

# Astrofísica

Daniel Vázquez Lago

# Índice general

<b>1 Geodesia</b>	<b>5</b>
1.1 Definiciones básicas . . . . .	5
1.1.1 Geoides . . . . .	5
1.1.2 Coordenadas . . . . .	6
1.1.3 Esfera Celeste . . . . .	6
1.2 Coordenadas astronómicas . . . . .	8
1.2.1 Coordenadas Horizontales . . . . .	9
1.2.2 Coordenadas ecuatoriales horarias . . . . .	10
1.2.3 Coordenadas ecuatoriales absolutas . . . . .	11
1.2.4 Coordenadas eclípticas . . . . .	11
1.2.5 Fenómenos astronómicos de interés . . . . .	12
1.3 Medidas de tiempo . . . . .	12
1.3.1 Escalas rotacionales: tiempo sidéreo y tiempo solar . . . . .	12
1.4 Transformaciones de Coordenadas . . . . .	12
<i>Ejercicios</i> . . . . .	13
<b>2 Mecánica Celeste</b>	<b>17</b>
2.1 Problema de los dos cuerpos . . . . .	17
2.1.1 Leyes de Kepler . . . . .	17
2.1.2 Ecuaciones diferenciales fundamentales . . . . .	17
2.1.3 Solución de la ecuación reducida . . . . .	18
2.1.4 Plano orbital en función de otro plano de referencia . . . . .	20
2.1.5 Anomalía verdadera, excéntrica, media y longitud media . . . . .	21
2.2 Problema de los tres cuerpos . . . . .	22
2.2.1 Introducción . . . . .	22
2.2.2 Problema de los tres cuerpos restringido y puntos de Lagrange . . . . .	22
<i>Ejercicios</i> . . . . .	22
<b>3 Astrofísica</b>	<b>25</b>
3.1 Introducción: escalas de tiempo y distancia . . . . .	25
3.1.1 Historia temporal del Universo . . . . .	25
3.1.2 Escalas de distancias . . . . .	26
3.1.3 Escalas galácticas: estrellas binarias . . . . .	27
3.1.4 Composición del Universo y el Sistema Solar . . . . .	28
3.2 Teoría de la radiación . . . . .	28
3.2.1 Propiedades corpusculares de la radiación . . . . .	28
3.2.2 Aplicaciones astrofísicas . . . . .	29
3.2.3 Espectros atómicos . . . . .	29
3.2.4 Efecto doppler . . . . .	30
3.2.5 Tipos espetrales de las estrellas . . . . .	31
3.3 Diagrama de Hertzsprung-Rusell y la secuencia principal . . . . .	32

3.3.1	Diagrama experimental . . . . .	32
3.3.2	Diagrama teórico . . . . .	32
3.3.3	Características del diagrama de Hertzsprung-Russell . . . . .	33
3.3.4	Diagrama de Hertzsprung-Russell y la secuencia principal . . . . .	33
3.4	Ecuaciones de equilibrio estelar y teorema del virial . . . . .	33
3.4.1	Introducción . . . . .	33
3.4.2	Ecuaciones . . . . .	33
3.4.3	Teorema del virial y pico de Gamow . . . . .	36
3.5	Energía de las estrellas y nucleosíntesis . . . . .	36
3.5.1	Distribución de la energía y pico de Gamow . . . . .	36
3.5.2	Inicio de las reacciones nucleares . . . . .	36
<i>Ejercicios</i>	. . . . .	38
<b>4</b>	<b>Cosmología</b>	<b>47</b>
4.1	¿Qué es la cosmología? . . . . .	47
4.1.1	Pilares básicos de la cosmología . . . . .	47
4.2	El principio cosmológico . . . . .	47
4.2.1	Homogeneidad . . . . .	47
4.2.2	Isotropía . . . . .	48
4.2.3	Implicaciones y comentarios sobre el tiempo . . . . .	48
4.3	La ley de Hubble . . . . .	48
4.3.1	Expansión cosmológica y Big Bang . . . . .	49
4.4	Nociones generales de Relatividad General . . . . .	50
4.4.1	Métrica . . . . .	50
4.4.2	Espacios con curvatura constante . . . . .	50
4.4.3	Covariancia e invariancia . . . . .	51
4.4.4	Ecuación de la Relatividad General . . . . .	51
4.5	Métrica de Robertson-Walker . . . . .	51
4.5.1	Distancia comóvil y distancia propia . . . . .	52
4.5.2	Propagación de la luz en el espacio RW . . . . .	52
4.5.3	Corrimiento al rojo . . . . .	53
4.5.4	Parámetro de Hubble y el factor de escala de Universo . . . . .	53
4.5.5	El parámetro de deceleración del universo . . . . .	53
4.6	Ecuaciones de Friedman . . . . .	53
4.6.1	Derivación relativista . . . . .	54
4.6.2	Tensor de energía-momento del Universo . . . . .	54
4.7	Modelos cosmológicos . . . . .	55
4.7.1	Relación entre $k$ y $\epsilon$ . Densidad de energía crítica. . . . .	56
4.7.2	Ecuaciones de estado . . . . .	56
4.7.3	Materia: “gas” de galaxias . . . . .	57
4.7.4	Radiación: “gas de fotones” . . . . .	57
4.7.5	Comportamiento de materia y radiación con $a(t)$ . . . . .	57
4.7.6	Costante cosmológica . . . . .	58
4.8	Cosmología observational . . . . .	58
4.8.1	Distancia de luminosidad $d_L$ . . . . .	59
4.9	Resolución de diferentes modelos cosmológicos . . . . .	59
4.10	Tamaño del Universo Observable . . . . .	59
4.10.1	Horizonte de partículas . . . . .	60
4.10.2	El horizonte de sucesos . . . . .	60
4.10.3	¿Es el Universo finito o infinito? . . . . .	60
4.11	Modelos cosmológicos . . . . .	61

4.11.1 Universo dominado por materia y esférico ( $k = +1$ ). Entrega 2024/2025. . . . .	61
Formulario . . . . .	63
<i>Ejercicios</i> . . . . .	64

# Capítulo 1

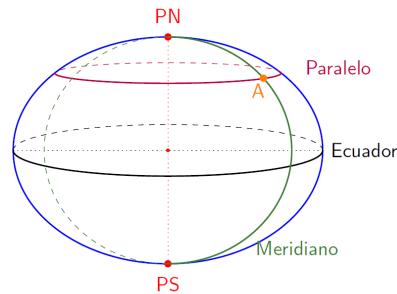
## Geodesia

### 1.1. Definiciones básicas

#### 1.1.1. Geoides

Como sabemos la tierra tiene una forma de una esfera achatada, tomando la forma de un elipsoide de revolución. En palabras de Isaac Newton: «Una forma de equilibrio que tiene una masa bajo el influjo de las leyes de gravitación y girando en torno a su eje es la de un esferoide aplastado en sus polos». Un *esferoide aplastado en sus polos* es básicamente un elipsoide de revolución. Dentro de este elipsoide o geoide, definimos:

- **Polos:** puntos de corte entre el eje menor de la ellipse y elipsoide. Llamamos polo norte (PN) al corte superior y polo sur (PS) al corte inferior.
- **Ecuador:** línea circular correspondiente al corte entre el plano perpendicular al eje menor que pasa por el centro del elipsoide y este.

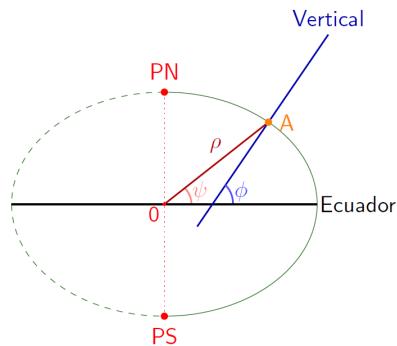


- **Paralelos:** líneas circulares correspondientes a los cortes entre los planos paralelos al ecuador (paralelo cero) y el elipsoide.
- **Meridianos:** líneas elipsoidales determinadas por el corte entre el elipsoide y el haz de planos que define el eje menor. Se considera *meridiano cero* al que pasa por Greenwich. En particular definimos dos meridianos:
  - El *meridiano superior de lugar* sería la semielipse que pasa por los polos y contiene al observador.
  - El *meridiano inferior de lugar* sería la semielipse que pasa por los polos y no contiene al observador.
- **Vertical de lugar:** es la línea normal al elipsoide en un punto dado.
- **Horizonte de lugar:** también llamado plano del horizonte, es el plano perpendicular a la vertical, que toca al esferoide en un único punto: el punto A.

### 1.1.2. Coordenadas

Al conjunto de variables que permiten describir cualquier punto de la Tierra se le llaman *coordenadas terrestres*, y existen dos tipos de coordenadas terrestres, que se definen en función de la *vertical de lugar*

- **Coordenadas geográficas:** son dos variables angulares  $(\phi, \lambda)$ , que se definen como
  - **Latitud geográfica**  $\phi$ . Toma valores de  $90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Para un punto  $A$  cualquiera el ángulo  $\phi$  es el comprendido entre la vertical de lugar y el ecuador.
  - **Longitud geográfica**  $\lambda$ . Toma valores entre  $180^\circ$  y  $-180^\circ$ . Para un punto  $A$  cualquiera el ángulo  $\lambda$  se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.
- **Coordenadas geocéntricas:** consta de tres variables  $(\rho, \psi, \lambda)$ , dos angulares y una distancia. Estas son:
  - **Radio vector**  $\rho$ . Distancia entre el centro de la tierra (punto 0) y el punto  $A$ .
  - **Latitud geocéntrica**  $\psi$ . Toma valores de  $90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Para un punto  $A$  cualquiera el ángulo  $\psi$  es el comprendido entre el radio y el ecuador.
  - **Longitud geocéntrica**  $\lambda$ . Se define igual que la longitud geográfica. Toma valores entre  $180^\circ$  y  $-180^\circ$ . Para un punto  $A$  cualquiera el ángulo  $\lambda$  se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.



### 1.1.3. Esfera Celeste

La **esfera Celeste** es una esfera imaginaria concéntrica con la Tierra de radio arbitrario y sobre la cual se encuentran proyectados los astros. En función de quién o qué sea el centro de la esfera podremos hacer una clasificación:

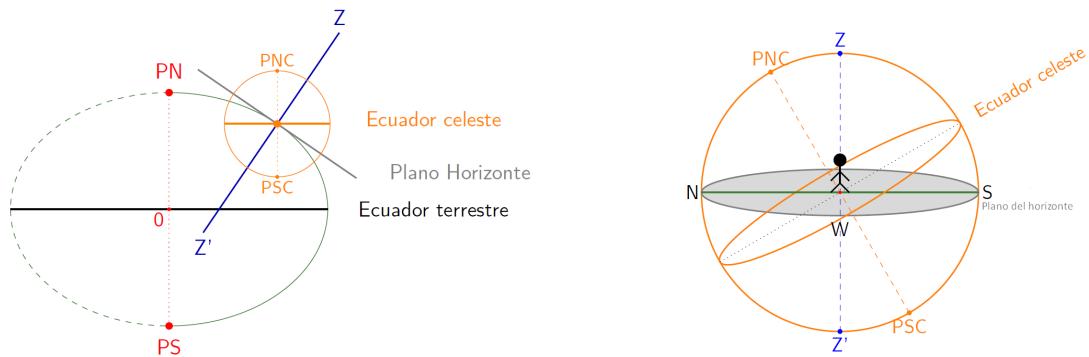
- La *esfera tropocéntrica* es aquella en cuyo centro está el observador.
- La *esfera geocéntrica* es aquella en la que el centro es el centro de la Tierra.

#### Esfera celeste tropocéntrica

El plano horizonte pertenece a la llamada **esfera celeste topocéntrica**, que es aquella cuyo centro es el observador. En esta esfera, el plano horizonte define lo que una persona diría que es arriba y abajo. La esfera celeste tropocéntrica tiene también un polo norte celeste (PNC) y un polo sur celeste (PSC) paralelo con el eje del mundo, pero no necesariamente con el «arriba» del observador. Al punto Z se le llama **cénit** y al punto Z' se le llama **nádir**.

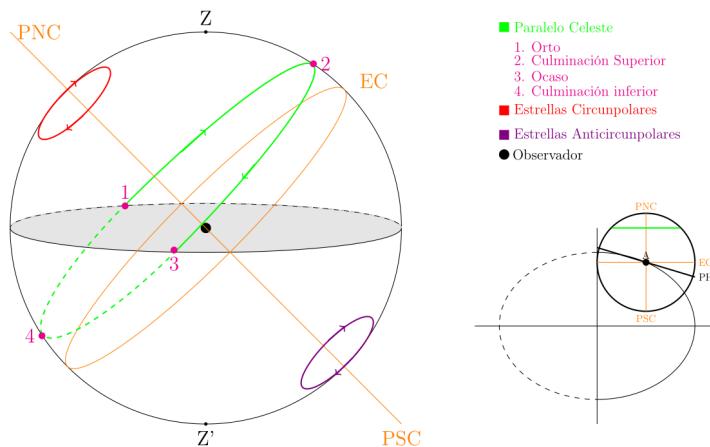
Como podemos ver el ángulo entre la línea PNC y Z en la esfera topocéntrica es igual a  $90^\circ - \phi$ , y por tanto independiente al meridiano en el que nos encontremos, solo depende del paralelo en el que se encuentre el punto del observador. A dicho ángulo se le llama **colatitud**.

En la esfera celeste tropocéntrica, en función del movimiento de los astros, podemos encontrarnos las estrellas circumpolares, anticircumpolares y aquellas que tienen orto y ocaso. Este movimiento aparece de este a oeste está ocasionado por el movimiento de rotación de la Tierra, su periodo es de  $24^h 56' 4''$ . Definámoslas por completitud:



- **Estrellas Circumpolares:** aquellas que se mueven alrededor del PNC y que siempre son visibles a cualquier hora del día.
- **Estrellas Anticircumpolares:** aquellas que se mueven por debajo del horizonte, y nunca son observables.
- **Otras:** son aquellas que son visibles a ciertas horas del dia, estando por debajo del horizonte las restantes. Definimos los siguientes puntos de su movimiento alrededor de la esfera celeste:
  - *Orto:* punto en el que el astro atraviesa el horizonte por el este y se hace visible (en el Sol es el amanecer).
  - *Ocaso:* punto en el que el astro atraviea el horizonte por el oeste y se hace invisible (en el Sol es el atardecer).
  - *Culminación superior:* punto en el que el astro atraviesa el meridiano celeste superior de lugar, es decir, el punto en el que está mas cerca del céntit.
  - *Culminación inferior:* punto en el que el astro atraviesa el meridiano celeste inferior de lugar, es decir, el punto en el que está mas cerca del nádir.

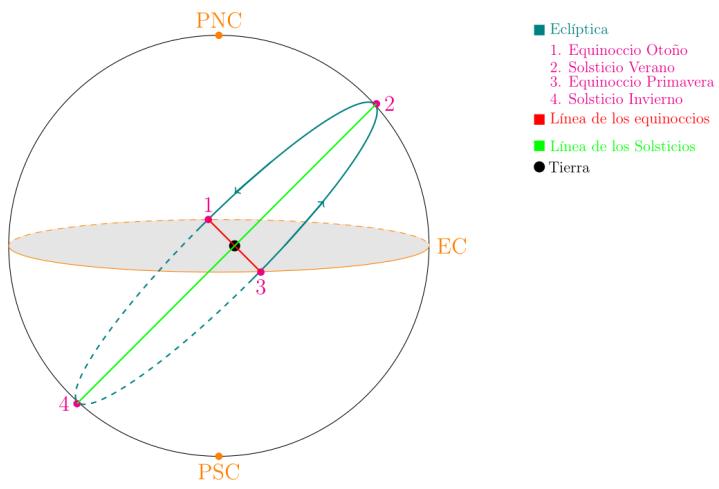
Véase la figura 1.3 para más información.



**Figura 1.2:** Esfera tropocéntrica celeste.

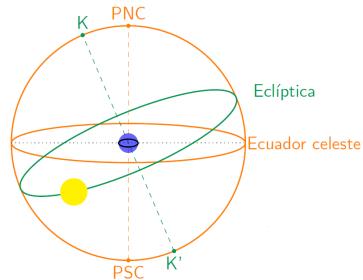
### Esfera celeste geocéntrica

Es de vital importancia lo que llamamos **punto vernal** o **punto aries** que es la posición del Sol en el equinoccio de primavera en el Hemisferio Norte (en la esfera celeste geocéntrica).



**Figura 1.3:** Esfera geocéntrica celeste.

El **plano de la eclíptica** es el plano que contiene la órbita de la Tierra alrededor del Sol, y está inclinado con respecto al ecuador celeste una cantidad llamada *oblicuidad de la eclíptica*  $\varepsilon = 20^{\circ}26'29''$ . En la esfera celeste geocéntrica, cuyo centro es la Tierra, es el Sol quien aparece moverse a nuestro alrededor. Llamamos **eclíptica** a la intersección del plano de la eclíptica con la esfera celeste.



## 1.2. Coordenadas astronómicas

Las coordenadas astronómicas nos sirven para designar la posición de un astro en la bóveda celeste. Todos los sistemas de coordenadas que se usan en astronomía son sistemas esféricos/polares, designando cualquier punto de la esfera celeste con dos ángulos. Toda diferencia entre dos sistemas de coordenadas distintos radica en 4 puntos: la definición de lo que llamamos *plano fundamental*, su *eje x*, el *centro de la esfera elegido*, y si el sistema de coordenadas es *dextrógiro* o *levógiro*. Primero nos centraremos en que es levógiro y que es desxtrógiro, ya que cobrará mucha importancia más adelante, y luego haremos la clasificación relevante.

