

Notas Fisica del estado sólido

Daniel Vazquez Lago

17 de septiembre de 2024

Índice general

1. Estructura cristalina	5
1.1. Conceptos básicos	5
1.2. Tipos fundamentales de redes: Redes de Bravais	7
1.3. Empaquetamiento compacto	8
1.4. Intersticios o huecos estructurales	9
1.5. Defectos y desorden en los cristales	10
1.5.1. Defectos puntuales	11
1.5.2. Concentración de defectos térmicos puntuales en equilibrio	12
1.5.3. Defectos de línea	12
2. Red recíproca y difracción de rayos X	15
2.1. Red recíproca	15
2.2. Difracción	17
2.3. Factor de estructura	20
2.4. Diagramas de difracción	21

1

Estructura cristalina

Las sustancias cristalinas se caracterizan por una periodicidad espacial perfecta, que facilita enormemente la tarea de comprender y calcular sus propiedades físicas. Las sustancias cristalinas se encuentran comúnmente en forma de policristales (aglomerados de pequeñas cristales orientados desordenadamente llamados cristallitos o granos). Existe una categoría importante de sólidos, que no se tratará aquí denominados amorfos, como el vidrio común y muchos polímeros, que no pertenecen a los sólidos cristalinos, pues aunque poseen cierto orden de corto alcance carecen del orden de largo alcance característico de los cristales.

1.1. Conceptos básicos

En esta sección introduciremos las definiciones más importantes que usaremos a lo largo del tema.

Definición 1.1 (Red). Conjunto de puntos discretos del espacio con vectores posición dados por la combinación lineal:

$$\mathbf{r} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3 \quad (1.1.1)$$

donde los u_i barren *todos* los enteros. Los \mathbf{a}_i se denominan *vectores base primitivos*.

Definición 1.2 (Base atómica). conjunto de átomos que se asocia a todos y cada uno de los puntos de la red.

Definición 1.3 (Estructura cristalina o cristal). Es la combinación red+base atómica. Un ejemplo en 2D sería el representado por la figura.

Definición 1.4 (Celda unitaria primitiva). Es un volumen del espacio que por traslaciones en vectores de la red cubre todo el espacio (sin solapamientos). Una posible forma de construirla es por el paralelepípedo definido por los vectores base primitivos. La figura 1.1 muestra en la parte inferior dos posibles celdas unitarias con sus vectores bases asociados.

Definición 1.5 (Vectores base y celdas no primitivas). Vectores base *no primitivos*: son aquellos que generan la red por combinaciones lineales de la forma de la ecuación 1.1.1 pero

donde los u_i toman también valores no enteros. Un ejemplo es la celda cuadrada centrada que se muestra en la figura . Las celdas (unitarias) no primitivas correspondientes son siempre de mayor volumen que las primitivas por tener asociado más de un punto de red. Para algunos propósitos (por ejemplo, la *indexación* de máximos de difracción de rayos x que se verá en el Capítulo 2) la combinación red+base puede variarse, aunque sea a costa de aumentar el número de átomos de la base. En la figura 1.1 puede verse en la parte superior un conjunto de vectores base que no forman una celda primitiva, mientras en la parte inferior (e inferior izquierda) podemos ver vectores base que sí forman una celda primitiva.

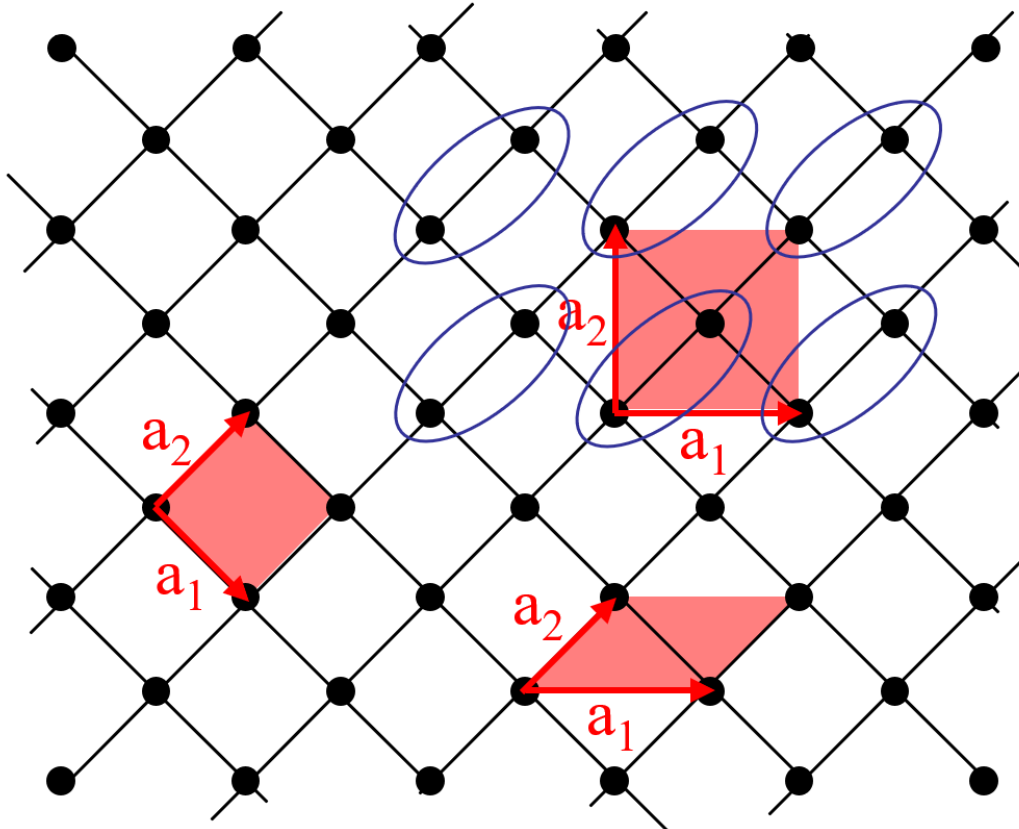


Figura 1.1: Ejemplos de vectores unitarios y sus correspondientes celdas unitarias.

Definición 1.6 (Primeras consecuencias). Para una red existe más de una elección de vectores base primitivos. Todas las celdas primitivas tienen el mismo volumen pues tienen asociado uno y sólo un punto de red. Todos los puntos de una red son indistinguibles en el sentido de que la red *se ve* igual desde cualquiera de sus puntos. También se puede decir que es invariante por traslaciones de vectores de red (*simetría de traslación*).

Definición 1.7 (Otras simetrías). Invaria por *inversión* ($\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$), *eje de rotación* de orden n (invariancia por giro del ángulo $2\pi/n$ alrededor del eje), *planos de simetría*, *centros de inversión*...

Definición 1.8 (Número de coordinación). Es la número de vecinos más próximos (misma distancia) a un punto cualquiera de la red. La misma noción se aplica a átomos cuando se trata de cristales.

Definición 1.9 (Celda de Wigner-Seitz). Se construye de la siguiente forma: trazar segmentos que conectan a un punto dado de la red con todos sus vecinos próximos; trazar los

planos mediatrices a dichas líneas. La región así encerrada (poliedro en 3D, polígono en 2D) es la celda de Wigner-Seitz. Ver el ejemplo 2D de la Figura 1.2. La celda de Wigner-Seitz es primitiva y contiene todas las simetrías de la red.

