

Daniel Vázquez Lago

Teoría Cuántica De Campos

Índice general

Introducción	5
1. Campos clásicos	7
2. El campo de Klein-Gordon	9
3. Simetrías relativistas y sus representaciones	11
4. El campo de Dirac	13
5. El campo del fotón	15
6. Interacción entre campos	17
6.1. Teoría de perturbaciones: teoría y ejemplos	17
6.2. Ejercicios y Soluciones	18

Introducción

Capítulo 1

Campos clásicos

Capítulo 2

El campo de Klein-Gordon

Capítulo 3

Simetrías relativistas y sus representaciones

Capítulo 4

El campo de Dirac

Capítulo 5

El campo del fotón

Capítulo 6

Interacción entre campos

6.1. Teoría de perturbaciones: teoría y ejemplos

6.2. Ejercicios y Soluciones

Ejercicio 6.1

Considera el decaimiento $\mathcal{P}_A \rightarrow \mathcal{P}_1(p_1)\mathcal{P}(p_2)$ donde la partícula \mathcal{P}_A está inicialmente en reposo y $m_1 = m_2 = m$. Demuestre que, después de evaluar parcialmente las integrales del espacio de fases, la tasa de desintegración puede ser escrita como

$$\Gamma = \frac{\sqrt{m_A^2 - 4m^2}}{64\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d^2\Omega \quad (6.2.1)$$

Solución 6.1

Como sabemos la tasa de decaimiento de la desintegración $i \rightarrow f$ viene dada por la ecuación

$$\Gamma = \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_F |\mathcal{A}_{fi}|^2$$

Como sabemos el término $|\mathcal{A}_{fi}|^2$ encierra toda la física de la teoría de cuántica del sistema, ya que $\int d\Pi_F$ no es más que la integral en el espacio de fases del sistema final. Para nuestro caso la integral en el espacio de fases es:

$$\int d\Pi_F = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_1^3}{2E_1} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2^3}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A - p_1 - p_2)$$

Como nos dicen que el sistema inicial está en reposo tenemos que

$$k_A = (m_A, 0) \quad p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1) \quad p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$$

Debido a la delta de Dirac se impone la conservación de la energía y el momento. La conservación del momento obliga a que $\mathbf{k}_A = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, y como $\mathbf{k}_A = 0$ se debe verificar que

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

De esta forma hemos reducido las 6 variables de integración en 3:

$$\int d\Pi_F = \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d\mathbf{p}_1^3}{4E_1 E_2} (2\pi)^4 \delta(E_A - E_1 - E_2)$$

la delta de Dirac restante representa la *conservación de la energía*, obligando a que $E_A = E_1 + E_2$, y como la partícula A está en reposo $E_A = m_A$ tenemos que:

$$m_A = \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2} + \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2}$$

y como además $m_1 = m_2 = m$ y $|\mathbf{p}_1|^2 = |\mathbf{p}_2|^2 = |\mathbf{p}|^2$ se verifica que

$$m_A = 2\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$$

de tal modo que

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{m_A^2/4 - m^2}$$

Entonces haciendo un sencillo cambio de variables en la delta de Dirac tenemos que

$$\delta(E_A - E_1 - E_2) = \delta\left(m_A - 2\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}\right)$$

y como sabemos

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad f(x_0) = 0$$

tal que en nuestro caso

$$f'(x) = -\frac{2|\mathbf{p}|}{\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}} \implies f'(x_0) = -\frac{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}}{m_A}$$

donde hemos usado que $|\mathbf{p}|_0 = \sqrt{m_A^2/4 - m^2}$ lo cual se ha deducido antes. Consecuentemente esto se convierte en:

$$\delta(E_A - E_1 - E_2) = \frac{m_A}{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}} \delta(|\mathbf{p}| - \sqrt{m_A^2/4 - m^2})$$