Definimos pues levógiro y dextrógiro en función de hacia donde esté el eje y respecto el eje x. Veamos pues:

- Definimos **dextrógiro** como aquel sentido antihorario, en el que se sigue la regla de la mano derecha donde el índice sería el  $\hat{x}$  y el pulgar  $\hat{z}$ . Así pues, tendríamos que el sistema de coordenadas esféricas clásicas sería un sistema dextrógiro.
- Definimos **levógiro** como aquel con sentido horario, en el que se sigue la regla de la mano izquierda, donde el índice sería  $\hat{x}$  y el pulgar  $\hat{z}$ . Por ejemplo las agujas de un reloj seguirían este mecanismo donde el 00:00 sería el eje  $\hat{x}$  y el 3:00 sería el eje  $\hat{y}$ .

Existen más maneras de definirlo, pero nosotros preferimos esta ya que es mas intuitiva (solo hay que pensar en relga de la mano derecha e izquierda) además que mantiene la definición de ángulo azimutal en ambas igual: el ángulo se define como aquel que crece de  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$ , solo que  $\hat{y}$  está en uno u otro lado.

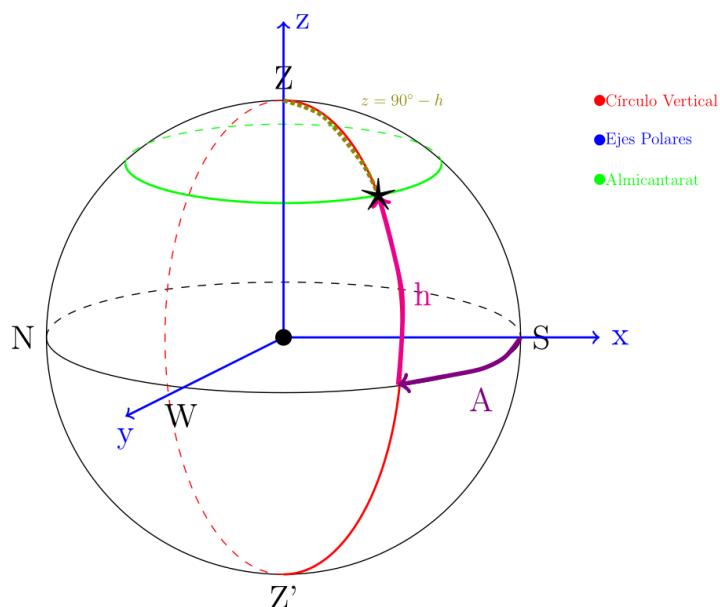
Luego tendremos las siguientes clasificaciones:

- En función del centro de la esfera:
  - **Topocéntrico:** el centro es el observador.
  - **Geocéntrico:** el centro es la tierra.
  - **Helicéntrico:** el centro es el sol.
- En función del plano fundamental:
  - **Horizontales:** en este caso el plano fundamental es el plano del horizonte..
  - **Ecuatoriales:** el plano ecatorial es el plano fundamental.
  - **Eclíptica:** el plano de la eclíptica es el plano fundamental.

### 1.2.1. Coordenadas Horizontales

Las coordenadas horizontales usan el horizonte como plano fundamental, es un tipo de *sistema levógiro* y el eje X para cualquier observador es aquel que apunta al sur (hemisferio norte) o que apunta al norte (hemisferio sur). Las coordenadas son:

- La **altura  $h$** . Tiene valores desde los  $90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano horizonte y la línea que conecta el observador y el punto. La *distancia cenital* se define como el ángulo entre el vector normal del plano y la línea que conecta el observador y el punto.
- El **acimut  $A$**  se define como el ángulo entre el eje X y la proyección en el plano fundamental del la línea que conecta el observador y el punto, creciendo en el sentido levógiro.

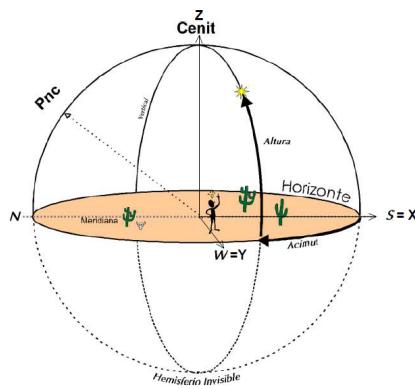


**Figura 1.4:** Coordenadas horizontales

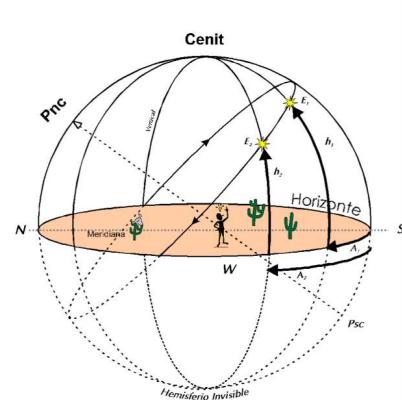
Este sistema es un **sistema local**, es decir, los astros dependen del lugar del punto en la tierra desde el que se está observando. Además, también varían en función del momento del día. Esto es evidente si pensamos por ejemplo en el sol: para diferentes horas del día se encontrará a diferente altura (y en diferente acimutal).

Las definiciones más interesantes, de cuyos elementos geométricos vamos a tratar:

- **Almicantarat:** es el círculo menor, paralelo al plano del horizonte, pero más pequeño. Basicamente es la línea para la cual la antura  $h$  está fijada. Véase fig. 1.4.
- **Círculo vertical:** son los círculos máximos que pasan por el eje  $Z$  y  $Z'$  (céntro-nádor), lo que corresponde con un meridiano en el globo terrestre. Línea para la cual el ángulo horario  $H$  es constante. Véase fig. 1.4.



(a) Coordenadas horizontales.



(b) Cambio de posición del sol a lo largo del día.

### 1.2.2. Coordenadas ecuatoriales horarias

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje  $z$  entonces el eje del mundo. Es un *sistema levógiro*, que define el eje  $X$  como aquel que apunta hacia el sur (hemisferio norte) o que apunta hacia el norte (hemisferio sur), pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación**  $\delta$ , definida igual que la altura para las coordenadas horizontales pero ahora usando como referencia el plano ecuatorial. Tiene valores desde los  $90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontramos.
- Definimos el **ángulo horario**  $H$  como el acimut, el ángulo entre el eje  $x$  y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

Se definen los siguientes elementos geogélicos como fundamentales:

- Los **paralelos celestes** son las líneas en las que está fijada la declinación  $\delta$ , similares a los paralelos en el globo terrestre o a los almicantarats en las coordenadas horizontales.
- Los **meridianos celestes** que son las líneas en las que fijamos el ángulo horario  $H$ , similares a los meridianos en el globo terrestre o a los círculos verticales en el caso de las coordenadas horizontales.

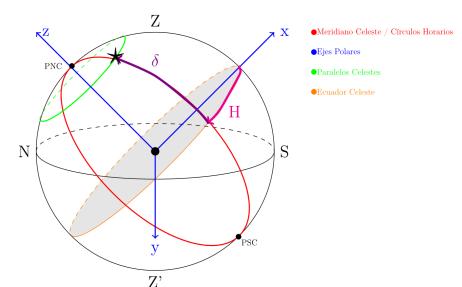


Figura 1.6: Coordenadas horarias

### 1.2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje  $z$  entonces el eje del mundo. Es un *sistema dextrógiro*, que define el eje X como aquella recta del plano ecuatorial que se interseca con la eclíptica. También se le llama *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano ecuatorial y el plano eclíptico coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica  $\varepsilon$ ). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación**  $\delta$ , definida igual que en el sistema ecuatorial horario, tiene valores desde los  $90^\circ$  a  $-90^\circ$  Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.
- Definimos el **ascensión recta**  $\alpha$  como el acimut, el ángulo entre el eje  $x$  y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

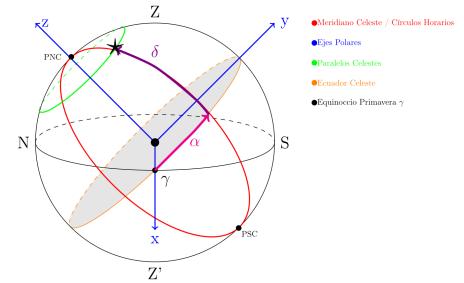


Figura 1.7: Coordenadas absolutas.

### 1.2.4. Coordenadas eclípticas

Las coordenadas eclípticas  $(\lambda, \beta)$  son exactamente iguales que las coordenadas ecuatoriales absolutas pero usando el plano eclíptico como plano fundamental. El eje  $x$  entre ambos es el mismo, por lo que la única diferencia entre ambos sistemas es una rotación  $\varepsilon$  (ángulo entre el plano eclíptico y el plano ecuatorial). Es un sistema dextrógiro, que define el eje X como la *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano eclíptico y el plano ecuatorial coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica  $\varepsilon$ ). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

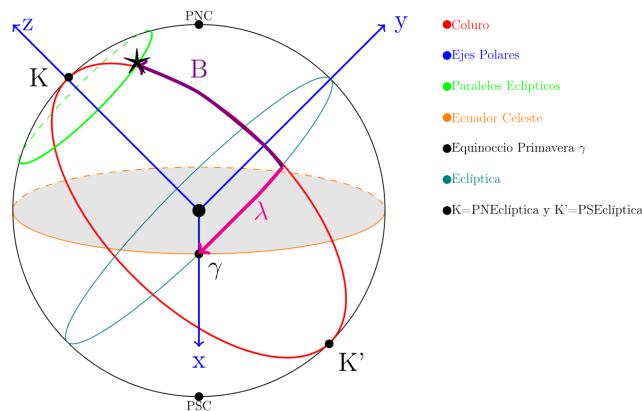


Figura 1.8: Coordenadas eclípticas.

- La **declinación**  $\delta$ , definida igual que en el sistema eclíptico horario, tiene valores desde los  $90^\circ$  a  $-90^\circ$  Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano eclíptico y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.
- Definimos el **ascensión recta**  $\lambda$  como el acimut, el ángulo entre el eje  $x$  y la proyección en el plano

eclíptico de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

Definimos los siguientes conceptos geométricos fundamentales:

- **Coluro:** círculo máximo que contiene el eje de la eclíptica, denotado por K'K, es decir, es el círculo que contiene a los meridianos, al igual que el círculo vertical en las coordenadas horarias, meridianos celestes en las ecuatoriales horarias.

### 1.2.5. Fenómenos astronómicos de interés

Además también tenemos que tener los siguientes *fenómenos astronómicos* en cuenta, entre los que encontramos:

- **Conjunción de dos astros:** misma ascensión recta o misma longitud eclíptica. Esto no implica que estén cerca entre ellos, solo que para el observador están superpuestos.
- **Precisión:** movimiento de giro de rotación de la Tierra lentamente alrededor del eje de la eclíptica. El plano ecuatorial vinculado al eje de rotación se desplaza lentamente de Este a Oeste en la dirección contraria a la eclíptica.
- **Nutación:** movimiento de vaivén relacionado con el eje de rotación terrestre debido a los cambios de posición relativos de Tierra, Luna y Sol. Tiene un periodo de 18.6 años y una variación de  $\epsilon$ .

## 1.3. Medidas de tiempo

### 1.3.1. Escalas rotacionales: tiempo sidéreo y tiempo solar

Definimos el **tiempo sidéreo** como  $\theta = H + \alpha$ , y su significado físico es claro: *es la posición del punto vernal y en las coordenadas ecuatoriales horarias*. Definimos el día sidéreo como el tiempo entre dos pasos consecutivos del punto vernal por el meridiano superior de lugar.

## 1.4. Transformaciones de Coordenadas

:

Se hacen a través de las matrices de rotación, definidas para sistemas dextrógiros que debido a la diferencia de naturaleza dextrógiros y levógiros de algunos sistemas habrá que corregir.

## Ejercicios

### Ejercicio 1

Prueba que el azimut y el ángulo horario de un astro en sus puntos de orto y ocaso,  $A_0$  y  $H_0$ , para un observador a una latitud  $\phi$ , satisfacen la siguientes relaciones:

$$\cos(A_0) = -\frac{\sin(\delta)}{\cos(\phi)} \quad \cos(H_0) = -\tan \delta \tan \phi \quad (1.4.1)$$

Recordamos que el orto y ocaso son los lugares del plano horizonte donde empieza a ser visible y deja de ser visible. Con respecto las coordenadas horizontales, la altura es cero  $h = 0^\circ$ , o lo que es lo mismo  $z = 90^\circ$ . Ahora tenemos que usar las coordenadas de Bessel, que relaciona las coordenadas horizontales  $(A, h)$  y horarias  $(H, \delta)$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

de lo cual se deduce que

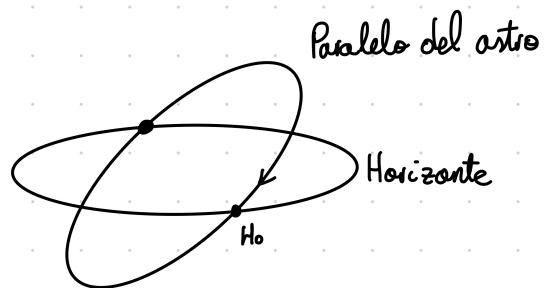
$$\sin \delta = -\cos(\phi) \cos A_0 \Rightarrow \cos(A_0) = -\frac{\sin \delta}{\cos \phi} \quad (1.4.3)$$

Y también se deduce que

$$\cos \delta \cos H_0 = \sin \phi \cos A_0 \Rightarrow \cos(H_0) = \frac{\sin \phi}{\cos \delta} \left( -\frac{\sin \delta}{\cos \phi} \right) \Rightarrow \cos(H_0) = -\tan \delta \tan \phi \quad (1.4.4)$$

### Ejercicio 2

¿Cómo relacionarías la información proporcionada por  $H_0$  con el tiempo que un astro permanece por encima del horizonte?



El tiempo que un astro está encima del horizonte corresponde a  $2H_0$ . Puso  $H_{\text{orto}} = -H_{\text{octaso}}$ .

### Ejercicio 3

¿Cuántas horas máximas y mínimas del Sol por encima del horizonte a lo largo de un día podemos tener en Santiago de Compostela? Dato:  $\phi = 42^\circ, 52', 40''$ .

El máximo de horas ocurre cuando estamos el solsticio de verano. En este caso sabemos que  $\delta = \epsilon$ . Usando las ecuaciones del primer ejercicio:

$$H_0 = 7^h 34^m 57^s \Rightarrow 2H_0 = 15^h 9^m 54^s \quad (1.4.5)$$

El mínimo de horas del sol es en el solsticio de invierno. En este caso

$$\delta = -\varepsilon \Rightarrow 2H_0 = 8^h 50^m 4^s \quad (1.4.6)$$

#### Ejercicio 4

Las coordenadas ecuatoriales absolutas de una estrella son  $\alpha = 3^h 45^m 43^s$ , y  $\delta = 20^\circ 8' 27''$ . ¿Podremos observarla desde la Facultad de Matemáticas ( $\phi = 42^\circ 52' 26''$ ) en el instante en el que el punto vernal está en la dirección norte? [Solución: Dado que  $h < 0^\circ$  ( $h = -8^\circ 24' 29''$ ), la estrella no será visible.]

Nos dan las coordenadas ecuatoriales absolutas. La condición para no ver un astro desde un punto de la tierra es que dicho astro, en las coordenadas horizontales, verifique que su altura tiene ángulos negativos ( $h < 0^\circ$ ). Consecuentemente solo tenemos que calcular  $h$  a partir de  $\alpha$  y  $\delta$ . ¿Cómo lo hacemos?

Primero calculamos el valor de las coordenadas ecuatoriales horarias. Como sabemos  $\delta_{\text{horaria}} = \delta_{\text{absolutas}}$  y  $\alpha + H = \theta$ , siendo  $\theta$  la posición del punto vernáculo en las horizontales. Cuando nos dicen que el punto vernáculo apunta al norte, nos están dado el dato de  $\theta$ . Como  $x$  en las horarias apunta al sur,  $\theta = 180^\circ$ . Así pues:

$$H = 12^h - 3^h 45^m 43^s = 8^h 14^m 17^s \approx 120.24^\circ \quad \delta = 20^\circ 8' 27'' \quad (1.4.7)$$

Ahora solo tenemos que transformar las coordenadas ecuatoriales horarias en las horizontales. Esto también es sencillo, ya que es rotar un  $\phi$  los ejes  $x$  y  $z$ , tal que:

$$\begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

Y ya podríamos obtener el valor de  $h$ , solo faltando despejar. Teniendo en cuenta que  $\phi = 42^\circ 52' 26''$ . Para calcular  $h$  (que es lo único que necesitamos en realidad) despejamos:

$$\sin h = \cos \phi \cos \delta \cos H + \sin \phi \sin \delta \quad (1.4.9)$$

que es:

$$\sin h = -0.1125 \implies h = -8.5^\circ \quad (1.4.10)$$

La solución correcta es  $h = -8^\circ 24' 29''$ . La diferencia es posiblemente culpa de los decimales, porque no hemos convertido correctamente los segundos y minutos.

#### Ejercicio 5

Un cometa tiene coordenadas ecuatoriales absolutas  $\alpha = 10^h 3^m 57^s$  y  $\delta = 8^\circ 24' 54''$ . ¿Cuáles son sus coordenadas eclípticas? [Solución:  $\lambda = 150^\circ 3' 19''$   $\beta = -3^\circ 14' 31''$ .]

Para pasar de las coordenadas ecuatoriales absolutas a las coordenadas eclípticas solo tenemos que hacer una rotación, ya que el eje  $x$  es el mismo (punto vernal). Así pues, solo tenemos que aplicar la matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (1.4.11)$$

Recordamos que  $\epsilon = 20^\circ 26' 29''$ ,  $\alpha = 10^h 3^m 57^s$  y  $\delta = 8^\circ 24' 54''$ . Primero obtenemos  $\beta$ :

$$\sin \beta = -\sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha + \cos \epsilon \sin \delta \quad (1.4.12)$$

$$\sin \beta = 0.05986 \implies \beta = 3.432^\circ \quad (1.4.13)$$

Luego solo tenemos que despejar  $\lambda$ . Sabiendo que

$$\cos \lambda = \frac{\cos \delta \cos \alpha}{\cos \beta} \Rightarrow \cos \lambda = -0.853^\circ \Rightarrow \lambda = 150.19^\circ \quad (1.4.14)$$

Siendo la solución correcta  $\lambda = 150^\circ 3' 19''$   $\beta = -3^\circ 14' 31''$ .



