

Física Nuclear

Daniel Vázquez Lago

Índice general

1. Física Nuclear	5
1.1. Introducción a la fuerza nuclear	5
1.1.1. Potencial de Yukawa	5
1.1.2. Intercambio de piones	5
1.2. Isoespín	5
1.2.1. ¿Qué es el isoespín?	5
1.2.2. Estados singlete y triplete de isoespín	5
1.2.3. Reglas de selección	6
2. Modelos nucleares	7
2.1. Teorías efectivas	7
2.1.1. Simetría quiral formal	7
2.1.2. Teoría de Campo Efectiva Quiral	8
2.1.3. Simetrías subyacentes	8
2.1.4. Intercambio de piones	9
2.2. Modelos nucleares <i>ab initio</i> : No-Core Shell mode	9
2.3. Modelos nucleares microscópicos	9
2.3.1. Campo medio	9
2.3.2. Interacción efectiva de Skyrme	9
2.3.3. Teoría relativista de campo medio	10
3. Propiedades colectivas	11
3.1. Fomra nuclear y multipolaridad	11
3.1.1. Momento cuadrupolar eléctrico	11
3.1.2. Momento dipolar magnético	11
3.2. Geometría de núcleos par-par	11
3.2.1. Modos de vibración	11
3.2.2. Rotación nuclear	11
3.3. Deformación nuclear en el modelo de capas	12
3.3.1. Modelo de Nilsson	12
3.3.2. Corrección de capas de Strutinsky	12
3.4. Apareamiento de nucleones	12
3.4.1. Seniority	12
3.4.2. Aproximación BCS	12
4. Ejercicios y soluciones	13
4.1. Boletín 1:	13
4.1.1. Ejercicios	13
4.1.2. Solucion	14

Capítulo 1

Física Nuclear

1.1. Introducción a la fuerza nuclear

1.1.1. Potencial de Yukawa

1.1.2. Intercambio de piones

1.2. Isoespín

1.2.1. ¿Qué es el isoespín?

Ignorando la interacción electromagnética, se pueden entender los protones y neutrones como estados de la misma partícula: **el nucleón**. En función del isoespín de esta partícula tendremos una manifestación u otra. Asignamos arbitrariamente $T_3 = 1/2$ para el protón y $T_3 = -1/2$ para el neutrón. Matemáticamente, el isoespín vive en el espacio $SU(2)$, lo que le confiere propiedades matemáticas análogas al espín o momento angular.

1.2.2. Estados singlete y triplete de isoespín

Un núcleo en el estado fundamental tiene un valor de isoespín $T_3 = \frac{1}{2}(Z - N)$, tal que $T = |T_3|$. Por ejemplo, con dos nucleones, tendríamos dos posibles configuraciones de isoespín, como podrían ser el estado triplete $T = 1$ y el estado singlete $T = 0$. El estado singlete (en el que los espines están anti-alineados) solo podría darse cuando los dos nucleones son diferentes, mientras que el triplete podría darse cuando los dos nucleones son diferentes e iguales. En la naturaleza se observa que los estados de dos nucleones iguales no son estables (^2n y ^2He), por lo que *el estado fundamental de isoespín para dos nucleones es el singlete*.

Mientras que podemos encontrar estados singlete ($T = 0$) estables ya con dos nucleones, solo a partir de estados con 4 partículas o más podemos decir que los estados tripletes ($T = 1$) son estables. Estados por ejemplo cuadrupletes ($T = 3/2$) son más difíciles de encontrar, así como estados quintupletes ($T = 2$). La razón de estos nombres es obvia: la degeneración por isoespín viene dada por $g(T) = 2T + 1$ (como en el espín) y por tanto para $T = 2$ hay 5 estados posibles.

1.2.3. Reglas de selección

La conservación de isoespín introduce reglas de selección suaves en desintegraciones y reacciones nucleares. Veamos algunas de ellas:

- Para transiciones E1, $\Delta T = 0, \pm 1$, aunque $\Delta T = 0$ está suprimido para $T = 0$ y para $T_3 = 0$.
- En desintegración β , la componente Fermi está suprimida para $\Delta T \neq 0$.
- En reacciones nucleares, T permanece invariante, ya que la fuerza fuerte no distingue entre protones y neutrones. T_3 se conserva mientras no cambien el número de protones y neutrones.

