

# Física de Partículas

Daniel Vázquez Lago



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción al modelo Estándar</b>	<b>5</b>
1.1	Introducción . . . . .	5
1.2	Los vértices del modelo estándar y constante de acopolo . . . . .	6
1.3	Diagramas de Feynman . . . . .	7
1.3.1	Mandelstam variables . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Simetrías</b>	<b>9</b>
2.1	Momento angular y espín . . . . .	9
2.1.1	Estados de partículas espín 1/2 . . . . .	9
2.2	Isospín . . . . .	9
2.2.1	Implicaciones dinámicas del isospín . . . . .	10
2.2.2	El problema de los 8 bariones . . . . .	10
2.3	Paridad . . . . .	10
2.3.1	Helicidad . . . . .	11
2.4	Conjugación de carga . . . . .	11
2.4.1	Paridad G . . . . .	11
2.5	Violación CP . . . . .	11
2.6	Simetría temporal y TPC . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Cálculo de Feynman</b>	<b>13</b>
3.1	Estados fundamentales . . . . .	13
3.2	Decaimientos y scattering . . . . .	13
3.3	La regla de oro de Fermi . . . . .	14
3.3.1	Regla de oro de fermi para desintegraciones . . . . .	14
3.3.2	Regla de oro para scattering . . . . .	15
3.4	Reglas de Feynman . . . . .	15
3.4.1	Tratando con infinitos . . . . .	15
3.4.2	Renormalizacion . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Electrodinámica Cuántica</b>	<b>17</b>
4.1	La ecuación de Dirac . . . . .	17
4.1.1	Corriente de densidad de probabilidad . . . . .	18
4.2	Soluciones de la ecuación de Dirac: espinores. . . . .	19
4.3	Acoplamiento del campo electromagnético . . . . .	19
4.4	Covariantes bilineares . . . . .	20
4.5	Lagrangiano de Dirac y QED . . . . .	20
4.6	Interacción entre electrones y fotones . . . . .	20
<b>5</b>	<b>La Estructura de los Hadrones</b>	<b>23</b>
5.1	Factores de forma . . . . .	23
5.1.1	Choque elástico electron-proton y distribución de carga en el protón . . . . .	23

5.1.2	Choque inelástico electron-proton . . . . .	24
5.1.3	Electrón-Protón o Fotón-Protón . . . . .	24
5.2	Modelo de partones . . . . .	24
5.3	Gluones . . . . .	25
5.4	Bjorken scaling . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Cromodinámica cuántica</b>	<b>27</b>
6.1	Principios de QCD . . . . .	27
6.2	Invariancia gauga local . . . . .	27
6.2.1	Ruptura espontánea de simetría . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Interacción electrodébil</b>	<b>31</b>
7.1	La violación de Paridad . . . . .	31
	<i>Ejercicios</i> . . . . .	32
	<i>Exámenes</i> . . . . .	32
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>41</b>
A.1	Formulario . . . . .	41



# Capítulo 1

## Introducción al modelo Estándar

### 1.1. Introducción

La física de partículas estudia los constituyentes universales del universo, esto es, las *partículas elementales*, así como las interacciones entre estas. En la actualidad el modelo estándar es la teoría que mejor describe el comportamiento de estas partículas. Las partículas elementales descritas en el modelo se recogen en la siguiente imagen:

Tres generaciones de la materia (fermiones)					
	I	II	III		
masa→	2,4 MeV/c <sup>2</sup>	1,27 GeV/c <sup>2</sup>	171,2 GeV/c <sup>2</sup>	0	0
carga→	2/3	2/3	2/3	0	0
espín→	1/2	1/2	1/2	1	2
nombre→	u up	c charm	t top	γ Foton	G Graviton
Quark	d down	s strange	b bottom	g Gluon	H Boson Higgs
Lepton	<2,2 eV/c <sup>2</sup> 0 1/2 e Neutrino electrónico	<0,17 MeV/c <sup>2</sup> 0 1/2 μ Neutrino muónico	<15,5 MeV/c <sup>2</sup> 0 1/2 τ Neutrino tauónico	91,2 GeV/c <sup>2</sup> 0 1 Z <sup>0</sup> Boson Z	Bosones de gauge
	0,511 MeV/c <sup>2</sup> -1 1/2 e Electrón	105,7 MeV/c <sup>2</sup> -1 1/2 μ Muón	1,777 GeV/c <sup>2</sup> -1 1/2 τ Tau	80,4 GeV/c <sup>2</sup> ±1 1 W <sup>±</sup> Boson W	

Figura 1.1: Partículas fundamentales según el modelo estándar

La *dinámica* (que no la interacción) de los 12 fermiones fundamentales (leptones y quarks) está descrita por la ecuación de Dirac dentro del marco de la mecánica cuántica relativista. Esta ecuación nos dice que cada partícula tiene 2 estados posibles (uno con espín up +1/2 y otro con espín down -1/2).

Las fuerzas fundamentales nos dicen como interactúan los diferentes fermiones entre sí, obteniendo entonces la siguiente tabla:

	Fuerte	Electromagnética	Débil
Quarks	Si	Si	Si
Leptones Cargados	No	Si	Si
Neutrinos	No	No	Si

En el modelo estandar y la física de partículas moderna cada fuerza está descrito por un campo cuántico, todos ellos teorías gauge basados en un diferente grupo de Lie, en particular nos gustan los grupos compactos y semi-simples, para obtener la teoría Young-Milles. En función de las características de cada fuerza, basaremos una u otra en la rotación de un grupo, que nos dará diferentes propiedades. En particular:

- La descripción de la fuerza electromagnética se hace a través de la **elecrodinámica cuántica** (QED) teoría gauge basada en el grupo abeliano U(1). La *carga conservada* asociada será la carga eléctrica.
- La descripción de la fuerza débil se hace a través de un grupo SU(2), pero su falta de precisión a la hora de describir ciertos fenómenos hace que la teoría que mejor la describa sea la SU(2)  $\otimes$  U(1), es decir, la **teoría electrodébil** que engloba a la QED. La *carga conservada* asociada será la el isospín débil.
- La descripción de la fuerza fuerte se hace a través de la **cromodinámica cuántica** y el grupo SU(3). La *carga conservada* asociada será el color.

La descripción de cada uno de estos se hace a través de bosones gauge con espín 1. El número de bosones gauge depende intrínsecamente del número de generadores del grupo de simetría. Por ejemplo, en el grupo U(1) solo tenemos un generador, por lo que solo habrá un bosón: el fotón  $\gamma$ . El grupo SU(3) tiene 8 generadores, por lo que habrá 8 bosones: los gluones. El grupo SU(2) tiene 3 generadores, por lo que habrá 3 bosones:  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ .

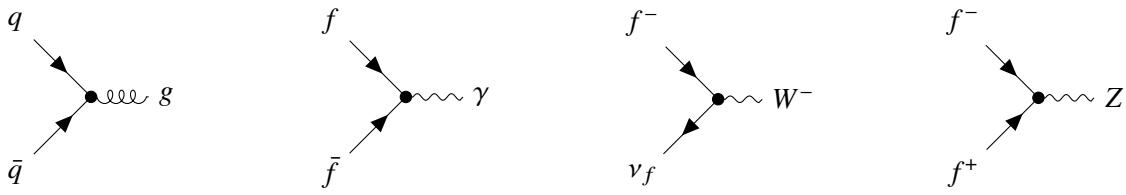
Luego para completar el modelo estandar tendremos que incluir el mecanismo que le da masa a los bosones que es el famoso mecanismo de Higgs, descubierto gracias a los experimentos ATLAS y CMS en el CERN LHC en 2012. Para este mecanismo de dar masa harían falta bosones escalares de espín 0: el bosón de Higgs con  $m_H = 125 \text{ GeV}/c^2$ . Este bosón rompería espontáneamente la simetría gauge de las diferentes teorías.