# Capítulo 2

## Mecánica Celeste

### 2.1. Problema de los dos cuerpos

#### 2.1.1. Leyes de Kepler

Podríamos decir que el problema de los dos cuerpos comienza con la formulación de las tres leyes para el movimiento planetario por parte de Kepler. Estas tres leyes trataban de dar cuenta sobre como se movían los astros alrededor del Sol, y entonces los primeros pasos para la descripción de los cuerpos celestes:

- **Ley de las órbitas:** los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos de la elipse.
- **Ley de las áreas:** la línea que conecta un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- **Ley de períodos:** el cuadrado del período orbital de un planeta ( $T$ ) es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (2.1.1)$$

donde  $a$  es el semi-eje mayor de la elipse, que es igual al promedio entre las distancias en perihelio  $r_p$  y afelio  $r_a$ <sup>1</sup>

#### 2.1.2. Ecuaciones diferenciales fundamentales

El *problema de los dos cuerpos* o *problema de Kepler* es el nombre que se le da al problema de la dinámica de dos cuerpos celestes (suponiendo que estos están completamente aislados). Este problema hoy en día esta asociado a 6 ecuaciones diferenciales no lineales, autónomas<sup>2</sup> de segundo orden, las cuales vienen dadas en última instancia por la *ley de gravitación universal de Newton*. Estas ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

<sup>1</sup>Más tarde definiremos mejor que es un afelio y perihelio, pero dicho rápidamente, el afelio es el punto de la órbita del planeta más alejado del Sol, y el perihelio el punto más cercano.

<sup>2</sup>Que una ecuación diferencial sea autónoma significa que no depende explícitamente de la coordenada diferencial, en nuestro caso, el tiempo.

donde  $\mathbf{r}_1$  es la posición del cuerpo de masa  $m_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  la posición del cuerpo de masa  $m_2$  y  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  la distancia entre los dos cuerpos. Podemos ver que son ecuaciones invariantes frente a invariancia temporal. Para resolver este problema de manera analítica se suele usar un cambio de variables muy sencillo:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (2.1.3)$$

tal que  $\mathbf{r}_c$  es la *posición del centro de masas* y  $\mathbf{r}$  es la *posición reducida*. Veamos que este cambio de coordenadas es invertible:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c + \frac{m_2}{m_2 + m_1} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c - \frac{m_1}{m_2 + m_1} \mathbf{r} \quad (2.1.4)$$

Una vez fijamos el nuevo sistema llamado **sistema reducido**, tenemos que las ecuaciones diferenciales pasan a ser mucho más sencillas:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = 0 \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.1.5)$$

donde  $\mu$  es la llamada *masa reducida* y se define como  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . La primera ecuación tiene una solución extremadamente sencilla  $\mathbf{r}_c(t) = a + bt$ , y esta nos lleva a la conservación de las cantidades *momento total*  $\mathbf{P}$  y *momento angular total*  $\mathbf{L}$ , definidos como

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2 \quad (2.1.6)$$

donde  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$ . Siempre podemos encontrar un sistema de referencia donde el centro de masas está quieto, tal que  $\mathbf{P} = 0$ . A este sistema de referencia lo llamamos *sistema de referencia del centro de masas*, y lo que nos dice es que  $\mathbf{r}_c(t) = 0$ , y por tanto que el movimiento de  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  está determinado únicamente por su movimiento relativo  $\mathbf{r}$ . A la hora de describir la órbita de dos cuerpos este es el sistema de referencia más usado, por ser el más sencillo.

### 2.1.3. Solución de la ecuación reducida

El problema de los dos cuerpos se reduce ahora a obtener la solución de la ecuación reducida

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \mu = G(m_1 + m_2)$$

Estas 3 ecuaciones diferenciales de grado 2 se pueden expresar como 6 ecuaciones diferenciales de grado 1, tales que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Para solucionar estas ecuaciones diferenciales lo que haremos es suponer que existen varias cantidades conservadas (las cuales efectivamente se conservarán). Estas cantidades conservadas son:

- **Momento angular:**  $\mathbf{c} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ .
- **Energía:**  $h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$ .
- **Vector excéntrico:**  $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{c} - \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Estas cantidades representan un total de siete constantes del movimiento. Sin embargo, no son completamente independientes, ya que están ligadas por al menos dos relaciones fundamentales:

- Ortogonalidad entre el momento angular y el vector excéntrico

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (2.1.8)$$

- Relación entre la excentricidad, energía y momento angular.

$$e^2 = \frac{2hc^2}{\mu^2} + 1 \quad (2.1.9)$$

siendo  $c$  el módulo de  $\mathbf{c}$  y  $e$  el módulo de  $\mathbf{e}$ , al que se le llama **excentricidad**.

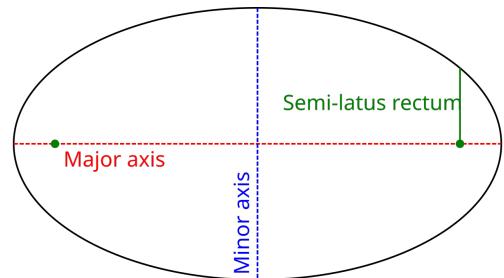
Debido a estas restricciones, *el número de grados de libertad efectivos en el problema de la masa reducida se reduce a cinco*, con un parámetro libre que definirá nuestra órbita, a saber, un ángulo. Antes de hablar del ángulo debemos definir el plano en el que dicho ángulo es un ángulo polar, el cual será evidente: si  $\mathbf{c}$  se conserva, la posición  $\mathbf{r}$  y velocidad  $\mathbf{v}$  de nuestra partícula virtual forman un plano en el que el movimiento de la masa reducida está restringida. Este plano se llama *plano orbital*, y el movimiento de las partículas 1 y 2 están confinadas en este plano, y por tanto el movimiento reducido depende de dos coordenadas, de la distancia al punto cero del sistema de referencia (que en general será  $\mathbf{r}_c = 0$ ) y el ángulo con un eje de dicho plano (un eje arbitrariamente elegido). Dado que  $\mathbf{c} \times \mathbf{e} = 0$ , podemos afirmar que el vector excéntrico  $\mathbf{e}$  vive en el plano orbital, y como no varía con el tiempo, es un buen eje para tomarlo como eje de referencia. En general este vector se suele elegir como el ángulo el conformado por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{e}$ , que llaremos **anomalía verdadera**.

$$\cos(f) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{e}|} \quad (2.1.10)$$

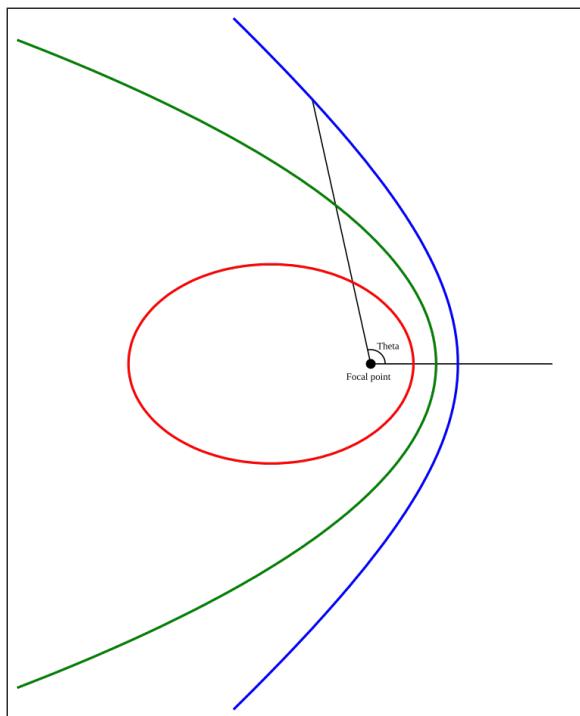
Una vez tenemos todo esto la ecuación diferencial del vector posición reducido tiene la siguiente solución

$$\mathbf{r}(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e \cos(f)} \quad (2.1.11)$$

A la cantidad  $l = c^2/\mu$  la llamamos *semilatus rectum* se define como la distancia para la cual  $f = \pi/2$ . En el caso de una elipse, esta distancia se puede entender como la distancia que hay entre uno de los focos de la elipse y la elipse en una línea perpendicular al semieje mayor. Esta definición es un poco liosa, por eso recomendamos ver el dibujo. La distancia entre el centro y la masa reducida también depende de la anomalía verdadera, y la excentricidad, que define el tipo de órbita que seguirá nuestra partícula. Las trayectorias son cónicas, tales que:



- **Trayectoria circular:** ocurre cuando  $e = 0$ , tal que  $r = l$ .
- **Trayectoria elíptica:** ocurre cuando  $e < 1$ . En este caso aparecen lo que llamamos la *periapsis*, que es la distancia más pequeña a la que se puede encontrar nuestra partícula reducida del centro del SR, tal que  $r_{per} = l/(1+e)$ ; y la *apoapsis* que es la distancia más grande a la que se puede encontrar nuestra partícula del centro del, tal que  $r_{ap} = l/(1-e)$ . Cuando estos términos se refieren a la trayectoria de la tierra sobre el sol las llamamos perigeo y apogeo, y cuando es de un planeta cualquiera respecto al sol decimos perihelio y apohelio.
- **Trayectoria parabólico:** ocurre cuando  $e = 1$ .
- **Trayectoria hiperbólica:** ocurre cuando  $e > 1$ .



**Figura 2.1:** Órbitas de Kepler en función de la excentricidad. En color rojo  $e = 0.7$ , en color verde  $e = 1$  y en color azul  $e = 1.3$ . Imagen de la [Wikipedia](#).

Hablar de la dependencia de la trayectoria con la energía + imagen. Begoña le dio bastante importancia.

Imagen de las partes de una elipse (semieje mayor, menor...)

#### 2.1.4. Plano orbital en función de otro plano de referencia

Como hemos visto, los cuerpos se mueven en el llamado *plano orbital*. Su movimiento, en este plano, depende de 3 parámetros: el momento angular  $\mathbf{c}$  (el cual define la dirección del plano y el *semilatus rectum*), la anomalía verdadera  $f^3$  y el valor de la excentricidad  $e$ . Sin embargo nosotros no usaremos como referencia el *plano orbital*, sino otro. Para definir el *plano orbital* respecto al *plano de referencia* (esto es, el eje de coordenadas), usamos 3 coordenadas, para las cuales es importante definir el *vector nodo ascendente*  $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{c}$ . Este vector define lo que llamamos el punto *nodo ascendente*, y está contenido tanto en el *plano orbital* como en el *plano de referencia*. Las 3 coordenadas:

- **Inclinación ( $i$ ):** ángulo entre el *plano de la órbita* y el *plano referencia*.

$$\cos(i) = \frac{\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{c}| |\hat{\mathbf{z}}|} \quad (2.1.12)$$

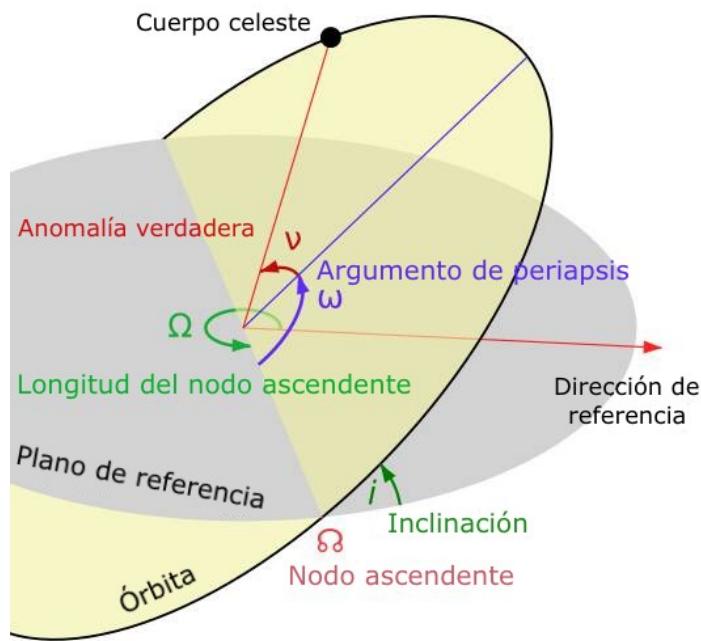
- **Longitud del nodo ascendente ( $\Omega$ ):** Ángulo medido en *plano de referencia* desde la dirección de referencia hasta la dirección del *nodo ascendente*:

$$\cos(\Omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{N}| |\hat{\mathbf{x}}|} \quad (2.1.13)$$

<sup>3</sup>Se emplea el tiempo de paso por el periastro  $\tau$ , la anomalía media  $M$  y la longitud media  $L$ .

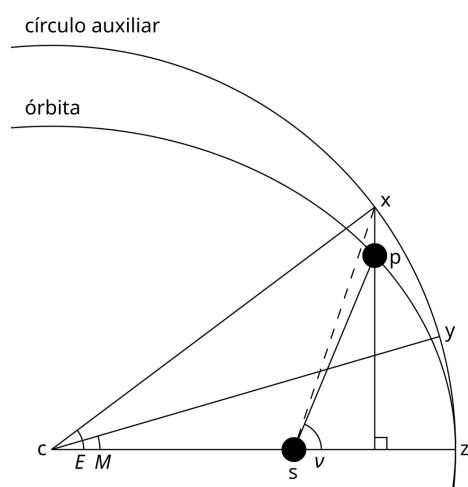
- **Argumento del periastro ( $\omega$ )**. Ángulo medido en el plano de la órbita desde la dirección del nodo ascendente hasta el periastro.

$$\cos(\omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{N}| |\mathbf{e}|} \quad (2.1.14)$$



**Figura 2.2:** Definición de los 3 parámetros necesarios para describir un plano orbital en el de referencia.

### 2.1.5. Anomalía verdadera, excéntrica, media y longitud media



**Figura 2.3**

Hizo todo el cálculo sobre como obtener  $e$  (demostración de que se conserva), como obtener  $e$  y su relación con la energía (fácil, pero zzz).

También hizo un dibujo, donde el eje x es la energía, el eje y el momento angular, y represento cual es el tipo de órbita en función de la región de dicho espacio de fases (elíptico, hiperbólico, parabólico, colisión...)

Se está centrado bastante en las características de la anomalía media (dice que varía a velocidad constante). Hablar de las demás cosas, significado, uso, razón. (Video de true anomaly vs mean anomaly), así vemos la relación entre ellas.

## 2.2. Problema de los tres cuerpos

### 2.2.1. Introducción

Se le llama al problema de los tres cuerpos al problema de la dinámica de tres masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  que se mueven por la acción gravitacional mutua entre ellos. En general este problema no tiene solución analítica, dado que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones que podemos emplear.

### 2.2.2. Problema de los tres cuerpos restringido y puntos de Lagrange

El problema restringido o problema de Euler al problema de la dinámica de 3 cuerpos en el que despreciamos el efecto gravitacional sobre los otros dos, que orbitan entre sí. Esto se puede hacer cuando una de las masas es mucho menor que las otras dos (los llamados *cuerpos primarios*)  $m_1, m_2 \gg m_3$ . Un ejemplo de un cuerpo al que se le podría aplicar este tipo de dinámica es a un asteroide en el sistema solar donde  $m_1$  y  $m_2$  son el Sol y Júpiter. Este problema sí que es integrable, y se obtiene a partir de los siguientes pasos:

- Se considera que los cuerpos masivos  $m_1$  y  $m_2$  se mueven en órbita circular alrededor de su centro de masas ( $O$ ) y en el mismo plano de movimiento. Obtenemos la dinámica de ambos cuerpos.
- Luego obtenemos la posición y velocidad de  $m_3$  a partir de las posiciones y velocidades de  $m_1$  y  $m_2$  en cada momento.

En el problema de los tres cuerpos restringido aparecen 5 puntos de equilibrio (en un instante dado). A estos puntos se les llaman *puntos de Lagrange*, y los dividimos en 2 tipos:

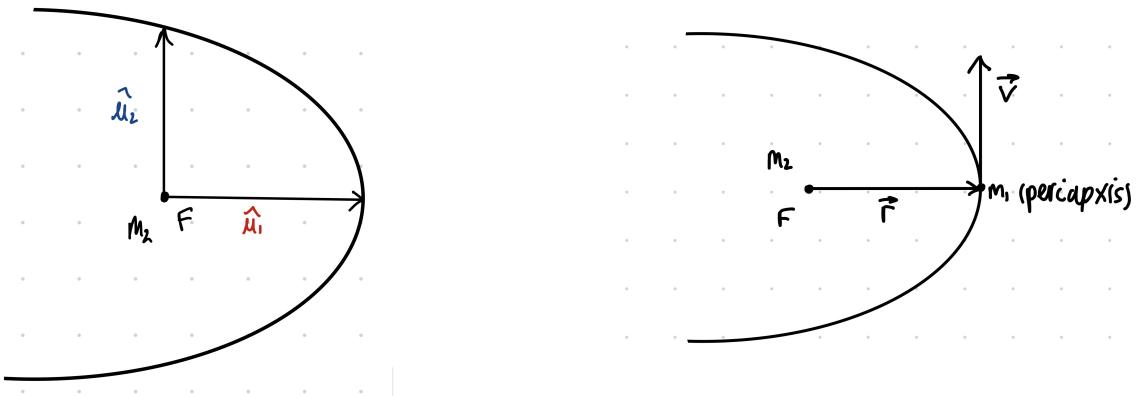
- *Colineales*:  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ . Son inestables tipo *silla*, también poseen una parte tipo *centro*, que se emplea para situar satélites. En el caso Sol-Tierra encontramos por ejemplo el telescopio James Webb en  $L_2$  o la sonda SOHO en  $L_1$ .
- *Triangulares*:  $L_4$  y  $L_5$ . Son estables siempre que se verifique  $\mu = m_2/(m_1 + m_2) < 0.0385$  (cuando  $m_1 > m_2$ ) son linealmente estables, en caso contrario, son inestables. Cuando son estables (por ejemplo, Sol-Júpiter) encontramos asteroides confinados en estos puntos. También podemos encontrar algunos asteroides en los sistemas Sol-Tierra o Sol-Marte.