Capítulo 2

Modelos nucleares

2.1. Teorías efectivas

En el núcleo participan tres de las cuatro fuerzas fundamentales: la fuerza nuclear fuerte, la fuerza nuclear débil y la fuerza electromagnética, aunque solo la fuerza fuerte es la responsable de mantener unido el núcleo atómico. Aún así, describir el núcleo con el Lagrangiano de QCD es prácticamente imposible, debido a la complejidad del problema.

Por esa misma razón, Steve Weinberg propuso en 1979 el uso de **teorías efectivas**. Las teorías efectivas son modelos que describen un sistema en una escala de energía determinada sin necesidad de conocer todos los detalles microscópicos de la teoría subyacente. En otras palabras, capturan los efectos relevantes a bajas energías sin requerir una descripción completa de las interacciones fundamentales a energías más altas, preocupándose únicamente de las simetrías relevantes de la teoría subyacente (QCD).

2.1.1. Simetría quiral formal

La simetría más importante es la *simetría quiral formal*. La simetría quiral formal de la cromodinámica cuántica nos dice que si los quarks no tuvieran masa podríamos suponer que los quarks a izquierdas y a derechas son completamente independientes, es decir, que bajo ningún tipo de interacción podríamos transformar un quark a izquierdas y a derechas. Sin embargo, la simetría quiral formal no se cumple, ya que los quarks sí tienen masa, aunque a bajas energías (quarks ligeros) puede asumirse que se mantiene la simetría.

Sin embargo en la cromodinámica cuántica el vacío no respeta la simetría quiral, ya que por culpa de las fluctuaciones cuánticas del vacío QCD aparecen espontáneamente pares quark-antiquark que no desaparecen (es decir, aparecen piones). Esta es una de las propiedades fundamentales de QCD. Sin embargo esto es un proceso aleatorio, por eso se le dice *rotura espontánea de simetría*. Esta rotura espontánea de simetría es la que le da masa a los núcleos y la que hace que las interacciones fuertes tengan alcance de núcleo a núcleo.

La simetría quiral formal también se puede romper a través de lo que se llama *rotura explícita*, que le da masas a los quarks, la cual es la manera correcta de entender la física nuclear y la interacción entre quarks.

2.1.2. Teoría de Campo Efectiva Quiral

La teoría de campo efectiva quiral (ChEFT) es una generalización de la interacción entre quarks pero aplicada a núcleos, que nos dice que cualquier elemento de matriz se puede expresar como un desarrollo en potencias de la razón entre escalas:

$$V \propto \sum_{\nu} \left(\frac{Q}{\Lambda} \right)^{\nu} F_{\nu}(C_i(\Lambda)) \quad (2.1.1)$$

siendo Q el momento típico del sistema (como el momento relativo de los nucleones) aproximadamente $\sim 140 \text{ MeV}/c^2$ y Λ la escala de rotura de la simetría quiral aproximadamente $\sim 800 \text{ MeV}/c^2$. Los $C_i(\Lambda)$ son los coeficientes de baja energía, que encapsulan información sobre la física de corto alcance y deben determinarse empíricamente. Además tenemos ν , que es el orden en la expansión quiral, y $F_{\nu}(C_i(\Lambda))$ que representa funciones de los coeficientes de baja energía, que dependen de la escala de corte Λ . Esta sistemática permite:

- Ordenar las contribuciones según su importancia relativa. Las bajas irán ajustadas por $C_i(\Lambda)$ y las de largo alcance las dadas por el intercambio de piones.
- Separar las interacciones de corto alcance (ajustadas por de piones). Mejorar la precisión de los cálculos agregando órdenes superiores de la expansión.

