Tema 1:

INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a estudiar una nueva forma de obtener la ecuación del movimiento. Como sabemos para ir de un punto A a un punto B podemos tomar diferentes caminos (infinitos). En este punto, el problema de la dinámica se reduce a cómo singularizar uno de los caminos posibles de tal forma que hallemos la trayectoria que sigue realmente el objeto estudiado.

En 1834 Hamilton formula su principio, que dice que de todas las posibles trayectorias del espacio de configuración compatibles con las ligaduras que puede seguir un sistema dinámico para evolucionar de un estado a otro en un tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima la acción.

Es un principio sencillo, que se usa en otros campos (óptica y el principio de Frenet: los rayos de luz siguen el camino que hace que el tiempo invertido sea el menor posible) o en el cálculo de geodésicas.

Para poder definir que es la acción primero hace falta definir que es un *funcional*, y ver un poco del desarrollo matemático previo.

ECUACIONES DE EULER - LAGRANGE

Supongamos una curva $y = y(x)$ continua y diferenciable. Definimos como *funcional* a la integral curvilínea de una función $f(y, y', x)$ (que como $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ solo depende de x) entre dos puntos x_1 y x_2. Matemáticamente:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx \qquad 1)$$

Entonces buscaremos en que condiciones de y nuestro funcional J tiene un extremo. Consideremos curvas tales que:

$$y(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2$$

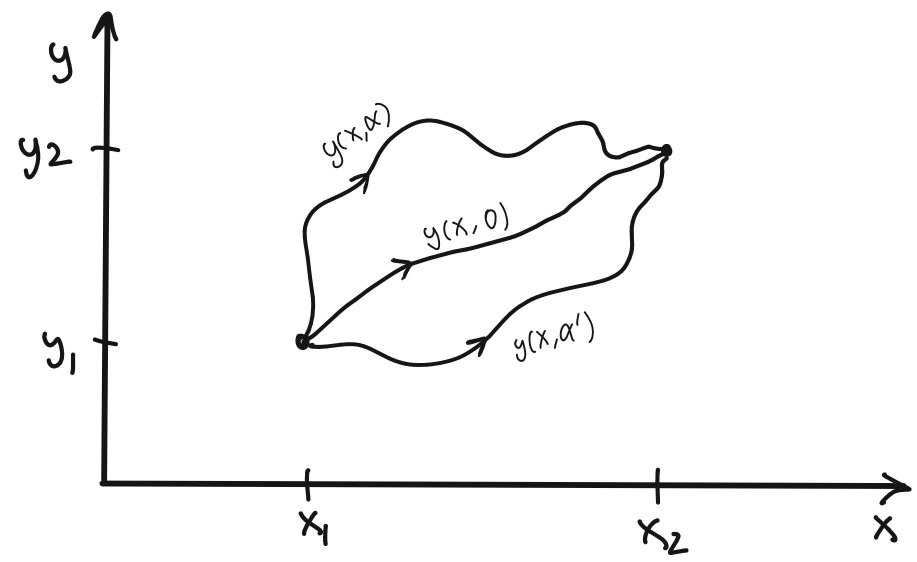
Entonces introduciremos una familia de curvas parametrizadas por α siendo $\alpha = 0$ la que extremiza la integral. Entonces.

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\eta(x)$$

Si escogemos una función arbitraria $\eta(x)$ tal que:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

Tenemos que $y(x,\alpha)$ es una familia de curvas que pasan por y_1 e y_2:



Por lo tanto nuestro funcional J ahora dependerá de α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)\,dx$$

Entonces podemos hacer un desarrollo de taylor de J respecto a α centrado en cero:

$$J(\alpha) = J(\alpha=0) + \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha + \dots$$

Y un desplazamiento virtual:

$$\delta J = J(\alpha) - J(\alpha=0) \simeq \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha$$

Al igual que si consideramos un desplazamiento de y respecto α:

$$\delta y(x,\alpha) = y(x,\alpha) - y(x,0) = \left.\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{x=0} \cdot \alpha = \alpha \cdot \eta(x)$$

Ahora estudiamos la condición de extremo.

$$\delta J = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

Usando la regla de la cadena.

