Electrónica Física

Daniel Vázquez Lago

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Índice general

1. Física de semiconductores **7**
1.1. Banda de valencia y conducción . . . 7
1.1.1. Semiconductores directos e indirectos . . . 8
1.1.2. Forma de los mínimos y máximos de banda: masa equivalente . . . 9
1.1.3. Ecuación del movimiento . . . 9
1.2. Portadores: conecpto de hueco y electrón . . . 9
1.3. Densidad de portadores y clasificación de semiconductores . . . 10
1.3.1. Densidad de portadores en el caso más general posible . . . 11
1.3.2. Semiconductores no degenerados y degenerados . . . 12
1.3.3. Semiconductores intrínsecos caso no degenerado . . . 13
1.3.4. Semiconductores extrínsecos caso no degenerado . . . 14
1.3.5. Semiconductores extrínsecos: régimen intrínseco y extríseco . . . 15
1.4. Ejercicios . . . 17
1.4.1. Ejercicio 1 . . . 17
1.4.2. Ejercicio 2 . . . 18
1.4.3. Ejercicio 3 . . . 20
1.4.4. Ejercicio 4 . . . 21
1.4.5. Ejercicio 5 . . . 22
1.4.6. Ejercicio 6 . . . 24
1.4.7. Ejercicio 7 . . . 25
1.4.8. Ejercicio 8 . . . 26

2. Fenómenos de transporte en semiconductores **29**
2.1. Arrastre . . . 29
2.1.1. Introducción: modelo de arrastre y difusión . . . 29
2.1.2. Corriente de arrastre . . . 30
2.1.3. Dispersión: efectos en la movilidad . . . 30
2.1.4. Resistividad y movilidad . . . 32
2.1.5. Curvatura de bandas . . . 33
2.2. Difusión . . . 33
2.2.1. Corrientes de difusión . . . 33
2.2.2. Relaciones de Einstein . . . 34
2.3. Procesos de generación y recombinación . . . 34
2.3.1. Introducción . . . 35
2.3.2. Consideraciones acerca los procesos RG . . . 37
2.3.3. Recombinación directa en semiconductores de gap directo . . . 37
2.3.4. Recombinación indirecta en semiconductores de gap indirecto: procesos RG. 38
2.3.5. Simplificaciones: balance detalado . . . 39

2.3.6. Recombinación Auger 42
2.3.7. Recombinación superficial 42
2.4. Ecuaciones de continuidad 43
2.4.1. Introducción 43
2.4.2. Ecuaciones de difusión de portadores minoritarios 44
2.4.3. Longitud de difusión 45
2.5. Pseudoniveles de Fermi 45
2.6. Otros fenómenos de transporte 45
2.6.1. Emisión termoiónica 45
2.6.2. Transporte túnel 45
2.6.3. Efectos a campos altos 46
2.7. Ejercicios 47
2.7.1. Ejercicio 1 47
2.7.2. Ejercicio 2 48
2.7.3. Ejercicio 3 49
2.7.4. Ejercicio 4 50
2.7.5. Ejercicio 5 51
2.7.6. Ejercicio 6 53
2.7.7. Ejercicio 7 54
2.7.8. Ejercicio 8 57

3. La unión PN **59**
3.1. Equilibrio termodinámico 59
3.1.1. Introducción 59
3.1.2. Caracterización de la unión pn escalón 60
3.1.3. Caracterización de la unión pn gradual 61
3.2. Union pn bajo polarizaciones 61
3.3. Características IV de la union pn 63
3.3.1. Aproximación del diodo ideal 64
3.3.2. Diodo ideal: corrientes en las zonas masivas 64
3.3.3. Diodo ideal: corrientes en la zona de vaciamiento 66
3.3.4. Ecuación del diodo ideal 66
3.3.5. Diodo estrecho 67
3.4. Desviacioens respecto la unión ideal 67
3.4.1. Desviaciones en polarización inversa 68
3.4.2. Desviaciones en polarización directa 69
3.5. Capacidades de vaciamiento y difusión 69
3.5.1. Capacidad de vaciamiento 69
3.5.2. Capacidad de difusión 69
3.5.3. Circuito equivalente 69
3.6. Heterouniones y diodos túnel 69
3.7. Ejercicios 70
3.7.1. Ejercicio 1 70
3.7.2. Ejercicios 2 74
3.7.3. Ejercicios 3 77
3.7.4. Ejercicio 4 77
3.7.5. Ejercicio 5 78
3.7.6. Ejercicio 6 80
3.7.7. Ejercicio 7 81

4. El transistor bipolar de unión **83**

5. El transistor MOSFET **85**

A. Apéndice **87**

A.1. Densidad de Estados y Estadística de Fermi-Dirac 87

A.1.1. Niveles de energía 87

A.1.2. Estadística de Fermi-Dirac 90

Capítulo 1

Física de semiconductores

1.1. Banda de valencia y conducción

Un semiconductor es un material sólido que presenta dos bandas (en realidad presenta más, solo accesibles[1] a energías térmicas o electromagnéticas muy altas, y por tanto innecsarias para nuestro estudio). Para definir una banda primero tenemos que entender que los electrones en los sólidos se pueden describir mediante una suma de ondas planas, y por tanto la energía de estos se puede describir como una función del momento dse onda $E(k)$ (aunque no tiene porque ser necesariamente de la forma $E = \hbar^2 k^2/2m$). Así, debido al caracter fermiónico de los electrones y otros potenciales aparecen energías inaccesibles para nuestros electrones, i.e. para ningún k existen esas energías. Así aparecen diferentes *bandas*, limitadas por una *energía superior* y una *energía inferior*.

Figura 1.1: Bandas de conducción y valencia para algunos semicdonductores.

Como dijimos, un semiconductor posee dos bandas, separadas por una energía E_g. A la banda con energía superior se le llama **banda de conducción** (B.C) y a la banda inferior se le llama **banda de valencia** (B.V). Las bandas, a su vez, poseen diferentes líneas de dispersión, esto es diferentes relaciones $E(k)$. El número y forma de estas dependerá del tipo de material y la dirección de la onda,

[1] Cuando decimos accesibles nos referimos a que existe una posibilidad no nula de que estén ocupadas.

por esa misma razón solemos ver en la parte inferior de las bandas $\langle 111 \rangle$ o $\langle 100 \rangle$. Está denotando la dirección de la onda. En general suelen ser materiales muy simétricos, y por tanto con pocas direcciones representamos todas las posibles relacioens de dispersión.

La *energía mínima de la banda de conducción* se denota como E_c, la *energía máxima de la banda de valencia* se denota por E_v, y la diferencia entre el máximo de la BV y el mínimo de BC se denota por E_g:

$$E_g = E_c - E_v \tag{1.1.1}$$

En general se suele definir $E_v = 0$ como referencia. Así la banda de valencia posee energías negativas, y la banda de conducción energías positivas. Veamos las características de las bandas:

- **Banda de valencia:** el *máximo siempre aparece en* $k = 0$. Está dividida en 3 subbandas (3 relaciones de dispersión), 2 de ellas degeneradas en $k = 0$ (son indistiguibles en $k = 0$).
- **Banda de conducción:** está dividida en subbandas (aunque el número depende del material), y el valor de $k_{\text{mín}}$ tal que $E_{\text{mín}} = E(k_{\text{mín}})$ del dependerá del material.

1.1.1. Semiconductores directos e indirectos

Como hemos dicho, E_c es el mínimo de la banda de conducción y E_v es el máximo de la banda de valencia. En función del valor de $k_{\text{mín}}$ distinguimos dos tipos de semiconductores:

- Definimos un **semiconductor indirecto** a aquel que verifica que $k_{\text{mín}} \neq 0$. Es decir, el gap de energía sucede entre diferentes momentos (lo que hará que cuando se excite a un electrón de la BV tenga que darsele un momento).
- Definimos un **semiconductor directo** a aquel que verifica que $k_{\text{mín}} = 0$. Es decir, el gap de energía sucede a $\Delta k = 0$ (lo que hará que cuando se excite a un electrón de la BV no se pueda intercambiar momento).

Figura 1.2: A la izquierda semicondutor de gap indirecto y a la derecha de gap directo.

1.1.2. Forma de los mínimos y máximos de banda: masa equivalente

Cerca de los extremos de las bandas $E_0 = E(k_0)$ tenemos que se puede aproximar la energía por una función parabólica, tal que:

$$E = E_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}\right)_{k_0}(k - k_0)^2 \tag{1.1.2}$$

Como podemos ver, esto se parece mucho a la expresión $E = \hbar^2 k^2/2m$ que se usa para *partículas libres*. Es decir, cerca de los extremos de las bandas, los *portadores actúan como partículas libres con masa efectiva* m^* definida como

$$(m^*)^{-1} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \tag{1.1.3}$$

Imagen de los mínimos/máximos.

1.1.3. Ecuación del movimiento

La ecuación del movimiento para los electrones es una generalización de la ecuación de Newton usando el momento de onda del electrón $\mathbf{k}$. Sabiendo que

$$\mathbf{F} = m^*\mathbf{a} = m^*\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}} = \hbar\dot{\mathbf{k}} \tag{1.1.4}$$

de lo que se deduce que

$$\hbar\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \tag{1.1.5}$$

pudiendo ser la fuerza, por ejemplo, la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$, o cualquier otra.

1.2. Portadores: conecpto de hueco y electrón

En los semiconductores hay 2 tipos de portadores, los portadores tipo hueco (o tipo p[2]) y tipo electrón (tipo n). La pregunta que nos deberíamos plantear en este momento es: ¿Qué sentido tiene que existan portadores tipo electrón/hueco si solo tenemos electrones en el semiconductor?¿Como que "tipo electrón", no deberían ser simplemente electrones? La respuesta es un tanto complicada. Como hemos dicho, cerca de los extremos las partículas, los electrones se comportan como electrones libres con masa efectiva m^* (de hay viene *tipo electrón* se comportan casi como electrones). Sin embargo esta "masa efectiva" tiene un problema en el máximo de la banda de valencia: la masa efectiva es negativa (recordemos que en un máximo la curvatura $\partial^2 E/\partial k^2 < 0$).

Para solucionarlo trabajemos en la siguiente idea. Supongamos que tenemos la capa de valencia llena salvo por un electrón, que se ha excitado y ha subido a la capa de conducción. En la banda de valencia habrá entonces N electrones menos uno. La suma de los momentos de todos los electrones de la banda será entonces:

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{4N-1}\mathbf{k}_i \tag{1.2.1}$$

[2]Por el hecho de que se pueden describir como partículas con carga positiva.

o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{4N} (\mathbf{k}_i) - \mathbf{k}_e \tag{1.2.2}$$

denotándolo por $\mathbf{k}_e$ ya que es un electrón cualquiera (son indistiguibles). Como sabemos, la suma del momento de los electrones en una banda tiene que ser cero, ya que k tiene tanto valores negativos y positivas, y están todos ocupados. Es decir, tenemos que el momento total de la banda será:

$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_h = -\mathbf{k}_e \tag{1.2.3}$$

si a este momento total lo llamamos $\mathbf{k}_p$ (momento de portador p o hueco), tenemos que *el movimiento efectivo de una capa sin un electrón es en el sentido opuesto al que tendría un electŕon individual en la misma*. A este artificio matemático lo llamamos hueco, y no es más que la manera de describir el comportamiento de una capa entera (capa de valencia) a través de unas pocas partículas. La energía también tendrá el signo opuesto, ya que:

$$E_h = \sum_i E_i - E_e \tag{1.2.4}$$

y como $\sum_i E_i$ es una constante, la podemos ignorar. Así pues, definimos la *energía del hueco*

$$E_h \equiv -E_e \tag{1.2.5}$$

Y por tanto, aunque la masa efectiva de un electrón en el máximo de la banda de valencia sea negativa (en un máximo $\partial^2 E/\partial k^2 < 0$), para el objeto matemático así definido tenemos que la masa efectiva será positiva, y la carga será positiva. Que la carga sea positiva no es tan obvio. Para ello tenemos que ver que la ecuación del movimiento

$$\hbar \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}_h}{\mathrm{d}t} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_h \times \mathbf{B}) \tag{1.2.6}$$

hace que se comporte como un electrón con carga positiva ($\mathbf{k}_h \equiv -\mathbf{k}_e$).

La pregunta ahora es: ¿Tiene sentido físico? La respuesta es que sí. El sentido físico está en que cuando excitamos un electrón a la BC desde la BV, queda un estado sin ocupar, un hueco, en la banda de valencia. Este hueco podría ser rellenado por los electrones vecinos, que desde fuera lo veríamos como un movimiento efectivo del hueco, que además tendría el sentido contrario al del electrón (si los electrones saltan por ejemplo de izquierda a derecha por culpa de un campo eléctrico, veremos al hueco saltando de la derecha a la izquierda).

Consecuentemente los electrones en la banda de conducción se comportarán como electrones normales libres por la salvedad de que la masa efectiva será diferente; mientras que la falta de electrones en la banda de valencia (por la excitación de estos a la banda de conducción) se describirá a través de una serie de partículas con masa efectiva positiva diferente a la masa del electrón, carga positiva, con momento y energía efectiva de signo contrario al que tendría un electrón libre en la banda de valencia.

1.3. Densidad de portadores y clasificación de semiconductores

En esta sección vamos a tratar de expresar la densidad de portadores hueco, denotado por p, y la densidad de portadores electrones, denotado por n. Primero estudiaremos el caso mas general

posible, en función de la densidad de estados $g(E)$ y de la función de Fermi-Dirac $f(E)$. Luego iremos haciendo ciertas aproximaciones para simplificar los resultados.

1.3.1. Densidad de portadores en el caso más general posible

El caso más general, como ya hemos dicho, estudia el número de portadores n y p a partir de las integrales sobre las densidades de energía y función de Fermi. La *densidad de estados* $g(E)$ es la distribución de los estados de energía a una energía dada, mientras que la *función de Fermi* indica, en condiciones de equlibrio, la probabilidad de que un estado permitido de enerǵia E esté ocupado por un electrón. La función de densidad de estados depende de la dimensión del sistema, tal que:

$$g_{3D}(E) = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}E^{1/2}}{\pi^2\hbar^3} \quad g_{2D}(E) = \frac{m}{\pi\hbar^2} \quad g_{1D}(E) = \frac{\sqrt{2}m^{1/2}}{\pi\hbar\sqrt{E}} \tag{1.3.1}$$

La dedución de estas densidades no es exageradamente complicada, véase apéndice A.1. Por otra parte, la función de Fermi nos dice que la probabilidad de que cierto estado esté ocupado es:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \tag{1.3.2}$$

donde E_F es la enerǵia de Fermi, de la cual hablaremos más adelante. Naifmente uno podría pensar que la densidad n/p sería simplemente la integral $g(E)f(E)$ entre diferentes intervalos de energía, ya que como sabemos los electrones se encuentran siempre en la banda de conducción, y por tanto entre las energías $E_{\text{mín}}$ y E_c, mientras que los huecos se encuentran en la banda de valencia, y por tanto entre las energías $E_{\text{máx}}$ y E_v.

Sin embargo esto no es correcto, por dos razones. La primera de ellas es que por culpa de la forma de parábola cerca del máximo y el mínimo de la banda de valencia y conducción respectivamente, es necesario redefinir el cero en el máximo local/mínimo local. La razón no es evidente a primera vista, pero uno lo puede entender cuando piensa que en un extremo local solo caben 2 electrones (uno con espín arriba y otro con espín abajo). Así pues, las densidades en la banda de valencia $g_v(E)$ y en la banda de conducción $g_c(E)$ son:

$$g_c(E) = \frac{(m_n^*)^{3/2}\sqrt{2(E-E_c)}}{\pi^2\hbar^3} \quad E \geq E_c \qquad g_v(E) = \frac{(m_p^*)^{3/2}\sqrt{2(E_v-E)}}{\pi^2\hbar^3} \quad E \leq E_v \tag{1.3.3}$$

La segunda razón es que si $f(E)$ es la probabilidad de que esté un estado ocupado con energía E en el equilibrio, entonces $1 - f(E)$ será la probabilidad de que no esté ocupado, y por tanto la probabilidad de que haya un hueco. Así pues, **las densidades de los portadores son**

$$n = \int_{E_c}^{E_{\text{máx}}} g_c(E)f(E)\mathrm{d}E \qquad p = \int_{E_{\text{mín}}}^{E_v} g_v(E)(1-f(E))\mathrm{d}E \tag{1.3.4}$$

que se puede aproximar para obtener las densidades en función de la llamada *integral de Fermi-Dirac de orden 1/2* $F_{1/2}(\eta_c)$. La aproximación consiste básicamente en decir que $E_{\text{máx}} \to \infty$, y que por tanto

$$n = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}(kT)^{3/2}F_{1/2}(\eta_c) \qquad F_{1/2}(\eta_c) = \int_0^\infty \frac{\eta^{1/2}}{1+e^{\eta-\eta_c}}\mathrm{d}\eta \tag{1.3.5}$$

$$\eta = \frac{E-E_c}{kT} \qquad \eta_c = \frac{E_F-E_c}{kT} \tag{1.3.6}$$

(no hemos hecho todos los pasos para deducir la forma ya que no se va a usar en nigún momento). Esta ecuación no tiene solución analítica, por tanto es necesario hacer ciertas aproximaciones si queremos trabajar con ella, lo cual trataremos en el siguiente apartado.

1.3.2. Semiconductores no degenerados y degenerados

La aproximación más interesante (y útil) es la llamada *aproximación de Bolztmann*:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \approx e^{-(E-E_F)/kT} \tag{1.3.7}$$

que nos permite obtener una solución muy sencilla a $F_{1/2}$:

$$F_{1/2}(\eta_c) = \int_0^\infty \frac{\eta^{1/2}}{1 + e^{\eta-\eta_c}} \mathrm{d}\eta \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\eta_c} \tag{1.3.8}$$

Esta aproximación solo es válida cuando $E_c - 3kT > E_F > E_v + 3kT$, y por tanto cuanta más alta la temperatura más restringida será su aplicación. Cuando un semiconductor verifica estas condiciones para una temperatura dada decimos que se encuentra en el *régimen no degenerado*, mientras que cuando *no* verifica dichas condiciones decimos que está en el *régimen degenerado*.

Figura 1.3: Régimen degenerado y no degenerado.

En general nosotros trabajaremos únicamente con semiconductores no degenerados, y por tanto en el rango de validez de la aproximación de Bolztmann, la que da como resultado las siguientes densidades de portadores:

$$p = N_v e^{(E_v-E_F)/kT} \qquad n = N_c e^{(E_F-E_c)/kT} \tag{1.3.9}$$

donde N_c y N_v son las llamadas **densidades equivalentes de los estados de la banda de valencia y conducción**, con la siguiente forma:

$$N_c = 2\left(\frac{m_n^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \qquad N_v = 2\left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{1.3.10}$$

Para una temperatura aproximada de 300K tenemos que

$$N_{C,V} = (2.509 \times 10^{19}\text{cm}^{-3}) \left(\frac{m^*_{n,p}}{m_0}\right)^{3/2} \tag{1.3.11}$$

siendo m_0 la masa del electrón.

1.3.3. Semiconductores intrínsecos caso no degenerado

Definimos como **semiconductor intrínseco** a un material semiconductor extremadamente puro, sin dopantes, cuyas propiedades solo dependan del material. En este tipo de materiales el número de electrones es igual al número de huecos (en virtud de la neutralidad electrónica: el número de electrones en la banda de conducción será el mismo el número que electrones faltan en la banda de valencia, i.e. el número de huecos). Matemáticamente se expresa como

$$n = p = n_i \tag{1.3.12}$$

y se llama *condición intrínseca*. Siempre que estudiemos semiconductores intrínsecos lo haremos a través de los semiconductores no degenerados, ya que de cualquier otra forma no podemos tener expresiones analíticas. Denotamos E_i al **nivel de fermi intrínseco**. Usando la ecuación anterior, obtenemos que:

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_C N_V} e^{-E_g/2kT} \tag{1.3.13}$$

donde $E_g = E_c - E_v$ y se le llama *energía de gap*. El valor de n_i para un semicdonductor dado es muy importante, incluso cuando está dopado. La razón es que siempre podemos expresar n y p en función de n_i (a la misma temperatura), ya que si $n = p = n_i$:

$$n_i = N_C e^{(E_i - E_c)/kT} = N_V e^{(E_v - E_i)/kT} \Rightarrow$$
$$N_C = n_i e^{(E_c - E_i)/kT} \quad N_V = n_i e^{(E_i - E_v)/kT} \tag{1.3.14}$$

tal que

$$n = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \qquad p = n_i e^{(E_i - E_F)/kT} \tag{1.3.15}$$

lo cual nos está dando en realidad una información muy relevante: en función del nivel de fermi, i.e., si $E_F > E_i$ o $E_F < E_i$, podremos saber si el conductor es de tipo n o tipo p (solo cuando $E_F = E_i$ tenemos $n = p$, precisamente la condición intrínseca). Además tenemos que de la expresión anterior podemos deducir la llamada **ley de acción de masas** (que se verifique siempre que estemos en el rango no degenerado):

$$np = n_i^2 \tag{1.3.16}$$

Si nos damos cuenta a partir de las ecuaciones 1.3.14 podemos deducir una *expresión para la posición del nivel de Fermi intrínseco E_i*. Para esto partimos de las ecuaciones 1.3.15, de lo que se deduce que:

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_C}{N_V}\right) = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\left(\frac{m^*_p}{m^*_n}\right) \tag{1.3.17}$$

Incluso podemos obtener la *expresión para la posición del nivel de Fermi E_F* para el caso más general. Para esto partimos de las ecuaciones

$$\ln\left(\frac{n}{n_i}\right) = \frac{1}{kT}\left(E_F - E_i\right) \Rightarrow E_F = E_i + kT\ln\left(\frac{n}{n_i}\right) \tag{1.3.18}$$

$$\ln\left(\frac{p}{n_i}\right) = \frac{1}{kT}\left(E_i - E_F\right) \Rightarrow E_F = E_i - kT\ln\left(\frac{p}{n_i}\right) \tag{1.3.19}$$

Siendo expresiones completamente compatibles (si se verifica una se verifica la otra) además de que mantienen la relación citada antes entre el nivel de Fermi y el número de portadores huecos/electrón.