Definición 1.10 (Familia de planos reticulares). Conjunto de planos paralelos y equiespaciados que contienen todos los puntos de la red.

Definición 1.11 (Número de defectos de Schottky). (vacantes) en un cristal a temperatura T :

$$n \approx N e^{-\epsilon_v/k_B T} \quad (1.1.2)$$

N es el número de átomos y ϵ_v la energía necesaria para formar una vacante. Se desarrolla mejor en los apartados 1.5.1 y 1.5.2.

Definición 1.12 (Número de defectos de Frenkel). (vacantes-átomos intersticiales) en un cristal a temperatura T :

$$n \approx \sqrt{NN'} e^{-\epsilon_F/k_B T} \quad (1.1.3)$$

N es el número de átomos, N' es el número de intersticios, y ϵ_F la energía necesaria para formación de un defecto de este tipo. Se desarrolla mejor en los apartados 1.5.1 y 1.5.2.

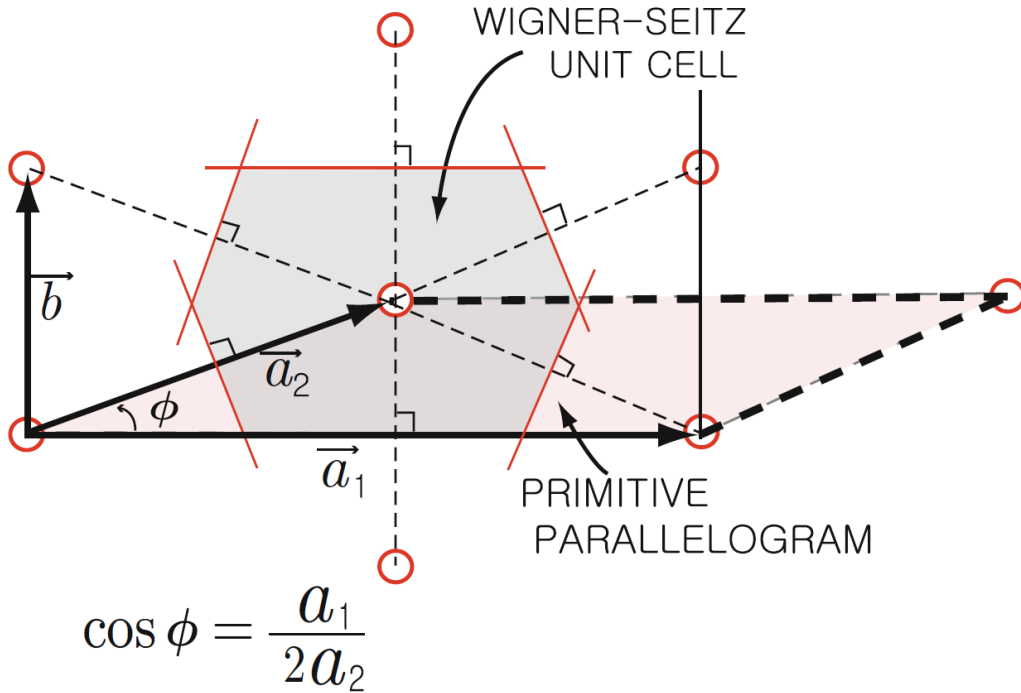


Figura 1.2: celda de Wigner-seitz 2D.

1.2. Tipos fundamentales de redes: Redes de Bravais

En la figura 1.3 podemos ver los 14 tipos de redes, llamadas **redes de Bravais**. Solo las celdas etiquetadas como *simples* son primitivas. Estos 14 tipos pueden agruparse a su vez en los 7 *sistemas cristalinos* indicados en la tabla 1.1 (cuando escribimos $a = b = c$ (o $a_1 = a_2 = a_3$) nos referimos a que todos los lados son igual de largos).

Sistema cristalino	Simetría característica	Número de redes de Bravais	Características de la celda unitaria
Triclínico	Ninguna	1 (Simple)	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
Monoclínico	1 eje de rotación binario (n=2)	2 (Simple, centrada en las bases)	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
Ortorrómbico	2 ejes binarios (n=2) mutuamente perpendiculares	4 (Simple, Centrada en las bases, Centrada en el cuerpo, Centrada en las caras)	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	1 eje cuaternario (n=4)	2 (Simple, Centrada centrada en el cuerpo)	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Cúbico	4 ejes cuaternarios (n=4) perpendiculares entre sí	3 (Simple, Centrada en el cuerpo, Centrada en las caras)	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Hexagonal	1 eje senario (n=6)	1 (Simple)	$a = b \neq c$ $\alpha = 120^\circ$ $\beta = \gamma = 90^\circ$
Romboédrica	1 eje ternario (n=3)	1 (Simple)	$a = b = c$ $120^\circ > \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$

Cuadro 1.1: Redes de Bravais en función del sistema cristalino.

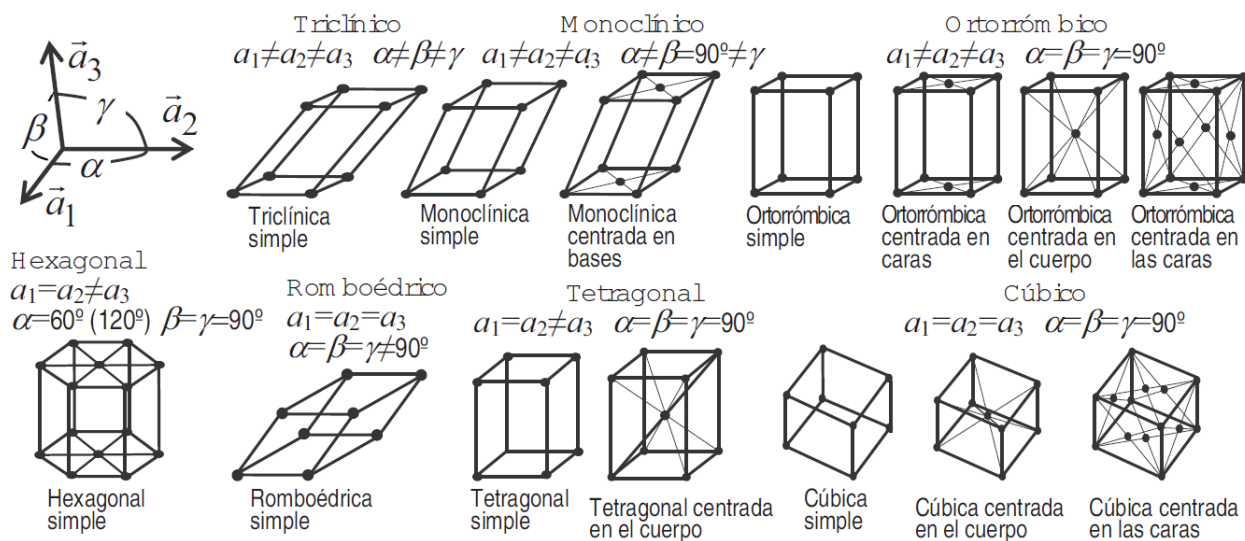


Figura 1.3: celdas unitarias de las 14 posibles redes de Bravais.