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f(\cdots)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)dx$$

Fijémonos que:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) - \int_{x_1}^{x_2} dx\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

Cualquier desplazamiento entre x_1 y x_2 es cero respecto α es cero pq. llega y acaba en los mismos ptos.

Como todos las curvas pasan por el (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tenemos que $\left[\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2} = 0$ ya que $\eta(x_2) - \eta(x_1)^* = 0$. Entonces:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = -\int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

y

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{\eta(x)}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]dx$$

* por lo que anulamos el término $\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_1}^{x_2}$

Como $\eta(x)$ es arbitraria, para que $\frac{dJ}{d\alpha}=0$ tiene que cumplirse:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad 2)$$

Que se llama la ecuación de euler para la curva $y = y(x)$. Ahora si J dependiera de n curvas

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y_j, y_j', x)\,dx \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

llegamos a los n ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j'}\right) = 0 \qquad j = 1, 2, \dots$$

Si hacemos el mismo proceso para los n coordenados.

SEGUNDA FORMA DE LAS ECS. DE EULER

Calculemos ahora la derivada de f respecto a x:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j'} \cdot \frac{\partial y_j'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x}\right] = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j'' + \frac{\partial f}{\partial y_j} y_j'\right] =$$

y como

$$\frac{d}{dx} \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j' = \sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j'' + y_j' \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_j'}\right]$$

tenemos que

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j'\right] + \sum_j \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j'}\right) + \frac{\partial f}{\partial y_j}\right] y_j'$$

como sabemos que el término de la derecha se anula:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\sum_j \left[\frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j'\right] \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left[\sum \frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j' - f\right] = 0 \qquad 3)$$

Es llamada la segunda forma fundamental de las ecs. de Euler. Es especialmente útil cuando f no depende de x explícitamente:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}}_{0} + \frac{d}{dx}\left[\sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j' - f\right] = 0 \Rightarrow \sum \frac{\partial f}{\partial y_j'} y_j' - f = cte$$

PRINCIPIO DE HAMILTON: FUNCIONAL DE ACCIÓN

Consideremos ahora el funcional:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$$

Que es un funcional cualquiera solo que cambiamos los nombres. Ahora podemos ver que las ecuaciones de Lagrange de la dinámica son las ecuaciones de Euler-Lagrange deducidas del principio variacional $\delta S = 0$.

Este es el principio de Hamilton para sistemas conservativos: el movimiento del sistema entre dos tiempos t_1 y t_2 es aquel que verifica la condición de extremo del funcional de acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ donde $L = T - V$. Es equivalente a la 2ª ley de Newton.

Sistemas no Conservativos

El principio de Hamilton se puede usar para sistemas no conservativos:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W)\, dt = 0$$

onde δW es el trabajo virtual:

$$\delta W = \sum F_i\, \delta r_i = \sum Q_j\, \delta q_j$$

En los casos de fuerzas conservativas:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Pero como no siempre ocurre, generalizamos:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j\, dt$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} W\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta W\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum Q_j\, \delta q_j \right) dt$$

Sumando

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right] \delta q_j\, dt$$

Para que se iguale a cero, si los q_j son independientes:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Potenciales dependientes de la velocidad:

Aun en el caso de no sean conservativas, si podemos escribir:

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

es posible definir una función lagrangiana $L = T - U$ de tal modo que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Se llama a U potencial dependiente de la velocidad. Evidentemente para las fuerzas conservativas $\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_j}$ desaparece.

Sistemas con ligaduras: 2D

Comenzamos por el caso de un sistema con dos grados de libertad y coordenadas (x, y), para luego generalizar. Entonces supongamos que existe una ligadura holónoma $f(x, y) = 0$. En este punto tenemos dos opciones:

- Eliminar una de las coordenadas (usando $f(x, y) = 0$) y dejar una de ellas como única variable independiente, y luego calcular ya las ecs. del movimiento.
- Mantener las dos coordenadas, y usar la ligadura posteriormente. Este es el método de los multiplicadores de Lagrange, que vamos a estudiar a continuación.

