_back(fila[3]);
66     }
67 }

69 dist = x; errDist = sx;
70 rate = y; errRate = sy;
71
72 return true;
73 }

75 double SimularEficiencia(double n, double d, TRandom3 &randGen)
76 {
77     long long countCoincident = 0;
78     for (int i = 0; i < Nparticles; ++i)
79     {
80         double x1 = randGen.Uniform()*30;
81         double y1 = randGen.Uniform()*10;
82         double r = detectorRadius * std::sqrt(std::pow(x1,2)+std::pow(y1,2));
83         double u2 = randGen.Uniform();
84         double cosTheta = std::pow(u2, 1.0 / (n + 2.0));
85         double sinTheta = std::sqrt(1 - cosTheta * cosTheta);
86         double phi_dir = randGen.Uniform(0, 2 * M_PI);
87         double x2 = x1 + d * (sinTheta * std::cos(phi_dir));
88         double y2 = y1 + d * (sinTheta * std::sin(phi_dir));
89         if (x2 > 0 && x2 < 30 && y2 > 0 && y2 < 10) {
90             countCoincident++;
91         }
92     }
93     return (double)countCoincident / (double)Nparticles;
94 }

95 int Montecarlo()
96 {
97     const char* nombreArchivo = "Distancias.csv";
98
99     std::vector<double> dist, errDist, rate, errRate;
100     if (!LeerDatosCSV(nombreArchivo, dist, errDist, rate, errRate)) return 1;
101     int Npoints = dist.size();
102     if (Npoints == 0) return 1;
103
104     TRandom3 randGen;
105     randGen.SetSeed(0);
106     double n1 = 2.0;
107     double n2 = 4.63;
108     std::vector<double> eff_n1, eff_n2;
109     eff_n1.reserve(Npoints);
110     eff_n2.reserve(Npoints);
111
112     for (int i = 0; i < Npoints; ++i) {
113         eff_n1.push_back(SimularEficiencia(n1, dist[i], randGen));
114         eff_n2.push_back(SimularEficiencia(n2, dist[i], randGen));
115     }

```

```

}

double chi2_n1 = 0.0, chi2_n2 = 0.0;
double scale_n1 = 1.0, scale_n2 = 1.0;

{
    double num = 0.0, den = 0.0;
    for (int i = 0; i < Npoints; ++i) {
        double sigma = (errRate[i] == 0.0 ? 1.0 : errRate[i]);
        num += rate[i] * eff_n1[i] / (sigma * sigma);
        den += eff_n1[i] * eff_n1[i] / (sigma * sigma);
    }
    if (den != 0.0) scale_n1 = num / den;

    for (int i = 0; i < Npoints; ++i) {
        double sigma = (errRate[i] == 0.0 ? 1.0 : errRate[i]);
        double diff = eff_n1[i] * scale_n1 - rate[i];
        chi2_n1 += (diff * diff) / (sigma * sigma);
    }
}

{
    double num = 0.0, den = 0.0;
    for (int i = 0; i < Npoints; ++i) {
        double sigma = (errRate[i] == 0.0 ? 1.0 : errRate[i]);
        num += rate[i] * eff_n2[i] / (sigma * sigma);
        den += eff_n2[i] * eff_n2[i] / (sigma * sigma);
    }
    if (den != 0.0) scale_n2 = num / den;

    for (int i = 0; i < Npoints; ++i) {
        double sigma = (errRate[i] == 0.0 ? 1.0 : errRate[i]);
        double diff = eff_n2[i] * scale_n2 - rate[i];
        chi2_n2 += (diff * diff) / (sigma * sigma);
    }
}

std::cout << "Resultado del ajuste:\n";
std::cout << "  n = " << n1 << " -> escala = " << scale_n1 << ", chi-cuadrado = " <<
chi2_n1 << std::endl;
std::cout << "  n = " << n2 << " -> escala = " << scale_n2 << ", chi-cuadrado = " <<
chi2_n2 << std::endl;