Si reescribimos la integral en función del módulo y de la variable angular de $|\mathbf{p}|$ tenemos que

$$\int d\Pi_F = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_A}{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}} \int \frac{|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\Omega}{4E_1 E_2} \delta(|\mathbf{p}| - \sqrt{m_A^2/4 - m^2})$$

De esta forma la última delta de Dirac reduce las variables de integración de 3 a 2, tal que:

$$\int d\Pi_F = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_A}{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}} \frac{1}{m_A^2} (m_A^2/4 - m^2) \int d\Omega$$

Reescribimos como:

$$\int d\Pi_F = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{m_A^2 - 4m^2}}{m_A} \int d\Omega$$

De lo que se deduce que:

$$\Gamma = \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_F |\mathcal{A}_{fi}|^2 = \frac{\sqrt{m_A^2 - 4m^2}}{64\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d\Omega$$

tal y como queríamos demostrar.

Ejercicio 6.2

Verifica la siguiente igualdad:

$$T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = N \left\{ \Psi(x)\bar{\Psi}(y) + \overline{\Psi(x)}\bar{\Psi}(y) \right\}$$

para el caso donde Ψ y $\bar{\Psi}$ son campos fermiónicos.

Solución 6.2

Para demostrar la igualdad vamos a seguir los siguientes pasos:

1. Desarrollamos la notación que vamos a usar.
2. Definimos $T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$.
3. Definimos $N(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$.
4. Definimos $\overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)}$.
5. Desarrollamos el término $T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$ para relacionarlo con la contracción y el producto ordenado normal.

Para definir el producto ordenado temporal y normal tenemos primero que describir los campos Ψ y $\bar{\Psi}$ en función de los operadores de creación y destrucción. Dado que hay un montón de términos encerrados en los campos, nosotros vamos a usar una notación que reduzca estas contribuciones:

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_{r=1}^2 \Psi_b^{r+} + \Psi_c^{r-} & \Psi_b^{r+} &\propto b_{\mathbf{p}}^r & \Psi_c^{r-} &\propto c_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \\ \bar{\Psi} &= \sum_{r=1}^2 \Psi_b^{r-} + \Psi_c^{r+} & \Psi_b^{r-} &\propto b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} & \Psi_c^{r+} &\propto c_{\mathbf{p}}^r\end{aligned}$$

De esta forma simplificaremos mucho los cálculos. Además como estamos trabajando con fermiones las reglas de conmutación implican anti-conmutadores:

$$\{\Psi_b^{r+}, \Psi_b^{s-}\} = \delta_{rs}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \quad \{\Psi_c^{r+}, \Psi_c^{s-}\} = \delta_{rs}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

siendo el resto de las anti-conmutaciones cero. Así tenemos que

$$\{\Psi_b^{r\pm}, \Psi_c^{s\pm}\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_b^{r\pm}\Psi_c^{s\pm} = -\Psi_c^{s\pm}\Psi_b^{r\pm}$$

Entonces el término $T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$, que es el **producto ordenado temporal**, tal que

$$T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = \begin{cases} \Psi(x)\bar{\Psi}(y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\bar{\Psi}(y)\Psi(x) & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

El factor menos se debe a que estamos trabajando con fermiones. Es decir:

$$\text{Si } x^0 > y^0 : \quad T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = \sum_{r,s} \left(\Psi_b^{r+}\Psi_b^{s-} + \Psi_b^{r+}\Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-}\Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-}\Psi_c^{s+} \right)$$

$$\text{Si } y^0 > x^0 : \quad T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = - \sum_{r,s} \left(\Psi_b^{s-}\Psi_b^{r+} + \Psi_c^{s+}\Psi_b^{r+} + \Psi_b^{s-}\Psi_c^{r-} + \Psi_c^{s+}\Psi_c^{r-} \right)$$