1.3. Empaquetamiento compacto

Una pregunta interesante es la de cuáles son las estructuras (cristalinas) más compactas que se pueden construir con esferas iguales. Primero se formaría una capa A de máxima compacidad en la que la que cada esfera está en contacto con otras seis (círculos continuos de la figura 1.4, parte superior). Una segunda capa B idéntica se situaría encima de la primera, ocupando la mitad de los huecos intersticiales de la capa A. Una tercera capa se puede añadir de dos maneras: sobre los huecos de la primera capa no ocupados por la segunda, dando lugar a la secuencia ABCABC..., o sobre la vertical de las esferas de la primera capa generando la secuencia ABABAB...

En el primer caso la estructura resultante es una *fcc*, donde las capas de que hablamos son

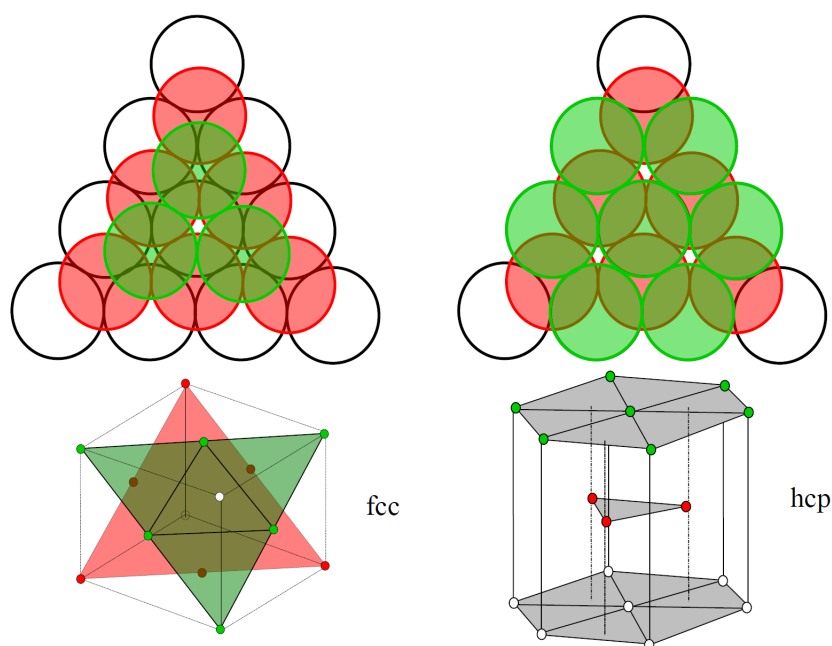


Figura 1.4: Empaquetamiento compacto.

las perpendiculares a la diagonal del cubo (figura 1.4, parte inferior izquierda). En el segundo caso las capas A,B se corresponden con los planos basal e intercalado, respectivamente, de una estructura diagonal compacta (*hcp*) (figura 1.4 parte inferior derecha). Se describe como un red hexagonal (capas A) con una base dos átomos (capas B). En ambas estrucutras el número de coordinación es 12.

1.4. Intersticios o huecos estructurales

Muchos compuestos cristalinos se pueden entender mejor si se conocen los huecos estructurales (entendiendo esto por las mayores oquedades o intersticios entre átomos) asociados a las estructuras básicas. Ilustraremos esto con las redes del sistema cúbico. Ilustraremos esto con la figura 1.5.

En la red *fcc* los mayores huecos son octaédricos, de radio $0,41R$. Hay tantos huecos octaédricos como átomos, situándose en los centros de los cubos y de las aristas. Hay también huecos tetraédricos de radio $0,22R$. Hay el doble de número de huecos tetraédricos que de átomos. Así, el NaCl es descriptible como una *fcc* de iones Cl^- en cyos intersticios octaédricos se sitúan los iones de Na^+ . También el diamante o la blenda de cinc se pueden considerar como una estructura *fcc* (de C ó S) en la que la mitad de los huecos tetraédricos están ocupados por los átomos de C o de Zn, respectivamente.

En la red *bcc* existen 6 huecos octaédricos (distorsionados) por celda, situados en los centros de las caras y de las aristas. Sin embargo, los mayores intersticios se dan en los 12 tetaédricos (también distorsionados) por celda: su radio es $0,29R$. Como un ejemplo de apliación, digamos que la gran movilidad de los iones Ag^+ en el AgI, un excelente elctrólito sólido usado en pilas de estado sólido, proviene de que los 2 iones Ag^+ por celda se distribuyen estadísticamente entre las 12 posiciones tetraédricas de la red *bcc* que forman los iones I^- saltando fácilmente de unas a otras.

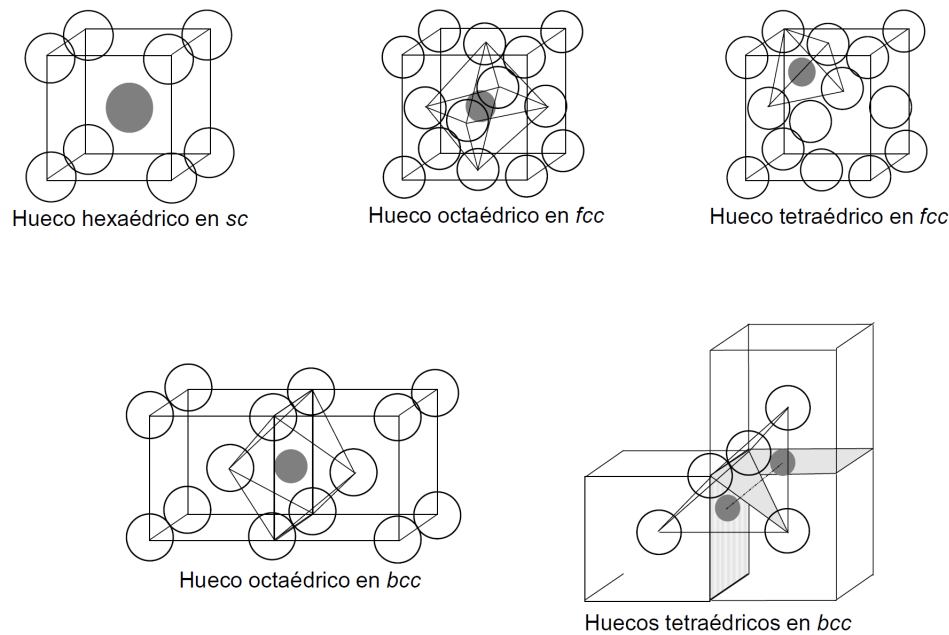


Figura 1.5: Localización de algunos huecos.

1.5. Defectos y desorden en los cristales

El cristal perfecto tal como se ha introducido no existe, sino que posee varias clases de imperfecciones o defectos que suelen clasificarse en cuatro clases atendiendo a su dimensión, es decir, su número de dimensiones espaciales en las cuales las alteraciones de la estructura se extienden a distancias (mucho) mayores que el parámetro de red, tal y como se indica en la tabla.

Defecto	Descripción	Ejemplos	Origen
Puntual	Alteración localizada en puntos aislados del cristal. Su extensión no supera en ninguna dirección más de una o unas pocas veces el parámetro de red.	<ul style="list-style-type: none"> - Vacantes - Átomos intersticiales - Impurezas sustitucionales/intersticiales - Huecos dobles, triples, etc. 	<ul style="list-style-type: none"> - Térmico - Irradiación - Desviaciones de la estequiometría - Deformación plástica
Lineal	Alteración en 1 dirección muchas veces el parámetro de red	<ul style="list-style-type: none"> - Dislocaciones - Cadenas de defectos puntuales 	<ul style="list-style-type: none"> - Proceso de crecimiento - Deformación plástica
Superficial	Alteración en 2 direcciones muchas veces el parámetro de red	<ul style="list-style-type: none"> - Bordes de granos - Maclas - Superficies del cristal 	<ul style="list-style-type: none"> - Proceso de crecimiento - Deformación plástica - Impurezas en la masa fundida
Espacial	Alteración en las 3 direcciones muchas veces el parámetro de red	<ul style="list-style-type: none"> - Poros - Inclusiones de otra fase 	Ídem

Cuadro 1.2: Clasificación de los principales defectos en cristales.

