

# Notas Física Nuclear y de Partículas

Daniel Vazquez Lago

28 de octubre de 2024



# Índice general

<b>I</b>	<b>Física Nuclear</b>	<b>5</b>
<b>1.</b>	<b>Propiedades generales de los núcleos</b>	<b>7</b>
1.1.	Introducción: definiciones.	7
1.1.1.	Tipos de desintegraciones	7
1.2.	Masas de los núcleos	9
1.2.1.	Espectrometría de masas	9
1.2.2.	Energía de ligadura	10
1.2.3.	Formula semiempírica de masas	11
1.2.4.	Aplicaciones de la formula semiempírica: parábola de masas	12
1.3.	Abundancia y estabilidad nuclear	13
1.4.	Tamaño de los núcleos	13
1.4.1.	Introducción	13
1.4.2.	Sección eficaz diferencial y sección eficaz total	13
1.4.3.	Sección eficaz de Rutherford	15
1.4.4.	Factor de forma	17
1.4.5.	Ejemplos de factores de forma	18
<b>2.</b>	<b>Inestabilidad nuclear</b>	<b>21</b>
2.1.	Desintegración $\alpha$	21
2.1.1.	Energética de la desintegración $\alpha$	21
2.1.2.	Sistemática de la desintegración $\alpha$ . Regla de Geiger-Nuttal	22
2.1.3.	Tratamiento de Gamow, Gurney y Condon	22
2.1.4.	Momento angular y paridad en la desintegración $\alpha$	25
2.2.	Desintegración $\beta$	26
2.2.1.	Energética de la desintegración $\beta$ .	26
2.2.2.	Probabilidad de transición. Regla de oro de Fermi.	28
2.2.3.	Teoría de Fermi de la desintegración $\beta$	29
2.2.4.	Verificación experimental de la teoría de Fermi	32
2.2.5.	Clasificación de las desintegraciones $\beta$	33
2.2.6.	Desintegración doble $\beta$	37
2.3.	Transiciones electromagnéticas	37
2.3.1.	Energética de la radiación $\gamma$	38
2.3.2.	Análisis multipolar de la radiación electromagnética.	39
2.3.3.	Reglas de selección del momento angular y de la paridad	40
2.3.4.	Conversión interna	41
2.4.	Teoría continua de la desintegración radiactiva.	43
2.4.1.	Sustancia sin ramificación	44
2.4.2.	Ramificación. Constantes de desintegración parciales.	44
2.4.3.	Varias sustancias. Cadenas radiactivas naturales.	45

<b>3. Reacciones Nucleares</b>	<b>47</b>
3.1. Tipos de reacciones	47
3.2. Leyes de conservación	49
3.2.1. Conservación de la carga eléctrica y el número bariónico	49
3.2.2. Conservación de la energía y del momento lineal	49
3.2.3. Energía umbral de reacción	51
3.2.4. Conservación del momento angular y de la paridad	52
3.2.5. Conservación de isospín	53
3.3. Dispersión y secciones eficaces	53
3.3.1. Atenuación de un haz al atravesar un blanco	54
3.3.2. Dispersión de Coulomb	55
3.3.3. Dispersión nuclear	55
3.3.4. Formalismo de dispersión	56
3.3.5. Teorema Óptico	61
3.3.6. Fórmula de Breit-Wigner	61
3.4. Mecanismos de reacciones	63
3.4.1. Núcleo compuesto	63
3.4.2. Combinaciones	65
3.5. Fisión	66
3.5.1. Fisión según el modelo de la gota líquida	66
3.5.2. Reacciones en cadena	66
3.6. Fusión	66
3.7. Apéndices	67
3.7.1. Energía cinética clásica en el sistema LAB y en el CM	67
3.7.2. Momento lineal clásico en el sistema LAB y en el CM	67
3.7.3. Energía total relativista en el sistema LAB y en el CM	67
3.7.4. Energía cinética relativista en el sistema LAB y en el CM	67
3.7.5. Momento lineal relativista en el sistema LAB y en el CM	67
<b>4. Estructura nuclear</b>	<b>69</b>
4.1. Introducción a la estructura nuclear	69
4.2. El modelo de la gota líquida	70
4.3. El modelo de Gas de Fermi	70
4.4. El modelo de capas	73
4.4.1. Evidencia experimental de capas en los núcleos	74
4.4.2. Modelo de capas con potencial armónico	75
4.4.3. Interacción espín-órbita	76
4.4.4. Modelos dipolares magnéticos	77
<b>II Física de partículas</b>	<b>79</b>
<b>5. La interacción fuerte nucleón-nucleón</b>	<b>81</b>
5.1. Partículas elementales: interacciones y propiedades	82
<b>6. Transformaciones de simetría y leyes de conservación</b>	<b>83</b>
6.1. Paridad $\mathcal{P}$	83
<b>7. El modelo de quarks y el modelo estándar</b>	<b>85</b>

**Parte I**

**Física Nuclear**



# Capítulo 1

## Propiedades generales de los núcleos

### 1.1. Introducción: definiciones.

**Definición 1.1 (número atómico).** El número atómico ( $Z$ ) de un núcleo es un entero que coincide con el número de protones del núcleo.

**Definición 1.2 (número másico).** El número másico ( $A$ ) de un núcleo es la suma de número de protones y neutrones  $A = Z + N$ .

Atendiendo a los valores  $Z$ ,  $A$  y  $N$ , los núcleos se clasifican en:

- **Isótopos:** son núcleos con igual  $Z$ .
- **Isóbaros:** son núcleos con igual  $A$ .
- **Isotónos:** son núcleos con igual  $N$ .

Para denotar un núcleo se suele escribir  ${}^A_ZX_N$  donde  $X$  es el símbolo químico del elemento en cuestión (determinado por el valor  $Z$ ). Protones y neutrones se denominan genéricamente **nucleones**. Hoy en día se han identificado alrededor de 112 átomos diferentes.

#### 1.1.1. Tipos de desintegraciones

##### Desintegración $\alpha$

La desintegración alfa consiste en la emisión de dos protones y dos neutrones (un núcleo de helio) por parte de un núcleo inestable. Produce un desplazamiento hacia la izquierda de dos posiciones de la tabla periódica, y reduce el número másico en 4 unidades  $\Delta Z = -2$  y  $\Delta A = -4$ . Esquemáticamente esta desintegración se puede escribir Coulomb



Aunque en capítulos posteriores estudiaremos en detalle la evolución de las poblaciones de núcleos radioactivos, recordaremos ahora que la **vida media** ( $\tau$ ) de un núcleo es el tiempo necesario para reducir el número de núcleos de una muestra en un factor  $1/e$  de su valor inicial (o, en otras palabras, el promedio del tiempo que tarda un núcleo en desintegrarse), mientras que el período de semidesintegración ( $t_{1/2}$ ) es el tiempo necesario para reducirlo a la mitad. Dados  $N_0$

núcleos radioactivos iniciales que no están reponiéndose por medio de ningún proceso, el número de desintegraciones que se observan por unidad de tiempo es proporcional al propio número de núcleos presentes. La constante de proporcionalidad es característica de cada núcleo y se denomina **constante de desintegración**  $\lambda$  que tiene unidades inversas de tiempo. Esto nos lleva a la ley de desintegración radiactiva:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad (1.1.2)$$

Otras definiciones de interés son el **semi tiempo**, esto es, el tiempo que tarda una muestra en reducirse a la mitad:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (1.1.3)$$

La **actividad de una sustancia** se define como

$$A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad (1.1.4)$$

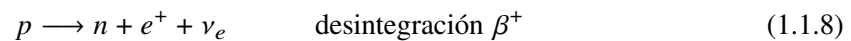
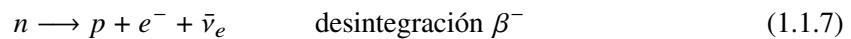
y en el SI se define como Becquerelio (Bq, una desintegración en cada segundo). Para desarrollar estos conceptos véase el apartado 2.4.1.

### Desintegración $\beta$

La desintegración beta consiste en la conversión nuclear de neutrones en protones o viceversa. Por decirle de algún modo, es la manera en que el núcleo *corrige* un exceso de protones o neutrones convirtiendo unos en otros. En física nuclear se suele usar los símbolos  $\beta^-$  y  $\beta^+$  para designar las radiaciones emitidas por las desintegraciones beta. La desintegración por emisión  $\beta^-$  ( $\beta^+$ ) produce un desplazamiento hacia la derecha (izquierda) de una posible en la tabla periódica, pero no cambia esencialmente la masa:  $\Delta Z = \pm 1, \Delta A = 0$ . Responsable de este fenómeno es la interacción débil:



La conversión nuclear en protones puede tener lugar de 3 modos distintos. En notación de física de partículas se escribe:



El tercer proceso un electrón de las capas internas (usualmente la K) con cierta probabilidad presencia dentro de la región nuclear es *usado* para la conversión de un protón en un neutrón.

### Desintegración $\gamma$

Los rayos  $\gamma$  son capaces de penetrar varios milímetros en plomo. No son desviados por los campos electromagnéticos e interaccionan con la materia de manera similar a los rayos X. Se trata de radiación electromagnética, e inicialmente se confundieron con los rayos X emitidos por el reordenamiento de los electrones atómicos que sigue a una conversión interna. La desintegración



gamma consiste en la emisión espontánea de fotones altamente energéticos cuando el núcleo pasa de un estado excitado a otro estado de menor energía o al fundamental. Es, por tanto, un proceso esencialmente análogo al que tiene lugar cuando un átomo se desexcita emitiendo radiación, bien sea en el rango visible o en el de rayos X. La emisión gamma suele acompañar a otros dos tipos de desintegración, porque sus procesos quedan normalmente en estados excitados.

### Fisión espontánea

Es un proceso en el que el núcleo pesado se divide en dos más ligeros. No es posible determinar a priori en qué par concreto de núcleos ligeros terminará, sino que habrá una distribución estadística en un cierto rango de números atómicos.

### Emisión nuclear

Este es un proceso mediante el que un núcleo inestable, generalmente producto de una fisión o desintegración anterior, emite un nucleón.

## 1.2. Masas de los núcleos

En el laboratorio se miden masas atómicas, no masas nucleares. A pesar de ello, veremos que en casi todos los casos prácticos de la física nuclear podremos usar masas atómicas en lugar de masas nucleares, porque las masas de los electrones y sus energías de ligadura se cancelarán casi perfectamente en el balance global. Actualmente las masas atómicas se miden en unidades atómicas de masa unificadas (u), y se definen de manera que la masa del átomo  $^{12}\text{C}$  sea exactamente de 12u. La conversión de unidades:

$$1u = 931.49432(28)\text{MeV}/c^2 = 1.6605402(10) \times 10^{-27}\text{kg} \quad (1.2.1)$$

Las masas del protón, neutrón y electrón:

$$m_p = 939.272 \text{ MeV}/c^2 = 1836.149 m_e \quad (1.2.2)$$

$$m_p = 939.565 \text{ MeV}/c^2 = 1838.679 m_e \quad (1.2.3)$$

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 \quad (1.2.4)$$

Otra relación interesante

$$c^2 = 931.494013(37) \text{ MeV}/u \quad (1.2.5)$$

### 1.2.1. Espectrometría de masas

Para medir las masas de isótopos radioactivos de vida media corta se recurre a las ecuaciones de balance energético en reacciones nucleares. En la reacción  $x + X \rightarrow y + Y$ , midiendo las energías cinéticas de cada compuesto para determinar la diferencia de masas, que se conoce como el **valor Q** de la reacción:

$$Q = [m(x) + m(X) - m(y) - m(Y)]c^2 = E_c(\text{estado final}) - E_c(\text{estado inicial}) \quad (1.2.6)$$

Donde la letra minúscula denota las masas nucleares. Para que una desintegración sea espontánea debe verificarse que  $Q > 0$ , lo cual es evidente, ya que la energía cinética del estado final no puede ser negativa, como por ejemplo en el caso de tener una sola partícula, podremos encontrar un sistema de referencia inercial donde esta partícula este en reposo, y por tanto  $E_c(\text{estado inicial}) = 0$ , de tal manera que si  $Q < 0$  implicaría  $E_c(\text{final}) < 0$  lo cual no tiene sentido.

### 1.2.2. Energía de ligadura

Todo sistema compuesto (sistema ligado) tiene una energía de ligadura negativa, de tal manera que es energéticamente más favorable mantener unidos a los constituyentes que mantenerlos separados. En otras palabras: la suma de las masas de los constituyentes de un compuesto estable es mayor que la masa del compuesto. Esto es así porque existe una reacción de carácter atractivo entre los constituyentes que los mantiene unidos, de tal manera que es necesario realizar un trabajo para separarlos y destruir (desintegrar) el compuesto. En el dominio de la física nuclear definiremos la energía de un núcleo de modo que resulte positiva (masas de los constituyentes menos masa del compuesto).

La energía de la ligadura nuclear en términos de las masas atómicas de los elementos considerados que es lo que realmente se mide en el laboratorio. Para aclarar la notación, en lo que sigue usaremos la letra  $m$  para representarla masa de una partícula, por ejemplo  $m_n$  para la masa de un neutrón. Usaremos la notación  $m(Z, A)$  para representar la **masa del núcleo (masa nuclear)**, y la notación  $M(Z, A)$  o  $M({}_Z^AX_N)$  para designar la **masa de un átomo (masa atómica)** con  $Z$  protones y  $A$  nucleones. De esta manera podemos relacionar la masa atómica con la masa nuclear de la siguiente manera:

$$M(Z, A) = m(Z, A) + Zm_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i \quad (1.2.7)$$

donde  $B_i$  son las *energía de ligadura* de los electrones. Este término es despreciable, por lo que la masa atómica y la masa nuclear se pueden relacionar por:

$$M(Z, A) \approx m(Z, A) + Zm_e \quad (1.2.8)$$

El valor de la masa nuclear también se puede expresar en función de la masas de sus constituyentes y la **energía de ligadura del núcleo** o **energía de ligadura nuclear**  $B$ :

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{1}{c^2}B \quad (1.2.9)$$

Es muy interesante expresar  $B$  en función de parámetros conocidos, como son las masas atómicas y las masas de los protones, neutrones y electrones, ya que es la energía de ligadura la que nos va a permitir calcular si una desintegración podría ocurrir de manera espontánea o no. Así:

$$\frac{1}{c^2}B = Zm_p + (A - Z)m_n - m(Z, A) \quad (1.2.10)$$

en algunas de las tablas en lugar de tabular  $M(Z, A)$  se proporciona el llamado **defecto de masa**  $\Delta = (M - A)c^2$  donde  $M$  es la masa atómica en *uma* y  $A$  es el número másico. Dado  $\Delta$  se puede deducir la masa atómica.

### 1.2.3. Fórmula semiempírica de masas

Existe una fórmula que describe cualitativamente la energía de ligadura por nucleón. Se trata de **fórmula semiempírica de masas**, también conocida como **fórmula de Wicksäcker**, y es esencialmente una parametrización de la energía de ligadura aunque se la conoce como fórmula de masas porque la relación entre una y otra es directa. Esta parametrización se basa en el **modelo de la gota líquida**. Al igual que en una gota líquida, la densidad en el núcleo es esencialmente constante en función del radio nuclear:

$$M({}_Z^AX_N) \equiv M(Z, A) = ZM({}_1^1H) + Nm_n - \frac{B(Z, A)}{c^2} \quad (1.2.11)$$

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sy} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (1.2.12)$$

Existen distintas parametrizaciones de la fórmula de masas, pero en todas ellas los términos son los mismos salvo constantes. Una breve descripción de cada uno de los términos es el siguiente:

- **Término de volumen:** sabemos que la energía de ligadura por nucleón es casi constante en función de  $A$ , esto es:  $B \propto A$ , luego el significado de  $a_v A$  es obvio.  $a_v$  será presumiblemente del orden de 8 MeV. Cada nucleón contribuye aproximadamente lo mismo a la energía de ligadura porque la interacción fuerte es de corto alcance y sólo le permite interaccionar con sus vecinos más próximos.
- **Término de superficie:** cerca de la superficie del núcleo es de esperar que los nucleones tengan menos vecinos y por lo tanto contribuyan un poco menos que los interiores a la energía de ligadura. El radio del núcleo va como  $A^{1/3}$  y la superficie como  $A^{2/3}$ , por lo tanto el término de superficie es de la forma  $a_s A^{2/3}$ , contribuyendo con signo opuesto al de volumen para contrarrestar su excesivo peso.
- **Término de energía coulombiana:** la repulsión coulombiana entre los protones hace disminuir la energía de ligadura y, por lo tanto, aumentar la masa del núcleo. Debido al carácter de largo alcance de esta interacción, este término es proporcional a  $Z^2$  e inversamente proporcional al radio  $a_c Z(Z-1)A^{-1/3}$ <sup>1</sup>.
- **Término de simetría:** de la carta de Segré sabemos que la estabilidad nuclear se concreta en valores  $Z \approx A/2$ , y esto hemos de tenerlo en cuenta de alguna manera en nuestra fórmula de masas, de lo contrario no habría impedimento alguno para que la parametrización resultante no proporcionase isótopos estables con cientos de neutrones. Una posible forma de este parámetro es  $-a_{sy}(A-2Z)^2/A$ . Así escrito favorece la existencia de núcleos con un número parecido de protones y neutrones, y tiene mayor importancia para los núcleos ligeros, para los que la condición  $Z \approx A/2$  es más estricta.
- **Término de pairing o apareamiento.** Un estudio significativo de las masas nucleares muestra que los núcleos más estables tienen un número par de protones y/o neutrones. Esto se debe a una tendencia de los nucleones a acoplarse en parejas de iguales, es decir pp y nn, con espines y momentos antiparalelos. Si tomamos nulo este término ( $\delta = 0$ ) para núcleos con  $A$  impar, entonces en núcleos con  $Z$  impar y  $N$  impar  $\delta$  contribuye con signo negativo, es decir, tiende a

<sup>1</sup>Si realizáramos el cálculo suponiendo una esfera uniformemente cargada obtendríamos una energía potencial dada por la expresión  $-(3/5)e^2 Z^2 A^{-1/3}$ . Si consideramos objetos puntuales uniformemente distribuidos en la *esfera nuclear*, aparece en lugar de  $Z^2$  el factor  $Z(Z-1)$ , proporcional al número de parejas de objetos:  $-(3/5)e^2 Z(Z-1)A^{-1/3}/(4\pi\epsilon_0 R_0)$ . En la fórmula semiempírica de masas puede ser más conveniente dejar una constante global para ajustar los datos que usar un valor como  $R_0 = 1.2$  fm en la expresión analítica anterior.

disminuir la energía de ligadura y aumentar la masa del núcleo. Sería ventajoso en estos casos convertir uno de los protones en neutrón o alguno de los neutrones en un protón. Finalmente, para núcleos con  $Z$  par y  $N$  par,  $\delta$  contribuye con signo positivo. En la naturaleza sólo existen 4 núcleos impar-impar estables, que son el  ${}^2\text{H}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^{10}\text{B}$  y  ${}^{14}\text{N}$ , mientras que núcleos estables par-par hay unos 167, lo cual da una idea de la importancia del término pairing.

$$\delta(A) = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & \text{Núcleos con } Z \text{ par y } N \text{ par} \\ 0 & \text{Núcleos con } A \text{ impar} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{Núcleos con } Z \text{ impar y } N \text{ impar} \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Las constantes se ajustan a los datos experimentales, con los siguientes valores como su mejor ajuste

$a_v$ (MeV)	$a_s$ (MeV)	$a_c$ (MeV)	$a_{sy}$ (MeV)	$a_p$ (MeV)
15.5	16.8	0.72	23	34

#### 1.2.4. Aplicaciones de la formula semiempírica: parábola de masas

La importancia de la fórmula de Weizsäcker no es que nos permita predecir nuevos fenómenos en física nuclear (que no lo hace), sino que representa un primer intento de modelizar el comportamiento de una propiedad nuclear como lo es la energía de ligadura. Contiene de hecho ingredientes de dos modelos nucleares: el modelo de la gota líquida y el modelo de capas. El primero trata alguna de las propiedades colectivas del núcleo de un modo similar a como se estudia en una pequeña gota líquida; los tres primeros términos de la energía de ligadura de la fórmula de Weizsäcker también aparecerían en el cálculo de la energía de ligadura que aparece en el modelo de una gota cargada. El modelo de capas contempla los nucleones desde una perspectiva individual y sería el contexto para la explicación de los dos últimos términos. Definimos el **exceso de masas** de un nucleido  $\Delta(Z, A)$  como la diferencia entre su masa real y su número másico

$$\Delta(Z, A) = M(Z, A) - (Z + N)m_u \quad (1.2.14)$$

Para  $A$  constante, la masa atómica dada por la fórmula semiempírica de masas es una función cuadrática de  $Z$ : una parábola. En efecto, reuniendo los términos que acompañan a cada potencia de  $Z$  tenemos que:

$$\begin{aligned} M(Z, A)c^2 = & \left( Am_n c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_{sy} A - \delta(A) \right) \\ & + \left( m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 - a_c A^{-1/3} - a_c A^{-1/3} - 4a \right) Z \\ & + \left( a_c A^{-1/3} + 4a_{sy} A^{-1} \right) Z \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

donde hay que recordar que  $M(Z, A)$  es la masa del núcleo, y en general  $M({}^1\text{H}) = m_p + m_e$ . Derivando para encontrar el mínimo

$$Z_{\min} = \frac{[m_n - m_p] c^2 + a_c A^{-1/3} + 4a_{sy}}{2a_c A^{-1/3} + 8a_{sy} A^{-1}} \approx \frac{A}{2} \left( 1 + \frac{A^{2/3} a_c}{4a_{sy}} \right)^{-1} \quad (1.2.16)$$

Para los términos de  $A$  par, el término *pairing* ( $\delta$ ) produce dos parábolas desplazadas una de la otra por  $2\delta$ .

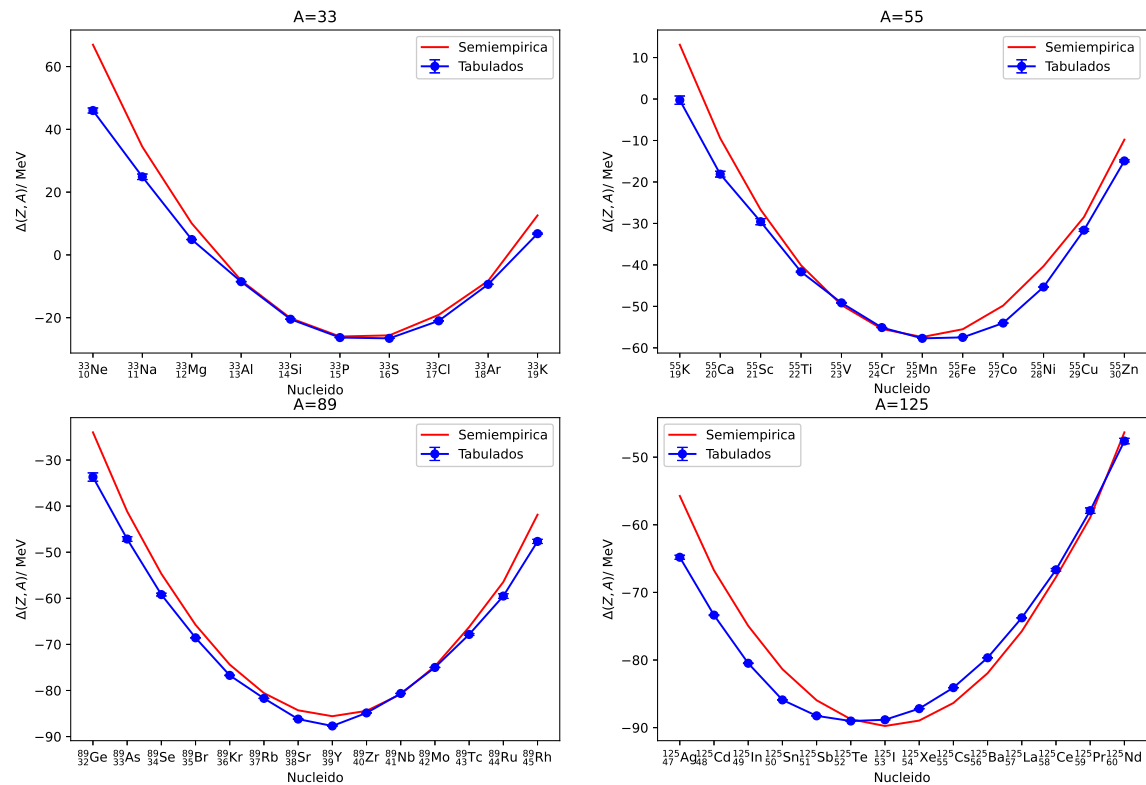


Figura 1.1: Valores dados por la semiempírica vs valores tabulados. Como podemos comprobar los valores tabulados son mejores cuanto más estables son los núcleos y más pequeños son.

### 1.3. Abundancia y estabilidad nuclear

Si graficamos el número atómico  $Z$  en función del número neutrónico  $N$  (**carta de Segré**), observamos que los núcleos estables se acumulan en una banda estrecha alrededor de la línea  $Z = N$  ( $N/Z \approx 1$ ) hasta  $A \approx 40$ , mientras que a partir de  $Z = 80$  tenemos que  $N/Z \approx 1.5$ .

La abundancia relativa de los elementos en el Sistema solar no se deduce únicamente de los criterios de estabilidad, esta abundancia viene determinada más bien a partir de las características de las reacciones de nucleosíntesis en una época temprana del Universo.

### 1.4. Tamaño de los núcleos

#### 1.4.1. Introducción

El tamaño de los núcleos atómicos es del orden de unos cuantos fermis. Una manera de determinar el tamaño de los núcleos consiste en hacer dispersión de electrones sobre ellos. Esto permitiría estudiar la distribución de carga

#### 1.4.2. Sección eficaz diferencial y sección eficaz total

En los cursos introductorios de física cuántica se estudia la dispersión o colisión de partículas por potenciales simples en una dimensión. Este tratamiento sencillo es suficiente para ilustrar los conceptos de transmisión y reflexión de partículas, efecto túnel, etc. En el caso de un potencial

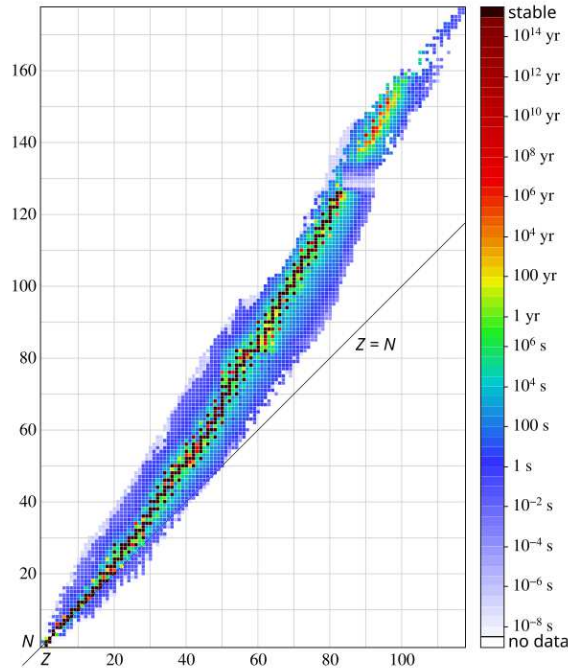


Figura 1.2: Estabilidad de los diferentes nucleidos.

unidimensional la partícula incidente solo tiene dos posibilidades: seguir hacia delante o rebotar hacia atrás, cada una con cierta probabilidad (asumiendo que los potenciales son incapaces de mantener estados ligados). En tres dimensiones tendremos que considerar todo el continuo posible de direcciones emergentes de la partícula inicial tras la colisión. En el caso de colisiones profundamente inelásticas surge además la complicación adicional de que se pueden crear más partículas en el estado final.