2.1.3. Simetrías subyacentes

Las simetrías subyacentes a la fuerza nuclear, como bien sabemos para mayor explicación):

- Invarianza translacional: las dependencias deben corresponder a la distancia relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.
- Invarianza de Lorentz: la interacción debe ser la misma para cualquier sistema de referencia inercial, y por tanto la dependencia con el momento debe ser también relativa $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$.
- Invarianza rotacional: todos los términos de la interacción deben tener un momento angular total nulo.
- Invarianza de isoespín. La interacción debe ser isoescalar en el espacio de isoespín: solo términos $(\tau_1 \cdot \tau_2)^n$ deben estar permitidos.
- Invarianza de paridad: los términos con \mathbf{r} y \mathbf{p} deben tener potencias pares.
- Invarianza de inversión temporal: los términos con \mathbf{p} y espín σ deben tener potencias pares.

2.1.4. Intercambio de piones

2.2. Modelos nucleares *ab initio*: No-Core Shell mode

2.3. Modelos nucleares microscópicos

2.3.1. Campo medio

2.3.2. Interacción efectiva de Skyrme

Una de las interacciones más usadas en los cálculos de Hartree-Fock es un tipo de potencial de contacto, i.e., la interacción solo actúa en un rango finito. Este tipo de interacción de contacto se puede simular con una dependencia en el momento de los participantes. Definiendo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, la forma más sencilla de la interacción $v(\mathbf{r})$ con invarianza rotacional es

$$v(\mathbf{r}) = v_0\delta(\mathbf{r}) + v_1 [\hat{\mathbf{p}}^2\delta(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r})\hat{\mathbf{p}}^2] + v_2\hat{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{r})\hat{\mathbf{p}} \quad (2.3.1)$$

La interacción de Skyrme se basa en esta propiedad e incluye un término de interacción de tres cuerpos:

$$v_{Sk} = \sum_{i < j} v(i, j) + \sum_{i < j < k} v(i, j, k) \quad (2.3.2)$$

El *término de dos cuerpos* actúa también sobre el espín de los nucleones con las matrices de Dirac:

$$v(1, 2) \quad (2.3.3)$$

- El término de contacto con intercambio de espín:

$$t_0$$

- El término de rango efectivo:

$$\frac{1}{2}t_1$$

- El término de espín órbita de dos cuerpos:

$$iW_0$$

donde hemos usado que

$$\hat{\mathbf{k}} \quad (2.3.4)$$

El *término de tres cuerpos* se describe como un potencial de rango 0:

$$v(1, 2, 3) = t_3\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (2.3.5)$$

Las constantes t_0, t_1, t_2, t_3, x_0 y W_0 se ajustan a datos experimentales. Consecuentemente el Hamiltoniano obtenido por el método Hartree-Fock usando la interacción efectiva de Skyrme es:

$$[-\nabla] = \quad (2.3.6)$$

donde definimos:

$$U(\mathbf{r}) = \quad (2.3.7)$$

$$m^* = \quad (2.3.8)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \quad (2.3.9)$$

2.3.3. Teoría relativista de campo medio

Capítulo 3

Propiedades colectivas

3.1. Fomra nuclear y multipolaridad

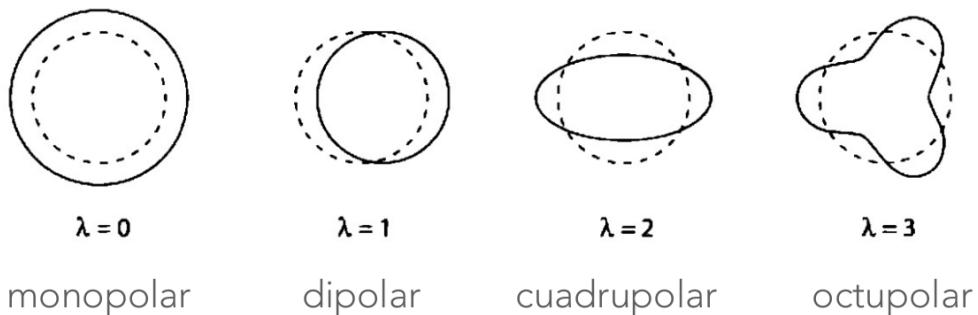
3.1.1. Momento cuadrupolar eléctrico

3.1.2. Momento dipolar magnético

3.2. Geometría de núcleos par-par

3.2.1. Modos de vibración

Podemos definir diferentes modos de vibración alrededor de la esfera:



El cuanto de energía vibracional es el fonón. Si añadimos un fonón de modo $\lambda = 2$ (fonón cuadrupolar) a un estado fundamental 0^+ , el resultado es un estado 2^+ , ya que añade una componente $Y_{2\mu}$ a la función de ondas.