1.5.1. Defectos puntuales

El defecto puntual más simple es la vacante: ausencia de un átomo en su posición de la red (defecto de Schottky). Se forman cuando, debido a la agitación térmica, algunos átomos de la capa más próxima a la superficie saltan a ésta. Este hueco emigra por el interior del cristal pues se necesita poca energía para que un átomo vecino se mueva a una vacante, dejando su propio sitio vacío. Los cristales iónicos, donde las vacantes se forman a pares para mantener la neutralidad eléctrica, deben su débil conductividad [$\sigma \approx 10^{-6}(\Omega m)^{-1}$ vs $10^8(\Omega m)^{-1}$ de los metales] a esta movilidad de sus átomos. Otro tipo de defecto puntual (térmico) es el defecto de Frenkel, que es un átomo que ha abandonado el nudo de la red y que se aloja en un intersticio. Se trata en realidad de la combinación de una vacante y un átomo intersticial.

Los defectos de Schottky o las impurezas sustitucionales se encuentran de ordinario en los cristales de empaquetamiento denso (*fcc* o *hcp*), en los cuales el alojamiento de átomos en los intersticios es difícil, mientras que los defectos de Frenkel o las impurezas intersticiales suelen formarse en los cristales de empaquetamiento menos denso (diamante), aunque, en el caos de la adición de impurezas, el tipo de defecto que se forme depende del tamaño del átomo de impureza. Por ejemplo, cuando se carburiza hierro (*bcc*), el carbono, por su pequeño tamaño, se difunde hacia el interior intersticialmente. En cambio, las impurezas con que se dopan los semiconductores (diamante) se sitúan en las posiciones regulares. Otro ejemplo son las aleaciones. Así, el bronce no es sino el Cu metálico en el que una pequeña proporción de sus átomos ha sido sustituida por átomos de Sn, constituyendo una solución sólida.

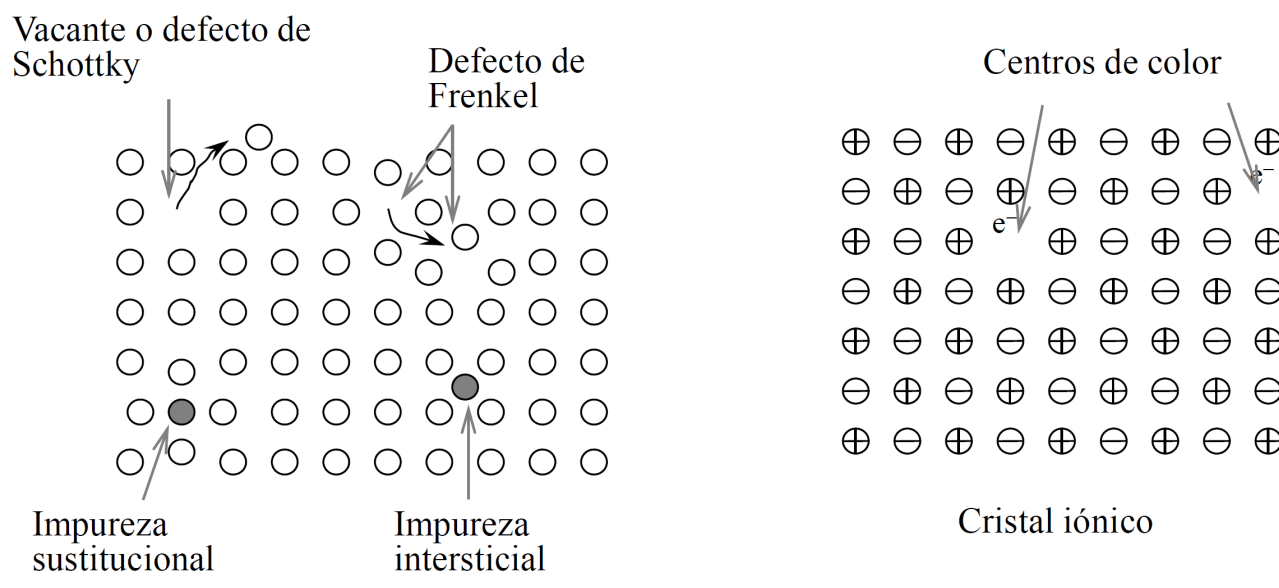


Figura 1.6: Defectos puntuales.

En los cristales iónicos también los electrones pueden participar en la formación de defectos, como los llamados *centro de color* (en los haluros alcalinos, por ejemplo), donde un hueco aniónico (ausencia de un ion negativo) atrapa a un electrón libre. El electrón, así atrapado, tiene un espectro de niveles similar al de los niveles atómicos. Así, este centro F hace que aparezca una banda de absorción en la *región visible* del espectro. A esto se debe que un cristal de haluro alcalino incoloro se coloree cuando se fuerza la aparición de huecos aniónicos por irradiación con rayos x o γ .

1.5.2. Concentración de defectos térmicos puntuales en equilibrio

La formación de defectos puntuales requiere un aporte de energía al cristal proporcional a la energía de enlace (así, por ejemplo, la energía de formación de un hueco en el Ge es ~ 2 eV). Sin embargo, a temperaturas relativamente altas resulta energéticamente rentable la existencia de defectos. Esto se debe a que la formación de defectos puntuales no sólo aumenta la energía interna, E , del cristal, sino que también aumenta su entropía, S , de forma que a una temperatura T la energía libre, $F = E - TS$, es mínima para una cierta concentración, n , de defectos.

Supóngase que hay un sólo tipo de defectos, por ejemplo de Schottky. Si ϵ_v es la energía para formar una vacante, la necesaria para formar n , aisladas y no interaccionantes, será $n\epsilon_v$. La entropía (de configuración) es $S = k_B \ln \Gamma$, donde Γ es el número de microestados compatibles con el macroestado, en este caso, simplemente el número de maneras en que n vacantes pueden disponer entre N nudos. Así:

$$S = k_B \ln \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (1.5.1)$$

Usando la fórmula de Stirling: $\ln x! \approx x(\ln x - 1)$, para $x \gg 1$, la energía libre se escribe

$$F = n\epsilon_v - k_B T [N \ln N - (N-n) \ln(N-n) - n \ln n] \quad (1.5.2)$$

En equilibrio térmico, $(\partial F / \partial n)_T = 0 \Rightarrow \epsilon_v = k_B T \ln[(N-n)/n]$, que para $n \ll N$ permite despejar

$$n \approx N e^{-\epsilon_v / k_B T} \quad (1.5.3)$$

Como ejemplo numérico, para $T = 1000\text{K}$ y $\epsilon_v \approx 1$ eV se tiene que $n/N \approx 10^{-5}$. Análogamente, se tratan los defectos de Frenkel. En este caso hay que considerar no sólo las posibilidades de disponer de n vacantes entre N nudos, sino también las posibilidades para disponer de n átomos entre N' intersticios $\Gamma = \frac{N!}{(N-n)!n!} \frac{N'!}{(N'-n)!n!}$. Por lo que el número de defectos en el equilibrio en este caso es:

$$n \approx \sqrt{NN'} e^{-\epsilon_F / k_B T} \quad (1.5.4)$$

donde ϵ_F es la energía necesaria para la formación de un defecto de Frenkel.