TGraphErrors *grData = new TGraphErrors(Npoints, dist.data(), rate.data(), errDist.
data(), errRate.data());
grData->GetXaxis()->SetTitle("d_{real} [cm]");
grData->GetYaxis()->SetTitle("n_{r} [1/s]");
grData->SetMarkerStyle(20);
grData->SetMarkerColor(kBlack);
grData->SetLineColor(kBlack);
grData->SetLineWidth(1);

int NcurvePoints = 100;
double d_min = *std::min_element(dist.begin(), dist.end());
double d_max = *std::max_element(dist.begin(), dist.end());
double step = (d_max - d_min) / (NcurvePoints - 1);
std::vector<double> curve_d, curve_sim1, curve_sim2;

for (int j = 0; j < NcurvePoints; ++j)
{
    double d_val = d_min + j * step;
    double eff1 = SimularEficiencia(n1, d_val, randGen);
    double eff2 = SimularEficiencia(n2, d_val, randGen);

```

```

177     curve_d.push_back(d_val);
178     curve_sim1.push_back(eff1 * scale_n1);
179     curve_sim2.push_back(eff2 * scale_n2);
180 }
181
182 TGraph *grSim1 = new TGraph(NcurvePoints, curve_d.data(), curve_sim1.data());
183 TGraph *grSim2 = new TGraph(NcurvePoints, curve_d.data(), curve_sim2.data());
184 grSim1->SetLineColor(kRed); grSim1->SetLineWidth(2); grSim1->SetLineStyle(1);
185 grSim2->SetLineColor(kBlue); grSim2->SetLineWidth(2); grSim2->SetLineStyle(2);
186
187 TCanvas *c1 = new TCanvas("c1", "Simulacion vs Datos", 800, 600);
188 c1->SetGrid();
189 grData->Draw("AP");
190 grSim1->Draw("L SAME");
191 grSim2->Draw("L SAME");
192
193 TLegend *legend = new TLegend(0.55, 0.7, 0.88, 0.85);
194 legend->SetBorderSize(0); legend->SetFillColor(0);
195 legend->AddEntry(grData, "Datos experimentales", "PE");
196 legend->AddEntry(grSim1, TString::Format("Simulacion n=%.2f", n1), "L");
197 legend->AddEntry(grSim2, TString::Format("Simulacion n=%.2f", n2), "L");
198 legend->Draw();
199
200 c1->SetRightMargin(0.03);
201 c1->SetTopMargin(0.03);
202 c1->Update();
203 c1->SaveAs("../Graficas/Montecarlo.pdf");
204
205 std::ofstream outfile("../Datos Crudos/Eficiencias.csv");
206 if (!outfile.is_open()) {
207     std::cerr << "No se pudo crear el archivo de salida Montecarlo_resultados.csv" <<
208     std::endl;
209 } else {
210     outfile << "distancia,sim_n1,err_sim_n1,sim_n2,err_sim_n2\n";
211     for (int i = 0; i < Npoints; ++i) {
212         double e1 = eff_n1[i], e2 = eff_n2[i];
213         double sim_n1 = e1 * scale_n1;
214         double sim_n2 = e2 * scale_n2;
215         double err_sim_n1 = scale_n1 * std::sqrt(e1 * (1.0 - e1) / Nparticles);
216         double err_sim_n2 = scale_n2 * std::sqrt(e2 * (1.0 - e2) / Nparticles);
217         outfile << dist[i] << "," << sim_n1 << "," << err_sim_n1 << ","
218             << sim_n2 << "," << err_sim_n2 << "\n";
219     }
220     outfile.close();
221     std::cout << ">> Resultados guardados en Montecarlo_resultados.csv" << std::endl;
222 }
223
224 return 0;
225 }

```

Listing 1: Simulaci3n Monte Carlo de eficiencia de detecci3n en C++ROOT [3]. Formato *lstlisting* basado en *mpdehnel* Martin Dehnel-Wil.

B. Tablas

B.1. Distribuciones