## 1.2. Los vértices del modelo estandar y constante de acopolo

El acoplo de los de los bosones gauge a los fermiones está descrito por los lagrangianos de interaccion. En general se suele dar que un vértice contenga la interacción de un bosón gauge y 2 partículas entrantes y/o salientes, asociadas a una **constante de acopolo adimensional**  $g$ . En el caso de QED tenemos que  $g = |e|$  siendo  $e$  adimensional a través de las unidades naturales ( $\hbar = c = \epsilon_0 = 0$ ). En el

Además de la constante de acopolo  $g$  tendremos el poder relativo  $\alpha$  que nos da una medida de la fuerza de cada interaccion y las relaciones entre las fuerzas. En el caso de la fuerza electromagnética esta esta relacionada con la constante de estructura fina  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$  pero no tiene porque tener la misma forma en cada una de las interacciones.

$$\alpha_{QED} = \frac{1}{137} \quad \alpha_{QCD} = 1 \quad \alpha_{weak} = \frac{1}{30} \quad (1.2.1)$$



### 1.3. Diagramas de Feynman

La representación de las interacciones entre partículas/estados en QFT se hace a través de los diagramas de Feynman, que incluyen todos los órdenes temporales posibles

Desde la TCC es posible derivar las reglas de Feynman que nos permiten obtener las amplitudes de probabilidad a partir del esquema, con vértices y partículas virtuales. Una vez el diagrama es dibujado, es “trivial” calcular la amplitud de probabilidad (también llamado *elemento de matriz de transición*) siempre y cuando se conozcan estas reglas, evitando calcular cada proceso desde los principios de la teoría cuántica de campos.

Sin embargo para cada proceso de interacción de varias partículas hay infinitos diagramas. Para la mayor parte de las interacciones los diagramas que generan más amplitud son realmente los de bajo orden, que son los más sencillos de calcular.

#### 1.3.1. Mandelstam variables

Las variables de Mandelstam son 3 cantidades escalares que son invariantes en cualquier scattering  $1+2 \rightarrow 3+4$ , sean leptones, neutrinos... Cada uno está asociado en general a uno de los 3 tipos de diagramas de Feynman que se pueden dibujar, y vienen dados por:

- La variable  $s$  asociada a un proceso de aniquilación. Se le llama canal  $s$  (*space channel*):

$$s = (p_1^2 + p_2^2) \quad (1.3.1)$$

- La variable  $t$  asociada a un proceso de scattering elástico. Se le llama canal  $t$  (*time channel*):

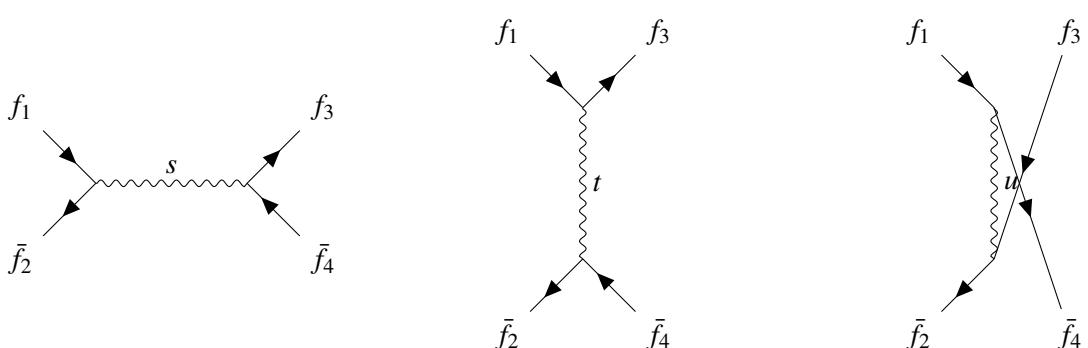
$$t = (p_1^2 - p_3^2) \quad (1.3.2)$$

- La variable  $u$  asociada a un proceso de scattering elástico. Se le llama canal  $u$ :

$$u = (p_1^2 - p_4^2) \quad (1.3.3)$$

Este proceso es relevante cuando las partículas salientes son indistinguibles.

El valor  $\sqrt{s}$  es la energía total en el sistema centro de masas disponible.





# Capítulo 2

## Simetrías

Las simetrías en la física están asociadas a las leyes de conservación, y sus implicaciones en la dinámica quedaron completamente entendidas en 1918 con la publicación del *teorema de Noether* en 1918. Este teorema establece que cada simetría nos lleva a una ley de conservación y viceversa: cada ley de conservación debe tener su simetría.

En particular tenemos varias simetrías y varias leyes de conservación asociadas a los procesos físicos. Por ejemplo, cuando un fenómeno se puede trasladar en el tiempo conserva la energía, cuando lo hacemos en el espacio conserva momento, cuando lo podemos rotar conserva momento angular, y cuando lo podemos aplicar transformaciones Gauge conserva carga (bien carga eléctrica, carga de isospín débil o color).

### 2.1. Momento angular y espín

El **espín** es una propiedad intrínseca de las partículas, y se comporta como un momento angular. Para cada tipo de partícula elemental está fijada, mientras que los estados compuestos (por ejemplo, dos electrones interaccionando) pueden presentar espines diferentes.

#### 2.1.1. Estados de partículas espín 1/2

Las partículas con espín 1/2 se pueden representar en **espinores**, que es un vector columna de 2 columnas. Se representa como  $|S, S_3\rangle$  donde  $S = 1/2$  y  $S_3 = \pm 1/2$ , con dos estados posibles.

$$|1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

El estado más general posible sería:

$$\psi = \alpha|1/2, 1/2\rangle + \beta|1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

donde  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

### 2.2. Isospín

Tras el descubrimiento del neutrón en 1932 Heisenberg observó que el neutrón era prácticamente igual al proton (a parte de la carga eléctrica). En este contexto Heisenberg propuso que el protón y neutron en

realidad eran la misma partícula (el nucleón) pero en dos estados diferentes:

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ p &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ n &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Como podemos ver, la forma, el álgebra, es análoga completamente a la representación de las partículas con espín 1/2. Hablamos entonces de **isospín 1** con componentes  $I_1, I_2$  e  $I_3$  como conceptos abstractos similares al momento angular. El isospín es adimensional por convención.

Las interacciones fuertes son invariantes bajo rotaciones en el espacio de isospín, al igual que las fuerzas eléctricas son invariantes a rotaciones en una configuración espacial. Esta nueva invariancia, no relacionada con el espacio o tiempo, se le llama **simetría interna** y está relacionada con las relaciones entre las partículas entre sí.

Como sabemos por la teoría de Noether esta conservación del isospín nos lleva a un grupo de simetría, que será el grupo SU(2). Conclusión: las interacciones fuertes son invariantes bajo rotaciones internas del grupo de simetría SU(2).

De esta forma también podremos generar estados con diferente isospín, como por ejemplo los piones  $\pi$ , con isospín 1, con 3 estados posibles:

$$\pi^+ = |1, +1\rangle \quad \pi^0 = |1, 0\rangle \quad \pi^- = |1, -1\rangle \quad (2.2.2)$$

o el  $\Lambda$  con  $I = 0$  y un solo estado:

$$\Lambda = |0, 0\rangle \quad (2.2.3)$$

e incluso el  $\Delta$  con  $I = 3/2$  y 5 estados posibles:

$$\Delta^{++} = |3/2, 3/2\rangle \quad \Delta^+ = |3/2, 1/2\rangle \quad \Delta^0 = |3/2, -1/2\rangle \quad \Delta^- = |3/2, -3/2\rangle \quad \Delta^{--} = |3/2, -3/2\rangle \quad (2.2.4)$$

Para determinar el número de isospín  $I$  de un multiplete podemos contar el número de partículas  $N$  que contiene, mientras que la multiplicidad  $2I + 1$  nos da el número de estados posibles para dicha partícula.

La tercera componente del isospín nos habla de la carga eléctrica de la partícula, por lo que es bien conocido. En el modelo de Quarks, son los quarks  $u$  y  $d$  los que forman dobletes de isospines, mientras que otros quarks no tienen isospín.

### 2.2.1. Implicaciones dinámicas del isospín

### 2.2.2. El problema de los 8 bariones

## 2.3. Paridad

El pensamiento físico general a principio del siglo pasado era que la naturaleza era ambidiestra, es decir, que una imagen espejo de cualquier fenómeno físico representa un fenómeno físico posible e idéntico (lo describen las mismas ecuaciones). El operador es  $\mathcal{P}$ , tal que

$$\mathcal{P}\psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \psi(-\mathbf{r}, -\mathbf{p})$$

En 1956 T.D. Lee y C.N. Young propusieron a diferentes físicos que hicieran experimentos esta simetría era cierta, o si por el contrario había fenómenos físicos que violaran paridad. En el electromagnetismo esta simetría se cumplía, aunque no se sabía para la interacción débil.

La conclusión no se hizo esperar, y en 1957 Chien-Shiung Wu realizó un experimento con átomos de cobalto-60 y observó que la desintegración beta de los núcleos no era simétrica bajo la transformación de paridad. Este experimento fue el primero en demostrar que la interacción débil no es invariante bajo la transformación de paridad.

### 2.3.1. Helicidad

La **helicidad** de una partícula es el valor de  $m_s/s$  sobre el eje de propagación de la partícula, tal que:

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{s \cdot p} \quad (2.3.1)$$

con dos posibles helicidades (en el caso de partículas con espín 1/2: +1 y -1). En el experimento de Wu solo fueron observados partículas con helicidad a izquierdas. Es claro que hacer una transformación de paridad  $\mathbf{r}, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{r}, -\mathbf{p}$  cambia  $h$ . Es decir,  $h$  es sensible a la paridad. Entonces si un fenómeno viola paridad debemos ver partículas con una paridad que con otra. En el experimento de Wu se observó precisamente esto, obteniendo partículas que violan paridad (fermiones) a izquierdas.

## 2.4. Conjugación de carga

La **conjugación de carga**  $C$  convierte a cada partícula en su antipartícula. Lógicamente solo puede entenderse en el contexto de la ecuación de Dirac. Este operador cambia el signo de todos los números cuánticos de carga eléctrica, número bariónico, leptónico, extrañeza... conservando masa, energía, momento y espín.

La mayor parte de las partículas no son autoestados de  $C$ , ya que no hay muchas partículas que son sus propias antipartículas: fotón,  $\pi^0$ ... Es un número cuántico multiplicativo y es conservado en el electromagnetismo y interacciones fuertes, pero es violado en las interacciones débiles.

### 2.4.1. Paridad G

Los piones cargados son autoestados del operador  $\mathcal{G}$ , que se define como

$$\mathcal{G} = C \cdot \mathbb{R}_2 \quad \mathbb{R}_2 = e^{i\pi I_2}$$

Todos los mesones que no porten un quark strange, charm, bottom o top son autoestados de  $\mathcal{G}$ .

## 2.5. Violación CP

Las interacciones débiles no son invariantes bajo paridad ni bajo conjugación de carga. Evidencias de la no conservación de paridad ya hemos explicado como fue descubierta/demostada, mientras que la evidencia de  $C$  también se puede ver que es que el decaimiento  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  ocurre para un neutrino

a izquierdas mientras que la conjugación de dicha reacción  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$  ocurre para un neutrino a derechas (y hemos dicho que espín y momento se conservaban).

Sin embargo si hacemos los cambios simultáneamente, es decir, aplicamos  $C\bar{P}$  sobre la reacción, vemos que es la misma reacción. La violación de CP fue demostrado a través de los kaones neutros, en 1964. Esta violación de CP podría explicar la diferencia entre materia y antimateria que parece haber en el universo.

Para estudiar esto nos fijamos en el caso de los kaones. El kaon es un mesón con extrañeza, y se puede transformar en un antikaon en un proceso a segundo orden en la interacción débil (hay un loop).

En el laboratorio lo que se observa son combinaciones lineales de los estados  $K^0$  y  $\bar{K}^0$ . Dado que  $K^0$  es un bosón tienen la misma paridad y resulta ser pseudoscalar:

$$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle \quad P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad (2.5.1)$$

Por otro lado

$$C|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad C|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad (2.5.2)$$

Luego

$$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad (2.5.3)$$

Si embargo los autoestados normalizados:

$$|K^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{K}^0\rangle - |K^0\rangle) \quad |K^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{K}^0\rangle + |K^0\rangle) \quad (2.5.4)$$

tal que

$$CP|K^1\rangle = |K^1\rangle \quad CP|K^2\rangle = -|K^2\rangle \quad (2.5.5)$$

Si asumimos que CP es conservada en las interacciones débiles,  $K_1$  solo puede decaer en estados con CP +1 y  $K_2$  solo en estados con CP -1. Experimentalmente se distinguen, cayendo mucho más rápido  $K_1$  que  $K_2$ . Si la invarianza CP existe los  $K_2$  solo se pueden desintegrar en 3 piones, si observamos veremos que no siempre el  $K_1$  cae a 2 piones y el  $K_2$  a 3 piones. Consecuentemente se viola CP.

## 2.6. Simetría temporal y TPC

El teorema TCP o CPT está basado en una de los principios rectores de QFT, y nos dice que aplicar conjugación de carga, paridad y orden temporal no cambia el fenómeno físico. Sería imposible construir una teoría cuántica de campos que violara TCP.

# Capítulo 3

## Cálculo de Feynman

Hay tres pruebas principales de la interacción entre partículas, o más bien 3 puntos de estudio experimentales: estudio de estados fundamentales, estudio de decaimientos y scattering.

Para tratar con los estados fundamentales (átomo de hidrógeno, quarkonium, protonium, mesones, báriones...) la mecánica cuántica no relativista funciona, sin embargo, no es capaz de predecir bien ni los decaimientos ni el scattering.

### 3.1. Estados fundamentales

El **positronium** es un sistema de un electrón y un positrón. La interacción electrónica los junta y también los aniquila, produciendo dos o tres rayos gamma, en función del estado de espín.

El **quarkonium** es un sistema de mesón sin sabor formado por un quark pesado y su propia antipartícula.  $\Upsilon J/\Psi$  sería un tipo de quarkonium  $c\bar{c}$  y  $\Upsilon$  sería  $b\bar{b}$ . El topónium no existe, ya que el top se aniquila antes de que se produzca la posibilidad de que se ligue el estado.

### 3.2. Decaimientos y scattering

Para obtener la vida media tenemos que introducir primero la **tasa de decaimiento**  $\Gamma$  que es la probabilidad por unidad de tiempo que tiene cada muón de desintegrarse. Esto sumado a que la probabilidad de que decaiga no depende de cuanto haya vivido la partícula nos lleva a una distribución exponencial.

Como cada partícula tiene diferentes formas de desintegrarse (llamados *canales*), la tasa de decaimiento total que es la usada para obtener la vida media es la suma de cada una de estas:

$$\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i \quad (3.2.1)$$

y la vida media  $\tau$  será:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}} \quad (3.2.2)$$

Esto además nos permite obtener los **branching ratios** que nos dicen el porcentaje de partículas que se desintegran en cada canal.

Por otro lado el scattering es un poco más complicado, pero se puede definir como la probabilidad de que una partícula interaccione con otra. La unidad de la misma depende de la superficie, y podemos entenderla

como *la superficie efectiva de interacción*. Además podemos estudiar la sección eficaz diferencial que nos habla de la probabilidad de que la partícula resultante salga con un ángulo determinado:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (3.2.3)$$

Se puede calcular experimentalmente a partir de la luminosidad, y el número de partículas detectada para un ángulo concreto (siempre y cuando este ángulo tenga una resolución pequeña):

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{dN}{d\Omega}$$

La **sección eficaz** es entonces el número de partículas por unidad de tiempo que es dispersada a la unidad de ángulo sólido  $d\Omega$  dividida pro  $d\Omega$  y la luminosidad.

### 3.3. La regla de oro de Fermi

Ahora bien, ¿Como calculamos, con una teoría relativista cuántica, o una teoría cuántica de campos, la tasa de decaimiento o la sección eficaz? Dos ingredientes son requeridos:

- La amplitud  $\mathcal{M}$  para el proceso, también llamado elemento de matriz de probabilidad. Esta contiene toda la información dinámica relevante, y viene dada completamente por los diagramas de Feynman principales.
- El espacio de fases final contiene únicamente la parte cinemática de la interacción, depende de masas, energías y momento de los participantes.

Así pues, tenemos que **la regla de oro de Fermi** nos dice que la amplitud de transición es proporcional al cuadrado de la amplitud y a un factor que incluye el espacio de fases  $\rho$ .

#### Regla de Oro de Fermi

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \rho |\mathcal{M}|^2$$

##### 3.3.1. Regla de oro de fermi para desintegraciones

Consideremos  $1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n$ . La tasa de decaimiento es dado por la fórmula

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[ \prod_{i=2}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_n) \quad (3.3.1)$$

La delta de dirac incluye la conservación del momento, el factor  $S 1/j!$  que depende del número  $j$  de partículas indénticas en el estado final y el cociente de la masa  $1/2m_1$  aparece porque asumimos que estamos en el sistema de reposo de la partícula y  $E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4 \rightarrow E_1 = m_1 c^2$ . Para Obtener  $\Gamma$  habrá que integrar sobre todos los momentos de las partículas en las que se desintegra.

El caso más sencillo es el caso  $1 \rightarrow 2 + 3$ , en el que la conservación de momento exige directamente que  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_3$ . La integral no es complicada, pero es larga. El resultado final de este tipo de decaimiento sería:

$$\Gamma = \frac{S}{16\pi\hbar m} |\mathcal{M}|^2$$

### 3.3.2. Regla de oro para scattering

La ecuación global es parecida que para la desintegración, tal que si  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$  la sección eficaz diferencial es:

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[ \prod_{i=3}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) \quad (3.3.2)$$

Típicamente se estudia únicamente el ángulo de la partícula 3. Cuando consideramos el proceso más típico  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  en el sistema centro de masas tenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\hbar^2 c^2}{8\pi} \right) \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} \quad (3.3.3)$$

## 3.4. Reglas de Feynman

### 3.4.1. Tratando con infinitos

El problema principal de las teorías cuánticas de campos es que cuando tratamos con ordenes altos con varios loops aparecen infinitos. Para resolver estos infinitos podemos usar varios métodos.

El primer paso es tratar de usar un corte en el procedimiento para hacer la integral finita sin perder la invariancia de Lorentz. A esto se le llama **regularización**. Depende del caso, podemos superar el problema de los infinitos por ejemplo añadiendo un término

$$\frac{-M^2 c^2}{q^2 - M^2 c^2}$$

tal que cuando  $M \rightarrow \infty$  tiende a 1. A  $M$  se le llama *cutoff mass*, y representa una escala más allá de la cual el modelo deja de ser válido o necesita completarse (aparecen partículas nuevas...). Así la integral resultante aparece dividida en dos partes:

- Una parte finita independiente de  $M$ .
- Una parte con un término  $M$  donde los infinitos están presentes.

Todas las partes divergentes pueden colocarse al final o sumarse a las masas y a la constante de acoplamiento, como si las masas físicas y la constante de acoplamiento fueran las que (RENORMALIZADAS) contienen los factores extra:

$$m = m + \delta m \quad g = g + \delta g$$

con  $\delta m$  y  $\delta g$  tiendiendo a infinito en el límite  $M \rightarrow \infty$ . Hay diferentes esquemas para esta regularización:

- La **regularización dimensional** consiste en cambiar la dimensión del espacio de integración, y así la integral se vuelve convergente, para luego estudiarla en el límite de integración, tal que  $\int d^4 q = \infty$ , por lo que estudiamos  $\int d^n q$  para  $n < 4$  y luego hacemos  $n \rightarrow 4$ .

Lo que medimos en el laboratorio son magnitudes físicas, y obtenemos para ellos valores finitos, lo que significa que las masas y constantes de acoplamiento no medibles,  $m$  y  $g$  (BARE<sup>1</sup>), contienen infinitos que se compensan.

---

<sup>1</sup>La masa bare es la masa original (no observable) que aparece en el lagrangiano antes de renormalizar, al igual que bare  $g$  es la constante de acoplamiento “pura” antes de incluir los efectos cuánticos..

Prácticamente, contabilizaremos los infinitos usando los valores físicos de  $m$  y  $g$  en las reglas de Feynman, y luego ignoraremos sistemáticamente las contribuciones divergentes de los diagramas de orden superior.

Por otro lado, las contribuciones finitas (independientes de  $M$ ) de diagramas con loop llevan necesariamente a variaciones de  $m$  y  $g$ . Estas modificaciones son calculables, aunque son funciones del 4.momento de la línea en la que el loop es insertado. El efecto de las masas y constantes de acople en realidad sí dependen de la energía de las partículas que incluye.

### 3.4.2. Renormalización

La renormalización es un proceso físico a través del cual se busca solventar este problema. Para ello lo que se hace es redefinir las constantes de acoplamiento y las masas de modo que contengan esos infinitos, como si las constantes físicas fueran las que contienen los factores extra.

Si nosotros tenemos una cantidad que sabemos que es finita y en una expresión que escribimos de esa cantidad aparecen infinitos, la única explicación que existe es que la parte en la que para nosotros es finita hay unos infinitos que se cancelan otros.

Las consecuencias de todo esto llevan a que las masas efectivas y las constantes de acoplamiento dependan de las energías de las partículas involucradas, véase, en QCD tenemos la libertad asintótica y en QED el Lambd shift. Esta no es una consecuencia teórica, se observa en la práctica.

# Capítulo 4

## Electrodinámica Cuántica

### 4.1. La ecuación de Dirac

En el mundo real, los quarks y los leptones llevan espín 1/2, y los bosones gauge 1. En un principio la mecánica cuántica que describre las partículas estaba definida por la **ecuación de Schrödinger**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) \quad (4.1.1)$$

siendo  $\psi$  la función de onda. En la mecánica cuántica relativista las partículas de espín cero están descritas por la ecuación de Klein-Gordon, que sigue los pasos de la ecuación de Schrödinger pero para la relación de energía-momento relativista:

$$p^\mu \cdot p_\mu - m^2c^2 = 0$$

llegando a

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\phi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi$$

siendo  $\phi$  un escalar relativista. La ecuación de Klein-Gordon es una ecuación de segundo orden en el tiempo, lo que implica que la función de onda  $\phi$  no es única, sino que tiene dos soluciones independientes, además que habrá que especificar dos valores iniciales: el de la función de onda y el de la derivada. Ambos pueden ser “arbitrarios”, por lo que no puede mantener su rol de “determinar la densidad de probabilidad”.

Como sabemos la **vector corriente densidad de probabilidad** en Schrödinger es:

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

y la conservación de la probabilidad se expresa como

$$\nabla\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

siendo  $\rho$  positivo. En el caso de Klein-Gordon:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} (\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*)$$

los valores iniciales de  $\phi$  y  $\partial_t \phi$  pueden ser escogidos libremente, por lo que la *densidad puede ser negativa*, y por tanto no es un candidato a ser densidad de probabilidad.

Para describir las partículas de espín 1/2 como los electrones es necesario construir una función de onda relativista. Dirac resolvió este problema constuyendo una serie de matrices que transforman como un 4-vector: las **matrices de Dirac**. Estas matrices se constuyeron para que verificar la regla de anticomutación. La acción de Dirac es invarianta bajo transformaciones de Lorentz, pero no lo es bajo transformaciones de gauge.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$$

donde  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico de Minkowski. La ecuación de Dirac se obtiene al aplicar la relación de energía-momento relativista a una función de onda  $\psi$  que es un **espinor**:

$$H\psi = (\alpha \cdot \mathbf{P} + \beta m) \psi$$

siendo  $\mathbf{P}$  el operador momento relativista ( $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$ ) y  $H$  el operador hamiltoniano relativista  $H = i\hbar\partial_t$ ,  $\alpha^i$  y  $\beta$  matrices de Dirac, y  $m$  la masa de la partícula. Estas matrices tienen la particularidad de que al elevar al cuadrado la ecuación de Dirac obtenemos

$$H^2\psi = (\mathbf{P}^2 + m^2)\psi$$

que es evidentemente la ecuación de la expresión de energía relativista. Las relaciones de Dirac exigen que:

- Las matrices  $\alpha^i$  y  $\beta$  son matrices complejas que comutan entre ellas.
- El cuadrado de las matrices es la identidad.

Estas relaciones de no-comutación llevan a la directa deducción de que no pueden ser números: deben ser matrices, y por tanto la función de onda  $\psi$  no es un escalar, sino un **espinor** de Dirac.

Puede ser demostrado que  $\alpha_i$  y  $\beta$  son matrices hermíticas con traza nula de dimensión par con valores  $\pm 1$ . El orden más pequeño que satisface estos requisitos exige una dimensión  $4 \times 4$ , y la elección de las matrices no es unívoca. La elección más frecuente es la representación de Dirac-Pauli:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

siendo  $I$  la matriz identidad y  $\sigma^i$  las matrices de Pauli. Si multiplicamos la ecuación de Dirac por  $\beta$  obtenemos la forma más común de representar la ecuación de Dirac.

### Ecuación de Dirac en su forma covariante

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (4.1.3)$$

donde  $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\alpha)$ .

#### 4.1.1. Corriente de densidad de probabilidad

El **adjunto** de una función de ondas  $\bar{\psi}$  se define como

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (4.1.4)$$

puediendo expresar la ecuación de Dirac a partir de este adjunto. Por otro lado, la corriente de probabilidad es:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.1.5)$$

y satisface la ecuación de continuidad donde  $\mathbf{j}^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ . De hecho se puede identificar a  $j^\mu$  por la **corriente de densidad de carga** cuando multiplicamos  $j^\mu$  por la carga de la partícula.

## 4.2. Soluciones de la ecuación de Dirac: espinores.

Las soluciones libres bien conocidas por todos:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx} \quad \psi(x) = v(p)e^{ipx} \quad (4.2.1)$$

donde  $u(p)$  y  $v(p)$  son las funciones de onda de Dirac. En general tenemos varias soluciones en función del sistema de referencia en el que nos encontramos. Tenemos en total 4 soluciones: 2 para electrones (1 con espín +1/2 otra con espín -1/2) y 2 para positrones (1 con espín +1/2 y otra con espín -1/2):

$$u^\uparrow = \begin{pmatrix} \uparrow \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^\downarrow = \begin{pmatrix} \downarrow \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \downarrow \end{pmatrix} \quad v^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \uparrow \end{pmatrix}$$

donde

$$\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución más general de dicha ecuación es para un estado de partícula con un momento  $p$  y energía  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ :

### Solución de Dirac más general:

$$u^\uparrow(p) = N \begin{pmatrix} \uparrow \\ \frac{p}{E+m} \uparrow \end{pmatrix} \quad u^\downarrow(p) = N \begin{pmatrix} \downarrow \\ -\frac{p}{E+m} \downarrow \end{pmatrix} \quad v^\uparrow(p) = N \begin{pmatrix} \downarrow \\ -\frac{p}{E+m} \downarrow \end{pmatrix} \quad v^\downarrow(p) = N \begin{pmatrix} \uparrow \\ \frac{p}{E+m} \uparrow \end{pmatrix}$$

## 4.3. Acoplamiento del campo electromagnético

La ecuación de Dirac se acopla al campo electromagnético de un modo típico en la mecánica cuántica: introduciendo un el vector potencial electromagnético en las derivadas. Esto implica que pasamos de la derivada parcial covariante:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad (4.3.1)$$

de tal modo que la ecuación de Dirac se convierte:

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)\psi = 0 \quad (4.3.2)$$

donde  $A_\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$  siendo  $\phi$  el potencial escalar eléctrico y  $\mathbf{A}$  el potencial vectorial magnético.

## 4.4. Covariantes bilineares

Para construir los objetos-corrientes covariantes Lorentz (con objetos-corrientes nos referimos a magnitudes físicas, véase densidad de corriente eléctrica, energía...) se constituyen como bilineares, tal que

$$\bar{\psi} \Gamma \psi \quad (4.4.1)$$

siendo  $\Gamma$  uno de los siguientes objetos  $\Gamma \in (1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu})$  siendo  $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$  y  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . En función de cual usaremos podremos representar:

- Escalar  $\Gamma = 1$ .
- Escalar-Axial  $\Gamma = \gamma^5$ .
- Vector  $\Gamma = \gamma^\mu$ .
- Vector axial  $\Gamma = \gamma^\mu \gamma^5$ .
- Tensor  $\Gamma = \sigma^{\mu\nu}$ .

## 4.5. Lagrangiano de Dirac y QED

El lagrangiano de Dirac, que es capaz de obtener las ecuaciones de movimiento de Dirac (i.e. la ecuación de Dirac a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange).

### Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (4.5.1)$$

Incluyendo el acoplamiento al campo electromagnético  $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor de campo electromagnético y la derivada covariante para el acoplamiento al campo electromagnético  $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$  obtenemos  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ .

### Lagrangiano de QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m) \psi \quad (4.5.2)$$

Vemos claramente el significado de este lagrangiano: la primera parte describe la dinámica del campo electromagnético, la segunda la dinámica de los electrones, y además tenemos la interacción entre ambos controlada por  $\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ . Las ecuaciones de Maxwell relativistas

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.5.3)$$

donde  $\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$  es el dual del tensor electromagnético. Las ecuaciones de Maxwell clásicas no son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, pero si las ecuaciones de Maxwell covariantes.

## 4.6. Interacción entre electrones y fotones

La interacción entre electrones y fotones se describe a través de la **acción de Dirac**:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.6.1)$$

donde la acción es la integral del lagrangiano en el tiempo y el espacio. La acción es un escalar relativista, y por tanto debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz.



# Capítulo 5

## La Estructura de los Hadrones

### 5.1. Factores de forma

Cuando vamos a obtener la sección eficaz de un electrón (o cualquier partícula elemental) contra un objeto extenso con una distribución de carga la sección eficaz se obtiene como el producto de la sección eficaz del electrón contra una carga puntual y un factor de forma, tal que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{punto}} \cdot |F(q)|^2 \quad (5.1.1)$$

donde  $q$  es el momento transferido entre el electrón y el objeto extenso. La función  $F(q)$  es el factor de forma, y de hecho podemos deducirla del propio scattering. Este factor de forma es por definición la transformada de Fourier de la distribución de carga:

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \quad (5.1.2)$$

Podemos expresar esto cuando  $q$  es pequeño, haciendo la aproximación de Taylor a orden  $q^2$ . Así podemos obtener una aproximación de la función factor de forma como:

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6} |\mathbf{q}^2| \langle r^2 \rangle + O(q^4) \quad (5.1.3)$$

es decir, en el límite de  $q$  pequeño el factor de forma depende únicamente del tamaño de la distribución de carga y no de su estructura interna.

#### 5.1.1. Choque elástico electron-proton y distribución de carga en el protón

En el caso del electrón-protón el momento magnético influye, no solo la carga. Para obtener la sección eficaz elástica tendríamos que usar la fórmula del tema anterior

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2}{8\pi} \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \quad (5.1.4)$$

Por otro lado, las transiciones electrón protón ahora vendrán dadas por la corriente

$$J^\mu = e \bar{u}(p') [\dots] u(p) e^{i(p-p') \cdot x} \quad (5.1.5)$$

donde  $p$  y  $p'$  son los momentos del protón antes y después de la colisión elástica. Si fuera una partícula puntual  $[...] = \gamma^\mu$ , pero como no lo es no podemos afirmar que lo sea. En cualquier caso es obvio que debe ser un 4-vector de lorentz, bien sea una combinación lineal de algún vector, vector axial o tensor. La fórmula más general, que no asume ninguna forma particular es:

$$[...] = \left[ F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2m_p}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] \quad (5.1.6)$$

siendo  $F_1$  y  $F_2$  dos factores de forma independientes y  $\kappa$  el momento magnético anómalo. Son estos factores de forma los que parametrizan la distribución de carga del protón (su estructura) y pueden ser medidos experimentalmente a través de medidas del scattering.

### 5.1.2. Choque inelástico electron-proton

Cuando aumentamos considerablemente la energía del electrón, podemos llegar a romper el protón generando una avalancha de materia adrónica denotada por  $X$ :

$$e^- + p \rightarrow e^- + X \quad (5.1.7)$$

A esto se le llama **choque inelástico** o DIS (Deep Inelastic Scattering). En este caso tendremos que cambiar la forma de la corriente  $J^\mu$ . En QED la sección eficaz puede ser descrito en función del tensor leptónico:

$$L_{\mu\nu}^e = \bar{u}(k')\gamma_\mu u(k) \cdot \bar{u}(p')\gamma_\nu u(k') \quad (5.1.8)$$

siendo  $k'$  y  $k$  el momento después y antes del electrón y  $p'$  y  $p$  el momento del protón después y antes de la colisión y

$$L^{\mu\nu} = \bar{u}(k')[...]^{\mu}u(k) \cdot \bar{u}(p')[...]^{\nu}u(k') \quad (5.1.9)$$

Sin embargo no podemos usar la misma expresión para el caso inelástico ya que otras fuerzas pueden entrar en juego, a saber, la fuerza fuerte. Así escribiremos un tensor llamado el **tensor hadrónico** denotado por  $W^{\mu\nu}$ , que es el que nos da la sección eficaz del hadrón, tal

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left( -\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{m_p^2} \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \quad (5.1.10)$$

tal que

$$d\sigma \propto L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} \quad (5.1.11)$$

### 5.1.3. Electrón-Protón o Fotón-Protón

En realidad el papel del haz de electrones es generar el fotón virtual con momento  $q^2$  que si interactúa con el protón. Como es virtual  $q^2 \neq c^2$  y no está limitado por los estados de polarización.

## 5.2. Modelo de partones

Si el protón fuera un objeto extenso formado por partículas más pequeñas tendríamos que con una partícula incidente de alta frecuencia podríamos ser capaces de iluminarla.

Esto debería influir mucho en el comportamiento de la sección eficaz, ya que a longitud de onda grande deberíamos interactuar con el protón como un todo, obteniendo un factor de forma de “origen desconocido”

mientras que a longitudes pequeñas deberíamos interacturar con las partículas que están “encerradas” en el protón. De hecho, si estudiamos estos DIS vemos que

$$2 \cdot W_1^{\text{part}} = \frac{Q^2}{2m^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \quad W_2^{\text{part}} = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right) \quad (5.2.1)$$

donde  $\nu$  es la energía transferida,  $Q^2$  el momento transferido,  $m$  la masa del protón y  $\delta$  la función delta de Dirac. Esto último lo que nos está diciendo es que está formado por partículas puntuales y son funciones de estructura. Este es el **modelo de partones**, que supone que el protón está formado por *partículas elementales*. Así, los partones se mueven con el protón (sobretodo a una alta energía en el que el momento transversal es despreciable) y sus masas pueden ser despreciadas. La forma de describir esto es decir que cada *partón* lleva una fracción de momento  $x$  tal que

$$p_i = x a \cdot p \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.2.2)$$

siendo la **función de distribución del partón**

$$f_i(x) = \frac{dp_i}{dx} \quad (5.2.3)$$

y describe la probabilidad de que el partón  $i$  lleve una fracción  $x$  del momento total  $p$ . Ahora  $W_1 \rightarrow F_1$  y  $W_2 \rightarrow F_2$  pasan a ser factores de forma, adimensionales. De hecho es interesante ver que, por ejemplo, la función  $F_2$  sobre los quarks:

$$\frac{1}{x} F_2^{ep}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u(x) + \bar{u}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d(x) + \bar{d}(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s(x) + \bar{s}(x)] \quad (5.2.4)$$

donde hemos suprimido las presencias de otros quarks. El modelo de partones de Feynmann describe entonces el protón como una estructura formada por 3 quarks de valencia  $u_v u_v d_v$  acompañado de pares de quarks-antiquarks  $q_s \bar{q}_s$ <sup>1</sup>. Uno puede asumir que  $u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \dots = S(x)$  tal que

$$u(x) = u_v(x) + S(x) \quad d(x) = d_v(x) + S(x) \quad s(x) = S(x) \quad (5.2.5)$$

Sumando el promedio debe quedar

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2, \quad \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1, \quad \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0 \quad (5.2.6)$$

Tenemos pues

$$\frac{1}{x} F_2^{ep} = \frac{1}{9} [4u_v + d_v] + \frac{4}{9} S, \quad \frac{1}{x} F_2^{en} = \frac{1}{9} [u_v + 4d_v] + \frac{4}{9} S \quad (5.2.7)$$

## 5.3. Gluones

Si consideramos los gluones, tenemos que la suma del momento total de los quarks no será la del protón, si no una fracción de ellos, tal que

$$\int_0^1 dx(x\rho) [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = \rho - \rho_g = \rho(1 - \epsilon_g) \quad \epsilon_g = \frac{\rho_g}{\rho} \quad (5.3.1)$$

---

<sup>1</sup>El subíndice  $v$  denota que son de valencia, mientras que el subíndice  $s$  indica que son excitaciones.

siendo  $\varepsilon_g$  la **fracción momento gluónica**. Los datos experimentales muestran:

$$\varepsilon_g = 0.46 \quad (5.3.2)$$

casi el 50 % total es momento gluónico, y no participa en el DIS. De hecho estos mismos gluones son los que producen la fuerza fuerte, y por tanto son los responsables de la interacción entre quarks. Cuando tratamos de producir pares de quarks anti quarks a través de la aniquiación electron positrón aparecen jets de materia hadrónica producida por la deceleración de los quarks. Al producirse estos se mueven en direcciones opuestas en virtud de la conservación del momento, pero son frenados casi de golpe precisamente por la carga de color. Esta energía se transforma en piones, kaones... en la dirección original de los quarks. En esta radiación también se emiten gluones al modo que fotones se producen en el Bremsstrahlung.

## 5.4. Bjorken scaling

Se encontró que a elevado momento transferido  $Q^2$  la fracción de momento del protón  $x$  es idéntica al momento cuadrado del fotón adimensional  $x = \frac{1}{2} = \frac{Q^2}{2Mv}$ . Es decir, que para que un fotón sea absorbido por un partón de fracción de momento  $x$ , el fotón virtual debe tener el valor correcto de la variable adimensional  $Q^2/2Mv$ .

Bjorken predijo a finales de la década de los 60 que a muy altas energías de la dependencia de las funciones de estructura inelásticas con  $Q^2$  desaparecía, y estas debían ser únicamente funciones del parámetros adimensionales  $x$  (y las ecuaciones eficaces de dos,  $x$  e  $y$ ). A esto lo llamamos **bjorken scaling**.

Esta predicción se basó en la hipótesis acerca de las propiedades de elementos de matriz de corrientes a altas energías. En la actualidad se observa una pequeña descripción a escala logarítmica a muy alto  $Q^2$ .

# Capítulo 6

## Cromodinámica cuántica

### 6.1. Principios de QCD

Las interacciones electromagnéticas no son capaces de ver los quarks en los hadrones. Una fuerza fuerte, que es capaz de superar la electromagnética (y su repulsión) mantiene los quarks unidos y encerrados en el hadrón. Esta fuerza fuerte es descrita por la cromodinámica cuántica (QCD), que crea un nuevo número cuántico, el color, y un nuevo campo, el campo de color.

Para evitar que existan estados de color para una misma partícula asignamos a cada hadrón un color neutro, es decir, es invariante frente a rotaciones de color R,G y B. Esto se traduce en que los hadrones tienen que ser **blancos** (neutros) y los quarks tienen que ser **coloreados** (rojo, verde o azul). De esta forma, los quarks pueden combinarse para formar hadrones de color neutro. Por ejemplo, un mesón está formado por un quark y un antiquark de colores opuestos, mientras que un barión está formado por tres quarks de colores diferentes.

Los gluones, el bosón responsable de la interacción fuerte, debe tener color (bicolor) para poder intercambiar el color entre los quarks. Así, tenemos 8 posibles bicolors<sup>1</sup>.

La QCD es una teoría renormalizable formada por 8 bosones de gauge, no abeliana (a diferencia de QED) lo que nos lleva a que existe la interacción gluón-gluón que a su vez nos lleva a la libertad asintótica.

La mejor manera de describir QCD se hace a través del grupo de SU(3), que contiene 8 generadores (como 8 gluones) y es no abeliano.

### 6.2. Invariancia gauge local

Supongamos que tenemos un lagrangiano  $\mathcal{L}'(u(x), \partial_\mu(x))$  que es invariante global frente a determinadas transformaciones de simetría. Los campos Gauge nacen de responder a la pregunta de cómo podemos obtener un lagrangiano, que también sea invariante bajo transformaciones locales en el que los generadores dependen del punto.

Recordemos que una invariancia global depende de unas funciones arbitrarias. Por ejemplo en el grupo U(1) (QED) solo tenemos la fase global  $\alpha$  frente a la que es invariante. Sin embargo la exigencia de que  $\alpha$  dependa del punto  $\alpha \rightarrow \alpha(x)$  es lo que llamamos **invariancia gauge local**.

Así pues, al analizar el  $\delta\mathcal{L}'$  con una transformación local veremos que no obtenemos  $\delta\mathcal{L}' = 0$ , pues aparece un término no nulo. Para solucionarlo introducimos los campos gauge locales  $A_i(x)$ . En función

---

<sup>1</sup>En realidad podemos formar 9 bicolors diferentes, pero existe una ligadura.

de la teoría tendremos uno o varios campo.

Se puede probar que para que el lagrangiano sea invariante local basta con modificar la derivada  $\partial_\mu$  a la **derivada covariante** que incluye un término con el campo:

$$D_\mu u_i = \partial_\mu u_i + T_{ij}^k u_j A_{\mu k} \quad (6.2.1)$$

siendo  $T_{ij}^k$  los generadores de la transformación. Por ejemplo, en el caso del electromagnetismo es uno:

$$\delta u_i(x) = T_{ij}^k \epsilon_{jk}(x) \quad (6.2.2)$$

Ahora tendremos  $\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L}'(u_i, D_\mu u_i)$  aunque sigue sin ser invariante gauge local, ya que aún falta introducir el término que incluye al campo. Para mantener la invarianza local que acabamos de conseguir existen varios lagrangianos, pero el más simple de todos es el **lagrangiano de Young Miller** que es:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu,k} \quad (6.2.3)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - \frac{1}{2} f_{lmk} (A_\mu^l A_\nu^m - A_\nu^l A_\mu^m) \quad (6.2.4)$$

siendo  $f_{mlk}$  tal que

$$\{T_l, T_m\} = f_{mlk} T_k \quad (6.2.5)$$

las constantes de estructura del grupo de Lie. Así obtenemos finalmente el **lagrangiano completo invariante gauge local**

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}_{YM} \quad (6.2.6)$$

en el caso de un grupo abeliano tenemos que  $f_{mlk} = 0$  (caso QED) y en el no abeliano no (caso QCD) complicando los cálculos. En el caso particular de QCD al tener ser invariante bajo transformaciones SU(3) tenemos 8 bosones gauge, con 3 cargas conservadas

### 6.2.1. Ruptura espontánea de simetría

Las teorías Gauge en las que se han introducido campos gauge análogos al EM, son sin masa. Sin embargo los campos gauge de la interacción débil ( $Z$ ,  $W$ ) tienen masa. Añadir un término de masa no es trivial, ya que violarían la invarianza local que justo acabamos de conseguir al añadirlos, por lo que es necesaria otro enfoque del problema

La solución pasa por que los campos Gauge adquieren masa rompiendo la invarianza gauge local del vacío mientras el lagrangiano se mantiene invariante. Esto hace posible incluir a la vez en una misma teoría tanto bosones masivos como bosones sin masa, unificando teorías de bajo alcance con teorías de largo alcance. Algo de vital importancia para poder explicar de una forma la interacción débil y la interacción electromagnética simultáneamente.

El **teorema de Coleman** resume bien esto:

- Si el estado de vacío es invariante luego el lagrangiano también lo es necesariamente.
- Si el estado de vacío no es invariante luego el lagrangiano puede ser no invariante (ruptura explícita) o invariante (ruptura espontánea)

Y el **teorema de Goldstone** nos dice que en el caso de ruptura espontánea de simetría aparecen partículas de espín cero llamados goldstones, aunque nunca han sido observados experimentalmente.



# Capítulo 7

## Interacción electrodébil

### 7.1. La violación de Paridad

La ecuación de Dirac como ya hemos visto:

$$(\not{p} - m)\psi = 0 \quad (7.1.1)$$

Tiene soluciones libres bien conocidas por todos:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ipx} \quad \psi(x) = v(p)e^{ipx} \quad (7.1.2)$$

donde  $u(p)$  y  $v(p)$  son las funciones de onda de Dirac. En general tenemos varias soluciones en función del sistema de referencia en el que nos encontramos. Tenemos en total 4 soluciones: 2 para electrones (1 con espín +1/2 otra con espín -1/2) y 2 para positrones (1 con espín +1/2 y otra con espín -1/2):

$$u^\uparrow = \begin{pmatrix} \uparrow \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^\downarrow = \begin{pmatrix} \downarrow \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \downarrow \end{pmatrix} \quad v^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \uparrow \end{pmatrix}$$

donde

$$\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución más general de dicha ecuación es para un estado de partícula con un momento  $p$  y energía  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ :

#### Solución de Dirac más general:

$$u^\uparrow(p) = N \begin{pmatrix} \uparrow \\ \frac{p}{E+m} \uparrow \end{pmatrix} \quad u^\downarrow(p) = N \begin{pmatrix} \downarrow \\ -\frac{p}{E+m} \downarrow \end{pmatrix} \quad V^\uparrow(p) = N \begin{pmatrix} -\frac{p}{E+m} \downarrow \\ \downarrow \end{pmatrix} \quad V^\downarrow(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \uparrow \\ \uparrow \end{pmatrix}$$

## Ejercicios

### Ejercicio 5: Vida media del Bottom

### Exámenes

#### Examen 2024

##### Pregunta 1

¿Se conserva la paridad en la Electrodinámica Cuántica? ¿Y en la interacción fuerte descrita por la Cromodinámica Cuántica? ¿Y en la gravitación cuántica?

La paridad en la electrodinámica cuántica se conserva. En la interacción fuerte y en la gravitación cuántica también, solo se viola por la fuerza electrodébil. Esto se ve claramente en el carácter de las corrientes  $J^\mu$  de todas las fuerzas, siendo la débil la única con un término  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma^5)$ .

##### Pregunta 2

¿Coinciden los valores de  $G_F$  medidos en la desintegración  $\beta$  con los medidos en la desintegración del muón? ¿Qué factor origina la diferencia? ¿Juega algún papel que los quarks tengan masa? Indica sólo la idea.

No coinciden, ya que  $G_F^\beta = 1.136 \times 10^{-5}$  GeV y  $G_F^\mu = 1.166\,378\,8 \times 10^{-5}$  GeV. La diferencia fundamental está en el ángulo de cabbibo relacionado con las propiedades de los quarks, en particular con su masa (si no tuvieran masa el ángulo de cabbibo sería cero y coincidirían).