Consideremos el funcional de acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

Aplicando el principio de Hamilton $\delta S = 0$:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right) \delta x\, dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\right) \delta y\, dt = 0$$

Si fueran independientes cada integral tendrá que anularse por separado y obtendríamos dos ecs. del movimiento. Sin embargo, como tenemos $f(x,y)=0$, los desplazamientos no son independes, ya que:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

$$\text{Si} \quad a_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \; a_y = \frac{\partial f}{\partial y} \implies \delta f = a_x dx + a_y dy = 0$$

Ahora multiplicamos dicha ecuación por la función arbitraria $\lambda(t)$ (multiplicador indeterminado de Lagrange), por lo que:

$$\int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x \, dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y \, dt = 0$$

Por ser arbitraria podemos elegir que satisfaga:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(t)\, a_y$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda(t)\, a_x$$

Que junto la ec. de ligadura y esas dos ecs. forman un sistema de 3 ecs. y 3 incógnitas (x, y, λ). En general podemos decir que estas ecuaciones "modificados" son el resultado de una lagrangiana:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \lambda f$$

sabiendo que ni λ ni f depende de $\dot{x}$ o $\dot{y}$. El significado físico de los multiplicadores está asociado a las fuerzas de ligadura, como vamos a ver a continuación. Sea:

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - U(x,y) \quad ; \quad f(x,y) = 0 \text{ (ligad.)}$$

Si seguimos el procedimiento anterior:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda(t)\, a_x \Rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda a_x$$

Tenemos que $-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x^a$ y $\lambda \cdot a_x = F_x^{lig}$. La suma tiene que ser la fuerza total resultante, y por separado tienen que representar la fuerza aplicada (por el potencial) sobre m_1 y λa_x tiene que ser la fuerza de ligadura.

SISTEMAS CON LIGADURAS: CASO GENERAL

Supongamos un sistema con n grados de libertad: q_K, $K=1,2,\dots,n$. A diferencia del caso anterior, tenemos ligaduras no holónomas:

$$\sum_{K=1}^{n} a_{lK} \cdot \dot{q}_K + a_{lt} = 0 \qquad l = 1,2,\dots,m \qquad 4)$$

teniendo entonces m ligaduras no-holónomas lineales en la velocidad, o lo que es lo mismo:

$$\sum_{K=1}^{n} a_{lK}\, dq_K + a_{lt}\, dt = 0 \qquad l=1,2,\dots,m \qquad 5)$$

donde $a_{lK} = a_{lK}(q,t)$ son coeficientes dependientes de las coordenadas y tiempo. En general no son holónomas (como dijimos), aunque estas son un caso de 4) y 5), ya que el conjunto de ligaduras holónomas:

$$f_l(q_K) = 0 \quad K=1,2,\dots,n \Rightarrow \frac{\partial f_l}{\partial q_K} \cdot \frac{\partial q_K}{\partial t} + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial f_l}{\partial q_K}}_{a_{lK}} \dot{q}_K + \underbrace{\frac{\partial f_l}{\partial t}}_{a_{lt}} = 0$$

$$\Rightarrow a_{lK} \cdot \dot{q}_K + a_{lt} = 0$$

En el procedimiento variacional los desplazamientos son virtuales ($t = cte$) tenemos:

$$\sum_{K=1}^{n} a_{lK}\, \delta q_K = 0 \qquad (\delta t = 0)$$

por lo que los δq_K no son independientes. Para reducir el número de desplazamientos virtuales y dejar aquellos independientes usamos (como antes) el metodo de multiplicadores de lagrange obteniendo n ecuaciones de Euler-Lagrange y m ecuaciones con multiplicadores de lagrange, teniendo $n+m$ ecuaciones e incógnitas.