El término $N(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$ es el **producto ordenado normal**, y viene dado por

$$\begin{aligned}
N\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\right) &= N\left(\sum_{r,s}\left(\Psi_b^{r+} + \Psi_c^{r-}\right)\left(\Psi_b^{s-} + \Psi_c^{s+}\right)\right) = \\
&= N\left(\sum_{r,s}\left(\Psi_b^{r+}\Psi_b^{s-} + \Psi_b^{r+}\Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-}\Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-}\Psi_c^{s+}\right)\right)
\end{aligned}$$

Usando que $N(bc^\dagger) = -c^\dagger b$ y $N(cb^\dagger) = -b^\dagger c$, tenemos que:

$$N\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\right) = \sum_{r,s} -\Psi_b^{s-}\Psi_b^{r+} + \Psi_b^{r+}\Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-}\Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-}\Psi_c^{s+}$$

Ahora definimos la **contracción** $\overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)}$. Como sabemos, para los fermiones la contracción sigue la siguiente forma

$$\overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)} = \begin{cases} \langle 0 | \Psi(x), \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \bar{\Psi}(y), \Psi(x) | 0 \rangle & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

apareciendo el menos debido a que en los campos fermiónicos (a diferencia de los bosónicos) las permutaciones se hacen a través de los anticonmutadores. Veamos entonces que

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \Psi(x), \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle &= \sum_{r,s} \langle 0 | \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) | 0 \rangle \\
&= \sum_{r,s} \langle 0 | \left\{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \right\} | 0 \rangle \\
&= \sum_{r,s} \left\{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \right\}
\end{aligned}$$

Ya que como sabemos $\left\{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \right\}$ es un resultado numérico. De manera completamente análoga:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \bar{\Psi}(y), \Psi(x) | 0 \rangle &= \sum_{r,s} \langle 0 | \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) | 0 \rangle \\
&= \sum_{r,s} \langle 0 | \left\{ \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) \right\} | 0 \rangle \\
&= \sum_{r,s} \left\{ \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) \right\}
\end{aligned}$$

Entonces la contracción es:

$$\overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)} = \begin{cases} \sum_{r,s} \left\{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \right\} & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\sum_{r,s} \left\{ \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) \right\} & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

Ahora reescribimos $T\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\right)$. Si $x^0 > y^0$

$$\begin{aligned}
T\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\right) &= \sum_{r,s} \left(\Psi_b^{r+} \Psi_b^{s-} + \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-} \Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+} \right) = \\
&= \sum_{r,s} \left(\left\{ \Psi_b^{r+}, \Psi_b^{s-} \right\} - \Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-} \Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+} \right) \\
&= N(\Psi(x), \bar{\Psi}(y)) + \overline{\Psi(x)\Psi(y)}
\end{aligned}$$

De la misma manera, $T\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\right)$ si $y^0 > x_0$ también verifica la relación

$$\begin{aligned}
T\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)\right) &= - \sum_{r,s} \left(\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_c^{s+} \Psi_b^{r+} + \Psi_b^{s+} \Psi_c^{r+} + \Psi_c^{s+} \Psi_c^{r-} \right) \\
&= \sum_{r,s} \left(-\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} - \Psi_c^{s+} \Psi_b^{r+} - \Psi_b^{s-} \Psi_c^{r-} - \Psi_c^{s+} \Psi_c^{r-} \right) \\
&= \sum_{r,s} \left(-\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_c^{r+} \Psi_b^{s+} + \Psi_b^{r-} \Psi_c^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+} - \left\{ \Psi_c^{r+}, \Psi_c^{s-} \right\} \right) \\
&= N(\Psi(x), \bar{\Psi}(y)) + \overline{\Psi(x)\Psi(y)}
\end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. Cabe decir que para esta última relación hemos aplicado que

$$\sum_{r,s} \left(\Psi_c^{r+} \Psi_b^{s+} + \Psi_b^{r-} \Psi_c^{s-} \right) = - \sum_{r,s} \left(\Psi_c^{r+} \Psi_b^{s+} + \Psi_b^{r-} \Psi_c^{s-} \right)$$

Ejercicio 6.3

Calcula la contribución principal de $\langle f | S - 1 | i \rangle$ en la perturbación teórica por el proceso de difusión $\psi\bar{\psi} \rightarrow \psi\bar{\psi}$ en la teoría de Yukawa usando que viene de:

$$N \left[\bar{\psi}_I(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}_I(x_2) \psi(x_2) \right] \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} \quad (6.2.2)$$

y compárala con los resultados vistos en el problema P6. En particular, muestra los diferentes signos de las diferentes contribuciones de cada uno de los términos que pueden ser expresadas en el diagrama de Feynman.