La manera más adecuada de describir la distribución angular de las partículas dispersadas por un centro de fuerzas o potencial se realiza mediante la denominada **sección eficaz**. Veremos que esta distribución angular proporciona importante información sobre el potencial dispersor, y, por tanto, sobre la partícula o sistema que lo crea.

Supongamos un haz incidente que transporta  $N$  partículas por unidad de área y por unidad de tiempo (es un flujo, que se puede denotar por  $\Phi$ ), y que lo hacemos incidir sobre un blanco que contiene  $n$  centros dispersores. Si suponemos que el flujo incidente no es tan intenso como para provocar interferencia entre las propias partículas incidentes, que se tiene lugar una sola dispersión por partícula o que no hay una disminución apreciable de los centros dispersores del blanco por el retroceso de la partícula golpeada, entonces el número de partículas incidentes que emergen por unidad de tiempo en un pequeño intervalo de ángulo sólido  $\Delta\Omega$  centrado en los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  será proporcional a  $N, n$  y  $\Delta\Omega$ :

$$\Delta N \sim nN\Delta\Omega \quad (1.4.1)$$

Denotando por  $\sigma(\theta, \phi)$  la constante de proporcionalidad, podemos escribir ese número de partículas emergentes en  $\Delta\Omega$  por unidad de tiempo como:

$$\Delta N = nN\sigma(\theta, \phi)\Delta\Omega \quad (1.4.2)$$

o en intervalo diferencial

$$dN = nN\sigma(\theta, \phi)d\Omega \quad (1.4.3)$$

A la constante de proporcionalidad  $\sigma(\theta, \phi)$  se le denomina **sección eficaz diferencial** y, como se puede ver a partir de la ecuación anterior, tiene unidades de área. En efecto  $\sigma(\theta, \phi)d\Omega$  es igual al área transversal del haz incidente paralelo que contiene el número de partículas dispersadas  $dN$  por un único centro dispersor o partícula del blanco. Evidentemente, a la integral de esa sección eficaz diferencial sobre la esfera se le denomina **sección eficaz total**

$$\sigma_t = \int \sigma(\theta, \phi)d\Omega \quad (1.4.4)$$

En caso de dispersión sobre un blanco fijo la definición anterior de sección eficaz es igualmente válida para el sistema laboratorio <sup>2</sup> que para el sistema centro de masas, porque un centro dispersor fijo tiene masa efectiva infinita. Para el caso de una colisión entre partículas de masa finita la definición anterior es en general válida sólo para el sistema de referencia laboratorio, y para la observación de la dispersión de la partícula incidente. No describe la dispersión angular del retroceso de la partícula bombardeada, aunque es por supuesto posible obtenerla a partir de la sección eficaz de la partícula incidente. La definición de la sección eficaz diferencial en el sistema del centro de masas puede hacerse de modo completamente análogo al anterior donde, de nuevo, lo que se observa es la dispersión de las partículas incidentes, pero el flujo incidente tiene que calcularse respecto a las partículas bombardeadas, no respecto al centro de masas. Como en el sistema centro de masas las dos partículas interaccionantes se mueven en sentidos opuestos después de la colisión, la sección eficaz diferencial para la observación del retroceso de la partícula blanco es simplemente  $\sigma_{\text{blanco}} = \sigma_{\text{haz}}(\pi - \theta, \phi + \pi)$ , ( $\theta$  y  $\phi$  referidos al centro de masas).

En general, la probabilidad de interacción de dos partículas depende fuertemente de la energía <sup>3</sup>. La sección eficaz diferencial también se suele expresar en el intervalo diferencial de energía, de modo que para obtener la sección eficaz total habrá que integrar a todo rango de energías accesibles.

$$\sigma_t = \iint \sigma(\theta, \phi)d\Omega dE \quad (1.4.5)$$

La sección eficaz total es la suma de las dos partes: la sección eficaz inelástica<sup>4</sup>:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} \quad (1.4.6)$$

La unidad comúnmente usada para las secciones eficaces es el barn

$$1\text{barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2 \quad (1.4.7)$$

### 1.4.3. Sección eficaz de Rutherford

La sección eficaz para la dispersión elástica coulombiana de partículas puntuales sin espín se conoce como la sección eficaz de Rutherford. Él fue el pionero en el uso de las técnicas de

<sup>2</sup>Recordemos que el sistema de referencia laboratorio es aquel en el que la partícula blanco está inicialmente en reposo mientras que el sistema de referencia centro de masas es aquel en el que el centro de masas está (siempre) en reposo.

<sup>3</sup>Por ejemplo, la sección eficaz de captura de neutros térmicos por parte del uranio varía varios ordenes de magnitud en un pequeño rango de energía.

<sup>4</sup>Más sobre esto en el tema de reacciones nucleares <sup>3</sup>

dispersión para el estudio del mundo subatómico, concretamente bombardeando una lámina de oro con partículas  $\alpha$ . Supongamos ahora una colisión elástica entre un electrón y un núcleo en reposo de carga  $Ze$ . Despreciemos por el momento efectos de espín y supongamos además que el electrón se aproxima en trayectoria hiperbólica con velocidad no relativista  $v$  y que la energía de retroceso del núcleo es despreciable frente a la interacción. Usando mecánica clásica no relativista es sencillo derivar la siguiente expresión para la sección eficaz diferencial de Rutherford:

$$\left( \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left( \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(4E)^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.4.8)$$

donde  $E = mv^2/2$  es la energía cinética del electrón y  $\theta$  el ángulo polar de dispersión. Si la energía de retroceso del núcleo no fuera despreciable, entonces deberíamos sustituir la expresión anterior de  $m_e$  por la masa reducida  $\mu = m_e m_N / (m_e + m_N)$ ,  $v$  sería la velocidad del centro de masas y el ángulo de dispersión  $\theta$  estaría referido al sistema de referencia del centro de masas.

La mecánica clásica es una teoría completamente determinista, de tal modo que dadas unas ciertas condiciones iniciales es posible predecir exactamente la trayectoria de la partícula y, por tanto, el diferencial de ángulo sólido por el que pasará una vez dispersada. Si imaginamos un haz uniforme de partículas con cierta sección transversal incidiendo sobre una lamina de material a modo de blanco, la ecuación anterior nos da la proporción de partículas que en la unidad de tiempo saldrán dispersadas atravesando una superficie diferencial perpendicular a  $d\Omega$ . En este problema el campo de fuerzas es central, de modo que existe simetría azimutal y podemos integrar sobre el ángulo  $\phi$  para obtener:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi = 2\pi \sin(\theta) d\theta \quad (1.4.9)$$

por eso escribimos directamente  $\sigma = \sigma(\theta)$ .

La sección eficaz de Rutherford es una de las pocas fórmulas de la mecánica clásica que también se deduce en el formalismo de la mecánica cuántica. Pero en el *mundo cuántico* su significado es distinta: representa la probabilidad de que una partícula salga dispersada en un ángulo sólido diferencial  $d\Omega$ , aunque también es cierto que en el caso de un haz de partículas incidiendo sobre el blanco representa una fracción de ellas que en la unidad de tiempo atravesarán una superficie diferencial a  $d\Omega$ , al igual que en el caso clásico.

Una manera rápida de deducir la sección eficaz de Rutherford en mecánica cuántica es mediante la primera aproximación de Born. Se considera que la función de onda inicial y final del electrón está bien descrita por una onda plana, tal que  $\mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_i$  y  $\mathbf{p}_f = \hbar \mathbf{k}_f$  (donde  $|k| = 2\pi/\lambda$ ). En ese caso las funciones de onda inicial y final

$$\Psi_i(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad \Psi_f(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (1.4.10)$$

El potencial  $V(\mathbf{r})$  del centro dispersor *convierte* la onda plana inicial en la onda plana final, y la amplitud de probabilidad de la transición viene dada, en primera aproximación de Born Por

$$f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f) \sim \int \Psi_f^* V \Psi_i d^3\mathbf{r} \sim \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar} V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \sim f(\mathbf{q}) \quad (1.4.11)$$

donde  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$  es el **momento transferido en la colisión**. La sección eficaz diferencial es el módulo al cuadrado de esta *amplitud de probabilidad*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{q})|^2 \quad (1.4.12)$$



Por lo que si el potencial es simétrico  $V(\mathbf{r}) = V(r)$ , podemos integrar sobre los ángulos y obtener:

$$f(\mathbf{q}) \sim \int_0^\infty r V(r) \sin(qr/\hbar) dr \quad (1.4.13)$$

Si escribimos  $V(r) = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$  la integral anterior no existe (se va a infinito). Sin embargo  $V(r)$  no tiene dicha forma, ya que en realidad la carga del núcleo  $Ze$  está apantallada por la carga electrónica, de tal manera que a grandes distancias la partícula incidente no ve el potencial eléctrico desnudo del núcleo. Se puede tener en cuenta este apantallamiento añadiendo un factor multiplicativo exponencial

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} e^{-r/a} \quad (1.4.14)$$

donde  $a$  es una longitud característica de las dimensiones atómicas. La integral sobre el radio produce entonces el siguiente resultado

$$f(\mathbf{q}^2) \sim \frac{Ze^2}{q^2 + (\hbar/a)^2} \approx \frac{Ze^2}{q^2} \quad (1.4.15)$$

Finalmente, si reunimos todas las constantes que no hemos ido poniendo explícitamente la sección eficaz puede escribirse como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E^2}{|\mathbf{q}c|^4} \quad (1.4.16)$$

donde  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$  es la *constante de estructura fina*. Para comprobar que esta fórmula coincide con la primera que hemos dado basta con observar que en una colisión elástica en la que se desprecia el retroceso se cumple que  $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}|$  y por tanto el módulo de  $\mathbf{q}$  ( $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$ )

$$|\mathbf{q}|^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2) \rightarrow q = 2p \sin(\theta/2) \quad (1.4.17)$$

Siempre que tomemos el límite no relativista ( $E = \sqrt{p^2 c^2 + c^4 m^2} \approx mc^2$ ) podremos deducir la primera ecuación. Uno de los problemas del cálculo de esta ecuación es que hemos asumido que la partícula incidente y la partícula blanco tienen espín cero, lo cual no es verdad. Además es que tampoco es despreciable cuando hablamos de dispersión de electrones, ya que las energías son tan altas que debemos tener en cuenta los efectos del espín del electrón. La **sección eficaz de Mott** describe la dispersión relativista de electrones, incluyendo efectos de espín, sobre partículas puntuales sin espín:

$$\left( \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* = \left( \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} [1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)] \quad (1.4.18)$$

donde  $\beta = v/c$ .

#### 1.4.4. Factor de forma

Consideremos entonces que el núcleo atómico es un objeto extenso con una densidad de carga eléctrica que podamos expresar en la forma  $Ze\rho(\mathbf{r}')$ , de tal manera que  $\rho(\mathbf{p}')$  es una densidad de

probabilidad normalizada  $\int \rho(\mathbf{r}') d^3(\mathbf{r}') = 1$ . Si además la distribución de carga fuese esféricamente simétrica tendríamos

$$4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (1.4.19)$$

La integral restante en la expresión de  $f(\mathbf{q})$  se conoce como **factor de forma**

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3\mathbf{r} \quad (1.4.20)$$

En el caso de que tratemos distribuciones esféricamente simétricas, el factor de forma sólo dependerá del cuadrado del momento transferido.

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3\mathbf{r} \quad (1.4.21)$$

Recordando que  $d\sigma/d\Omega = |f|^2$  tenemos que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{extenso}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth.}} \cdot |F(\mathbf{q}^2)|^2 \quad (1.4.22)$$

donde la etiqueta *extenso* hace referencia a que hemos considerado al núcleo como un objeto extenso y no como una partícula puntual. Vemos por lo tanto que la sección eficaz de dispersión por un centro extenso de carga es igual a la sección eficaz de dispersión por un centro puntual multiplicada por el cuadrado del factor de forma. Toda la información sobre la extensión espacial del núcleo reside en su factor de forma, que no es otra cosa que la transformada de Fourier de la distribución de carga. En el caso de la dispersión de electrones tenemos que usar la dispersión de Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{extenso}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\mathbf{q}^2)|^2 \quad (1.4.23)$$

Para pasar de  $F(\mathbf{q}^2)$  a la distribución de carga  $\rho(r)$  podríamos pensar, en principio, en invertir la ecuación del factor de forma:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{q}^2) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3\mathbf{q} \quad (1.4.24)$$

Esta ecuación nos permite obtener  $\rho(r)$  si antes hemos medido  $F(\mathbf{q}^2)$  para todos los valores de  $\mathbf{q}^2$ . No obstante, el rango del momento transferido está limitado experimentalmente por los máximos momentos disponibles para las partículas haz. Además la sección eficaz es muy pequeña para valores grandes de  $\mathbf{q}^2$ .

### 1.4.5. Ejemplos de factores de forma

Las primeras medidas de factores de forma nucleares fueron llevados a cabo a principios de la década de los 50 en SLAC<sup>5</sup>. Se midieron secciones eficaces para una gran variedad de núcleos con electrones de energía hasta 500 MeV. Los resultados muestran un rápido decrecimiento de la sección eficaz para grandes ángulos, que se corresponde con el hecho de que la dependencia con el momento transferido va como  $1/\mathbf{q}^4$ , (recuérdese que  $|\mathbf{q}| = 2|\mathbf{p}| \sin(\theta/2)$ ). Para distribuciones simétricas de carga podemos integrar sobre el ángulo sólido y obtener:

<sup>5</sup>Stanford Linear Accelerator.

$$F(\mathbf{q}^2) = 4\pi \int \rho(r) \frac{\sin(|\mathbf{q}|r/\hbar)}{|\mathbf{q}|r/\hbar} r^2 dr \quad (1.4.25)$$

Introduciendo en la expresión anterior distribuciones sencillas de carga de modo que podamos realizar la integral, obtendremos ejemplos de factores de forma a comparar con las mediciones y así hacernos una idea intuitiva de la distribución de carga nuclear. En las figuras tenemos varios ejemplos. Para una carga puntual (delta de Dirac) el factor de forma es una constante (la unidad). Cuanto más extensa sea la distribución espacial de carga más rápidamente decrecerá con  $\mathbf{q}$  el factor de forma. En el límite de una distribución extendida por todo el espacio tendríamos una delta de Dirac para el factor de forma. Para una distribución gaussiana tendríamos otra distribución gaussiana. Para una esfera homogénea tendríamos oscilaciones típicas de un patrón de difracción con mínimos que se anulan. Para una esfera con superficie difusa tendríamos oscilaciones difuminadas, con mínimos que no llegan a anularse.

El valor medio del cuadrado del radio  $\langle r^2 \rangle$  está dado por la fórmula

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) d\mathbf{r}^3 = 4\pi \int r^2 \rho(r) r^2 dr \quad (1.4.26)$$

Se observa que los núcleos no tienen una superficie bien definida, sino más bien difusa. En su interior la distribución de carga es aproximadamente constante, y en la superficie decrece en un cierto rango hasta hacerse nula. Una buena parametrización de esta distribución se consigue con la llamada **función de Fermi de dos parámetros** también llamada **distribución de Wood-Saxon**:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}} \quad (1.4.27)$$

donde  $c$  es el radio al que  $\rho(r)$  decrece a la mitad del valor del plató <sup>6</sup>.

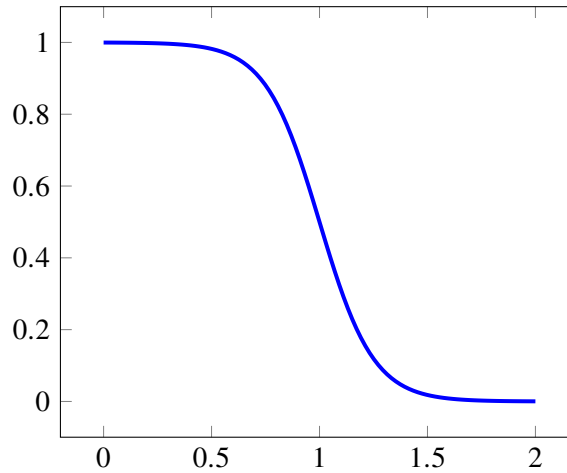


Figura 1.3: Potencial Wood-Saxon ( $c = 1$ ,  $a = 1/8$ ).

El parámetro  $a$  está relacionado con el grosor de la piel <sup>7</sup> (skin thickness) mediante  $t = (4 \ln 3)a$ . Los resultados experimentales indican para núcleos pesados y medios se cumplen

<sup>6</sup>Caamaño llama a la constante  $R_{1/2} \equiv c$

<sup>7</sup> $t$  es la distancia que necesita la densidad de carga para caer del 90 % al 10 % de su valor

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 A^{1/3} \quad r_0 = 0.94 \text{ fm} \quad (1.4.28)$$

El volumen nuclear es, por lo tanto, proporcional al número de nucleones  $A$ , y la densidad de carga nuclear es aproximadamente constante (comportamiento similar a líquidos o sólidos). El radio a mitad de densidad y el grosor de la piel satisfacen, aproximadamente, la siguiente relación:

$$c(\text{fm}) = 1.18 A^{1/3} - 0.48 \quad t \approx 2.4 \text{ fm} \quad (1.4.29)$$

También se suele utilizar la **función de Fermi de tres parámetros** que se define como

$$\rho(r) = \left(1 + \frac{\omega r^2}{c^2}\right) \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}} \quad (1.4.30)$$

Se puede determinar la distribución de carga a partir de los datos experimentales con un método casi independiente del modelo si la escribimos como una superposición de gaussianas:

$$\rho(r) \propto \sum_{i=1}^N A_i \exp \left[ -\frac{(r - R_i)^2}{\delta_i} \right] \quad (1.4.31)$$

Es preciso tener en cuenta, sin embargo, que la dispersión de electrones proporciona información sobre la distribución de carga eléctrica, pero para investigar la distribución de materia nuclear necesitamos proyectiles hadrónicos.

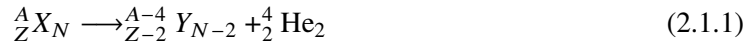
## Capítulo 2

# Inestabilidad nuclear

### 2.1. Desintegración $\alpha$

La desintegración  $\alpha$  produce lo que originalmente se llamó rayos  $\alpha$ , identificados en su época como la radiación menos penetrante emitida por los elementos radioactivos naturales.

La desintegración por emisión alfa produce un desplazamiento hacia la izquierda de dos posiciones en la tabla periódica, y reduce el número másico en 4 unidades:  $\Delta Z = -2$ ,  $\Delta A = -4$ . Esquemáticamente escribiríamos



La desintegración  $\alpha$  es un fenómeno que en esencia se debe a la repulsión coulombiana de los protones en un núcleo, que crece a un ritmo más rápido (va como  $Z^2$ ) que la energía nuclear<sup>1</sup> (que va como  $A$ ).

#### 2.1.1. Energética de la desintegración $\alpha$

En la desintegración  $\alpha$  intervienen la interacción electromagnética y la fuerte. Entre otras cosas que veremos más tarde, en este proceso se conserva la energía, el momento lineal, el momento angular total y la paridad. Si suponemos que el átomo está inicialmente en reposo, la energía del sistema en el estado inicial es simplemente la energía de la masa en reposo de este átomo. En el estado final tenemos una partícula  $\alpha$  y un núcleo hijo con cierta energía cinética. Usando masas nucleares podríamos entonces escribir las ecuaciones de balance energético como:

$$m_X c^2 = m_Y c^2 + T_Y + m_\alpha c^2 + T_\alpha \quad (2.1.2)$$

$$m_X c^2 - m_Y c^2 - m_\alpha c^2 = T_Y + T_\alpha = Q \quad (2.1.3)$$

$$Q = (m_X - m_Y - m_\alpha) c^2 \quad (2.1.4)$$

Este proceso está energéticamente permitido sólo si  $Q > 0$ . Aunque la expresión anterior está escrito en términos de las masas nucleares, podemos calcular  $Q$  usando las masas atómicas porque la

---

<sup>1</sup>Recuérdese que la energía de ligadura por nucleón es aproximadamente constante  $B/A \sim \text{cte}$ .

masa electrónese cancela en la operación (en las desintegraciones  $\alpha$  no se eliminan ni generan electrones). Despreciando las energías de ligadura electrónicas:

$$Q/c^2 = M({}_Z^AX_N) - M({}_{Z-2}^{A-4}Y_{N-2}) - M({}_2^4\text{He}) \quad (2.1.5)$$

Si el núcleo inicial estaba en reposo, los momentos lineales de los productos deben ser iguales en magnitud y opuestos en sentido

$$p_\alpha = p_Y \quad (2.1.6)$$

Las energías típicas de las partículas  $\alpha$  en desintegraciones naturales suelen estar alrededor de los 5 MeV, de modo que podamos usar cinemática no relativista, y escribir  $T = p^2/2$ . Por lo tanto:

$$Q = T_\alpha + T_Y = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_Y^2}{2m_Y} = \frac{p_\alpha^2}{2} \left( \frac{m_\alpha + m_Y}{m_\alpha m_Y} \right) = T_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{m_Y} + 1 \right) \quad (2.1.7)$$

De donde se deduce la ecuación que nos relaciona energía cinética con  $Q$ :

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + (m_\alpha/m_Y)} \quad (2.1.8)$$

La emisión  $\alpha$  comienza a ser espontáneamente posible ya para  $A > 150$ , pero la mayoría de los emisores  $\alpha$  tienen  $A > 190$ . Dado que para  $A$  grande:

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + (m_\alpha/m_Y)} \approx \frac{Q}{1 + (4/(A-4))} = \frac{Q}{1 - 4/A} \approx Q \left( 1 - \frac{4}{A} \right) \quad (2.1.9)$$

En una desintegración típica la partícula  $\alpha$  se lleva alrededor del 98 % de  $Q$ . El 2 % que se lleva el núcleo  $Y$  no es despreciable, puede ser del orden de 100 keV y es bastante mayor que la energía de ligadura de los átomos en los sólidos, lo cual quiere decir que si el átomo está cerca de la superficie puede ser expulsado de la muestra radiactiva. En ciertas circunstancias esta dispersión del material radiactivo debe ser tenida en cuenta, pero en cualquier caso el rango de penetración en materia de núcleos tan masivos es muy pequeño.

La energía cinética de la partícula  $\alpha$  se puede determinar por medio de un espectrómetro magnético y así también el valor de  $Q$  de la reacción. Esto nos da un método de determinación de masas atómicas en el caso de un núcleo  $X$  longevo que se desintegra en uno  $Y$  demasiado efímero para que la espectrometría de masas sea aplicable, tal como hemos visto en el capítulo anterior.

### 2.1.2. Sistemática de la desintegración $\alpha$ . Regla de Geiger-Nuttall

Geiger y Nuttall observaron ya en 1911 una relación inversamente proporcional entre el logaritmo del período de semidesintegración del núcleo emisor y la raíz cuadrada de las partículas  $\alpha$  emitida., esto es:

$$\ln(\tau_{1/2}) = k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{Q}} \quad (2.1.10)$$

### 2.1.3. Tratamiento de Gamow, Gurney y Condon

En 1928 Gamow, Gurney y Condon aplicaron casi simultáneamente los principios de la nueva mecánica cuántica al estudio de la desintegración  $\alpha$ . La idea esencial consiste en considerar la

partícula  $\alpha$  *preformada* en el potencial creado por el núcleo hijo, que puede aproximarse a un pozo esférico profundo<sup>2</sup> con una frontera en forma de barrera coulombiana. La partícula  $\alpha$  tendrá cierta probabilidad de cruzar la barrera por efecto túnel, que puede calcularse sin muchas dificultades, al menos aproximadamente. Este modelo proporciona resultados numéricos razonables que demuestran una compresión semicuantitativa del fenómeno de la desintegración  $\alpha$ , pero no significa que la *imagen* de una partícula  $\alpha$  *preformada* en el interior del núcleo sea un buen reflejo de la realidad, sino más bien que en ciertas condiciones se comporta aproximadamente como tal.

Vamos ahora a realizar un cálculo para estimar la probabilidad de desintegración  $\alpha$ , y para ello usaremos un modelo semiclásico en una dimensión. El potencial coulombiano se corta a una distancia  $a$  que se puede considerar como la suma de los radios del núcleo hijo y de la partícula  $\alpha$ . En la región interior ( $r < a$ ), la partícula  $\alpha$  se mueve con una energía cinética dada por  $Q + |V_0|$ . La región  $a < r < b$  forma una barrera del potencial.

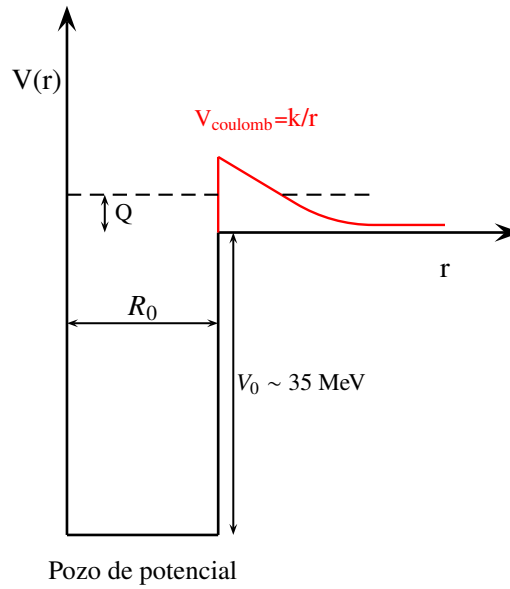


Figura 2.1: Pozo de potencial donde se encuentra la partícula  $\alpha$  encerrada.