3.2.2. Rotación nuclear

La superficie de cualquier sólido puede describirse a través de los armónicos esféricos. Si nos centramos en formas cuadrupolares no triaxiales,

3.3. Deformación nuclear en el modelo de capas

3.3.1. Modelo de Nilsson

3.3.2. Corrección de capas de Strutinsky

3.4. Apareamiento de nucleones

3.4.1. Seniority

3.4.2. Aproximación BCS

Capítulo 4

Ejercicios y soluciones

4.1. Boletín 1:

4.1.1. Ejercicios

Ejercicio 4.1:

Encuentra dos ejemplos de triplete de isoespín, otro ejemplo de “cuatriplete”, y otro de “quintuplete” en núcleos ligeros. Discute las diferencias de energía entre los estados análogos de isoespín de cada grupo e intenta dar una configuración de nucleones que explique sus estructuras.

Solución en la página 14

Ejercicio 4.2:

Comprueba si la interacción de Skyrme cumple las simetrías subyacentes de la fuerza nuclear.

Solución en la página 15

Ejercicio 4.3:

Demuestra que los estados permitidos en el acoplamiento de tres fonones cuadrupolares son 0^+ , 2^+ , 3^+ , 4^+ , y 6^+ .

Solución en la página 15

Ejercicio 4.4:

Encuentra los posibles estados (espín y paridad) que resultarían del acoplamiento de un fonón cuadrupolar y un octupolar.

Solución en la página 15

Ejercicio 4.5:

Ejercicio 5 El núcleo de ^{68}Er tiene su primer estado excitado 2^+ en 91.4 keV.

1. Sabiendo que es el primer estado de una banda rotacional, determina su momento de inercia.
2. ¿Cuáles serían las energías de los siguientes cuatro estados de la misma banda? Compara con los valores experimentales (208.1, 315.0, 410.2, 493.5 keV).

Solución en la página 15

Ejercicio 4.6:

Ejercicio 6 ¿Por qué dos nucleones en la misma capa se acoplan sólo a j pares ($j = 0, 2, 4, \dots$)?

Solución en la página 16

Ejercicio 4.7:

Ejercicio 7

1. Construye la línea yrast de dos núcleos con $A > 150$ y otros dos con $A < 100$.
2. Deduce el momento de inercia en función del cuadrado de la frecuencia de rotación y discute la aparición de backbending e identifica las diferentes bandas rotacionales.
3. Compara los resultados con lo esperado en un sólido rígido y un fluido sin viscosidad.
4. En los núcleos con $A < 100$, intenta identificar bandas vibracionales.

Solución en la página 16

Ejercicio 4.8:

Ejercicio 8 Usando el esquema de niveles tradicional del modelo de capas mostrado en la tabla 1,

1. Calcula la corrección de Strutinsky (sin incluir apareamiento) para $Z = 50, N = 82$ y para $Z = 40, N = 68$.
2. Estudia el resultado en función de la anchura γ de la Gaussiana.

Solución en la página 19

4.1.2. Solucion

Solución del ejercicio 4.1 en la página 13:

Los estados triplete de isoespín son aquellos que tienen $T = 1$, los estados cuatripletos son aquellos con $T = 3/2$ y los quintupletos con $T = 2$. Por ejemplo el carbono 10 tiene $Z = 6$ y $N = 4$

Solución del ejercicio 4.2 en la página 13:

Las simetrías subyacentes a la fuerza nuclear, como bien sabemos (véase Subsec. 2.1.3 para mayor explicación):