1.5.3. Defectos de línea

En la figura 1.7 se representan un ejemplo del llamado defecto lineal. Se trata de una dislocación en arista, también llamada dislocación de borde y de una dislocación helicoidal. La dislocación de borde se ha producido como resultado del desplazamiento en una distancia atómica de una parte del cristal, la derecha con respecto al plano OMN, mientras que la mitad izquierda permanece inmóvil. Como se puede ver, a p planos atómicos situados debajo del plano de desplazamiento corresponden $p+1$ planos por encima de dicho plano. El límite dentro de la región que ha deslizado y la inmóvil se llama línea de dislocación. Cerca de ésta el cristal está muy deformado. Todo ocurre como si se hubiera removido del cristal un semiplano que termina en la línea de dislocación (también puede pensarse que se añade un semiplano extra). Convencionalmente, la dislocación en arista se designa por el símbolo \perp , que apunta hacia el semiplano extra.

Existe una importante relación entre dislocaciones y ciertas propiedades mecánicas como la deformación plástica, que aquí solo se tratan someramente. Por ejemplo, en la figura 1.8, para trasladar la dislocación de un extremo a otro solo se requiere un desplazamiento insignificante

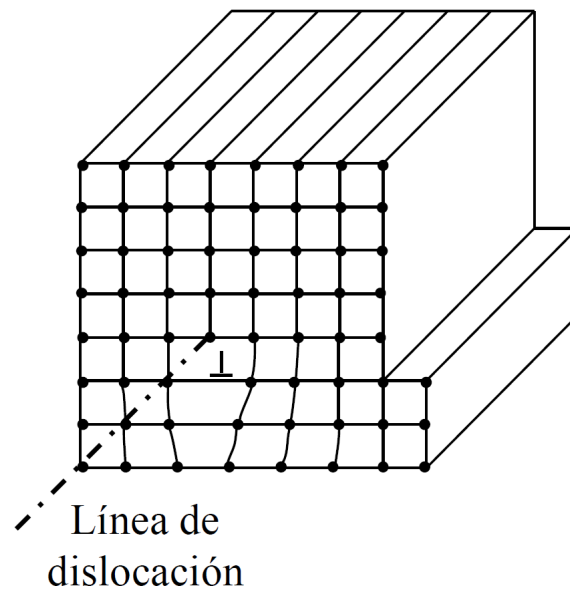


Figura 1.7: Defectos de línea: línea de dislocación.

de los átomos. Una analogía es la arruga en una alfombra: la arruga se mueve más fácilmente que toda la alfombra. De esta forma se puede calcular que valores muy bajos de las tensiones aplicadas a un cristal son suficientes para iniciar una deformación plástica, como en efecto se observa experimentalmente.

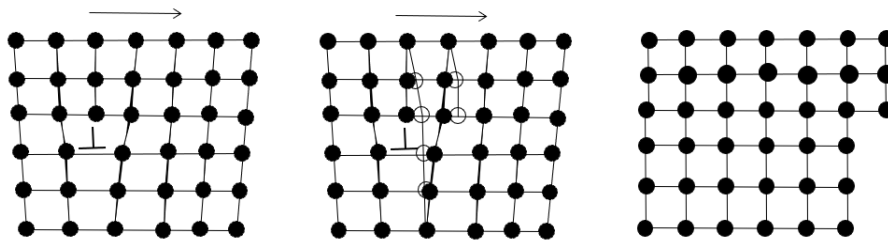


Figura 1.8: Desplazamiento de una dislocación bajo fuerza de cizalla.

2

Red recíproca y difracción de rayos X

El objetivo es estudiar cómo se utiliza la difracción de ondas por el cristal para determinar el tamaño de la celda, la posición de los átomos y la distribución de electrones dentro de la celda. Las radiaciones con longitud de onda λ del orden la constante de red a (algunos \AA), ven la estructura atómica del cristal de modo que cada átomo en el cristal es un (re)emisor independiente. La onda difractada depende de todas las posiciones atómicas pues se trata de una *interferencia interna* que es constructiva para ciertas direcciones de salida. A partir de la observación experimental de las *direcciones de máximo* se obtiene importante información de la estructura del cristal. La radiación más utilizada son los rayos x (con $\lambda \sim a$) algunas de cuyas limitaciones son la dificultad de detectar elementos ligeros como el H, así como diferenciar entre átomos de número atómico próximo. Los electrones, por su menor penetración (interaccionan fuertemente), se utilizan para sondear superficies o capas delgadas. Los neutrones son utilizados para localizar el H en sólidos y sistemas biológicos y el estudio de estructuras magnéticas (gracias al espín).

2.1. Red recíproca

La *red recíproca* es una red asociada a la red directa o real y que desempeña un papel fundamental en la teoría de la difracción, el estudio de las funciones de onda electrónicas cristalinas, etc. Conjunto de \mathbf{k} que hacen que $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ sea periódica en \mathbf{R} .

Concepto. Considérese un conjunto de puntos que consituyen una red de Bravais, es decir, invariantes en conjunto por traslaciones en *vectores de red*, $\mathbf{R} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3$. Una red es una estructura *multiperiódica* porque tiene periodicidades espaciales distintas según las direcciones. Una manera de establecerlas cuantitativamente es preguntarse cuáles son las ondas periódicas en la red; es decir, que vectores de onda \mathbf{k} satisfacen:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{R})} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \iff e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} = 1 \iff \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} = 2\pi \times \text{entero} \quad (2.1.1)$$

La condición 2.1.1 exige que \mathbf{k} sea de la forma

$$\mathbf{k} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3 \quad (2.1.2)$$

con los v_i enteros y los \mathbf{b} cumpliendo que

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij} \quad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Es posible obtener una expresión para los \mathbf{b}_i a partir de unos vectores base primitivos \mathbf{a}_i de partidad, pues 2.1.3 lo verifican los vectores dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_3 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Los vectores de la forma 2.1.4, que se denotarán de ahora en adelante por \mathbf{G} forman una red llamada *red recíproca*. Destacamos que la celda de Wigner-Seitz de la red recíproca se denomina *primera zona de Brillouin* (PZB).

La obtención de redes recíprocas asociadas a redes directas exige trabajar con vectores base primitivos pues sólo entonces la ecuación 2.1.4 es válida. Como ejemplo, considérense las tres redes del sistema cúbico. Denotando por $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ los versores de las tres aristas del cubo convencional de arista a , unos vectores base primitivos son:

<i>sc</i>)	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$	$\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$	$\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$
<i>bcc</i>)	$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$	$\mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$	$\mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$
<i>fcc</i>)	$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$	$\mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})$	$\mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$

Aplicando ahora las relaciones 2.1.4 a los vectores base anteriores es fácil deducir que la red recíproca de la *sc* es otra *sc* de *constante de red* $2\pi/a$; la red recíproca de la *bcc* es una red *fcc* con *constante de red* $4\pi/a$; la de la *fcc* es una *bcc* con *constante de red* $4\pi/a$.