Solución 6.3

Primero tenemos que expresar S en función de valores conocidos.:

$$S = T \left[\exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x \right) \right] \quad (6.2.3)$$

Como sabemos la teoría de Yukawa $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda \bar{\Psi} \Psi \phi$. Entonces el término principal de $S - 1$ es

$$S - 1 \approx T \left[\frac{(i\lambda)^2}{2} \iint \bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \phi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \phi(x_2) dx_1 dx_2 \right]$$

Cuando apliquemos $S - 1$ sobre los estados inicial $|i\rangle$ y final $\langle f|$, como no hay bosones ϕ en ambas situaciones, la única posibilidad de que no sea nulo es que los términos bosónicos se contraigan $\overline{\phi(x)}\phi(y)$. Además, como tenemos fermiones con un momento inicial y final diferente lo los términos de contracción Ψ y $\bar{\Psi}$ dan como resultado cero. Consecuentemente tenemos que el único término que contribuye es:

$$\left\langle f \left| \frac{(i\lambda)^2}{2} \iint N \left[\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \right] \overline{\phi(x_1)} \phi(x_2) d^4x_1 d^4x_2 \right| i \right\rangle$$

Podemos sacar la integral en el espacio fuera de tal modo que:

$$\frac{(i\lambda)^2}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 \left\langle f \left| N \left[\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \right] \overline{\phi(x_1)} \phi(x_2) \right| i \right\rangle$$

donde los estados final e inicial se definen, en un scattering partícula-antipartícula como:

$$\langle f| = -\sqrt{4E_{\mathbf{q}'}E_{\mathbf{p}'}} \langle 0| b_{\mathbf{p}'}^{\dagger} c_{\mathbf{q}'}^{s'} \quad |i\rangle = b_{\mathbf{p}}^{\dagger r} c_{\mathbf{q}}^{\dagger s} |0\rangle \sqrt{4E_{\mathbf{q}}E_{\mathbf{p}}} \quad (6.2.4)$$

El producto normal $N \left[\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \right]$ contiene 16 términos, pero solo unos pocos de ellos generan valores no nulos, ya que

$$\Psi \propto b_{\mathbf{p}} + c_{\mathbf{p}}^{\dagger} \quad \bar{\Psi} \propto b_{\mathbf{p}}^{\dagger} + c_{\mathbf{p}}$$

Solo existen 4 términos que no se hacen nulos. Estos son:

$$\begin{array}{ll} N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^{\dagger}}] & N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^{\dagger}}] \\ N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^{\dagger}} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] & N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^{\dagger}} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] \end{array}$$

Podemos ver que de estos 4, solo hay dos términos diferentes, ya que son simétricos bajo $x_1 \leftrightarrow x_2$. Así:

$$N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^{\dagger}} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] \equiv N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^{\dagger}}] = -b_1^{\dagger} c_2^{\dagger} c_1 b_2 \quad (6.2.5)$$

$$N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^{\dagger}}] \equiv N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^{\dagger}} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] = b_1^{\dagger} c_1^{\dagger} c_2 b_2 \quad (6.2.6)$$

Entonces tenemos que la contribución principal depende de dos términos

$$\langle f|S - 1|i\rangle \approx (i\lambda)^2 \iint (I + H) \overline{\phi(x_1)} \phi(x_2) d^4x_1 d^4x_2$$

Veamos cada término por separado. Escribimos los campos explícitamente

$$\Psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}} \left[b_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) e^{+ipx} \right] \quad (6.2.7)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}} \left[c_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(\mathbf{p}) e^{+ipx} \right] \quad (6.2.8)$$

Y ahora calculamos cada uno de los términos I y H por separado. El primero lo relacionamos con 6.2.5 y el segundo con 6.2.6.