Entonces multiplicamos $\sum_K^n a_{\ell K}\,\delta q_K = 0 \quad \ell = 1, \dots, m$ por λ_ℓ arbitrarias:

$$\lambda_\ell \cdot \sum_{K=1}^{n} a_{\ell K}\,\delta q_K = 0$$

Sumando los ligaduras e integrando:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \sum_{K=1}^{n} a_{\ell K}\,\delta q_K = 0$$

Y si deducimos las ecs. de Lagrange del principio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = 0 \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \sum_{K=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \right) \right] \delta q_K = 0$$

Sumando:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{K=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \right) + \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell K} \right] \delta q_K = 0$$

De aquí obtenemos n-m ecuaciones con n incógnitas. ¿Por qué nos quedan n ecuaciones? Porque λ_ℓ son arbitrarias, y podemos coger las que nos convengan, que son las que cumplan:

$$\frac{\partial L}{\partial q_K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \right) + \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell K} = 0 \qquad K = n-m+1, \dots, n$$

Estos son los no independientes (hay $n-m$ independientes). Si obligamos a que los no independientes cumplan dichas funciones, como los independientes (por ser independientes) los cumplirán (da igual el valor de λ_ℓ) tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial q_K} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \right) + \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell K} = 0 \qquad K = 1, 2, \dots, n$$

Obteniendo $n+m$ incógnitas y n ecuaciones. Las m ecuaciones restantes serán las ligaduras (como antes los aplicamos al final). Entonces nuestro sistema será:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{lk} = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n \qquad 6)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0 \qquad l = 1, \dots, m \qquad 7)$$

Al igual que en la anterior parte, el significado físico de los multiplicadores de Lagrange está asociado con las fuerzas de ligadura. Sabemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{lk}$$

Si escribimos explícitamente $L = T - V$ (y consideramos el caso conservativo):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{lk}$$

Como $\frac{\partial V}{\partial q_k} = F_k^a$; y si llamamos $\sum \lambda_l a_{lk} = Q_k^{lig}$ tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = Q_k^{(a)} + Q_k^{(lig)}$$

Este metodo puede ser muy útil cuando nos interese calcular de manera explícita las fuerzas de ligadura, cuando las ligaduras no sean holónomas o que no resulte cómodo deducir todas las coordenadas independientes

En el caso de ligaduras holónomas está claro que $a_{lk} = \frac{\partial f_l}{\partial q_k}$; por lo que podemos introducirlo como un "potencial de ligadura):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\underbrace{\left(\sum_{l=1}^{m} f_l \lambda_l\right)}_{-W} = -\frac{\partial}{\partial q_k}(V + W)$$

lo que es equivalente a construir un lagrangiano tal que:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - W = T - (V + W)$$

Queda claro que $Q_K^{lig} = W = \frac{\partial \vec{F}_{r_i}^{lig}}{\partial \vec{r}_i} =$

PROPIEDADES DE SIMETRÍA:

Trasformaciones de Gauge.

Consideramos un lagrangiano al que le añadimos un término:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\, M(q,t)}{dt}$$

podemos comprobar que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (L' - L)}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial (L' - L)}{\partial q} = 0$$

Para demostrarlo tenemos que demostrar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dM}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dM}{dt} = 0 \Rightarrow$$

Nunca va a aparecer $\dot{q}_j$ de manera explícita si $\frac{\partial M}{\partial t}$. Si $\frac{dM}{dt}$ podría aparecer.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dM}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial M}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial M}{\partial t}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial M}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial M}{\partial t}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial q_j}\right)} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial M}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial M}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial M}{\partial q_j}\right) \dot{q} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial q_j} = \dot{q} \frac{\partial^2 M}{\partial q_j^2} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial M}{\partial t}$$

Entonces ambas lagrangianas verifican la ecuación de euler-lagrange, por lo que son válidas, lo que nos dice que la lagrangiana de un sistema no es única.

Teorema de Noether:

El teorema de Noether nos dice que una transformación de simetría conduce siempre a una lei de conservación. Es un principio fundamental de toda la física.