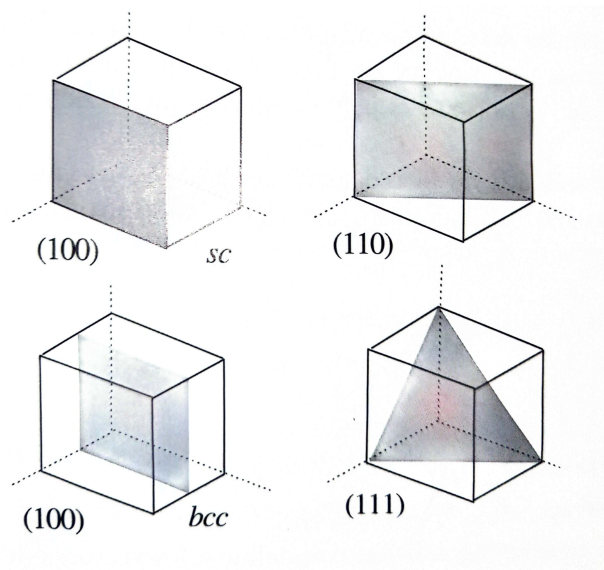


Figura 2.1: Algunos planos reticulares para las redes cúbica simple (*sc*) y centrada en el cuerpo (*bcc*) y sus índices de Miller.

Definición 2.1 (Sistemas de planos reticulares: *índices de Miller*). . Por una familia o sistema de planos reticulares se entiende el conjunto de planos paralelos, equiespaciados, cada uno con el mismo número de puntos de red por unidad de área, que en conjunto contienen a todos los puntos de la red. A cada familia de planos se la hace corresponder tres índices como sigue: se toma cualquiera de los planos que no pase por el origen de coordenadas y se hallan los recíprocos de sus intersecciones sobre los ejes en unidades de las constantes de red a, b, c . La terna de números primos entre sí que están en la misma relación se denomina *índices de Miller* (hkl). En el caso del sistema cúbico (ver figura 2.1) los índices se entienden referidos a los ejes convencionales.

Propiedades de la red recíproca. Un resultado geométrico interesante es el siguiente: para cualquier familia de *índices de Miller* (hkl) separados por una distancia d , el vector de la red recíproca \mathbf{G}_0 de componentes (hkl) es perpendicular al sistema de planos y verifica que

$$|\mathbf{G}_0| = \frac{2\pi}{d} \quad (2.1.5)$$

Inversamente, para cualquier vector de la red recíproca \mathbf{G} existe una familia de planos reticulares separados d , perpendiculares a \mathbf{G} y tal que el vector de la red recíproca más corto paralelo a \mathbf{G} verifica $|\mathbf{G}_0| = 2\pi/d$. Una aplicación de este resultado es que el cálculo de la interdistancia d entre planos adyacentes de una familia de planos se convierte en el cálculo de vectores de una red recíproca. Por ejemplo, en un *sistema cúbico simple* sabemos que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\hat{\mathbf{i}} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\hat{\mathbf{j}} \quad \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{a}\hat{\mathbf{k}}$$

son vectores primitivos de la red recíproca, por lo que $\mathbf{G} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3$, siendo h, k, l primos entre sí (esto es, no tienen un mínimo común múltiplo). Entonces $G_0 = \frac{2\pi}{a}\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \Rightarrow d = a/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$.

Esto a su vez permite determinar de forma sencilla densidades planares: la densidad de puntos (puntos por unidad de área) σ de un plano está relacionada con la densidad de la red ρ por $\sigma/d = \rho$, y de aquí se puede determinar σ a partir de ρ y d . Otra propiedad útil de la red recíproca es que está relacionada con las magnitudes periódicas de la red. Un ejemplo puede ser la concentración electrónica $n(\mathbf{r})$.

2.2. Difracción

Sea una onda plana $e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ incidente sobre un cristal. Vamos estudiar la amplitud de la onda dispersada en la dirección \mathbf{k}' suponiendo *dispersión elástica* ($|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$)

$$A_{\text{salida}} \propto \sum_{m,n} f_{mn} e^{i\Delta\phi_{mn}} \quad (2.2.1)$$

siendo $\Delta\phi_{mn} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot d_{mn}$ la diferencia de fase entre la onda reemitida por un centro dispersor (m) y otro (n) a d_{mn} del primero. La suma (m, n) a todos los centros dispersores puede hacerse sumando a todas las celdas en *posiciones de red* \mathbf{R}_n y a todos los átomos de la base en posiciones \mathbf{r}_j dentro de cada celda.

Según se indica $d_{mn} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_j$ con lo cualquiera

$$A_{\text{salida}} \propto \sum_{n,j} f_j e^{-i(\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_j) \cdot \Delta\mathbf{k}} = \sum_j f_j e^{-i\mathbf{r}_j \cdot \Delta\mathbf{k}} \sum_n^{\text{base}} e^{-i\mathbf{R}_n \cdot \Delta\mathbf{k}} \quad (2.2.2)$$

con $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. A f_j es el llamado *fator de forma atómico*, que da cuenta del distinto *poder dispersor* de los átomos de la base. El máximo de A_{salida} lo marca el segundo factor que suma

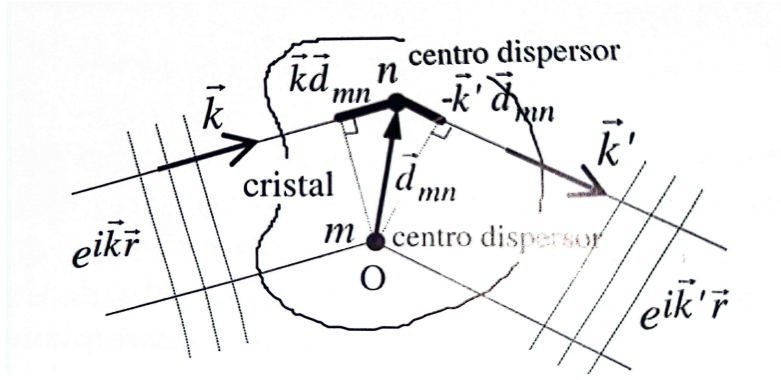


Figura 2.2: Diferencia de camino recorrido por las ondas dispersadas por dos centros m,n separados d_{mn} .

a toda la red, pues es una suma del orden de 10^{23} términos frente a unos pocos del primero. Este máximo se alcanza con la condición de que

$$\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n = 2\pi \times \text{entero} \quad (2.2.3)$$

para cualquier vector de red \mathbf{R}_n . La interpretación es que todas las celdas (son las celdas las que están concetadas por vectores de red) deben reemitir en fase para que la suma sea máxima.

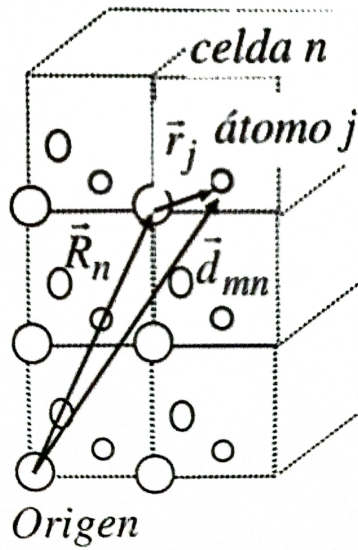


Figura 2.3: Posición de los centros dispersores de cada celda n en posición \mathbf{R}_n .