- Para calcular I lo primero que tenemos que hacer es coger los términos destrucción y los aplicamos sobre los términos creación del término $|i\rangle$. Así:

$$\begin{aligned} N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger}] |i\rangle &= - \sum_{m,n} \iint \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6} \frac{e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2}}{\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}} [\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \cdot u^m(\mathbf{k}_1)] \\ &\times [\underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger} \cdot \bar{v}^n(\mathbf{k}_2)] \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{k}_1}^m c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{q}}^{r\dagger} |0\rangle = \\ &= e^{-ipx_1 - iqx_2} [\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \cdot u^s(\mathbf{p})] [\underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger} \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})] |0\rangle \end{aligned}$$

apareciendo el signo menos debido a que $c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} = -b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{k}_2}^n$. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}'}^{s'} c_{\mathbf{q}'}^{r'} [\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \cdot u^s(\mathbf{p})] [\underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger} \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})] | 0 \rangle \\ = - \left[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p}) \right] \left[v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q}) \right] e^{ix_1 p'} e^{ix_2 q'} \end{aligned}$$

Todo junto hace que:

$$I = - \left[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p}) \right] \left[v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q}) \right] e^{ix_1(p-p')} e^{ix_2(q-q')}$$

- Para calcular H tenemos que replicar paso por paso el apartado anterior, de tal modo que

$$\begin{aligned} N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^\dagger} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] |i\rangle &= \underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_1^\dagger} \sum_{m,n} \iint \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6} \frac{e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2}}{\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}} \\ &\times [\bar{v}^n(\mathbf{k}_2) \cdot u^m(\mathbf{k}_1)] \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{k}_1}^m c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{q}}^{r\dagger} |0\rangle = \\ &= - \underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_1^\dagger} e^{-ipx_2 - iqx_2} [\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})] |0\rangle \end{aligned}$$

apareciendo el signo menos debido a que $c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} = -b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{k}_2}^n$. Ahora tenemos que

$$\langle 0 | \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}'}^{s'} c_{\mathbf{q}'}^{r'} \underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_1^\dagger} | 0 \rangle = \left[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}') \right] e^{x_1(p'+q')}$$

Todo junto hace que:

$$H = [\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})] [\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] e^{ix_1(p+q)} e^{ix_2(p'+q')}$$

El resto del cálculo es muy sencillo. Teniendo en cuenta que:

$$\overline{\phi(x_1)}\phi(x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

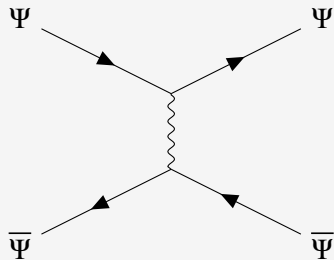
el valor de la primera contribución de $\langle f|S-1|i\rangle$ es:

$$\begin{aligned} \langle f|S-1|i\rangle &\approx (i\lambda)^2 \iiint \frac{d^4x_1 d^4x_2 d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} [I + H] = \\ &= (i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\ &\times \left[-[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p})][v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})] \delta(k+p-p') \delta(k+q-q') \right. \\ &\quad \left. + [\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})][\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] \delta(k+p'+q') \delta(k-p-q) \right] \end{aligned}$$