En el contexto de nuestro sencillo modelo anterior, la constante de desintegración vendrá dada por  $\lambda = fP$ , donde  $f$  es la *frecuencia con la que la partícula incide sobre la barrera* y  $P$  es la *probabilidad de que la cruce*. No es complicado calcular el coeficiente de transmisión para esa simple barrera coulombiana. Recordemos que el coeficiente de transmisión viene dado a través de una barrera arbitraria en una dimensión viene dado aproximadamente por

$$T = \exp \left( -\frac{2\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_a^b \sqrt{V(r) - Q} dr \right) \quad (2.1.11)$$

donde la integración se realiza entre los límites que marcan la intersección de la recta  $V(r) = Q$  con el pozo de potencial nuclear por la izquierda y la cola de la barrera coulombiana por la derecha. Se suele denominar **factor de Gamov** a

<sup>2</sup>En el capítulo que trata de la estructura nuclear (capítulo 4) veremos con algo más de detalle por qué el potencial nuclear se puede aproximar a un pozo de potencial, y en el capítulo sobre la interacción nucleón-nucleón veremos cuantitativamente la profundidad estimada del pozo.

$$G = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_a^b \sqrt{V(r) - Q} \quad (2.1.12)$$

de manera que el cociente de transmisión es

$$T = e^{-2G} \quad (2.1.13)$$

Escribimos ahora para  $V(r)$  la energía coulombiana de la partícula alfa

$$V(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.1.14)$$

y obtenemos la siguiente integral

$$G = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \arccos \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{b}\right)} \right] \quad (2.1.15)$$

donde  $2e$  es la carga de la partícula  $\alpha$ ,  $(Z-2)e$  la carga del núcleo hijo y  $\mu$  la masa reducida del sistema. Aunque en algunas partes de la literatura aparezca  $\mu$  como  $m_\alpha$ , en realidad esto último no deja de ser una aproximación, ya que

$$\mu = \frac{m_Y m_\alpha}{m_Y + m_\alpha}$$

de tal modo que si  $m_\alpha \ll m_Y$  se verifica, efectivamente, que  $\mu = m_\alpha$ . Denotando por  $B$  la altura de la barrera coulombiana en el punto  $r = a$ , tenemos

$$B = V(r = a) = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad Q = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (2.1.16)$$

Porque  $Q$  es precisamente el valor que  $V(r)$  toma en el radio  $R = b$ . De aquí deducimos que  $a/b = Q/B$  y puesto que  $Q/B \ll 1$  hacemos la siguiente aproximación

$$\arccos \sqrt{\frac{a}{b}} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (2.1.17)$$

con lo cual tenemos que

$$G \approx \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \quad (2.1.18)$$

Ahora todo lo que tenemos que hacer es multiplicar la probabilidad de penetración ya calculada por una frecuencia  $f$  que exprese, de una manera simple, el número de impactos o intentos que la partícula  $\alpha$  hace contra la barrera. Esta frecuencia es del orden de  $f \sim v/a$ , donde  $v$  es su velocidad anterior del núcleo, que podemos expresar como  $v = \sqrt{2(Q + |V_0|)}/\mu$ . Esto nos lleva a la siguiente expresión para la constante de desintegración  $\alpha$ :

$$\lambda = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2(Q + |V_0|)}{\mu}} \exp \left[ -2\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right] \quad (2.1.19)$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2(Q + |V_0|)}{\mu}} \exp \left[ 4\alpha c \sqrt{\frac{2\mu}{Q}} (Z-2) \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right] \quad (2.1.20)$$



Donde  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$  es la constante de estructura fina. El período de semidesintegración o semivida sería:

$$\tau_{1/2} = a(\ln(2))\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 Q}} \exp \left[ 4\alpha c \sqrt{\frac{2\mu}{Q}} (Z-2) \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right] \quad (2.1.21)$$

De esta ecuación se deduce<sup>3</sup> que el logaritmo de  $\tau_{1/2}$  tiene una relación lineal inversa con la raíz cuadrada de la energía cinética de la partícula  $\alpha$ :

$$\log \tau_{1/2} = k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{Q}} \quad (2.1.22)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes. Esta es la **ley o regla de Geiger y Nuttall** encontraron empíricamente en torno a 1911.

Vemos que la fórmula deducida para  $\tau_{1/2}$  mediante este sencillo modelo proporciona valores que están más o menos dentro del mismo orden de magnitud que las medidas experimentales, lo cual es un logro importante si se tiene en cuenta que éstas últimas abarcan más de 22 órdenes de magnitud y que hemos simplificado considerablemente el problema: no hemos tenido en cuenta la función de ondas inicial y final del núcleo (regla de oro de Fermi), ni tampoco el momento angular de la partícula  $\alpha$ . La forma y radio del núcleo tiene también una influencia importante en el valor numérico final<sup>4</sup>.

#### 2.1.4. Momento angular y paridad en la desintegración $\alpha$

En una desintegración  $\alpha$  han de conservarse el momento angular total y la paridad. En cuanto al primer momento tenemos que  $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \mathbf{I}_\alpha + \boldsymbol{\ell}_\alpha$ , donde  $\boldsymbol{\ell}_\alpha$  es el momento angular orbital de la partícula  $\alpha$  relativo al núcleo emisor<sup>5</sup> y  $\mathbf{I}_\alpha$  su espín nuclear. Ahora bien, el núcleo de Helio tiene los nucleones apareados de manera que su espín es cero, por lo tanto  $\mathbf{I}_\alpha = 0$  y  $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \boldsymbol{\ell}_\alpha$ . Con lo cual el momento angular orbital que se lleva la partícula  $\alpha$  en la Desintegración debe cumplir la **regla del momento angular**

$$|I_i - I_f| \leq \ell_\alpha \leq I_i + I_f \quad (2.1.23)$$

Por otro lado, la ley de conservación de la paridad exige  $\pi_i = \pi_f \times \pi_\alpha \times (-1)^{\ell_\alpha}$ , donde  $\pi_i$  y  $\pi_f$  son las paridades del núcleo inicial (padre) y del núcleo final (hijo), y  $\pi_\alpha$  es la paridad de la partícula  $\alpha$ , que resulta ser positiva<sup>6</sup>, por lo tanto tenemos que  $\pi_i = \pi_f (-1)^{\ell_\alpha}$ . Concluimos, finalmente, que si la paridad nuclear inicial y final es la misma, entonces  $\ell_\alpha$  tiene que ser par, mientras que en caso contrario tiene que ser impar:

$$\pi_i = \pi_f \implies \ell_\alpha \text{ par} \quad (2.1.24)$$

<sup>3</sup>Aunque es cierto que  $Q$  también aparece en la raíz que multiplica la exponencial, la dependencia más fuerte de  $\tau_{1/2}$  con  $Q$  proviene de la exponencial en sí misma. El factor multiplicativo, que es esencialmente la velocidad de la partícula  $\alpha$ , tiene una variación con  $Q$  despreciable comparada con la variación generada por la exponencial.

<sup>4</sup>Por ejemplo, pasar de un radio nuclear medio de  $1,25A^{1/3}$  fm a  $1,20A^{1/3}$  fm implica introducir un cambio de hasta un factor 5 en  $\tau_{1/2}$  respecto al radio nuclear se puede usar incluso como un método para estimar el radio nuclear, o más bien, el radio de un núcleo más el de la partícula alfa.

<sup>5</sup>Consideramos que el hijo se queda aproximadamente en reposo.

<sup>6</sup>El primer estado excitado del núcleo  ${}^4_2\text{He}$  tiene una energía de 20,1 MeV y también  $I^\pi = 0^+$ .

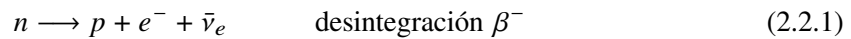
$$\pi_i = -\pi_f \implies \ell_\alpha \text{ impar}$$

## 2.2. Desintegración $\beta$

La desintegración  $\beta^-$  fue descubierta ya en 1896 por Becquerel. En 1932 se descubrió el positrón en el estudio de los rayos cósmicos, y más tarde (1934) se produjeron artificialmente elementos que se desintegraban emitiendo positrones, poniendo así de manifiesto la desintegración  $\beta^+$ . La captura electrónica, esto es, la captura de un electrón orbital por parte del núcleo fue descubierta por Álvarez en 1938. Los rayos  $\beta^-$  tiene carga negativa y un poder de penetración de alrededor de 1 mm. en plomo. Durante algún tiempo hubo confusión entre estos dos electrones emitidos en la desintegración  $\beta$  y los electrones emitidos en la **conversión interna** de los núcleos. En física nuclear se suelen usar los símbolos  $\beta^-$  y  $\beta^+$  para designar estas radiaciones. La desintegración por emisión  $\beta^-$  ( $\beta^+$ ) produce un desplazamiento hacia la derecha (izquierda) de una posición en la tabla periódica, pero no cambia esencialmente la masa:  $\Delta Z = \pm 1$ ,  $\Delta A = 0$ . Responsable de este fenómeno es la interacción débil. Las principales diferencias con la radiación  $\alpha$  son:

- El electrón y el neutrino se *crean* en la desintegración.
- Debido a sus energías y masas, son relativistas.
- Sus distribuciones de energía son continuas.

El *reemplazo* de un neutrón por un protón, o viceversa, tiene lugar en los núcleos a través de los siguientes procesos:

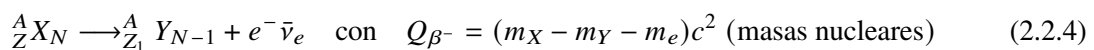


siendo el primero de ellos energéticamente imposible para los protones libres o átomos de hidrógeno.

### 2.2.1. Energética de la desintegración $\beta$ .

Experimentalmente se observa que la energía cinética de las partículas  $\beta$  forma una distribución continua, en marcado contraste con el carácter monoenergética de las partículas  $\alpha$  emitidas radiactivamente. Recordemos que la energía cinética de la partícula  $\alpha$  es igual a la diferencia de energía de ligadura del núcleo padre y del núcleo hijo (excepto por pequeñas correcciones debidas al retroceso del núcleo emisor). En un principio no se conocía la existencia de neutrinos y se creía que la desintegración  $\beta$  sólo intervenían los núcleos padre e hijo, y el electrón emitido. No obstante, el hecho de que el proceso fuese continuo indicaba que en el proceso deben intervenir más de dos partículas, como mínimo tres, que se repartan estadísticamente la energía cinética liberada por la desintegración.

Esquematizamos el proceso de desintegración  $\beta^-$  del siguiente modo:



Recordemos que

$$M(Z, A) = m_N + Zm_e - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i \quad m(Z, A) = M_N - Zm_e + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^Z B_i$$

donde las  $B_i$  son las energías de ligadura de los electrones atómicos. Por lo tanto

$$\frac{Q_{\beta^-}}{c^2} = [M({}_Z^AX_N) - Zm_e] - [M({}_{Z+1}^AY) - (Z+1)m_e] - m_e + \left[ \sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \right] \quad (2.2.5)$$

Vemos que las masas de los electrones se cancelan en la ecuación anterior. Despreciando las pequeñas diferencias de ligadura electrónicas, expresamos la energía de la desintegración en términos de masas atómicas de la siguiente manera:

$$Q_{\beta^-} = [M(X) - M(Y)] c^2 \quad Q_{\beta^-} \approx T_e + T_\nu \quad (2.2.6)$$

La aproximación de la segunda expresión consiste en despreciar la energía de retroceso del núcleo emisor. Está claro entonces que

$$(T_e)_{\text{máx}} = (T_\nu)_{\text{máx}} = Q_{\beta^-} \quad (2.2.7)$$

En términos de masas atómicas:

$$\frac{Q_{\beta^+}}{c^2} = [M({}_Z^AX_N) - Zm_e] - [M({}_{Z-1}^AY_{N+1}) - (Z-1)m_e] - m_e + \left[ \sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z-1} B_i \right] \quad (2.2.8)$$

$$Q_{\beta^+} = [M(X) - M(Y) - 2m_e] c^2 \quad (2.2.9)$$

Para la captura electrónica (denotada por C.E. o  $\varepsilon$ ) tenemos:

$${}_Z^AX_N + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^AY_{N+1} + \nu_e \quad Q_{\text{CE}} = Q_\varepsilon = M(X)c^2 - [M(Y)c^2 + B_n] \quad (2.2.10)$$

donde  $B_n$  es la energía de ligadura del electrón correspondiente a la capa  $n$  (K,L,M...) que coincide con los rayos X (uno o varios) que se emiten cuando el resto de los electrones atómicos bajan en cascado a ocupar la vacante dejada por el electrón capturado<sup>7</sup>. La energía de esos rayos X puede parametrizarse de acuerdo con la ley de Moseley:

$$\sqrt{\frac{E}{hc}} = A_n(Z - B_n) \quad (2.2.11)$$

donde las  $A_n$  y  $B_n$  son constantes que dependen de la capa de la que haya sido capturado (o expulsado) el electrón. Esto es, tendríamos  $A_K, A_L, A_M, B_K, B_L, B_M$  etc. Obsérvese que si la desintegración  $\beta^+$

<sup>7</sup>Justo a continuación de la captura, la capa electrónica del núcleo hijo queda altamente excitada porque tiene una vacante en uno de sus orbitales bajos. Al ser ocupada la vacante se emiten rayos X característicos cuya energía coincide con  $B_n$ , lo cual implica que la masa o contenido energética del átomo hijo justo después de la captura excede en  $B_n$  a la masa atómica del átomo en su estado fundamental. Debe tenerse en cuenta que la corteza electrónica del átomo también puede desexcitarse mediante la emisión de electrones Auger. Este fenómeno compite con la emisión de los rayos X característicos, y es más probable en átomos ligeros.

es energéticamente posible entonces la captura electrónica también, pero el recíproco no es cierto. Para que la desintegración  $\beta^+$  sea posible es necesario que la diferencia entre las masas atómicas del padre y del hijo sea al menos de  $2m_e c^2 \approx 1.022 \text{ MeV}$ .

$$\begin{aligned}\varepsilon &\implies M(X)c^2 - M(Y)c^2 = Q_\varepsilon + B_n \\ \beta^+ &\implies M(X)c^2 - M(Y)c^2 = Q_{\beta^+} + 2m_e c^2\end{aligned}\quad (2.2.12)$$

Otra diferencia importante entre la desintegración  $\beta^+$  y la captura electrónica es que los neutrinos emitidos en este último proceso son monoenergéticos,  $E_\nu = Q_\varepsilon$  (retroceso del núcleo despreciable), mientras que los neutrinos emitidos en desintegración  $\beta^+$  tienen un espectro continuo de energía.

Todas las ecuaciones energéticas anteriores se refieren a procesos de desintegración entre los estados fundamentales de los núcleos. Si se trata de estados excitados hemos de corregir el valor de  $Q$  oportunamente, es decir,  $Q_{\text{ex}} = Q_{\text{fund}} - E_{\text{ex}}$  donde  $E_{\text{ex}}$  es la energía de excitación.

### 2.2.2. Probabilidad de transición. Regla de oro de Fermi.

Antes de profundizar en el estudio de la teoría de Fermi de la desintegración  $\beta$  detengámonos un momento a examinar las transiciones entre estados energéticos de un sistema cuántico. Recordemos que en un estado estrictamente estacionario la densidad de probabilidad no cambia con el tiempo ( $|\Psi|^2 = \text{cte}$ ). Además, la energía que corresponde a ese estado está perfectamente definida en el sentido de que tiene dispersión nula:

$$(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = 0 \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \implies \Delta t \sim \infty \quad (2.2.13)$$

Esto quiere decir que si un sistema (átomo, núcleo, etc.) se encontrase en un estado estacionario sería imposible que pudiese realizar transiciones fuera de él.

Un estado que se aparta un poco de ser estacionario ya no tiene la energía perfectamente definida, tendrá una cierta dispersión  $\Delta E \neq 0$  que se llama *anchura del estado* y se suele representar por  $\Gamma$ . Es posible relacionar, mediante el principio de incertidumbre, la vida media  $\tau$  de ese estado haciéndolo corresponder con el intervalo de tiempo  $\Delta t$  que uno tendría disponible para realizar la medida de la energía del estado. Esto implica que  $\tau = \hbar/\Gamma$ . La probabilidad de desintegración o transición  $\lambda$ , es el inverso de la vida media,

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \quad (2.2.14)$$

Es posible realizar en mecánica cuántica un cálculo aproximado de la probabilidad de transición por unidad de tiempo,  $\gamma$ . El resultado, conocido como **regla de oro de Fermi** (que dedujo *Paul Dirac*), puede escribirse como

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V'_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (2.2.15)$$

donde el término  $V'_{fi}$  es el valor esperado del débil potencial perturbador entre los estados final e inicial de transición, también conocido como elemento de matriz:

$$V'_{fi} = \int \Psi_f^* V' \Psi_i d\mathbf{v} \quad (2.2.16)$$

donde  $\Psi_i$  y  $\Psi_f$  son los estados nucleares cuasiestacionarios inicial y final. El término  $\rho(E_f)$  es la **densidad de estados finales**, es decir, el número de estados por unidad de energía. Si el estado final es un estado aislado con energía en una estrecha distribución alrededor de  $E_f$  entonces la probabilidad de transición será mucho menor que si tenemos un conjunto de muchos estados finales densamente concentrados en un pequeño intervalo alrededor de  $E_f$ , tal que

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad (2.2.17)$$

### 2.2.3. Teoría de Fermi de la desintegración $\beta$

Existen diferencias importantes entre la desintegración  $\beta$  y la desintegración  $\alpha$ . En los procesos  $\beta^-$  no hay barrera coulombiana que atravesar, y en los  $\beta^+$  un cálculo sencillo muestra que el factor de Gamow es del orden de la unidad ( $e^{-2G} \approx 1/e^2$ ). Otra diferencia es que en los procesos  $\beta$  el electrón o positrón y el neutrino o antineutrino no existían previamente en el núcleo, son partículas creadas en el proceso de desintegración. Por último, las partículas  $\beta$  tienen un espectro energético continuo, y no energías precisas. De acuerdo con la regla de oro de Fermi (2.2.15) la probabilidad de transición por unidad de tiempo<sup>8</sup> puede calcularse como:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V'_{fi}|^2 \rho(E_F) \quad (2.2.18)$$

Como en el estado final del proceso tenemos el núcleo y dos leptones:

$$V'_{fi} = g \int_V \left( \Psi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^* \right) V' \Psi_i dv = g M_{fi} \quad (2.2.19)$$

En esta expresión hemos puesto explícita una constante de *acoplamiento*,  $g$ , que representa la intensidad de interacción responsable de la desintegración  $\beta$  (el mismo papel que la constante de estructura fina desempeña en la determinación de la intensidad de la interacción electromagnética). Suponiendo que las funciones de onda de los dos leptones finales ( $\phi_e$  la del electrón,  $\phi_\nu$  la del neutrino) se comportan como ondas planas :

$$\phi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[ 1 + i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right] \quad (2.2.20)$$

$$\phi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[ 1 + i \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} + \dots \right] \quad (2.2.21)$$

siendo  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  el momento del electrón/positrón y del neutrino/antineutrino respectivamente. El volumen  $V$  es una constante de normalización, que no interferirá en el resultado final. Recordemos que el número de estados por unidad de energía confinada en un volumen  $V$  viene dado por:

$$dn = \frac{V}{h^3} d^3 \mathbf{p} = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (2.2.22)$$

<sup>8</sup>Ya sabemos que esta probabilidad, multiplicada por el número de núcleos presente en cierto instante, da precisamente el número de desintegraciones por unidad de tiempo en ese mismo instante, la actividad.

Usaremos la segunda porque sólo estamos interesados en el módulo de  $\mathbf{p}$  denotado por  $p$ , puesto que lo que al final queremos hacer es obtener el espectro energético de los electrones, y obviamente su energía no depende de la dirección de  $\mathbf{p}$ .

El número de estados teniendo en cuenta el electrón/positrón y al neutrino/antineutrino simultáneamente con los momentos  $p$  y  $q$  apropiados es:

$$d^2n = \frac{V^2}{h^6} (4\pi)^2 p^2 q^2 dp dq \quad (2.2.23)$$

En los procesos  $\beta$  la energía típica del electrón es 1 MeV, lo cual implica un momento de  $pc \sim 1.4 \text{ MeV}$ , luego  $p/\hbar \sim 0.007 \text{ fm}^{-1}$  y podemos hacer la aproximación  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \ll 1$  sobre el volumen nuclear<sup>9</sup>. Esto nos lleva a considerar la comúnmente denominada **aproximación permitida** en la desintegración  $\beta$  (*allowed approximation*), que consiste en tomar únicamente el primer término en las expansiones de las ondas planas de las ecuaciones (2.2.20) y (2.2.21):

$$\exp\left(i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) \approx 1 \quad \exp\left(i\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right) \approx 1 \quad (2.2.24)$$

Si tuviéramos en cuenta los otros términos no triviales tendríamos las *aproximaciones prohibidas* (de segundo orden, tercer orden... en función de hasta que términos escogemos), que no es que no ocurran, solo que son menos probables. Entonces la probabilidad diferencial es<sup>10</sup>:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{fi}|^2 (4\pi)^2 \frac{p^2 q^2}{h^6} \frac{dp dq}{dE_f} \quad (2.2.25)$$

Suponemos que  $M_{fi}$  es independiente de los momentos neutrino/electrón<sup>11</sup>. Así, suponiendo que el neutrino prácticamente no tenga masa (o que es una partícula ultrarrelativista), nótese que  $E_f = E_e + E_\nu = E_e + qc$  y por lo tanto  $dq/dE_f = 1/c$ . Agrupando todos los factores que no contienen el momento del electrón  $p$ , en una constante global  $C$ , podemos escribir:

$$d\lambda = C p^2 q^2 dp \implies N(p) dp = C p^2 q^2 dp \quad (2.2.26)$$

donde  $N(p)$  es el número de  $e^\pm$  emitidos por unidad de momento  $p$ , es decir, su espectro de momentos. En esta ecuación (2.2.26) está implícito el paso a un sistema de muchos núcleos. Esto es, si para un sólo núcleo  $d\lambda$  es la probabilidad diferencial de emisión beta con el momento del  $e^\pm$  en el intervalo diferencial  $dp$ , para un sistema de muchos núcleos  $d\lambda$  es precisamente el espectro diferencial de momentos.

El momento del  $e^\pm$  y del neutrino están relacionados mediante la expresión  $Q = T_e + T_\nu = T_e + qc$  (despreciamos la energía de retroceso del núcleo), por lo tanto podemos escribir el espectro únicamente en función de  $p$ :

<sup>9</sup>Al realizar la integración que aparece es el elemento de matriz,  $M_{fi}$ , sólo es necesario considerar distancias del orden del tamaño nuclear, porque es obvio que sólo en esa región las funciones de onda del núcleo inicial y final toman valores significativamente distintos de cero.

<sup>10</sup>Obsérvese que el volumen  $V$ , que aparece en la densidad de estados finales se cancela con el que aparece en la normalización de las funciones de onda planas de los leptones  $\phi_e$  y  $\phi_\nu$ .

<sup>11</sup>Supongamos por ahora que  $M_{fi}$  no depende de  $p$ , pero más tarde veremos que la inclusión de cierta dependencia con el momento nos llevará a establecer correcciones sobre la fórmula que vamos a obtener.

$$q = \frac{Q - T_e}{c} = \frac{1}{c} \left[ Q - \left( \sqrt{p^2 c^2 + m_e^4 c^4} - m_e c^2 \right) \right] \quad (2.2.27)$$

de lo cual se deduce que:

$$N(p)dp = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 dp = \frac{C}{c^2} p^2 \left[ Q - \left( \sqrt{p^2 c^2 + m_e^4 c^4} - m_e c^2 \right) \right] dp \quad (2.2.28)$$

Obsérvese que la función se anula si  $p = 0$  y  $T_e = Q$ . Para poder obtener el espectro de energía cinética solo tenemos que relacionar momento y energía

$$p = \sqrt{2m_e T_e + (T_e/c)^2} \quad (2.2.29)$$

de lo cual obtenemos que

$$N(T_e)dT_e = \frac{C}{c^5} \sqrt{2m_e c^2 T_e + T_e^2} (m_e c^2 + T_e) (Q - T_e)^2 dT_e \quad (2.2.30)$$

No debería sorprender al lector que se diga que existe una discrepancia entre los espectros de las ecuaciones deducidas con las reales, ya que no hemos tenido en cuenta, entre otros factores, la influencia del campo coulombiano del núcleo.

El campo coulombiano repele al positrón y atrae al electrón, de manera que los respectivos espectros deben estar desplazados respecto a la predicción de la ecuación (2.2.30). La pregunta ahora es ¿Como cuantizar este desplazamiento? La respuesta está en la llamada **función de Fermi**  $F(Z', p)$  o  $F(Z', T_e)$  siendo  $Z'$  el número atómico del núcleo hijo. La función de Fermi, viene dada por

$$F(Z', T_e) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad \eta = \mp \frac{Z' e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar v_e} = \mp \frac{Z' \alpha}{v_e/c} \quad \text{para } \beta^\mp \quad (2.2.31)$$

Además, si tomamos el siguiente miembro de la expansión de las ondas de los leptones, estaremos introduciendo dependencia con su momento. A las desintegraciones para las que la **aproximación permitida** ( $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$ ) es suficientemente buena las llamamos **desintegraciones permitidas**. Si es necesario añadir un término no trivial la llamamos **desintegración prohibida de primer orden**. Si hay que añadir un segundo término, diremos **desintegración de segundo orden** (y así *ad infinitum*). A pesar del nombre hay que recordar que estas desintegraciones suceden, aunque son menos probables (y menos probables en tanto en cuanto aumentamos el orden de la prohibición). Resumiendo, el *espectro  $\beta$  completo incluye los siguientes factores*

- Un factor estadístico  $p^2(Q - T_e)^2$  que proviene del número de estados finales accesibles a las partículas finales.
- La función de Fermi  $F(Z', p)$  que tiene en cuenta la influencia del campo coulombiano nuclear.
- El elemento de matriz nuclear  $|M_{fi}|^2$ , que tiene en cuenta los efectos de los estados nucleares inicial y final.

Al escribir las ecuaciones precedentes hemos supuesto que toda la dependencia del momento del electrón/positrón está en el facto estadístico  $p^2(Q - T_e)^2$ . Sin embargo esto es sólo una aproximación, y en general hemos de tener en cuenta también una posible dependencia con el momento del electrón/positrón proveniente de la integral  $\int_v (\Psi_f^* \phi_e^* \phi_v^*) V' \Psi_i dv$  en el caso de que la aproximación permitida no sea buena y tengamos que añadir más términos que el primero en la expansión de las ondas planas de los leptones. Esta dependencia del momento de los leptones se suele poner separadamente en lo que se conoce como *shape factor*  $S(p, q)$ . Todos estos factores nos llevan a:

$$N(p)dp \sim p^2 (Q - T_e)^2 F(Z', p) |M_{fi}|^2 S(p, q) dp \quad (2.2.32)$$

#### 2.2.4. Verificación experimental de la teoría de Fermi

##### La forma del espectro

En la aproximación permitida ( $S(p, q) = 1$ ) podemos escribir la expresión anterior como

$$(Q - T_e) \sim \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p)}} \quad (2.2.33)$$

de tal manera que el gráfico de  $\sqrt{N(p)/(p^2 F(Z', p))}$  frente a  $T_e$  debería ser una línea recta cuya intersección con el eje de abscisas es precisamente la energía de desintegración  $Q$ . Esto es lo que se llama la **gráfica de Fermi-Kurie**. En el caso de desintegraciones prohibidas es necesario incluir la dependencia con el momento a través del *shape factor*  $S(p, q)$ :

$$(Q - T_e) \sim \sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z', p) S(p, q)}} \quad (2.2.34)$$

En algunos casos simples de procesos prohibidos de primer orden el *shape factor* viene dado por la sencilla expresión  $S(p, q) = p^2 + q^2$ .

##### La tasa de desintegración total

Para encontrar la tasa de desintegración total hemos de integrar la tasa de desintegración parcial o diferencial que, introduciendo la función de Fermi en la ecuación (2.2.25), viene dada en la aproximación permitida por

$$d\lambda = \frac{4g^2 |M_{fi}|^2}{(2\pi)^3 \hbar^7 c^3} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp \quad (2.2.35)$$

por consiguiente:

$$\lambda = \frac{4g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (Q - T_e)^2 dp \quad (2.2.36)$$

donde, como antes,  $Z'$  es el número atómico del núcleo hijo. Esta integral depende, en última instancia, de  $Z'$  y de la energía relativista total máxima del electrón, denotada por  $E_0 \approx Q_0 + m_e c^2$  siendo  $cp_{\max} = \sqrt{E_0^2 - m_e^2 c^4}$ . Se define la **función integral de Fermi** como



$$f(Z', E_0) = \frac{1}{(m_e c)^3 (m_e c^2)^2} \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) p^2 (E_0 - E_e)^2 dp \quad (2.2.37)$$

que es una cantidad adimensional y se encuentra tabulada para diversos valores de  $Z'$  y  $E_0$ . Obsérvese que en (2.2.37) aparece la diferencia entre las energías relativistas totales, que coincide obviamente con la diferencia de energías cinéticas:  $E_0 - E_e = (Q + m_e c^2) - (T_e + m_e c^2) = Q - T_e$ . Con esta definición podemos escribir:

$$\lambda = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (m_e c)^3 (m_e c^2)^2 f(Z', E_0) = \frac{g m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} f(Z', E_0) \quad (2.2.38)$$

y como  $\lambda = \ln(2)/t_{1/2}$  tendremos

$$f t_{1/2} = (\ln(2)) \frac{2\pi^3 \hbar^7 c^3}{g m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2} \quad (2.2.39)$$

A estos **valores  $ft$**  se les conoce como **semividas comparativas**. Los valores  $ft$  nos proporcionan una manera de comparar las probabilidades de emisión  $\beta$  para diferentes núcleos. Las diferencias en los valores  $ft$  de los distintos núcleos deben provenir de diferencias en el elemento de matriz nuclear, es decir, en diferencias entre las funciones de onda nucleares.

Al igual que en el caso de la desintegración  $\alpha$ , tenemos un rango enorme de valores de  $t_{1/2}$  (de  $10^3$  a  $10^7$  segundos para  $ft$ ). Por consiguiente se suelen tabular los logaritmos decimales  $\log_{10} ft$  con el tiempo en segundos. Los procesos con las semividas comparativas más bajas tienen valores de  $\log_{10} ft \sim 3-4$ , y se conocen como **desintegraciones superpermitidas**<sup>12</sup> (*superallowed decays*).

Algunos de estos procesos superpermitidos son transiciones  $0^+ \rightarrow 0^+$ , y en estos casos la matriz nuclear es muy simple:  $M_{fi} = \sqrt{2}$ , lo cual quiere decir que los valores  $\log_{10} ft$  de todos ellos deberían ser iguales, lo cual es aproximadamente cierto. Sabiendo que  $M_{fi} = \sqrt{2}$  para las transiciones superpermitidas, podemos usar la expresión ( ) y los valores experimentales de  $f t_{1/2}$  para deducir la magnitud de la constante de acoplamiento  $g$  introducida al principio. Se obtiene que

$$g \approx 0.88 \times 10^{-4} \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3 \quad (2.2.40)$$

Podemos conseguir una magnitud adimensional  $G$  a partir de  $g$  que nos permita comparar esta con otras constantes fundamentales de la naturaleza. Esta  $G$  es:

$$G = g \frac{m_p^2 c}{\hbar^3} \approx 1.0 \times 10^{-5} \quad (2.2.41)$$

menor que la fuerza fuerte y la electromagnética, pero mayor que la gravitatoria.

### 2.2.5. Clasificación de las desintegraciones. Reglas de selección del momento angular y de la paridad.

La clasificación de las desintegraciones  $\beta$ , de manera breve, se puede ver en la tabla 2.1, con las reglas de selección del momento angular y de la paridad.

<sup>12</sup>Cuando la función de ondas nuclear inicial y final se superponen perfectamente, la probabilidad de transición tiene los mismos números cuánticos que el neutrón o protón destruido, es decir, los dos estados se encuentran en el mismo multiplete de isospin. Estas desintegraciones superpermitidas, y sus valores  $ft$  coinciden esencialmente con el valor  $ft$  de la desintegración del neutrón libre.

Tipo de desintegración	$\Delta\pi$	$\Delta I$
Permitidas	0	0,1
Prohibidas (1º orden)	$\pm 2$	0,1,2
Prohibidas (2º orden)	0	2,3
Prohibidas (3º orden)	$\pm 2$	2,3
Prohibidas (4º orden)	0	4,5
Prohibidas (5º orden)	$\pm 2$	5,6

Tabla 2.1: Reglas de selección del momento angular y de la paridad de las desintegraciones  $\beta$ .  $\Delta\pi = 0$  significa que *no hay cambio de paridad* y que  $\Delta\pi = \pm 2$  significa que *hay cambio de paridad*.

Vamos a explicar la notación de la paridad. Sea  $\Delta\pi = \pi_f - \pi_i$ . Entonces tenemos las posibilidades siguientes:

- No hay cambio de paridad, por lo que o bien ambas tienen paridad positiva  $\pi_f = \pi_i = 1$  o ambas tienen paridad negativa  $\pi_f = \pi_i = -1$ , lo que lleva en ambos casos a un cambio de paridad nulo  $\Delta\pi = 0$ .
- Hay cambio de paridad, lo que arroja las siguientes posibilidades: los valores  $\pi_f = 1, \pi_i = -1$  lo que lleva a un cambio de paridad  $\Delta\pi = 2$ ; y los valores  $\pi_f = -1, \pi_i = 1$  lo que lleva a que  $\Delta\pi = -2$ .

### Desintegraciones permitidas (*allow decays*)

Recordemos que en la denominada aproximación permitida hemos sustituido las funciones de onda del electrón y del neutrino, por su valor en el origen, esto es, consideremos que fueron *creados* en  $r = 0$ . En este caso no puede llevarse ningún momento angular orbital, y el único cambio posible de espín nuclear debe provenir del espín del electrón y del neutrino, que ambos son fermiones de espín  $s_e = s_\nu = 1/2$ . En la aproximación permitida ( $\ell = 0$ ), podemos tener entonces los siguientes casos

- El espín del sistema de dos leptones ( $e$  y  $\nu$ ) es  $S = 0$  (configuración singlete). En este caso no puede haber cambio en el espín nuclear:  $\Delta I = |I_i - I_f| = 0$ . Se les llama **Fermi decays**.
- El espín del sistema de dos leptones ( $e$  y  $\nu$ ) es  $S = 1$  (configuración triplete). En este caso  $\mathbf{I}_i$  e  $\mathbf{I}_f$  están acoplados a través de un vector de longitud unidad:  $\mathbf{I}_f + \hat{\mathbf{1}} = \mathbf{I}_i$ ,  $I_i = |I_f - 1|, I_f, |I_f + 1|$ , lo cual quiere  $\Delta I = 0, 1$ . Se les llama **Gamow-Teller decays**. Obsérvese que si  $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f = 0$  tenemos también  $\Delta I = 0$ , pero no es posible que exista una transición Gamow-Teller en este caso, porque los leptones no pueden ser emitidos en configuración triplete ( $0 \neq 0 + 1$ ).

Puesto que la paridad asociado al momento angular orbital  $l$  es  $(-1)^l$ , se deduce que hay cambio de paridad en estas transiciones ( $l = 0$ ). Las **reglas de selección** para las desintegraciones  $\beta$  **permitidas** son entonces:

$$\Delta I = 0, 1 \quad \Delta\pi = 0 \quad (\text{no hay cambio de paridad}) \quad (2.2.42)$$

Ejemplos de transiciones  $\beta$  permitidas:

- $^{14}\text{O} \longrightarrow ^{14}\text{N}^* (0^+ \rightarrow 0^+)$ . Es una transición Fermi (F) pura, no puede haber contribución de la transición Gamow-Teller (GT) porque  $I_i = I_f = 0$ .
- $^6\text{He} \longrightarrow ^6\text{Li} (0^+ \rightarrow 1^+)$ . Es una transición GT pura.
- $n \longrightarrow p \left( \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ \right)$ . Tenemos  $\Delta I = 0$  y se trata de una transición mezcla (F) y (GT), porque es posible que los dos leptones se encuentran tanto la configuración triplete del espín ( $S = 1$ ) como en la singlete ( $S = 0$ )<sup>13</sup>. Las proporciones exactas en que contribuyen cada una de estas transiciones al proceso global dependen de las funciones de onda nuclear inicial y final. Se suele definir el cociente entre las amplitudes de Fermi y de Gamow-Teller de la siguiente manera:

$$y = \frac{g_F M_F}{g_{GT} M_{GT}} \quad (2.2.43)$$

donde  $M_F$  y  $M_{GT}$  son los *elementos de matriz nucleares* de Fermi y de Gamow-Teller. En la constante de transición global tendríamos que sustituir  $g^2 |M_{fi}|^2$  por  $(g_F^2 |M_F|^2 + g_{GT}^2 |M_{GT}|^2)$ . Suponemos que  $g_F$  es idéntica a la  $g$  deducida para las transiciones superpermitidas de Fermi ( $0^+ \rightarrow 0^+$ ). Para la desintegro del neutrón el elemento de matriz nuclear es simplemente  $|M_F| = 1$ . Puesto que la constante de transición (decay rate) es proporcional a  $g_F^2 |M_F|^2 (1 + y^{-2})$ , la tasa de desintegración del neutrón permite el cálculo del cociente  $y$ , que arroja un valor de  $y = 0.467 \pm 0.003$ . Es decir, la desintegración del neutrón libre tiene lugar en un 82 % de las ocasiones según un proceso de Gamow-Teller, y en el 18 % restante según un proceso de Fermi<sup>14</sup>.

En general el cálculo de  $M_F$  y  $M_{GT}$  es complicado, pero en el caso especial de núcleos espejo resulta particularmente simple porque las funciones de onda inicial y final son las mismas (excepto por pequeñas correcciones coulombianas). Un protón se convierte en neutrón más el positrón y el neutrino, y el cociente de amplitudes (F) y (GT) es similar al de la desintegración del neutrón libre antes vista.

### Desintegraciones prohibidas (*forbidden decays*)

Se denominan *first forbidden decays* o *desintegraciones prohibidas de primer orden* a aquellas transiciones  $\beta$  en la que los leptones se llevan una unidad de momento angular orbital  $\ell = 1$ . El término *desintegración prohibida* es realmente desafortunado, ya que aunque son transiciones poco probables, no son imposibles. Al igual que las desintegraciones permitidas, las dividimos en transiciones de Fermi (F) y de Gamow-Teller (GT), dependiendo de que los leptones emitidos se encuentren en la configuración singlete de espín ( $S = 0$ ) o la triplete ( $S = 1$ ), respectivamente.

- Para las *desintegraciones Fermi prohibidas de primer orden* hemos de acoplar  $S = 0$  con  $\ell = 1$ , lo cual proporciona  $I_i = I_f \oplus 1$  ( $I_i = |I_f - 1|, I_f, |I_f + 1|$ ), y por lo tanto  $\Delta I = 0, 1$  (pero no podemos tener  $0 \rightarrow 0$ , porque entonces los leptones no se podrían llevar una unidad de momento angular orbital y encontrarase en un estado singlete de espín).

<sup>13</sup>Las dos combinaciones que satisfacen la conservación del momento angular serían  $\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$ , para el estado singlete:  $\frac{1}{2} \otimes 0 = \frac{1}{2}$

<sup>14</sup>De acuerdo con

$$\frac{g_F^2 |M_F|^2}{g_F^2 |M_F|^2 (1 + y^{-2})} = \frac{1}{1 + y^{-2}} = 0.179$$

- Para las *desintegraciones de Gamow-Teller de primer orden* hemos de acoplar  $S = 1$  con  $\ell = 1$ , lo cual proporciona  $I_i = I_f \oplus 2$  ( $I_f \in \{|I_f - 2|, |I_f - 1|, I_f, |I_f + 2|, |I_f + 1|\}$ ) y por tanto  $\Delta = 0, 1, 2$ .

Por otro lado, si  $\ell = 1$ , habrá un cambio de paridad en la transición. Tenemos, por consiguiente, las siguientes reglas de selección para las transiciones prohibidas de primer orden:

$$\Delta I = 0, 1, 2 \quad \Delta \pi = \pm 2 \quad (\text{hay cambio de paridad}) \quad (2.2.44)$$

Algunos ejemplos de transiciones prohibidas de primer orden son:

- $^{17}_7\text{N} \longrightarrow ^{17}_8\text{O} \quad \left(\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^+\right)$
- $^{76}_{35}\text{Br} \longrightarrow ^{76}_{34}\text{Se} \quad (1^- \rightarrow 0^+)$
- $^{122}_{51}\text{Sb} \longrightarrow ^{122}_{50}\text{Sn}^* \quad \left(\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^+\right)$

Las desintegraciones  $\beta$  **prohibidas de segundo orden** son aquellas en las que los leptones se lleva unidades de momento angular  $\ell = 2$ , con lo cual no hay cambio de paridad. El proceso para obtener las reglas de selección es el mismo que el de las anteriores desintegraciones: las subdividimos en Fermi o Gamow-Teller, de tal manera que combinando tenemos que  $\Delta I = 0, 1, 2, 3$  (pero no siempre, porque las transiciones  $0 \rightarrow 0$  u  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$  no permiten que los leptones se lleven dos unidades de momento angular). Por otro lado como los casos  $\Delta = 0, 1$  están comprendidos en las desintegraciones permitidas, por lo que la contribución de las prohibidas de segundo orden a la tasa de desintegración es completamente despreciable en estos casos, por lo que debemos ignorarlos. Así, las reglas de selección son:

$$\Delta I = 2, 3 \quad \Delta \pi = \pm 2 \quad (\text{no hay cambio de paridad}) \quad (2.2.45)$$

Algunos ejemplos:

- $^{22}_{11}\text{Na} \longrightarrow ^{22}_{10}\text{Ne} \quad (3^+ \rightarrow 0^+)$
- $^{137}_{55}\text{Cs} \longrightarrow ^{137}_{56}\text{Ba} \quad \left(\frac{7}{2}^+ \rightarrow \frac{3}{2}^+\right)$

Las desintegraciones  $\beta$  **prohibidas de tercer orden** son aquellas en las que los leptones se llevan un momento angular  $\ell = 3$ . Así, tendrían las siguientes reglas de selección:

$$\Delta I = 3, 4 \quad \Delta \pi = \pm 2 \quad (\text{hay cambio de paridad}) \quad (2.2.46)$$

- $^{87}_{37}\text{Rb} \longrightarrow ^{87}_{38}\text{Sr} \quad \left(\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{9}{2}^+\right)$
- $^{40}_{19}\text{K} \longrightarrow ^{40}_{20}\text{Ca} \quad (4^- \rightarrow 0^+)$

Incluso es posible encontrar desintegraciones prohibidas de cuarto (y quinto) orden, pero cuanto más alto es el orden más improbable es que se produce. En la práctica estas transiciones son tan improbables que sólo pueden observarse cuando las otras son realmente imposibles. En cualquier caso dejamos en la tabla 2.1 las reglas de selección de las transiciones permitidas y prohibidas hasta 5º orden.

### 2.2.6. Desintegración doble $\beta$

La desintegración doble  $\beta$  (o  $\beta\beta$ ) es un proceso mediante el cual dos neutrones se convierten “simultáneamente” en dos protones, dos electrones y dos antineutrinos. Un ejemplo es el siguiente:



Es necesario insistir en que se trata de un proceso único y no dos desintegraciones  $\beta$  sucesivas muy seguidas en el tiempo. En este caso, el proceso  ${}_{34}^{82}\text{Se} \longrightarrow {}_{35}^{82}\text{Br} + e^{-} + \bar{\nu}_e$  está prohibido por la ley de conservación de energía ( $Q < 0$ ), por lo que la desintegración  $\beta$  no puede tener lugar. Sin embargo  $\beta\beta$  tiene un  $Q > 0$ . Esta es una característica común a la mayoría de las desintegraciones doble  $\beta$ : el núcleo intermedio que resultaría de la desintegración  $\beta$  simple es más pesado que el núcleo padre, mientras que el resultante de la doble  $\beta$ , no.

Mediciones experimentales de los períodos de semidesintegración para algunas desintegraciones  $\beta\beta$  mencionan arrojan tiempos de vida medio ridículos,

$${}_{34}^{82}\text{Se} \longrightarrow {}_{36}^{82}\text{Kr} + 2e^{-} + 2\bar{\nu}_e \quad t_{1/2} = (1.2 \pm 0.1) \times 10^{20} \text{ años} \quad (2.2.48)$$

$${}_{20}^{48}\text{Ca} \longrightarrow {}_{22}^{48}\text{Ti} + 2e^{-} + 2\bar{\nu}_e \quad t_{1/2} = (4.3 \pm 1.4) \times 10^{19} \text{ años} \quad (2.2.49)$$

Es decir, se trata de procesos sumamente improbables, ya que sabiendo que la probabilidad de transición de  $\beta$  viene dada por

$$\lambda_{\beta} = \frac{m_e c^2}{\hbar} \left( f g^2 \frac{m_e^4 c^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^6} \right) \quad (2.2.50)$$

podemos estimar que la tasa de desintegración  $\beta\beta$ , salvo por el factor inicial, el cuadrado del anterior:

$$\lambda_{\beta\beta} = \frac{m_e c^2}{\hbar} \left( f g^2 \frac{m_e^4 c^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^6} \right)^2 \quad (2.2.51)$$

aunque este tratamiento simplista no se debe tomar demasiado en serio a efectos de predicciones cuantitativas. La búsqueda experimental de desintegraciones doble  $\beta$  sin emisión de neutrinos<sup>15</sup> (*neutrinoless double beta decay*) es campo de investigación activo e interesante, porque su existencia sería una confirmación más de que los neutrinos no tienen masa nula<sup>16</sup>.

## 2.3. Transiciones electromagnéticas

Los rayos  $\gamma$  son capaces de penetrar varios milímetros en plomo. No son desviados por los campos electromagnéticos e interaccionan con la materia de manera similar a los rayos X. Se trata de radiación electromagnética, e inicialmente se confundieron los rayos X emitidos por el reordenamiento de los electrones atómicos que sigue a una conversión interna. La desintegración

<sup>15</sup>Obsérvese que la desintegración doble  $\beta$  sin emisión de neutrinos no está prohibida por la ley de conservación de la energía y el momento, tal y como sucede para las desintegraciones  $\beta$  simple sin emisión de neutrinos.

<sup>16</sup>Sin entrar en detalles, se puede considerar que la desintegración doble  $\beta$  sin emisión de neutrinos tiene lugar mediante dos procesos virtuales. En el primero de ellos un neutrón se desintegra y emite un neutrino que luego es absorbido por otro neutrón para iniciar una reacción beta inversa que lo convierte en protón. Para que esto pueda ocurrir es necesario que el neutrino emitido en el primer proceso virtual cambie de helicidad, lo cual implicaría que tiene masa.

$\gamma$  consiste en la emisión espontánea de fotones altamente energéticos cuando el núcleo pasa de un estado excitado a otro estado de menor energía o al fundamental. Es por tanto un proceso análogo al que tiene lugar cuando un átomo se desexcita emitiendo radiación, bien sea en el rango visible o en el de los rayos X. La emisión gamma suele acompañar a los otros dos tipos de radiación, porque sus productos quedan normalmente excitados. La vida media típica para una emisión  $\gamma$  es de unos  $10^{-9}$  segundos, pero a veces se observan vidas medias significativamente mayores. Estas transiciones se denominan **isoméricas**, y a los estados excitados de vida media larga se les llama estados **metaestables**, estados isoméricos, o isómeros. Se suele denotar esta característica con un superíndice en el símbolo del elemento  $^{110}\text{Ag}^m$ . Los rayos  $\gamma$  provenientes de transiciones nucleares electromagnéticas están en un rango de energías de entre 0.1 y 10 MeV, lo cual implica una longitud de onda  $\lambda$  entre  $10^4$  y  $10^2$  fm.

### 2.3.1. Energética de la radiación $\gamma$

Si denotamos por  $E_i$  y  $E_f$  las energías de los estados excitados nucleares inicial y final respectivamente, la ley de conservación de energía para una transición electromagnética nos permite escribir:

$$E_i = E_f + E_\lambda + T_R, \quad \Delta E = E_i - E_f = E_\gamma + T_r = p_\gamma c + \frac{p_R^2}{2M}$$

dado que el momento se tiene que conservar:

$$\Delta E = p_\gamma c + \frac{p_R^2 c^2}{2Mc^2} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} = E_\gamma \left( 1 + \frac{E_\gamma}{2Mc^2} \right)$$

Es evidente que  $T_R$  no puede ser otra cosa que la *energía de retroceso del núcleo emisor*. Podemos ver que podemos escribir la ecuación de arriba como una ecuación de segundo grado:

$$E_\gamma^2 + 2Mc^2 E_\gamma - 2Mc^2 \Delta E = 0$$

la cual nos lleva a la solución (elegimos la positiva evidentemente):

$$E_\gamma = Mc^2 \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}} \right] \quad (2.3.1)$$

Aproximando  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8 \dots$  tenemos que:

$$E_\gamma = \Delta E \left( 1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2} \right) \quad (2.3.2)$$

Vemos entonces que la energía del fotón no es exactamente igual a la diferencia de energías entre los dos estados excitados, ya que para conservar el momento debemos tener en cuenta la energía de retroceso del núcleo, aunque para la mayoría de propósitos podemos despreciar esta relación y escribir  $E_\gamma = \Delta E$ .

### 2.3.2. Análisis multipolar de la radiación electromagnética.

Las distribuciones de cargas y corrientes estacionarias crean campos eléctrico y magnéticos estacionarios que se analizan en términos de los **momentos multipolares estáticos**. Las distribuciones estáticas no crean campos de radiación, no se radia energía. Por el contrario, las distribuciones

de cargas y corrientes cambiantes en el tiempo sí crean **campos de radiación**, es decir, radian energía. Un dipolo eléctrico está formado por un par de cargas positiva y negativa, separadas una cierta distancia y crean el denominado campo dipolar eléctrico. Si las dos cargas del dipolo vibran alrededor de una posición de equilibrio con cierta frecuencia  $\omega$ , emitirán radiación dipolar eléctrica. Análogamente, una corriente eléctrica circular uniforme crea un campo dipolar magnético y no emite radiación, pero si hacemos que la intensidad de esa corriente eléctrica oscilase sinusoidalmente (por ejemplo) en el tiempo con cierta frecuencia  $\omega$ <sup>17</sup>, tendremos radiación dipolar magnética. Estos son los dos ejemplos más sencillos de distribuciones variables de cargas o corrientes, pero cualquier campo de radiación se puede analizar en términos de sus **componentes multipolares**.

Denotaremos por EL a la **radiación multipolar eléctrica** de orden  $2^L$ , de tal manera que para  $L$  tenemos *radiación dipolar*, para  $L = 2$  *radiación cuadrupolar*, para  $L = 3$  *radiación octupolar*, para  $L = 4$  *hexadecapolar*, etc. Análogamente denotaremos por ML a la **radiación multipolar magnética** de orden  $2^L$ . En Mecánica Cuántica hablamos de operadores multipolares, de tal manera que la probabilidad de transición (emisión del fotón) está gobernada por el elemento de matriz del **operador multipolar** correspondiente:

$$m_{fi}(\sigma L) = \int_{\tau} \Psi_f^* m(\sigma L) \Psi_i d\tau \quad (2.3.3)$$

donde  $\sigma = E, M$  y  $m(\sigma L)$  es el operador multipolar. La paridad del campo de radiación eléctrica es  $\pi(EL) = (-1)^L$ , y la del campo de radiación magnética es  $\pi(ML) = (-1)^{L+1}$ .

Para calcular la probabilidad de emisión de un fotón de energía  $\hbar\omega$  en la transición de dos estados es preciso utilizar el aparato matemático de la electrodinámica cuántica. Sin embargo, es posible escribir la siguiente expresión aproximada reinterpretando convenientemente la fórmula clásica para la potencia radiada. Así, la **probabilidad de transición** (por unidad de tiempo):

$$\lambda(\sigma L) = \frac{2(L+1)}{\epsilon_0 \hbar L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2L+1} [m_{fi}(\sigma L)]^2 \quad (2.3.4)$$

donde la expresión del doble factorial significa  $(2L+1)!! = (2L+1) \times (2L-1) \times \dots \times 5 \times 3 \times 1$ . Lógicamente esta  $\lambda$  la podremos relacionar experimentalmente con el valor del periodo de semidesintegración ( $\lambda = \ln(2)/t_{1/2}$ ). Para obtener una expresión más concreta es necesario evaluar el elemento de matriz  $m_{fi}(\sigma L)$ , para lo cual necesitamos conocer las funciones de onda nucleares inicial y final. No obstante si suponemos que la emisión  $\gamma$  se debe a la transición de un único protón de un estado a otro se puede hacer un cálculo simplificado cuyo resultado es:

$$\lambda(EL) \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 c R^{2L} \quad (2.3.5)$$

$$\lambda(ML) \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2 \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\mu_p - \frac{1}{L+1}\right) \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2L+1} \left(\frac{3}{L+2}\right)^2 c R^{2L-2} \quad (2.3.6)$$

donde  $E$  es la energía del fotón emitido  $E_\gamma$ ,  $R$  es el radio nuclear y  $\mu_p$  es el *momento magnético del protón*. Haciendo  $R = R_0 A^{1/3}$  podemos hacer las siguientes estimaciones, denominadas estimaciones de Weisskopf:

<sup>17</sup>Creando un momento dipolar magnético oscilante en el tiempo del tipo  $\mu(t) = iA \cos(\omega t)$ , donde  $i \cos(\omega t)$  es la corriente sinusoidal del anillo circular y  $A$  su área.

$$\begin{aligned}
\lambda(E1) &= 1.0 \times 10^{14} \text{ A}^{2/3} \text{ E}^3 \\
\lambda(E2) &= 7.3 \times 10^7 \text{ A}^{4/3} \text{ E}^5 \\
\lambda(E3) &= 3.4 \times 10^1 \text{ A}^{6/3} \text{ E}^7 \\
\lambda(E4) &= 1.1 \times 10^{-5} \text{ A}^{8/3} \text{ E}^9
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

tal que  $\lambda [\text{s}^{-1}]$  y  $E [\text{eV}]$ . Para las estimaciones de los multipolos magnéticos se suele sustituir la expresión  $[\mu_p - 1/(L+1)]^2$  por 10 y obtendremos

$$\begin{aligned}
\lambda(M1) &= 5.6 \times 10^{13} \text{ A}^{0/3} \text{ E}^3 \\
\lambda(M2) &= 3.5 \times 10^7 \text{ A}^{2/3} \text{ E}^5 \\
\lambda(M3) &= 1.6 \times 10^1 \text{ A}^{4/3} \text{ E}^7 \\
\lambda(M4) &= 4.5 \times 10^{-6} \text{ A}^{6/3} \text{ E}^9
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Las estimaciones de Weisskopf nos proporcionan una herramienta para comparar de modo aproximado la importancia relativa entre las distintas transiciones electromagnéticas. Esa es su utilidad, no se pretende que las comparaciones directas con datos experimentales sean de alta precisión. Para determinar la multipolaridad concreta de la radiación emitida es necesario medir su distribución angular, y para distinguir su carácter eléctrico o magnético es necesario medir su polarización.

### 2.3.3. Reglas de selección del momento angular y de la paridad

La teoría electromagnética clásica predice la transmisión de momento lineal y angular por parte de los campos electromagnéticos. Se han hecho experimentos precisos para medir ambos fenómenos, tanto la presión ejercida por la radiación como la transferencia de momento angular. Si hacemos incidir fotones circularmente polarizados a derechas sobre un disco absorbente que pueda girar sobre su eje veremos que efectivamente gira para garantizar la conservación del momento angular. La tasa de *radiación* del momento angular es proporcional a la tasa de radiación de energía. En la teoría cuántica esta proporcionalidad se mantiene si asignamos a cada fotón un cuanto preciso de momento angular. El operador multipolar de orden  $2^L$  incluye el armónico esférico  $Y_L^M(\theta, \phi)$  que está asociado con un momento angular  $L$ . Un multipolo de orden  $2^L$  transfiere por lo tanto un momento angular  $L\hbar$  un fotón<sup>18</sup>.

Consideremos una transición  $\gamma$  entre un estado nuclear inicial con espín  $\mathbf{I}_i$  y un estado final con espín  $\mathbf{I}_f$ , tal que  $I_i \neq I_f$ . Está claro que la conservación del momento angular implica que

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \mathbf{L} \rightarrow |I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \tag{2.3.9}$$

Si por ejemplo  $I_i = 3/2$  y  $I_f = 5/2$ , el momento angular podría valer  $L = 1, 2, 3, 4$ , pudiendo tener radiación dipolar, cuadrupolar, octupolar o hexadecapolar. El carácter magnético o eléctrico de la radiación emitida en cada caso dependerá de la paridad de los estados nucleares inicial y final. Recordemos que  $\pi(EL) = (-1)^L$  y que  $\pi(ML) = (-1)^{L+1}$ , por lo que las reglas de selección para la emisión de radiación electromagnética del siguiente modo:

<sup>18</sup>En general no es posible descomponer sin ambigüedad el momento angular total del fotón en una parte intrínseca y otra orbital, porque las dos están *acopladas* y no son independientes.



$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_f + \mathbf{L} \implies |I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \quad (\text{excepto } L = 0) \quad (2.3.10)$$

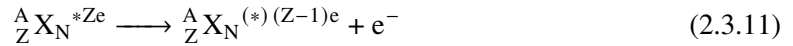
$$\Delta\pi = 0 \implies EL \text{ par} \quad \text{o} \quad ML \text{ impar}$$

$$\Delta\pi = 2 \implies EL \text{ impar} \quad \text{o} \quad ML \text{ par}$$

La excepción para  $L = 0$  se debe a que no existe radiación electromagnética multipolar de orden uno (radiación monopolar). En electromagnetismo clásico el momento monopolar eléctrico es simplemente una carga, que no varía con el tiempo y no puede dar lugar a un campo con radiación. Esto quiere decir que no es posible una transición  $\gamma$  entre dos estados con espín cero<sup>19</sup>. En estos casos la desexcitación nuclear tiene lugar a través de la conversión interna, un proceso que veremos más adelante en el capítulo.

### 2.3.4. Conversión interna

En la conversión interna el núcleo se desexcita expulsando un electrón de la corteza atómica. Es un proceso que compite con la emisión  $\gamma$ , y se representa por



donde (\*) indica que puede estar o no excitado el núcleo resultante. Conviene en este punto recordar las diferencias esenciales que existen entre este proceso y la desintegración  $\beta$ . En esta última etapa se *crea* una partícula  $\beta$ , mientras que en la conversión interna se emite un electrón que previamente ya existía en la corteza atómica. **Es un único proceso, no tiene lugar en dos etapas**, como la emisión de un fotón por el núcleo y la absorción por efecto fotoeléctrico de este fotón por un electrón atómico. La energía nuclear se transfiere directamente al electrón atómico a través del campo coulombiano que los acopla. El balance energético vendrá dado por

$$Q = m_X + E^i + Zm_e - \sum B_i - \left( m_X + E^i + (Z-1)m_e - \left[ \sum B_i - B_k \right] \right) \quad (2.3.12)$$

Para que pueda ocurrir la transición debe verificarse que la transición de nivel tiene que ser mayor que la energía de ligadura del electrón  $Q = \Delta E - B_k$ . Si despreciamos la energía de retroceso del núcleo, tendremos que  $Q = T_e$ , y por tanto la energía cinética del electrón será la diferencia de energía entre los dos estados nucleares menos la energía de ligadura del electrón atómico, es decir:

$$T_e = \Delta E - B \quad (2.3.13)$$

Es evidente entonces que la energía cinética del electrón expulsado dependerá de la capa atómica concreta en que se encuentre, e incluso dependerá un poco del entorno químico en el que esté inmerso el propio átomo, porque puede alterar las energías de los orbitales atómicos. Al estar tan determinado por estas condiciones solo se emitirán electrones muy completas, consiguiendo emisiones casi discretas. Los estados nucleares excitados son habitualmente el resultado de desintegraciones  $\beta$  previas, de tal manera que el espectro energético de los electrones emitidos por fuentes  $\gamma$  será la superposición de un espectro continuo y otro discreto. El primero originado por la desintegración  $\beta$  y el segundo por los electrones de conversión interna.

<sup>19</sup>Analizando el proceso en términos de física de partículas, diríamos que una transición  $\gamma \ 0^+ \rightarrow 0^+$  viola la ley de conservación del momento angular total.

Como ya hemos dicho, la conversión interna compite con la emisión de fotones. La intensidad relativa de las emisiones de los distintos tipos de electrones de conversión interna coincide con la probabilidad relativa de las transiciones, y estas probabilidades están íntimamente relacionadas con el orden multipolar y el carácter eléctrico o magnético de la emisión o emisiones  $\gamma$  permitidas entre los dos estados nucleares. De hecho, uno de los métodos principales para determinar el carácter multipolar de la emisión  $\gamma$  consiste en medir las intensidades relativas de los electrones de conversión interna. En algunos casos la conversión interna está mucho más favorecida (es mucho más probable) que la emisión  $\gamma$ , y en otras ocasiones al revés. En cualquier caso, para determinar la probabilidad global de transición ehmos de sumar la probabilidad de emisión  $\gamma$  y de conversión interna. Tendremos por lo tanto:

$$\lambda_t = \lambda_\gamma + \lambda_e \quad (2.3.14)$$

Se define el coeficiente de conversión interna como

$$\alpha = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} \quad (2.3.15)$$

de tal manera que  $\lambda_t = \lambda_\gamma(1 + \alpha)$ . Los coeficientes parciales de conversión interna se introducen de forma natural:

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \dots \quad (2.3.16)$$

El cálculo de los coeficientes de conversión interna es un asunto complicado. De forma aproximada, podemos decir que, puesto que ests coeficien es cocientes de probabilidades de transición que están gobernadas por el mismo elemento de matriz, no dependerán de los detalles de la estructura nuclear sino más bien sólo del número atómico  $Z$  de la energía  $T_e$  y del orden multipoolar  $2^L$ . Un cálculo no relativista simplificado simplificado produce las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \alpha(EL) &\approx \frac{Z^3 \alpha^4}{n^3} \left( \frac{L}{L+1} \right) \left( \frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+5/2} \\ \alpha(ML) &\approx \frac{Z^3 \alpha^4}{n^3} \left( \frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+3/2} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

donde  $Z$  es el número atómico del núcleo en el que tiene lugar la conversión interna<sup>20</sup>,  $\alpha$  es la constante de estructura fina, y  $n$  es el número cuántico principal de la capa atómica. Estas fórmulas representan únicamente una estimación aproximada, porque el electrón emitido es relativista y el núcleo no puede ser considerado puntual<sup>21</sup>. Existen tablas de coeficientes de conversión interna calculados de manera más rigurosa, pero en cualquier caso estas expresiones nos permiten deducir una serie de características o tendencias generales sobre el comportamiento de los coeficientes:

- Crecen con  $Z^3$ : la conversión interna es un proceso más importante para núcleos pesados que para núcleos ligeros.

<sup>20</sup>El núcleo hijo de la correspondiente desintegración  $\beta$

<sup>21</sup>Los electrones orbitales tienen cierta probabilidad de penetrar dentro de la región nuclear.

- Decrecen con la energía rápidamente, al contrario de lo que sucede con la emisión  $\gamma$ , cuya probabilidad aumenta con ella.
- Crecen rápidamente con el orden multipolar. Para valores altos de  $L$  la conversión interna puede ser mucho más probable que la emisión  $\gamma$ .
- Decrecen con el número cuántico principal como  $1/n^3$ , de tal manera que esperamos, aproximadamente  $\alpha_K/\alpha_L \approx 8$ , valor que es comparable al resultado experimental en muchas ocasiones.

Resumiendo, esperamos coeficientes de conversión interna altos para electrones de la capa  $K$ , correspondientes a transiciones de multipolaridad alta en núcleos pesados. Estos coeficientes son muy distintos para transiciones eléctricas  $EL$  y magnéticas  $ML$ . Por lo tanto, la medición de conversión interna es uno de los principales métodos que nos permiten determinar la paridad relativa de los estados nucleares.

Recordamos que las transiciones electromagnéticas con  $L = 0$  están prohibidas, por lo que la única forma de desexcitar el núcleo es mediante la emisión de electrones de la conversión interna. De hecho, la observación de electrones de conversión interna únicamente (sin fotones) es uno de los principales métodos experimentales usados para encontrar estados excitados  $0^+$ .

## 2.4. Teoría continua de la desintegración radiactiva.

La **actividad** de una muestra de átomos radioactivos se define como el número de desintegraciones que tienen lugar en la unidad de tiempo. Esta definición que tiene sentido si la desintegración es un fenómeno que involucra individualmente<sup>22</sup> a cada átomo, no un fenómeno colectivo. Así definida, es obvio que la actividad es proporcional al tamaño de la muestra radioactiva. Rutherford y Soddy establecieron experimentalmente a principios del siglo XX que la actividad de una muestra disminuye de forma exponencial con el tiempo. Desde un punto de vista mecanocuántico esto tiene sencilla justificación, por que se deriva de la existencia de una probabilidad fundamental de transición por unidad de tiempo para cada núcleo, lo cual implica a su vez que la probabilidad de que un átomo se desintegra de forma independiente de los demás, el número de desintegraciones por unidad de tiempo sigue una distribución de Poisson<sup>23</sup>. Es decir, la probabilidad de observar  $n$  desintegraciones en  $n$  intervalo de tiempo  $\Delta t$  viene dada por la siguiente expresión:

$$P(n, \Delta t) = \frac{m^n}{n!} \exp(-m) \quad (2.4.2)$$

donde  $m$  es el número promedio de desintegraciones por segundo en el período  $\Delta t$ . La desviación de esta distribución es  $\sigma = \sqrt{m}$ .

<sup>22</sup> Algo que parece evidente hoy en día estaba lejos de serlo para los descubridores de la radiactividad. Durante varios años no se tuvo claro que los fenómenos radioactivos son procesos que afectan a cada átomo individualmente.

<sup>23</sup> En realidad es una distribución binomial que en el límite de un número muy elevado de núcleos tiende a una distribución de Poisson. Supongamos que una muestra con  $N$  núcleos radioactivos, cada uno con probabilidad  $p$  de desintegrarse por unidad de tiempo  $\Delta t$ . Queremos calcular la probabilidad de que en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se desintegren  $n$  núcleos. Si las desintegraciones son realmente independientes entre sí podremos escribir:

$$P_n^N(\Delta t) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n} = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \quad (2.4.1)$$

En el límite  $N \rightarrow \infty$  manteniéndose  $Np = m$  constante, la ecuación anterior tiende a la distribución de Poisson.

### 2.4.1. Sustancia sin ramificación

De las condiciones discutidas en el párrafo anterior resulta sencillo deducir la evolución exponencial de la población de una sustancia radioactiva. Denotando por  $N(t)$  el número de núcleos de la muestra en función del tiempo:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.4.3)$$

donde  $\lambda$  es la **constante de desintegración**. Definimos como **actividad** de una muestra como

$$A(t) = \lambda N(t) \quad (2.4.4)$$

Son datos de interés el valor medio del tiempo de desintegración  $\tau$  llamado **vida media**, y el tiempo en que tarda una muestra en reducirse a la mitad  $t_{1/2}$  llamado **período de semidesintegración**. Ambos se calculan como:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (2.4.5)$$

En el sistema internacional la unidad de medida de la actividad es el **Becquerelio (Bq)**. El **Curio (Ci)** también se usa. Originalmente se definió como la actividad de un gramo de radio  $^{226}\text{Ra}$  pero hoy en día se define como  $1\text{Ci} = 3.7 \times 10^{10}\text{Bq}$ . La actividad de una muestra radioactiva indica únicamente el número de desintegraciones que se producen por segundo. Las fuentes más radiactivas tienen una actividad de microcurios  $\mu\text{Ci}$ . Las ecuaciones para una población de núcleos radioactivos que se desintegran de un modo son muy sencillas. Suponiendo que la desintegración es  $X \rightarrow Y$ , tenemos que las ecuaciones diferenciales que rigen la desintegración:

$$\frac{dN_X(t)}{dt} = -\lambda N_X \quad \frac{dN_Y(t)}{dt} = \lambda N_X \quad (2.4.6)$$

de tal modo que su solución es:

$$N_X(t) = N_X(0) e^{-\lambda t} \quad (2.4.7)$$

$$N_Y(t) = N_X(0) (1 - e^{-\lambda t}) + N_Y(0) \quad (2.4.8)$$

donde suponemos que  $Y$  es estable, esto es, no se desintegra en otra sustancia.

### 2.4.2. Ramificación. Constantes de desintegración parciales.

Supongamos que los núcleos de una muestra pueden desintegrarse siguiendo dos mecanismos o modos alternativos (por ejemplo la desintegración  $\alpha$  y  $\beta$ ). A cada uno de estos modos le corresponde una constante de desintegración diferente, de tal modo que la ecuación diferencial será:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda_a N(t) - \lambda_b N(t) = -\lambda N(t) \quad (2.4.9)$$

donde  $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$ .

### 2.4.3. Varias sustancias. Cadenas radiactivas naturales.

Es frecuente que el producto de desintegración de un núcleo radioactivo sea también radiactivo. Supongamos que en el instante inicial  $t = 0$  tenemos  $k$  sustancias que forman una cadena radiactiva. Para calcular el número de átomos en un instante posterior hemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 \\
 \frac{dN_2}{dt} &= -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 \\
 \frac{dN_3}{dt} &= -\lambda_3 N_3 + \lambda_2 N_2 \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \\
 \frac{dN_k}{dt} &= -\lambda_k N_k + \lambda_{k-1} N_{k-1}
 \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Lógicamente en función de las condiciones iniciales obtendremos una solución u otra. Una de las mas preeminentes es la de suponer que tan solo la sustancia 1 se halla presente al principio. La solución general con estas condiciones viene dada por las **ecuaciones de Bateman**. Por ejemplo para 3 sustancias, tendríamos que:

$$\begin{aligned}
 N_1(t) &= N_1(0) e^{-\lambda_1 t} \\
 N_2(t) &= N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\
 N_3(t) &= N_1(0) \lambda_1 \lambda_2 \left( \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} - \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right)
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Si por ejemplo el núcleo 3 fuera estable, de tal modo que la cadena fuera  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ , con suponer que  $\lambda_3 = 0$  en la ecuación anterior sería suficiente:

$$\begin{aligned}
 N_1(t) &= N_1(0) e^{-\lambda_1 t} \\
 N_2(t) &= N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_2(0) e^{-\lambda_2 t} \\
 N_3(t) &= N_1(0) \left[ 1 + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}) \right] + N_3(0)
 \end{aligned} \tag{2.4.12}$$



## Capítulo 3

# Reacciones Nucleares

Las reacciones nucleares más comunes tienen lugar cuando una partícula energética incide sobre un núcleo y éste se transforma: existándose, rompiéndose o simplemente absorbiendo la partícula incidente. Estas partículas incidentes son generalmente neutrones, protones, partículas  $\alpha$  o fotones  $\gamma$ . Para que penetren dentro del núcleo sobre el que inciden es necesario que lleven cierta energía. En la Tierra esa energía se puede conseguir con aceleradores o reactores nucleares, y también a partir de fuentes naturales radiactivas. Las reacciones nucleares permiten el estudio de las interacciones que gobiernan el mundo subnuclear y, por otro lado, proporcionan la mayor parte de los datos tabulados sobre las propiedades nucleares. Estas dos cosas, están obviamente relacionadas, porque sólo es posible entender las propiedades de los núcleos, si se posee al mismo tiempo una buena comprensión de las interacciones nucleares.

### 3.1. Tipos de reacciones

Representamos una reacción nuclear típica de las siguientes dos maneras equivalentes:

$$a + A \longrightarrow B + b \qquad A(a, b)B \qquad (3.1.1)$$

donde  $a$  es el proyectil o partícula acelerada que se hace incidir sobre el núcleo blanco,  $A$ , en reposo en el sistema laboratorio. De las partículas en el segundo miembro de la reacción,  $B$  suele ser un núcleo pesado que no abandona el material del blanco, y  $b$  una partícula para referirse a un conjunto de reacciones del mismo tipo. Así diríamos reacciones  $(\alpha, n)$  o  $(n, \gamma)$ , por ejemplo. Hay muchas maneras de clasificar las reacciones nucleares. He aquí unas cuantas:

- Se suele hablar de una **reacción de dispersión** (*scattering process*) cuando las partículas iniciales y finales son las mismas<sup>1</sup>. La dispersión puede ser **elástica** si las partículas o núcleos  $B$  y  $b$  se encuentran en su estado fundamental, o **inelástica** si alguna de las dos queda en un estado excitado, que posteriormente se suele desexcitar por emisión gamma. En una dispersión elástica la energía cinética se conserva ( $Q = 0$ ) y simplemente se redistribuye entre las partículas interaccionantes.
- Si las partículas  $a$  y  $b$  son la misma, y además tenemos otro nucleón en el estado final (3 partículas como productos) se suele denominar una **reacción knockout**.

---

<sup>1</sup>En física de partículas de altas energías se usa el término *scattering* de un modo más general, no sólo para referirse a reacciones en las que las partículas iniciales coinciden con las finales. En el *deep inelastic scattering* por ejemplo, la energía del proyectil es tan alta que se producen muchas partículas en el estado final

- Tenemos una **reacciones de transferencia** (*transfer reaction*) cuando se transfieren uno o varios nucleones entre el proyectil y el blanco.

Se puede hacer una clasificación de las reacciones atendiendo al mecanismo por el que proceden, aunque es necesario advertir que la división entre ellas no es estricta, y que una misma reacción puede proceder de varias anteriores:

- En las **reacciones directas** sólo unos cuantos nucleones intervienen en la reacción. Las reacciones de transferencia antes citadas pertenecerían a este grupo.
- En las **reacciones de núcleo compuesto** el proyectil y el núcleo blanco llegan a compartir brevemente toda su energía en un único modelo compuesto antes de emitir, por ejemplo, el nucleón expulsado. Una lejana analogía de la emisión nuclear en un núcleo compuesto podría ser la evaporación de una molécula de la superficie de un líquido caliente.
- Las reacciones que proceden a través de **resonancias** estarían en un punto intermedio a los dos extremos anteriores. Se llega a formar un estado *cuasi-ligado* antes de que se emita la partícula expulsada.

Atendiendo al tipo de partícula que induce la reacción podríamos clasificarlas como:

- Reacciones inducidas por **neutrones**.
- Reacciones inducidas por **partículas cargadas**.
- Reacciones inducidas por **fotones  $\gamma$** .

Este tercer tipo de reacciones tiene ver más con la interacción electromagnética que con la nuclear, pero se suelen incluir dentro de las reacciones nucleares porque tienen lugar en las cercanías nucleares y conducen a su transformación. Otro tipo de reacciones serían:

- Reacciones de fisión de núcleos pesados.
- Reacciones de fusión.
- Reacciones de creación de elementos transuránicos.

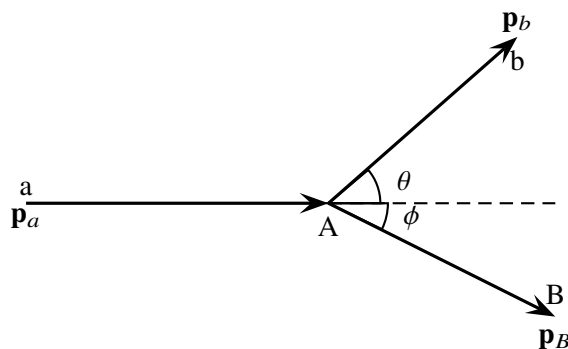


Figura 3.1: esquema de la reacción  $a + A \rightarrow B + b$ .



## 3.2. Leyes de conservación

### 3.2.1. Conservación de la carga eléctrica y el número bariónico

Aunque veremos en un capítulo posterior estas leyes de conservación con algo más de detalle, conviene mencionarlas ya aquí. La carga eléctrica total de las partículas iniciales de la reacción es siempre igual a la de las partículas finales. La **conservación de la carga eléctrica** es una ley *muy fundamental* en nuestro entendimiento actual de la física, al mismo nivel que la ley de conservación de la energía.

Si asignamos a cada a cada barión<sup>2</sup> una unidad positiva de *número bariónico* y a cada antibarión una unidad negativa, podemos formular una ley de **conservación del número de bariónico** en cualquier reacción diciendo que la suma de números bariónicos para las partículas iniciales debe coincidir con la misma suma para las partículas finales. Obsérvese que el proceso

$$p + e^- \longrightarrow 2\gamma \quad (3.2.1)$$

viola la ley de conservación del número bariónico, y desde luego no se observa. En otras palabras: el átomo de hidrógeno es estable. En reacciones ordinarias en las que la energía no es suficiente para la creación de antipartículas, esta ley se reduce a la **conservación del número total de nucleones**. En reacciones simples esto quiere decir que el número másico  $A$  se conserva.

### 3.2.2. Conservación de la energía y del momento lineal

Las interacciones nucleares tienen lugar a distancia mucho más pequeñas que la separación típica entre los núcleos de un material ordinario, por eso se puede considerar a las partículas interaccionantes en una reacción nuclear como un sistema aislado y aplicar la ley de conservación de la energía total y del momento lineal total. De acuerdo con la notación expresada en (3.1.1) escribimos la **conservación de la energía**

$$T_a + m_a c^2 + T_A + m_A c^2 = T_b + m_b c^2 + T_B + m_B c^2 \quad (3.2.2)$$

tal que  $E_A = T_A + m_A c^2 \dots$  El valor  $Q$  del proceso o de la reacción se define como la diferencia entre la energía cinética inicial y final

$$Q \equiv T_B + T_b - T_A - T_a = (m_A + m_a - m_B - m_b)c^2 \quad (3.2.3)$$

Si, como es habitual, estamos analizando un experimento en el que el núcleo blanco se encuentra en reposo en el sistema laboratorio ( $T_A = 0$ ), entonces tenemos que  $Q = T_B + T_b - T_a$ . La energía cinética del núcleo  $T_B$  es difícil de medir, y son las energías del proyectil y la de la partícula emergente ( $T_a$  y  $T_b$ ) las que suelen medirse. De todos modos veremos que podemos encontrar una expresión para  $Q$  que no incluye la energía cinética  $T_B$ .

La deducción de la expresión para la energía cinética de la partícula o núcleo ligero saliente,  $T_b$ , en función de las demás variables en el sistema de referencia del laboratorio. Usaremos mecánica no relativista, porque es suficientemente aproximada para las reacciones nucleares de baja energía. Por conservación del momento lineal deducimos que las trayectorias de la partícula proyectil,  $a$ , y las de las partículas salientes,  $B$  y  $b$ , están contenidas en un mismo plano, de lo contrario no se

<sup>2</sup>Un barión es un hadrón (partícula sensible a la interacción fuerte) con espín semientero. Los bariones más ligeros son los familiares protón y neutrón.

conservaría la componente del momento perpendicular a dicho plano. De acuerdo con la figura 3.1 podemos plantear las 3 ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} Q &= T_B + T_b - T_A - T_A \\ p_a &= p_b \cos(\theta) + p_B \cos(\phi) \\ 0 &= p_b \sin(\theta) - p_B \sin(\phi) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

De aquí, sumando el cuadrado de las dos últimas y despejando, y aplicando que  $T_B = p_B^2/2m_B$  en la primera ecuación, podemos despejar  $p_B^2$ :

$$p_B^2 = (p_a - p_b \cos(\theta))^2 + p_b^2 \sin^2 \theta \quad p_B^2 = 2m_B (Q + T_A + T_a - T_B) \quad (3.2.5)$$

Igualando ambas podemos obtener una ecuación de segundo grado de  $p_b^2$  de la cual obtenemos que está multivaluada:

$$p_b = \frac{m_b}{(m_B + m_b)} \left[ 2p_a \cos(\theta) \pm \sqrt{4p_a^2 \cos^2(\theta) - 4\frac{m_B + m_b}{m_b} [p_a^2 - 2m_B(Q + T_a)]} \right] \quad (3.2.6)$$

de lo que se deduce la expresión de la energía cinética:

$$\sqrt{T_b} = \frac{\sqrt{m_a m_b T_a} \cos(\theta)}{m_B + m_b} \pm \frac{\sqrt{m_a m_b T_a \cos^2(\theta) + (m_B + m_b) [m_B Q + (m_B - m_a) T_a]}}{m_B + m_b} \quad (3.2.7)$$

Esta última expresión nos permite evaluar  $T_b$  a partir de datos usualmente conocidos en las reacciones, como lo son las masas de las partículas o núcleos intervinientes, la energía de la cinética incidente y el ángulo de dispersión. Examinando esta fórmula podemos extraer las siguientes conclusiones

- Si  $Q < 0$ , existe un mínimo valor de  $T_a$  por debajo del cual el discriminante de (3.2.7) se hace negativo y la reacción no puede tener lugar. Esta energía cinética umbral del proyectil se obtiene igualando a cero este discriminante:

$$T_a = -Q \frac{m_B(m_B + m_b)}{(m_b + m_B)(m_B - m - a) + m_a m_b \cos^2(\theta)} \quad (3.2.8)$$

Está claro además que el mínimo valor de  $T_a$  se alcanza cuando  $\cos^2(\theta) = 1$ . Por lo tanto la energía cinética umbral es:

$$(T_a)_{\text{um}} = -Q \frac{m_B + m_b}{m_B + m_b - m_a} \quad (3.2.9)$$

La condición de energía umbral se alcanza por tanto para  $\theta = 0$ , y por tanto  $\phi = 0$ . Esto quiere decir que las partículas se mueven en una misma línea recta sin que se gaste energía extra en darles una componente de momento perpendicular. Si  $Q > 0$  no existe energía umbral (lógicamente), es decir, la reacción podría producirse en principio para cualquier valor de  $T_a$ . De todos modos, en el caso de partículas cargadas, como una partícula  $\alpha$ , es obvio que se necesita un cierto valor mínimo de  $T_a$  para vencer la barrera coulombiana y acercar suficientemente los núcleos para que la reacción nuclear puede tener lugar.

- El doble signo de la raíz en (3.2.7) implica que existe una región bivaluada para  $T_b$ , es decir, una región donde un mismo ángulo de dispersión y una misma energía cinética de la partícula,  $T_a$ , puede producir dos valores distintos de  $T_b$ . Esto significa que no podemos seleccionar de forma unívoca  $T_b$  simplemente variando el ángulo de dispersión-observación  $\theta$ . No obstante, esta región bivaluada es usualmente muy pequeña.
- Dentro de este rango bivaluado de energías existe un máximo valor que el ángulo de dispersión puede tomar,  $\theta_m$ . Este valor se obtiene igualando a cero el discriminante de la ecuación 3.2.7:

$$\cos^2(\theta_m) = -\frac{(m_B + m_b) [m_B Q + (m_B - m_a) T_a]}{m_a m_b T_a} \quad (3.2.10)$$

- Las reacciones  $Q > 0$  no tienen región bivaluada.

Midiendo el ángulo de dispersión  $\theta$  y las energías cinéticas  $T_a$  y  $T_b$  podemos determinar el valor de  $Q$ :

$$Q = T_b \left( 1 + \frac{m_b}{m_B} \right) - T_a \left( 1 - \frac{m_a}{m_B} \right) - 2 \sqrt{\frac{m_a m_b}{m_B m_B}} T_a T_b \cos(\theta) \quad (3.2.11)$$

Aunque en esta ecuación aparece la masa del núcleo  $B$ , es una buena aproximación reemplazar  $m_B$  directamente por su número másico, especialmente si se realizan las mediciones para  $\theta \sim 90^\circ$ . De esta manera, conociendo  $m_A$ ,  $m_a$  y  $m_b$ , se puede obtener el valor de  $m_B$  si determinamos  $Q$  experimentalmente a partir de la ecuación (3.2.11).

Hemos de considerar además la posibilidad de que en la reacción se produzca un estado excitado del núcleo  $B$ . En este caso el valor  $Q$  del proceso debe expresarse en términos de la masa del núcleo excitado, es decir:

$$Q_{ex} = (m_A + m_a - m_{B^*} - m_b) c^2 = Q_0 - E_{ex} \quad (3.2.12)$$

donde  $Q_0$  es el valor  $Q$  que correspondería a la reacción yendo al estado fundamental de  $B$ , y  $E_{ex}$  es la energía del estado excitado ( $m_{B^*} c^2 = m_B c^2 + E_{ex}$ ). En una reacción dada, el valor más alto de  $T_b$  se obtendría cuando el valor  $B$  se queda en el estado fundamental, de tal modo que podríamos usar la ecuación (3.2.11).

### 3.2.3. Energía umbral de reacción

Si queremos conocer qué energía cinética,  $T_a$ , tenemos que comunicarle al proyectil, para alcanzar un nivel excitado concreto en el núcleo final  $B$ , resulta más sencillo realizar los cálculos en el sistema de referencia del centro de masas (CM).

$$T'_{um} = (T'_A + T'_a)_{um} = -Q \quad (3.2.13)$$

### Derivación relativista

La definición de la energía umbral relativista:

$$[(T_a)_{\text{um}}]_{\text{r}} = -Q \frac{m_A + m_a + m_B + m_b}{2m_A} \quad (3.2.14)$$

Se puede ver fácilmente que esta fórmula es generalizable a una reacción con un número arbitrario de partículas en el estado final:

$$[(T_a)_{\text{um}}]_{\text{r}} = -Q \frac{\sum m_i}{2m_A} \quad (3.2.15)$$

De todos modos, puesto que las expresiones dadas en () son las dos igualmente simples, no obtenemos una ventaja en el cálculo al usar la no relativista frente a la relativista, que además es más fácil de recordar. Por lo tanto adoptaremos comúnmente el uso de esta última y escribiremos simplemente:

$$(T_a)_{\text{um}} = -Q \frac{\sum m_i}{2m_A} \quad (3.2.16)$$

### 3.2.4. Conservación del momento angular y de la paridad

El momento angular total de las partículas que interaccionan en una reacción nuclear se conserva, así como su proyección sobre una dirección seleccionada (usualmente el eje  $z$ , que se toma como el eje de la colisión). En una reacción del tipo



podemos denotar por  $\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_a$  el espín total de las partículas iniciales y  $\mathbf{I}_f = \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_b$  el espín total de las partículas finales,  $\ell_{Aa}$  el momento angular orbital que caracteriza el movimiento relativo de las partículas iniciales, y  $\ell_{Bb}$  el correspondiente a las partículas finales. Con esta notación, la ley de conservación del momento angular total se escribe como

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_a + \ell_{Aa} = \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_b + \ell_{Bb} \quad (3.2.18)$$

Como es sabido, los espines nucleares (o de las partículas intervinientes),  $\mathbf{I}_i$  e  $\mathbf{I}_f$  pueden ser enteros o semienteros, mientras que los momentos angulares orbitales  $\ell_{Aa}$  y  $\ell_{Bb}$  deben ser enteros.

La paridad de la función de ondas que describe el movimiento relativo de las partículas  $A$  y  $a$  viene determinada por su momento angular orbital. La paridad global del sistema inicial será el producto de las paridades intrínsecas<sup>3</sup> de las partículas (que a su vez pueden ser subsistemas compuestos) y la paridad de su movimiento relativo:

$$\pi_i = \pi_A \pi_a (-1)^{\ell_{Aa}} \quad (3.2.19)$$

Escribiríamos entonces la ley de conservación de la paridad Como

<sup>3</sup>Más detalles sobre lo que es la paridad intrínseca puede encontrarse en la sección 6.1

$$\pi_A \pi_a (-1)^{I_{Aa}} = \pi_B \pi_b (-1)^{I_{Bb}} \quad (3.2.20)$$

La conservación de la paridad en las reacciones nucleares no es estricta. Aunque podemos decir que la fuerza nuclear fuerte es la gran responsable de estos procesos, es necesario tener en cuenta que la fuerza nuclear débil también está presente e introducirá pequeños efectos de violación de la paridad. Ya veremos la aplicación concreta de estas leyes de conservación, aunque en realidad ya las hemos estado discutiendo para los distintos tipos de desintegraciones en los núcleos.

### 3.2.5. Conservación de isospín

El isospín  $\mathbf{T}$  es un número cuántico “efectivo” que asume que el protón y el neutrón son la misma partícula con dos estados de isoespín. El isoespín cumple las mismas reglas algebraicas que un momento angular:

$$T^2 |t, m_t\rangle = t(t+1) |t, m_t\rangle \quad T_3 |t, m_t\rangle = m_t |t, m_t\rangle \quad (3.2.21)$$

Asociando  $m_t = +1/2$  al protón y  $m_t = -1/2$  al neutrón, sus posibles valores en el estado fundamental para un núcleo con  $Z$  protones y  $N$  neutrones:

$$T_3 = \frac{Z - N}{2} \quad \left| \frac{Z - N}{2} \right| \leq T \leq \frac{Z + N}{2} \quad (3.2.22)$$

En reacciones mediadas por la fuerza fuerte<sup>4</sup> (no por la débil, como las desintegraciones beta), se conserva el isospín:

$$\mathbf{T}_A + \mathbf{T}_a = \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_b \quad (3.2.23)$$

## 3.3. Dispersión y secciones eficaces

Lo que usualmente se mide en las reacciones nucleares es el momento de las partículas ligeras emitidas (y por lo tanto su energía cinética, supuesto que se conozca la identidad de la partícula) y su distribución angular. Esto permite observar la partícula emergente en un cierto elemento diferencial de ángulo sólido  $d\sigma/d\Omega$  a veces también representada por  $\sigma(\theta, \phi)$ . Si estamos interesándonos en encontrar a la partícula emergente no sólo a un cierto ángulo, sino también con una cierta energía, hablamos de la sección eficaz diferencial doble,  $d^2\sigma/d\Omega dE$ , pero usualmente no se pone de modo explícita esta dependencia con la energía porque se supone implícita a menos que se diga lo contrario. Integrando la sección eficaz diferencial sobre el ángulo sólido obtendríamos la sección eficaz diferencial total a una energía dada  $d\sigma/dE$ . Por último, si también integramos esta energía, obtendríamos la sección eficaz total absoluta  $\sigma_t$ , que representa la probabilidad de formar al núcleo  $B$  en el estado final (en reacciones del tipo  $a + A \rightarrow B + b$ ).

Para ciertos estudios más detallados se suelen medir también secciones eficaces dependiendo de la orientación de los espines de las partículas emergentes. Esto, junto con la observación del espectro  $\gamma$  de desexcitación de los núcleos formados, permite acumular información para asignar espines y paridades a los estados de los núcleos bajo estudio.

<sup>4</sup>Un ejemplo interesante podrían ser las desintegraciones  $\alpha$ .

### 3.3.1. Atenuación de un haz al atravesar un blanco

Una disposición experimental frecuente en física nuclear consiste en hacer incidir un haz de partículas sobre un blanco fijo para producir cierto tipo de reacción. Dada la probabilidad de interacción por unidad de longitud, podemos calcular en qué medida se atenuará el haz incidente al atravesar el blanco delgado<sup>5</sup>. Denotemos por  $1/\lambda$  la probabilidad de interacción de las partículas del haz por unidad de longitud en el material del blanco. Queremos calcular la probabilidad de que una partícula del haz atraviese un intervalo de longitud  $X$  en el blanco sin sufrir ninguna interacción. Para ello dividimos el intervalo  $X$  en una serie de intervalos infinitesimales cuyo tamaño podemos expresar como  $X/n$  siendo  $n$  un número suficientemente grandes. La probabilidad infinitesimal  $dP$  de que la partícula incidente logre atravesar el intervalo de longitud  $X/n$  será  $dP = 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{X}{n}$ , haciendo tender  $n$  a infinito al mismo tiempo que aplicamos  $n$  veces la fórmula anterior obtenemos:

$$dP = 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{X}{n} \quad P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \frac{X}{n} \right)^n = e^{-X/\lambda} \quad (3.3.1)$$

Por lo tanto, si  $\phi_0$  es el flujo del haz incidente, representando el número de partículas que en la unidad de tiempo atraviesan una unidad de área perpendicular a la dirección del haz, y  $\phi$  es el flujo de salida (detrás) del blanco delgado de espesor  $X$ , deducimos que están relacionados por medio de la siguiente ecuación

$$\phi = \phi_0 e^{-X/\lambda} \quad (3.3.2)$$

$\lambda$  representa el recorrido libre medio (*mean free path*) de las partículas del haz en el material del blanco<sup>6</sup>. Se puede expresar en términos de la sección eficaz de esta manera<sup>7</sup>:

$$\frac{1}{\lambda} = N\sigma = \frac{\rho N_A}{M_A} \sigma \quad (3.3.3)$$

donde  $N$  es la densidad de átomos blanco (número de átomos por unidad de volumen), que puede expresarse como  $\rho N_A/M_A$ , siendo  $N_A$  el número de Avogadro,  $\rho$  la densidad del blanco y  $M_A$  su masa atómica (en unidades compatibles con las de  $\rho$ , por supuesto).

En lugar de utilizar el espesor del blanco,  $X$ , es habitual usar el *espesor másico*, que se define como  $X_m = X\rho$ , es decir, se trata de la densidad por unidad de superficie. De este modo tendremos

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{X\rho}{\lambda\rho} = \frac{X_m}{\lambda\rho} = \frac{X_m}{\rho} N\sigma = \frac{X_m}{\rho} \frac{\rho N_A}{M_A} \sigma = \frac{X_m N\sigma}{M_A} \quad (3.3.4)$$

<sup>5</sup>Blanco delgado quiere decir que a cada núcleo del blanco está llegando aproximadamente el mismo flujo de partículas del haz. Si el blanco es demasiado grueso podría ocurrir que las partículas del haz fuesen completamente absorbidas en el interior del blanco, de modo que sobre los núcleos de la parte posterior de este último ya no incidiría ninguna partícula del haz.

<sup>6</sup>Podemos comparar esto con la ley de exponencial de la desintegración radiactiva  $N = N_0 e^{-t/\tau}$ , donde  $\tau$  es la vida media, que en el contexto actual equivaldría al recorrido libre medio, y  $t$  es el tiempo transcurrido (distancia temporal), que en el contexto actual equivaldría a distancia física recorrida. El inverso de  $\tau$  es la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo, y ahora hablaríamos de la probabilidad de interacción por unidad de longitud espacial, no temporal.

<sup>7</sup>Supongamos que una partícula atraviesa una región cúbica de lado  $L$  en el blanco. Calculemos la probabilidad de que sufra alguna interacción en ese viaje. Supondremos que la trayectoria de la partícula es paralela a una de las caras en las posiciones de los núcleos, donde  $\sigma$  es obviamente la sección eficaz total de interacción con un núcleo. El área total cubierta por las secciones eficaces de todos los núcleos del cubo es  $A_\sigma = NL^3\sigma$ , mientras que el área total que el cubo presenta en la dirección perpendicular a la del avance de la partícula es  $A_t = L^2$ . el cociente entre ambas nos da la probabilidad de que la partícula interaccione al travesar el cubo  $P_L = A_\sigma/A_t = NL^3\sigma/L^2$ . La probabilidad de interacción por unidad de longitud es entonces  $P = P_L/L = N\sigma$

También podríamos escribir  $X/\lambda = X_m/\lambda_m$ , siendo  $\lambda_m = M_A/(N_A\sigma) = \lambda\rho$ . Una de las aplicaciones de las reacciones nucleares inducidas por el hombre consiste en la creación de radioisótopos para aplicaciones médicas o industriales.

### 3.3.2. Dispersión de Coulomb

Cuando las partículas que intervienen en la reacción tienen carga eléctrica, se producirá siempre una dispersión del proyectil en el campo coulombiano del blanco: a esto se le denomina dispersión de Coulomb. En reacciones de partículas cargadas a baja energía el proceso dominante que tendrá lugar será la **dispersión elástica coulombiana** o dispersión de Rutherford, cuya sección eficaz hemos visto ya en otro capítulo:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E^2}{|\mathbf{q}c|^4} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{(4E)^2 \sin^2(\theta/2)} \quad (3.3.5)$$

Obsérvese que esta sección eficaz decrece rápidamente con la energía del proyectil ( $E$ ) y con ángulo de dispersión ( $\theta$ ). Cuando la energía sea suficientemente alta, podremos tener además una **dispersión inelástica coulombiana**, que también se llama excitación coulombiana. En este caso el núcleo final se encuentra en un estado que luego decae rápidamente mediante la emisión de fotones  $\gamma$ .

### 3.3.3. Dispersión nuclear

En el caso de que el proyectil no tenga carga eléctrica (como en dispersión de neutrones), no será posible, obviamente, que exista dispersión coulombiana. Se produce entonces la denominada dispersión nuclear, que tiene lugar en el campo nuclear no coulombiano<sup>8</sup> creado por el núcleo. Para partículas cargadas, aparte de la dispersión coulombiana podrá existir dispersión nuclear siempre que la energía del proyectil sea lo suficientemente alta como para vencer la barrera coulombiana del núcleo.

En una reacción de tipo  $A + a \rightarrow B + b$ , la medida directa de la cantidad de partículas  $b$  emergentes a través de un pequeño intervalo de ángulo sólido dado se hace, obviamente, en el sistema de referencia del laboratorio. Sin embargo, para comparar los resultados experimentales con las predicciones teóricas es necesario que los traslados al sistema de referencia del centro de masas de las partículas *entrantes*  $A, a$ . Resulta de especial utilidad, por ejemplo, graficar las llamadas **funciones de excitación** que muestran la dependencia de la sección eficaz  $d\sigma/d\Omega$ , respecto a la energía cinética del canal entrante en el sistema centro de masas, (que en la aproximación no relativista es  $m_A T_a/(m_A + m_a)$ ), para la observación de una partícula concreta  $b$  dispersada en cierto  $d\Omega$ .

La **distribución angular** de la emisión de la partícula seleccionada  $b$  en el sistema centro de masas con respecto a la dirección de incidencia contiene información sobre el cambio de momento angular y paridad de los estados inicial y final de los núcleos, puesto que el momento angular y la paridad se conservan en reacciones nucleares gobernadas por la interacción fuerte y la electro-magnética.

<sup>8</sup>La fuerza nuclear fuerte es la interacción fundamental entre los quarks, y la que de alguna forma mantiene unidos a los nucleones en el núcleo y crea ese campo nuclear no coulombiano con el que interaccionan los proyectiles masivos sin carga eléctrica.

### 3.3.4. Formalismo de dispersión

Para simplificar el tratamiento vamos a considerar la dispersión de dos partículas sin espín, y despreciamos su interacción coulombiana (si son partículas cargadas), es decir, consideramos exclusivamente el potencial nuclear. Escribamos la función de ondas del sistema de dos partículas como  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ . Como bien sabemos, el problema lo podemos tratar en el centro de masas como, de tal modo que hacemos el cambio:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \quad M = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.3.6)$$

Entonces es sencillo de ver que la función de ondas  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$  viene dada por la ecuación de Schrödinger de tal modo que:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(r) \right) \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) \quad (3.3.7)$$

Estamos suponiendo además que el potencial es estático y depende únicamente de la distancia relativa entre las dos partículas. Los operadores  $\nabla_{\mathbf{R}}^2$  y  $\nabla_{\mathbf{r}}^2$  implican la diferenciación respecto al centro de masas y las coordenadas relativas, respectivamente. Al igual que sucede en la resolución de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, podemos aplicar ahora la técnica de separación de variables dos veces consecutivas: una para separar la dependencia temporal de la espacial, y otra para separar la dependencia en las coordenadas relativas de la dependencia de las coordenadas en el centro de masas. Se obtiene lo siguiente:

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})v(\mathbf{R}) \exp \left[ -\frac{i(E_r + E_R)t}{\hbar} \right] \quad (3.3.8)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2 u(\mathbf{r}) + V(r)u(\mathbf{r}) = E_r u(\mathbf{r}) \quad (3.3.9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 v(\mathbf{R}) = E_R v(\mathbf{R}) \quad (3.3.10)$$

En estas ecuaciones  $E_r$  es la energía de las dos partículas asociada a su movimiento relativo, es decir, su energía en el sistema centro de masas.  $E_R$  es la energía correspondiente al movimiento del centro de masas, que está descrito por una ecuación idéntica al de una partícula libre, y por tanto no es de interés.

Obsérvese que la ecuación (3.3.9), que describe el movimiento relativo de las dos partículas, es idéntica a la ecuación que describiría la dispersión de una partícula de masa  $\mu$  y energía  $E_r$  por un potencial de dispersión fijo  $V(r)$ . Es precisamente  $E_r$  la que está *disponible* para la formación de estados excitados o de nuevas partículas en la reacción, tal como hemos visto en las secciones anteriores.

La dispersión queda determinada por el estudio del comportamiento asintótico de  $u(r, \theta, \phi)$  en la región en que  $V(r) = 0$ , es decir, cuando las partículas se encuentran infinitamente separadas<sup>9</sup> En esta situación la ecuación (3.3.9) tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad k^2 = \frac{2\mu E_r}{\hbar^2} \quad (3.3.11)$$

<sup>9</sup>La separación real no necesita ser macroscópicamente grande, porque la interacción nuclear es de muy corto alcance.



que se trata de la ecuación para una partícula libre de masa  $\mu$  y energía  $E_r$ , que *es precisamente lo que esperamos para el estado inicial*, es decir, una partícula incidiendo con cierta masa y momento sobre el centro dispersor. Obviamente, en un experimento real tendremos un haz de partículas incidente con un momento  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  definido en un intervalo de cierta anchura. Supondremos que ese haz se propaga en el eje  $z$ , y que por tanto el estado inicial de las partículas incidentes se hace mediante una onda plana en el sentido positivo del eje  $z$  con un vector de propagación de módulo  $k^2 = 2\mu E_r/\hbar^2$ .

Después de la colisión tendremos, además de la onda plana, una onda esférica emergente del centro dispersor, de tal manera que podemos escribir la función de ondas en el estado final como una superposición de las dos:

$$u_f = A \left[ e^{ikz} + \frac{1}{r} f(\theta, \phi) e^{ikr} \right] \quad (3.3.12)$$

El segundo término es una onda esférica emergente del centro dispersor, y representa la partícula dispersada. Su amplitud depende de los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$ , y es inversamente proporcional al radio  $r$ , puesto que el flujo debe decrecer con el inverso del cuadrado de la distancia. Se puede comprobar fácilmente que la función de ondas (3.3.12) verifica asintóticamente ( $V(r) = 0$ ) la ecuación (3.3.9) para cualquier valor de  $f(\theta, \phi)$ .

Para ver el significado físico de la función angular  $f(\theta, \phi)$  y el coeficiente  $A$  debemos calcular el flujo incidente y dispersado. El flujo se calcula a partir de la corriente de probabilidad dada por <sup>10</sup>

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (3.3.13)$$

Dado que el flujo  $\phi$  a través de cierta superficie se define como

$$\phi = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \quad d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{n}} ds \quad (3.3.14)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario normal al elemento diferencial de área  $ds$ , sustituyendo cada uno de los términos de la ecuación (3.3.12) en esta expresión obtenemos que el flujo incidente y el saliente:

$$\phi_i = v|A|^2 \quad \phi_f = \frac{v|A|^2}{r^2} |f(\theta, \phi)|^2 \quad (3.3.15)$$

donde  $v = \hbar k/\mu$  en este caso. En estas ecuaciones la elección de  $A$  no es relevante, ya que la sección eficaz se expresa en términos de cociente entre flujo de salida y el flujo de entrada. Podemos elegirlo de tal manera que el flujo incidente sea la unidad, esto es,  $|A| = 1/\sqrt{v}$ .

Para proceder ahora hacia el cálculo de la sección eficaz diferencial de dispersión hemos de considerar el flujo emergente a través del área subtendida por el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$  en el centro dispersor, esto es,  $r^2 d\Omega$  ( $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ ). La sección eficaz diferencial es entonces:

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{\phi_f r^2}{\phi_i} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (3.3.16)$$

A la función  $f(\theta, \phi)$  se le conoce como **amplitud de dispersión** (*scattering amplitude*), porque la función de ondas dispersada viene dada por

<sup>10</sup>Recuérdese que de la ec. de Schrödinger para una partícula libre puede derivarse la ecuación de continuidad  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , donde  $\mathbf{j}$  viene dada por la ec. (3.3.13). Para una onda plana esta corriente sería  $\mathbf{j} = |A|^2 \hbar \mathbf{k}/m$ . En general se sobreentiende que estamos hablando de la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ , de tal modo que escribimos directamente  $j = |A|^2 \hbar k/m = |A|^2 v$  donde  $v = \hbar k/m$ .

$$u_{sc} = u_f - u_i = \frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta, \phi) \quad (3.3.17)$$

### Ondas parciales

Es imposible seleccionar un único valor del momento angular  $\ell\hbar$  de la partícula incidente respecto al centro de dispersor. En la realidad tendremos por partículas incidiendo con momentos angulares distintos, y en esta situación conviene reemplazar la onda plana incidente por la superposición de una serie equivalente de ondas esféricas, cada una con momento angular  $\ell\hbar$  definido. Dado que  $V(r)$  es esféricamente simétrico, y que las partículas no tienen espín, los armónicos esféricos no tendrán dependencia con  $\phi$ . La expansión de una onda plana en función de ondas esféricas está relacionada con las funciones de Bessel radiales  $j_\ell(kr)$ :

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} i^\ell j_\ell(kr) Y_\ell^0(\theta) \quad (3.3.18)$$

A esta ecuación se le denomina como **expansión en ondas parciales**, porque describe la función de ondas como una superposición infinita donde a cada término u onda parcial le corresponde un valor específico del momento angular  $\ell\hbar$ . Dado que los armónicos esféricos  $Y_\ell^0$  vienen dados por

$$Y_\ell^0 = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) \quad (3.3.19)$$

donde  $P_\ell$  son los polinomios de Legendre. Escribimos la onda plana como

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta) \quad (3.3.20)$$

El comportamiento asintótico de la expresión tiene que ver con que las funciones de Bessel se comportan como senos cuando su argumento va a infinito. Más concretamente:

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} J_\ell(kr) = \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad (3.3.21)$$

Recordando que el seno podemos expresarlo como la combinación de exponenciales complejas tenemos que:

$$u_i = \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos \theta) \frac{1}{2i} \left( e^{i[kr - (\ell\pi/2)]} - e^{-i[kr - (\ell\pi/2)]} \right) \quad (3.3.22)$$

En esta última fórmula podemos ver una serie de ondas esféricas que emerge  $e^{i[kr - (\ell\pi/2)]}$  y otra que converge  $e^{-i[kr - (\ell\pi/2)]}$ , cada una con un momento angular definido  $\ell\hbar$ . La onda plana incidente se puede considerar entonces como una superposición coherente de estas dos series de ondas esféricas.

Analicemos ahora lo que sucede después de la colisión. El principio de causalidad nos lleva a afirmar que la interacción con el centro dispersor sólo puede modificar la serie de ondas esféricas emergentes. Esta modificación con el centro dispersor elástica con cierta distribución angular, y en el segundo y tercero tenemos una dispersión inelástica. Un cambio, en la amplitud indica que tendremos un cambio en la magnitud del flujo, es decir, tendremos posiblemente menos partículas saliendo que entrando. Hay que tener en cuenta que, sin embargo, que tanto la función de ondas incidente como la dispersada representan sólo a partículas con momento  $\hbar k$ , de tal manera que si

salen menos partículas con momento  $\hbar k$  de las que entran, entonces debe suceder que aparecen partículas en el estado final con valores del módulo distintos a los de entradas. Esto es, en efecto, la dispersión inelástica, en la cual tiene lugar un cambio en el módulo del momento de la partícula saliente (que incluso puede tener naturaleza distinta a la entrante), mientras que en la dispersión elástica sólo cambia la dirección del momento<sup>11</sup>.