## Ejercicios

### Ejercicio 3

Prueba que el vector excentricidad, o eje excéntrico,  $\vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \wedge \vec{c}) - \frac{\vec{r}}{r}$ , lleva sentido hacia la periapsis.

Tenemos que demostrar que el vector excentricidad lleva el sentido hacia la periapsis.



Tenemos que  $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{u}}_3$  donde  $\hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{u}}_1 \wedge \hat{\mathbf{u}}_2$ . Supongo que  $m_2 \gg m_1$ . Entonces:

$$\mathbf{r}_c \approx \mathbf{r}_2 = 0 \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \quad \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_2 \quad (2.2.1)$$

Y por tanto  $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Ahora hacemos que

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_2 & \hat{\mathbf{u}}_3 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = vc\hat{\mathbf{u}}_1 \quad (2.2.2)$$

Y por tanto:

$$\mathbf{e} = \frac{vc}{\mu}\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1 \Rightarrow \mathbf{e} = \left[ \frac{vc}{\mu} - 1 \right] \hat{\mathbf{u}}_1 \quad (2.2.3)$$

quedando demostrado que lleva el sentido de la periapsis.

### Ejercicio 3

El pasado mes de octubre (2024) se pudo observar desde nuestra posición geográfica el cometa C/2023 A3 (Tsuchinshan-ATLAS) en su acercamiento en movimiento parabólico al Sistema Solar. Queremos calcular su distancia más cercana al Sol y para ello nos hemos descargado sus efemérides del Small-Body Database (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>) para el día 12/10/2024 a las 22:00 horas:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (5.3823308478186 \times 10^{-1}, 9.0771915790989 \times 10^{-2}, 9.6661892045926 \times 10^{-2}) \text{ ua} \\ \vec{v} &= (1.7983375835632 \times 10^{-2}, -1.7986317330981 \times 10^{-2}, 2.0201122328974 \times 10^{-2}) \text{ ua/d} \end{aligned}$$

Así, obten/responde a las siguientes preguntas:

- Obtén el perihelio de este cometa.
- En la misma base de datos se indica que el perihelio es de 0.3914 ua, ¿es la misma que has encontrado? ¿Por qué?

Datos:  $G = 6.6738 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} = 1.4881 \times 10^{-34} \text{ ua}^3\text{d}^{-2}\text{kg}^{-1}$ . Masa del Sol:  $1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ . [Solución: 2.1.) 0.3787 ua.]

Tenemos la ecuación para conocer el ángulo:

$$r(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e \cos(f)} \quad (2.2.4)$$

Cuando  $e = 1$  tenemos perihelio  $f = 0$ . El valor de  $r_p = c^2/2\mu$ . El valor de la masa reducida

$$\mu = G(m_{\text{sol}} + m_{\text{cometa}}) \simeq Gm_{\text{sol}} = 2.95 \cdot 10^{-4} \text{ua}^3/d$$

(ddespreciamos la masa del cometa). Ahora calculamos

$$c = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = 0.015ua^2/ \quad (2.2.5)$$

de lo que puedo obtener el valor de  $r_p$ :

$$r_p = \frac{c^2}{2\mu} = 0.379 \text{ua} \quad (2.2.6)$$

### Ejercicio 3

Marte tiene dos satélites naturales, Phobos y Deimos, que orbitan a su alrededor en órbita elíptica, del mismo modo que Marte orbita alrededor del Sol. Hemos observado que el período orbital de Phobos es de 0.319033 días y su semi-eje mayor es de 9400 km. Sabiendo que el período y semi-eje mayor de Marte son de 686.98 días y  $227.956 \times 10^6$  km, respectivamente, halla la masa de Marte. Dato: Masa del Sol  $1.989 \times 10^{30}$  kg. [Solución:  $6.46 \times 10^{23}$  kg.]

Para este ejercicio tenemos que aplicar la tercera ley de Kepler. Dado que  $M_{\text{Sol}} \gg M_{\text{Marte}} \gg M_{\text{Fobos}}$ , tenemos que las leyes de Kepler de Marte orbitando al Sol y Fobos orbitando a Marte son (donde hemos supuesto que la masa reducida es igual a la masa del objeto masivo, siendo una buena aproximación si tenemos en cuenta los muchos ordenes de magnitud que las separan entre sí):

$$T_{\text{Marte}}^2 = \frac{4\pi a_{\text{Marte}}^3}{GM_{\text{Sol}}} \quad T_{\text{Fobos}}^2 = \frac{4\pi a_{\text{Fobos}}^3}{GM_{\text{Marte}}} \quad (2.2.7)$$

Es evidente que podemos despejar  $M_{\text{Marte}}$ :

$$M_{\text{Marte}} = \frac{a_{\text{Fobos}}^3}{a_{\text{Marte}}^3} \frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Fobos}}} M_{\text{Sol}} \quad (2.2.8)$$

de lo que se deduce  $M_{\text{Marte}} \approx 6.475 \cdot 10^{23}$  kg.

### Ejercicio 3

La Estación Espacial Internacional (ISS) realiza 15.5 órbitas alrededor de la Tierra en un día y alcanza una altitud sobre la superficie terrestre de 413 km en el perigeo y de 422 km en el apogeo.

- Halla el semi-eje mayor, la excentricidad y el período de la órbita de la ISS alrededor de la Tierra.
- Calcula las velocidades máxima y mínima alcanzadas.
- Estima la masa de la Tierra. ¿Es el mismo valor que encontramos en las bases de datos?

Datos:  $G = 6.6738 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ , radio medio de la Tierra  $R = 6367.44$  km. [Solución: 5.1)  $a = 6784.945$  km,  $e = 0.00066$ ,  $T = 92.9$  min. 5.2)  $v_{\text{máx}} = 7777.01$  m/s,  $v_{\text{mín}} = 7521.52$  m/s. 5.3)  $M_T = 5.946912 \times 10^{24}$  kg.]

# Capítulo 3

## Astrofísica

### 3.1. Introducción: escalas de tiempo y distancia

#### 3.1.1. Historia temporal del Universo

Los hallazgos de la física de partículas permiten conocer cual era la forma del universo en los primeros instantes tras el Big Bang. Esta historia en los primeros instantes está dividida en diferentes eras, a su vez divididas en épocas y períodos. Los límites que se le dan a estos períodos son estimaciones basadas en los mejores modelos cosmológicos, dando una idea de cual fue el comportamiento en los primeros instantes del universo.

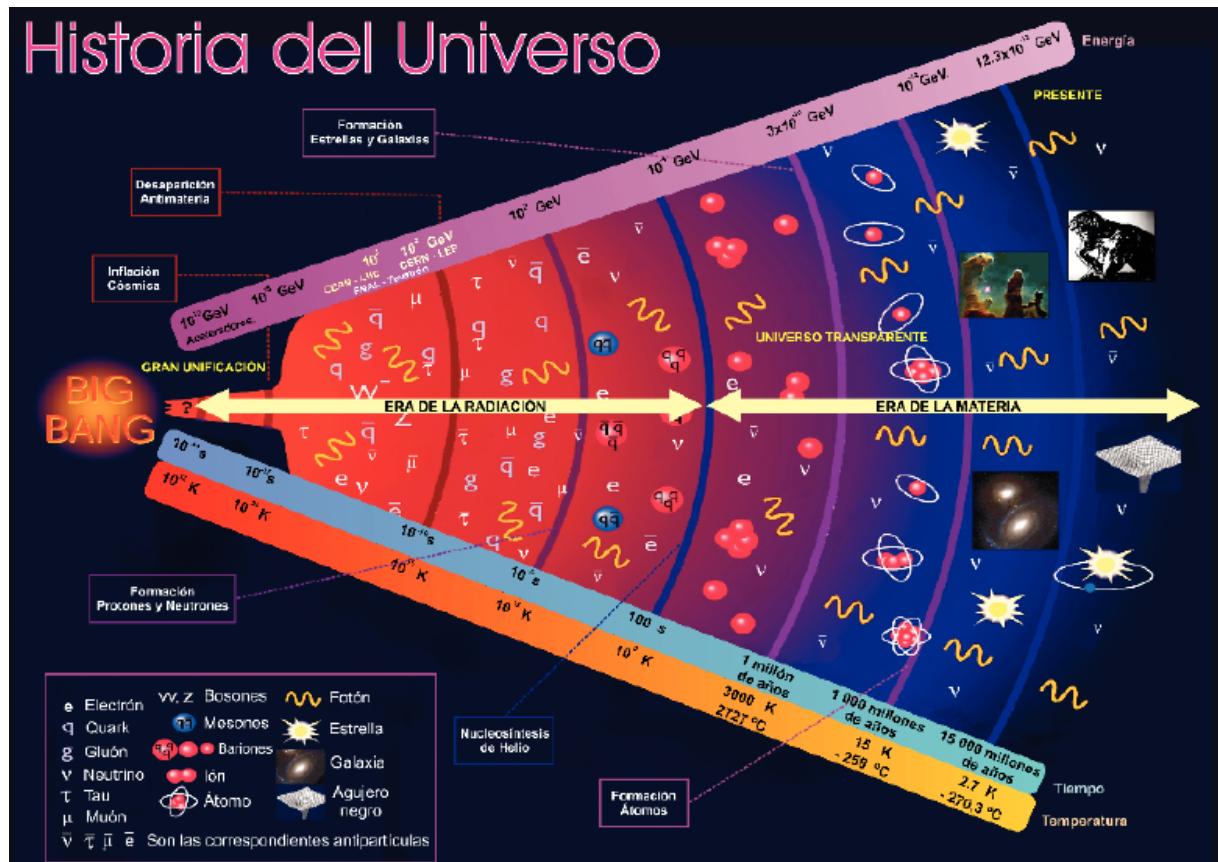


Figura 3.1: Historia del universo.

Las eras son 3, a saber:

- **Era de la radiación:** desde el inicio hasta aproximadamente  $4.2 \times 10^4$  a. Debe su nombre a que la mayor parte de la densidad de energía provenía de fotones y neutrinos.
- **Era de la materia:** desde  $4.2 \times 10^4$  a a  $2.7 \times 10^9$  a. Debe su nombre a que la mayor parte de la densidad de energía proviene de la materia (protones, neutrones, electrones...) tal y como la conocemos hoy en día.
- **Era de la energía oscura:** desde  $2.7 \times 10^9$  a al fin del universo. Debe su nombre a que la mayor parte de la densidad de energía proviene de la energía oscura.

Nos centraremos en las dos primeras ya que son aquellas que más influencia tienen sobre nosotros. Veamos cuales son las subdivisiones de estas, y cuales son los eventos más interesantes que tienen lugar en esta época.

### 3.1.2. Escalas de distancias

Cuando hablamos de longitudes en el universo hay que tener en cuenta la gran diferencias en cuanto órdenes de magnitud tanto en distancia de un objeto a otro como en el tamaño de los objetos. Los objetos con los que trata la astrofísica van desde unos miles de kilómetros  $\sim 10^7$  m, como exoplanetas; hasta tamaños galáticos o cumulares ( $\sim 10^{25}$  m). En cuanto a distancias ocurre lo mismo, alpha centauri (la estrella más cercana) está a unos 3.5 años luz, mientras que solo nuestra galaxia tiene  $\sim 200000$  años luz de diámetro.

Por esa misma razón medir distancias es tan complicado, y necesitamos varios métodos en función de lo lejos que esté el objeto y de lo grande que es. En este apartado lo que vamos a hacer es un recorrido desde los métodos para objetos más cercanos hasta aquellos más lejanos.

#### Objetos cercanos: paralaje estelar

El paralaje estelar es una medida de distancia que nos permite hallar la distancia a la que se encuentran objetos desde aproximadamente a 1/5 kpc (estos últimos con una gran incertidumbre).

#### Magnitudes aparentes, absolutas y relación con la distancia

Podemos usar el brillo de las estrellas/objetos para calcular la distancia a la que están los objetos. Sin embargo, existe un problema que hay que solventar: no todas las estrellas brillan igual, y por tanto la luminosidad como tal no es una magnitud, por si sola, buena para obtener distancias.

#### Escalas Galácticas y extragalácticas

Existen otras maneras que permiten las distancias cuando ya no funciona el paralaje. Los métodos se van solapando en una escalera de distancias cósmicas mediante la utilización de candelas estándar, objetos que tienen luminosidad  $L$  conocida o una característica que permite usarlas para medir la distancia en función del flujo observado. A escala galáctica tendremos:

- *Paralaje dinámico de estrellas binarias.*
- *Variables Cefeida.*

- *Variables RR Lyrae.*
- *Paralaje espectroscópico.*
- *Binarias eclipsantes.*

Para completar la escalera de distancias cósmicas tenemos las escalas extragalácticas:

- *Candela estelar.* Son cefeidas que se pueden detectar, sobretodo las más luminosas.
- *Características comunes.* Podemos suponer que algunos cúmulos son parecidos a los que ya conocemos y relacionar entonces la luminosidad vista con la distancia.
- *Supernovas tipo I.* Este es el método que más se usa junto con el corrimiento al rojo. Usa las violentas explosiones de supernovas, de las cuales conocemos el brillo esperado, para poder determinar cuan lejos está.
- *Corrimiento al rojo.*

### 3.1.3. Escalas galácticas: estrellas binarias

Las estrellas dobles o binarias son pares de estrellas que orbitan alrededor del centro común de masas. Estímase que la mitad de las estrellas observables en el cielo agrúpanse en estrellas binarias o sistemas múltiples. El estudio de las estrellas binarias permite calcular la masa y radios estelares y las instancias relativas de las estrellas, mediante procedimientos básicos de determinación de elementos orbitales.

- Binarias visuales: las dos estrellas son detectables ópticamente y sus elementos orbitales pueden determinarse a través de observaciones separadas en el tiempo. Conocese alrededor de mil setecientos binarias visuales.
- Binarias astrométricas: solo una de las estrellas es visible (por ejemplo una gigante roja y una estrella de neutrones, una será visible y otra no, pero la masa será similar, lo que hace que orbiten respecto un centro de masas, lo que si permitirá detectarlas, pero solo con el movimiento oscilatorio).
- Binarias eclipsantes: si las estrellas están orientadas con su plano orbital en la línea de visión cara la tierra, la curvatura de luz detectada mostrará variaciones (mínimos) periódicos cuando una de las estrellas eclipse total o parcialmente a la luz de la compañera. En muchas ocasiones permite medir las deformaciones y distorsiones o incluso la transferencia de masa entre estrellas.
- Binarias especiales: en la media del espectro de las estrellas se observa características que corresponden a dos tipos de espectros diferentes, en ocasiones con corrimientos Doppler diferentes
- Binarias espectroscópicas: las líneas espectrales de cada componente del par se desplazan en diferente sentido (cara azul o rojo) alternativamente.

Esta clasificación no es mutuamente exclusiva: ciertas binarias se estudian por diferentes procedimientos. La primera ley de Kepler nos dice que todos los objetos en una órbita circular se mueven alrededor del centro de masas en órbitas elípticas, siendo el centro de masa uno de los focos de la elipse. La segunda ley de Kepler nos dice que el radio vector entre dos objetos en órbita y el centro de masa recorre áreas iguales en tiempos iguales

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu}$$

La tercera ley de kepler nos dice que el cuadrado del período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica alrededor del centro de masa e inversamente proporcional a la masa total del sistema.

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

Partiendo de los elementos orbitales del par de estrellas se puede determinar el **coceinte de las masas**. Para este cálculo tenemos que determinar el plano orbital y proyectar las observaciones en ese plano, por definición del centro de masas.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Existe una clara relación entre la medida de la masa y la luminosidad (en magnitudes absolutas o en normalizada a Sol). Nótese que la escala logarítmica en ambos casos y en ambos ejes (la magnitud es una escala logarítmica). Más adelante veremos que esto fue uno de los indicativos para construir el diagrama de Herzsprung-Russel (luminosidad-temperatura).

### 3.1.4. Composición del Universo y el Sistema Solar

El origen de los elementos en la creación del sistema solar: el sistema solar se formó a partir del colapso de una nebulosa gaseosa con abundancias químicas e isotópicas uniformes y coincidentes con las observadas en otras partes del universo (obtenidas mediante mediciones espectroscópicas, granos presolares en meteoritos primitivos). Las abundancias químicas se obtiene la forma independiente y complementaria:

- Observaciones de la fotosfera solar.
- Análisis de una clase particular de meteoritos.

## 3.2. Teoría de la radiación

### 3.2.1. Propiedades corpusculares de la radiación

Para explicar el cuerpo negro es importante recordar las siguientes definiciones y conceptos:

- Radiación térmica: la emitida por un cuerpo como consecuencia de su temperatura.
- Cuerpo negro: emisor ideal, aquel cuya superficie absorbe toda radiación que incide sobre él.
- Radiaciónpectral: energía emitida en forma de radiación por un cuerpo negro a una temperatura  $T$  constante, con frecuencia en el intervalo  $(v, v + dv)$ , por unidad de ángulo sólido, área proyectada y tiempo.

A finales del siglo XIX las observaciones de los espectros térmicos no concordaban con las predicciones:

- Ley de Stefan-Boltzman. La referencia total emitida por  $B_T = \sigma T^4$ .
- Ley del desplazamiento de Wien.  $\lambda_{\text{máx}} = C/T$  siendo  $C$  una constante y  $\lambda_{\text{máx}}$  es la longitud de onda del máximo de  $B(\lambda)$ .

- Teoría de Plank: la densidad de energía (energía por volumen y longitud de onda/frecuencia) en una caja es:

$$\rho_\tau(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/k_B T} - 1} \quad (3.2.1)$$

que se deduce a partir del postulado de Plank: los estados físicos con un grado de libertad, donde su coordenada característica es función sinusoidal con el tiempo, solo pueden tener energías totales cuantizadas, según  $E = nh\nu$  con  $n = 1, 2, 3\dots$ . El ajuste de los datos experimentales con la teoría es impresionante.

### 3.2.2. Aplicaciones astrofísicas

La radiancia espectral (intensidad de radiación o energía por unidad de área, tiempo y ángulo sólido emitida en el rango de una longitud de onda entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ ). Una vez integrada podemos obtener la luminosidad:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (3.2.2)$$

### 3.2.3. Espectros atómicos

Los átomos pueden estar en diferentes estados de ionización con espectros característicos diferenciados. Los espectros observados corresponden a sistemas gaseosos en equilibrio local. En particular, a una temperatura  $T$  dada, el cociente de probabilidad de ocupación de los estados  $a$  y  $b$  con degeneración  $g_a$  y  $g_b$  vendrá dada por el *factor de Boltzmann*:

$$\frac{N_b}{N_a} \simeq \frac{P(S_b)}{P(S_a)} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_a - E_b)/k_B T} \quad (3.2.3)$$

De las relaciones entre las diferentes energías de los estados y de la temperatura podremos obtener el cociente de las ocupaciones de cada uno de los estados accesibles. Es preciso hacer un cálculo cuántico riguroso para determinar la degeneración  $g$  de un estado determinado.

La ecuación de Saha calcula el grado de ionización del gas cuando está en equilibrio térmico a partir de la función de partición para cada estado ionizado. El cociente entre el número de átomos en cada posible estado ionizado viene dado por:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left( \frac{2\pi m_e K_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{x_i}{kT}} \quad (3.2.4)$$

donde  $n_e$  es la densidad numérica de electrones libres, y la función de partición  $Z_i$  para llegar al estado ionizado:

$$Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} g_j e^{-(E_j - E_i)/kT} \quad (3.2.5)$$

Con todo, el significado de las leyes espectroscópicas de Kirchhoff para la astrofísica ahora resultan evidentes:

- Un gas denso y caliente o un objeto sólido produce un espectro continuo de radiación de acuerdo con la emisión de un cuerpo negro para una determinada temperatura, descrito por la radiaciónpectral descrita por Plank.

- Un gas difuso produce líneas de emisión brillantes cuando se producen transiciones de electrones de una órbita a otra más ligada. Las relaciones de Saha y Boltzmann permiten evaluar la intensidad relativa entre líneas tanto en los espectros de emisión como en los de absorción.
- Un gas difuso más frío que una fuentepectral captura de los fotones y ciertas(...)
- (...)

### 3.2.4. Efecto doppler

El **corrimiento Doppler** se produce cuando un movimiento del emisor de una onda modifica la longitud de onda observada. Llamando  $v_f$  a la velocidad radial entre emisión y receptor  $v_s$  a la velocidad de trasmisión de la onda en el medio:

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{v_r}{v_s} \quad (3.2.6)$$

Esta relación es válida para ondas de sonido, pero no se puede aplicar a la luz. Para la luz necesitamos una formulación relativista que tenga en cuenta la dilatación temporal relativista y la distancia adicional que recorre la luz. Si la fuente se mueve, respecto al observador,  $u$  ( $\beta = u/c$ ) y la luz se emite entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2 = t_1 + \Delta t$ :

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{rest}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.2.7)$$

Teniendo en cuenta el incremento de la distancia:

$$\Delta D = \frac{u \Delta t_{rest} \cos(\theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.2.8)$$

Con todo, el efecto global es:

$$\Delta t_{obs} = \frac{\Delta t_{rest}}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 + \beta \cos(\theta)) \quad (3.2.9)$$

El corrimiento Doppler relativista se obtiene de la diferencia temporal  $\Delta t_{obs}$ . Aplicándolas para determinar las frecuencias según el observador:

$$v_{obs} = \frac{v_{rest}}{\gamma(1 + \beta \cos(\theta))} \quad (3.2.10)$$

para el desplazamiento radial:

$$v_{obs} = v_{rest} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (3.2.11)$$

Observamos un desplazamiento al rojo de las longitudes de onda cuando los objetos que emiten la luz se alejan a altas velocidades de nosotros, de igual forma, en el caso de acercarse, veríamos un desplazamiento al azul. Definimos el parámetro  $z$  como el **parámetro del corrimiento al rojo** como:

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_{rest}} \quad (3.2.12)$$

Los efectos tienen que tener en cuenta las variaciones de las frecuencias de las líneas espectrales observadas pero también en los efectos periódicos, en los que ha que calcular el tiempo propio del sistema que

recede. El parámetro  $z$  del corrimiento al rojo puede venir motivado por el corrimiento doppler relativista, pero también por la meisión de radiación en un campo gravitatorio (corrimiento al rojo gravitacional) y también por la expansión propia del Universo (corrimiento al rojo cosmológico).

### 3.2.5. Tipos espetrales de las estrellas

La clasificación moderna de Harvadr o Morgan-Keenan asigna letras a los tipos espetrales en una secuencia decreciente de temperaturas: O, B, A, F, G, K, M, L, T. Cada clase posee subdivisiones (10, del 0 al 9) en función las características que paulatinamente se van sucediendo. Existen otras clases (D,S,C) para espectros de estrellas especiales que no se enmarcan en la categorización anterior. De forma adicional (veremos más adelante el diagrama HR y su importancia), diferentes características de espectros diferentes entrellas que llevan a añadir:

- O o Ia+: hipergigantes o supergigantes extremadamente luminosas.
- Ia: supergigantes muy luminosas.
- Iab: supergigantes luminosas de tamaño intermedio.
- Ib: supergigantes menos luminosas.
- II: gigantes brillantes.
- III:

Hay muchos detalles más que a veces aparecen como subíndices, notas, paréntesis... Además hay clases adicionales para estrellas especiales novas o que no entran bien en la categorización: W (tipo Wolf-Rayet), L, T, Y (especroes infrarrojos), estrellas con carbón (C-R,C-J,C-H,C-Hd) clase S similar a la M pero con fuertes líneas de absorción de ZrO, y clases P y Q para objetos estelares. Además una completa caracterización para las enanas blancas.

#### **Tipo O**

El tipo O son gigantes (más de 16 masas solares) azules, extremadamente calientes ( $3.3 \times 10^4$  K) y luminosas, que radian ampliamente en el UV. Son escassas pero comprenden alguna de las estrellas más conocidas. Tienen líneas de absorción dominantes para el He II. Son estrellas que no tienen atmósferas grandes debido al viento estelar que producen. Tienen enormes cores calientes y quemddan de forma rápida su hidrógeno, quedando poco tiempo en la secuencia principal.

#### **Tipo B**

Son estrellas calientes ( $1 - 3.3 \times 10^4$  K) azules de tamaño medio-gradne (mas de dos masas solares), muy luminosas. El 0.125 % de las estrellas en la secuencia principal son del tipo A.

#### **Tipo A**

Son estrellas blancas-azuladas calientes (7500-10000 K), grandes (del promedio de dos masas solares, de 1 a 15) cuando están en la secuencia principal y de las más brillates en el cielo nocturno. El 0.625 % de las estrellas en la secuencia principal son del tipo A.

**Tipo F**

Estrella blanco amarillenta (6000-7500 K) del tamaño del sol. El 3 % de las estrellas en la secuencia principal son del tipo F.

**Tipo G**

Son estrellas amarillas (5200-6000 K) del tamaño del Sol

**Tipo K****Tipo M**

Son estrellas rojas, enanas en la secuencia principal con bajo brillo que las hacen invisibles al ojo humano. Cerca del 76 % de las estrellas.

**Ordenando en la Información****3.3. Diagrama de Hertzsprung-Rusell y la secuencia principal****3.3.1. Diagrama experimental**

En el diagrama Hertzsprung-Russel (HR) se nos muestra el índice de color (temperatura en la superficie) frente al brillo (luminosidad o magnitud aparente). Por lo tanto la información de la distancia estelar es muy importante. La larga diagonal denominada **secuencia principal** donde las estrellas están en la etapa de quemado H en He. Las estrellas mas masivas se encuentran en la zona superior (gigantes) y las menos masivas en la parte inferior.

En función de la zona del espacio en la que apuntemos podremos hacer un diagrama HR u otro.

**3.3.2. Diagrama teórico**

Usando las leyes de Stefan-Boltzmann podemos conocer las relaciones de radios entre dos estrellas con la misma temperatura y diferente luminosidad. Para una estrella esférica de radio R, la ley de Stefan Boltzmann permite relacionar luminosidad  $L$ , flujo de energía en la superficie  $F$  y temperatura efectiva de la estrella  $T_e$ :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad R = \frac{1}{T_e^2} \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}} \quad (3.3.1)$$

Así una estrella 100 veces más lumenosa tiene que tener un radio 10 veces más grande. Hay varios tipos de cúmulos: cúmulo abierto podría ser la nebulosa de orión, cúmulo cerrado y cúmulo globular.

**3.3.3. Características del diagrama de Hertzsprung-Rusell****3.3.4. Diagrama de Hertzsprung-Rusell y la secuencia principal****3.4. Ecuaciones de equilibrio estelar y teorema del virial****3.4.1. Introducción**

Las estrellas son enormes concentraciones de gas a distintas temperaturas, densidades, composiciones, sufriendo procesos termo e hidrodinámicos complejos fuera del equilibrio, bajo interacciones nucleares, gravitatorias y electromagnéticas. Así que tenemos que simplificar el problema. Las estrellas están en una permanente lucha contra la gravedad, en un equilibrio temporal en el que gastan enormes cantidades de energía. Por ejemplo el sol emite  $3.8 \cdot 10^{26}$  J/s. Esto no puede permanecer eternamente, ya que el Sol tiene unas reservas de hidrógeno limitadas, y actualmente quema entorno a 600 millones de toneladas de hidrógeno en helio por segundo.

Hemos de asumir un modelo sencillo, para poder estudiar aunque sea de manera las propiedades sencillas. Así, asumimos un *modelo esféricamente simétrico quasi-estático*, en el que cada elemento de masa de la estrella no sufra aceleraciones permanentes y en las que podemos definir *funciones densidad, temperatura, luminosidad y presión dependientes del radio*.

Además tendremos que suponer *equilibrio termodinámico local* (igual en temperatura de la materia y de los fotones). Esto ocurre generalmente, ya que el recorrido medio de los fotones es muy inferior a las longitudes de onda donde la temperatura cambia notablemente.

Estudiaremos las ecuaciones fundamentales que definen la estructura de la estrella a partir de las siguientes ecuaciones fundamentales:

- La condición de *equilibrio hidrostático* que exige un gradiente de presión debido a diferentes fenómenos (nuclear, radiativo) que vence a la gravedad.
- La *conservación de la masa*, que define el gradiente de la masa en función de la distancia al centro.
- La *variación de la luminosidad* en cada capa producida por la energía generada en su interior.
- El *gradiente de temperatura* para procesos radiativos y para procesos convectivos adiabáticos.
- El *teorema de Vogt-Russel*.

La masa y la composición detallada de una estrella determinan inequívocamente su radio, luminosidad, estructura interna así como la evolución. A su vez, la masa y la composición cambian a lo largo del tiempo en el seno de las estrellas, a través de los procesos de quemado nuclear accesibles en cada momento.

**3.4.2. Ecuaciones**

Veamos cada una de las ecuaciones paso por paso.

**Equilibrio hidrostático**

La ecuación del equilibrio hidrostático *describe el equilibrio entre la fuerza gravitatoria de la estrella y la presión del gas*. La fuerza neta que siente un cilindro de masa  $dm$  y densidad  $\rho$  a una distancia  $r$  del centro es:

$$dm \frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_{\text{Rint}} dm}{r^2} - AdP \quad (3.4.1)$$

donde  $M_{\text{Rint}}$  es la masa total encerrada en el radio  $r$ ,  $A$  es la superficie de una de las tapas del cilindro que define la masa  $dm$ , tal que  $dm = A\rho dr$ . Así pues:

### Ecuación de distribución de masa

### La producción de energía y lumenosidad

La luminosidad producida por las fuentes energéticas (nuclear y gravitatoria) da lugar a una ecuación de equilibrio que nos indica como cambia la luminosidad con el radio de la estrella. Si la contribución por cada diferencia de masa  $dm$  a un radio  $r$  cuando libera la energía a un ritmo  $\varepsilon$  es  $dL = \varepsilon dm$ , entonces:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4r^2 \rho (\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (3.4.2)$$

donde  $L_r$  es la luminosidad ‘‘interior’’ producido dentro de cada esfera de radio  $r$  considerada. El término  $\varepsilon_v$  es la lumenosidad producida en forma de neutrinos. Para obtener esta ecuación basta con considerar que  $dm$  es la masa del cascarón:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Fuera del core de estrella donde se producen las reacciones nucleares, no hay producción de energía y la luminosidad permanece constante. Si el modelo estelar es estático, toda la energía considerada es de energía nuclear, pero puede darse un caso de un modelo dinámico donde la mitad de la variación de la energía potencial gravitatoria se traduce en calor liberado al medio (teorema del Virial).

### Transporte de energía

El calor generado en los procesos nucleares de contracción gravitatoria traspórtase cara el exterior de la estrella. Hay tres mecanismos de trasnporte fundamentales:

- **Radiativo:** mediante fotones (en parte también neutrinos que no interactúan).
- **Convectivo:** donde los elementos másicos calientes suben de capa sumergiendo trozos más fríos.
- **Conductivo:** mediante colisiones de las partículas constituyentes. En la mayoría de las estrellas no contribuye durante su vida al transporte energético frente a otros dos modos. En enanas blancas puede contribuir, siendo el gradiente de la temperatura:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{\kappa} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (3.4.3)$$

donde  $\kappa$  es la conductividad térmica.

### Transporte de energía: procesos radiativos

Los fotones poseen un momento  $p = h\nu/c$  y pueden proporcionar un impulso cuando se absorben, emiten o reflejan, dando lugar a una **presión de radiación**, que es un tercio de la densidad de energía, la energía de radiación por unidad de volumen:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} h v n_v dv = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{dv}{e^{hv/k_B T} - 1} \quad (3.4.4)$$

Integrando la expresión de Plank del cuerpo negro se obtiene que

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 \quad (3.4.5)$$

que se denomina presión de radiación del cuerpo negro donde  $a = 4\sigma/c$  siendo esta la constante de radiación y  $\sigma$  la constante de Stephan-Boltzmann. Derivando:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} \quad (3.4.6)$$

También se puede derivar el gradiente de presión producido por la radiación un flujo radiactivo desplazándose de las zonas de mayor presión de radiación las de menor presión:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa \rho}{c} F_{rad} \quad (3.4.7)$$

donde  $F_{rad}$  es el flujo radiativo saliente y  $\kappa$  la **opacidad óptica del medio** obtenida como promedio de la opacidad de los procesos que absorben fotones del medio ( $\kappa = \kappa_{fon} + (\dots)$ ). Consecuentemente:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} = -\frac{\kappa \rho}{c} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (3.4.8)$$

Con todo, juntando los resultados de la trasnparencia anterior y los de esta, el gradiente de tempratura asociado al transporte de radiación toma la siguiente forma:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\sigma} \frac{\kappa \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (3.4.9)$$

### Transporte de energía: procesos convectivos

Los procesos convectivos con transporte de masa son aún más complicados de describir, ya que están basados en las turbulencias de gases:

- Aparecen grandes gradientes de la temperatura, resolviéndose usando las ecuaciones de Navier-Stokes.
- En las estrellas hay además una compleja dependencia entre la viscosidad y las fuerzas disipativas del radio.

Bajo grandes aproximaciones, los procesos convectivos estelares tendrán la misma forma que para *un gas monoatómica con convección adiabática*:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (3.4.10)$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático. En el Sol, los procesos convectivos siguen este comportamiento cerca del núcleo, pero no parece ser el caso cerca de la superficie.

### 3.4.3. Teorema del virial y pico de Gamow

El **teorema del virial** relaciona el promedio temporal de la energía cinética  $\langle K \rangle$  de un sistema de  $N$  partículas estable, discreto y ligado por fuertes potenciales con la energía potencial del sistema, tenemos que

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \rangle \quad (3.4.11)$$

este teorema permite calcular la energía cinética total promedio en sistemas complejos. Para un potencial  $U(r) = ar^n$  entonces el teorema virial afirma:  $2\langle T \rangle = n\langle U_T \rangle$ . En el caso gravitatorio  $n = -1$ , y por tanto

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle U_G \rangle \quad (3.4.12)$$

El teorema del virial se aplica a problemas variados, desde la ecuación de los gases ideales y en las ecuaciones que definen los equilibrios internos dentro de las estrellas hasta los movimientos en cúmulos galácticos.

## 3.5. Energía de las estrellas y nucleosíntesis

### 3.5.1. Distribución de la energía y pico de Gamow

En un plasma estelar, la energía cinética de los núcleos corresponde a su movimiento térmico, razón por la cual las reacciones iniciadas así se llaman reacciones termonucleares. El plasma no es relativista ni degenerado (con pocas excepciones), y las velocidades de los núcleos siguen la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$P(E)dE = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{1}{(k_B T)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/k_B T} dE \quad (3.5.1)$$

el cociente de la reacción de pares de partículas puede obtenerse a partir del promedio en velocidades o energías e velocidades de Maxwell-Boltzmann.

$$\langle \sigma \rangle = \left( \frac{8}{m \pi^{1/2}} \right)^2 \frac{1}{(k_B T)^{3/2}} \int_0^\infty E \sigma(E) e^{-E/k_B T} dE \quad (3.5.2)$$

La dependencia con la temperatura de la distribución vanos a decir cuantas partículas tendremos en cada intervalo de energía con capacidad de generar una reacción termonuclear. A mayor temperatura, mayor cantidad de protones con energía suficiente para tener una reacción.

$$N_A \langle \sigma \rangle = \left( \frac{8}{m \pi^{1/2}} \right)^2 \frac{N_A}{(k_B T)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-2\pi n S(E)} e^{-E/k_B T} dE \quad (3.5.3)$$

donde  $S(E)$  varía suavemente. Como el factor de Maxwell cae a cero a altas energías y el término de Gamow se hace cero a bajas energías, la mayor contribución a la integral solo puede venir dada a partir de las energías que maximizan el producto de ambos factores. Esta región se conoce como **pico de Gamow**.

### 3.5.2. Inicio de las reacciones nucleares

Al inicio, la gravedad es la fuerza fundamental que hace que la estrella se forme. Las estrellas se van condensando en las zonas de mayor densidad de gas. Luego la gravedad comprime y calienta el gas hasta

alcanzar las temperaturas y presiones necesarias para iniciar las reacciones nucleares entre protones. Las distintas reacciones nucleares, responsables de la producción de calor y de los diferentes tipos de radiación, dependen de la composición química de la estrella, de su masa, temperatura y densidad. Estos parámetros definen la evolución estelar y el destino final de la estrella.

### Reacciones nucleares

Las reacciones nucleares producen energía que evitan el colapso gravitatorio. Las cadenas pp hacen que se produzca Helio-4, hasta el equilibrio químico. El paso clave es la reacción que crea el deuterio, ya que es una reacción muy lenta determinada por la interacción débil, que determina la temperatura de inicio de la cadena. Las distintas cadenas comienzan y dominan a ciertas temperaturas, y producen un número distinto de neutrinos. La enorme energía producida globalmente es (parte escapa con los neutrinos, que tienen de recorrido libre medio  $10^{18}$  m y escapan de la estrella):

$$E = \quad (3.5.4)$$

Según se crean los núcleos pesados se abren canales nuevos:

- Los ciclos CNO son reacciones donde se queman protones para crear helio-4. El resto de núcleos pesados actúan como catalizadores de la reacción. Según crece el número de nucleos pesados, abriendose nuevos canales. Los ciclos CNO son muy dependientes de la temperatura, apareciendo a mayor temperatura que los ciclos pp. Tienen una mayor producción de energía que los ciclos pp.
- Los ciclos triple  $\alpha$ .

## Ejercicios

### Pregunta 1

Define un parsec e estima a súa distancia en metros e anos luz.

Es bastante sencillo, ya que solo tenemos que aplicar la ecuación

$$1\text{pc} = \frac{1\text{ua}}{\tan \delta} \simeq \frac{1\text{ua}}{1''} = 3.26 \text{ años luz}$$

que en metros 1 pc serán  $3.08 \times 10^{13}$  m.

### Pregunta 2

Calcula o número de fotóns emitidos por unha bombilla de 100 W con  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

El número de fotones emitidos es sencillo, ya que si la energía de cada fotón es:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

y tenemos en total una potencia  $P = 100 \text{ J/s}$  (recordamos [W]=[J/s]) tenemos pues:

$$n_\gamma = \frac{P}{E_\gamma} \quad (3.5.5)$$

siendo  $n_\gamma$  la tasa de emisión de fotones.

### Pregunta 3

Estima a radiancia da radiación solar a partir de  $L_\odot = 3,8 \times 10^{26} \text{ W}$ ,  $R_\odot = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$  e  $d_\odot = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ .

La radiancia se define como *la potencia por unidad de área y ángulo sólido*

### Pregunta 4

Calcula o brillo superficial do Sol visto desde a Terra e desde Xúpiter. Datos: constante solar  $K_\odot = 1,4 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$  e diámetro angular do Sol  $\alpha = 32'$ .

Solución

### Pregunta 5

Calcula o fluxo total dun disco galáctico con  $I(r) = I_0 \exp(-r/R)$ .

Solución

**Pregunta 6**

Compara o tamaño dunha xigante vermella (de temperatura superficial  $T \sim 4000\text{ K}$ ) e unha xigante azul ( $T \sim 20000\text{ K}$ ) que teñan a mesma luminosidade.

Solución

**Pregunta 7**

Na estrela Vega, a segunda más brillante do hemisferio norte, a súa liña espectral  $\text{H}\alpha$ , que deberá aparecer con  $\lambda = 656,28\text{ nm}$ , obsérvase na posición  $\lambda = 656,25\text{ nm}$ . Estimar o movemento radial relativo con respecto a nós.

Solución

**Pregunta 8**

Unha estrela presenta unha liña  $\text{H}\alpha$  (de  $\lambda = 656,28\text{ nm}$ ) na posición  $\lambda = 656,9\text{ nm}$ . A que velocidade se alonxa de nós a estrela? Nun quasar obsérvase a liña  $\text{L}\alpha$  (de  $\lambda = 121,6\text{ nm}$ ) en  $\lambda = 500\text{ nm}$ . A que velocidade se alonxa o quasar?

Solución

**Pregunta 9**

Calcula o desprazamento Doppler da liña de  $363,4\text{ nm}$  do Ca II para un membro do cúmulo de galaxias de Hydra con velocidade radial de alonxamento de  $60900\text{ km/s}$ . En que rexión do espectro se observa a liña?

Solución

**Pregunta 10**

Mídense o espectro global dunha galaxia espiral e obsérvase que a liña  $\text{H}\alpha$  ( $\lambda = 656,3\text{ nm}$ ) ten unha anchura típica de  $0,5\text{ nm}$ . Estimar a orde de magnitude da súa velocidade de rotación.

Solución

**Pregunta 11**

Determinar a lonxitude de onda do fotón emitido por un átomo de H nunha transición entre os niveis  $n_i = 110$  e  $n_f = 109$ .

Solución

**Pregunta 12**

Sirio B ten unha masa de  $0,96 M_{\odot}$ , unha temperatura de  $5000\text{ K}$  na súa superficie e unha magnitude absoluta de  $M = 11,54$ . Calcula a súa densidade.

Solución

**Pregunta 13**

Un sistema binario ten dúas estrelas de magnitudes  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 2$ . Determina a magnitude total do sistema binario.

Solución

**Pregunta 14**

A magnitude absoluta dunha estrela é  $M = -2$  e a súa magnitude aparente é  $m = 8$ . Calcula a distancia á que se atopa a estrela. Debido á materia interestelar prodúcese o fenómeno da extinción, cun valor medio de  $\Delta m \approx 2 \text{ mag/kpc}$ . Calcula a distancia á que se atopa a estrela tendo en conta esta extinción media.

Solución

**Pregunta 15**

Un fotómetro fotoeléctrico determina para unha estrela unha magnitude visual  $m = 2,5$ . A súa curva da intensidade radiante ten un máximo para  $\lambda = 400 \text{ nm}$ . A súa paralaxe medida sobre o fondo do ceo é de  $\pi = 0,174''$  e cun interferómetro mídese un radio angular de  $0,0010''$ . Calcúlese para a estrella: a temperatura, distancia, magnitude absoluta visual, radio, luminosidade, magnitude bolométrica absoluta e corrección bolométrica.

Solución

**Pregunta 16**

A partir dos índices de cor medidos dunha estrela dedúcese que é do tipo espectral G2V. Supoñendo que a súa magnitud bolométrica aparente é 12,72, calcula a distancia á estrela usando o método da paralaxe espectroscópica.

Solución

**Pregunta 17**

O cúmulo globular M13 na constelación de Hércules ten un radio aparente de  $12'$  e unha magnitud aparente visual de 6. As estrelas variables RR Lyrae ( $V = 0,75$ ) do cúmulo teñen unha magnitud aparente de 14,4. Determina a distancia e o radio do cúmulo. Estima a masa do cúmulo supoñendo que se compón de estrelas de tipo solar.

Solución

**Pregunta 18**

A partir dunha táboa de estrelas cercanas cos seus datos, debuxa o diagrama HR. Determina a que clase de luminosidade corresponde cada unha de forma aproximada.

Solución

**Pregunta 19**

As cefeidas da Gran Nube de Magallanes (LMC) cun período de 10 días teñen unha magnitud de  $m_1 = 13,5$ . As cefeidas de igual período atopadas en Andrómeda teñen magnitud  $m_2 = 19,25$ . Se a distancia á LMC é de 50 kpc, determina a distancia á galaxia de Andrómeda.

Solución

**Pregunta 20**

Unha estrela ten o máximo da súa intensidade de radiación emitida nunha lonxitude de onda de 400 nm. Sabendo que as súas magnitudes bolométricas aparentes e absolutas son respectivamente 2 e -4,5, determina a súa distancia, luminosidade e radio.

Solución

**Pregunta 21**

A nebulosa do Cangrexo é o resto dunha supernova. O seu tamaño angular é de  $3'$ . Analizando o seu espectro obsérvase unha velocidade de expansión duns  $1500 \text{ km/s}$ , e visualmente amplíase en  $\alpha = 0,21'' \text{ ano}^{-1}$ . Cando tivo lugar a explosión da supernova? A que distancia está?

Solución

**Pregunta 22**

Atopar a relación entre a magnitud absoluta  $M$  e a luminosidade  $L$  para unha estrela a partir dos valores para o Sol. Nota:  $M_{b\odot} = 4,72$  e  $L_{b\odot} = 4 \times 10^{26} \text{ W}$ .

Solución

**Pregunta 23**

A superficie do Sol ten aproximadamente  $5 \cdot 10^5$  átomos de H por cada átomo de Ca. Calcula a intensidade relativa entre as liñas da serie de Balmer do H e as liñas H e K do Ca II. Asume unha temperatura  $T = 5777 \text{ K}$  e unha presión electrónica constante de  $P_e = n_e k_B T = 1,5 \text{ N/m}^2$ .

Solución

**Pregunta 24**

Un sistema binario ten dúas estrelas ananas con temperaturas de  $5500 \text{ K}$  e  $4800 \text{ K}$ . Cal é a relación entre as intensidades da liña do Fe II que ten un potencial de excitación de  $3 \text{ eV}$ ? O potencial de ionización do Fe I é de  $7,9 \text{ eV}$  e asumiremos que a densidade electrónica é a mesma.

Solución

**Pregunta 25**

Calcula a fracción de átomos  $n_2/n_1$  para o ión de He II en función da temperatura. A que temperatura se produce a inversión de poboacións? De acordo cos resultados, pódese esperar ver as liñas espetrais do He II en estrelas das clases espetrais O e B?

Solución

**Pregunta 26**

Calcula a relación de átomos H II / H I e de He II / He I en función da temperatura. Fai un esquema aproximado de ambos comportamentos.

Solución

**Pregunta 27**

A partir dunha táboa de función de partición para os distintos elementos, compara as funcións de partición do He I e do Ne I para varias temperaturas. Tendo en conta os resultados, determina cal dos dous átomos é máis fácil de ionizar.

Solución

**Pregunta 28**

Determinar a densidade media do Sol e de aí a súa presión e temperatura a unha profundidade que sexa a metade do seu radio.

Solución

**Pregunta 29**

Supoñamos que nunha estrela podemos romper o equilibrio entre presión e forza gravitatoria nun factor 0,1 durante 15 minutos. Trata de determinar a orde da correspondente variación do radio da estrela.

Solución

**Pregunta 30**

Estima a relación entre a densidade de enerxía en forma de materia e en forma de radiación no interior dunha estrela.

Solución

**Pregunta 31**

Determina a masa molecular media do Sol, tomando para as fraccións relativas de masa os valores  $X = 0,71$ ,  $Y = 0,27$ ,  $Z = 0,02$  (fraccións de H, He e outros elementos, respectivamente).

Solución

**Pregunta 32**

Resolve as ecuacións de equilibrio dunha estrela baixo as condicións más sinxelas de integración.

Solución

**Pregunta 33**

Determina a distancia total que percorre un fotón producido no centro do Sol ata que alcanza a súa superficie, asumindo un coeficiente de absorción óptica  $k_\lambda = 10 \text{ m}^2/\text{kg}$ . Estima tamén o tempo que tarda en facelo.

Solución

**Pregunta 34**

Canto se espera que sexa a vida media da estrela Vega (alpha-Lyrae)? Os datos son  $V = 0,03$ ,  $B - V = 0,0$ ,  $r = 25,3$  anos luz.

Solución

**Pregunta 35**

O Sol xira cun período medio de 24 días. Cal será o seu período cando se convirta nunha enana branca?

Solución

**Pregunta 36**

Unha estrella A posúe unha magnitud aparente  $m_A = 12$ . A estrella B é  $10^4$  veces máis brillante que A, e outra estrella C é á súa vez  $10^4$  veces menos brillante que A. Determina as magnitudes aparentes de B e C.

Solución

**Pregunta 37**

Un sistema dobre visual ten un semieixo maior de dimensión angular  $\alpha = 11,99''$ , un período de 430 anos e unha paralaxe de  $0,17''$ . Determina a masa de ambas estrelas.

Solución

**Pregunta 38**

Unha cefeida ten  $V = 14,30$ ,  $B = 15$ , sendo o seu período de 8 días. A que distancia se atopa? Onde é probable que se atope, a esa distancia?

Solución

**Pregunta 39**

Unha estrela está a unha distancia de 20 pc calculada usando a súa paralaxe trigonométrica, cunha incerteza de  $0,005''$ . Se a magnitud non ten sesgo, cal é a incerteza asociada á súa magnitud absoluta?

Solución

**Pregunta 40**

Rigel ten unha magnitud visual  $V = 0,18$ ,  $B - V = -0,03$  e está a 250 pc. Determinar o seu radio.

Solución

**Pregunta 41**

Determina a masa do burato negro do centro galáctico sabendo que a estrela S2 que orbita ao seu redor ten un período orbital de  $P = 15,2$  anos, unha excentricidade  $e = 0,87$  e unha distancia no periastro de  $r_p = 1,8 \cdot 10^{13}$  m.

Solución

**Pregunta 42**

Deriva as leis de Kepler a partir de principios fundamentais. Para a primeira, aplica que o momento angular dun sistema é constante baixo unha forza central. Para a terceira, podes integrar a segunda sobre unha órbita.

Solución



# Capítulo 4

## Cosmología

### 4.1. ¿Qué es la cosmología?

La cosmología es la ciencia que estudia el Universo como un todo.

#### 4.1.1. Pilares básicos de la cosmología

Hay 5 pilares básicos en los que está fundamentada la cosmología:

- El principio cosmológico de Albert Einstein, 1917.
- La ley de Hubble y el descubrimiento de la expansión del Universo de Edwin Hubble, 1929.
- La Teoría de la Relatividad General de Albert Einstein, 1915.
- El descubrimiento del Fondo de Microondas por Arno Penzias y Robert Wilson en 1965.
- La Teoría de la Nucleosíntesis de Ralph Alpher, George Gamow y otros, 1948.

### 4.2. El principio cosmológico

El **principio cosmológico** dice así: el universo es homogéneo, isotropo a grandes escalas. Fue introducido por Einstein en 1917 por la simplicidad matemática en la resolución de ecuaciones de la Relatividad General. Edward A. Milne fue quien le otorgó dicho nombre en 1933. La homogeneidad e isotropía no se pueden inferir directamente de las observaciones, aunque haya indicaciones experimentales a favor como veremos a continuación. Son, sin embargo, dos hipótesis que deberían ser confirmadas o desmentidas por las consecuencias observables que se deriven de su utilización. Veamos entonces por separado qué significa homogeo y qué significa isotropo.

#### 4.2.1. Homogeneidad

Se le llama **homogeneidad** a la invariancia bajo traslaciones en el espacio. No hay lugares preferidos en el universo, no se puede distinguir un punto de otro. Ahora bien, ¿Qué consideramos por un “universo homogéneo”? Está claro que a distancias pequeñas el universo no es homogéneo ya que hay masas “puntuales” muy grandes (planetas, estrellas) mientras que la mayor parte está vacío. Cuando Einstein propuso dicha homogeneidad se refería a que *todos los puntos tienen las mismas propiedades a grandes escalas* entorno a 10 Mpc - 1 Gpc (misma densidad, temperatura). Las evidencias de homogeneidad:

- **Fluctuaciones relativas de la densidad.** Mediante observaciones astronómicas de diversos tipos se puede medir la densidad promedio  $\rho_i$  en un cubo de arista la  $L$  centrado en un determinado punto  $i$  del universo. Repitiendo la medida para muchos puntos distintos, calculando la media  $\langle \rho \rangle$  y la dispersión  $\delta\rho$ , podremos obtener que:

$$\left| \frac{\delta\rho}{\langle \rho \rangle} \right| \rightarrow 0 \quad (4.2.1)$$

- **Compendios de galaxias.** Con potentes telescopios y software para el conteo automático se obtienen los “surveys” de galaxias. Actualmente la inspección lleva a concluir que la hipótesis es razonable.

### 4.2.2. Isotropía

Se le llama **isotropía** a la invariancia bajo rotaciones en el espacio, es decir, que las propiedades del Universo son las mismas en todas las direcciones. Las evidencias son:

- **El fondo de microondas.** La radiación de fondo (1989) George Smoot y su equipo utilizaron el satélite COBE y descubrieron que la radiación de fondo tiene un espectro que corresponde a la de un cuerpo negro caracterizado por una temperatura promedio. Observado a distintas direcciones, se determinó que las fluctuaciones respecto al valor medio es de una parte en  $10^5$ , es decir, extremadamente pequeñas.

Para ser exactos la isotropía de fondo de microondas solo garantiza que el universo es isótropo en torno a nuestro Sistema Solar, para aplicar esto universalmente necesitaríamos que fuera homogéneo: así la Tierra sería un punto más.