Tabla 13: Tabla para 1 s con $\mu = 0.53$, $N = 46741$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 616.06$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 8031.01$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0	2.8487×10^4	$2.739\,963 \times 10^4$	41.51	$1.953\,545 \times 10^4$	2812.87
1	1.3393×10^4	$1.463\,393 \times 10^4$	114.98	$2.082\,309 \times 10^4$	4122.02
2	3615	3907.93	23.74	3412.89	11.30
3	643	695.73	4.32	86.01	482.48
4-4	603	92.90	431.52	0.33	602.33

Tabla 14: Tabla para 2 s con $\mu = 1.16$, $N = 23706$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 867.28$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 3452.71$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0	8366	7455.35	99.12	4931.11	1410.29
1	8444	8624.32	3.85	8700.12	7.77
2	4287	4988.29	114.72	6466.60	1108.16
3	1487	1923.48	128.12	2024.88	194.56
4	411	556.27	51.34	267.11	50.37
5	232	128.70	46.00	14.84	203.26
6	213	24.81	166.26	0.35	212.31
7-7	266	4.10	257.86	0.00	265.99

Tabla 15: Tabla para 5 s con $\mu = 2.75$, $N = 9617$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 197.03$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 662.56$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0	767	614.78	30.21	584.95	43.21
1	1782	1690.66	4.68	1325.72	116.83
2	2320	2324.67	0.01	2088.63	23.07
3	1991	2130.97	9.84	2287.43	44.13
4	1347	1465.06	10.35	1741.44	115.50
5	673	805.79	26.20	921.61	91.84
6	347	369.32	1.44	339.05	0.18
7	174	145.09	4.80	86.71	43.79
8	81	49.88	11.96	15.41	53.11
9	66	15.24	39.04	1.90	62.25
10	35	4.19	27.12	0.16	34.67
11	15	1.05	12.98	0.01	14.98
12	9	0.24	8.53	0.00	9.00
13-14	10	0.06	9.88	0.00	10.00

Tabla 16: Tabla para 7 s con $\mu = 3.79$, $N = 6849$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 111.56$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 334.93$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0	214	154.10	16.77	210.41	0.06
1	646	584.69	5.82	501.33	32.40
2	1130	1109.23	0.38	917.75	39.87
3	1382	1402.91	0.32	1290.83	6.02
4	1302	1330.76	0.64	1394.92	6.63
5	891	1009.85	15.85	1158.17	80.11
6	585	638.61	4.91	738.81	40.44
7	344	346.15	0.01	362.11	0.95
8	148	164.17	1.77	136.36	0.92
9	83	69.21	2.29	39.45	22.85
10	49	26.26	10.55	8.77	33.03
11	28	9.06	12.81	1.50	25.08
12	24	2.86	18.61	0.20	23.61
13	8	0.84	6.42	0.02	7.96
14	7	0.23	6.55	0.00	7.00
15-21	8	0.07	7.85	0.00	8.00

Tabla 17: Tabla para 1 s con $\mu = 7.73$, $N = 4989$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 47.30$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 125.35$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0	8	2.19	4.22	15.00	6.12
1	28	16.93	4.37	38.22	3.73
2	82	65.45	3.34	85.56	0.15
3	201	168.67	5.20	168.32	5.31
4	334	326.00	0.19	290.95	5.55
5	496	504.06	0.13	441.89	5.90
6	651	649.48	0.00	589.72	5.77
7	715	717.30	0.01	691.51	0.77
8	640	693.18	4.42	712.48	8.21
9	598	595.44	0.01	645.02	3.70
10	420	460.34	3.87	513.10	20.64
11	309	323.53	0.68	358.63	7.97
12	209	208.44	0.00	220.25	0.61