La condición 2.2.3 para $\Delta \mathbf{k}$ es precisamente la definición de red recíproca. Así pues, el resultado básico es que para que haya máximo de difracción (interferencia constructiva) se debe satisfacer

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{G} \quad (2.2.4)$$

o bien $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}$. Elevando la ecuación 2.2.4 y teniendo en cuenta que $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ es inmediato ver que esta condición se puede escribir en función del vector de ondas de la radiación incidente y de los vectores de la red recíproca del cristal: $2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} + |\mathbf{G}|^2 = 0$. Reemplazando \mathbf{G} por $-\mathbf{G}$ en esta expresión, la condición de difracción es:

$$2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} = |\mathbf{G}|^2 \iff \mathbf{k} \cdot \mathbf{G} = \frac{1}{2}|\mathbf{G}|^2 \quad (2.2.5)$$

y la dirección en la que se observa el máximo es entonces $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{G}$.

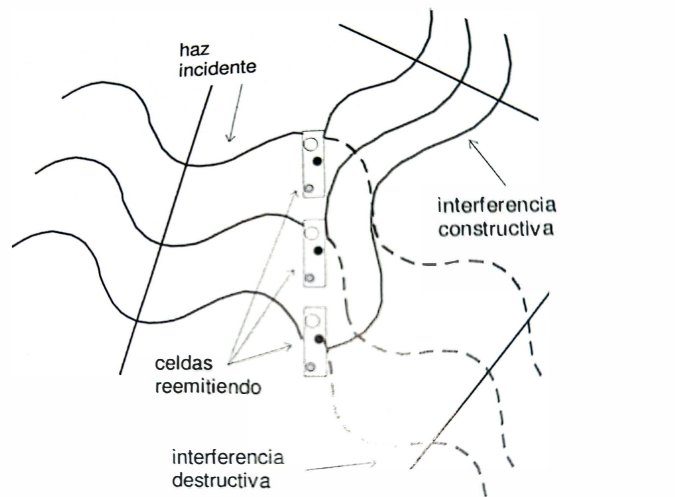


Figura 2.4: Reemisión de las celdas en fase o no según la dirección considerada

Llamando *plano Bragg* a aquel que es mediatriz a cualquier vector de red de la red recíproca, la interpretación de 2.2.6 es que se da la condición de difracción para los índices \mathbf{k} incidentes tales que, con origen en un punto cualquiera de la red recíproca su extremo caiga sobre un plano de Bragg. En particular, lo anterior es válido para la frontera de la *PZB* por estar formada por planos de Bragg.

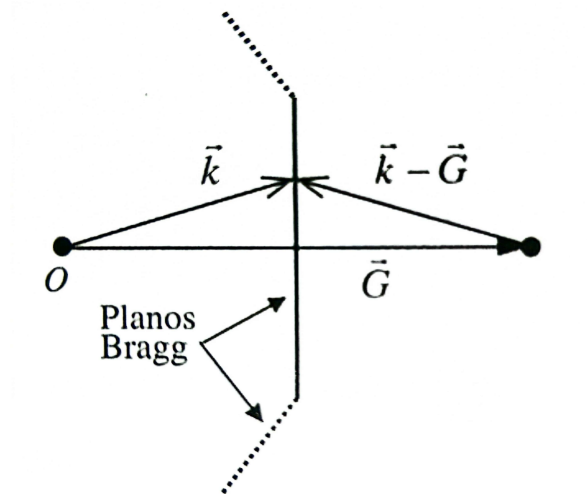


Figura 2.5: Equivalencia geométrica de la condición de difracción dada por la Ec. 2.2.6.

Otra formulación equivalente de la condición de difracción es la llamada **ley de Bragg** (2013), que admite que la radiación sufre una reflexión especular en los distintos planos reticulares de modo que sólo si las reflexiones de dos sucesivos planos están en fase se observará máximo de difracción. Es muy fácil de ver que la diferencia de caminos entre planos sucesivos es de $2d \sin \theta$ por lo que esta cantidad deberá ser múltiplo entero de longitudes de onda λ , es decir,

$$n\lambda = 2d \sin(\theta) \quad (2.2.6)$$

La equivalencia de la ley de Bragg (ecuación 2.2.6) con la formulación más general de las ecuaciones 2.2.3 y 2.2.4 se deduce la correspondencia vista entre vectores de la red recíproca y

sistemas de planos reticulares. En efecto, el vector \mathbf{G} a que hace referencia 2.2.4 de componentes $(h'k'l')$ no necesariamente primos entre sí, verifica $G = 2k \sin \theta$. Sea ahora \mathbf{G}_0 el vector de la red recíproca paralelo a \mathbf{G} más corto, que debe tener componentes (hkl) primas entre sí (por no haber otro más corto), y que verifica $\mathbf{G} = n\mathbf{G}_0$ (en componentes $h' = nh, k' = nk, l' = nl$). Como $G_0 = 2\pi/d$ (ecuación 2.1.5), al sustituir resulta $n2\pi/d = 2k \sin(\theta) \Rightarrow n\lambda = 2d \sin(\theta)$.

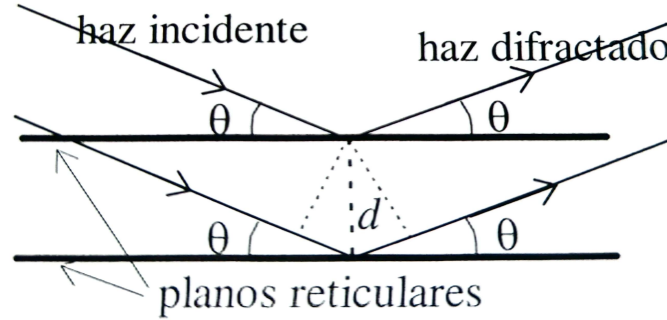


Figura 2.6: Diferencia de camino recorrido por los haces reflejados especularmente por dos planos reticulares consecutivos.

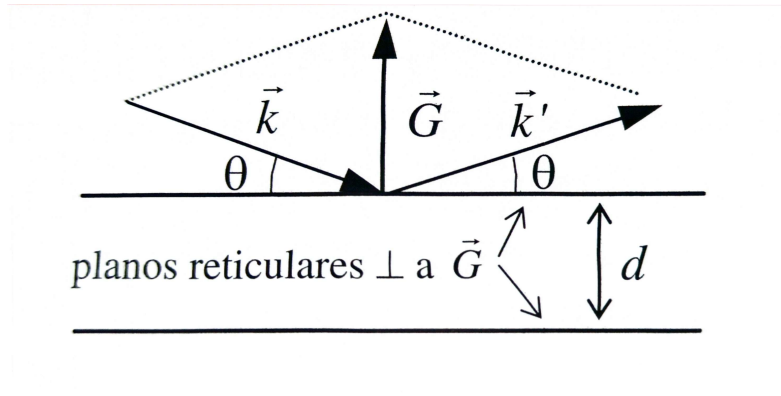


Figura 2.7: Correspondencia entre vectores de la red recíproca \mathbf{G} y sistemas de planos de la red directa.