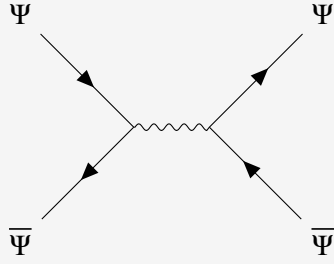
Llegando finalmente a la expresión siguiente

$$\begin{aligned} \langle f|S-1|i\rangle &\approx (i\lambda)^2 \left\{ -\frac{[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p})][v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})]}{(p-p')^2 - \mu^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})][\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] }{(p+q)^2 - \mu^2} \right\} \end{aligned}$$

Ahora nos pide que la comparemos con dos casos: aquella obtenida en el ejercicio 6 y según los diagramas de Feynman. La diferencia con el ejercicio 6 es clara: ahora aparecen términos espinoriales y además un signo menos delante del primer término. Los términos espinoriales son evidentes, ya que ahora estamos trabajando con fermiones y no con bosones, mientras que el signo menos aparece porque ahora las conmutaciones se hace a través del anti-conmutador. El cálculo a través del diagrama de Feynman de esta primera contribución coincide con el resultado obtenido numéricamente, siendo el primer término el que se debe a la dispersión elástica y el segundo debido a la desintegración de las partículas:



$$\sim -(i\lambda)^2 \frac{[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p})][v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})]}{(p-p')^2 - \mu^2}$$



$$\sim (i\lambda)^2 \frac{[\bar{v}^{r'}(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})][\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] }{(p+q)^2 - \mu^2}$$

Ejercicio 6.4

Muestra que \mathcal{L}_{QED} es invariante bajo las transformaciones de Gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad \Psi_f \rightarrow e^{ieq_f \lambda} \Psi_f$$

y deduce que las ecuaciones del movimiento.

Solución 6.4

La lagrangiana de la electrodinámica cuántica (QED) está dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \sum_f \bar{\Psi}_f (i\not{D} - m_f) \Psi_f$$

donde Ψ_f es el campo fermiónico también denotado directamente por Ψ . Además tenemos que

- $\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu \equiv \gamma^\mu \partial_\mu - ieq_f \gamma^\mu A_\mu$ que es la derivada covariante.
- $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ que es el tensor de campo electromagnético.

Queremos verificar que \mathcal{L}_{QED} es invariante bajo las transformaciones de gauge:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

$$\Psi_f \rightarrow e^{ieq_f \lambda} \Psi_f$$

donde λ es una función escalar arbitraria. La primera parte del lagrangiano solo puede ser alterado bajo la transformación de gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, ya que no depende de Ψ_f . Entonces, bajo dicha transformación, nuestro tensor campo electromagnético

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \lambda)$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + (\partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda) = F_{\mu\nu}.$$

El segundo término depende tanto de A_μ como de Ψ_f , por lo que hay que considerar ambas simultáneamente. Veamos que, bajo la segunda transformación, el campo y anti-campo transforman como

$$\Psi_f \rightarrow e^{ieq_f \lambda} \Psi_f,$$

$$\bar{\Psi}_f \rightarrow e^{-ieq_f \lambda} \bar{\Psi}_f.$$

De esto se deduce que bajo dicha transformación $\bar{\Psi}_f m \Psi_f \rightarrow \bar{\Psi}_f m \Psi_f$ ya que las fases se cancelan entre sí. La parte menos trivial:

$$D_\mu \Psi_f \rightarrow \partial_\mu (e^{ieq_f \lambda} \Psi_f) - ieq_f A_\mu e^{ieq_f \lambda} \Psi_f - ieq_f (\partial_\mu \lambda) e^{ieq_f \lambda} \Psi_f \\ e^{ieq_f \lambda} \partial_\mu (\Psi_f) - ieq_f A_\mu e^{ieq_f \lambda} \Psi_f$$

donde hemos derivado el producto, cancelándose los términos con $\partial_\mu \lambda$. Entonces al aplicar la fase $e^{-ieq_f \lambda}$ del $\bar{\Psi}_f$ y al no interaccionar con γ^μ , tenemos que, bajo dichas transformaciones de Gauge

$$\bar{\Psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi_f \rightarrow \bar{\Psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi_f, \quad (6.2.9)$$