1.3.4. Semiconductores extrínsecos caso no degenerado

Definimos como **semiconductor extrínseco** o **semiconductor dopado** a un material semiconductor al que se le han insertado átomos de otro grupo. Pero antes es importante preguntarse por qué se incluyen estos átomos en nuestro semiconductor, y cuáles son sus ventajas. La respuesta todavía no podemos darla de manera muy profunda, sin embargo si podemos decir lo siguiente: a temperaturas ambiente, la cantidad de portadores tipo n y tipo p intrínsecas son muy bajas, y por tanto habrá una conductividad muy baja. Cuando dopamos un semiconductor no solo estamos aumentando el número de portadores de un tipo, estamos aumentando la conductividad. De hecho, al ser capaces de controlar el nivel de dopado, podemos elegir la conductividad arbitrariamente, pudiendo optimizar y controlar totalmente las propiedades eléctricas.

Así pues, tenemos dos tipos de dopantes, que además definiran el tipo de portador mayoritario que tendremos. Tenemos pues:

- **Dopante dador**. Los dopantes dadores o dadores aportan electrones a la banda de conducción (por lo general son elementos del grupo V, aportando un electrón), lo que hará que el portador mayoritario sea el portador n. A la concentración de dadores la denotamos por N_D. Entre ellos encontramos el fósforo (P), el arsénico (As) y el antimonio (Sb).
- **Dopante aceptor**. Los dopantes aceptores o aceptores aportan heucos a la banda de valencia (por lo general son elementos del grupo III, aportando un hueco), lo que hará que el portador mayoritario sea el portador p. A la concentración de dadores la denotamos por N_A. Entre ellos encontramos el boro (B), el aluminio (Al) y el galio (Ga).

Figura 1.4: Funcionamiento de los conductores tipo n.

Figura 1.5: Funcionamiento de los conductores tipo p.

Sin embargo no es igual el número de impurezas N_D y N_A al número de portadores que aportan N_D^+ y N_A^-. Pensemos por ejemplo el caso de los elementos del grupo V. Para que puedan aportar

el quinto electrón es necesario romper el enlace que lo une con dicho átomo, es decir, hace falta ionizarlo, lo que se hace a través de la aportación de energía, por ejemplo energía térmica. A partir de cierta temperatura todas las impurezas están ionizadas (temperatura ambiente). Sin embargo no siempre será así, y si la energía térmica no es suficiente para ionizar todas las impurezas, debemos usar las siguientes expresiones:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + g_D e^{(E_F - E_D)/kT}} \qquad N_A^- = \frac{N_A}{1 + g_D e^{(E_A - E_F)/kT}} \tag{1.3.20}$$

donde E_D y E_A son las correspondientes energías de ionización. Al igual que antes tenemos la condición de electroneutralidad, aunque ahora va a cambiar un poco: tenemos que considerar que N_D^+ y N_A^- aportan carga. Así pues, la **condición de electroneutralidad para extrínsecos** es:

$$p + N_D^+ = n + N_A^- \tag{1.3.21}$$

lo cual tiene todo el sentido del mundo: si tenemos $N_D^+ > N_A^-$ (mas dadores que aceptores) lógicamente habrá más portadores tipo n que tipo p. Dado que la ley de acción de masas $np = n_i^2$ se cumple *para cualquier semiconductor no degenerado*, para cualquier conductor no degenerado extrínseco podemos conocer n y p en función de n_i, N_D^+ y N_A^- (que surge tras despejar una ecuación de segundo grado):

$$n = \frac{N_D - N_A}{2} + \left[\left(\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + n_i^2\right]^{1/2} \qquad p = \frac{N_A - N_D}{2} + \left[\left(\frac{N_A - N_D}{2}\right)^2 + n_i^2\right]^{1/2} \tag{1.3.22}$$

Los 3 casos más sencillos que nos pueden plantear son los siguientes:

- Cuando $N_D^+ = N_A^-$ tenemos que
$$n = p = n_i \tag{1.3.23}$$
- Cuando $N_D^+ \gg N_A^-, n_i$. En este caso tenemos las siguientes ecuaciones:
$$n = N_D^+ \qquad p = \frac{n_i^2}{N_D^+} \tag{1.3.24}$$
- Cuando $N_A^- \gg N_D^+, n_i$. En este caso tenemos las siguientes ecuaciones:
$$p = N_A^- \qquad n = \frac{n_i^2}{N_A^-} \tag{1.3.25}$$

El resto de casos habrá que calcularlos aparte.

1.3.5. Semiconductores extrínsecos: régimen intrínseco y extríseco

Definimos como **régimen extrínseco** de un semiconductor extrínseco[3] aquel intervalo de temperaturas (aunque puede ser otra variable) en el que todas las impurezas están ionizadas y se verifica que N_D^+ o N_A^- es mucho mayor que n_i. Definimos como **régimen intrínseco** aquella región de temperaturas en la cual el nivel de impurezas excitadas es comparable o menor al número de portadores

[3]Muchas veces, cuando se dice que está en el semicdonductor está en el régimen extrínseco ya se asume que está dopado, y por tanto se obvia.

excitados por fluctuaciones térmicas n_i. Cuando la temperatura es baja y no están excitados todas las impurezas, decimos que estamos en el régimen de *freeze out*.

Definimos como **temperatura intríseca** a la temperatura que separa el régimen extrínseco e intrínseco, y se define como aquella temperatura para la cual $n(T_i) = 2N_D$ o $p(T_i) = 2N_A$ en función de si es dador o aceptor el dopante.

Figura 1.6: Régimenes intrínsecos y extrínsecos en función de la temperatura.

1.4. Ejercicios

1.4.1. Ejercicio 1

Se dopa silicio con Boro (B) en una proporción de 2 ppm (partes por millón)

a) Calcula la concentración intrínseca del Si y obten una expresión de dicha concentración en función de la temperatura.

b) Indica el tipo de conducción de este material y calcula la concentración de impurezas y la de electrones y huecos (n y p) a temperatura ambiente si todos los dopantes están ionizados.

c) Calcula la posición del nivel de Fermi y dibuja el diagrama de bandas completo correspondiente.

d) ¿Qué pasa si la concentración de impurezas igualase el valor de N_V? Representa gráficamente las bandas de energía frente a la concentración de impurezas usando todas las aproximaciones que conozcas.

(DATO: Constante de red del Si $a_0 = 5.431$ Å).

Veamos las soluciones por apartados

a) La concentración intrínseca del Silicio en un semiconductor es el número de portadores n_i en el semiconductor, si no estuviera dopado. No hay que confundir la concentración intrínseca n_i con la concentración n, en la que si se tendrá en cuenta que el material está dopado. La concentración intrínseca es:

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-E_G/2kT} \tag{1.4.1}$$

donde $E_G = E_c - E - v$, y además

$$N_{C,V} = 2\left(\frac{m^*_{e,p} kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} \tag{1.4.2}$$

Las masass $m^*_p = 1.18 m_e$ y $m^*_n = 0.81 m_e$. Si queremos dar el valor:

$$N_c = 3.22 \cdot 10^{19}\text{cm}^{-3} \qquad N_v = 1.83 \cdot 10^{19}\text{cm}^{-3} \tag{1.4.3}$$

De lo que se deduce

$$n_i = 9.56 \cdot 10^9\text{cm}^{-3} \tag{1.4.4}$$

b) Están dopando con boro, que es del grupo III, y por tanto es un dador. Esto significa que será un conductor tipo p. Para calcular la concentración de impurezas, primero tenemos que obtener la densidad de Boro en nuestro silicio. La densidad del silicio se calcular a partir de la constante de red y sabiendo que posee una red diamante. Así pues:

$$N_{Si} = \frac{8}{a_0^3} \tag{1.4.5}$$

de lo que se puede deducir entonces que:

$$N_B = 2 \cdot 10^{-6} \cdot N_{Si} = 9.988 \cdot 10^1 6\text{cm}^{-3} \tag{1.4.6}$$

Nos dicen que todos los dopantes están ionizados, es decir, que estamos en el régimen extrínseco. En este régimen todos los átomos de Boro son impurezas, tal que $N_A^- = N_A = N_B$. Suponiendo que $N_A^- \gg N_D^+$, tenemos que la ecuación de neutralidad de carga:

$$n \cdot p = n_i^2 \qquad p - n - N_A = 0 \tag{1.4.7}$$

usando estas ecuaciones para despejar el valor de n y p, tenemos que:

$$p = \frac{N_A}{2} + \left[\left(\frac{N_A}{2}\right)^2 + n_i^2\right]^{1/2} \tag{1.4.8}$$

y luego calculamos

$$n = \frac{n_i^2}{p} \tag{1.4.9}$$

Numéricamente podemos obtener los resultados:

$$n = 915.034\text{cm}^{-3} \quad p = 9.988 \cdot 10^{16}\text{cm}^3 \tag{1.4.10}$$

c) La posición del nivel de Fermi de un semiconductor dopado se calcula a partir del nivel de Fermi intrínseco. Así pues

$$E_{Fi} = E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3kT}{4} \ln \frac{m_p^*}{m_e^*} = 0.523\text{eV} \tag{1.4.11}$$

tal que la energía de Fermi. *Introducir imagen*

$$E_F = E_i + kT \ln\left(\frac{p}{n_i}\right) = 0.1350.135 \tag{1.4.12}$$

d) Cuando la concentración de impurezas es igual al valor de N_V, dado que $p = N_V e^{(E_v - E_F)/kT}$, esto implicaría que $E_v = E_F$, y que por tanto la condición de *semiconductor no degnerado* $E_F > E_v + 3kT$ no se cumpliría. *Tenemos un semiconductor degenerado, teniendo que calcular los valores de n y p mediante las integrales explícitas*. Consecuentemente, estamos ante un semiconductor degenerado. *Introducir imagen para las bandas*.

1.4.2. Ejercicio 2

Una muestra de Si está dopada con 6×10^{15} átomos de As por cm^3

a) ¿Cuál es la concentración de portadores en la muestra de Si a 300 K?

b) ¿Cuál es la concentración de portadores a 470 K?

c) Para cada una de las dos temperaturas anteriores determinar la posición de E_i, calcular $E_F - E_i$ y dibujar a escala el diagrama de bandas de energía para la muestra.

d) Si dopamos el Si con 10^{16} átomos donadores y 5×10^{15} átomos aceptores por cm^3. ¿Cuál es la concentración de portadores a 300 K?+

e) Partimos de una muestra de Si puro y lo dopamos exclusivamente con 10^{14} átomos donadores y 10^{14} átomos aceptores por cm³. Calcula la concentración de portadores y explica el resultado obtenido.

Tener en cuenta que $E_G = 1.08$ eV a 470 K y suponer que $m_e^*/m_h^* = 0.69$ es independiente de la temperatura.

---

a) Tenemos primero que ver si está degenerado, sin embargo sabemos que para esta temperatura y el nivel de dopamiento no debería estar degenerado, y por tanto podríamos usar la ley de acción de masas junto con la condición de electroneutralidad para despejar n en función de N_D, N_A y n_i. Se puede obtener, dado que $N_D \gg n_i, N_A$, tenemos que

$$n \approx N_D = 6 \cdot 10^{15}\text{cm}^{-3} \qquad n \cdot p = n_i^2 \Rightarrow p = 1.67 \cdot 10^4\text{cm}^{-3} \tag{1.4.13}$$

b) Nos dicen que a $T = 470$K y que $E_G = 1.08$eV. Lo único que no cambio es N_D. Lógicamente el número de portadores intrínsecos n_i cambia al aumentar la temperatura: a mayor energía térmica promocionan más electrones, mas electrones van a poder excitarse desde la banda de valencia. Calculamos n_i a partir de

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-E_g/2kT} \tag{1.4.14}$$

Luego solo tenemos que hacer

$$N_{c,v} = 4.829 \cdot 10^{15} T^{3/2} \left(\frac{m_{n,p}^*}{m_e}\right) \tag{1.4.15}$$

A esta temperatura tenemos entonces que:

$$N_c = 6.3 \cdot 10^{19}\text{cm}^{-3} \quad N_v = 3.6 \cdot 10^{19}\text{cm}^{-3} \tag{1.4.16}$$

Y por tanto

$$n_i = 7.74 \cdot 10^{13}\text{cm}^{-3} \tag{1.4.17}$$

De lo que se deduce, de nuevo, aplicnado la ley de acción de masas:

$$n = 6.001 \cdot 10^{15}\text{cm}^{-3} \quad p = 9.98 \cdot 10^{11}\text{cm}^{-3} \tag{1.4.18}$$

c) Determina la posción del nivel de Fermi intrínseco. Es secillo que:

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) \tag{1.4.19}$$

Una vez tenemos E_i para cada una de las temperaturas, calculamos la temperatura final

$$E_F = E_i + kT \ln\left(\frac{n}{n_i}\right) \tag{1.4.20}$$

Introducir imagen

d) .

e)

Falta por acabar

1.4.3. Ejercicio 3

Cuestiones sobre el nivel de Fermi:

a) Calcular la temperatura T para que el nivel de Fermi de un cristal de Silicio tipo N con $N_D = 10^{16}$ cm^{-3} quedara a una energía $E_G/3$ por debajo de la banda de conducción. Suponer que N_C y E_G son constantes con la temperatura e iguales a sus valores a temperatura ambiente. Y repetir para el caso de dopar con $N_D = 10^{18}$ cm^{-3}.

b) En un semiconductor determinado, la probabilidad de que los electrones ocupen un estado de energía kT, por encima del extremo inferior de la banda de conducción es e^{-10}. Determinar la posición del nivel de Fermi en dicho material.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estado de energía kT por debajo del nivel de Fermi esté ocupado por un hueco?

---

a) La solución es $T = 536.206$K. Para esto tenemos que usar la relación

$$T = \frac{E_F - E_c}{k} \frac{1}{\ln(N_D/N_c)} = \frac{-E_g}{3k} \frac{1}{\ln(N_D/N_c)} \tag{1.4.21}$$

donde $N_c = 3.22 \cdot 10^{19}$cm^{-3}.

b) Queremos calcular la posición del nivel de Fermi. Usamos la fórmula

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \tag{1.4.22}$$

y usando lo que nos da el enunciado:

$$f(kT + E_c) = \frac{1}{1 + e^{(kT+E_c-E_F)/kT}} = \frac{1}{e^{10}} \tag{1.4.23}$$

Tenemos entonces que

$$1 + e^{\frac{kT+E_c-E_f}{kT}} = e^{10} \tag{1.4.24}$$

De lo que se deduce que $E_F = E_c + 9kT$.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estado de energía kT por debajo del nivel de Fermi esté ocupado por un hueco? Tenemos que

$$1 - f(E_F - kT) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-1}} \simeq 0.2689 \rightarrow 26.89\,\% \tag{1.4.25}$$

La probabilidad es no nula y por tanto... (preguntar a Elisa Casal).

1.4.4. Ejercicio 4

Responde a las siguientes cuestiones:

a) A 300 K la densidad efectiva de estados en la banda de valencia es 1.83×10^{19} cm^{-3} para el silicio y 9.0×10^{18} cm^{-3} para el GaAs. Calcular sus correspondientes masas efectivas para los huecos. Comparar estas masas con la masa del electrón en el vacío.

b) Calcula y representa la posición del nivel intrínseco en silicio a temperatura ambiente y a 1000 °C (tomamos $m_p = 1.0m_0$ y $m_n = 0.19m_0$), asumiendo que el gap se mantiene constante. ¿Es razonable asumir que E_i se encuentra en la mitad de la banda prohibida?

---

a) Tenemos que calcular la masa efectiva de los huecos para dos semiconductores diferentes, dado su densidad efectiva de estados en la banda de valencia. Esto significa que necesitamos invertir la fórmula típica, tal que

$$N_V = 2\left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad m_p^* = \left(\frac{N_V}{2}\right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{kT} \tag{1.4.26}$$

De lo que se deduce que para el Si y el GsAs:

$$\text{Si:} \quad m_p^* = 7.38 \cdot 10^{-31}\text{kg} = 0.81\ m_e \tag{1.4.27}$$

$$\text{GaSi:} \quad m_p^* = 4.59 \cdot 10^{-31}\text{kg} = 0.51\ m_e \tag{1.4.28}$$

Nivel intríseco 300K 1.7505319217070854

b) Tenemos que calcular la posición del nivel intrínseco E_i a la temperatura ambiente (300 K) y a 1000 $°C$, asumiendo que E_g es constante. Veamos que solo es aplicar una fórmula:

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) \tag{1.4.29}$$

donde hemos considerado que $E_g = 1.12$ en el silicio, y que $E_v = 0$, ergo $E_c = 1.12$. Hacemos la representación gráficamente. Las energías son: $300K: \ E_i = 0.57$ eV y a 1273K E_i : 0.70 eV. Las masas usadas a 300K son: $m_p = 0.81m_e$ y $m_n = 1.18m_e$.

Viendo esta imagén no parece descabellado consdierar E_i constante.

1.4.5. Ejercicio 5

a) En GaN a 300 K, $E_G = 3.43$ eV, $m_n^*/m_0 = 0.2$, $m_p^*/m_0 = 1.25$ y $n_i = 1.37 \times 10^{-10}$ cm^{-3}. Explicar cualitativamente (sin utilizar la fórmula que calcula el valor de E_i) si el nivel de Fermi intrínseco en InSb estará más próximo a la E_C o a la E_V. Comprobarlo a continuación usando la fórmula.

b) Las distribuciones de portadores, o número de portadores en función de la energía en las bandas de conducción y de valencia presentan un máximo a una energía próxima a los bordes de las bandas. Considerando el semiconductor como no degenerado, calcular la energía a la que se encuentra el máximo en la distribución de electrones.

---

a) El nivel de Fermi intrínseco a temperatura no nula está mas cerca de E_c si la masa efectiva de los huecos es mayor que la masa efectiva de los electrones, y más cerca de E_v si la masa de los electrones es mas grande que la de los huecos. ¿Por qué? Como sabemos, la masa efectiva de los electrones/huecos es inversamente proporcional a la curvatura en el mínimo/máximo de la banda de conducción/valencia. Cuanto mayor sea la curvatura, mas energía se tiene que darse para ocupar la misma cantidad de estados. Como consecuencia, la energía de fermi intríseca, que se define como la mitad del valor entre E_c y E_v tendría que tirar hacia la banda con más curvatura, i.e. la que tiene menos masa efectiva. Francamente no me tiene mucho sentido, ya que E_c y E_v no debería cambiar. Existen otras formas de verlo a través de la función de Fermi y la densidad de estados, habría que investigarlo.

En nuestro caso esto implica que *debería estár mas cerca de la banda de conducción*. Para los valores dados, tenemos que

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) = 1.75 \text{ eV} \tag{1.4.30}$$

que considerando $E_v = 0$ y $E_c = E_g = 3.43$ eV vemos que está mas cerca de la banda de conducción E_c que de E_v.

b) La concentración de electrones en la banda de conducción está dada por:

$$n(E) = g_c(E) f(E)$$

donde

- La densidad de estados en la banda de conducción es:

$$g_c(E) = \frac{8\pi\sqrt{2} m_c^{3/2}}{h^3} (E - E_c)^{1/2}$$

- La función de distribución de Fermi-Dirac en la aproximación no degenerada (Maxwell-Boltzmann) es:

$$f(E) \approx e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}}$$

Por lo que la distribución de portadores en la banda de conducción es:

$$n(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m_c^{3/2}}{h^3}(E - E_c)^{1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}}$$

Para encontrar el máximo, derivamos respecto a E e igualamos a cero:

$$\frac{d}{dE}\left[(E - E_c)^{1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}}\right] = 0$$

Aplicando la regla del producto:

$$\frac{1}{2}(E - E_c)^{-1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}} + (E - E_c)^{1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}}\left(-\frac{1}{k_B T}\right) = 0$$

Factorizando:

$$e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}}(E - E_c)^{-1/2}\left[\frac{1}{2} - \frac{(E - E_c)}{k_B T}\right] = 0$$

Para que se cumpla la igualdad, la expresión entre corchetes debe ser cero:

$$\frac{1}{2} = \frac{(E - E_c)}{k_B T}$$

Despejando E:

$$E - E_c = \frac{1}{2}k_B T$$

Por lo tanto, el máximo de la distribución de electrones en la banda de conducción se encuentra a:

$$E_{\text{max},c} = E_c + \frac{1}{2}k_B T$$

Siguiendo el mismo procedimiento para los huecos en la banda de valencia:

$$E_{\text{max},v} = E_v - \frac{1}{2}k_B T$$

Esto significa que los portadores tienden a concentrarse en energías lige,amente por encima del borde de la banda de conducción y por debajo del borde de la banda de valencia en aproximadamente $\frac{1}{2}k_B T$. El doctorando hizo un dibujo que dijo que sale en el Pierret, sobre la multiplicación de producto de la densidad de estados y las bandas. Véase notas a mano.

1.4.6. Ejercicio 6

Dibujar un diagrama de bandas para el silicio dopado con 10^{17} átomos/cm^3 de arsénico a 300 K y 600 K. Mostrar el nivel de Fermi, E_C, E_V y utilizar el nivel de Fermi intrínseco como energía de referencia, asumiendo el caso de ionización total. La variación del bandgap con la temperatura viene dada por la expresión de Varshni (DOI: 10.1016/0031-8914(67)90062-6):

$$E_G(T) = E_G(0) - \frac{\alpha T^2}{T+\beta} \tag{1.4.31}$$

Para el silicio $\alpha = 4.73 \times 10^{-4}$ eV/K, $\beta = 636$ K y $E_G(0) = 1.17$ eV. Suponer que las masas efectivas se mantienen constantes con la temperatura.