2.3. Factor de estructura

Se trata de precisar ahora la intensidad de los distintos máximos de difracción. En condición de máximo, la amplitud dispersada (dirección $\hat{\mathbf{k}}'$) es por 2.2.2 y 2.2.3, viene dada por

$$A_{\text{salida}} \propto N \sum_j^{\text{base}} f_j e^{-i\mathbf{r}_j \cdot \Delta \mathbf{k}} = N S_{\mathbf{G}} \quad (2.3.1)$$

siendo N el número de celdas. El sumatorio denotado por $S_{\mathbf{G}}$ representa una *suma interferencial dentro de una celda* y se denomina *factor de estructura de la base*.

Para bases poliatómicas puede ocurrir que algunos máximos de difracción permitidos por la red estén prohibidos por la base atómica ($S_{\mathbf{G}} = 0$), lo que proporciona una valiosa información sobre su estructura. Por ejemplo, considerando la cúbica *bcc* (monoatómica) como una *sc* con base, están prohibidas las reflexiones (hkl) que verifican $h + k + l = \text{entero impar}$; si se trata de

una *fcc* son nulas las reflexiones en que h, k y l tienen *distinta paridad*. Solo queda por precisar que el factor de forma del átomo genérico f_j , a su vez, no es sino una suma interferencial interna (intraatómica).

$$f_j = \int n_j(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{G}} d^3\boldsymbol{\rho} \quad (2.3.2)$$

siendo $n_j(\boldsymbol{\rho})$ la concentración electrónica en el elemento de volumen atómico $d^3\boldsymbol{\rho}$ del átomo j , y donde ya se ha supuesto condiciones de máximo de difracción ($\Delta\mathbf{k} = \mathbf{G}$). El factor de forma atómico, obteniendo de la difracción de rayos x da información de la distribución atómica, observándose diferencias de sólo unos pocos por ciento respecto de los valores teóricos de los átomos libres.

2.4. Diagramas de difracción

La condición de máximo (interferencia constructiva), tal como se expresa por ejemplo en la ley de Bragg, es muy exigente pues para observar un máximo de difracción en cierta dirección es necesario no sólo que exista un sistema de planos con la orientación adecuada (con respecto al haz incidente) sino que además tenga el interespaciado preciso dado por la ley de Bragg. Es por eso que para observar máximos experimentalmente se dan más *oportunidades* de cumplimiento girando el cristal según que ejes (*método del cristal giratorio*). Otro método consiste en pulverizar la muestra a analizar (*difractograma de polvo*). La presencia de granos cristalinos orientados al azar hace que los máximos de difracción tengan simetría cilíndrica. El detector se mueve *barriendo* el ángulo 2θ , obteniéndose un diagrama similar al mostrado.

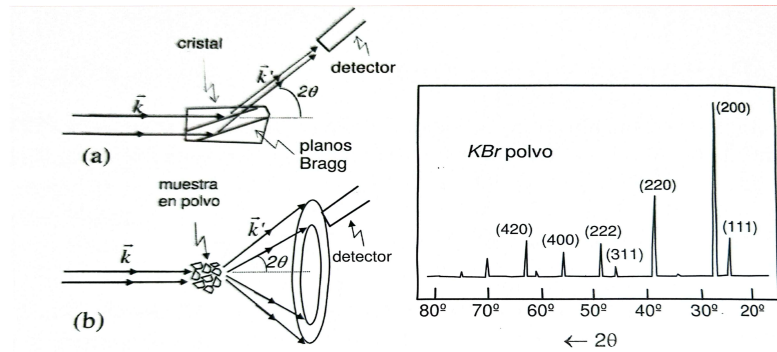


Figura 2.8: Esquemas de dos métodos de difracción (cristal rotatorio y polvo) y ejemplo de difractograma que se obtiene.

Tanto la falta de monocromaticidad como de paralelismo del haz incidente contribuyen a ensanchar los máximos. También, los defectos cristalinos afectan a los difractogramas; así la presencia de dislocaciones afecta a la anchura de los máximos de difracción de modo que su análisis se emplea, por ejemplo, para el estudio de defectos de los metales trabajados en frío. La temperatura, que genera vibraciones alrededor de las posiciones de equilibrio, no contribuye sin embargo a ensanchar los picos sino a disminuir su intensidad. Esto se entiende porque a mayor temperatura, en cualquier instante, menos átomos hay en las posiciones regulares (de equilibrio) y, por otro lado, la contribución de los átomos desviados en una determinada dirección, que generaría cambio en el haz difractado, es anulado por los que están desplazados en el sentido opuesto.

Es interesante hacer notar que la existencia de interferencia constructiva de los N átomos de un cristal ($\sim 10^{28}\text{m}^{-23}$) es posible sólo gracias a que éstos están en posiciones regulares, es

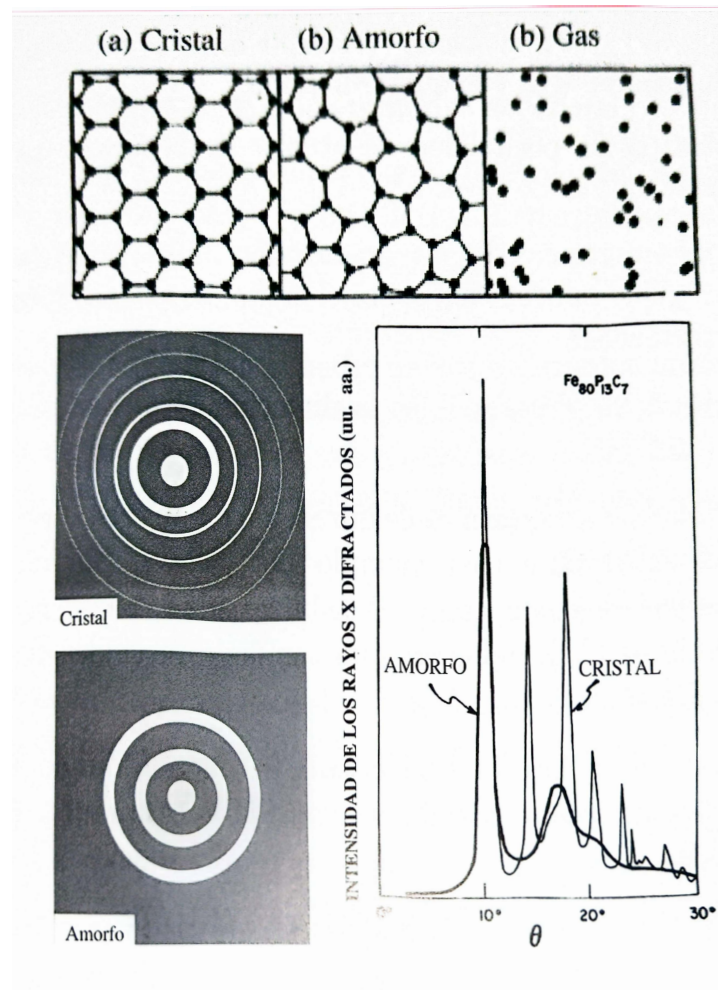


Figura 2.9: Efecto del desorden atómico en la difracción de rayos x.

decir, están *ordenados*. Que el orden está estrechamente asociado a la existencia de máximos de difracción lo muestra la figura 2.8 donde se ve la correspondencia entre el orden espacial limitado de los materiales que se denominan amorfos con su espectro de difracción. Aquí la existencia de los dos picos de difracción a bajo ángulo está asociada al orden de corto alcance (primeros vecinos) característico de estos materiales.