- Invarianza translacional: las dependencias deben corresponder a la distancia relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.
- Invarianza de Lorentz: la interacción debe ser la misma para cualquier sistema de referencia inercial, y por tanto la dependencia con el momento debe ser también relativa $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$.
- Invarianza rotacional: todos los términos de la interacción deben tener un momento angular total nulo.
- Invarianza de isoespín. La interacción debe ser isoescalar en el espacio de isoespín: solo términos $(\tau_1 \cdot \tau_2)^n$ deben estar permitidos.
- Invarianza de paridad: los términos con \mathbf{r} y \mathbf{p} deben tener potencias pares.
- Invarianza de inversión temporal: los términos con \mathbf{p} y espín σ deben tener potencias pares.

Ahora solo tenemos que ver que la interacción de Skyrme no posee las diferentes dependencias prohibidas (distancias no relativas, términos de momento angular...) o aplicar invarianza de paridad/temporal (la invarianza de paridad es $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ y la temporal $t \rightarrow -t$). La interacción de Skyrme

Solución del ejercicio 4.3 en la página 13:

Queremos acoplar tres fonones cuadrupolares, es decir, queremos hacer un acoplamiento $2 \oplus 2 \oplus 2$. Lógicamente la paridad va a ser positiva, ya que

$$\pi = (-)^2(-)^2(-)^2 = + \quad (4.1.5)$$

Ahora solo resta acoplar los modos de vibración. Esto exige un acoplamiento un tanto diferente al habitual. Primero usamos el acoplamiento de $2 \oplus 2$ dado por los apuntes, que nos dice que

$$2 \oplus 2 = 0^+, 1^-, 2^+, , 4^+$$

Solución del ejercicio 4.4 en la página 13:

Todavía no está redactado.

Solución del ejercicio 4.5 en la página 13:

Todavía no está redactado.

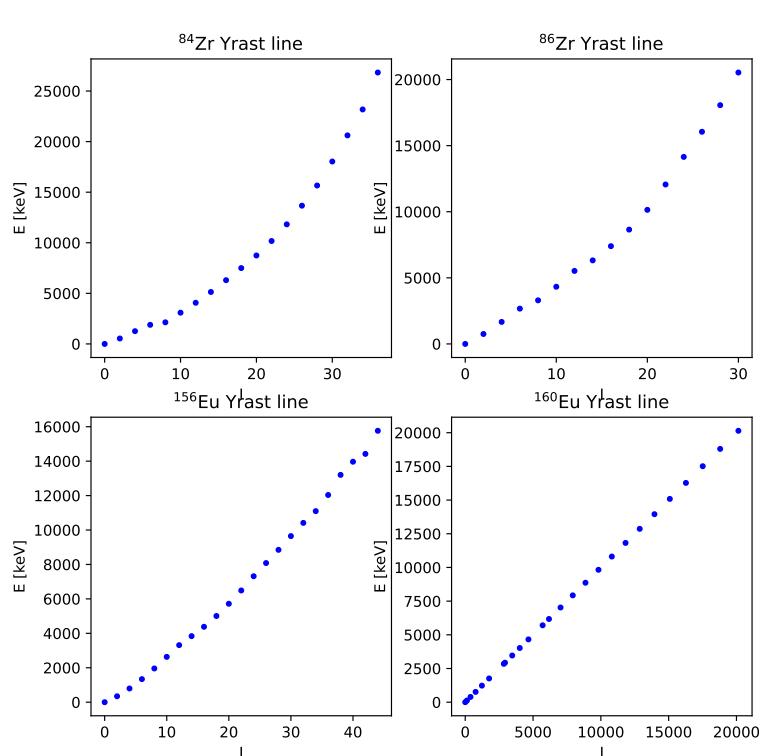
Solución del ejercicio 4.6 en la página 14:

Porque minimizan la energía del apareamiento de nucleones.