Nos dicen que dibujemos un diagrama de bandas para el silicio dopado por arsénico (grupo V, dador) completamente ionizado. Esto implica necesariamente calcular E_i, E_c, E_v y E_F. Primero vamos a despejar E_i y E_v, luego despejaremos en función de estos E_F. Recordar que

$$E_i = \frac{E_v + E_c}{2} - \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) \tag{1.4.32}$$

- Como hemos dicho despejamos estas energías. Dado que E_i es nuestra referencia, las ecuaciones a usar son, a una T dada, que:

$$E_c - E_v = E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T+\beta} \qquad E_c + E_v = -2 \cdot \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) \tag{1.4.33}$$

  De lo cual se deduce que:

$$E_c = \frac{1}{2}\left[E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T+\beta} - \frac{3}{2}kT^{3/2} \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right)\right] \tag{1.4.34}$$

$$E_v = \frac{1}{2}\left[-E_g(0) + \frac{\alpha T^2}{T+\beta} - \frac{3}{2}kT^{3/2} \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right)\right] \tag{1.4.35}$$

  Usando las masas de portadores $m_n^* = 1.18 m_e$ y $m_p^* = 0.81 m_e$ (y considerado, como nos dice el enunciado, que son constantes frente a la tempratura). Obteniendo los siguientes resultados numéricos:

$$300\text{K}: \qquad E_c = 0.570 \text{ eV} \quad E_v = -0.554 \text{ eV} \tag{1.4.36}$$

$$600\text{K}: \qquad E_c = 0.531 \text{ eV} \quad E_v = -0.502 \text{ eV} \tag{1.4.37}$$

- Ahora tenemos que calcular E_F, que viene dado, en un conductor dopado N no degnerado por (recordar que $E_i = 0$)

$$E_F = kT \ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right) \tag{1.4.38}$$

  Dado que conocemos T y N_D, solo resta saber el valor de n_i, para lo cual hemos usado la expresión:

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-E_g/2kT} \tag{1.4.39}$$

siendo N_c y N_v las típicas funciones que dependen de la masa efectiva y del a temperatura. Así pues, obtenemo los resultados:

$$300\text{K:} \quad E_F = 0.420 \text{ eV} \qquad 600\text{K:} \quad E_F = 0.178 \text{ eV} \tag{1.4.40}$$

Una vez tenemos esto podemos realizar la representación:

1.4.7. Ejercicio 7

Calcular el nivel de Fermi y dibujar el diagrama de bandas completo de silicio dopado con 10^{15}, 10^{17} y 10^{19} átomos/cm^3 de P ($E_D = 0.045$ eV) a temperatura ambiente suponiendo ionización total de las impurezas. A partir del nivel de Fermi calculado comprobar si esta suposición es correcta para cada valor de dopado. Asumir que los átomos donadores ionizados vienen dados por la expresión:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2\exp\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)} \tag{1.4.41}$$

La solución del ejercicio pasa por calcular los valores de los niveles de Fermi usando la ecuación

$$E_F = E_i + kT \ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right) \tag{1.4.42}$$

Recordemos que en este caso definimos $E_c = 0$ eV. Consecuentemente tanto E_D como E_F serán negativos. Estamos ante un dador que tiene todos los átomos excitados N_D tal que $N_D \gg n_i, N_A$.

Dado que consideramos esto a tempeartura ambiente, tenemos que $n_i = 1.18 \cdot 10^{10}$ cm^{-3} y por tanto que para estos N_D:

$$N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow E_F = -0.27 \text{ eV} \tag{1.4.43}$$

$$N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow E_F = -0.15 \text{ eV} \tag{1.4.44}$$

$$N_D = 10^{19} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow E_F = -0.035\text{eV} \tag{1.4.45}$$

Una vez tenemos estos valores de E_F, veamos si es válido asumir que todosl os átomos donadores están ionizados, usando que

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2\exp\left[(E_F - E_D)kT\right]} \tag{1.4.46}$$

Tal que para las energías dadas:

$$E_F = -0.27 \text{ eV} \Rightarrow N_D^+ = 9.999 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \tag{1.4.47}$$

$$E_F = -0.15 \text{ eV} \Rightarrow N_D^+ = 9.722 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \tag{1.4.48}$$

$$E_F = -0.034 \text{ eV} \Rightarrow N_D^+ = 2.597 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \tag{1.4.49}$$

Dibujamos los gráficos

1.4.8. Ejercicio 8

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Utilizando la expresión para los átomos donadores ionizados dada en el ejercicio anterior, calcular la concentración de donadores sin ionizar para una muestra de silicio dopada con 10^{16} átomos/cm^3 de P ($E_D = 0.045$ eV) a una temperatura de 50 K. El nivel de Fermi está situado a 0.0459 eV por debajo de la banda de conducción.

b) Una muestra de silicio a $T = 300$ K contiene una concentración de impurezas aceptoras $N_A = 10^{16}$ cm^{-3}. Determinar la concentración de átomos donantes que debe ser añadida para que el silicio sea tipo N y la energía de Fermi esté 0.25 eV por debajo del borde de la banda de conducción.

Capítulo 2

Fenómenos de transporte en semiconductores

En este tema estudiarmemos los fenómenos de transporte en semiconductores, que son varios. Dedicaremos una sección a cada uno de ellos:

- Arrastre.
- Difusión.
- Generación.
- Recombinación.
- Emisión termoiónica.
- Trasmisión túnel.
- Ionización por impacto.

Además veremos *ecuaciones básicas de trasnporte* y métodos de medida de parámetros como resistividad, movilidades, concentración, tiempos de vida, etc.

2.1. Arrastre

2.1.1. Introducción: modelo de arrastre y difusión

El **modelo de arrastre-difusión** considera que las corrientes en el interior del semiconductor se debe exclusivamente a dos componentes: arrastre y difusión.

- **Arrastre:** movimiento de los portadores provocado por campos eléctricos externos e internos.
- **Difusión:** movimiento de portadores debido a gradientes de concentración debido a gradientes de concentracion. En la difusión los portadores se desplazarán de donde son mayoritarios a donde son minoritarios.

Así pues, según este modelo, las corrientes de portadores electrón J_n y de portadores hueco J_p serán iguales a la suma de las componentes de arrastre y difusión:

$$J_n = J_n|_{\text{arrastre}} + J_n|_{\text{difusión}} \qquad J_p = J_p|_{\text{arrastre}} + J_p|_{\text{difusión}} \tag{2.1.1}$$

siendo la *corriente total* la suma de ambas componentes:

$$J = J_n + J_p \tag{2.1.2}$$

2.1.2. Corriente de arrastre

Si no aplicamos ninguna fuerza externa, el movimiento de los electrones a temperatura no nula será un proceso aleatorio, en el que se sucederán colisiones con átomos de la red, impurezas, fonones, fotones... de tal manera que *el movimiento efectivo es nulo*. Sin embargo los electrones si poseen velocidad, la cual podemos calcular, en virtud del *teorema de equipartición*, tal que por cada grado de libertad del electrón le asignamos $kT/2$ de energía cinética. Como en el modelo de semiconductores, los huecos y electrones en las bandas de valencia y conducción son partículas libres (con masa efectiva diferente a m_e, pero partículas libres a fin de cuentas), podemos aplicarles el teorema de equipartición, tal que:

$$\frac{1}{2}m^* v_{th}^2 = \frac{3}{2}kT \tag{2.1.3}$$

siendo v_{th} la *velocidad media de cada partícula*. Cuando aplicamos un campo eléctrico $\mathcal{E}$, todos los portadores experimentarán una fuerza $q\mathcal{E}$, que lo acelera entre las sucesivas colisiones. Esta fuerza aplicada sobre el semiconductor provocará un desplazamiento neto de electrones en la dirección opuesta al campo y de huecos en la dirección del campo. Definimos entonces dos parámetros fundamentales: **camino medio recorrido** λ, que es la distancia media entre dos colisiones ($\sim 10^{-5}$cm) y el **tiempo medio recorrido** τ, que es el tiempo medio entre dos colisiones ($\sim 10^{-12}s$).

Supongamos entonces que los portadores se mueven a una velocidad constante v_a (que lógicamente dependerá de la temperatura, de la fuerza del campo...). Como hemos visto en el tema anterior, un hueco es una partícula virtual igual al electrón en todo exceptuando que tiene carga positiva. Si consideramos que el electrón se mueve a una velocidad constante v_a, el hueco también lo hará. En ese caso la densidad de corriente no es más que:

$$J_n|_{\text{arrastre}} = -qnv_a \qquad J_p|_{\text{arrastre}} = qpv_a \tag{2.1.4}$$

siendo q la carga. Tal y como hemos dicho, la velocidad v_a no es una constante del material, sino que depende de variables tales como la temperatura, el grado de impurezas o de la intensidad del campo. De manera experimental se sabe, que bajo campos no muy intensos, la velocidad tiene una dependencia lineal con el campo eléctrico, véase fig. 2.1.

La constante que relaciona la velocidad y el campo eléctrico se llama **movilidad** y se denota por μ. Así pues, μ_n es la movilidad del electrón y μ_p la del hueco, y verifican:

$$v_n = -\mu_n\mathcal{E} \qquad v_p = \mu_p\mathcal{E} \tag{2.1.5}$$

midiéndose en cm^2/Vs. Entonces la corriente de arrastre es:

$$J_{\text{arrastre}} = qn\mu_n\mathcal{E} + qp\mu_p\mathcal{E} = q(n\mu_n + p\mu_p)\mathcal{E} \tag{2.1.6}$$

2.1.3. Dispersión: efectos en la movilidad

La movilidad, a su vez, depende del grado de dispersión. Si la dispersión es muy baja la movilidad es muy alta: los electrones chocan poco y se pueden acelerar mucho. Como fuentes de dispersión tenemos: *fonones, átomos dopantes ionizados, aleaciones, imperfecciones en la red, defectos en las interfaces...* Los fenómenos que más influencia tienen son:

Figura 2.1: Movilidad frente a campo eléctrico. Véase que en la región de campo débil sigue una ecuación lineal, hasta que en campo fuerte se hace constante.

- Dispersión por choques entre portadores (poca influencia).
- Dipsersión por la red cristalina (choques de los portadores con los átomos de la red, que dominan a alta temperatura).
- Dispersión por dopantes ionizadas (choques con impurezas donadores o aceptadoras, que dominan a baja temperatura).

Consecuentemente tenemos dos efectos principales, el efecto debido a las impurezas y el efecto debido a los fonones. La probabildiad de colisión por unidad de tiempo global es la suma de las probabilidades parciales de cada tipo de colisión, según la *regla matthiessen*:

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c|_{\text{fonones}}} + \frac{1}{\tau_c|_{\text{impurezas}}} \tag{2.1.7}$$

Los fonones aumentan como $T^{3/2}$, por lo que a altas tempearturas $\tau_c \approx \tau_c|_{\text{fonones}}$. La movilidad total también sigue la regla matthiessen:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_F} + \frac{1}{\mu_I} \tag{2.1.8}$$

lógicamente esto es *generalizable*, pudiendo incluir los mecanismos de dispersión. Como podemos ver en la imagen fig. 2.2, a altas temperautras la movilidad se reduce como $T^{-3/2}$ y a bajas temperaturas aumenta como $T^{3/2}$.

Dispersión por impurezas

Las impurezas ionizadas ocurren cuando el portador pasa cerca de un dopante ionizado debido a la fuerza de Coulomb. La probabilidad del choque con los dopantes ionizadas depende de la concentación total (suma de aceptores y donadores), dominando a baja temperatura $N_I \equiv N_A^- + N_D^+$. A diferencia de la dispersión por fonones, esta se *reduce al aumentar la temperatura*, ya que los

Figura 2.2: Movilidad en función de T.

portadores van más rápido y pasab menos tiempo cerca de los dopantes. Teóricamente la movilidad debida a dopantes ionizadas crece con $T^{3/2}/N_I$. En resumen: domina a altos dopados (Si) y a bajas temperaturas. El valor de la movilidad en estes casos está dado por la siguiente ecuación:

$$\mu = \mu_{\text{mín}} + \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{N}{N_{\text{ref}}}\right)^{\alpha}} \tag{2.1.9}$$

siendo constantes la mayor parte de los términos (constantes que dependen de la temperatura y la masa efectiva). La única variable sería N, la concentración de impurezas (N_D o N_A). Los demas parámetros dependen de $\theta = N_A/N_D$ y de T.

Dispersión por fonones

La dispersión por fonones viene a ser la dispersión por vibracioens en la red cristalina. Ocurren a temperaturas mayores al cero absoluto, aumentando progresivamente con un ratio de $T^{3/2}$. Estas vibraciones modifican el potencial periódico, y permite intercambiar energía entre portadores y los núcleos del cristal. Dado que aumenta con $T^{3/2}$, tenemos que $\mu_{\text{fon}} \propto T^{-3/2}$.

2.1.4. Resistividad y movilidad

La **resistividad** (ρ) se define como la constante de proporcionalidad entr el campo eléctrico aplicado y la corriente total de carga por unidad de área que fluye en el mismo (suponiendo un material homogéneo). Al inverso de la resistividad lo llamamos **conductividad** (σ) tal que

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho} \tag{2.1.10}$$

Como sabemos $\mathbf{J}_{\text{arrastre}} = q(\mu_n n + \mu_p p)\mathcal{E}$. Entonces podemos relacionar la resistividad/conductividad de un material con la movilidad, tal que

$$\rho = \frac{1}{q(\mu_n n + \mu_p p)} \tag{2.1.11}$$

2.1.5. Curvatura de bandas

El campo eléctrico se puede estudiar y entender como el gradiente de una función llamada *potencial escalar* que representa la energía por unidad de carga. Así pues, la acción de un campo eléctrico en un semiconductor hace que aparezca una diferencia de energía entre los diferentes puntos del semiconductor, haciendo que las bandas a lo largo del semiconductor no tengan la misma energía, tal y como podemos ver en .

Figura 2.3: Efecto de un campo eléctrico externo en las bandas.

Si ψ es el *potencial escalar eletroestático*, tenemos que:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \tag{2.1.12}$$

2.2. Difusión

La difusión es un proceso por el cual las partículas tienden a dispersarse o redistribuirse como restultado de su alta concentración en ciertas zonas del sólido o bajas concentraciones en otra zona a temperatura no nula. En este caso las partículas que sufren difusión son electrones y huecos, que harán aparecer corrientes de difusión.

2.2.1. Corrientes de difusión

La **ley de Flick** nos dice que las corrientes de difusión son directamente proporcionales a los gradientes de concetración de partículas, esto es:

$$J_p|_{\text{difusión}} = -qD_p\nabla p \qquad J_n|_{\text{difusión}} = qD_n\nabla n \tag{2.2.1}$$

siendo D_p y D_n las llamadas *constantes de difusión*, que dependen básicamente de dos términos: la velocidad media de nuestras partículas v_{th} y el camino medio recorrido λ, tal que:

$$D_n = v_{th}\lambda_n = \frac{\lambda_n^2}{\tau_n} \qquad D_p = v_{th}\lambda_p = \frac{\lambda_p^2}{\tau_p} \tag{2.2.2}$$

Dicho de otra forma, la capacidad de una partícula para difundirse depende tanto de qué tan rápido se mueve como de la distancia que recorre antes de cambiar de dirección. Una forma de verlo es la siguiente: imagina que una partícula se mueve en un entorno donde, cada cierto tiempo, choca y cambia de rumbo. Cuanto mayor sea su velocidad y mayor sea la distancia que recorre entre choques, más lejos llegará en promedio en un mismo intervalo de tiempo. Así, el producto de estos dos factores (velocidad y distancia entre colisiones) te da una medida de la eficacia con la que la partícula se dispersa en el medio. Esta difusión generará entonces la corriente de difusión de portadores tipo n y tipo p.

$$J_n|_{\text{difusion}} = qD_n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \qquad J_p|_{\text{difusion}} = -qD_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{2.2.3}$$

2.2.2. Relaciones de Einstein

Las relación de Einstein para electrones nos permite relacionar el coeficiente de difusión y la movilidad para cada uno de los portadores con su carga y la temperatura del medio. La deducción de estas es trivial, ya que es consdierar que el semiconductor está en equlibrio y no degenerado

$$J_n|_{\text{difusion}} + J_n|_{\text{arrastre}} = q\mu_n n\mathcal{E} + qD_n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2.2.4}$$

tal que

$$n = n_i e^{(E_F-E_i)/kT} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = -\frac{n_i}{kT}e^{(E_F-E_i)/kT}\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{n}{kT}\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{q}{kT}\mathcal{E} \tag{2.2.5}$$

de lo cual se deduce

$$J_n = (qn\mathcal{E})\mu_n - qD_n\frac{q}{kT}n\mathcal{E} = 0 \tag{2.2.6}$$

resolviendo obtenemos la **relación de Einstein para los electrones**

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q} \tag{2.2.7}$$

válida para semiconductores no degenerados tanto en equlibrio como fuera de él. La relación de Einstein es válida fuera del equilibrio (concentraciones o campos eléctricos no constantes), siempre que haya equilibrio térmico entre los portadores y la red (misma temperatura).

2.3. Procesos de generación y recombinación

Cuando un semiconductor es perturbado de su estado de equilibrio, el semiconductor responde modificando el número de portadores que hay en el mismo. La recombinación-generación (denotada por RG o R-G) es el mecanismo con el que describimos el proceso por el cual un exceso o

deficiencia de portadores se estabiliza (si la perturbación se mantiene en el tiempo) o es eliminada (si la perturbación es temporal). Dado que durante la perturbación el sistema está bajo condiciones de no equilibrio, muchas de los fenómenos que aparecen en el semiconductor no puedan ser descritos a través de los procesos RG.

2.3.1. Introducción

En un semiconductor definimos como **recombinación** al proceso por el cual electrones y huecos son aniquilados/destruidos, mientras que la **generación** es el proceso por el cual electrones y huecos son creados. Esta descripción así hecha es muy general, y por tanto varios tipos de procesos podrían incluirse en lo que llamamos RG. Generalmente se usan las gráficas de banda energética para describir visualmente cuales son los posibles procesos RG, aunque sea solo para entender su naturaleza. También se suele describir que papel tiene la energía y que tipo de energía se emite/absorbe en estos procesos.

Bajo nivel de inyección, ¿Qué es?

A lo largo del tema leeremos varias veces que nos encontramos en un "bajo nivel de inyección", o que determinada aproximmación supone "bajo nivel de inyección". Pero, ¿qué es realmente esto? Decimos que estamos en un semiconductor con **bajo nivel de inyección (BNI)** cuando:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta n = n - n_0 \\ \Delta p = p - p_0\end{array}\right\} \rightarrow \text{BNI} \rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\Delta n \ll n_0 & \text{Tipo N } n \approx n_0 \\ \Delta p \ll p_0 & \text{Tipo P } p \approx p_0\end{array}\right. \tag{2.3.1}$$

Es decir, cuando el fenómeno de generación/recombinación no altera significativamente el número de portadores que hay en el equilibrio (sin recombinación ni generación), donde:

$$n_0, p_0 \equiv \text{Portadores en el equilibrio} \quad n, p \equiv \text{Portadores en una determinada situación}$$

Procesos de recombinación

Existen varios tipos de procesos de recombinación:

- **Recombinación directa**. Es el tipo más simple de recombinación. En este hay una aniquilación directa entre un hueco en la banda de valencia y un electrón en la banda de conducción, en el que el electrón «cae» a la banda de valencia. Es un proceso típicamente radiativo, en el que el exceso de energía se convierte en un fotón de luz:

Figura 2.4: Recombinación directa debida a fotones (luz) y fonones (calor/vibraciones).

- **Recombinación de centro RG**. Recordemos que las impurezas generan niveles energéticos en la región del gap de energía. Los defectos cristalinos, particularmente las impurezas atómicas, pueden generar niveles energéticos en medio del gap. En este proceso de recombinación, los llamados centros RG con energía E_T actúan como intermediarios. Existen varios tipos de recombinaciones de centro RG. En la primera de ellas tanto el electrón en la BC y el hueco en

la BV se ven atraídos al mismo centro RG, aníquilándose. Otra posibilidad es que un portador salte a la banda contrario usando el centro RG como mediador. A este proceso se le llama *recombinación termal*, ya que no es un proceso radiativo (no emite fotones), emitiendo calor, o, en su defecto, fonones. También existen recombinaciones de centro RG usando como centros RG los niveles energéticos de los dadores y aceptores (que recordemos están muy cerca de los niveles energéticos de las bandas), aunque no son tan comunes. Estos procesos son radiativos, pero poco probables, y se denominan *recombinación a través de niveles profundos*. No son tan probables porque, a temperaturas ambientes, la probabilidad de que vuelvan a excitarse al nivel de la banda de conducción es altamente probable.

(a) Recombinación termal (b) Recobinación a traves de niveles profundos.

- **Recombinación Auger**. En el proceso Auger lo que ocurre es que una recombinación directa/de centro RG ocurre simultáneamente con la colisión de dos portadores. Consecuentemente, estos portadores altamente energéticos se «termalizan» (pierden energía en pasos pequeños mediante pequeñas colisiones con la red cristalina). La dispersión posterior del electrón que se lleva toda la energía sucede a través de diferentes pasos, como una «escalera», lo cual sucede porque la relajación del portador energético no es un proceso instantáneo, sino que sucede en varias etapas debido a la dispersión con fonones. Los fonones (vibraciones cuánticas de la red cristalina) tienen energías discretas, lo que significa que el portador pierde energía en múltiplos de estas energías fonónicas. En semiconductores típicos, los fonones ópticos tienen energías del orden de decenas de meV, por lo que un electrón altamente excitado no puede perder toda su energía de golpe, sino que la va cediendo en 'saltos" discretos al emitir fonones ópticos uno tras otro.

Figura 2.6: Recombinación Auger.

- **Recombinación superficial**: es la recombinación que ocurre cerca de la superficie del material debido a la aparición de varios estados disponibles con energías entre E_v y E_c.

Procesos de generación

Existen varios tipos de generación, uno por cada uno de los procesos de recombinación. Así pues, existe generación directa, la cual necesita energía térmica o electromagnética (a través de fotones); generación por centros RG (energía térmica), y en último lugar la generación a través de impactos ionizantes (proceso inverso a la recombinación Auger). En estos último, el par de portadores se genera como consecuencia del impacto de un portador con un átomo cristalino. La generación de portadores a través de impacto ionizante ocurre recurrentemente cuando hay regiones con un campo eléctrico $\mathcal{E}$ muy alto, y es el responsable de los fenómenos de avalancha de las uniones pn.

Figura 2.7: Generación directa debida a fotones (luz) y fonones (calor/vibraciones).

2.3.2. Consideraciones acerca los procesos RG

Los procesos de recombinación y generación ocurren permanentemente, incluso en el equilibrio termodinámico, siendo el principal problema de los procesos RG el cálculo del ratio de producción de los diferentes procesos. Típicamente, uno solo necesita centrarse en el proceso principal (el que mayor ratio de producción tiene). En los semiconductores dopados no degenerados a una temperatura ambiente, uno esperea que los procesos dominantes sean procesos directos o de centro RG.

Conociendo la forma de las bandas de energía (más concretamente, cual es el valor de k para el cual la energía de la banda de conducción es mínima) podremos dilucidad cual de los procesos es dominante: o de tipo directo o de centro RG. ¿Cómo? Pues es bien sencillo: los fotones, al ser partículas sin masa, son capaces de llevar muy poco momento, y por tanto las transiciones son casi verticales, es decir, solo son capaces de describir los semiconductores de tipo directo (mínimo BC y máximo de BV en $k = 0$). Por otro lado, los fonones pueden trasmitir momentos y energía mucho mas grandes, por lo que son capaces de describir tanto los procesos en los semiconductores directos e indirectos, aunque en el caso de los directos no es un proceso dominante. Los procesos térmicos están relacionados con la recombinación de centro RG y los procesos fotónicos con la recombinación directa, y por tanto podemos diferenciar cuando uno y otro son dominantes.

2.3.3. Recombinación directa en semiconductores de gap directo

Definimos como G (R) el número de pares electrones (huecos) generados /cm^{3}s. Estas tasas de recombinación y generación dependen en general del número de huecos y electrones que haya en el medio, por lo que en general:

$$R = \beta np \qquad G = \alpha np \tag{2.3.2}$$

Para un conductor en equilibrio termodinámico $G_{th} = R_{th}$ (siendo estas las tasas de generación/-combinación en el equilibrio), manteniéndose n y p constantes. En el equilibrio $R = G = \beta n_{n0} p_{n0}$.

Ahora bien, cuando iluminamos uno de estos semiconductores aumenta su generación en un término G_L, tal que ahora $G = G_L + G_{th}$. Consecuentemente tenemos que se incrementa en un número determinado el número de portadores en el semiconductor Δn y Δp ($\Delta n = \Delta p$, neutralidad de carga). Así pues tenemos que la tasa:

Figura 2.8: Procesos de generación y recombinación en equilibrio y sin luz.

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} = G - R = G_L + G_{th} - R \qquad R = \beta n_n p_n = \beta(n_{n0} + \Delta n)(p_{n0} + \Delta p) \tag{2.3.3}$$

Una vez llegamos al estado estacionario, podemos obtener entonces lo que llamamos el *ratio de recombinación* $U = R - G_{th}$, esto es:

$$U = R - G_{th} = \beta(n_{n0} + p_{n0} + \Delta p)\Delta p \tag{2.3.4}$$

Cuando tenemos $p_{n0} \ll n_{n0}$ (bajo nivel de inyección tipo N), tenemos que:

$$U = \beta n_{n0}\Delta p = \frac{p_n - p_{n0}}{\frac{1}{\beta n_{n0}}} = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} \tag{2.3.5}$$

2.3.4. Recombinación indirecta en semiconductores de gap indirecto: procesos RG.

Definición de términos

La estadística RG es el nombre que se le da a la caracterización matemática de los procesos de recombinación y generación. Dado que los procesos RG cambian las concentraciones de los portadores con el tiempo, la «caracterización matemática» de estos procesos no es más que la definición de las relaciones entre $\partial n/\partial t$ y $\partial p/\partial t$. Recordemos que los procesos RG lo que hacen es insertar una banda energética E_T en la posición central del gap de bandas. Así pues definimos:

- Variación de n debida a procesos RG: $\frac{\partial n}{\partial t}\Big|_{RG}$.
- Variación de p debida a procesos RG: $\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{RG}$.
- Número de centros RG llenos de electrones por cm^3: n_T. También se le pueden llamar *número de centros ocupados*, disponibles para que un hueco se recombine.
- Número de centros RG llenos de huecos por cm^3 p_T *número de centros vacíos*.
- Número total de centros RG por cm^3: N_T

Es importante que quede muy claro que $\partial n/\partial t|_{RG}$ y $\partial p/\partial t|_{RG}$ son tasas netas, teniendo en cuenta tanto los procesos de recombinación como los procesos de generación. Cuando $\partial n/\partial t|_{RG}$ es negativo, la tasa de neta de electrones es negativa $R > G$; y si es postiva, la tasa de electrones es positiva $G > R$. La desingación de $|_{RG}$ no denota otra cosa que «tasa de cambio producida por los procesos RG». Esto es importante, ya que pueden ocurrir otros procesos además de estos.

Obtención de las tasas de producción

Existiendo 4 tipos de transiciones RG, que son:

- **Captura de un electrón en un centro RG**. Se define c_n como el *coeficiente de captura de electrones* (cm^3/s) con signo positivo. La tasa de captura de un electrón en un centro RG debe ser proporcional al número de centros disponibles para la captura p_T y el número de electrones n.
- **Emisión de un electrón por un centro RG**.Se define e_n como el *coeficiente de emisión de electrones* (cm^3/s) con signo positivo. La tasa de emisión de electrones debe ser proporcional al número de centros RG ocupados n_T.
- **Captura de un hueco en un centro de RG** (o un electrón de un RG cae a BV). Se define c_p como el *coeficiente de captura de huecos* (cm^3/s) con signo positivo. La tasa de captura de un hueco en un centro RG debe ser proporcional al número de centros disponibles para la captura n_T y el número de huecos p.
- **Emisión de un hueco por un centro de RG** (o un electrón de BV cae a RG). Se define e_p como el *coeficiente de emisión de electrones* (cm^3/s) con signo positivo. La tasa de emisión de huecos debe ser proporcional al número de centros RG ocupados pT.

Una vez entendemos esto, es claro que las ecuaciones que rigen los procesos RG son (no pueden ser de otra forma)

$$r_N = \left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{RG} = e_n n_T - c_n n p_T \qquad r_P = \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{RG} = e_p p_T - c_p p n_T \tag{2.3.6}$$

2.3.5. Simplificaciones: balance detalado

Existen varias simplificaciones. La más simple de todas es aquella en la que se aplica el **principio de balance detallado**. Este nos dice que bajo condiciones de equilibrio cada proceso fundamental y su inverso se autobalancean independientemente de cualquier otro proceso que peuda ocurrir en el interior del semiconductor. El equilibrio básicamente supone que el número de creación de huecos y electrones es cero, es decir:

$$r_N = r_P = 0 \tag{2.3.7}$$

Luego tenemos que una de las constantes $e_{n,p}$ o $c_{n,p}$ se puede reescribir en función de la otra y en función del número de centros RG n_T/p_T ocupados y el número de portadores n. El subíndice 0 indica que estamos en el equlibrio:

$$r_N = c_{n0} p_{T0} n_0 - e_{n0} n_{T0} = 0 \Rightarrow e_{n0} = \frac{c_{n0} p_{T0} n_0}{n_{T0}} \tag{2.3.8}$$

$$r_P = c_{p0} n_{T0} p_0 - e_{p0} p_{T0} = 0 \Rightarrow e_{p0} = \frac{c_{p0} n_{T0} p_0}{p_{T0}} \tag{2.3.9}$$

Si reescribimos $n_1 = n_0 p_{T0}/n_{T0}$ y $p_1 = p_0 n_{T0}/p_{T0}$ para simplificar las expresiones, tenemos que:

$$e_{n0} = c_{n0} n_1 \qquad e_{p0} = c_{p0} p_1 \tag{2.3.10}$$

La simplificación se hace cuando asumimos que *los coeficientes de emhiperbólicaisión y captura son aproximadamente los mismos en el equilibrio y fuera del equilibrio*, tal que

$$e_n \approx e_{n0} = c_{n0} n_1 \approx c_n n_1 \qquad e_p \approx e_{p0} = c_{p0} p_1 \approx c_p p_1 \tag{2.3.11}$$

En el caso de que podamos asmir que los coeficientes de emisión y captura son parecidos a los coeficientes en el equilibrio:

$$\begin{aligned} r_N &= -\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{RG} = c_n \left(p_T n - n_T n_1\right) \\ r_P &= \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{RG} = c_p \left(n_T p - p_T p_1\right) \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Reescribiendo n_1 y p_1:

$$n_1 = \frac{p_{T0} n_0}{n_{T0}} = \left(\frac{N_T - n_{T0}}{n_{T0}}\right) n_0 = \left(\frac{N_T}{n_{T0}} - 1\right) n_0 \tag{2.3.13}$$

$$p_1 = \frac{n_{T0} p_0}{p_{T0}} = \left(\frac{N_T - p_{T0}}{p_{T0}}\right) p_0 = \left(\frac{N_T}{p_{T0}} - 1\right) p_0 \tag{2.3.14}$$

Para un semiconductor no degenerado:

$$n_0 = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \tag{2.3.15}$$

Usando la definición de n_T como

$$\frac{n_{T0}}{N_T} = \frac{1}{1 + g_T e^{(E_T - E_F)/kT}} \tag{2.3.16}$$

Tomando $E'_T = E_T \pm \ln(g_T)$, donde + es para un centro R-G aceptor y un signo − para un centro R-G donador. Sustiyendo en n_1 y p_1:

$$n_1 = \left(\frac{N_T}{n_{T0}} - 1\right) n_0 = n_i e^{(E'_T - E_i)/kT} \qquad p_1 = \left(\frac{N_T}{p_{T0}} - 1\right) p_0 = n_i e^{(E_i - E'_T)/kT} \tag{2.3.17}$$

Asumiendo que E_T y g_T son conocidos podemos calcular n_1 y p_1. Si E'_T esa en el centro del gap, $n_1 \approx p_1 \approx n_i$. Para la mayor parte de lo análisis que hacemos consideramos que el diapositiva se encuentra en estado estacionario o cuasi-estacionario (situación estable independiente del tiempo, distinto de equilibrio). En estado estacionario simplifica mucho el cálculo ya que si partimos que n_T no cambia con en tiempo, y asumiendo que n_T sólo puede cambiar mediante los centros de R-G:

$$\frac{\partial n_T}{\partial t} = -\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{R-G} + \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{R-G} = r_N - r_P = 0 \Rightarrow r_N = r_P \tag{2.3.18}$$

La misma creación o aniquilación de huecos y electrones bajo las condiciones de estado estacionario, dejan fijo el valor de n_T para valores dados n y p. En concreto si igualamos el lado derecho de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_N &= -\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{R-G} = c_n (p_T n - n_T n_1) \\ r_P &= -\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{R-G} = c_p (n_T n - p_T p_1) \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Teniendo en cuenta que $p_T = N_T - n_T$, si despejamos n_T obtenemos:

$$n_T = \frac{c_n N_T n + c_p N_T p_1}{c_n(n + n_1) + c_p(p + p_1)} \tag{2.3.20}$$

Obtenemos

$$R = r_N = r_P = \frac{np - n_i^2}{\frac{1}{c_p N_T}(n + n_1) + \frac{1}{c_n N_T}(p + p_1)} = \frac{np - n_i^2}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)} \tag{2.3.21}$$

donde τ_n y τ_p son la vida mediade los electrones y huecos minoritarios. El símbolo R identificala tasa neta de recombinación en estado estacionario. Vamos a realizar ahora dos simplificaciones para obtener un resultado más sencillo de la recombinación para los casos de:

- Bajo nivel de inyección.
- Semiconductor vacío de portadores.

Bajo nivel de inyección

Vamos ahora a realizar otra simplificación para obtener un resultado más sencillo de la recombinación para el caso de **bajo nivel de inyección (BNI)**, que implica:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta n = n - n_0\\ \Delta p = p - p_0\end{array}\right\}\text{BNI} \rightarrow \begin{cases}\Delta n \ll n_0;\ \text{Tipo N: } n \approx n_0\\ \Delta p \ll p_0;\ \text{Tipo P: } p \approx p_0\end{cases} \tag{2.3.22}$$

Asumiendo las sigueintes consideraciones:

- Bajo nivel de inyección.
- Los centros RG dominantes introducen un nivel de energía E_T próximo al centro del gap. Tenemso que $n_1 \approx p_1 \approx n_i$.
- La concentración de centros RG es muy baja lo que implica que $\Delta n \approx \Delta p$.
- Consideramos que E'_F está próximo a la mitad del gap con lo que podemos aproximar $n_1 \approx p_1 \approx n_i$.
- Las vidas medias τ_n y τ_p, no se diferencian en más que unos cuantos órdenes de magnitud.
- Por último: $n = n_0 + \Delta n$ y $p = p_0 + \Delta p$; $\Delta n \approx \Delta p$ y $n_1 \approx p_1 \approx n_i$.

Obtenemos el siguiente valor como *tasa de recombinación*:

$$R = \frac{(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_0 + \Delta n + n_1) + \tau_n(p_0 + \Delta p + p_1)} \tag{2.3.23}$$

Veamos cual es este valor de R para los tipo p y tipo n:

- Para un semicondutor tipo N podemos consdierar que $n_0 \gg p_0$ y $n_0 p_0 = n_i^2$, así:

$$\left.\begin{array}{r}n_0 \gg p_0 + \Delta p + n_i\\ \tau_n \approx \tau_p\end{array}\right\} \rightarrow \tau_p n_0 \gg \tau_n(p_0 + \Delta p + n_i) \tag{2.3.24}$$

  Teniendo en cuenta que $n_0 \Delta p \gg p_0 \Delta n$ y que $n_0 \Delta p \gg (\Delta p)^2$:

$$R \approx \frac{n_0 \Delta p}{\tau_p n_0} = \frac{\Delta p}{\tau_p} \tag{2.3.25}$$

- Para un semiconductor tipo P, haciendo las mismas consideraciones

$$\left.\begin{array}{r} p_0 \gg n_0 + \Delta n + n_i \\ \tau_n \approx \tau_p \end{array}\right\} \rightarrow \tau_n p_0 \gg \tau_p (n_0 + \Delta n + n_i) \tag{2.3.26}$$

Teniendo en cuenta que $p_0 \Delta n \gg n_0 \Delta p$ y que $p_0 \Delta n \gg (\Delta n)^2$:

$$R \approx \frac{p_0 \Delta n}{\tau_n p_0} = \frac{\Delta n}{\tau_n} \tag{2.3.27}$$

Semiconductor vacío de portadores

La región vacía de portadores se define como un volumen del semiconductor donde consideramos que el semiconductor está vacío de portadores:

$$\left.\begin{array}{r} n \ll n_i \\ p \ll n_i \end{array}\right\} np \ll n_1 p_1 = n_i^2 \tag{2.3.28}$$

En este caso:

$$R = \frac{np - n_i^2}{\tau_p (n + n_1) + \tau_n (p + p_1)} = -\frac{n_i}{\tau_g} \tag{2.3.29}$$

donde $\tau_g = \tau_p (n_1/n_i) + \tau_n (p_1/n_i)$ es el tiempo medio de generación. El signo menos indica que dentro de la región vacía tiene lugar una generación neta de portadores. Si $E_T' = E_i$ entonces $\tau_g = \tau_p + \tau_n$.

2.3.6. Recombinación Auger

Como sabemos, la recombinación Auger ocurre cuando se transfiere energía y momento de una recombinación de un par de portadores a un tercer portador, lo que hace que adquiera una energía y momento elevados. Esta energía y momento elevados se dispersan al medio a través de la dispersión con la red cristalina, por ejemplo en forma de fonones. Esta dispersión en forma de fonones hace que pierda energía de manera discreta, lo cual tiene sentido si pensamos que está emitiendo cuantos de energía (fonones). Este tipo de procesos es importante a alto dopado/alto nivel de inyección:

$$R_{\text{Auger}} = \beta n^2 p \qquad R_{\text{Auger}} = \beta p^2 n \tag{2.3.30}$$

La constante β depende fuertemente de la temperatura. Viendo las ecuaciones podemos entender porqué es un fenómeno que cobra importancia a alto nivel de inyección: al depender cúbicamente de la concentración de portadores, si está aumenta mucho (caso de alto nivel de inyección) lógicamente R_{auger} aumentará.

2.3.7. Recombinación superficial

La recombinación superficial es la recombinación que ocurre cerca de la superficie debido a la aparición de estados energéticos que se pueden usar como centros RG. Con bajo nivel de inyección, la concentración superficial es similar a la concentración en volumen. Así, la tasa de recombinación por unidad de área y tiempo es:

$$U \simeq v_{th} \sigma_p N_{st} (p_s - p_{n0}) \tag{2.3.31}$$

donde p_s es la *concetración de huecos en la superficie*, N_{st} la *densidad de centros recombinadores por unidad de área en la superficie*, v_{th} la *velcoidad térmica* y σ_p es el *coeficiente de captura de huecos*. A baja inyección definimos el coeficiente de la siguiente manera:

$$S_{lr} \equiv v_{th}\sigma_p N_{st} \tag{2.3.32}$$

2.4. Ecuaciones de continuidad

2.4.1. Introducción

La tasa de cambio de portadores viene dada entonces por la suma de todas las tasas de cambio estudiadas hasta el momento: arrastre, difusión, recombinación-generación...

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{\text{Arrastre}} + \left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{\text{Difusion}} + \left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{\text{RG}} + \left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{\text{Otros}} \tag{2.4.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\text{Arrastre}} + \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\text{Difusion}} + \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\text{RG}} + \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\text{Otros}} \tag{2.4.2}$$

Ahora solo tenemos que sustituir las expresiones vistas. Recordemos que las ecuacioens de continuidad nos dicen que la tasa de cambio por unidad de volumen es igual a la divergencia de la corriente. Así pues:

- Las ecuaciones de *arrastre* nos dicen que:

$$\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_n|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot(qn\mu_n\boldsymbol{\mathcal{E}}) \tag{2.4.3}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_p|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(qp\mu_p\boldsymbol{\mathcal{E}}\right) \tag{2.4.4}$$

- Las ecuaciones de *difusión* nos dicen que:

$$\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{\text{Difusonn}} = \frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_n|_{\text{Difusion}} = \frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot(D_n\boldsymbol{\nabla}n) \tag{2.4.5}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\text{Difusonn}} = -\frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_p|_{\text{Difusion}} = -\frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(D_p\boldsymbol{\nabla}p\right) \tag{2.4.6}$$

- Las ecuaciones de *Recombinación-Generación* nos dicen que:

$$\left.\frac{\partial n}{\partial t}\right|_{\text{Arrastre}} = G_n - R_n \tag{2.4.7}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{\text{Arrastre}} = G_p - R_p \tag{2.4.8}$$

De lo que se deduce que las **ecuaciones de continuidad** son

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(qn\mu_n\boldsymbol{\mathcal{E}} + D_n\boldsymbol{\nabla}n) + G_n - R_n \tag{2.4.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(qp\mu_p\boldsymbol{\mathcal{E}} + D_p\boldsymbol{\nabla}p\right) + G_p - R_p \tag{2.4.10}$$

Y si consdieramos la movilidad como la difusión constantes en el semiconductor:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mu_n(\boldsymbol{\nabla} n) \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + \mu_n n \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + D_n \nabla^2 n + G_n - R_n \tag{2.4.11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mu_p(\boldsymbol{\nabla} p) \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + \mu_p p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} - D_p \nabla^2 n + G_p - R_p \tag{2.4.12}$$

Esta seria la *expresión más general posible*. Como podemos ver nuestra corriente de carga viene dada por:

$$\mathbf{J}_N = q\mu_n n \boldsymbol{\mathcal{E}} + qD_n \nabla n \qquad \mathbf{J}_N = q\mu_p p \boldsymbol{\mathcal{E}} - qD_p \nabla p \tag{2.4.13}$$

Aunque tener la expresión general está bien, normalmente se realizan diferentes aproximaciones en función del problema, ya que facilitan el estudio sin comprometer el resultado final.

2.4.2. Ecuaciones de difusión de portadores minoritarios

A partir de las ecuaciones de continuidad uno puede realizar difernetes análisis. El más general es el análisis de portadores minoritarios a campo eléctrico nulo. Como sabemos, la tasa de recombinación $R \approx \Delta n_p/\tau_n$ o $R \approx \Delta pn/\tau_p$ (en función de cual sea el portador minoritario), donde n_p significa *densidad de portadores electrón minoritarios* y p_n significa *densidadd de portadores huecos minoritarios*. Así pues, si además suponemos que:

- El campo eléctrico es nulo $\mathcal{E} = 0$.
- La concentración de minoritarios es independiente de la posición de equlibrio.
- El dopado es uniforme.
- Hay bajo nivel de inyección.
- Solo hay procesos térmicos y de fotogeneración.

Entonces las ecuacioens se convierten en:

$$\frac{\partial \Delta n_p}{\partial t} = D_N \frac{\partial^2 \Delta n_p}{\partial x^2} - \frac{\Delta n_p}{\tau_n} + G_L \qquad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial t} = D_P \frac{\partial^2 \Delta p_n}{\partial x^2} - \frac{\Delta p_n}{\tau_p} + G_L \tag{2.4.14}$$

Lógicamente podemos hacer otras aproximaciones a partir de estas. Las más comunes son:

- Situación estacionaria y sin iluminación.
- Sin gradiente de concentración y sin iluminación.
- Sin gradiente de concentración, situación estacionaria e iluminación uniforme.
- Sil iluminación, situación estacionaria y sin centros de recombinación-generación.

Situación estacionaria y sin iluminación

La solución estacionaria implica que $\partial_t \Delta n_p = 0$ y sin iluminación implica que $G_L = 0$. La ecuación de difusión para portador minoritario simplificada es:

$$D_N \frac{\mathrm{d}^2 \Delta n_p}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\Delta n_p}{\tau_n} = 0 \qquad D_P \frac{\mathrm{d}^2 \Delta p_n}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\Delta p_n}{\tau_p} = 0 \tag{2.4.15}$$

Siendo la solución

$$\Delta n_p(x) = Ae^{-x/L_N} + Be^{x/L_N} \tag{2.4.16}$$

donde $L_N = \sqrt{D_N \tau_n}$ es la *longitud de difusión* y A y V son constantes de difusión. Esta ecuación cobrará especial importancia en el tema de la unión pn.

Sin gradiente de concentración y sin iluminación

Sin gradiente de concentración y sin iluminación

Sin gradiente de concentración, situación estacionaria y sin iluminación

Situación estacionaria, sin iluminación y sin centros RG

2.4.3. Longitud de difusión

La **longitud de difusión** de un portador minoritario representa la distancia media que el portador puede difurdirse (puede recorrer) antes de recombinarse. Viene dada por:

$$L_N = \sqrt{D_N \tau_n} \qquad L_P = \sqrt{D_P \tau_p} \tag{2.4.17}$$

2.5. Pseudoniveles de Fermi

Los pseudoniveles de Fermi se introducen de manera que podemos reexpresar las concentracioens, sustituyendo $E_F \to E_{Fn}, E_{Fp}$, esto es, *pseudonivel de Fermi para electroens y para huecos*:

$$n = N_C e^{(E_{Fn}-E_c)/kT} \qquad p = N_V e^{(E_v-E_{Fp})/kT} \tag{2.5.1}$$

Estos son válidos cuando los electrones y huecos están en equilibrio térmico (no en equilibrio global) en sus bandas, y el tiempo de recombinación es mayor que el tiempo qeu necesitan parar que alcancen el equlibrio dentro de las bandas. Son una herramienta matemática que se usa para describir las bandasc cuando los estados electrónicos que no interactúan completamente con todo el sistema, como trampas o impurezas, o cuando el sistema está fuera del equilibrio (por ejemplo, bajo iluminación o corriente eléctrica), y no todos los portadores comparten el mismo nivel de Fermi. En esos casos, es útil definir un nivel de energía efectivo que describe la ocupación de esos estados como si estuvieran en equilibrio con un nivel de Fermi "local".

2.6. Otros fenómenos de transporte

Exissten otros procesos que provocan corrientes en los portadores. Estas son:

2.6.1. Emisión termoiónica

La emisión termoiónica es un fenómeno físico en el que electrones son emitidos desde la superficie de un material sólido (usualmente un metal) cuando se calienta a temperaturas suficientemente altas. Cuando se emite desde la superficie denominamos "vacío" al lugar donde se emiten (sea aire...).

2.6.2. Transporte túnel

Existe la posibilidad no nula de que los electrones traspasen una barrera de potencial a través del efecto túnel. Este proceso es importante cuando hay un hueco entre dos semiconductores (que se representa como un potencial constante y alto respecto el nivel de Fermi).

2.6.3. Efectos a campos altos

Al aumentar el campo eléctrico lo suficiente ($\sim 5 \times 10^3$ V/m) la velocidad se satura. Sin embargo, cuando nuestro semiconductor tiene más de un mínimo local en la banda de valencia, puede ocurrir que $\mathcal{E}$ sea tan grande que haga que pasen del mínimo absoluto a este mínimo local, lo que haría que la masa efectiva cambiase (al tener difernete Curvatura) lo que puede ocasionar que no satura, si no que disminuya o aumente la velocidad.

2.7. Ejercicios

2.7.1. Ejercicio 1

Cuestiones sobre la resistividad y movilidad:

a) La resistividad de un material tipo N es por lo regular más pequeña que la resistividad de un material tipo P de dopado comparable, explica por qué suele ocurrir esto. Calcula la resistividad del Si si se dopa con fósforo con una concentración de 10^{17} cm^{-3}. Repite el cálculo para el caso en que dopemos con aluminio con la misma concentración y calcular la corriente de arrastre en ambos casos considerando un campo eléctrico de 10^5 V/cm.

b) Calcula la densidad de impurezas necesarias para tener un cristal de Si tipo P con resistividad 0.1 Ω·cm. ¿Qué proporción hay de átomos de impureza sobre el número de átomos de Si? (DATO: Constante de red del Si $a_0 = 5.431$ Å). Si suponemos que el semiconductor es no degenerado, ¿cuánto vale D_p?

---

a) La diferentencia radica en la masa efectiva, que se expresa en la movilidad:

$$\rho = \frac{1}{q(n\mu_n + p\mu_)} \tag{2.7.1}$$

Cuando $\mu_n > \mu_p \Rightarrow \rho_n < \rho_p$. Y esto siempre ocurre. Las movilidades dependen de la temperatura y la cantidad que esté dopado, por lo que puede ser diferente. Para un semiconductor dopado tipo N:

$$\rho_N = \frac{1}{qn\mu_n} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{19} \cdot 10^{17} \cdot 1350} = 0.0463\Omega\text{cm} \tag{2.7.2}$$

Y para un tipo P:

$$\rho_N = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{19} \cdot 10^{17} \cdot 480} = 0.13\Omega\text{cm} \tag{2.7.3}$$

(valores de movilidad sacados de la Wikipedia). Ahora podemos calucular la corriente de arrastre (usamos que $J = qnN\epsilon$, donde $\epsilon = 10^5$ eV)

$$J_N = 2.16 \cdot 10^6 A\text{cm}^{-2} \qquad J_p = 7.68 \cdot 10^3 A\text{cm}^{-2} \tag{2.7.4}$$

b) Ahora lo que hacemos es considerar que el número de impurezas es igual al número de huecos (están todas completamente ionizadas). Lo que nos queda entonces es:

$$N_A = \frac{1}{q\rho\mu_p} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{19} \cdot 0.1 \cdot 480} = 1.3 \cdot 10^{17}\text{cm}^{-3} \tag{2.7.5}$$

Podemos calcular con a_0 el númerode átomos de silicio por unidad de volumen:

$$N_{Si} = 5 \cdot 10^{22}\text{atcm}^{-3} \tag{2.7.6}$$

Y solo tenemos, para calcular la proporción:

$$\frac{N_A}{N_{Si}} = 2.6 \cdot 10^{-6} = 2.6 \text{ ppm} \tag{2.7.7}$$

Para acabar necesitamos calcular la relación de Eistein (solo usable en semicdonductores no degenerados). Así tenemos que

$$D_p = \frac{kT}{q}\mu_p = 12.4\text{cm}^2/s \tag{2.7.8}$$

2.7.2. Ejercicio 2

Responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcular la resistividad del GaAs intrínseco a temperatura ambiente ($\mu_n = 9200$ cm^2/Vs, $\mu_p = 320$ cm^2/Vs).

b) La movilidad de los electrones en el silicio es $\mu_n = 1300$ cm^2/Vs a temperatura ambiente. Si asumimos que la movilidad está limitada principalmente por la dispersión con la red cristalina, calcular la movilidad a $T = 150$ K.

c) Dos mecanismos de dispersión tienen lugar en un semiconductor. Si sólo el primer de los mecanismos está presente la movilidad es de 250 cm^2/Vs. Si sólo el segundo de los mecanismos está presente la movilidad es de 650 cm^2/Vs. Calcular la movilidad cuando los dos mecanismos están presentes.

---

a) Para calcular la resistividad usamos la fórmula:

$$\rho = \frac{1}{q(\mu_p p + \mu_n n)} \tag{2.7.9}$$

Donde solo tenemos que sustituir $n, p \longrightarrow n_i$. Calculamos usando que $n_i = 2.25 \times 10^6 \text{cm}^{-3}$ de lo que se deduce que:

$$\rho = 4.33 \cdot 10^9\ \Omega\text{cm} \tag{2.7.10}$$

Creo que hay algo mal en el resultado numérico aunque la ecuación está bien. Podría dar entorno a 2.5 por diez a la diez, más o menos.

b) No conocemos la fórmula explícita, pero śi que sabemos que $\mu_{\text{impurezas}} \propto T^{-3/2}$ (red cristalina es igual a dispersión por fonones). Por tanto podemos calcular:

$$\frac{\mu_{\text{imp}}(T = 150K)}{\mu_{\text{imp}}(T = 300K)} = \left(\frac{150}{300}\right)^{-3/2} \tag{2.7.11}$$

De lo que obtenemos:

$$\mu_{\text{imp}}(T = 150K) = 3677\ \text{cm}^2/\text{Vs} \tag{2.7.12}$$

c) Tenemos que usar la *regla mathiessen*:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \tag{2.7.13}$$

De lo que obtenemos:

$$\mu = 180.55\ \text{cm}^2/\text{Vs} \tag{2.7.14}$$

2.7.3. Ejercicio 3

Obtener las concentraciones de electrones y huecos, movilidades y resistividades de muestras de silicio a $300K$ para las siguientes concentraciones de impurezas:

(a) 1×10^{15} átomos/cm^3 de boro.

(b) 1×10^{16} átomos/cm^3 de boro y 1.5×10^{16} átomos/cm^3 de arsénico.

(c) 5×10^{15} átomos/cm^3 de boro, 10^{17} átomos/cm^3 de arsénico y 10^{17} átomos/cm^3 de galio.

Considerar que, las movilidades para portadores mayoritarios:

$$\mu_n(N) = 65 + \frac{1265}{1 + \left(\frac{N}{8.5\times10^{16}}\right)^{0.72}} \qquad \mu_p(N) = 48 + \frac{447}{1 + \left(\frac{N}{6.3\times10^{16}}\right)^{0.76}} \tag{2.7.15}$$

Para portadores minoritarios:

$$\mu_n(N) = 232 + \frac{1180}{1 + \left(\frac{N}{8\times10^{16}}\right)^{0.9}} \qquad \mu_p(N) = 130 + \frac{370}{1 + \left(\frac{N}{8\times10^{17}}\right)^{1.25}} \tag{2.7.16}$$

Primero tenemos que evaluar si son dadores/aceptores, calcular n y p, luego evaluar las fórmulas para portadores mayoritarios y minoritarios, y finalmente la resistividad. Tengo que cambiar los datos, ya que $N = N_A + N_D$, teniendo que calcular n y p de una manera difernte a $p = N_D$. Para calcular n y p:

a) El Boro es un átomo aceptor, por lo que tendremos como dato $N_A = 10^{15}$ átomos/cm^3. Ahora calculamos, usando que $n_i = 1.18 \times 10^{10}$:

$$p = N_A = 10^{15} \qquad n = \frac{n_i^2}{p} = 1.39 \cdot 10^5 \text{cm}^-3 \tag{2.7.17}$$

Calculamos las movilidades, usando la mayoritaria para los huecos y la minoritaria para los electrones:

$$\mu_p = 4.77 \cdot 10^2 \text{ cm}^2/\text{V s} \qquad \mu_n = 1.39 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{V s} \tag{2.7.18}$$

La resistividad ρ se calcula ahora fácilmente:

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n n + \mu_p p)} \rightarrow \rho = 13.1 \ \Omega\text{cm} \tag{2.7.19}$$

b) El Arsénico es un átomo dador, por lo que tendremos como dato $N_{D\text{eff}} = 5\times10^{15}$ átomos/cm^3, que se deduce de:

$$N_{D\text{eff}} = N_{\text{As}} - N_{\text{B}} = 5 \times 10^{15} \tag{2.7.20}$$

Ahora calculamos, usando que $n_i = 1.18 \times 10^{10}$:

$$n = N_{D\text{eff}} = 10^{15} \qquad p = \frac{n_i^2}{n} = 2.78 \cdot 10^4 \text{cm}^-3 \tag{2.7.21}$$

Calculamos las movilidades, usando la mayoritaria para los electrones y la minoritaria para los huecos:

$$\mu_n = 9.60 \cdot 10^2 \text{ cm}^2/\text{V s} \qquad \mu_p = 4.89 \cdot 10^2 \text{ cm}^2/\text{V s} \tag{2.7.22}$$

La resistividad ρ se calcula ahora fácilmente:

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n n + \mu_p p)} \rightarrow \rho = 1.3\ \Omega\text{cm} \tag{2.7.23}$$

ESTA TODO MAL.

c) El Galio es un átomo aceptor, por lo que tendremos como dato $N_{A\text{eff}} = 5 \times 10^{15}$ átomos/cm^3, que se deduce de:

$$N_{A\text{eff}} = N_{\text{Ga}} + N_{\text{B}} - N_{\text{As}} = 2.78 \cdot 10^4\ \text{cm}^{-3} \tag{2.7.24}$$

Ahora calculamos, usando que $n_i = 1.18 \times 10^{10}$:

$$p = N_{A\text{eff}} = 5 \times 10^{15} \qquad p = \frac{n_i^2}{n} = 3e + 04\text{cm}^{-}3 \tag{2.7.25}$$

Calculamos las movilidades, usando la mayoritaria para los huecos y la minoritaria para los electrones:

$$\mu_p = 4.38 \cdot 10^2\ \text{cm}^2/\text{V s} \qquad \mu_n = 1.18 \cdot 10^3\ \text{cm}^2/\text{V s} \tag{2.7.26}$$

La resistividad ρ se calcula ahora fácilmente:

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n n + \mu_p p)} \rightarrow \rho = 2.85\ \Omega\text{cm} \tag{2.7.27}$$

ESTA TODO MAL.

2.7.4. Ejercicio 4

(a) Una muestra de silicio intrínseco es dopada desde un lateral con donadores de tal forma que:

$$N_D = N_0 \exp(-ax).$$

Suponiendo condiciones de equilibrio y que $N_D \gg n_i$, encontrar la expresión del campo eléctrico interno $E(x)$. Evaluar $E(x)$ para $a = 10^{-6}\,\text{m}^{-1}$.

(b) Si ahora el perfil de dopado es:

$$N_D(x) = N_0 + (N_L - N_0)(x/L),$$

obtener una expresión para el campo eléctrico en un plano x dentro del dispositivo, considerando constantes el coeficiente de difusión y la movilidad. ¿Cuál es la expresión de la diferencia de potencial entre las superficies frontal y trasera de la muestra si la muestra es de longitud L? Consideraremos condiciones de equilibrio térmico y eléctrico.

---

a) Nos dicen que $N_D = N_0 \exp(-ax)$, y queremos calcular $E(x)$. Dependerá del nivel de profundidad que quieres darle al ejercicio. Suponemos, al no dar datos de los procesos recombinación-generación, que estamos en el *modelo de arrastre-difusión*. Así pues, tenemos que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{J}_{\text{arr}} + \mathbf{J}_{\text{diff}}) = 0 \rightarrow J_{\text{arr}} + J_{\text{diff}} = 0 \tag{2.7.28}$$

tal que (pasamos de vectorial a escalar)

$$J_{\text{arr}} + J_{\text{diff}} = 0 \rightarrow q\mu_n n\mathcal{E} + qD_n \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = 0 \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{D_n}{\mu_n}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \tag{2.7.29}$$

donde usaremos que $n \sim N_D$ y que $D_n/\mu_n = kT/q$ es la *relación de Einstein*. Así pues:

$$\mathcal{E} = -\frac{kT}{q}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{kT}{q}a \tag{2.7.30}$$

De lo que se deduce que:

$$\mathcal{E}(x) = 2.59 \cdot 10^{-8}\ V/m \tag{2.7.31}$$

b) Considerando que estamos en equlibrio térmico $T = \text{cte}$ y en equilibrio eléctricio $\mathbf{J}_T = 0$. Igual que antes:

$$\mathcal{E} = -\frac{kT}{q}\frac{\mathrm{d}(\ln(n))}{\mathrm{d}x} \tag{2.7.32}$$

y ahora podemos hallar la diferencia de potencial total:

$$\Delta V = -\int_0^L \mathcal{E}\mathrm{d}x \tag{2.7.33}$$

Esto es:

$$\Delta V = \frac{kT}{q}\left[\ln(n(L)) - \ln(n(0))\right] = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{n(L)}{n(0)}\right) \tag{2.7.34}$$

2.7.5. Ejercicio 5

Una muestra de silicio tipo N tiene una resistividad de $0,5\,\Omega \cdot \text{cm}$ a temperatura ambiente. Se introducen $N_T = 5 \times 10^{14}\,\text{cm}^{-3}$ impurezas metálicas que crean un nivel energético a $E_C - E_T = 0,530\,eV$. Los tiempos de vida media de electrones y huecos son:

$$\tau_n = 1.25 \times 10^{-8}\,s, \quad \tau_p = 3.13 \times 10^{-8}\,s.$$

(a) Calcular la tasa de recombinación de portadores en una zona sin portadores móviles. ¿Cuál es el fenómeno dominante, la generación o la recombinación?

(b) Suponer que sólo los portadores minoritarios han desaparecido, mientras que la concentración de mayoritarios es similar a la del equilibrio. Calcular la tasa de recombinación de portadores.

Nos dan $E_c - E_T = 0.530\text{eV}$, nos dan N_T, ρ, τ_n y τ_p. Son bastantes datos, por lo que es normal liarse, así que tenemos que tener muy claro que nos están preguntado y las aproximaciones que podemos hacer. No nos dan la temperatura, por lo que asumimos temperatura ambiente $300K$. Por ejemplo, al darnos E_T respecto E_c, podemos deducir $E_T - E_i$, y ver si podemos usar la aproximación a niveles profundos. Veamos que si $E_c = E_g$ y $E_v = 0$:

$$E_i = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) = 0.55\ \text{eV} \tag{2.7.35}$$

donde $E_g = 1.12$ eV, $m_n = 1.18m_e$ y $m_p = 0.81m_e$. Así $E_i =$ eV y por tanto:

$$E_T - E_i = E_g - 0.530 - E_i = 0.037 \text{ eV} \tag{2.7.36}$$

que es comparable a kT y por tanto no suficiente como para hacer la aproximación a niveles profundos $n_1 = p_1 = n_i$, y hay que calcularlos con las siguientes fórmulas:

$$n_1 = n_i e^{(E_T' - E_i)/kT} \qquad p_1 = p_i e^{(E_i - E_T')/kT} \tag{2.7.37}$$

a) Queremos calcular la tasa de recombinación, es decir, R, en una zona sin portadores. Esto significa que la *aproximación a semiconductor vacío de portadores es válido*. Es decir, tenemos que:

$$R = \frac{np - n_i}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)} \approx -\frac{n_i^2}{\tau_p n_1 + \tau_n p_1} \tag{2.7.38}$$

Entonces tenemos que

$$p_1 = 4.99 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3} \qquad n_1 = 2.79 \cdot 10^{9} \text{ cm}^{-3} \tag{2.7.39}$$

A lucia le da diferente, $n1 = 4.2310^10$ y $p1 = 2.3610^9$. También puso $E_i - E_T = -0.0373$eV y $E_i - E_c = -0.5673$eV.

$$R = -1.96 \cdot 10^{17} \ s^{-1}\text{cm}^{-3} \tag{2.7.40}$$

A lucia le da $-7.38 \cdot 10^{16}$, aunqeu la fórmula es igual. Domina la generación al tener $R < 0$. No existen portadores móviles, por lo que no peude haber destrucción, solo generación.

b) Suponemos que solo los portadores minoritarios han desaparecido ($p \approx 0$), mientras que n es similiar al equlibrio $n \approx n_0$. Tenemos ahora que:

$$R = -\frac{n_i^2}{\tau_p(n_0 + n_1) + \tau_n(p_1)} \tag{2.7.41}$$

Calculando n a partir de ρ usando que $n = 1/q\mu_n\rho$. Como sabemos:

$$\mu_n = D_n \frac{q}{kT} = \frac{q}{kT}\tau_n v_{th}^2 = \frac{q}{kT}\tau_n \frac{3kT}{m_n^*} = \frac{3q\tau_n}{m_n^*} \tag{2.7.42}$$

Tal que

$$\mu_n = 5.59 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{V s} \qquad n_0 = \frac{m_n^*}{q^2\rho\tau_n} = 2.23 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \tag{2.7.43}$$

Y por tanto

$$R = -4.99 \cdot 10^{12} \ s^{-1}\text{cm}^{-3} \tag{2.7.44}$$

Tenemso que $R = -3.4803 \cdot 10^{11}$. Domina generación: ¿Tiene sentido? La respuesta es que sí: no hay portadores minoritarios, por lo que tienen que se generados por los procesos RG, haciendo que domina la tasa de generación.

2.7.6. Ejercicio 6

Responde a las siguientes cuestiones

(a) Calcular la concentración de electrones y huecos en un semiconductor de Si dopado tipo N ($N_D = 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$), que se encuentra bajo iluminación constante en estado estacionario con:

$$G_L = 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}\mathrm{s}^{-1}, \quad \tau_n = \tau_p = 10\,\mu s.$$

(b) Dibujar el diagrama de bandas antes y después de iluminar. Asumir bajo nivel de inyección.

---

a) Tenemos un semiconductor tipo N a N_D dado, G_L y tiempos de vida medios, y queremos calcular n y p en el estado estacionario, esto es, queremos calcualr n cuando $R = G$. Como sabemos, $G = G_{th} + G_L$, y que $n = N_D$ (estamos a 300K, podemos considerar que todas las impurezas están ionizadas) y por tanto que $n_{n0} \gg p_{n0}$ (recordemos que n_{n0} y p_{n0} denotan concetración de portadores cuanod no hay luz), ya que:

$$n_{n0} = N_D \qquad p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_{n0}} = 1.39 \cdot 10^5\ \mathrm{cm}^{-3} \tag{2.7.45}$$

donde $n_i = 1.18 \times 10^{10}\mathrm{cm}^{-3}$ para el Si a 300K. Entonces solo tenemos que usar la ecuación para $p_{n0} \ll n_{n0}$:

$$G_L = U = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} \tag{2.7.46}$$

De lo qeu se deduce que *la concetración de portadores* p_n es:

$$p_n = G_L\tau_p + p_{n0} = 1.00 \cdot 10^{13}\ \mathrm{cm}^{13} \tag{2.7.47}$$

y usando que $\Delta n = \Delta p$, tenemos que:

$$n_n = n_{n0} + \Delta p = n_{n0} + G_L\tau_p = 1.01 \cdot 10^{15}\ \mathrm{cm}^{13} \tag{2.7.48}$$

Teniendo poca inyección, que significa que la tasa de fotogeneración es mucho menor que nuestro portador mayoritario, i.e., $\Delta n = \Delta p \ll n = N_D$.

b) Para dibujar el diagrama de Bandas solo tenemos que calcular en nivel de fermi E_F para las concetraciones nuevas. Así pues, usamos que:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) - kT\ln\left(\frac{p}{n_i}\right) \tag{2.7.49}$$

Usando que $E_i = 0.527$ eV, los valores de la energía de Fermi:

$$\text{Sin iluminación: } E_F = 0.846\ \mathrm{eV} \qquad \text{Con iluminación: } E_F = 0.378\ \mathrm{eV} \tag{2.7.50}$$

donde $E_v = 0$ eV.

2.7.7. Ejercicio 7

Un semiconductor de silicio está caracterizado por el siguiente diagrama de bandas de energía:

(a) Si el semiconductor de Si se mantiene a temperatura ambiente, determinar la resistividad del semiconductor para la región $x > W/2$. Para los electrones en la región $x > W/2$ que intentan moverse a la región $x < -W/2$ sin modificar su energía total, ¿cuál es la mínima energía cinética que deben tener?

(b) Calcular y representar gráficamente el potencial electrostático y el campo eléctrico en función de x. Explicar si el semiconductor está en equilibrio termodinámico.

(c) Responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la densidad de corriente de electrones (J_n) y de huecos (J_p) en $x = 0$?
- ¿Existe corriente de arrastre de electrones en $x = 0$? Si así fuera, ¿cuál es la dirección del flujo de corriente de arrastre?
- ¿Existe corriente de difusión de electrones en $x = 0$? En tal caso, ¿cuál es la dirección del flujo de corriente de difusión?

---

a) La resisitividad, como hemos visto a lo largo de todos los ejericcios, viene dada por:

$$\rho = \frac{1}{q(\mu_n n + \mu_p p)} \tag{2.7.51}$$

Por lo que solo tenemos que calcular n y p para μ_n y μ_p dados (valores que tendremos que coger de otro ejercicio). Así pues, obtenemos n y p a partir de las ecuaciones:

$$n = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \qquad p = n_i e^{(E_i - E_F)/kT} \tag{2.7.52}$$

Donde conocemos N_C y N_V a 300K (temperatura ambiente) y la diferencia de $E_c - E_F = E_g/4$ y $E_F - E_v = 3E_g/4$ en $x > W/2$ (véase diagrama de bandas). Así pues conocemos los valores:

$$n = 7.91 \times 10^{14}\ \text{cm}^{-3} \qquad p = 4.5 \times 10^{14}\ \text{cm}^{-3} \tag{2.7.53}$$

Usando las siguientes movilidades (calculadas con las ecuacioens de portadores mayoritarios/minoritarios previas):

$$\mu_n = 1290\ \text{cm}^2/\text{V s} \qquad \mu_p = 499\ \text{cm}^2/\text{V s} \tag{2.7.54}$$

tal que la resistividad en $W/2 < x$:

$$\rho = 5.02\ \Omega\text{cm} \tag{2.7.55}$$

Da 7.73. En gneral hacen aproximaciones ignorando uno de los portadores. Ahora solo queda calcualar la energía cinética mínima $T_{\text{mín}}$ que deben tener. Como podemos ver la energía de la banda de conducción aumenta de la región $x > W/2$ a la región $x < W/2$. Así pues:

$$T_{\text{mín}} = E_c(-W/2) - E_c(W/2) = E_g/2 = 0.506\ \text{eV} \tag{2.7.56}$$

b) Como sabemos el campo eléctrico viene dado por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}x} \tag{2.7.57}$$

y el potencial $V(x) = -E_i(x) + V_0$ donde V_0 es una constate arbitraria que nos ayuda a redefinir el cero del potencial. Como para calcular la derivada (y V_0 siempre nos permite redefinir el cero de V) solo necesitamos conocer la *dependencia de E_i con la posición*, podemos escribir

$$E_i = E_{i0} - \frac{E_g}{2}\frac{x}{W} \tag{2.7.58}$$

siendo E_{i0} una constante irrelevante que contiene información de la energía respecto al cero $E_F = 0$ eV. Así pues:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{q}\frac{E_g}{2W} \tag{2.7.59}$$

Así pues:

$$V = V_0 + \frac{E_g}{q}\frac{x}{2W} \tag{2.7.60}$$

Para ver si está en equilibrio termodinámico tenemos que ver si $J_n = J_p = 0$. Veamos que $J_n = 0$ implica que:

$$J_n = J_n|_{\text{difusion}} + J_n|_{\text{arrastre}} = q\mu_n n\mathcal{E} + qD_n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2.7.61}$$

De tal modo que, si estamos en equilibrio se tiene que verificar que

$$\mathcal{E}_n = \frac{D_n}{\mu_n}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \frac{kT}{q}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \tag{2.7.62}$$

donde hemos aplicado las reglas de Einstein (válido para el equlibrio y fuera del equlibrio). Ahora solo tenemos que evaluar $n(x)$ y su derivada. Es sencillo de ver que la única dependencia mostrada en el diagrama de bandas:

$$n = \begin{cases} N_c e^{-\frac{1}{kT}\frac{3E_g}{4}} & \text{si } x < -W/2 \\ N_c e^{-\frac{1}{kT}\frac{E_g}{4}\left(\frac{-x+W}{W/2}\right)} & \text{si } -W/2 < x < W/2 \\ N_c e^{-\frac{1}{kT}\frac{E_g}{4}} & \text{si } W/2 < x \end{cases} \tag{2.7.63}$$

De lo cual deducimos que la derivada es:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -W/2 \\ \frac{1}{kT}\frac{E_g}{4}\frac{2}{W}N_c e^{-\frac{1}{kT}\frac{E_g}{4}\left(\frac{-x+W}{W/2}\right)} & \text{si } -W/2 < x < W/2 \\ 0 & \text{si } W/2 < x \end{cases} \tag{2.7.64}$$

Consecuentemente el campo eléctrico:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{1}{q}\frac{E_g}{2W} \qquad \text{si } -W/2 < x < W/2 \tag{2.7.65}$$

Que como podemos ver es la misma expresión. Para los portadores huecos se puede llegar a lo mismo siguiendo los mismos pasos (la única diferencia es que aparecen dos signos menos que se cancelan). Veamos como quedan las gráficas:

c) Respondemos a cada una de las preguntas:

- La densidad de corriente de electrones y de huecos en $x = 0$ es cero, como hemos visto en el apartado anterior. De otra manera no estaríamos en el equilibrio termodinámico.
- Corriente de arrastre hay, ya que el campo eléctrico no es nulo (en $x = 0$). Así pues:

$$\mathbf{J}_n|_{\text{arrastre}} = q\mu_n n\mathcal{E} = -\mu_n \frac{E_g}{2W} N_c e^{-\frac{1}{kT}\frac{E_g}{2}}\,\hat{\mathbf{x}} \tag{2.7.66}$$

Lógicamente la corriente de arrastre tiene que tener la misma dirección que la corriente

eléctrica, ya que aún que la velocidad del electrón tendrá la dirección contraria al campo eléctrico y la corriente de carga tendrá la dirección contraria a la velocidad del electrón.

- Corriente de difusión hay, y en virtud de que $\mathbf{J}_n|_{\text{arrastre}} = -\mathbf{J}_n|_{\text{difusion}}$, tenemos que

$$\mathbf{J}_n|_{\text{arrastre}} = -q\mu_n n\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mu_n \frac{E_g}{2W} N_c e^{-\frac{1}{kT}\frac{E_g}{2}} \hat{\mathbf{x}} \tag{2.7.67}$$

2.7.8. Ejercicio 8

Interpretación de un diagrama de bandas de energía para un semiconductor de silicio tomando $L = 1$ micra:

(a) Calcula y representa graficamente el potencial electrostático y el campo eléctrico en el interior del semiconductor. Determina si el sistema esta o no en equilibrio termodinámico.

(b) Calcula si el semiconductor es degenrado en alguna zona. En $x = x_2$, ¿a qué es igual p?

(c) Captura la densidad de corriente de electrones J_n y la densidad de corriente de arrastre de huecos J_p^a que fluye en $x = x_1$. Determina cuanto vale la energía cinética del hueco que aparece en el diagrama en la posición $x = L$.

---

a) Queremos calcular el potencial electrostático y el campo eléctrico en el interior del semiconductor. Usamos la misma relación que en el ejercicio anterior:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}x} \tag{2.7.68}$$

Veamos que la energía varía como:

$$E_i(x) = \begin{cases} \frac{E_{i0}}{L/3-x_1}(x-x_1) & \text{si } x < L/3 \\ E_{i0} & \text{si } L/3 < x2L/3 \\ E_{i0+\frac{E_{i0}}{L/3-x_1}(x-2L/3)} & \text{si } 2L/3 < x \end{cases} \tag{2.7.69}$$

Recordamos que en $L/3$ tenemos que $E_v = -E_g/3$, y por tanto $E_c = 2E_g/3$, tal que $E_{i0} = E_g/6 + (3kT/4) \cdot \log\left(m_n^*/m_p^*\right) = 0.179$ eV, donde hemos redefinido $E_F = 0$. Por lo

que igual que antes tenemos que el campo eléctrico viene dado por regiones:

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{E_{i0}}{L/3-x_1} & \text{si } x < L/3 \\ 0 & \text{si } L/3 < x2L/3 \\ \frac{E_{i0}}{L/3-x_1} & \text{si } 2L/3 < x \end{cases} \tag{2.7.70}$$

y por tanto:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 - \frac{E_{i0}}{L/3-x_1}(x - L/3) & \text{si } x < L/3 \\ V_0 & \text{si } L/3 < x2L/3 \\ V_0 - \frac{E_{i0}}{L/3-x_1}(x - 2L/3) & \text{si } 2L/3 < x \end{cases} \tag{2.7.71}$$

Ahora solo tendríamos que hacer el esquema:

Para determinar que está en equilibrio basta ver que $\mathbf{J}_T = 0$ y que $T = \text{cte}$, lo cual es cierto. Para ver que $\mathbf{J} = 0$ debemos seguir el mismo procedimiento que antes.

b) Evidentemente es degenerado en $x = L$, ya que $E_F = E_v$. En x_2 tenemos que:

$$p = N_V e^{\frac{E_F - E_v}{kT}} = N_V e^{\frac{E_g}{3kT}} = n_i e^{\frac{E_F - E_i}{kT}} \tag{2.7.72}$$

tal que en x_2 tenemos que $E_i = E_{i0} = 0.179$ eV. Los datos:

$$p = 1.22 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3} \tag{2.7.73}$$

c) Nos piden la densidad de corriente de electrones J_n y la densidad de corriente de huecos en $x = x_1$. Es exactamente igual que en el anterior ejercicio:

$$\mathbf{J}|_{\text{arrastre}} = q\mu_n n\mathcal{E} = 0 \tag{2.7.74}$$

ya que en x_1 no hay corriente. La energía cinética del hueco T viene dada por la diferencia entre $E_v = 0$ (en $x = L$) y $-E_g/3$. Así pues:

$$T = -\frac{-E_g}{3} \tag{2.7.75}$$

por suponer, ya que no tenemos ningún tipo de motivación para suponer que es así.

Capítulo 3

La unión PN

Definimos como unión pn a un semiconductor al cual se le aplica en una región un dopado tipo p y en otra región un dopado tipo n, de tal modo que $N_A \gg N_D$ en $x < 0$ y $N_D \gg N_A$ en $x > 0$. El estudio y caracterización de la unión pn es fundamental para entender la electrónica moderna. Existen 3 situaciones en las que podemos estudiar la unión pn, que son:

- **Equlibrio termodinámico**, en el que no aplicamos una diferencia de potencial V_A entre la zona p y zona n externa.
- **Polarización directa** en el que aplicamos una diferencia de potencial $V_A > 0$, es decir, polarizamos p respecto n.
- **Polarización inversa** en el que aplicamos una diferencia de potencial $V_A < 0$, es decir, polarizamos n respecto p.

3.1. Equilibrio termodinámico

3.1.1. Introducción

Entendemos por *equilibrio termodinámico* a la situación en la que no hay corriente externa palicada, no hay iluminación y tampoco hay gradientes de la temperatura. Además consideramos las siguientes suposiciones:

- Dispositivo unidimensional.
- Unión metalúrgica en $x_j = 0$.
- Contactos óhmicos perfectos.

Debido a la aparición de esta diferencia de dopado aparece una región alrededor de $x = 0$ en el que n y p se difunden, esto es, $n \neq N_D$ u $p \neq N_A$, tal que n y p dependen de x. A esta región la llamamos **zona de vaciamiento**, y en ella aparece un campo eléctrico no nulo en virtud de la ecuación de Maxwell-Poisson:

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho}{K_S \varepsilon_0} \tag{3.1.1}$$

siendo $\rho = -qn(x) + qp(x)$, y como $V(x) = -\int \mathcal{E} \mathrm{d}x$, también aparece un potencial no constante (siempre en la zona de vaciamiento). Como sabemos, existe una relación entre V y las energías E_i, E_v y E_c.

$$q\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial E_i}{\partial x}$$

y como E_F es contante en el equlibrio. Para conocer por completo la unión pn, lo que nosotros llamamos *caracterizar la unión pn*, necesitamos conocer:

- Densidad de carga $\rho(x)$.
- Campo eléctrico $\mathcal{E}(x)$.
- Potencial electrico $V(x)$.
- Anchuras de la región de vaciamiento x_n y x_p.
- Esquema de bandas en todo el dispostivo.

a partir de estos valores podemos concoer tanto corriente, como densidad de portadores... en todo el dispositivo. Definimos como **unión pn escalon** a aquella unión pn en la que con regiones p y n dopados uniformemente, con un salto abrupto en $x = 0$.. Es el caso más sencillo y más usado. El esquema de bandas es:

Cabe destacar que la caracterización de cualquier unión pn (sea escalón, gradual...) es muy similar, presentando esquemas de bandas similares, solo cambiando la forma en la región de vaciamiento. Nosotros nos centraremos particularmente en la unión escalón, al ser la más sencilla.

3.1.2. Caracterización de la unión pn escalón

Caracterizar la unión pn es equivalente a conocer la densidad de carga, el campo eléctrico y el potencial a lo largo del dispositivo, a sí como la anchura de la región de vaciamiento. Muchos de estos valores están relacionados entre sí, y todos ellos dependen de el nivel de dopado (N_D, N_A) del material (E_g, n_i) y de la temperatura (T). La mayor parte de estos los calcularemos a partir de aproximaciones. Lo que si podemos calcular sin hacer (casi) ninguna aproximación es V_{bi}, un parámetro que aparecerá recurrentemente. Hay dos maneras de calcular/definir V_{bi}, a saber, por energías y por corrientes. La definición por energías es la más sencilla, y por el que nosotros optamos. Básicamente nos dice que V_{bi} es la diferencia entre la región P y N del dispositivo para cualquiera de las bandas $(E_i, E_c, E_v,)$. Así pues:

$$V_{\text{bi}} = -\frac{1}{q}(E_i|_P - E_i|_N) = -\frac{kT}{q}\left(\left(-\ln\left(p_p/n_i\right)\right) - \ln\left(n_n/n_i\right)\right) = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) \tag{3.1.2}$$

Asñ¡í pues, se define V_{bi} como:

$$V_{\text{bi}} = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) \tag{3.1.3}$$

Para calcular la anchura, campo eléctrico y potencial necesitamos sin embargo hacer la **aproximación a zona de vaciamiento**. Esta aproximación nos dice que la región comprendida entre $-x_p$ y x_n (límites de la zona de vaciamiento) tanto n como p son despreciables frente N_A y N_D, tal que:

- En $-x_p \leq x \leq 0$ tenemos que $n_p, p_p \ll N_A^-$ y por tanto la densidad de carga $\rho(x) = -qN_A^-$.
- En $0 \leq x \leq x_n$ tenemos que $n_n, p_n \ll N_D^+$ y por tanto la densidad de carga $\rho(x) = qN_A^+$.

De esta forma la función de densidad de carga nos dice:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x < -x_p \\ -qN_A & -x_p < x < 0 \\ qN_D & 0 < x < x_n \\ 0 & x_n < x \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Y por tanto la corriente eléctrica tras integrar

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} 0 & x < -x_p \\ \frac{-qN_A}{K_S\epsilon_0}(x + x_p) & -x_p < x < 0 \\ \frac{qN_D}{K_S\epsilon_0}(x - x_n) & 0 < x < x_n \\ 0 & x_n < x \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Y el potencial eléctrico tras inegrar el campo eléctrico:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -x_p \\ \frac{qN_A}{2K_S\epsilon_0}(x + x_p)^2 & -x_p < x < 0 \\ \frac{qN_D}{2K_S\epsilon_0}(x - x_n)^2 + V_{\text{bi}} & 0 < x < x_n \\ V_{\text{bi}} & x_n < x \end{cases} \tag{3.1.6}$$

donde K_S es el **coeficiente de permitividad relativa**. A partir de la exigencia de continuidad de $V(x)$ y de su derivada $\mathcal{E}(x)$ a lo largo del dispositivo podemos hallar x_n y x_p, ya que:

$$\mathcal{E}(0^+) = \mathcal{E}(0^-) \implies N_A x_p = N_D x_n \tag{3.1.7}$$

$$V(0^+) = V(0^-) \implies N_A x_p^2 = -N_D x_n^2 + V_{\text{bi}} \tag{3.1.8}$$

de lo que se puede deducir que:

$$x_n = \left[\frac{2K_S\epsilon_0 V_{\text{bi}}}{q}\frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}\right] \qquad x_p = \left[\frac{2K_S\epsilon_0 V_{\text{bi}}}{q}\frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)}\right] \tag{3.1.9}$$

3.1.3. Caracterización de la unión pn gradual

3.2. Union pn bajo polarizaciones

Decimos que una unión PN o diodo está polarizado cuando estamos aplicando una diferencia de potencial entre la zona n y la zona p externamente, tal como se puede ver en la siguiente imagen:

De esta manera definimos:

- V_j: caída de tensión entre n y p.
- V_P: caída de tensión entre p y el metal.
- V_N: caída de tensión entre n y el metal.
- V_A: caída de tensión externa.

Para obtener la relación entre V_j, qué es al final el valor que hay entre las bandas en N y P, así como la altura del potencial $V(x)$ entre los extremos de la región de vaciamiento, es necesiario observar muy bien la imagen anterior y ver como se colocan los + y los - en la imagen. Usando las mallas tendríamos que:

$$V_j = V_{\text{bi}} - V_N - V_A - V_P \tag{3.2.1}$$

Como en general, las uniones metalúrgicas son perfectas tendremos que $V_N = V_P = 0$, tal que así:

$$V_j = V_{\text{bi}} - V_A \tag{3.2.2}$$

Entonces todas las ecuacioens qeu anteriormente usamos con V_{bi} en el equlibrio tendremos que sustituirlas por V_j. Lo primero que podmeos notar es que en función de V_A las región de vaciamiento se hace mas grande o disminuye:

$$x_n = \left[\frac{2K_S\epsilon_0}{q}(V_{\text{bi}} - V_A)\frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}\right] \qquad x_p = \left[\frac{2K_S\epsilon_0}{q}(V_{\text{bi}} - V_A)\frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)}\right] \tag{3.2.3}$$

por lo que, aún no afectando al campo eléctrico o la densidad de carga de manera directa, solo por el hecho de cambiar la región de vaciamiento ya ha cambiado la forma funcional de estas ecuaciones (por ejemplo $\mathcal{E}_{\text{máx}}$), y sobre todo la distancia entre bandas:

$$E_i|_P - E_i|_N = V_j \quad E_c|_P - E_c|_N = V_j \quad E_v|_P - E_v|_N = V_j \tag{3.2.4}$$

Diferenciamos dos polarizaciones:

- La **polarización directa** $V_A > 0$. En la polarización directa tamaño de la región de vaciamiento se reduce, lo que reduce el campo eléctrico máximo, y lo que es más importante, disminuye la distancia entre bandas $E_i|_N$ e $E_i|_P$, lo que hace más fácil que los electrones/huecos se muevan en la región de vaciamiento (ya que tienen menos potencial que superar) haciendo que aparezca una corriente eléctrica no nula entre ambos puntos.
- La **polarización inversa** $V_A < 0$. En la polarización inversa tamaño de la región de vaciamiento aumenta, lo que aumenta el campo eléctrico máximo, y lo que es más importante, aumenta distancia entre bandas $E_i|_N$ e $E_i|_P$.

3.3. Características IV de la union pn

En una situación de equilibrio la densidad de electrones n en la zona n de la unión será mucho mayor que en la zona p. Esta diferencia de densidades provocará la aparición de una corriente de difusión de la región n a la región p. Sin emargo, la existencia de una diferencia de potencial entre la zona n y la zona p genera un campo eléctrico contrario a la corriente de difusión. En el equilibrio estas dos corrientes estań compensadas, de tal modo que:

$$\text{Equlibrio: } \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_p = 0 \tag{3.3.1}$$

Sin embargo cuando aplicamos un voltaje a la union pn, el equilibrio entre la densidad de corriente debida al campo eléctrico y la corriente de difusión desaparecerá, de tal modo que aparecerá una corriente eléctrica no nula a través del dispositivo.

Bajo una corriente directa $V_A > 0$, el potencial se reducirá (tal y como hemos visto en la sección anterior), lo que conlleva una disminución del campo eléctrico fig. 3.1.

Figura 3.1: Campo eléctrico y potencial para diferentes valores de V_A.

reduciendo la corriente eléctrica de arrastre. Además de esto, que el potencial eléctrico sea más pequeño hace que los electrones/huecos tengan que superar una barrera de potencial más pequeña para pasar al otro lado por difusión, facilitando así que los electrones/huecos en la región masiva N/P o región n/p pasen al a región masiva P/N. Consecuentemente, los portadores minoritarios pueden comenzar a inyectarse, esto es, los electrones comenzarán a inyectarse en la región masiva P y los huecos en la región masiva N.

Por otro lado, cuando $V_A < 0$, el fenómeno es justamente el contrario, la barrera de potencial aumenta de tal manera que menos electrones se inyectan en la región P y menos huecos en la región N. Esto provoca una disminución en la difusión de los portadores, y por tanto se reduce la posible corriente por difusión que pudiera haber. La corriente que aparece bajo polarización inversa se debe a la corriente de arrastre (corriente debida a $\mathcal{E} \neq 0$) producida por el efecto del campo eléctrico sobre los portadores minoritarios. Un número minoritario de electrones/huecos en la región p/n serán arrastrados a la región n/p, la corriente de arrastre depende principalmente de del número de portadores minoritarios, que viajarán a la velocidad de saturación.

En cualquier caso, en la región de vaciamiento existen ambos fenómenos simultáneamente, lo que complica bastante su cálculo. Por tanto el calculo de las corrientes de difusión tienen que hacer fuera de la región de vaciamiento. En esta sección trataremos de calcular las relaciones intensidad-voltaje (IV), a través de diferentes aproximaciones.

3.3.1. Aproximación del diodo ideal

La **ecuación del diodo ideal** o **aproximación del diodo ideal** nos permite calcular analíticamente (y de manera sencilla) las relaciones de corriente J (tanto de difusión como de arrastre) en función de la posición del diodo y el valor del potencial V_A. Las aproximaciones son:

- No hay fuentes externas de generación de portadores (iluminación).
- Son aplicables las aproximaciones de vaciamiento anteriores y de unión escalón.
- Solución en estado estacionario (las densidades n y p son constantes a lo largo de la unión).
- No existe recombinación ni generación de portadores en la región de vaciamiento.
- Se mantiene bajo nivel de inyección en las regiones masivas. El campo eléctrico es cero en las regiones masivas: toda la tensión cae en la zona de vaciamiento.
- La resistiviadad de las regiones masivas o casi neutras es lo suficientemente pequeña como para que el paso de corriente no provoque caídas de tensión. Toda la tensión cae en las zona de vaciamiento.
- Las regiones masivas están dopadas uniformemente.
- La densidad de los portadores móviles en la zona de vaciamiento es aproximadamente la que tendŕiamos en equilibrio, pero con una barrera de potencial desplazada con la tensión aplicada. Los cuasi-niveles de Fermi son constantes en la zona de transición.

3.3.2. Diodo ideal: corrientes en las zonas masivas

Tal y como hemos visto, estas condiciones de los portadores minoritarios sobre la zona fuera de la región de vaciamiento se parecen mucho a las condición 1 de subsec. 2.4.2: *situación estacionaria y sin iluminación*. Así pues, siempre podemos aplicar las mismas ecuaciones sobre Δp_n y Δn_p:

$$\text{Zona P: } D_N \frac{\mathrm{d}^2 \Delta n_p}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\Delta n_p}{\tau_n} = 0 \tag{3.3.2}$$

$$\text{Zona N: } D_P \frac{\mathrm{d}^2 \Delta p_n}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\Delta p_n}{\tau_p} = 0 \tag{3.3.3}$$

La solución es, en la resgiones masivas

$$\text{Zona P: } \Delta n_p = Ae^{-x/L_N} + Be^{x/L_N} \qquad \text{Zona N: } \Delta p_n = A'e^{-x/L_P} + B'e^{x/L_P} \tag{3.3.4}$$

tal que $L_N = \sqrt{D_N \tau_n}$ y $L_P = \sqrt{D_P \tau_p}$. En la fig. 3.2 aparecen las dependencias exponenciales que vemos tanto en polarización directa como en polarización inversa, tanto en las regiones mastivas como en las zona de vaciamiento. Ahora tendremos que aplicar las condiciones de cotorno. La primera condición de contorno es que $n_p(-\infty) = 0$ y que $p_n(\infty) = 0$. Esto hace que $A = 0$ y que $B' = 0$, tal que:

$$\text{Zona P: } \Delta n_p = Be^{x/L_N} \qquad \text{Zona N: } \Delta p_n = A'e^{-x/L_P} \tag{3.3.5}$$

La segunda condición de contorno tiene que darse justo cuando empieza la región de vaciamiento, esto es, en x_n (para p_n) y en x_p (para n_p). Para obtener la condición empezamos por:

$$V_{\text{bi}} = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) \approx \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{p_{p0} n_{n0}}{n_i^2}\right) \tag{3.3.6}$$

Figura 3.2: Portadores minoritarios a lo largo del dispositivo pn.

siendo p_{p0} la cantidad de portadores tipo hueco que hay en la región masiva P en el equlibrio y n_{n0} la cantidad de portadores tipo electrón que hay en la región masiva N en el equlibrio. Como sabemos $n_{p0} = n_i^2/p_{p0}$ y $p_{n0} = n_i^2/n_{n0}$, por lo que:

$$n_{p0} = n_{n0}e^{-qV_{\text{bi}}/kT} \qquad p_{n0} = p_{p0}e^{-qV_{\text{bi}}/kT} \tag{3.3.7}$$

Así que cuando aplciamos un potencial externo tal que $V_{\text{bi}} \to V_{\text{bi}} - V_A$ (recordemos que una de las hipótesis es que toda la tensión aplicada V_A cae en la zona de vaciamiento) llegamos a que:

$$n_p|_{x_p} = n_{n0}e^{-q(V_{\text{bi}}-V_A)/kT} \qquad p_n|_{x_n} = p_{p0}e^{-q(V_{\text{bi}}-V_A)/kT} \tag{3.3.8}$$

tal que

$$\Delta n_p|_{x_p} = n_p - n_{p0} = n_{p0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \qquad \Delta p_n|_{x_n} = p_n - p_{n0} = p_{n0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \tag{3.3.9}$$

de lo que se deduce que *las difernecias de portadores minoritarios respecto el equilibrio en las zonas masivas*

$$\Delta n = n_{p0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)e^{(x+x_p)/L_N} \qquad \Delta p = p_{n0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)e^{(x-x_n)/L_P} \tag{3.3.10}$$

y consecuentemente **los portadores minoritarios en las zonas masivas**

$$n_p = n_{p0} + n_{p0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)e^{(x+x_p)/L_N} \qquad p_n = p_{n0} + p_{n0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)e^{(x-x_n)/L_P} \tag{3.3.11}$$

En las zonas masivas solo puede haber corriente producida por la difusión (no hay campo electrico), tal que:

$$\text{Zona P: } J_N \simeq -qD_N \frac{\mathrm{d}\Delta n_p}{\mathrm{d}x} \qquad \text{Zona N: } J_P \simeq -qD_P \frac{\mathrm{d}\Delta p_n}{\mathrm{d}x} \tag{3.3.12}$$

por lo que **las corrientes en las zonas masivas**

$$J_N(x) = \frac{qD_N}{L_N} n_{p0} \left(e^{qV_A/kT} - 1\right) e^{(x+x_p)/L_N} \qquad -\infty \leq x \leq -x_p \tag{3.3.13}$$

$$J_P(x) = \frac{qD_P}{L_P} p_{n0} \left(e^{qV_A/kT} - 1\right) e^{-(x-x_n)/L_P} \qquad x_n \leq x \leq \infty \tag{3.3.14}$$

3.3.3. Diodo ideal: corrientes en la zona de vaciamiento

Por definición la corriente total tanto en la zona de vaciamiento como en la zonas masivas es constante subsec. 3.3.4 e igual en todo punto del diodo (ya que la presencia de un punto con mas o menos corriente que otro provocaría la acumulación de carga en un sitio, lo que sería contrario a las hipótesis de solución estacionaria). Esto mismo lo aplicaremos en el apartado siguiente. Consecuentemente la corriente debida a las cargas hueco J_P en la zona de vaciamiento debe ser igual a $J_P|_{\text{difusion}}(x_n)$, y la corriente debida a las cargas electrón J_N en la zona de vaciamiento debe ser igual a $J_N|_{\text{difusion}}(x_p)$:

$$J_P|_{\text{vaciamiento}} = J_P|_{\text{difusion}}(x_n) = -qD_N \left.\frac{\partial p_n}{\partial x}\right|_{x=x_n} \tag{3.3.15}$$

$$J_N|_{\text{vaciamiento}} = J_N|_{\text{difusion}}(-x_p) = -qD_P \left.\frac{\partial n_p}{\partial x}\right|_{x=x_p} \tag{3.3.16}$$

3.3.4. Ecuación del diodo ideal

Como ya hemos dicho, por definición la corriente total tanto en la zona de vaciamientoc subsec. 3.3.4 como en la zonas masivas es constante e igual en todo punto del diodo:

$$J = -J_N(-x_p) + J_P(x_n) = q\left(\frac{D_N}{L_N} n_{p0} + \frac{D_P}{L_P} p_{n0}\right)\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \tag{3.3.17}$$

Y si multiplicamos por el área transversal A obtenemos:

$$I = I_0\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \qquad I_0 = Aq\left(\frac{D_N}{L_N} n_{p0} + \frac{D_P}{L_P} p_{n0}\right) \tag{3.3.18}$$

Por tanto la intensidad dende del dopado, el coeficiente de difusión, el tipo de material y el voltaje de polarización V_A. Esta última dependencia se encuentra en subsec. 3.3.4 (derecha). Otra forma de escribir I_0 es:

$$I_0 = qA\left(\frac{D_N}{L_N}\frac{n_i^2}{N_A} + \frac{D_P}{L_P}\frac{n_i^2}{N_D}\right) \tag{3.3.19}$$

Esto nos lleva a una conclusión interesante: el lado menos dopado de la unión PN produce más cantidad de portadores minoritarios, lo que implica una mayor componente de corriente. Hay dos casos especiales, la unión P^+N $N_A \gg N_D$ y la unión N^+P $N_D \gg N_A$.

Figura 3.3: Corriente total y valor de la intensidad frente a V_A.

3.3.5. Diodo estrecho

Decimos que un diodo ideal es un **diodo estrecho** cuando uno de los lados del diodo x_{1p} o x_{1n} es proporcional a L_N o L_P respectivamente. Cuando es así no podemos aplicar la solución $\Delta n(-\infty) = 0$ o $\Delta p(\infty) = 0$, si no que tenemos que aplicar la siguiente condición:

$$\Delta n(x_{1p}) = 0 \qquad \Delta p(x_{1n}) = 0 \tag{3.3.20}$$

Consecuentemente tenemos que los valores de las constantes A, B, A' y B' cambian. La solución final acaba siendo:

$$\Delta n_p(x) = n_{p0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)\frac{\sinh\left(\frac{x+x_{1p}}{L_N}\right)}{\sinh\left(\frac{-x_p+x_{1p}}{L_N}\right)} \tag{3.3.21}$$

$$\Delta p_n(x) = p_{n0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)\frac{\sinh\left(\frac{x-x_{1n}}{L_P}\right)}{\sinh\left(\frac{x_n-x_{1n}}{L_P}\right)} \tag{3.3.22}$$

De tal modo que las corrientes ahora son:

$$I_n(x) = qA\frac{D_N}{L_N}n_{p0}\frac{\cosh\left(\frac{x_{1p}-x}{L_N}\right)}{\sinh\left(\frac{x_{1p}-x_p}{L_N}\right)}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \tag{3.3.23}$$

$$I_p(x) = qA\frac{D_P}{L_P}p_{n0}\frac{\cosh\left(\frac{x_{1n}-x}{L_P}\right)}{\sinh\left(\frac{x_{1n}-x_n}{L_P}\right)}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \tag{3.3.24}$$

Así pues, tenemos que

$$I = qA\left[\frac{D_P p_{n0}}{L_P}\coth\left(\frac{x_{1n}-x_n}{L_P}\right) + \frac{D_N n_{p0}}{L_N}\coth\left(\frac{x_{1p}-x_p}{L_N}\right)\right] \tag{3.3.25}$$

3.4. Desviacioens respecto la unión ideal

Las desviacionesen polarizaciones en polarización inversa y directa más generales:

- Desviaciones en polarización inversa:

- Ruptura de avalancha.
- Ruptura Zéner.
- Generación en la región de vaciamiento.
- Perforación.

- Desviaciones en polarización directa:
  - Recombinación en la región de vaciamiento.
  - Inyección de alto nivel.
  - Efectos en al región masiva.

3.4.1. Desviaciones en polarización inversa

Definimos como **voltaje de ruptura** V_{BR} es el voltaje para el cual la corriente tiende a $-\infty$. El diodo se comporta como una fuente de voltaje fijo (diodo regulador) para un amplio intervalo de corriente (limitado por la potencia máxima que podría disipar).

- Avalancha.
- Zéner.

La **ruptura por avalancha o ionización por impacto** para un valor crítico del campo eléctrico, os portadores se aceleran a un valor de energía suficientemente grande para que, cuando haya colisiones con un átomo de la estructura cristalina, puedan liberar un par electrón-hueco. Estos portadores liberados son acelerados por el campo eléctrico, lo que produce nuevas colisioens y nuevos portadores, generando una avalancha. Tiene dependencias con el dopado y la tempratura:

La pregunta interesante aquí es saber cual es el valor del campo eléctrico que genera esta ruptura por avalancha:

$$\mathcal{E} = \tag{3.4.1}$$

3.4.2. Desviaciones en polarización directa

3.5. Capacidades de vaciamiento y difusión

3.5.1. Capacidad de vaciamiento

3.5.2. Capacidad de difusión

3.5.3. Circuito equivalente

3.6. Heterouniones y diodos túnel

3.7. Ejercicios

3.7.1. Ejercicio 1

Queremos estudiar las características de una unión abrupta PN de silicio a temperatura ambiente con boro ($10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$) y fósforo ($5,0 \times 10^{14}\,\mathrm{cm}^{-3}$), siendo la longitud de la zona P de $0,008\,\mathrm{cm}$ y la de la zona N de $0,008\,\mathrm{cm}$ y el área del contacto de $10^{-2}\,\mathrm{cm}^2$.

Las movilidades de electrones y huecos son $1360\,\mathrm{cm}^2/(\mathrm{V}\cdot\mathrm{s})$ y $460\,\mathrm{cm}^2/(\mathrm{V}\cdot\mathrm{s})$ respectivamente y $\tau_p = \tau_n = 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

a) En situación de equilibrio, calcula y representa lo siguiente:
   - La anchura de todas las regiones del dispositivo.
   - Las bandas de energía incluyendo la banda de conducción, la de valencia, el nivel de Fermi, y el de Fermi intrínseco. Calcula la distancia relativa entre todos esos niveles.

b) Si polarizamos la zona N con 0,2 voltios respecto a la zona P, calcula y representa:
   - La anchura de todas las regiones del dispositivo.
   - Las bandas de energía incluyendo la banda de conducción, la de valencia, el nivel de Fermi, y el de Fermi intrínseco. Calcula la distancia relativa entre todos esos niveles.

c) Si polarizamos la zona N con 0,2 voltios respecto a la zona P, calcula y representa:
   - El campo eléctrico, densidad de carga y el voltaje en todo el dispositivo.
   - Las corrientes que surgen a lo largo de todo el dispositivo para cada portador.

Vamos a calcular las masas efectivas en función de las movilidades y las vidas medias:

$$\mu_n = D_n \frac{q}{kT} = \frac{q}{kT}\tau_n v_{th}^2 = \frac{q}{kT}\tau_n \frac{3kT}{m_n^*} = \frac{3q\tau_n}{m_n^*} \tag{3.7.1}$$

Entonces:

$$m_n^* = \frac{3q\tau_n}{\mu_n} \qquad m_p^* = \frac{3q\tau_p}{\mu_p^*} \tag{3.7.2}$$

Usando estas ecuacioens obtenemos:

$$m_p^* = 3.88 \cdot 10^6\, m_e \qquad m_n^* = 11.5 \cdot 10^6\, m_e \tag{3.7.3}$$

Francamente no se que puede estar mal, pero usaremos las masas típicas $m_p^* = 0.81 m_e$ y $m_n = 1.18 m_e$.

a) Tenemos que calcular la anchura de todas las regiones del dispositivo y las bandas de energía (banda de conducción, banda de valencia, nivel de Fermi y nivel de Fermi intrínseco). También tenemos que calcular las distancias relativas entre los niveles (lo cual es obvio dado lo anterior).

   Primero tenemos que calcular las distancias, lo cual es simplemente aplicar las fórmulas para la situación de equilibrio

$$x_p = \left[\frac{2K_S\varepsilon_0}{q}\frac{N_D}{N_A(N_A+N_D)}V_{bi}\right]^{1/2} \qquad x_n = \left[\frac{2K_S\varepsilon_0}{q}\frac{N_A}{N_D(N_A+N_D)}V_{bi}\right]^{1/2} \tag{3.7.4}$$

   Así pues, los valores numéricos son:

$$x_p = 5.000{\cdot}10^{-5}\ [\text{cm}] \qquad x_n = 1.000{\cdot}10^{-4}\ [\text{cm}] \qquad W = x_n{+}x_p = 1.5{\cdot}10^{-4}\ [\text{cm}] \quad (3.7.5)$$

Y luego tenemos que calcular los valores de todas y cada una de las bandas. Para conocer las banda, teniendo en cuenta que $E_F = 0$ [eV] *a lo largo de todo el dispositivo pn*. Por el resto simplemente aplicar las ecuaciones de la sección 2, tal que en la zona p los valores son los que típicamente esperaríamos para un semiconductor N_A, mientras que en la zona n será los que esperaríamos en un conductor N_A menos V_{bi}. En la *zona de vaciamiento* los valores de las bandas simplemente valdrán su valor en p menos el valor $V(x)$:

$$V_{bi} = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) = 0.580\ [\text{V}]$$

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{qN_A}{2K_S\varepsilon_0}\left(x_p + x\right)^2 & -x_p \le x \le 0 \\ -\frac{qN_D}{2K_S\varepsilon_0}\left(x_n - x\right)^2 + V_{bi} & 0 \le x \le x_n \end{cases}$$

Por el resto de situaciones, tenemos que en la zona p las ecuaciones son:

$$E_i = -kT \ln\left(\frac{n}{n_i}\right) = kT \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right) \qquad E_c = E_i + kT \ln\left(\frac{N_c}{n_i}\right) \qquad E_v = E_c - E_g$$

tal que

$$E_g = 1.12\ [\text{eV}] \qquad N_C = 2\left(\frac{m_n^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = 3.21 \cdot 10^{19}\ [\text{cm}^{-3}]$$

$$N_V = 2\left(\frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = 1.83 \cdot 10^{19}\ [\text{cm}^{-3}]$$

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-E_g/2kT} = 9.49 \cdot 10^9\ [\text{cm}^{-3}]$$

Así pues obtenemos los siguientes resultados numéricos:

b) Si polarizamos la zona N con 0.2 voltios ($V_A = -0.2$V) estamos en el régimen de polarización inversa. El calculo de los anteriores valores es exáctamente igual solo que ahora tenemos que $V_{bi} \to V_{bi} - V_A$. Así pues:

$$x_p = 5.79867 \cdot 10^{-5} \text{ [cm]} \qquad x_n = 1.15973 \cdot 10^{-4} \text{ [cm]} \tag{3.7.6}$$

c) Ahora nos piden calcular el campo eléctrico, la densidad de carga y el voltaje a lo largo del dispositivo, así como las corrientes a lo largo del mismo. Para calcular el campo eléctrico tenemos que usar la típica fórmula:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}x} \tag{3.7.7}$$

Así por lo tanto tenemos que:

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} -\frac{qN_A}{K_S\varepsilon_0}\left(x_p - x\right) & -x_p \leq x \leq 0 \\ -\frac{qN_D}{K_S\varepsilon_0}\left(x_n - x\right) & 0 \leq x \leq x_n \end{cases}$$

siendo 0 en el resto de puntos del dispositvo. El volaje se calcula teniendo en cuenta la anterior ecuación (considerando que el cero del potencial está en la zona p) on la ecuación que hemos usado previamente (a). Solo falta calcular la densidad de carga, que se hace usando, por ejemplo, la ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{K_S\varepsilon_0} \tag{3.7.8}$$

de tal modo que:

$$\rho(x) = \begin{cases} -qN_A & -x_p \leq x \leq 0 \\ qN_D\left(x_n - x\right) & 0 \leq x \leq x_n \end{cases} \tag{3.7.9}$$

Lo cual es en realidad trivial o directo, ya que procede de las hipótesis de vaciamiento que usamos para deducir todas las ecuaciones (en las condiciones que exigimos para la verificación de todas estas ecuaciones incluye que $n_n, p_p \ll N_D, N_A$) de tal modo que la ecuación de la carga es la primera condición, no la última. En cualquier caso, hacemos las representaciones gráficas:

Ahora tenemos que calcular las corrientes a lo largo del dispostivo. Las corrientes de cada portador dependen (al menos la forma funcional) depende principalmente de si nos encontramos en la región maiva N/P o en la región de vaciamiento. Los valroes más relevantes son aquellos que se dan en x_n y x_p, ya que definen los valores tanto en la zona masiva como los valores en la zona de vaciamiento. Así pues, tenemos:

$$I_N(-x_p) = \frac{AqD_N}{L_N}\frac{n_i^2}{N_A}\left(e^{qV_A/kT}-1\right) \qquad I_P(x_n) = \frac{AqD_P}{L_P}\frac{n_i^2}{N_D}\left(e^{qV_A/kT}-1\right) \tag{3.7.10}$$

que numéricamente se expresa como:

$$I_N(-x_p) = -8.55\cdot 10^{-13}\ [\mathrm{A}] \qquad I_P(x_n) = -9.95\cdot 10^{-13}\ [\mathrm{A}] \tag{3.7.11}$$

donde hemos usado que:

$$D_N = 35.1\ [\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}] \quad D_P = 11.9\ [\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}] \quad L_N = 5.92\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{cm}] \tag{3.7.12}$$

$$L_P = 3.45\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{cm}] \quad n_i = 9.49\cdot 10^{9}\ [\mathrm{cm}^{-3}] \tag{3.7.13}$$

Veamos que la corriente total es:

$$I = I_0\left(e^{qV_A/kT}-1\right) = I_N(-x_p) + I_P(x_n) \qquad I_0 = Aq\left(\frac{D_N}{L_N}n_{p0} + \frac{D_P}{L_P}p_{n0}\right) \tag{3.7.14}$$

Con un resultado numérico de:

$$I = 18.5 \cdot 10^{-13} \text{ [A]} \tag{3.7.15}$$

Al tener un L_N y L_P bastante alto (de hecho del orden del tamaño del diodo) es normal que la representación gráfica sea bastante mala, y que no seamos capaces de ver esa tendencia a cero y a I_T de I_N e I_P. Usando las ecuaciones del diodo estrecho obtenemos los siguientes valores numéricos:

$$I_N(x_p) = -9.804 \times 10^{-13} \text{ [A]} \qquad I_P(x_n) = -1.015 \times 10^{-12} \text{ [A]} \tag{3.7.16}$$

$$I = -1.995 \times 10^{-12} \text{ [A]} \tag{3.7.17}$$

Con la siguiente representación gráfica:

3.7.2. Ejercicios 2

Partimos de una unión escalón NP realizada con un cristal semicondcutor de germanio (E_G = 0.66 eV, $m_e^* = 0.5$, $m_h^* = 0.37$) con $N_D = 10^{16}$ cm^{-3} y $N_A = 10^{15}$ cm^{-3}, en cada zona siendo la longitud de la zona N de 0.003 cm y la de la zona P de 0.002 cm y el área de 10^{-2} cm^2. La permitividad para el germanio es de 1.4337×10^{-12} F/cm, y el $n_i = 2.0 \times 10^{13}$ cm^{-3}, las movilidades de electrones y huecos son 3900 cm^2/(V·s) y 1900 cm^2/(V·s) respectivamente y $\tau_n = \tau_p = 10^{-6}$ s.

a) Para la situación de equilibrio, comprobar que no esté degenerado y calcular el potencial de contacto, el ancho de la región de vaciamiento y el campo eléctrico máximo.

b) Calcula los incrementos de los portadores minoritarios en los bordes de las zonas de vaciamiento para los voltajes -0.1 y 0.1. Representa gráficamente la distribución de los portadores minoritarios e indica razonadamente si se podría aplicar la hipótesis de bajo nivel de inyección para esas polarizaciones.

c) Calcula la corriete total y las componentes de corriente de electrones y huecos en la zona de vaciamiento para esas polarizaciones. Indica además la relación entre ellas. Representa gráficametne como varían las corrientes de electrones y huecos a lo largo de todo el dispositivo.