### 4.2.3. Implicaciones y comentarios sobre el tiempo

Es importante tener en cuenta que ni la homogeneidad implica isotropía, ni la isotropía en torno a un punto implica homogeneidad. Sobre el tiempo:

- Si en cada punto del Universo ponemos un reloj, todos deberían estar sincronizados (marcar el mismo tiempo) ya que sino no tendríamos una manera de distinguir un punto de otro. A este tiempo lo llamaremos **tiempo cósmico**  $t$  y será medido en el llamado *sistema de referencia comovil*. Es también el tiempo que ha transcurrido desde el Big Bang despreciando a grandes escalas los efectos que sobre el tiempo tiene la Relatividad Especial así como efectos locales debidos a la Relatividad General. El tiempo cósmico sería también el tiempo que mediría un observador que ve el Universo expandiéndose de manera homogénea a su alrededor.
- El Universo es homogéneo e isótropo en cada instante  $t$  de tiempo cósmico pero no es estático (evoluciona y varía con el tiempo). La densidad  $\rho(t)$  es la misma en todos los puntos del espacio, pero no así igual en todos los instantes del tiempo  $t$ .

## 4.3. La ley de Hubble

Si una fuente de luz con longitud de onda  $\lambda_e$  que está en movimiento relativo respecto a otro sufre desplazamiento Doppler, tal que la longitud de onda observada  $\lambda_o$  es diferente. En función de si se acerca o se aleja veremos una disminución o aumento de la longitud de onda (i.e. aumento o disminución de

la frecuencia) respectivamente. En términos de la longitud de onda visible diríamos que se desplaza al azul al disminuir la longitud de onda o que se desplaza al rojo si aumenta. Para esto usamos el parámetro adimensional  $z$  llamado **parámetro z**.

### Definición corrimiento al rojo

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (4.3.1)$$

que es capaz de decirnos si se desplaza al rojo  $z > 0$  o al azul  $z < 0$ , o si no hay movimiento relativo  $z = 0$ .

Tras diferentes medidas se observó que la mayor parte de los cuerpos presentan corrimiento al rojo. Usando los resultados, en 1929 relacionó el corrimiento al rojo y la distancia a la que se encontraba el objeto en la llamada **ley de Hubble empírica**

### Ley de Hubble empírica

$$z = \frac{H_0}{c} d \quad (4.3.2)$$

donde  $H_0$  es la *constante de Hubble* siendo válida para distancias pequeñas y  $z$  pequeñas, ya que luego se desvía de la linealidad. Usando que el corrimiento al rojo  $z = V/c$  siendo  $V$  la *velocidad de recesión medio a distancia*  $d$ . Así tenemos la **ley de Hubble teórica**

### Ley de Hubble empírica

$$V = H_0 d \quad (4.3.3)$$

El valor dado por Hubble (actual) es de  $H_0 = 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ , aunque es difícil de determinar (requiere muchas medidas de objetos con longitud de onda conocida y con  $d$  controlada).

#### 4.3.1. Expansión cosmológica y Big Bang

La interpretación de la ley de Hubble no se hizo esperar, cuyo nombre es bastante descriptivo: **expansión cosmológica**. La expansión cosmológica es el alejamiento de las galaxias entre sí debido a la expansión del espacio.

De acuerdo con esto (y ojo, es una de las mas importantes), *las galaxias en realidad son estacionarias, no se alejan por movimiento relativo, sino porque las distancias entre ellas se hace cada vez más grande*. Las galaxias son “arrastradas” por la expansión del universo, siendo esta la única manera de explicar que el desplazamiento de las longitudes de onda es casi siempre hacia longitudes de onda mayores, no dependiendo de la longitud de onda solo de la distancia al objeto.

Poco después llegó otra de las grandes implicaciones: si las galaxias están alejando, entonces hubo un momento en el pasado en el que estaban todas más próximas, en universo extremadamente pequeño y extremadamente denso, momento que se llamaría **Big Bang**.

Hay que hacer varios comentarios:

- Además de las velocidades de recesión  $V_{\text{recesion}}$  también tendríamos efectivamente un término de velocidad cinética (de naturaleza aleatoria) que suele ser del orden de cien km/s y se debe a fenómenos de otra naturaleza, a saber, gravitatorios. Así la velocidad neta:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{recesion}} + \mathbf{V}_{\text{peculiar}} \quad (4.3.4)$$

si la distancia  $d$  a la galaxia es pequeña entonces puede ocurrir que  $\mathbf{V}_{\text{recesion}} < \mathbf{V}_{\text{peculiar}}$ , por lo que si puede haber galaxias que se acercan a nosotros. Ejemplo: Andrómeda.

## 4.4. Nociones generales de Relatividad General

La teoría de la relatividad general se fundamenta en el **principio de equivalencia**: no existe un experimento físico que permita distinguir entre un sistema de referencia uniformemente acelerado de otro en un campo gravitatorio uniforme, el cual tiene como consecuencia directa que *la trayectoria de un rayo de luz se curva en presencia de un campo gravitatorio*, siendo esta curva la trayectoria más corta entre dos puntos del espacio. Es decir, la gravedad está influyendo directamente en la curvatura del espacio tiempo.

El experimento de Eddington realizado en Santo Tomé y Príncipe en 1919 tenía como intención estudiar fotografías de las estrellas y determinar la posición de las mismas en la línea visual al Sol durante el eclipse, para luego compararlas con la posición conocida. La hipótesis sometida a las observaciones: el campo gravitatorio del Sol debía curvar los rayos de luz (según la relatividad general) por lo que debía haber un movimiento aparente de las estrellas, el cual ocurrió y coincidía con el mismo dado por la relatividad general.

Otras evidencias experimentales: lentes gravitacionales (distorsión de objetos lejanos en su camino hacia nosotros debido a efectos gravitacionales), micro-lentes gravitacionales (lentes gravitacionales pero para estrellas individuales), corrimiento al rojo gravitacional (aumento de la longitud de onda debido al aumento al superar un pozo de potencial), precesión del planeta mercurio (incompatible con la mecánica Newtoniana y predicha con la de la relatividad general) y ondas gravitacionales.

### 4.4.1. Métrica

La métrica nos permite obtener distancias entre 4-vectores, distancias que serán invariantes relativistas (en cualquier sistema de referencia obtendremos el mismo resultado, matemáticamente significa que podemos aplicar un boost de Lorentz y una rotación y obtendremos el mismo escalar). Basicamente definimos el diferencial de distancia en un 4-vector como:

$$ds^2 := g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (4.4.1)$$

donde  $d$  es la distancia

$$d^2 = \int_{x_1}^{x_2} ds^2 = g_{\mu\nu}(x)(x_2^\mu x_2^\nu - x_1^\mu x_1^\nu) \quad (4.4.2)$$

que

#### Corrimiento al rojo

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (4.4.3)$$

### 4.4.2. Espacios con curvatura constante

La curvatura es complicada de definirse, y más difícil es calcular distancias, tiempos... con una curvatura no constante. Además si el espacio tuviera curvatura no constante, habría una manera de diferenciar un punto y otro, en contra del principio cosmológico. El espacio-tiempo es homogéneo e isótropo. Veamos entonces los 3 espacios con curvatura constante más típicos para definir la cosmología:

- El **espacio plano** usando coordenadas polares:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad dl^2 = R^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2) \quad (4.4.4)$$

- El **espacio esférico** usando coordenadas polares:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad dl^2 = \frac{R^2}{1-r^2} dr^2 + R^2 r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\theta^2 \quad (4.4.5)$$

- El **espacio hiperbólico** usando coordenadas polares:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad dl^2 = \frac{R^2}{1-k r^2} dr^2 + R^2 r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\theta^2 \quad (4.4.6)$$

#### 4.4.3. Covariancia e invariancia

El **principio de Covariancia General** dice que las leyes de la física tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia y son independientes de la elección de coordenadas. La manera más sencilla de implementar este principio es escribir las ecuaciones de manera covariante (con superíndices).

Las ecuaciones escritas de manera covariante conservan su forma en todos los sistemas de referencia inerciales, incluyendo los no inerciales.

#### 4.4.4. Ecuación de la Relatividad General

La **ecuación de Einstein de la relatividad general** relaciona la curvatura/métrica del espacio y el tensor de energía momento (distribución de energía-masa en el universo)

##### Ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.4.7)$$

Esta ecuación en realidad son 10 ecuaciones diferenciales acopladas con 10 incógnitas: o  $G_{\mu\nu}$  dado  $T_{\mu\nu}$  o al revés. Es importante saber que esta ecuación es no lineal: la suma de dos tensores de energía momento no da como resultado la suma de dos métricas correspondientes a la solución de cada uno de los tensores. La propia curvatura del espacio es una fuente de energía que entra en el tensor energía-momento. Se encuentran pocas soluciones de esta ecuación (analíticas).

### 4.5. Métrica de Robertson-Walker

La solución de la ecuación de Einstein de la Relatividad General para una distribución de energía-momento homogénea e isótropa se conoce como **métrica de Robertson-Walker**.

##### Métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-k^2 r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4.5.1)$$

En esta métrica:

- A las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  se les llama coordenadas comoviles.

- A  $t$  se le llama tiempo cósmico.
- A  $k$  se le llama curvatura, y por tanto es constante y no depende de las coordenadas. Existen 3 posibilidades para un espacio homogéneo e isótropo:  $k = 1$  (esférico),  $k = 0$  (plano) y  $k = -1$  (hiperbólico).
- A  $a(t)$  se le llama *parámetro de escala* o *factor de expansión* y nos dice cuanto se ha expandido/-contraido la parte espacial de la métrica. En general depende del tiempo cósmico, y tiene unidades de distancia. La forma de este funcional está determinada por el *modelo cosmológico* y no por la métrica.

#### 4.5.1. Distancia comóvil y distancia propia

Las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  en las que se expresa la métrica RW se denominan coordenadas comóviles, coordenadas en un sistema de reposo con la expansión del universo, se mueve con esta expansión. En este sistema las galaxias están en reposo. Un ejemplo para entenderlo: las coordenadas latitud y longitud de una esfera son coordenadas comóviles, ya que no cambian al aumentar o disminuir el radio de la esfera.

Se define como **distancia comóvil** entre  $a$  y  $b$  como:

$$\bar{r}_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (4.5.2)$$

dependiendo únicamente de la coordenada  $r$  ya que al ser homogéneo e isótropo la distancia no puede depender de la dirección.

La distancia comóvil entre dos galaxias es siempre la misma, no depende de  $t$ . Sin embargo la **distancia real** o **distancia propia** entre las galaxias  $a$  y  $b$  cambia debido a la expansión del universo, tal que la distancia propia  $d_{ab}$  varía como:

$$d_{ab} = a(t)\bar{r}_{ab} \quad (4.5.3)$$

La distancia propia entre dos galaxias varía con  $t$  de la misma manera que  $a(t)$ .

De esta manera el aumento de distancia entre dos puntos del Universo no se debe al aumento de sus coordenadas relativas sino a que el espacio se está expandiendo, es decir, a la variación de la parte espacial de la métrica dada por  $a(t)$ .

#### 4.5.2. Propagación de la luz en el espacio RW

La métrica es lo único que necesitamos para determinar como se propaga un rayo de luz por el espacio. Para un rayo de luz se verifica que:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 = a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2 \theta \mathrm{d}\phi^2) \right] \quad (4.5.4)$$

En el espacio homogéneo e isótropo 3D de Robertson-Walker la distancia entre dos puntos no puede depender de la dirección dada por las coordenadas  $(\theta, \phi)$  y puede considerarse cualquier dirección con  $(\theta, \phi)$  constantes, es decir,  $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\phi = 0$ .

$$\frac{c^2 dt^2}{a^2(t)} = \frac{dr^2}{1 - kr^2} \Rightarrow \frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (4.5.5)$$

donde el signo  $\pm$  se elige dependiendo de si  $r$  aumenta o disminuye cuando  $t$  aumenta.

### 4.5.3. Corrimiento al rojo

Obtengamos ahora una relación de gran importancia entre el corrimiento al rojo  $z$  de una galaxia a una distancia comóvil  $r$  y el tamaño del Universo en el instante  $t$  en el que se emite la luz de la galaxia que llega a nosotros hoy en día.

La relación entre la longitud de onda y la aceleración en un instante del tiempo es:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (4.5.6)$$

Recordando la definición de corrimiento al rojo  $1 + z = \lambda_0/\lambda_1$  es tal que

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (4.5.7)$$

de tal modo que el corrimiento al rojo de una galaxia es igual al cociente entre el tamaño del Universo en el momento de recepción y emisión de la luz procedente de ella.

### 4.5.4. Parámetro de Hubble y el factor de escala de Universo

La ley de Hubble teórica:

$$V = H(t)d_p \quad (4.5.8)$$

donde  $d_p$  es la distancia propia y  $V$  es la velocidad de recesión de las galaxias. Sustituyendo  $d$  por  $d = a(t)$  y  $V = \dot{a}(t)$ , tenemos que:

#### Parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (4.5.9)$$

El parámetro de Hubble,  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  representa la velocidad de expansión del universo normalizada a su tamaño.

### 4.5.5. El parámetro de deceleración del universo

El parámetro de deceleración del Universo se define como:

#### Parámetro de deceleración

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{[\dot{a}(t)]^2} \quad (4.5.10)$$

siendo  $q(t)$  un indicador de la aceleración en la expansión del Universo. Aunque sea trivial, si  $q(t) > 0$  la aceleración es decelerada, si  $q(t) = 0$  la expansión es a velocidad constante, y si  $q(t) < 0$  entonces es aceleración decelerada.

## 4.6. Ecuaciones de Friedman

En la métrica RW el parámetro de escala del Universo  $a(t)$  y la curvatura  $k$  no son determinadas, es decir, la métrica RW no aporta acerca de la forma funcional de  $a(t)$ . En otras palabras la métrica RW sólo

nos da la cinemática de la propagación de un rayo de luz, pero necesitamos unas ecuaciones *dinámicas* que relacionan  $a(t)$  y  $k$  con el contenido de masa-energía del Universo. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Friedman-Lemaître*.

#### 4.6.1. Derivación relativista

La obtención formal de las ecuaciones de Friedmann se basa en el hecho de que la métrica de Robertson-Walker es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{a^2}{1-kr} & & \\ & & -a^2 r^2 & \\ & & & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.6.1)$$

Y el cálculo del tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & & & \\ & -g_{rr} \left( \frac{\ddot{a}a+2\dot{a}+2k}{a^2} \right) & & \\ & & -g_{\phi\phi} \left( \frac{\ddot{a}a+2\dot{a}+2k}{a^2} \right) & \\ & & & -g_{\theta\theta} \left( \frac{\ddot{a}a+2\dot{a}+2k}{a^2} \right) \end{pmatrix} \quad (4.6.2)$$

y el escalar de curvatura:

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a} + 2k}{a^2} \right) \quad (4.6.3)$$

Trivialmente el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{k}{a^2} & & & \\ & -g_{rr} \left( \frac{2\ddot{a}a+\dot{a}+2k}{a^2} \right) & & \\ & & -g_{\phi\phi} \left( \frac{2\ddot{a}a+\dot{a}+2k}{a^2} \right) & \\ & & & -g_{\theta\theta} \left( \frac{2\ddot{a}a+\dot{a}+2k}{a^2} \right) \end{pmatrix} \quad (4.6.4)$$

#### 4.6.2. Tensor de energía-momento del Universo

Ahora tenemos que definir el tensor de energía momento, cuyos términos tienen un significado claro:

- $T_{00}$  es la densidad de masa o de energía.
- $T_{0i}$  es el flujo de energía en la dirección  $x^i$ .
- $T_{i0}$  es la densidad de componente  $p^i$  del momento.
- $T_{ij}$  es el flujo de  $p^i$  en la dirección  $x^j$  (componente  $i$  de la fuerza por unidad de área sobre la normal a  $x^j$ . Si  $i \neq j$  es la fuerza de cizalladura).
- $T_{ii}$  es la fuerza por unidad de área a la superficie  $x^i$  o lo que es lo mismo, presión.

Por definición estamos en un universo isótropo, por lo que  $T_{ij} = T_{ji}$ ;  $T_{ii} \propto P$  para  $i = 1, 2, 3$ . Así pues, si  $\rho c^2$  es la densidad de energía,  $P$  la presión y  $U_\mu$  es la velocidad del fluido (que en estaría en reposo al trabajar en un sistema de referencia cómovid en el que el universo al moverse con la materia, esta última está en reposo tal que  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ) y  $g_{\mu\nu}$  la métrica. Así pues:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (4.6.5)$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P - Pg_{00}, -g_{rr}P, -g_{\phi\phi}P, -g_{\theta\theta}P) \quad (4.6.6)$$

Vemos, entonces, que las ecuaciones diferenciales, dadas por la **ecuación general de la relatividad general**  $G_{\mu\nu} = CT_{\mu\nu}$  donde  $C = 8\pi G/c^4$ . Así tenemos las ecuaciones:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2 \quad (4.6.7)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4}P \quad (4.6.8)$$

Que debemos reescribir considerando además que  $\rho c^2 = \epsilon$  (densidad de energía y densidad de masa sería igual si  $c = 1$ ). Así pues, vemos que ambas ecuaciones están acopladas. En cualquier caso, las podemos separar, obteniendo así las ecuaciones:

#### Ecuación de Friedman para la velocidad:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon \quad (4.6.9)$$

#### Ecuación de Friedman para la aceleración:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3c^2}(3P + \epsilon) \quad (4.6.10)$$

Además de las ecuación de Einstein, tendrá que cumplirse otras ecuaciones como por ejemplo que la primera ley de la termodinámica  $dQ = dU + PdV$ . Como además no hay intercambio de calor (todo está a la misma temperatura en un universo homogéneo) entonces la ecuación se convierte en  $dU + PdV = 0$ , la cual nos lleva de manera sencilla y directa a la ecuación del fluido (recordamos que  $U = \epsilon V$ ) tal que:

#### Ecuación del fluido:

$$\dot{\epsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) \quad (4.6.11)$$

## 4.7. Modelos cosmológicos

Un modelo cosmológico que consiste en especificar la curvatura  $k$  y las componentes del tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  es decir, el contenido de masa-energía del Universo ( $\epsilon$  y  $P$ ). Con estos *inputs* uno puede resolver las ecuaciones de Friedman y contrar la forma funcional de  $a(t)$ . Conocido  $a(t)$  podemos obtener consecuencias observables del modelo cosmológico propuesto y comprobar si se ajusta a los modelos descartables.

### 4.7.1. Relación entre $k$ y $\epsilon$ . Densidad de energía crítica.

Tenemos que la constante de Hubble<sup>1</sup> nos puede ayudar a reexpresar la ecuación de Friedman:

$$H(t)^2 + \frac{kc^2}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) \quad (4.7.1)$$

Definiendo entonces la **densidad de energía crítica**

$$\epsilon_c := \frac{3H^2c^2}{8\pi G} \quad (4.7.2)$$

y  $\Omega(t)$ , definida como el cociente entre la energía y la energía crítica

$$\Omega(t) := \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \quad (4.7.3)$$

pudiendo reescribir la ecuación de Friedman para la velocidad

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2(\Omega - 1) \quad (4.7.4)$$

Tal que si  $k = 0 \Leftrightarrow \Omega = 1$ ,  $k = 1 \Leftrightarrow \Omega > 1$  y  $k = -1 \Leftrightarrow \Omega < 1$ . De ello se deduce que  $\Omega$ , que es el contenido de energía en relación a la energía crítica del universo, determina la curvatura del espacio tiempo.

Esto no debería ser sorprendente: la idea central de la relatividad General es que el contenido de energía del sistema determina la geometría del espacio tiempo y esta determina como se mueve una partícula en el espacio. Veamos que:

- La curvatura  $k$  del Universo es constante, y por tanto el signo de  $\Omega - 1$  no puede variar con el tiempo.
- La densidad de energía crítica sí depende del tiempo cósmico, hoy en día se define a partir de  $H_0$ , tal que actualmente  $\epsilon_{c,0} = \epsilon_c(H_0) = 5200 \text{ MeV/m}^3 \simeq 1 \text{ protón/200 litros}$ , mucho menor que la densidad del medio interestelar de nuestra galaxia ( $\sim 1 \text{ protón/cm}^3$ )

### 4.7.2. Ecuaciones de estado

Una ecuación de estado de un sistema es simplemente una relación entre la presión  $P$  del sistema y la densidad de energía  $\epsilon$ . Las ecuaciones pueden ser complicadas, pero no en nuestro caso, que asumiremos que

$$P = \omega\epsilon \quad (4.7.5)$$

la cual se correspondería con un gas diluido (la galaxia tiene poca densidad) y un gas perfecto en el que  $P = \epsilon$ . La ecuación de Friedman de la aceleración en el caso de un *gas diluido* será:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\epsilon(3\omega + 1) \quad (4.7.6)$$

Veamos que en función de si  $3\omega$  es menor, igual o mayor a -1 tendremos que el universo se expandirá aceleradamente ( $\ddot{a} > 0$ ), a velocidad constante ( $\ddot{a} = 0$ ) o deceleradamente ( $\ddot{a} < 0$ ) respectivamente.

---

<sup>1</sup>La cual, en realidad, debería ser llamada *parámetro de Hubble* al depender del tiempo cosmológico.

La gracia de esto es que un determinado modelo cosmológico (al menos en esta asignatura) dará un valor de  $\omega$  en función de que consideremos: universo dominado por materia, radiación o radiación y materia simultáneamente. Posteriormente también trataremos la influencia de la constante cosmológica. Ahora veamos qué valores de  $\omega$  se le dan tanto a la materia como a la radiación.

#### 4.7.3. Materia: “gas” de galaxias

La materia en el Universo dominado por gas de galaxias, en el que el sistema de referencia que se expande con el Universo (*sistema comóvil*) son comóviles (salvo por lo que hemos visto de las velocidades peculiares). El movimiento aleatorio será, en promedio, cero (al ser aleatorio y el universo isótropo), y como están en reposo respecto a la expansión del universo (precisamente por ser comóviles), tenemos que no se mueven y por tanto la presión será cero:

$$\text{Materia} \rightarrow P_m \simeq 0 \Rightarrow \omega_m \simeq 0 \quad (4.7.7)$$

lo que implica que *en un universo dominado por materia el universo se expande deceleradamente* al verificar  $\ddot{a} < 0$ .

#### 4.7.4. Radiación: “gas de fotones”

Al contrario que las galaxias, los fotones nunca pueden ser comóviles (la velocidad de la luz no depende del sistema de referencia elegido). La presión de radiación es:

$$\text{Radiación} \rightarrow P_\gamma = \frac{1}{3}\epsilon_\gamma \Rightarrow \omega_\gamma = \frac{1}{3} \quad (4.7.8)$$

que implicaría una expansión decelerada, decelerando más rápido que en un universo dominado por materia.

#### 4.7.5. Comportamiento de materia y radiación con $a(t)$

Utilizando la ecuación del fluido

$$\dot{\epsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P)$$

podemos hallar *la dependencia de la densidad de energía en función de a*, que dependerá de si tratemos con materia o con radiación, ya que  $P(\epsilon)$  varía.

- Si suponemos que estamos con **materia** tenemos que  $P_m \simeq 0$  y por tanto:

$$\frac{\dot{\epsilon}_m}{\epsilon_m} = -3\frac{\dot{a}}{a} \quad (4.7.9)$$

cuya solución trivial es:

$$\epsilon_m = \epsilon_{m,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (4.7.10)$$

- Si suponemos que estamos trabajando con **radiación** tenemos que  $P_\gamma \simeq \epsilon_\gamma/3$  y por tanto:

$$\frac{\dot{\epsilon}_\gamma}{\epsilon_\gamma} = -4\frac{\dot{a}}{a} \quad (4.7.11)$$

cuya solución trivial es:

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_{\gamma,0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} \quad (4.7.12)$$

#### 4.7.6. Costante cosmológica

En 1917, cuando Einstein trató de solucionar un modelo particular del universo (estático, dominado por materia y esférico), concluyó que este colapsaría inexorablemente (debido a la interacción gravitatoria), por lo que introdujo un término ad hoc llamado **constante cosmológica** en sus ecuaciones, obteniendo así la *ecuación de la relatividad general con constante cosmológica*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.7.13)$$

Al igual que no hay razones para que exista, tampoco hay razones para negarla, salvo las que pueda dar un experimento. Tanto en el experimento de Eddington como muchos otros, no es detectable. La pregunta ahora es: ¿Cómo se modifica las ecuaciones de Friedmann con constante cosmológica? Veamos que, sencillamente es introducir un  $\Lambda$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (3P + \epsilon) + \frac{\Lambda}{3} \quad (4.7.14)$$

$$\dot{\epsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (4.7.15)$$

que definiendo  $\epsilon_\Lambda = \Lambda c^2 / 8\pi G$  que significa *densidad de energía asociada a la constante cosmológica*, lo que supone interpretar la  $\Lambda$  como una nueva fuente de energía relevante en el universo. Así tendremos que  $\epsilon = \epsilon_m + \epsilon_\gamma + \epsilon_\Lambda$ ,  $P = P_m + P_\gamma + P_\Lambda$ .

La ecuación de estado asociado a la constante cosmológica es, por definición, aquella que  $\dot{\epsilon}_\Lambda = 0$ , es decir:

$$P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda \Rightarrow \omega_\Lambda = -1 \quad (4.7.16)$$

¿Cuál es la interpretación física de  $\epsilon_\Lambda$ ? Una de los mejores candidatos es la llamada *energía del vacío*, procedente de las fluctuaciones cuánticas fruto del principio de incertidumbre de Heisenberg. Las razones por las que es un buen candidato: se hace más grande cuando aumenta el tamaño del espacio (lo que hace que la densidad de energía permanezca constante), además que la presión disminuye al expandirse. Sin embargo numéricamente no tiene sentido.

### 4.8. Cosmología observacional

En la sección anterior hemos visto varios modelos cosmológicos que representan destinos futuros, velocidades de expansión y aceleraciones para nuestro Universo. En esta sección veremos cual es el mejor modelo, i.e., el que es más compatible con las medidas experimentales.

A partir de la medida de la distancia de las galaxias obtenemos  $H_0$ . Sin embargo la distancia propia  $d_p$  a una galaxia no es medible ya que la luz se emitió en  $t = t_0$  no es igual a la que recibimos  $t_1$ , ya que en el recorrido hecho esta distancia se expandió, por lo que  $d_p > d_t = c(t_1 - t_0)$ . Para determinar  $d_p$  necesitamos saber la forma funcional de  $a(t)$ : necesitamos saber el modelo cosmológico.

Para resolver este problema usaremos la llamada *distancia de luminosidad*

### 4.8.1. Distancia de luminosidad $d_L$

tiene una luminosidad intrínseca  $\mathcal{L}$

Supongamos que la galaxia  $G_1$  con luminosidad intrínseca  $\mathcal{L}$ , con un flujo que medimos  $\mathcal{F}$ . Entonces:

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi d_L^2} \quad (4.8.1)$$

siendo  $d_L$  medible y por tanto  $\mathcal{F}$  (si  $\mathcal{L}$  es conocida). Definimos la **distancia de luminosidad** como

$$d_L = d_p(1 + z)^2 \quad (4.8.2)$$

Será entonces, fundamental, experimentalmente hablando, medir el factor de corrimiento al rojo  $z$  y flujo  $\mathcal{F}$  para objetos con flujo  $\mathcal{L}$  conocido (candelas estelares como supernovas).

Una vez tenemos un valor de  $d_L$  y elegido un modelo,  $d_p$  tendrá una forma funcional que podremos representar. Así podremos ajustar los valores  $H_0$  y  $q_0$  a los datos obteniendo dichos valores “si nuestro universo siguiera el modelo elegido”. Veamos que:

$$d_p = a_0 \int_0^{t_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a_0 \int_0^{t_1} \frac{dt}{a(t)}$$

pudiendo calcular la integral haciendo aproximaciones de taylor a primer orden (obteniendo la ley de Hubble) u otras (obteniendo diferentes separaciones de la ley de Hubble).

## 4.9. Resolución de diferentes modelos cosmológicos

Cuando decimos “resolver” un modelo cosmológico decimos que, para una determinada geometría (por ejemplo  $k = 0, 1, -1$  o  $k$  arbitrario), una determinada composición (mezcla de materia, radiación y constante cosmológica) usando sendas ecuaciones de estado (las de este curso u otras), y otras consideraciones (estático, aceleración nula...) obtenemos ecuaciones analíticas (o numéricas) de los siguientes parámetros:

- Forma funcional de  $a(t)$  (o representación numérica).
- Parámetro de deceleración  $q(t)$ .
- Parámetro de Hubble  $H(t)$ .
- Relación entre  $t$  y  $z$ .
- Obtener la forma funcional de la distancia de luminosidad  $d_L$ .

Y todas las consecuencias/interpretaciones posteriores: ¿Se está acelerando o decelerando? ¿Hubo Big-Bang?...

## 4.10. Tamaño del Universo Observable

En esta sección trataremos de dar respuesta a la pregunta de cuál es el límite del Universo Observable. Para ello definiremos *el horizonte de partículas* y *el horizonte de sucesos*.

### 4.10.1. Horizonte de partículas

El Universo tiene una edad  $t_0$  desde el Big Bang. Llamaremos **horizonte de partículas** a la distancia máxima desde la que puede llegar la luz desde  $t = 0$ . Si el universo fuera plano y estático está claro que la distancia máxima sería  $d = ct_0$ . Sin embargo el Universo se expande, por lo que la fuente más distante que podríamos observar, aquella que emitió su luz en el instante  $t = 0$  y se aleja de nosotros mientras la luz viaja y por tanto la distancia a la que podemos observar es en realidad mayor que  $ct_0$ . En pocas palabras: habrá que tener en cuenta la expansión del universo.

$$d_H = ca_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (4.10.1)$$

Cuanto más rápida sea la expansión del universo la distancia será más grande.

### 4.10.2. El horizonte de sucesos

El horizonte de partículas se puede entender como un límite a las comunicaciones desde el pasado: nada más allá que el horizonte de partículas no es conocido. El llamado **horizonte de sucesos** es el límite que establece las comunicaciones hacia el futuro. Consideremos un observador en  $(t_0, r_0 = 0)$  que envía un rayo de luz a un objeto en coordenada comóvil  $(t_1, r_1)$ . Si el Universo se expande muy rápidamente es posible que no le llegue nunca el rayo de luz (se necesitaría un tiempo infinito). El límite a partir del cual esto ocurre es llamado el horizonte de sucesos, un límite a las comunicaciones futuras, tal que esta región estaría completamente aislada del mundo.

El requisito esencial es que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{cdt}{a(t)} = r_1 \quad (4.10.2)$$

tal que  $t_1 \rightarrow \infty, r_1 \rightarrow r_S$ .

### 4.10.3. ¿Es el Universo finito o infinito?

Un espacio 3D plano  $k = 0$  o hiperbólico  $k = -1$  descrito por la métrica de Robertson-Walker es infinito. Sin embargo un espacio 3D esférico es finito. En este caso se podría producir un fenómeno curioso: la posibilidad de observar a través de dos un objeto astronómico distante llegando a nosotros por dos caminos opuestos. Como hasta la fecha el objeto  $k$  es próximo a cero, pero no cero, no se descarta la posibilidad de que en realidad sea ligeramente esférico, lo que supondría un universo finito, o ligeramente hiperbólico, lo que supondría infinito. Incluso si fuera finito es posible que no haya ocurrido suficiente tiempo para que observemos desde dos puntos distintos del cielo el mismo objeto.

## 4.11. Modelos cosmológicos

### 4.11.1. Universo dominado por materia y esférico ( $k = +1$ ). Entrega 2024/2025.

En el presente documento vamos a tratar de resolver un universo dominado por materia y esférico.

#### Expresión de la ecuación de velocidad de Friedan

La ecuación de Friedman para la velocidad en este universo es;

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon$$

Esta sería la ecuación de Friedan para la velocidad, que de momento no podemos integrar dado que  $\epsilon(t)$  es una función que depende del tiempo cósmico. Aquí tenemos que aplicar que el universo está dominado por materia, de tal modo que la ecuación de fluido:

$$\dot{\epsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P)$$

y sustituyendo la ecuación de estado de la materia  $P_m \approx 0$  tenemos que:

$$\frac{\epsilon(t)}{\epsilon_0} = \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3}$$

que podemos sustituir en la primera ecuación para obtener:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\epsilon_0 a_0^3}{a^3}$$

Ahora solo tenemos que expresar:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 - \frac{c^2}{a_0^2} \quad \epsilon_{0,c} = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \quad \Omega_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{0,c}}$$

A partir de estas definiciones hacemos los cambios:

$$\frac{c^2}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon - H_0^2 = H_0^2 (\Omega_0 - 1) \quad \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 = H_0^2 \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \epsilon_0 = H_0^2 \Omega_0$$

tal que podemos obtener:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = H_0^2 \left( \Omega_0 \frac{a_0^3}{a^3} \right) - (\Omega_0 - 1) \frac{a_0^2}{a^2}$$

#### Integración

Para integrar las ecuaciones tenemos que hacer un par de cambios de variable. El primero:

$$x = \frac{a}{a_0} \rightarrow a = x a_0 \quad \dot{a} = a_0 \dot{x}$$

de lo que se deduce que:

$$\dot{x}^2 = H_0^2 \left( \Omega_0 x^{-1} - (\Omega_0 - 1) \right)$$

Así tenemos que:

$$\frac{1}{H_0} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(\Omega_0 - 1) - \Omega_0 x}} = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)} x}} = \int_0^t dt$$

donde hemos aplicado la condición más sencilla: en el instante Big Bang ( $t = 0$ ) no existía el espacio ( $x = 0$ ). Aplicando el cambio de variable

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}} \sin \theta \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)}} d \sin \theta \quad dx = 2 \left( \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)} \right) \sin \theta d \sin \theta$$

y por tanto

$$\frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \int \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \int_0^t dt$$

Veamos que esto lleva inexorablemente a:

## Formulario

Corrimiento al rojo

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$$

Corrimiento al rojo

$$z = \frac{H_0}{c}d$$

Velocidad de recesión

$$V = H_0 d$$

Velocidad de mov. total

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{recesion}} + \vec{V}_{\text{peculiar}}$$

Métrica Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - k^2 r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Distancia propia

$$\bar{r}_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Distancia real

$$d_{ab} = a(t) \bar{r}_{ab}$$

Corrimiento al rojo

$$1 + z = \frac{a(t_{\text{recibido}})}{a(t_{\text{emitido}})}$$

Parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

Parámetro de deceleración

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{[\dot{a}(t)]^2}$$

Ecuación de Friedman para la velocidad

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon$$

Ecuación de Friedman para la aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (3P + \epsilon)$$

Ecuación de un fluido

$$\dot{\epsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P)$$

Densidad de energía crítica

$$\epsilon_c := \frac{3H^2 c^2}{8\pi G}$$

Factor Omega:

$$\Omega(t) := \frac{\epsilon}{\epsilon_c}$$

Ecuación de Friedman para la velocidad  $H(t), \Omega$ .

$$\frac{kc^2}{a^2} = H^2(\Omega - 1)$$

Ecuación de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Ecuaciones de estado:

$$P_m \approx 0 \quad P_\gamma = \frac{\epsilon_\gamma}{3} \quad P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$$

Distancia de luminosidad

$$d_L = d_p(1 + z)^2$$

$$d_p = a_0 \int_0^{t_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a_0 \int_0^{t_1} \frac{dt}{a(t)}$$

Horizonte de partículas

$$d_H = c a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

## *Ejercicios*

El trabajo es, y ahora la prueba de fuego.