Llamamos *transformación de simetría* es un cambio en las variables del problema que no cambia las ecuaciones del movimiento. Esto puede ser porque L no cambia o porque no contribuye a la acción de Hamilton (simetría de la lagrangiana o simetría de acción respectivamente).

Consideramos una trasformación:

$$q_j(t) \longrightarrow q_j(t,\alpha) = q_j(t) + \alpha \cdot \eta(t) = q_j(t) + \underbrace{\delta q_j(t)}_{\text{esta es la transformación}}$$

Ahora calculamos la variación de la lagrangiana:

$$\delta L = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j\right] = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right]\delta q_j + \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right]$$

Como las trayectorias reales son los que minimizan la acción, i.e. verifican la ecuación de Euler-Lagrange, el primer término se anula. Entonces la variación de la lagrangiana

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right]$$

Si la simetría es simetría de la lagrangiana tenemos que $\delta L = 0$ (ya que el cambio de variables no variará L). Entonces:

$$I\,(\text{cte}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j$$

Si tenemos una simetría de acción, sabemos entonces que no varía la acción de Hamilton. Para no variarla lo único en lo que se puede diferenciar el nuevo lagrangiano debe ser en un término de Gauge. Si L' es el lagrangiano tras el cambio:

$$L' = L - \frac{dM}{dt}$$

entonces el cambio

$$\delta L' = \delta L - \frac{d(\delta M)}{dt}$$

Por lo tanto es suficiente que $\delta L' = 0$ para que tengamos una simetría. En este caso:

$$\delta L = \frac{d\,\delta M}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - \delta M\right] = 0 \Rightarrow I = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - \delta M$$

Consideremos una trasformación de la coordenada q_i una cantidad α constante, dejando los demás sin cambios:

$$q_j \longrightarrow q_j + \alpha \cdot \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Si la lagrangiana permanece invariante (simetría de lagrangiano): deducido en la página anterior

$$\delta L = 0 \Rightarrow I = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j = \sum_j p_j\,\delta q_j = \alpha \cdot p_i \quad ; \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

donde llamamos p_i al movimiento canónico conjugado. Si q_i fuese una coordenada cartesiana p_i sería la proyección del momento lineal en esa dirección. Si q_i fuera un ángulo, p_i sería la proyección del momento angular sobre el eje de rotación. Si ocurre esto decimos que q_i es una coordenada cíclica.

También sabemos que si la lagrangiana no depende del tiempo explícitamente una cantidad conservada, ya que:

$$\frac{dL}{dt} = \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}^{\,0} + \frac{d}{dt}\sum_j\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right] + \sum_j\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_j}\right]\dot{q}_j \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} + \frac{d}{dt}\sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right] = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = h$$

donde h es la función enerxá que coincide con el valor de la función hamiltoniana que vamos a deducir a continuación.

FORMALISMO HAMILTONIANO

Una teoría dinámica siempre se puede escribir de dos maneras equivalentes, pudiendo pasar de un formalismo a otro (en ambos sentidos)

Este hecho no es característico de la Física. Tampoco tiene que ver con la dinámica. En realidad es la aplicación al caso físico de una propiedad de las matemáticas, relacionadas con el th. de Dunkin y con la transformada de Legendre.

Teorema de Dunkin:

Si consideramos los conjuntos de variables:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

relacionados mediante

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

donde $X(x_1, \ldots, x_n)$ es una función de hessiano no nulo. Esto se expresa como:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x_i^2} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial x_j \partial x_i} & \dfrac{\partial^2 X}{\partial x_j^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

En estos supuestos, podemos decir que la función X genera la transformación $y_i = y_i(X)$, o que la función X es la función generatriz de la transformación $x_i \to y_i(x)$.
En estas condiciones el teorema nos dice que:

1) Existe otra función $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ que genera la transformación inversa $y_i \to x_i(y)$

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2) Las dos funciones $X(x_i)$ y $Y(y_i)$ están relacionas mediante la expresión:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X$$

3) Si además X depende de otros parámetros $X(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tenemos que Y dependerá tambien de esos parámetros, y se relacionan sus dependencias de estos parámetros mediante la expresión:

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

lo que es facilmente deducible de 2).