Solución del ejercicio 4.7 en la página 14:

Apartado a). Primero tenemos que definir qué es la línea *yrast* para poder constuirla. La línea *yrast* es la trayectoria que conecta, en un diagrama de energía versus espín, los estados con la energía de excitación más baja para cada valor de momento angular I (espín) en un núcleo. Es decir, para cada espín I , el estado *yrast* es el de mínima energía, y estos estados resultan ser los más favorecidos en la formación de bandas rotacionales. Nos piden los bandas *yrast* de 4 átomos, 2 para $A < 100$ y 2 para $A > 150$. Los elegidos son: ^{84}Zr , ^{86}Zr , ^{160}Eu , ^{156}Eu . Los motivos por los que son elegidos es que presentan una gran cantidad de datos en el nndc, además de que son núcleos par-par, que al tener como primer estado fundamental 0^+ obliga a que las bandas rotacionales estén compuestos de estados con I par de paridad positiva ($4^+, 6^+, 8^+ \dots$). Esto es interesante ya que facilita la recolección de datos de la nndc.

Lo primero que hacemos es entrar en la lista de niveles de la nndc (*list of levels*) y elegir los que, para los estados $2^+, 4^+ \dots$ tienen el valor de energía más pequeño. En principio no nos vamos a fijar en nada más, ya que así es la definición de la línea *Yrast*. Es posible que existan estados con valores 14^+ que no pertenezcan a bandas rotacionales (siendo excitaciones de partículas individuales), pero esto debería ser detectable en la propia gráfica del *yrast*, y mencionado posteriormente. Así pues, las líneas *yrast* son:



Como podemos ver las líneas del circonio están bastante bien, cuadrando en un esquema

$E \propto I(I + 1)$. Sin embargo las líneas de los europeos son bastante malas, en particular la del europio 160, es prácticamente una línea recta. Lo más probable es que efectivamente hallamos colocado estados de excitación individual, excitación vibracional u otros fenómenos que no correspondan a una banda rotacional. Si nos sobra tiempo incluiremos al final del ejercicio una serie de datos corregidos que podrían pertenecer a diferentes bandas rotacionales, o quizás incluyamos un núcleo con mejor resultado.

Apartado b) Ahora tenemos que calcular el momento de inercia en función de la frecuencia de rotación, discutiendo la aparición del backbending. Para calcular el momento de inercia en función de frecuencia ω primero necesitamos una ω , que se obtiene de la siguiente fórmula:

$$\hbar\omega = \frac{E_I - E_{I-2}}{[I(I+1)]^{1/2} - [(I-2)(I-1)]^{1/2}} \approx \frac{E_I - E_{I-2}}{2} \quad (4.1.6)$$

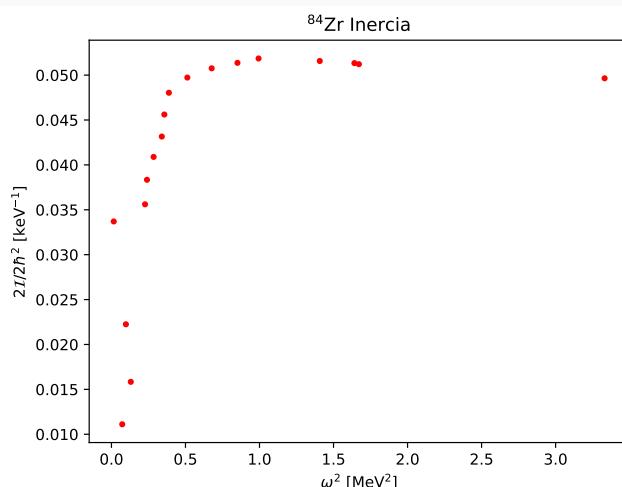
que sacamos del libro *Shape and Shells in Nuclear Structure* de Nilsson y Ragnarsson, aunque la última aproximación ya se encontraba en las diapositivas. También sabemos que el momento de inercia I se relaciona con nuestra energía de rotación y momento de inercia como:

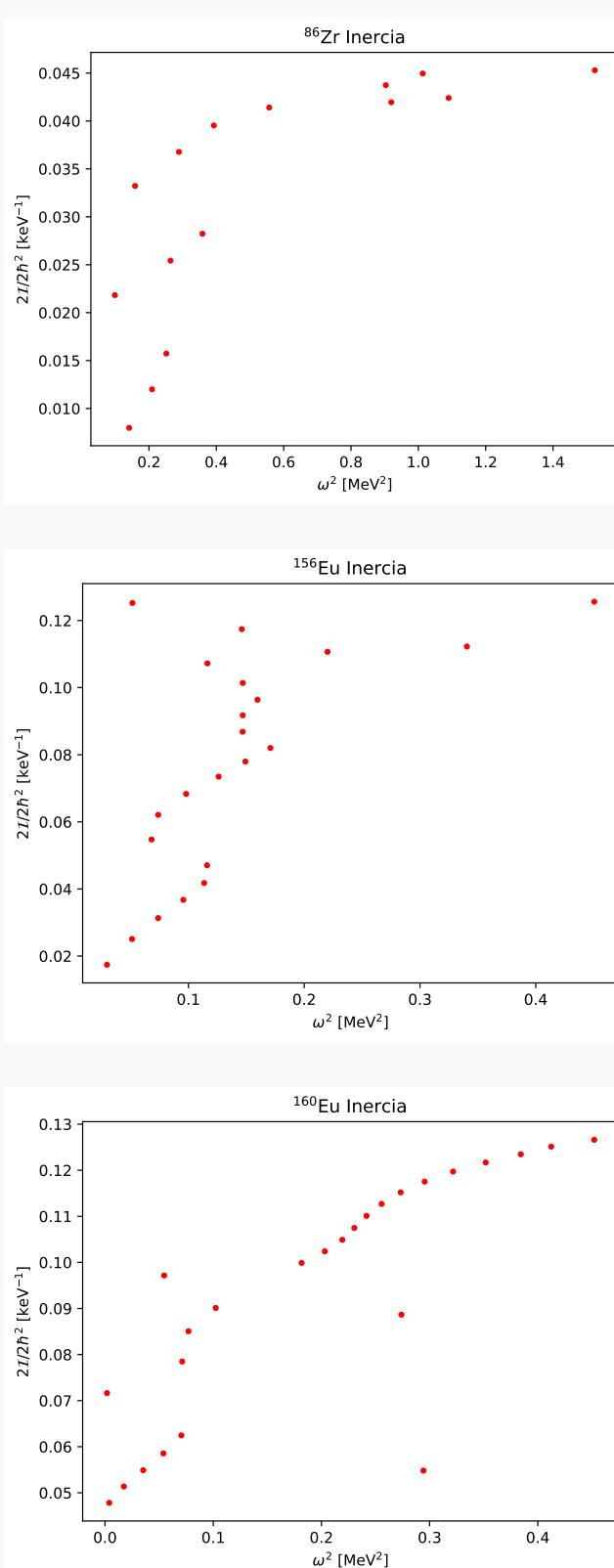
$$E_I = \frac{\hbar^2}{2I} [I(I+1)] \quad (4.1.7)$$

para núcleos par-par donde $K = 0$. Entonces podemos ver que para un E_I dado podemos asignar un $\hbar\omega$ (ya que $E_0 = 0$) y para cada E_I dado podemos calcular $2I/\hbar^2$, tal que:

$$\frac{2I}{\hbar^2} = \frac{I(I+1)}{2E_I} \quad (4.1.8)$$

Lógicamente lo vamos a realizar en python, tal que las gráficas obtenidas resultan:





Como podemos ver en ninguno de los casos nos aparece algo como $I = \alpha\omega^2$ (que en las gráficas se representaría como una línea recta). En todos los casos hay un comportamiento

inicial a la cuarta con la frecuencia $I \propto \omega^4$, apareciendo backbending inmediato tanto en los núcleos ligeros como en los núcleos pesados, como en los núcleos ligeros.

Aunque es probable que algunos de los datos estén mal cogidos y realmente no pertenezcan a una de las bandas rotacionales, la inercia se enfrenta a la frecuencia tal y como esperábamos: de manera que aparecen zonas con cierta similitud (bandas rotacionales) que se disgregan rápidamente. Las bandas rotacionales se pueden detectar tanto en la línea yrast como en el backbending, aunque es mucho más fácil de detectar en el

Solución del ejercicio 4.8 en la página 14:

