Notas Teoria cuantica de campos

Daniel Vazquez Lago

11 de septiembre de 2024

Índice general

1

El campo de Klein-Gordon

1.1. Ecuación Klein-Gordon y sus soluciones

Una manera de tratar de combinar la mecánica cuántica y la relatividad especial es trabajar con las ecuaciones de orden pero abandonar la ecuación de Schödinger y tratar de construir una compatible con las simetrías relativistas. En la mecánica cuántica asociamos los operadores diferenciales con la energía y el momento:

$$\text{Energía:} E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{Momento:} \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla \tag{1.1}$$

En una teoría no relativista la relación de dispersión es $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$. Substituir los operadores momento y energia en esta relación de dispersión nos lleva a la ecuación de Schödinger $i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi$, donde $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$. Veremos ver que pasa al usar la relación dispersión relativista:

$$E^2 = c^4m^2 + c^2\mathbf{p}^2 \tag{1.2}$$

que pasa a ser

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^4m^2\phi - \hbar^2c^2\nabla^2\phi \tag{1.3}$$

donde ϕ es la *función de ondas*. Podemos expresar esta ecuación en términos relativistas si usamos $x^\mu = (ct, x^i)$ y el operador D'Alembert operador $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$ de tal modo que se convierte en:

$$\left(\Box + \frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \tag{1.4}$$

esta es la **ecuación de Klein-Gordon**.

1.2. Soluciones de ondas planas

Vamos a ver ahora las soluciones mas simples de las ecuaciones de Klein-Gordon, que no son otras que las ondas planas. Podemos ver que:

$$\phi(x) = Ne^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \tag{1.5}$$

donde N es el factor normalizador. Si substituimos esta ecuación en 1.4 tedremos que:

$$\frac{-E^2 + c^2\mathbf{p}^2 + c^4 m^2}{c^2\hbar^2}\phi = 0 \tag{1.6}$$

y por lo tanto que E está relacionada con p mediante la ecuación de dispersión relativista. El punto ahora es que tenemos dos tipos de soluciones para la energía:

$$E = \pm w_{\mathbf{p}} \qquad w_{\mathbf{p}} = \sqrt{c^4 m^2 + c^2\mathbf{p}^2} \tag{1.7}$$