La única condición necesaria para que exista la función generatriz y la generatriz inversa existan es que el jacobiano de la función

$$x_i \to y_i(x)$$

sea no nulo. Como el jacobiano de esta transformación coincide con el hessiano de X, con que este no se anule es suficiente.

Por consecuencia, en cualquier momento podemos hacer esta transformación sin perder información, y en ambos sentidos. Entonces a la transformación

$$X = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - Y$$

donde

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x} \quad o \quad x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}$$

se le llama **transformada de Legendre.**

Ha de recordarse que no es un cambio total de las coordenadas que definen a X o Y.

Transformada para el Lagrangiano

Sea la función Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ dependiente de $2n+1$ variables (siendo n el nº de grados de libertad), los momentos canónicos del lagrangiano se definen como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde ya hemos visto que si $L \neq L(q_i) \rightarrow p_i = cte$. Ahora podemos ver porque introdujimos el teorema de Dunkin: queremos hacer una transformada de Legendre usando los momentos, relacionando:

$$\{x_i\} \longrightarrow \{\dot{q}_i\} \qquad \{y_i\} \longrightarrow \{p_i\}$$

$$X(x_i, \alpha_i) \longrightarrow L(\dot{q}_i, q_i, t)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = y_i \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

entonces podemos aplicar el **teorema de Dunkin** a nuestra teoría dinámica:

1) Existe una función llamada **Hamiltoniano** que relaciona $p_i \rightarrow \dot{q}_i(p)$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

2) Las funciones L y H se relacionan mediante la expresión:

$$H = \sum \dot{q}_i \cdot p_i - L$$
$$L = \sum \dot{q}_i \cdot p_i - H$$

3) Los otros parámetros (q_i, t) no implicados en la transformación generan las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Todo este proceso no conlleva una pérdida de información, ya que la información anteriormente contenida en las ecuaciones de Euler-Lagrange (en forma de EDs de 2° orden) ahora se representan como 2 ED. de 1er order, las **ecuaciones de Hamilton.**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \dots n$$

donde la 2ª es trivial si:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_i) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

También se llaman **ecuaciones canónicas del movimiento**. Cuando representemos el movimiento mediante el hamiltoniano debemos hacerlo con las coordenadas generalizadas, los momentos y el tiempo, no las velocidades $\dot{q}_i$.

El uso de 2 EDs de 1er orden en vez de 1 ED de 2° orden no varía el número de constantes arbitrarios que aparecen al resolver la ec. de movimiento.

Ahora vamos a demostrar que si el lagrangiano no depende explicitamente, el hamiltoniano se conserva a lo largo del tiempo:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{dp_i}{dt} =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\left(-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

consecuentemente

$$\text{Si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = cte.$$

Supongamos un **sistema escleronómo** (los coordenadas $\vec{r_i}$ cartesianas del sistema no dependen explicitamente de T) y donde $V \neq V(\dot{q}_j)$. Entonces:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \cdot \frac{dr_i}{dt} = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} m \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$

$$T = \sum_{i,k} \alpha_{jk}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k$$

Como T es una función homogenea de segundo orden ($T(\lambda \dot{q}_i) = \lambda^2 \cdot T(\dot{q}_i)$) tenemos que:

$$\sum_j \dot{q}_j \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T = \sum \dot{q}_j\, p_j$$

y como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j$$

tenemos que

$$H = \sum_j q_j\, p_j - L = 2T - T + V = T + V$$

Entonces si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- El sistema es escleronomo: $\vec{r}_i \neq \vec{r}_i(t)$
- El potencial no depende de la velocidad

podemos decir que

$$H = T + V = E_T$$

En general que el sistema sea escleronomo o no depende de las ligaduras, ya que son las que relacionan $\vec{r}_i$ con las coordenadas generalizadas.