Escribamos entonces la función de onda final estacionaria a grandes distancias del centro de la siguiente manera:

$$u_f = \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) \frac{1}{2i} \left( a_{\ell} e^{i[kr - (\ell\pi/2)]} - e^{i[kr - (\ell\pi/2)]} \right) \quad (3.3.23)$$

donde los  $a_{\ell}$  son constantes complejas que dan cuenta del efecto del potencial dispersor sobre la  $\ell$ -ésima. La *parte real* de  $a_{\ell}$  proporciona el cambio de amplitud de la onda dispersada, mientras que la parte imaginaria de  $a_{\ell}$  proporciona el cambio de fase. Así podemos obtener que:

$$u_f - u_i = \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left( \frac{a_{\ell} - 1}{2i} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (3.3.24)$$

Por lo tanto

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left( \frac{a_{\ell} - 1}{2i} \right) P_{\ell}(\cos(\theta)) \quad (3.3.25)$$

Como era de esperar, esto nos lleva a que la sección eficaz diferencial sea

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \left( \frac{a_{\ell} - 1}{2i} \right) P_{\ell}(\cos(\theta)) \right|^2 \quad (3.3.26)$$

En la función de ondas dispersada,  $u_{sc}$ , estamos considerando sólo las ondas parciales con un valor de  $k$  igual a la de la onda incidente, por lo tanto esta sección eficaz diferencial es la que corresponde a la dispersión elástica. La integral sobre el ángulo sólido nos proporcionará la **sección eficaz elástica total**, tal que:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) |1 - a_{\ell}|^2 \quad (3.3.27)$$

La constante compleja  $a_{\ell}$  suele expresarse en términos de una amplitud real  $\eta_{\ell}$  denominada **parámetro de inelasticidad** (porque su desviación respecto de la unidad nos indica la importancia relativa de la sección eficaz inelástica respecto a la elástica) y una fase  $\delta_{\ell}$  denominada **desfaje** (*phase shift*). Es decir,

$$a_{\ell} = \eta_{\ell} e^{2i\delta_{\ell}} \quad 0 \leq \eta_{\ell} \leq 1$$

La denominación de desfaje, es, en efecto, apropiada, porque si sustituimos esta parametrización de  $a_{\ell}$  en la expresión de  $u_f$  dada por (3.3.23) vemos que efectivamente

<sup>11</sup>Estamos considerando aquí la colisión de una partícula muy ligera con otra muy pesada (un núcleo), de tal manera que la energía de retroceso del blanco sea despreciable. En caso contrario habrá un cambio en el módulo del momento de la partícula incidente. Por otro lado, si consideramos la dispersión de dos partículas en el sistema centro de masas, en una colisión elástica el módulo del momento relativo entre ellas ( $\hbar k$ ) se mantiene constante, y sólo cambia si la colisión es inelástica.

$$u_f = \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) \frac{1}{2i} \left( \eta_{\ell} e^{i[kr - (\ell\pi/2)] + 2\delta_{\ell}} - e^{i[kr - (\ell\pi/2)]} \right) \quad (3.3.28)$$

lo cual muestra que hay un cambio de fase de  $2\delta_{\ell}$  en la  $\ell$ -ésima onda parcial emergente. En el caso de dispersión elástica tenemos que  $\eta_{\ell} = 1$  (no hay cambio en el módulo del momento) y por lo tanto:

$$f(\theta) = \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) \left( \frac{e^{2i\delta_{\ell}} - 1}{2i} \right) \quad (3.3.29)$$

Por lo que haciendo una sustitución en (3.3.27) vemos que la **sección eficaz elástica** es:

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2(\delta_{\ell}) \quad (3.3.30)$$

Si la dispersión es elástica esta fórmula proporciona también, claro está, la sección eficaz total. Vemos que la sección eficaz elástica asociada a un valor concreto de  $\ell$  adquiere un valor máximo para  $\delta_{\ell} = \pi/2$ , se dice entonces que se tiene **resonancia**, y ese valor máximo es:

$$(\sigma_{\text{el}}^{\text{máx}})_{\ell \text{ fijo}} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \quad (3.3.31)$$

En el caso de que exista dispersión inelástica, es decir que  $\eta_{nl} < 1$  (cambia el módulo del momento) entonces la ecuación (3.3.30) ya no proporciona el valor de la sección eficaz total, que debemos calcular como la suma de la parte elástica más la inelástica. Si la amplitud de la onda parcial  $\ell$ -ésima que emerge del centro dispersor se ve reducida en un factor  $|a_{\ell}|^2$ , entonces la sección eficaz inelástica será proporcional al factor  $(1 - |a_{\ell}|^2)$  para esa onda  $\ell$ -ésima. Deducimos entonces que la **sección eficaz inelástica** es

$$\sigma_{\text{inel}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (1 - |a_{\ell}|^2) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (1 - \eta_{\ell}^2) \quad (3.3.32)$$

La sección eficaz inelástica máxima para una onda parcial concreta se alcanza cuando  $\eta_{\ell} = 0$ . Su valor es

$$(\sigma_{\text{inel}}^{\text{máx}})_{\ell \text{ fijo}} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \quad (3.3.33)$$

La **sección eficaz total** será

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (1 - \text{Re}[a_{\ell}]) \quad (3.3.34)$$

Hemos visto entonces que si se cumple  $|a_{\ell}| = 1$ , entonces la dispersión inelástica es nula. Podemos tener dispersión inelástica únicamente. Lo contrario, sin embargo, no es cierto. Es imposible que en una reacción se anule la dispersión elástica y tener solo dispersión inelástica. La

dispersión elástica existe siempre<sup>12</sup>, porque si tomamos un  $a_\ell$  de tal modo que  $\sigma_{\text{inel}}$  no sea nula para esa onda parcial, entonces para  $\sigma_{\text{el}}$  es también no nula para esa misma onda parcial. En otras palabras, *si existe absorción de alguna onda parcial, entonces existe también una dispersión elástica asociada a la misma onda parcial*. A este fenómeno se le denomina **dispersión difractiva** (*diffraction scattering*).

La dispersión difractiva es un fenómeno bien conocido en óptica, donde se ve que la sombra que proyecta un obstáculo circular cuando es iluminado por un láser no es completamente oscura, presenta un patrón de difracción con una serie de máximos y mínimos. En el centro de la región de sombra aparece un máximo llamado punto de Poisson, justo detrás del disco, a una cierta distancia mínima del mismo.

### 3.3.5. Teorema Óptico

La sección eficaz total está relacionada con la parte imaginaria de la amplitud de dispersión adelante (*forward scattering amplitude*), es decir, con la parte imaginaria de  $f(0)$ . Recordemos la expresión de la amplitud de dispersión:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(a_\ell - 1)P_\ell(\cos \theta) \quad (3.3.35)$$

Para la dispersión hacia adelante tenemos que  $\theta = 0$  y  $P_\ell(1) = 1$ , con lo que

$$\text{Im}[f(0)] = \frac{1}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \text{Im}[i(1 - a_\ell)] = \frac{1}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)(1 - \text{Re}[a_\ell]) \quad (3.3.36)$$

si comparamos esto con la expresión anterior vemos que

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(0)] \quad (3.3.37)$$

lo que constituye el denominado **teorema óptico**.

### 3.3.6. Fórmula de Breit-Wigner

Vamos a estudiar ahora el comportamiento de la sección eficaz en las proximidades de una resonancia. Hemos visto que la amplitud de dispersión viene dada por

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \eta_\ell \left( \frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2i} \right) P_\ell(\cos \theta) \quad (3.3.38)$$

Resulta conveniente definir la amplitud de la onda parcial  $\ell$ -ésima en función de la energía total del sistema centro de masas

<sup>12</sup>Esto se puede entender con la analogía de la difracción óptica: si existe dispersión inelástica de tal modo que estamos *sacando* partículas del haz, entonces tenemos una especie de *zona oscura* detrás del núcleo blanco, y por tanto tiene que existir algún efecto de difracción de las partículas incidentes sobre esa zona oscura u obstáculo. Dicho de otra forma: es imposible que no exista difracción cuando las partículas inciden sobre un obstáculo. Ese obstáculo es, en efecto, el centro dispersor del núcleo blanco.

$$T_\ell(E) = \eta_\ell \left( \frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2i} \right) \eta_\ell e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell \quad (3.3.39)$$

Vamos a estudiar el comportamiento de  $T_\ell(E)$  frente a  $E$ . En el caso de que la **dispersión** sea **elástica** tendremos que  $\eta_\ell$ , de tal modo que

$$T_\ell(E) = e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell) = \frac{\sin \delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{1}{\cot \delta_\ell - i} \quad (3.3.40)$$

La condición de resonancia la tendremos cuando  $\delta_\ell \rightarrow \pi/2$ , de tal manera que cerca de la resonancia tenemos  $\cot(\delta_\ell) = 0$ . En consecuencia, cuando la energía total del sistema centro de masas se acerque a la energía de la resonancia, que denotaremos por  $E_R$ , tiene sentido hacer un desarrollo en serie de Taylor de la  $\cot \delta_\ell$  en las proximidades de  $E_R$ , o lo que es lo mismo, de  $\delta_\ell = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} \cot \delta_\ell(E) = & \cot \delta_\ell(E_R) + (E - E_R) \left( \frac{d \cot \delta_\ell}{dE} \right)_{E=E_R} + \\ & + \frac{1}{2} (E - E_R)^2 \left( \frac{d^2 \cot \delta_\ell}{dE^2} \right)_{E=E_R} + \dots \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Cuando  $E = E_R$  (equivalente a  $\delta_\ell = \pi/2$ ) la derivada de la cotangente coincide directamente con la derivada de la fase cambiada de signo:

$$\left( \frac{d \cot \delta_\ell}{dE} \right)_{E=E_R} = \left( -\frac{1}{\sin^2 \delta_\ell} \frac{d\delta_\ell}{dE} \right) = - \left( \frac{d\delta_\ell}{dE} \right) \quad (3.3.42)$$

Definimos ahora la **anchura**  $\Gamma$  como

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\delta_\ell}{dE} \right) \quad (3.3.43)$$

de tal modo que se verifica que

$$\left( \frac{d \cot \delta_\ell}{dE} \right)_{E=E_R} = -\frac{2}{\Gamma} \quad (3.3.44)$$

Dado que  $\cot \delta_\ell(E_R) = 0$ , substituyendo (3.3.44) en la expansión de Taylor (3.3.41)

$$\cot \delta_\ell(E) \approx -\frac{(E - E_R)}{\Gamma/2} \quad (3.3.45)$$

En consecuencia la amplitud de dispersión elástica para la onda parcial  $\ell$ -ésima sería:

$$T_\ell(E) = \frac{\Gamma/2}{(E_R - E) - i(\Gamma/2)} \quad (3.3.46)$$

Teniendo en cuenta que en las dispersiones elásticas  $T_\ell(E) = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$ , se verificará que  $\sin^2 \delta_\ell = |T_\ell(E)|^2$  que substituyendo en la ecuación (3.3.30) nos da

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell(E)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{(\Gamma/2)^2}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (3.3.47)$$

Dado que la dispersión de partículas de espín cero el valor máximo para la dispersión elástica es  $\sigma_{\text{el}}^{\text{máx}} = 4\pi(2\ell + 1)/k^2$ , y ocurre  $E = E_R$ . El cociente entre este valor máximo y su valor a cualquier otra energía será

$$\frac{\sigma_{\text{el}}(E)}{\sigma_{\text{el}}^{\text{máx}}} = \frac{(\Gamma/2)^2}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (3.3.48)$$

A partir de esta fórmula se ve que para las energías  $E = E_R \pm (\Gamma/2)$  el cociente anterior es 1/2, por lo tanto la definición que hemos dado de  $\Gamma$  tiene perfecto sentido como la anchura a mitad de altura del máximo en la curva de resonancia. Esta curva de resonancia se conoce como *curva de Breit-Wigner* puede ser el oscilador armónico forzado, circuitos de corriente alterna, absorción resonante de radiación... Hemos estudiado la dispersión de una partícula sin espín contra un blanco sin espín. Para generalizar el resultado para que las partículas interaccionantes tengan espín diferente de cero, simplemente dividimos por el número de subestados iniciales con distinta tercera componente de espín, esto es, substituir  $2\ell + 1$  por el factor estadístico más general:

$$g(I) = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_A + 1)} \quad \text{donde} \quad \mathbf{I} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_A + \boldsymbol{\ell} \quad (3.3.49)$$

de modo que

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{\pi}{k^2} g(I) \frac{\Gamma_{\text{el}} \Gamma_{\text{el}}}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (3.3.50)$$

expresión conocida como **fórmula de Breit-Wigner** que describe el comportamiento de la sección eficaz en las proximidades de una **resonancia aislada**<sup>13</sup>. Usando el principio de incertidumbre  $\Delta t \sim \hbar/2\Gamma$  podremos estimar la vida media de las resonancias.

A cada modo de producción o desintegración de la resonancia se le denomina *canal*. A cada modo de producción o desintegración de la resonancia se le suele llamar *canal*. Al modo específico de formación que estamos considerando se le llama **canal de entrada** (*entrance channel*), y al de desintegración **canal de salida** (*exit channel*). El **canal elástico** corresponde a la situación  $a + A \rightarrow a + A$ , mientras que el resto de los canales a través de los que se puede desintegrar la resonancia son, obviamente, los canales inelásticos, que podemos agrupar genéricamente con el término de **canal inelástico**. Es obvio que la categoría (elástica, inelástica) en la que englobamos a un canal concreto de salida depende de cuál sea el canal de entrada que estamos considerando. Dado que normalmente tenemos varios canales de salida:

$$\sigma_{lj} = \frac{\pi}{k^2} g(I) \frac{\Gamma_{\text{in}} \Gamma_{\text{out}}}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad \Gamma_{\text{tot}} = \sum_j \Gamma_j^{\text{out}} \quad (3.3.51)$$

## 3.4. Mecanismos de reacciones

### 3.4.1. Núcleo compuesto

En 1932, tras el descubrimiento del neutrón, se empezaron a usar en reacciones nucleares. Las observaciones experimentales muestran que los neutrones térmicos tienen una alta probabilidad de ser absorbidos por una gran variedad de núcleos, y además se observan resonancias relativamente estrechas (vida larga media), que luego pueden desintegrarse mediante emisión  $\gamma$ . Niels Bohr

<sup>13</sup>En el caso de que no se trate de una resonancia aislada (existen varias resonancias energéticamente próximas) será necesario tener en cuenta los correspondientes estados de interferencia. Esta fórmula también es válida en el régimen relativista.

propuso en 1936 el mecanismo del **núcleo compuesto**, basado en el modelo de la gota líquida, y se consideraba que la reacción tiene lugar a través de un estado nuclear intermedio, o núcleo compuesto, que es una mezcla de la partícula incidente y el núcleo blanco. De acuerdo con esto, una reacción que procediese según el mecanismo de núcleo compuesto tendría lugar en dos etapas:



donde  $C^*$  representa el estado intermedio de núcleo compuesto. En este escenario la partícula proyectil,  $a$ , incidiría sobre el núcleo blanco con un pequeño parámetro de impacto e iría perdiendo energía a través de sucesivas colisiones con los nucleones del blanco hasta que al final toda su energía cinética se distribuiría estadísticamente entre todos los nucleones de  $A$ . Eventualmente las fluctuaciones estadísticas harían que un nucleón reuniese suficiente energía como para escapar del núcleo, como si fuera la evaporación de un líquido. Siguiendo un poco esta analogía, si la energía comunicada al núcleo fuese lo suficientemente alta podrán evaporarse varios nucleones, lo cual efectivamente se observa. Esto implica que la reacción nuclear tiene lugar en dos etapas independientes, primero la formación del núcleo compuesto y luego la desintegración del mismo. El núcleo compuesto  $C^*$  puede formarse mediante diversas reacciones y desintegrarse de diversos modos, por lo que el modelo de núcleo compuesto predice que el modo de desintegración *no* depende del canal de entrada. Esto es algo que puede contrastarse experimentalmente.

Si la reacción procede a través de un mecanismo de núcleo compuesto tiene cierto sentido examinar con más detalle el espectro energético de ese núcleo intermedio. En contra de lo que uno podría estar tentado a deducir, los resultados experimentales muestran que es posible encontrar estados discretos a una energía superior a la energía de separación. Si la energía cinética del canal de entrada entre los niveles de energía de uno de los estados resonantes del compuesto,  $E_R$ , y la separación entre los niveles es mucho mayor que su anchura, entonces la sección eficaz de formación de la resonancia vendrá dada por la ecuación de Breit-Wigner (3.3.50).

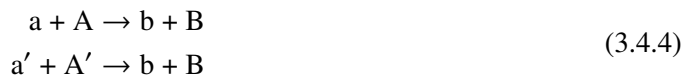
Supongamos una energía<sup>14</sup> del canal de entrada en el centro de masas,  $E$ , está cerca de la energía de una de esas resonancias aisladas. Entonces la sección eficaz de formación del núcleo compuesto, según el canal  $a + A \longrightarrow C^*$ , vendrá dada por una ecuación de Breit Wigner.

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} g(I) \frac{\Gamma_a \Gamma}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (3.4.2)$$

Que sería, en efecto, la sección eficaz de formación de una **resonancia discreta** en el núcleo compuesto. Escribimos por tanto la sección eficaz para el proceso  $a + A \longrightarrow b + B$  como,

$$\sigma_{ab} = \frac{\pi}{k^2} g(I) \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (3.4.3)$$

Si consideramos la producción de la resonancia mediante dos canales de entrada distintos y su desintegración en el mismo canal, tendríamos



con lo cual,

<sup>14</sup>En colisiones relativistas, esta energía es la energía relativista total del canal de entrada en el sistema del centro de masas. En el caso de reacciones nucleares de baja energía, con una partícula proyectil ligera y un núcleo blanco pesada, se suele sustituir simplemente esta energía relativista total por la energía cinética del proyectil en el sistema laboratorio.



$$\sigma_{ab} = \frac{\pi}{k^2} g(I) \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad \sigma_{a'b} = \frac{\pi}{k^2} g(I) \frac{\Gamma_{a'} \Gamma_b}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (3.4.5)$$

y por lo tanto su cociente es una constante independiente de la energía,

$$\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{a'b}} = \frac{g(I)}{g'(I)} \frac{\Gamma_{a'}}{\Gamma_a} \quad (3.4.6)$$

Vemos entonces que el modelo del núcleo compuesto predice de modo natural que la probabilidad de desintegración del núcleo formado a través de un canal específico no depende en concreto del canal de entrada.

### 3.4.2. Combinaciones

En las reacciones directas la partícula proyectil interacciona con uno o unos pocos nucleones cerca de la superficie del núcleo. Se tratan de procesos muy rápidos, con tiempos característicos de  $\sim 10^{-22}$  segundos. También se conocen como procesos periféricos. La probabilidad de que la reacción suceda aumenta con la energía del proyectil. Un nucleón de 1 MeV tiene una longitud de onda de De Broglie del orden de 4 fermis y no interacciona con los nucleones individuales del núcleo blanco, con lo cual la interacción con unos pocos nucleones cerca de la superficie es más que probable. Es posible que tanto el mecanismo de núcleo compuesto como el de reacción directa contribuyan a una misma reacción concreta. Podemos citar dos aspectos que nos permiten distinguir las contribuciones de estos dos mecanismos y decidir cual de ellos es más importante en una reacción dada:

- Los procesos directos tienen un tiempo característico de unos  $\sim 10^{-22}$  segundos, mientras que un proceso de núcleo transcurre durante un tiempo de unos  $\sim 10^{-15}$  segundos. Existe técnicas experimentales para distinguir dos diferentes magnitudes temporales.
- La distribución angular de los productos en una reacción directa está normalmente picada en ciertos lugares, mientras que la correspondiente a una reacción de núcleo compuesto es generalmente isótropa.

Una dispersión inelástica puede proceder a través de una reacción directa o de núcleo compuesto, y sus probabilidades relativas dependen, entre otras cosas, de la energía del proyectil. Además, en la mayoría de los casos necesitamos superar la barrera de Coulomb para que los participantes se acerquen a distancias típicas de la fuerza nuclear. Algunos tipos de reacciones directas son:

- **Stripping:** se transfieren nucleones del proyectil al blanco. Ejemplo:



- **Pick-up:** se transfieren nucleones del blanco al proyectil. Ejemplo:



- **Intercambio de carga:** hay transferencia en los dos sentidos. Ejemplo:

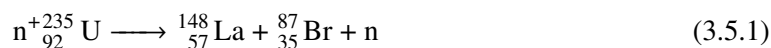


- **Knock-out:** se arranca un nucleón sin transferencia. Ejemplo:



### 3.5. Fisión

La fisión inducida por neutros se descubrió en los años 1934-1939 como un resultado de los experimentos que pretendían crear elementos transuránicos mediante el bombardeo de Uranio con neutrones. Un ejemplo concreto de fisión inducida del  $^{235}\text{U}$  por la absorción de neutróns podría ser:



La energía liberada en esta reacción es enorme comparable con la que se libera en otro tipo de procesos no nucleares.

#### 3.5.1. Fisión según el modelo de la gota líquida

#### 3.5.2. Reacciones en cadena

La fisión deja a los núcleos hijos excitados, que suelen desexcitarse mediante la emisión (*evaporación*) de neutrones. Estos productos de fisión son ricos en neutrones y se desintegran luego por emisión  $\beta^-$ . Los neutrones emitidos en el proceso de fisión pueden a su vez generar nuevas fisiones. Como dato, la fisión  $^{235}\text{U}$  genera un promedio de unos 2.5 neutrones. Resulta útil definir el siguiente parámetro para obtener una clasificación de las reacciones:

$$k = \frac{\text{Número de neutrones producidos en la etapa (n+1) de fisión}}{\text{Número de neutrones producidos en la etapa (n) de fisión}} \quad (3.5.2)$$

De acuerdo con  $k$  tenemos las siguientes posibilidades:

- $k < 1$ . La reacción transcurre en modo *modo subcrítico*. No puede continuar indefinidamente y en algún momento se detiene.
- $k = 1$ . La reacción transcurre en modo *crítico*. El número de neutrones disponibles para inducir fisiones permanece constante, de tal modo que la reacción puede continuar indefinidamente al mismo ritmo. Es el modo adecuado de operación sostenida en un reactor nuclear productor de energía.
- $k > 1$ . La reacción transcurre en modo *super crítico*. El número de neutrones disponibles crece exponencialmente con el tiempo, conduciendo a una liberación explosiva de energía.

### 3.6. Fusión

La mayor dificultad para lograr la fusión nuclear a gran escala consiste en mantener el material fusible confinado a altas temperaturas durante el tiempo suficiente. Hasta el momento se está investigando en dos métodos: el confinamiento magnético y el confinamiento inercial. En el primero se hace circular plasma caliente de núcleos  $^2\text{H}$  y  $^3\text{H}$  en una región confinada por campos electromagnéticos. En el segundo se inyecta luz láser en una pequeña región que contiene el material fusible. En cualquier caso, el aprovechamiento comercial de la energía de fusión parece todavía una posibilidad lejana.

### **3.7. Apéndices**

**3.7.1. Energía cinética clásica en el sistema LAB y en el CM**

**3.7.2. Momento lineal clásico en el sistema LAB y en el CM**

**3.7.3. Energía total relativista en el sistema LAB y en el CM**

**3.7.4. Energía cinética relativista en el sistema LAB y en el CM**

**3.7.5. Momento lineal relativista en el sistema LAB y en el CM**



## Capítulo 4

# Estructura nuclear

### 4.1. Introducción a la estructura nuclear

Un núcleo atómico es un objeto constituido por muchos cuerpos (el Uranio tiene hasta 238 nucleones). Describir las propiedades nucleares a partir de la interacción básica entre esos cuerpos es una tarea formidable y fuera de nuestro alcance en la actualidad por varias razones. En primer lugar la interacción entre dos nucleones no está del entendida desde el punto de vista teórico-conceptual<sup>1</sup>, y en segundo lugar, aunque dispusiéramos de una teoría completa que describiese la interacción en todos sus detalles no podríamos manejar operativamente el difícil problema de la interacción entre muchos cuerpos. Esto nos lleva de modo natural a intentar a describir la estructura nuclear y el espectro de excitaciones a partir de modelos muy simplificados, esto es, modelos construidos a partir de algunas de las propiedades de los núcleos en lugar de las funciones de onda detalladas de cada nucleón. Se utiliza un planteamiento similar en la termodinámica, donde variables colectivas como la presión y la temperatura de un gas sustituyen a las variables cinemáticas de cada uno de sus átomos. A grandes rasgos, podemos clasificar los modelos de estructura nuclear en dos categorías:

- **Modelos de fuerte correlación:** las propiedades nucleares sobre las que se construyen este tipo de modelos se explican como originadas a partir del comportamiento colectivo de los nucleones. Un ejemplo podrían ser los movimientos rotacionales y vibratorios nucleares, que dan lugar a espectros característicos de energía cuantizada. Es obvio que un movimiento rotatorio es un fenómeno creado por un comportamiento colectivo o correlacionado de los nucleones.
- **Modelo de casi nula corrección:** las características nucleares propias de estos modelos se suponen originadas por el comportamiento individual de cada nucleón.

Ninguno de los dos tipos de modelo en su versión extrema pueden explicar todas las propiedades nucleares. Los modelos más realistas tratan con una mezcla de propiedades colectivas e individuales de los nucleones. Un modelo basado exclusivamente en propiedades colectivas será insuficiente para explicar parte de las propiedades nucleares, y es necesario acudir a una cierta mezcla de propiedades colectivas e individuales para conseguir modelos nucleares con un rango de aplicación más interesante.

---

<sup>1</sup>La Cromodinámica Cuántica (QCD) aunque ha superado pruebas experimentales, no permite hacer cálculos predictivos, y mucho menos deducir a partir de ella las características de interacción fuerte entre hadrones.

## 4.2. El modelo de la gota líquida

El modelo de la gota líquida lo hemos aplicado ya en un capítulo anterior para obtener la fórmula semiempírica de masas o fórmula de Weizsäcker, que nos permite calcular las masas y las energías de ligaduras de los núcleos. Una gota de líquido en ausencia de campos gravitatorios (o cualquier otro tipo de campo) adquiere una forma que minimiza la energía positiva de tensión superficial. Esta forma es la forma de la esfera. Una gota de líquido es esencialmente incompresible (su densidad es constante), y por lo tanto su radio será  $R \sim n^{1/3}$ , donde  $n$  es el número de moléculas de la gota. Consideremos que la gota tiene una energía de ligadura<sup>2</sup> que podemos denotar por  $a$ . La energía de ligadura se debe a la interacción de la molécula con sus moléculas vecinas. Estas fuerzas de interacción se anulan a distancias grandes y se hacen repulsivas a distancias cortas comparadas con la distancia intermolecular típica<sup>3</sup>. Si tomamos como cero la energía la situación en la cual todas las moléculas de la gota están infinitamente separadas, podemos expresar la energía de ligadura de la gota (tomada positiva) de la siguiente manera:

$$B = an - 4\pi R^2 T = an - \beta n^{2/3} \quad (R^2 \sim n^{2/3}) \quad (4.2.1)$$

donde  $T$  es la energía de tensión superficial del líquido. Si la gota tuviese una carga eléctrica  $Q$  uniformemente distribuida en todo su volumen debemos añadir un término correspondiente a la energía potencial coulombiana:

$$B = an - \beta n^{2/3} - \frac{\gamma Q^2}{n^{1/3}} \quad (4.2.2)$$

donde  $\gamma$  contiene todas las constantes de la energía coulombiana excepto la dependencia con  $Q$  y  $n$ .

Para obtener la fórmula de Weizsäcker, o fórmula semiempírica de masas, aplicamos estas ideas y algunas otras hipótesis de trabajo que recopilamos aquí:

- Suponemos un núcleo esférico.
- Los nucleones dentro del núcleo se comportan de modo análogo a moléculas en una gota líquida, es decir, fuerzas atractivas de corto alcance los mantienen unidos y fuerzas repulsivas, de todavía más corto alcance, los mantienen alejados unos de otros.
- La densidad nuclear es constante.
- Existe una tendencia a mantener un número de protones muy parecidos al número de neutrones en un núcleo.
- Existe una *fuerza de apareamiento* que favorece la existencia de núcleos con  $Z$  par y  $N$  par.

## 4.3. El modelo de Gas de Fermi

Alrededor de 1948, se comenzó a considerar en serio la evidencia acumulada sobre la existencia de ciertos **números mágicos** para los valores de  $Z$  y  $N$ . La energía de separación de dos protones para secuencias de isótonos ( $N$  constante) graficada como desviaciones de la predicción de la fórmula semiempírica de masas, mostraba unos picos acusados por  $Z = 8, 20, 28, 50, 82$ ; mientras

<sup>2</sup>Las moléculas de la superficie estarán menos ligadas que las interiores, pero este efecto se introduce como una corrección en términos de la tensión superficial.