13	124	123.96	0.00	118.86	0.21
14	71	68.45	0.09	56.36	3.02
15	39	35.28	0.35	23.48	6.18
16	25	17.05	2.53	8.60	10.76
17	14	7.75	2.79	2.76	9.02
18-20	9	8.54	0.02	1.80	5.76
21-25	9	0.49	8.05	0.02	8.96
28-30	7	0.00	7.00	0.00	7.00

Tabla 18: Tabla para 2 s con $\mu = 15.37$, $N = 2506$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 44.47$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 44.81$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0-4	10	1.63	7.01	6.88	0.98
5	8	3.79	2.21	7.73	0.01
6	10	9.72	0.01	14.69	2.20
7	26	21.33	0.84	26.15	0.00
8	38	40.97	0.23	43.63	0.83
9	76	69.96	0.48	68.21	0.80
10	102	107.50	0.30	99.92	0.04
11	146	150.17	0.12	137.15	0.54
12	222	192.30	3.97	176.39	9.37
13	217	227.30	0.49	212.56	0.09
14	225	249.48	2.66	240.01	1.00
15	253	255.58	0.03	253.93	0.00
16	245	245.45	0.00	251.73	0.18
17	223	221.87	0.01	233.82	0.53
18	185	189.40	0.10	203.51	1.85
19	153	153.18	0.00	165.97	1.10
20	110	117.69	0.54	126.82	2.57
21	83	86.12	0.12	90.80	0.73
22	65	60.15	0.36	60.92	0.26
23	40	40.19	0.00	38.29	0.07
24	18	25.73	3.32	22.56	1.15
25	23	15.82	2.24	12.45	4.84
26-27	13	24.01	9.33	15.99	0.69
28-29	14	7.39	3.12	3.43	7.97
36-40	7	0.01	6.98	0.00	7.00

Tabla 19: Tabla para 5 s con $\mu = 38.33$, $N = 1000$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 33.83$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 43.82$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0-24	6	9.04	1.54	12.69	7.46
25	7	5.65	0.26	6.36	0.06
26	7	8.33	0.25	8.88	0.51
27	12	11.82	0.00	12.09	0.00
28	13	16.18	0.78	16.04	0.71
29	17	21.38	1.13	20.72	0.82
30	28	27.32	0.02	26.09	0.13
31	44	33.77	2.38	32.00	3.27
32	42	40.45	0.06	38.24	0.34
33	44	46.98	0.20	44.52	0.01
34	59	52.95	0.62	50.49	1.23
35	57	57.98	0.02	55.79	0.03
36	57	61.73	0.39	60.05	0.16
37	69	63.94	0.37	62.98	0.52
38	77	64.49	2.03	64.35	2.08
39	57	63.37	0.71	64.06	0.87
40	52	60.72	1.46	62.13	1.97
41	66	56.75	1.30	58.70	0.81
42	52	51.79	0.00	54.03	0.08
43	48	46.16	0.07	48.45	0.00
44	28	40.20	5.32	42.33	7.34
45	30	34.24	0.60	36.03	1.21
46	24	28.53	0.85	29.88	1.44
47	34	23.26	3.39	24.14	2.86
48	17	18.57	0.15	19.00	0.24
49	11	14.53	1.13	14.57	1.16
50	16	11.14	1.48	10.89	1.63
51	7	8.37	0.27	7.92	0.12
52-54	13	19.96	3.73	17.73	1.72
57-80	8	2.84	3.33	1.65	5.05

Tabla 20: Tabla para 10 s con $\mu = 76.49$, $N = 493$, $\chi^2_{\text{Poisson}} = 35.69$ y $\chi^2_{\text{Gauss}} = 35.10$

	$h(x_j)$	$N \cdot P_{\text{poisson}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{poisson}}(x_j)$	$N \cdot P_{\text{gauss}}(x_j)$	$\chi^2_{\text{gauss}}(x_j)$
0-55	6	3.03	1.47	4.03	0.65
56-60	12	13.13	0.11	14.03	0.34
61-62	13	15.07	0.33	15.08	0.33
63-64	18	22.30	1.03	21.81	0.81
65	10	9.81	0.00	9.49	0.03
66	7	11.37	2.73	10.96	2.24
67	9	12.98	1.76	12.49	1.35
68	25	14.60	4.32	14.04	4.80
69	17	16.19	0.04	15.59	0.12
70	18	17.69	0.01	17.08	0.05
71	20	19.06	0.04	18.47	0.12
72	21	20.24	0.03	19.72	0.08
73	19	21.21	0.26	20.77	0.16
74	18	21.92	0.86	21.60	0.72
75	18	22.36	1.05	22.17	0.96
76	21	22.50	0.11	22.45	0.10
77	25	22.35	0.28	22.45	0.26
78	22	21.92	0.00	22.15	0.00
79	23	21.22	0.14	21.58	0.09
80	18	20.29	0.29	20.75	0.42
81	15	19.16	1.15	19.69	1.46
82	15	17.87	0.55	18.44	0.79
83	26	16.47	3.49	17.04	3.09
84	15	14.99	0.00	15.55	0.02
85	17	13.49	0.72	14.00	0.53
86	14	12.00	0.29	12.45	0.17
87	7	10.55	1.80	10.92	2.19
88	11	9.17	0.30	9.45	0.22
89	7	7.88	0.11	8.08	0.17
90-91	17	19.02	0.24	19.31	0.31
92-95	9	18.86	10.81	18.53	10.09
96-98	9	6.84	0.52	6.26	0.83
99-130	6	3.75	0.84	2.91	1.60

Referencias

- [1] H3ctor 3lvarez Pol et al. "N6 Instrucciones para el an3lisis de la eficiencia geom3trica". En: (??).
- [2] Philip R Bevington y D Keith Robinson. *Data reduction and error analysis for the physical sciences; 3rd ed.* New York, NY: McGraw-Hill, 2003. URL: <https://cds.cern.ch/record/1305448>.
- [3] Rene Brun y Fons Rademakers. *ROOT - An Object Oriented Data Analysis Framework, Proceedings*.
- [4] Luis M. Varela Cabo, Faustino G. Rodr3guez y Jesus C. Mont3a. *Tratamiento de datos f3sicos*. Ed. por Manuais Universitarios. 2010.

- [5] CAEN S.p.A. *N472 - 4 Channel High Voltage Power Supply: User Manual*. Revision 1.0. CAEN S.p.A. Via Vetràia, 11 - 55049 Viareggio, Italy, 2005. URL: https://www.caen.it/document/manuals/N472_rev1.pdf.
- [6] Raúl Lois Cuns. “Radiación Cósmica I”. En: (2021).
- [7] S. Eidelman et al. “Review of Particle Physics”. En: *Physics Letters B* 592.1 (2004). Review of Particle Physics. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.06.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269304007579>.
- [8] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. First edition. Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization (ISO), 1995. URL: <https://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>.
- [9] Chung Yau Elton Ho. “Cosmic Ray Muon Detection using NaI Detectors and Plastic Scintillators”. En: (2022).
- [10] Glenn F Knoll. *Radiation detection and measurement; 4th ed.* New York, NY: Wiley, 2010. URL: <https://cds.cern.ch/record/1300754>.
- [11] Jeng-Wei Lin et al. “Measurement of angular distribution of cosmic-ray muon fluence rate”. En: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 619.1 (2010). Frontiers in radiation physics and applications: Proceedings of the 11th International Symposium on Radiation Physics, págs. 24-27. ISSN: 0168-9002. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2009.12.017>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900209023341>.
- [12] Martín Abadi et al. *TensorFlow: Large-Scale Machine Learning on Heterogeneous Systems*. Software available from tensorflow.org. 2015. URL: <https://www.tensorflow.org/>.
- [13] Héctor Álvarez Pol. “N8 - MONTECARLO PARA A AVALIAÇÃO DE EFICIÊNCIA XEOMÉTRICA”. En: (2023).
- [14] Hector Álvarez Pol. “P2 - Radiación Cósmica (adquisición analógica)”. En: (2023).
- [15] Wuhongyi. *CAEN N96 8 CHS Discriminator*. Información técnica sobre el módulo CAEN N96. 2021. URL: <https://wuhongyi.cn/DAQNote/ElectronicsModules/CAEN/N96.html>.