---

a) Para la situación de equilibrio comprobar que no está degenerado es sencillo, aunque necesitamos conocer la temeratura. La temperatura que tiene que haber para que nuestro gap sea $E_g = 0.66$eV es de aproximadamente $\sim$ 310K. ¿Cómo sabemos esto? Pues aplicando la ecuación de Varshini pero a la inversa. Nosotros usaremos 300K ya que es la temperatura que usamos en todos los ejercicios, y tampoco dista mucho de la temperatura real. Así pues, para 300K, veamos que no está degenerado ya que en la gráfica:

tal que $3k_B \cdot 300 = 0.078$ eV. Estamos lejos de que esté degenerado. Así pues:

$$V_{\text{bi}} = 0.26\text{eV} \qquad x_p = 6.51871 \cdot 10^{-5}\ [cm] \qquad x_n = 6.51871 \cdot 10^{-6}\ [cm] \tag{3.7.18}$$

El campo eléctrico máximo por otro lado:

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = -7284.73\ [\text{V/cm}] \tag{3.7.19}$$

que se deduce de la ecuación

$$\mathcal{E} = -\frac{qN_A}{K_S\varepsilon_0}x_p = -\frac{qN_D}{K_S\varepsilon_0}x_n \tag{3.7.20}$$

b) Los incrementos de portadores minoritarios en los bordes de las zonas viene dado por:

$$\Delta n = \frac{n_i^2}{N_A}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \qquad \Delta p = \frac{n_i^2}{ND}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \tag{3.7.21}$$

Así pues, los valores numéricos son:

$$V_A = 0.1\ [\text{V}] \qquad \Delta n = \ [\text{cm}^{-3}] \quad \Delta p = \ [\text{cm}^{-3}] \tag{3.7.22}$$

$$V_A = -0.1\ [\text{V}] \qquad \Delta n = \ [\text{cm}^{-3}] \quad \Delta p = \ [\text{cm}^{-3}] \tag{3.7.23}$$

Calculamos L_N y L_P para comprobar si tenemos que usar las ecuaciones del diodo estrecho:

$$D_N = 100.1\ [\text{cm}^2/\text{s}] \quad D_P = 49.2\ [\text{cm}^2/\text{s}] \tag{3.7.24}$$

$$L_N = 0.0100\ [\text{cm}] \quad L_P = 7.01 \times 10^{-3}\ [\text{cm}] \tag{3.7.25}$$

Como podemos ver, el tamaño del diodo es del tamaño de L_N, L_P. Consecuentemente tenemos que usar las ecuaciones del diodo estrecho. Tenemos que:

$$V_A = 0.1: \qquad x_p = 5.12090e-05[cm] \quad x_n = 5.12090e-06[cm] \tag{3.7.26}$$

$$V_A = -0.1: \qquad x_p = 7.665\,73 \times 10^{-5}\ [\mathrm{cm}] \quad x_n = 7.665\,73 \times 10^{-6}\ [\mathrm{cm}] \tag{3.7.27}$$

Como podemos ver en la siguiente imagen, la aproximación a baja inyección es suficientemente buena:

c) Calculamos la corriente total y las componentes en la siguiente imagen (usando las ecuaciones del diodo estrecho):

$$I_P(x_n) = qA\frac{D_P}{L_P}p_{n0}\coth\left(\frac{x_{1n}-x_n}{L_N}\right)\left(e^{qV_A/kT}-1\right) \tag{3.7.28}$$

$$I_N(x_p) = qA\frac{D_N}{L_N}n_{p0}\coth\left(\frac{x_{1p}-x_p}{L_N}\right)\left(e^{qV_A/kT}-1\right) \tag{3.7.29}$$

Tal que los resultados numéricos son:

$$V_a = 0.10\ [\mathrm{V}] \quad I_N(x_p) = 1.610 \times 10^{-3}\ [\mathrm{A}] \quad I_P(x_n) = 5.346 \times 10^{-5}\ [\mathrm{A}] \tag{3.7.30}$$

$$I_T = 1.663 \times 10^{-3}\ [\mathrm{A}] \tag{3.7.31}$$

$$V_a = -0.10\ [\mathrm{V}] \quad I_N(x_p) = -3.409 \times 10^{-5}\ [\mathrm{A}] \quad I_P(x_n) = -1.118 \times 10^{-6}\ [\mathrm{A}] \tag{3.7.32}$$

$$I_T = -3.52 \times 10^{-5}\ [\mathrm{A}] \tag{3.7.33}$$

3.7.3. Ejercicios 3

Enunciado ejercicio 3.

Solución ejercicio 3.

3.7.4. Ejercicio 4

Enunciado ejercicio 4.

Solución ejercicio 4.

3.7.5. Ejercicio 5

En una unión PN de silicio que en la zona de vaciamiento tiene $J_n = 25$ mA/cm^2 y $J_p = 7$ mA/cm^2 a $V_A = 0.5$ V. ($D_n = 21$ cm^2/s, $D_p = 10$ cm^2/s, $\tau_{p0} = \tau_{n0} = 5 \times 10^{-7}$ s), calcula y representa:

- El diagrama de bandas de energía para esa polarización.
- La concentración de portadores de cada tipo en todo el dispositivo.

El ejercicio 5:

- Nos dan los valores de J_N y J_P en la región de vaciamiento, cque vienen dadas por

$$J_N = q\frac{D_N}{L_N}n_{p0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) \qquad J_P = q\frac{D_P}{L_P}p_{n0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)$$

y como conocemos D_N, D_P, L_N, L_P y V_A, podemos despejar:

$$L_N = \sqrt{D_N\tau_n} = 0.32 \text{ cm} \qquad L_P = \sqrt{D_P\tau_p} = 0.22 \text{ cm} \tag{3.7.34}$$

$$n_{p0} = \frac{J_N}{q}\frac{L_N}{D_N}\frac{1}{\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)} = 9.6{\cdot}10^5\text{cm}^{-3} \qquad p_{n0} = \frac{J_P}{q}\frac{L_P}{D_P}\frac{1}{\left(e^{qV_A/kT} - 1\right)} = 3.9{\cdot}10^5\text{cm}^{-3}$$

Que como conocemos n_i a la temperatura de 300 K:

$$n_i = 10^{10} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$$

significa que podemos conocer N_A y N_D, tal que:

$$N_A = \frac{n_i^2}{n_{p0}} = 1.042 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3} \qquad N_D = \frac{n_i^2}{p_{n0}} = 2.569 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

y ahora podemos usar las siguientes ecuaciones para calcular los valores de E_c, E_i y E_v respecto E_F:

$$E_i|_P = kT\ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right) \quad E_c|_P = \frac{E_g}{2} + E_i + \frac{3}{4}kT\frac{m_n^*}{m_p^*} \quad E_v|_P = E_c|_P - E_g$$

Tal que:

$$E_i|_N = E_i|_P - V_{bi} + V_a \quad E_i|_N = E_i|_P - V_{bi} + V_a \quad E_i|_N = E_i|_P - V_{bi} + V_a$$

donde

$$V_{\text{bi}} = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) = 0.621 \text{ V}$$

y así $V_{\text{bi}}^{\text{eff}} = V_{\text{bi}} - V_A = 0.121$ V. Falta escribir:

$$x_n = 1.32 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \qquad x_p = 3.26 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \tag{3.7.35}$$

El diagrama de bandas con polarización $V_A = 0.5$ V

- La concentración de portadores en todo el dispositvo se calcula usando las siguientes ecuaciones, suponiendo un diodo ideal infinito:

$$n_p = n_{p0} + n_{p0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) e^{(x+x_p)/kT} \qquad n_n = N_D$$

$$p_p = N_A \qquad p_n(x) = p_{n0}\left(e^{qV_A/kT} - 1\right) e^{-(x-x_n)/kT}$$

En la región de vaciamiento suponemos que n y p son rectas que conectan los valores límites. La gráfica en el caso de polarización $V_A = 0.5$ V:

3.7.6. Ejercicio 6

Si tenemos una unión NP polarizada en directa, $V_A = 0.2$ V:

- Representar el diagrama de bandas de energía.
- Obtener el valor de la densidad de corriente de cada tipo de portador y representarla en todo el dispositivo.

Datos: $A = 2$ mm^2, $T = 300$ K, $E_{gap} = 1.42$ eV, $N_D = N_A = 10^{14}$ cm^{-3}, $\mu_n = 9000$ cm^2/Vs, $\mu_p = 450$ cm^2/Vs, $\tau_p = 20$ ns, $\tau_n = 10$ ns, $\varepsilon = 1.4337 \times 10^{-12}$ F/cm, $m_e/m_0 = 0.4$, $m_h/m_0 = 0.3$.

Hay que recordar que una unión np es igual que la union pn pero donde $x \longrightarrow -x$

- Usamos las siguientes ecuaciones para calcular los valores de E_c, E_i y E_v respecto E_F:

$$E_i|_P = kT \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right) \qquad E_c|_P = \frac{E_g}{2} + E_i + \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) \qquad E_v|_P = E_c - E_g$$

$$E_i|_N = E_i - V_{\text{bi}}^{\text{eff}} \qquad E_c|_N = E_c|_N - V_{\text{bi}}^{\text{eff}} E_v|_N = E_v|_N - V_{\text{bi}}^{\text{eff}}$$

donde hemos usado que ($K_S = 16.2$)

$$n_i = 2\left(\frac{kT(m_n^* m_p^*)^{1/2}}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \qquad V_{\text{bi}}^{\text{eff}} = V_{\text{bi}} - V_a \quad V_{\text{bi}} = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right)$$

$$n_i = 6.046 \times 10^6 \text{ cm}^{-3} \quad V_{\text{bi}} = 0.859 \tag{3.7.36}$$

$$D_N = 232.67 \text{ cm}^2/s \quad D_P = 11.63 \text{ cm}^2/s \quad L_N = 68.21 \text{ cm} \quad L_P = 15.25 \text{ cm} \tag{3.7.37}$$

$$x_n = 2.429 \times 10^{-4} \text{ cm} \qquad x_p = 2.429 \times 10^{-4} \text{ cm} \tag{3.7.38}$$

Así pues, el diagrama de bandas con polarización $V_A = 0.5$ V:

- Los valores de las intensidades en todo el dispositvo se calcula usando las siguientes ecuaciones:

$$\text{Zona P:} \quad I_N(x) = qA\frac{D_N}{L_N}\frac{n_i^2}{N_A}\left(e^{qV_A/kT}-1\right)e^{(x+x_p)/L_N} \qquad I_P(x) = I_T - I_N(x)$$

$$\text{Zona N:} \quad I_P(x) = qA\frac{D_P}{L_P}\frac{n_i^2}{N_D}\left(e^{qV_A/kT}-1\right)e^{(-x+x_n)/L_P} \qquad I_N(x) = I_T - I_P(x)$$

tal que:

$$I_T = qA\left(\frac{D_N}{L_N}\frac{n_i^2}{N_A}+\frac{D_P}{L_P}\frac{n_i^2}{N_D}\right)\left(e^{qV_A/kT}-1\right)$$

Y los valores numéricos:

$$I_P(x_n) = 2.045\times10^{-18}\,\text{C/s} \qquad I_N(x_p) = 9.146\times10^{-18}\,\text{C/s} \qquad I_T = 1.119\times10^{-17}\,\text{C/s} \tag{3.7.39}$$

Obteniendo la siguiente gráfica para $V_A = 0.2$ V:

3.7.7. Ejercicio 7

Si partimos de una unión PN de silicio, con el lado P dopado de forma gradual con $a = 10^{19}$ cm^{-4} y el lado $N_D = 3.0\times10^{14}$ cm^{-3} constante. Bajo condición de equilibrio, si el ancho de la zona de vaciamiento de la zona P es de 0.8 micras, calcular y representar el ancho total de la zona de vaciamiento, el campo eléctrico y el potencial de contacto.

Si suponemos que la densidad de carga es:

$$\rho(x) = \begin{cases} qax & -x_p < x < 0 \\ qN_D & 0 < x < x_n \end{cases}$$

El campo eléctrico viene dado por:

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{qa}{2K_S\varepsilon_0}\left[x^2 - x_p^2\right] & -x_p < x < 0 \\ \frac{qN_D}{K_S\varepsilon_0}\left[x - x_n\right] & 0 < x < x_n \end{cases}$$

Exigimos que el campo en $x = 0$ debe ser igual en ambos lados:

$$\frac{qN_D}{K_S\epsilon_0}x_n = \frac{qa}{2K_S\epsilon_0}x_p^2 \rightarrow x_n = \frac{ax_p^2}{2N_D} \tag{3.7.40}$$

donde hemos exigido que $\mathcal{E}(x_n) = 0$ y $\mathcal{E}(-x_p) = 0$. El potencial de contacto:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{qa}{6K_S\varepsilon_0}\left[x^3 - 3x_p^2x + A\right] & -x_p < x < 0 \\ \frac{qN_D}{2K_S\varepsilon_0}\left[x^2 - 2x_nx + B\right] & 0 < x < x_n \end{cases}$$

Para que $V(-x_p) = 0$ tendría que verificarse $A = 2x_p^3$. También se tiene que verficiar que $V(0)|_- = V(0)|_+$, y por tanto:

$$\frac{qaA}{6K_S\varepsilon_0} = \frac{qN_DB}{2K_S\varepsilon_0} \rightarrow B = \frac{2ax_p^3}{3N_D}$$

El valor del voltaje final:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{qa}{6K_S\varepsilon_0}\left[x^3 - 3x_p^2x + 2x_p^3\right] & -x_p < x < 0 \\ \frac{qN_D}{2K_S\varepsilon_0}\left[x^2 - 2x_nx + \frac{2ax_p^3}{3N_D}\right] & 0 < x < x_n \end{cases}$$

Sería interesante definir ahora el valor de V_{bi} y vr si coincide con $V(x_n)$. Tenemos pues que:

$$V_{\text{bi}} = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{x_paN_D}{n_i^2}\right) \tag{3.7.41}$$

Capítulo 4

El transistor bipolar de unión

Capítulo 5

El transistor MOSFET

Apéndice A

Apéndice

A.1. Densidad de Estados y Estadística de Fermi-Dirac

A.1.1. Niveles de energía

El comportamiento de los electrones viene determinado por la función de ondas del mismo, obtenida (a no ser que las energías de estos sean ultrarrelativistas) mediante la ecuación de Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{A.1.1}$$

Si tomamos que $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\Psi(\mathbf{r})$ donde E es la energía del estado tenemos que la ecuación se transforma en la llamada *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \tag{A.1.2}$$

En función del potencial que usemos para describir el comportamiento de los electrones obtendremos una teoría u otra. La *teoría de los electrones libres* es la mas sencilla de todas, ya que supone que $V(\mathbf{r}) = 0$, es decir, que los electrones no experimentan ningún tipo de potencial en el metal (ni con otros electrones, ni vibraciones, ni con los átomos...). Es evidente que una teoría que quisiera ser más realista debería incluir algún tipo de potencial, pero como veremos es suficiente como para predecir algunos valores experimentales (aunque sea en orden de magnitud). En ese caso la ecuación se transforma en:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \tag{A.1.3}$$

Que como podemos ver no es más que una ecuación de onda, por lo que la solución mas general puede ser descrita en función de exponenciales complejas

$$\Psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{A.1.4}$$

donde $\mathbf{k}$ es el vector de onda que debe verificar que:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{A.1.5}$$

Esta solución, aunque viola los principios de la mecánica cuántica (la integral en el el espacio de $|\Psi|^2$ es infinita, teniendo que ser 1) y no describe estados reales (energía y momento perfectamente definidos, partícula que podría estar en cualquier parte del universo con la misma probabilidad...), es bastante funcional. Si ahora al electrón lo encerramos en una caja de volumen $V = L_x L_y L_z$ y exigimos que la función de ondas sea igual en todo el borde $\Psi(0) = \Psi(L_i)$ $(i = x, y, z)$ tenemos que el momento se discretiza (ya no todos los valores son iguales), tal que:

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i \qquad n_i = 1, 2, 3 \ldots \tag{A.1.6}$$

para $i = x, y, z$. Supongamos de ahora en adelante que los 3 lados son iguales y que por tanto $V = L^3$. Como podemos ver esto significa que a un $\mathbf{k}_n$ concreto se le asocia un volumen en el espacio de los momentos k de volumen $8\pi^3/L^3$. En realidad a cada uno de estos volumenes podremos asociar dos estados de electron: uno con espín $\uparrow$ y otro con espín $\downarrow$. De este hecho podemos obtener un valor para el número de estados posibles $\mathcal{N}$ encerrados en una esfera de radio k_F en el espacio de momentos:

$$\mathcal{N} = 2 \times \frac{1}{8\pi^3/L^3} \iint_0^{k_F} k_F^2 \mathrm{d}k \mathrm{d}\Omega \tag{A.1.7}$$

En palabras esta ecuación se traduce como: el número de estados totales para dicha esfera es el volumen de la esfera entre el volumen al que asociamos un estado posible. De este modo tenemos que:

$$\mathcal{N} = \frac{V}{3\pi^2} k_F^3 \tag{A.1.8}$$

En el cero absoluto, los electrones tratarán de colocarse en los niveles con menos energía posible (es decir, con menor k), por lo que si en tenemos N partículas posibles (es decir, tenemos que asignar N estados posibles, tal que $\mathcal{N} \to N$ en la ec. anterior). Así el valor de k_F adquiere el significado de "máximo valor posible de k para un electrón", y tiene el valor de:

$$\boxed{k_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3}} \tag{A.1.9}$$

donde $n = N/V$ es la *densidad de partículas*. Lógicamente valores de $k > k_F$ no son posibles, ya que eso significaría que esa partícula tiene disponible un estado con menor energía que no está ocupando, lo cual es imposible si estamos en el cero absoluto. Entonces la superficie de la esfera citada antes adquiere un significado más profundo, ya que es la separación entre *los estados ocupados y desocupados* del sistema, denominándose **superficie de Fermi**. De aquí podemos deducir otros muchos términos (como la energía máxima, velocidad máxima...). A todos estos términos los llamamos "de Fermi". Así tenemos, en resumen:

- **Vector de onda de Fermi (3D):**

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (n \equiv N/V) \tag{A.1.10}$$

- **Vector de onda de Fermi (2D):**

$$k_F = \sqrt{2\pi n} \tag{A.1.11}$$

- **Energía de Fermi:**

$$\varepsilon_F \equiv \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \tag{A.1.12}$$

- **Velocidad de Fermi:**

$$v_F \equiv \sqrt{2\varepsilon_F/m} \tag{A.1.13}$$

- **Temperatura de Fermi:**

$$T_F \equiv \varepsilon_F/k_B \tag{A.1.14}$$

Ahora otra pregunta que nos podemos hacer es: ¿Cuantos estados hay en un intervalo de energías ε y $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$? Para calcularlos esto solo tenemos que saber cuantos estados hay entre k y $K + \mathrm{d}k$ y hacer el cambio de variable. Entonces en un intervalo ε y $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ habrá

$$\mathcal{N}(k + \mathrm{d}k) - \mathcal{N}(k) = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left((\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon)^{3/2} - (\varepsilon)^{3/2}\right)$$

si ahora $\mathrm{d}\varepsilon \longrightarrow 0$ tal que $\mathcal{N}(k + \mathrm{d}k) - \mathcal{N}(k) = \mathrm{d}\mathcal{N}$ tenemos que

$$\mathrm{d}\mathcal{N} = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left((\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon)^{3/2} - (\varepsilon)^{3/2}\right) = \frac{V}{3\pi^2}\varepsilon^{3/2}\left((1 + \mathrm{d}\varepsilon/\varepsilon)^{3/2} - (1)^{3/2}\right)$$

donde hemos usado que $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ y cogido el término lineal con $\mathrm{d}\varepsilon$, de tal modo que:

$$\mathrm{d}\mathcal{N} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\varepsilon^{3/2}V}{3\pi^2}\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon} \tag{A.1.15}$$

Si definimos la **densidad de estados** como $D(\varepsilon) = \mathrm{d}\mathcal{N}/\mathrm{d}\varepsilon$ tenemos que:

$$\boxed{D(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}} \tag{A.1.16}$$

Teniendo en cuenta que $2m/\hbar^2 = k_F^2/\varepsilon_F$, y que $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ tenemos que la densidad de estados se puede escribir como

$$D(\varepsilon) = \frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_F}\right)^{1/2} \tag{A.1.17}$$

De lo que se puede deducir la expresión de densidad de estados por unidad de volumen $d(\varepsilon) = D(\varepsilon)/V$. Teniendo en cuenta todo lo anterior no es muy difícil deducir que:

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{A.1.18}$$

que sólo es válido para temperaturas $T = 0$, ya que estamos asumiendo que la probabilidad de que el estado con $\varepsilon < \varepsilon_k$ esté ocupado es del 100 %. Sin embargo a temperaturas finitas esta probabilidad dependerá de una función llamada la función de Fermi, que como veremos en el siguiente apartado modificará sustancialmente esta ecuación.

A.1.2. Estadística de Fermi-Dirac

Dado un sistema de electrones libres (es decir, no están sometidos bajo ningún tipo de potencial), la probabilidad de que un estado con energía E esté ocupado viene dado por el factor de Fermi, también llamado **distribución de Fermi-Dirac**:

$$f_{FD}(E,T) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \tag{A.1.19}$$

donde μ es el llamado *potencial químico*, aunque en realidad la razón por la cual aparece en la ecuación es en candidad de constante de integración, de multiplicador de lagrange fruto de la derivación matemática. A bajas energías la función de Fermi se convierte en la función escalón, mientras que a altas temperaturas esta función escalón se va difundiendo. Como podremos ver esta estará relacionada con la energía de Fermi.

Figura A.1: Distribución de Fermi-Dirac.

Cuando $T \neq 0$ la probabilidad de que este ocupado un estado de energía $\varepsilon > \varepsilon_F$ ya no es cero, de tal modo que el número de estados viene dado por:

$$N = \int_0^\infty f_{FD}(\varepsilon,T) D(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon \tag{A.1.20}$$

Si $T = 0$ tenemos que la ecuación () se recupera verificándose que $\mu = \varepsilon_F$ dadas las definiciones previas. Sin embargo para temperaturas $T \neq 0$ no se verifica que sean iguales ($\mu(T \neq 0) \neq \varepsilon_F$). De hecho el valor de μ depende en última instancia de la ligadura (A.1.20), de tal modo que para $T \ll T_F$ se verifica que:

$$\mu(T) \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi T}{2T_F} \right)^2 \right] \tag{A.1.21}$$

que se deduce de la expansión de Sommerfeld.