<sup>3</sup>La interacción fuerte entre nucleones tiene características similares en cierto sentido, como veremos más adelante.

que la energía de separación de dos neutrones para secuencias de isótopos, también graficada como desviaciones de la predicción de la fórmula semiempírica de masas muestra picos para  $N = 8, 20, 28, 50, 82, 126$ . La similitud de estas gráficas con la de algunas propiedades atómicas, como la energía de ionización es sorprendente. Recordemos que estas propiedades atómicas tienen su origen en la formación de *capas cerradas* de electrones moviéndose *independientemente* en un potencial efectivo atómico. Sin resistencia a pesar que los nucleones se pudieran mover independientemente en el núcleo sin interactuar (o apenas interactuando) los unos con los otros, sobre todo debido al éxito del modelo nuclear de la gota líquida en la explicación aproximada de las masas de los núcleos.

Los datos experimentales indican que los nucleones parecen comportarse de dos maneras contradictorias: por un lado, como un grupo de partículas fuertemente interaccionantes en un especie de estado condensado con características similares a las de un líquido, y por otro como un sistema de partículas que apenas interaccionan entre sí, con características propias de un gas. A la hora de comprender estas características aparentemente contradictorias resulta útil introducir la abstracción de **materia nuclear** sin repulsión coulombiana, y tan grande que pudiésemos despreciar los efectos de superficie. Weisskopf fue el primero en tratar de explicar las propiedades de la materia nuclear por medio del modelo del **gas de Fermi**, en completo analogía con el modelo que se usa para explicar las propiedades de conducción eléctrica de los metales considerando un *gas de electrones libres*.

Se supone que cada nucleón se mueve libremente en un pozo de potencial neto atractivo creado por todos los demás nucleones. Este potencial neto tiene una profundidad constante en el núcleo puesto que la distribución de nucleones es constante en esta región, y se aproxima a cero rápidamente en una distancia que coincide con el rango del alcance de la fuerza nuclear fuerte. Cuando el núcleo se encuentra en su estado fundamental todos los nucleones ocupan los niveles más bajos de energía del pozo de potencial y el llenado de niveles se realiza de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. Esto significa que no es posible que exista transferencia de energía (interacción) entre dos nucleones, porque ello supondría desplazarlos de sus niveles energéticos y estamos asumiendo que todos los niveles están ya ocupados<sup>4</sup>. Únicamente sería posible que uno de los nucleones saltase a uno de los niveles de valencia desocupados, pero eso requiere más energía de la habitualmente disponible en el movimiento de los nucleones dentro de un núcleo en su estado fundamental.

Podemos entonces suponer de forma aproximada que los nucleones se encuentran en un pozo esférico de potencial cuyo perfil puede verse esquemáticamente en la figura 4.1. Para un núcleo de  $A \sim 100$  el radio del pozo de potencial sería  $R_c \sim 5.6$  fm, lo cual es suficientemente para evitar que los efectos de superficie sean los dominantes. En este esquema simplificado, el pozo de potencial para los protones no es el mismo que para los neutrones. El de los protones es un poco menos profundo debido a la repulsión coulombiana que ellos sienten y los neutrones no. Además, para los protones tenemos una barrera coulombiana que alza el extremo superior del pozo unas decenas de MeV (nótese la línea roja, que es la región del potencial de protones).

Los nucleones llenarían sus respectivos niveles energéticos en estos pozos de potencial de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli hasta una energía cinética máxima conocida como **energía de Fermi**,  $E_F$ . Esta energía se puede estimar suponiendo un núcleo de volumen  $4\pi R^3/3$  y número de nucleones constituyentes conocido. A la energía de Fermi le corresponde un momento de Fermi dado por  $E_F = p_F^2/2m$ , y un volumen en el espacio de momentos  $V_p = 4\pi p_F^3/3$ , de tal manera que el volumen disponible en el espacio de fases sería:

<sup>4</sup>Un intercambio de niveles entre dos nucleones no representa ninguna interacción, porque los nucleones son indistinguibles.

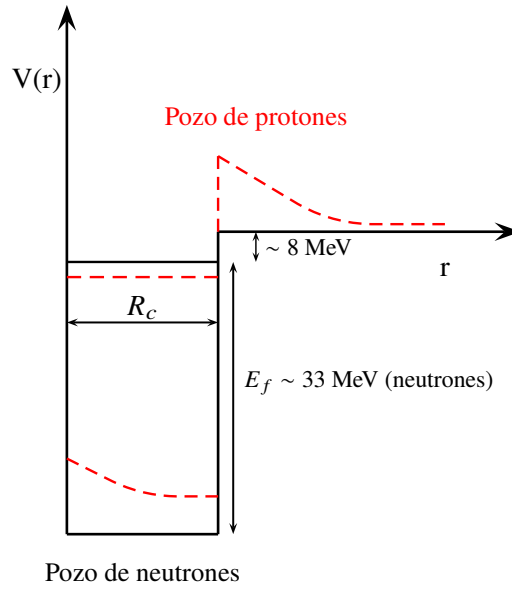


Figura 4.1: Aproximación del potencial por un pozo.

$$V_{\text{ef}} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 (r_0 p_F)^3 A \quad (4.3.1)$$

donde  $r_0 \sim 1.2$  fermis y  $A$  es el número másico. Ahora bien, de acuerdo con el principio de Heisenberg el mínimo volumen en el espacio de fases que se puede asociar a un estado físico de cualquier sistema es  $V_{\text{ef-min}} \sim h^3$  (siendo  $h$  la constante de Planck), por lo tanto el número de nucleones que se puede acomodar en el volumen del espacio de fases hasta el nivel de Fermi, teniendo en cuenta el factor 2 debido a fermiones de espín 1/2 será:

$$n_F = \frac{2}{h^3} V_{\text{ef}} = \frac{4}{9\pi} \left(\frac{r_0 p_F}{h}\right)^3 A \quad (4.3.2)$$

Si ahora tomamos en consideración la situación habitual en que  $Z = N = A/2$  y por lo tanto  $n_F = A/2$  entonces conseguimos la siguiente estimación para el momento y la energía de Fermi:

$$p_F = \frac{h}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \quad E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \sim 33 \text{ MeV} \quad (4.3.3)$$

Concluimos por tanto que para los neutrones podemos tomar aproximadamente  $E_F \sim 33 \text{ MeV}$  e independiente de  $A$ . Por otro lado, el nivel de energía de Fermi debe coincidir con el nivel que ocupe el nucleón menos ligado, que está a una distancia del nivel de energía cero (situación en la que el nucleón no está ligado al núcleo) igual a la energía de separación. La profundidad del pozo de neutrones será igual entonces a la suma de la energía de Fermi ( $\sim 33 \text{ MeV}$ ) más la energía de separación ( $\sim 8 \text{ MeV}$ ), lo cual nos da unos 40 MeV. Es interesante reflexionar sobre el hecho de que únicamente a partir del tamaño nuclear y del principio de incertidumbre podamos estimar la profundidad del pozo de potencial nuclear.

A pesar de que las profundidades en los pozos de protones y neutrones son distintas, lo que provoca por ejemplo que los núcleos con  $N > Z$  sean mas estables que con  $Z > N$ , las energías de



Fermi deben estar aproximadamente en la misma posición por debajo del valor cero en el pozo de potencial, de lo contrario no habría estabilidad, y la energía de separación del último nucleón sería dependiente de la carga, lo cual estaría en contradicción con las observaciones experimentales.

## 4.4. El modelo de capas

A semejanza del modelo atómico de capas que tanto éxito a tenido en la física atómica, resulta tentador preguntarse si un modelo similar no tendría éxito también en la física nuclear. Es necesario, sin embargo, tener en cuenta las profundas diferencias entre la física atómica y la nuclear.

Los electrones se mueven en un potencial externo aproximadamente central: el potencial que crea el núcleo junto con las correcciones oportunas debidas al resto de electrones. De este modo manera surgen natural las capas electrónicas, que se van llenando en orden de energía creciente cumpliendo el principio de exclusión de Pauli. Las capas electrónicas llenas forman una especie de zona interior neutra y los electrones de la capa semillena constituyen los electrones de valencia, que determinan la mayoría de las propiedades químicas del átomo correspondiente. Cuando vamos llenando una capa electrónica las propiedades atómicas como la energía de ionización varían suavemente, pero sufren una súbita discontinuidad cuando la capa queda llena y hemos de pasar a la siguiente.

En un núcleo no tenemos un agente externo que cree el potencial en el que se mueven los nucleones, son ellos mismos los que configuran el potencial efectivo nuclear. Otra compilación o diferencia adicional es que, en principio, parecería que los nucleones debieran tener una probabilidad no despreciable de colisionar los unos con los otros, mientras que eso no sucede con los electrones atómicos. No resulta evidente que podamos considerar a cada nucleón moviéndose independientemente de los demás en un potencial nuclear efectivo, pero ya hemos visto que el principio de exclusión de Pauli garantiza que, esencialmente, los nucleones se mueven libremente dentro del núcleo.

La hipótesis principal del modelo de capas es suponer que los nucleones se mueven en el núcleo casi independientemente los unos de los otros a pesar de la interacción fuerte. Este movimiento libre significa, en última instancia, que el recorrido libre medio de un nucleón en materia nuclear es grande comparado con las dimensiones del núcleo. En el modelo de capas la interacción nucleón con sus compañeros se reduce a la interacción con un **campo autoconsciente** (*self-consistent field*) creado por ellos. Generalmente se supone que este campo autoconsciente es estático y esféricamente simétrico.

Debido al corto alcance de las fuerzas nucleares, el potencial del campo autoconsciente tiene dependencia radial muy similar a la densidad nuclear, es decir, es casi constante dentro del núcleo y se anula fuera. Por lo tanto, en primera aproximación podríamos considerar que el potencial nuclear constante en el interior del núcleo, tal como se hace en el modelo de gas de Fermi ideal<sup>5</sup>, con lo cual las funciones de onda de los nucleones serían ondas planas. No obstante, la introducción del modelo de capas de un campo autoconsistente que depende de la distancia al centro del núcleo es una mejora sustancial respecto del modelo de gas de Fermi, y modifica las funciones de onda de los nucleones, dejando de ser ondas planas.

Existen varias versiones del modelo de capas. La más simple, conocida como **versión extrema del modelo de capas** (*one-particle shell mode*), se usa para explicar las propiedades de los núcleos con  $A$  impar. En esta versión se supone que todos los nucleones están apareados (incluyendo los de una hipotética capa semillena) formando una coraza interde de espín cero, y que las propiedades del núcleo se deben únicamente al estado del nucleón desapareado. Una mejora de este modelo

---

<sup>5</sup>El modelo de capas incorpora la hipótesis del modelo de gas de Fermi.

consiste en considerar todos los nucleones de la última capa semillena, no sólo el desapareado. El siguiente paso en la elaboración de un modelo más detallado sería, obviamente, considerar todos los nucleones, tanto en las capas llenas como las semillenas.

#### 4.4.1. Evidencia experimental de capas en los núcleos

Hemos visto que para ciertos valores mágicos de  $N$  y  $Z$  los núcleos muestran una estabilidad inusual, que se manifiesta, por ejemplo, en una energía de separación de dos nucleones (protones o neutrones) grande. Además cuando  $Z$ , o  $N$ , o ambos, coinciden con un número mágico, la energía de ligadura nuclear es mayor que la esperada y algunas otras propiedades nucleares, como el radio, se comportan como si se hubiera completado una capa de estados análoga a las capas electrónicas atómicas. El modelo de capas nuclear considera niveles energéticos de los nucleones en un potencial adecuado. Una capa consiste en un grupo de niveles energéticos cercanos. A continuación se ofrece alguna lista de algunas evidencias experimentales en favor de la existencia de números mágicos:

- Existen grandes desviaciones en la energía de ligadura nuclear cerca de los números mágicos.
- La energía de separación protónica (neutrónica) tiene picos cuando  $Z$  ( $N$ ) es mágico.
- La energía cinética de las partículas  $\alpha$  es particularmente alta cuando el núcleo hijo tiene un número mágico de neutrones.
- Los elementos con  $Z(N)$  mágico tienen más isótopos (isótonos) que sus vecinos.
- El primer estado excitado  $2^+$  de un núcleo par-par tiene una energía excepcionalmente alta si  $z$  y  $N$  son mágicos.
- El radio nuclear decrece en los núcleos con  $N$  mágico.
- La sección eficaz de captura de neutrones decrece en unos dos órdenes de magnitud para los núcleos con  $N$  mágico.

Como ya hemos mencionado, la hipótesis fundamental del modelo de capas es ésta: cada nucleón se mueve independientemente de los demás en un potencial creado por todos los otros nucleones. Una vez definido el potencial, tratando cada nucleón de esta manera podemos ir llenando los niveles energéticos de acuerdo con el principio de Pauli. Este mismo principio es el que garantiza en cierto modo la existencia de algo parecido a *órbitas* individuales<sup>6</sup> de cada nucleón. Supongamos la colisión se encuentran cerca del fondo de potencial. Si las energéticas superiores están llenas ya de nucleones, el único modo de que haya transferencia de energía en la colisión es que uno de los dos nucleones sea promovido a la capa de valencia, pero esto requiere más energía que la disponible en una colisión de este tipo, con lo cual el resultado final es que, al menos como primera aproximación, los nucleones no colisionan los unos con los otros y se mueven individualmente por el potencial efectivo nuclear<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Órbitas en el sentido clásico no existen, aquí nos referimos al hecho de considerar el movimiento individual de cada partícula

<sup>7</sup>El recorrido libre medio de un nucleón de 10 MeV en una reacción nuclear es alrededor de 2 fm en materia nuclear, lo cual es muy poco y podría parecer que entra en contradicción con nuestra hipótesis. No obstante, nuestra discusión anterior se aplica sólo a nucleones ligados, donde tiene aplicabilidad el principio de Pauli. Esto no ocurre para nucleones no ligados como un nucleón proyectil que intervenga en una reacción nuclear

#### 4.4.2. Modelo de capas con potencial armónico

Dos candidatos simples para el potencial nuclear podrían ser el pozo de potencial esférico de paredes infinitas o el oscilador armónico en tres dimensiones. En ambos casos tenemos solución análoga para la ecuación de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (4.4.1)$$

Para un potencial central las soluciones de esta ecuación podemos escribirlas como

$$\Psi_{n\ell m}(\mathbf{r}) = \frac{u_{n\ell}(r)}{r} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (4.4.2)$$

donde los  $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$  son los armónicos esféricos, y  $u_{n\ell}$  las ondas radial. En el caso especial del potencial tridimensional isótropo tenemos:

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (4.4.3)$$

y los autovalores vienen dados por

$$E_N = \left( N + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega = \left( 2n + \ell + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.4)$$

$$N = 2(n-1) + \ell \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (-1)^{\ell} = (-1)^N \quad \ell \leq N \quad (4.4.5)$$

La energía depende únicamente de  $N$ , denominado número cuántico principal, que es el que se obtiene de manera más directa resolviendo la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico tridimensional en coordenadas cartesianas. De acuerdo con estas ecuaciones, el espectro energético de una partícula en un potencial armónico consiste en una secuencia de niveles equidistantes separados por  $\hbar \omega$ . A cada nivel  $E_N$  le corresponden varios estados con diferentes valores de  $\ell$ . Los enteros  $\ell$  y  $N$  tienen siempre la misma paridad y  $\ell \leq N$ . Se puede comprobar fácilmente que la degeneración es:

$$g_N = \frac{1}{2} (N+1)(N+2) \quad (4.4.6)$$

A esto habría que añadirle un factor 2 correspondiente a la degeneración de espín, ya que los nucleones son fermiones de espín 1/2. Los diferentes estados pueden identificarse con el par de números  $(n\ell)$ , o bien mediante la notación espectroscópica  $(s, p, d, f, g, h \dots)$  de tal manera que hablemos de  $1s, 2d, 2g \dots$

Podemos intentar refinar un poco el potencial propuesto, porque es evidente que el pozo nuclear no puede ser de paredes infinitas, y el potencial armónico no parece decrecer con la suficiente rapidez. Un potencial más realista sería el **potencial Wood-Saxon**:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r-R)/a]} \quad (4.4.7)$$

cuyo perfil se muestra en la figura 4.2. Los parámetros  $R$  y  $a$  representan el radio medio y el *skin thickness* respectivamente. Sus valores se escogen de acuerdo con los datos experimentales que indican  $R = 1.25A^{1/3}$  fm y  $a = 0.524$  fm. La profundidad del pozo,  $V_0$ , se ajusta para que proporcione energías de separación adecuadas, y es del orden de  $V_0 \sim 40$  MeV. El efecto de este

potencial, comparado con el del oscilador armónico, consiste en destruir la degeneración  $\ell$  de las capas. El desplazamiento energético entre subniveles aumenta a medida que crece la energía de excitación, y eventualmente se hace tan grande como el propio espaciado entre las capas. En cualquier caso, seguimos sin obtener más números mágicos que los tres primeros.

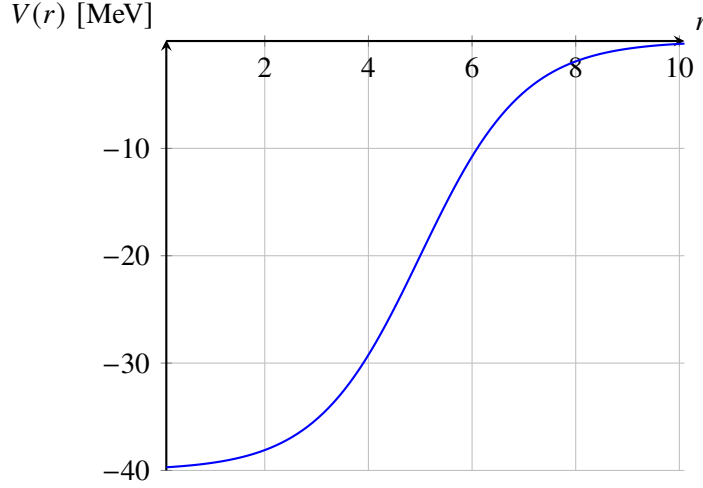


Figura 4.2: Potencial Wood-Saxon, variables de distancia en coordenadas reducidas ( $R = 5$ ,  $a = 1$ ).

#### 4.4.3. Interacción espín-órbita

En los años 40 del siglo XX se realizaron muchos esfuerzos para construir un modelo de estructura nuclear que explicase de los números mágicos. En 1949 Mayer, Haxel, Suess y Jensen probaron que la inclusión de un potencial de interacción espín-órbita producía el desdoblamiento correcto de los subniveles en las capas. En física atómica la interacción espín-órbita tiene su origen en la interacción del momento dipolar magnético creado por el espín del electrón con el campo magnético que el electrón ve en su propio sistema de referencia<sup>8</sup>; los efectos aquí son típicamente del orden de una parte entre  $10^5$ , demasiado pequeños como para generar un desdoblamiento energético que modifique los *números mágicos atómicos*. En el caso del núcleo veremos que la interacción espín-órbita si introduce cambios significativos en lo que concierne a la secuencia de números mágicos.

Introducimos entonces una interacción espín-órbita en el potencial nuclear de la siguiente manera:

$$V(r) \longrightarrow V(r) + V_{so}(r) (\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}) \quad (4.4.8)$$

El factor  $V_{so}(r)$  no es el más importante aquí, el que causa el desdoblamiento es el término  $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}$ . Los estados de cada partícula se tienen que etiquetar ahora como el número cuántico correspondiente al momento angular total  $\mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s}$ . Como los nucleones tienen  $s = 1/2$ , los posibles valores de  $j$  para un nucleón son  $j = \ell \pm 1/2$ , excepto para  $\ell = 0$  que solo es posible  $j = 1/2$ . Podemos calcular el valor esperado de la expresión  $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}$  como:

$$\mathbf{j}^2 = \boldsymbol{\ell}^2 + 2\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s}^2 \Rightarrow \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2} (\mathbf{j}^2 - \boldsymbol{\ell}^2 - \mathbf{s}^2) \quad (4.4.9)$$

<sup>8</sup>En el sistema de referencia en que el electrón está en reposo y el núcleo atómico está en movimiento y genera un campo magnético que interacciona con el momento dipolar magnético del electrón.

$$\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s-1)] \quad (4.4.10)$$

Supongamos ahora el nivel  $1f$  ( $\ell = 3$ ), que tiene una degeneración total  $2(2\ell + 1) = 14$  (a cada uno le corresponde una degeneración diferente). Los posibles valores de  $j$  son  $j = \ell \pm 1/2 = 5/2$  o  $7/2$ , lo que nos da los dos estados  $1f_{5/2}$  y  $1f_{7/2}$ , que constituyen un doblete espín-órbita y están degenerados y están separados por una energía proporcional al valor de  $\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle$ . Esto es, la diferencia de energía entre dos núcleos debido a la interacción espín órbita vendrá dada por:

$$\Delta E = V_{SO}(r) [\langle \mathbf{\ell}_1 \cdot \mathbf{s}_1 \rangle - \langle \mathbf{\ell}_2 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle] \quad (4.4.11)$$

Para cada uno de estos dos orbitales tenemos una degeneración  $(2j + 1)$  proveniente de los distintos valores que  $m_j$  puede tomar, lo cual proporciona una capacidad de 6 estaos nucleares para el  $1f_{5/2}$  y 8 para el  $1f_{7/2}$ . Un total de 14, que coincide con el número inicial (el número total de estados no puede cambiar). Para cada par de estados de un doblete espín órbita con  $\ell \neq 0$  tenemos una energía de separación proporcional a

$$\langle \mathbf{\ell} \cdot \mathbf{s} \rangle_{j=\ell+1/2} - \langle \mathbf{\ell} \cdot \mathbf{s} \rangle_{j=\ell-1/2} = \frac{\hbar^2}{2} (2\ell + 1) \quad (4.4.12)$$

La fórmula anterior implica que la separación energética aumenta a medida que crece  $\ell$ . Si tomamos  $V_{so}(r)$  negativo, el miembro del par con mayor  $j$  se desplaza hacia abajo entre los niveles de la segunda y tercera capas. Los 8 nucleones que puede contener el orbital  $1f_{7/2}$  se podrían añadir a los 20 de las tres primeras capas generando un número mágico 28. De manera análoga es posible generar todos los números mágicos observados.

Existen varias secuencias de llenado de nucleones en la literatura, dependiendo de los parámetros exactos que se usen en la parametrización del campo nuclear autoconsciente. La que aparece en el libro de K. Krane (las barras verticales indican las separaciones entre capas que dan lugar a los números mágicos 2,8,28,50,82):

$$\begin{aligned} & (1s_{1/2})^2 \parallel (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 \parallel (1d_{5/2})^6 (2s_{1/2})^2 (1d_{3/2})^4 \parallel (1f_{7/2})^8 \parallel (2p_{3/2})^4 \\ & (1f_{5/2})^6 (2p_{1/2})^2 (1g_{9/2})^{10} \parallel (1g_{7/2})^8 (2d_{5/2})^6 (1h_{11/2})^{12} (2d_{3/2})^4 (1h_{9/2})^{10} \\ & (1i_{13/2})^{14} \parallel (2g_{9/2})^{10} (3d_{5/2})^6 (1i_{11/2})^{12} (2g_{7/2})^8 (4s_{1/2})^2 (2d_{3/2})^4 (1j_{15/2})^{16} \parallel \dots \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

De tal modo que  $(1p_{3/2})^4$  indica el primer llenado del orbital  $p$  ( $\ell = 1$ ), con espín total  $3/2$  ( $j = \ell + s$ ) con degeneración total 4 (la degeneración es  $2j + 1$ ).

#### 4.4.4. Modelos dipolares magnéticos

En la versión extrema del modelado de capas (*one-particle shell model*), el momento dipolar magnético de un núcleo con  $A$  impar está determinado por el momento dipolar magnético del último nucleón desapareado. Veamos cuál es el acuerdo que existe entre los datos experimentales y este modelo. Recordemos que el operador de momento magnético dipolar para un núcleo de  $A$  nucleones se escribe como

$$\mu = \frac{\mu_N}{\hbar} \sum_{i=1}^A \left[ g_i^{(\ell)} \mathbf{\ell}_i + g_i^{(s)} \mathbf{s}_i \right] \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \quad (4.4.14)$$

donde  $\mu : N$  es el magnetón nuclear y los valores para los fotones o razones giromagnéticas correspondientes al momento angular orbital y al de espín, para el fotón neutrón y electrón son:

$$g_p^{(\ell)} = 1 \quad g_p^{(s)} = 5.585\,694\,674 \quad (4.4.15)$$

$$g_n^{(\ell)} = 0 \quad g_n^{(s)} = -3.826\,085\,4 \quad (4.4.16)$$

$$g_e^{(\ell)} = -1 \quad g_e^{(s)} = 2.002\,319\,304\,374 \quad (4.4.17)$$

$$(4.4.18)$$

El momento dipolar magnético del núcleo se define como el valor esperado de la tercera componente del operador  $\mu$  en un estado nuclear en el que la proyección del momento angular sobre el eje  $z$  es máxima, es decir, cuando  $j_z = j\hbar$ . En la versión extrema del modelo de capas se pretende explicar el momento magnético nuclear como originado por el único nucleón desapareado (sólo para núcleos de  $A$  impar). Considerando entonces la contribución de un único nucleón, la tercera componente del operador anterior es:

$$\mu_z = \frac{\mu_N}{\hbar} (g^{(\ell)} \ell_z + g^{(s)} s_z) \quad (4.4.19)$$

La presencia de interacción espín-órbita implica que el potencial es no central, y por lo tanto los autoestados del hamiltoniano no lo serán también del operador momento angular orbital, sino del momento angular total. Esto quiere decir que  $\ell_z$  y  $s_z$  ya no serán *buenos* números cuánticos, hemos de usar  $\mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s}$  y  $j_z$ . Podemos reescribir la expresión anterior usando la tercera componente de  $\mathbf{k}$  de la siguiente manera (recordando que  $j_z = \ell_z + s_z$ ):

$$\mu_z = \frac{\mu_N}{\hbar} [g^{(\ell)} j_z + (g^{(s)} - g^{(\ell)}) s_z] \quad (4.4.20)$$

Tomamos el valor esperado de la expresión anterior cuando  $j_z = j\hbar$ , y para aligerar notación preescidimos del subíndice  $z$  y  $\mu$  sobreentendiendo que se trata de la tercera componente:

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\mu_N}{\hbar} [g^{(\ell)} \langle j_z \rangle + (g^{(s)} - g^{(\ell)}) \langle s_z \rangle] \quad (4.4.21)$$

Obtenemos así de nuevo estas dos expresiones para el momento dipolar magnético:

$$\mu_{j=\ell+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_N}{2} [(2j+1)g^{(\ell)} + g^{(s)}] \quad (4.4.22)$$

$$\mu_{j=\ell-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_N}{2} \frac{j}{j+1} [(2j+1)g^{(\ell)} - g^{(s)}] \quad (4.4.23)$$

**Parte II**

**Física de partículas**





## **Capítulo 5**

# **La interacción fuerte nucleón-nucleón**

## **5.1. Partículas elementales: interacciones y propiedades**

## Capítulo 6

# Trasformaciones de simetría y leyes de conservación

### 6.1. Paridad $\mathcal{P}$



## **Capítulo 7**

# **El modelo de quarks y el modelo estándar**



# Mejoras para el futuro

- Mejorar la parte de sección eficaz: captura...
- Añadir boletín de ejercicios