Una vez hemos demostrado que $\mathcal{L}_{\text{QED'}}$ es invariante bajo transformaciones Gauge, ahora tenemos que hallar las ecuaciones del movimiento. Las ecuaciones del movimiento las obtenemos al hacer:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \longrightarrow -\partial_\mu F^{\mu\nu} + eq_f \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = 0 \quad (6.2.10)$$

Y al hacer:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = 0 \longrightarrow (i\not{D} - m) \Psi_f = 0 \quad (6.2.11)$$

si aplicáramos las leyes de Euler-Lagrange para Ψ_f obtendríamos la misma ecuación que la anterior, solo que de otra forma. Consecuentemente las ecuaciones del movimiento de la QED son:

$$(i\not{D} - m) \Psi = 0 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = qe \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \quad (6.2.12)$$

Ejercicio 6.5

Verifica las siguientes identidades de la matriz γ^5 tal que

$$\text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (6.2.13)$$

Solución 6.5

Para resolver este ejercicio tendremos que usar que la traza verifica que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ y que además $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$.

a) Para esto aplicamos simplemente que

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = \frac{i}{2} \text{Tr}[\{\gamma^1 \gamma^2, \gamma^3 \gamma^4\}] = \frac{i}{4} \text{Tr}[\{\{\gamma^1, \gamma^2\}, \{\gamma^3, \gamma^4\}\}]$$

y como sabemos que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$, todos los términos del interior son cero al verificar que $\mu \neq \nu$. La traza de la matriz es nula, por lo que efectivamente se verifica que $\text{Tr}[\gamma^5] = 0$.

b) La demostración de este también es sencilla. Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, tenemos que

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu]$$

Como $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$, es sencillo ver que tenemos el mismo valor a ambos lados. De este modo tenemos que

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5]$$

Y por tanto:

$$2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \Rightarrow \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0$$

tal y como queríamos demostrar.

c) Este es un poco más complicado, por lo que lo haremos cualitativamente. El punto principal es que cuando 2 o más índices están repetidos, podremos hacer el producto directamente tal que $\gamma^\kappa \gamma^\kappa = \frac{1}{2} \eta^{\kappa\kappa} \mathbf{I}$, de tal modo que en ese caso podemos aplicar la demostración para que sea cero. Consecuentemente la única posibilidad de que no se anule es que todos los índices μ, ν, σ, ρ sean diferentes. Si son diferentes, entonces siempre podemos intercambiarlos de tal manera que formen una γ^5 . Cada permutación nos lleva a la aparición de un -1 , por lo que si n es el número de permutaciones:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = (-1)^n \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = (-1)^n (-i) \gamma^5$$

La expresión de las permutaciones y la condición de que solo sea no nula cuando los índices sean diferentes se expresa directamente usando la levi-civita de 4 dimensiones. Como además $\gamma^5 \gamma^5 = 1$ y $\text{Tr}(1) = 4$, tenemos que:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Ejercicio 6.6

Demuestra que $(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = m^2$ y úsalo para demostrar que los espinores satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0$$

Solución 6.6

La primera parte nos pide demostrar que $(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = m^2$. Para esto vemos que

$$p \cdot \sigma = p^0 1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad p \cdot \bar{\sigma} = p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Que no son más que matrices (lógicamente p^0 está multiplicado por la matriz identidad). Entonces:

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = (p^0)^2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 + p^0 \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} p^0$$

Y como p^0 va con la matriz identidad los dos últimos términos se cancelan entre sí,

obteniendo que

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = (p^0)^2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2$$

Y debido a las propiedades de las matrices de Pauli $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{p}^2$, tal que

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 = m^2$$

Tal y como queríamos demostrar. Para la segunda parte del ejercicio tenemos que usar que $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$. Como además:

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

Y usando que

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que:

$$\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \bar{\sigma}^\mu \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \end{pmatrix} \quad \gamma^\mu v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\sigma^\mu \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \\ \bar{\sigma}^\mu \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

Para la primera ecuación:

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (p \cdot \sigma) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ (p \cdot \bar{\sigma}) \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \\ m \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

Que como podemos ver:

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} - m \right) \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \\ \left(\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \sigma} - m \right) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = 0$$

siendo trivial que es igual a cero ya que $\sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} - m = 0$ por lo demostrado en la primera parte del ejercicio.

$$(\not{p} - m)v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -(p \cdot \sigma) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ (p \cdot \bar{\sigma}) \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \\ -m \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

Y al igual que en el caso anterior, tenemos que:

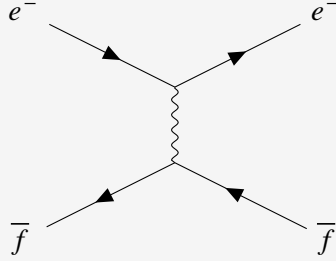
$$(\not{p} - m)v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \left(-\sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} + m \right) \sqrt{p \cdot \sigma} \bar{\xi} \\ \left(\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \sigma} - m \right) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = 0$$

Ejercicio 6.7

Usando el régimen no relativista calcula, para la dispersión partícula-antipartícula, la amplitud, y muestra que el potencial es atractivo $q_f = -1$ y repulsivo para $q_f = +1$.

Solución 6.7

La dispersión partícula-antipartícula viene dada por el siguiente diagrama de Feynman:



Aplicando las reglas de Feynman podemos hallar que la amplitud viene dada por (recordemos que $q_e = -1$):

$$i\mathcal{A} \approx \left[\bar{u}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \right] \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{v}^r(q)(iq_f e\gamma^\mu)v^{r'}(q') \right]$$

Como sabemos $q^2 = (p' - p)^2$. Cuando consideramos el régimen no relativista. En este régimen tenemos que considerar que

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

Y por tanto tenemos que

$$\bar{u}^{s'}(p)\gamma^0 u^s(p) = 2m\delta^{ss'} \quad \bar{u}^{s'}(p)\gamma^i u^s(p) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Lo mismo se aplica a v y \bar{v} , salvo que en este caso aparece un signo menos ya que:

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}$$

tal que

$$\bar{v}^r(p)\gamma^0 v^{r'}(p) = -2m\delta^{rr'} \quad \bar{v}^r(p)\gamma^i v^{r'}(p) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Entonces, como solo el caso $\mu = \nu = 0$ es no nulo, y $q^2 \approx -|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2$ (conservación del momento), nuestra amplitud queda como:

$$\mathcal{A} = (4m_e m_f \delta^{ss'} \delta^{rr'}) \frac{q_f e^2}{-|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2}$$

Si relacionamos la amplitud con la amplitud de dispersión en la mecánica cuántica no relativista ignorando el término de masas y de espín ($4m_e m_f \delta^{ss'} \delta^{rr'}$):

$$\mathcal{A} = \frac{-q_f e^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} = - \int d^3\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)\mathbf{r}}$$

El término de la derecha se parece mucho a una transformada de Fourier (salvo por el factor $(2\pi)^{-3/2}$) donde $\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. Entonces podemos obtener $U(\mathbf{r})$ como la transformada de Fourier del momento \mathbf{p} de $\mathcal{A}/(2\pi)^{3/2}$, tal que

$$U(\mathbf{x}) = e^2 q_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{p}|^2}$$

Esta integral es bastante sencilla de calcular:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{|\mathbf{p}|^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{ipr \cos(\theta)} dp d\cos(\theta) d\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{2 \sin(pr)}{pr} dp = \frac{2}{4\pi^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{r}$$

De lo que se deduce que

$$U(\mathbf{x}) = \frac{e^2 q_f}{4\pi r}$$

que es el potencial de Coulomb, atractivo si $q_f = -1$ y repulsivo si $q_f = 1$.