##### Pregunta 3

¿Cuál es la orientación preferente del espín del electrón emitido en la desintegración del  $^{60}\text{Co}$  (en reposo) respecto a su momento? ¿Y la del positrón en la emisión del  $^{14}\text{O}$ ? Explica por qué.

La orientación del espín del electrón será preferentemente hacia el sentido contrario que su momento, y la del positrón a favor de su momento. La interacción débil viola paridad totalmente, de tal modo que solo deja electrones con quiralidad a izquierdas y positrones con quiralidad a derechas. La consecuencia es que en el caso ultrarrelativista el electrón tendrá helicidad -1 y el positrón helicidad +1 (i.e., el espín y el momento serán antiparalelos y espín y el momento serán paralelos). Sin embargo al no ser una partícula sin masa, la helicidad y la quiralidad no se igualarán, por lo que en realidad es posible encontrar un electrón con helicidad +1 y un positrón con helicidad -1, aunque será mucho menos probable.

##### Pregunta 4

¿Era necesaria una teoría relativista para comprender la desintegración  $\beta$ , siendo como son muy bajas las velocidades del protón y del neutrón? ¿Es relativista la teoría de Fermi? ¿Es cierta la teoría de Fermi? Explica lo esencial.

Aunque las velocidades sean bajas, la teoría relativista es fundamental ya que si no no se entendería el

origen de  $\gamma^\mu$  (que proceden de una teoría cuántica relativista). La teoría de Fermi es relativista, aunque no es cierta, pues no es capaz de predecir el carácter quiral a izquierdas de las desintegraciones beta (aunque si el tiempo de vida).

### Pregunta 5

Di si es más probable la desintegración del  $\pi^-$  en electrón que en muón, y explica por qué con un dibujo. ¿Sabes el factor aproximado?

La desintegración del  $\pi^-$  en el muón mucho más probable (en un orden de  $1.3 \times 10^{-4}$ ), debido a que la masa del muón  $m_\mu \approx 105.7$  MeV y la del electrón  $m_e \approx 511$  keV. El  $\pi^-$  al ser una partícula con espín 0 y emitir un neutrino a derechas  $\bar{\nu}_R$ , hace que la conservación del momento-momento angular obligue al lepton a tener una helicidad positiva. La helicidad se iguala a la quiralidad en el caso ultrarrelativista, caso que se da de manera mucho más intensa en el electrón, y como un electrón no puede tener quiralidad a derechas en una interacción débil, prácticamente no se observan.

### Pregunta 6

¿Qué masa tienen, y cuánto viven aproximadamente en su sistema en reposo, los piones cargados?

Los  $\pi^\pm$  tienen una masa aproximada de  $m_{\pi^\pm} = 139.6$  MeV/c<sup>2</sup> y viven entorno a  $\tau_{\pi^\pm} = 26.0$  ns.

### Pregunta 7

Con  $r_p = 0.84$  fm, deduce del principio de indeterminación qué sabores de antiquarks deben estar presentes en el protón. ¿Cuánto midieron los experimentos de neutrinos para  $\bar{q}/(q + \bar{q})$ , y con qué energía aproximada del neutrino?

El principio de indeterminación:

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \quad (7.1.3)$$

nos dice que:

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{r_p} \approx 235 \text{ MeV/c} \quad (7.1.4)$$

que es suficiente para generar pares de quark-antiquark de tipo  $u, d, s$ , ya que  $m_u = 1.5$  MeV/c<sup>2</sup>,  $m_d = 4$  MeV/c<sup>2</sup>,  $m_s = 95$  MeV/c<sup>2</sup> (recordamos que la energía necesaria para generar un par quark-antiquark es, como mínimo,  $2m_q$  siendo  $q = u, d, s, c, b, t$ ).

### Pregunta 8

¿En qué consiste la variable y de Bjorken en un experimento de neutrinos sobre materia hadrónica, y cómo se determina en el laboratorio? Explícalo por separado para corrientes cargadas y para corrientes neutras.

La variable  $y$  de Bjorken se define como

$$y = \frac{pq}{pk} \quad (7.1.5)$$

donde  $p$  es el momento inicial del protón/neutrón,  $k$  sería el momento del neutrino inicial,  $k'$  sería el momento del lepton creado  $q = k - k'$  sería la diferencia de los momentos. Podemos reescribir la variable  $y$  como

$$y = 1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta)) \quad (7.1.6)$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre el haz incidente y el lepton (muón) saliente.

Para medirlo en el laboratorio lo calcularemos en función del bosón que interactue:

- En el caso de *corriente cargada* basta con caracterizar bien el haz incidente (energía y dirección) y el muón (ángulo saliente respecto la dirección, energía) y el punto de colisión.
- En el caso de *corriente neutra* también será importante conocer la masa/energía intercambiada con los hadrones  $X$ , además de las variables mencionadas para las corrientes cargadas.

### Pregunta 9

¿Por qué el  $\nu_\mu$  penetra más que el  $\mu^-$ , ambos con  $E = 1 \text{ GeV}$ ? El punto clave.

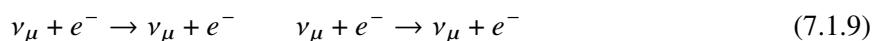
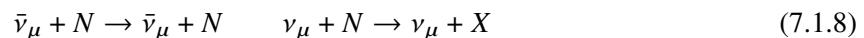
El punto clave y fundamental es básicamente que la sección eficaz del neutrino es mucho más pequeña que la del muón, además de que no interacciona por bremsstrahlung. Las interacciones con la materia nos hablan de secciones eficaces:

$$\sigma_\mu = 1 \text{ nb} \quad \sigma_{\nu_\mu} = E_\nu(\text{GeV}) \times 10^{-2} \text{ factorb} \quad (7.1.7)$$

### Pregunta 10

Las corrientes neutras se descubrieron en el CERN en 4 reacciones clave, en el experimento Gargamelle. ¿Cuántas de ellas puedes escribir? Denota el núcleo de Freón como  $N$ . ¿En qué año se publicaron los resultados?

Las reacciones clave fueron las dispersiones de neutrinos sobre materia hadrónica y la dispersión de electron-neutrino muónico



siendo  $N$  un núcleo Frenón ( $\text{CF}_3\text{Br}$ ) en el experimento y  $X$  un conjunto de hadrones. El año fue 1973.

### Pregunta 11

Escribe una colisión elástica concreta entre un neutrino y un quark con un sabor único. ¿Tiene necesariamente el acople una parte  $V + A$ ? Razona la respuesta.

Una colisión elástica concreta sería:

$$\nu_\mu + d \rightarrow \nu_\mu + d \quad (7.1.10)$$

La respuesta es que sí tiene una parte de acople  $V+A$ , ya que la corriente neutra, la única responsable de dicha interacción, ya que no intercambia sabor y no intercambia carga. y el fotón no interacciona con neutrinos. La respuesta es evidente cuando tenemos en cuenta que la corriente neutra tiene un pequeño porcentaje de  $V+A$ , a saber,  $g_L = 0.287$  y  $g_R = 0.042$ .

### Pregunta 12

Escribe los dobletes de isospín débil que forman los leptones conocidos, indicando su quiralidad y el valor de  $T_3$  en cada caso.

Los dobletes de isospín débil serían:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (7.1.11)$$

el valor de  $T_3$  es trivial,  $+1/2$  para los neutrinos y  $-1/2$  para los leptones cargados.

### Pregunta 13

Nombra los 4 bosones físicos de espín 1 de la teoría de unificación electrodébil, utilizando sus símbolos estándar. También los símbolos que corresponden a los 4 bosones gauge de la teoría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

Los 4 bosones físicos son:  $W^+, W^-, Z^0, \gamma$ . Los símbolos en la teoría gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  son, respectivamente,  $W_1, W_2, W_3, B$ .

### Pregunta 14

¿Permanece la corriente  $J_Y^\mu \equiv 2(J_{\text{em}}^\mu - J_3^\mu)$  invariante bajo rotaciones del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , en la teoría de unificación electrodébil? ¿Puedes explicitar cada término, en función de los spinores quirales  $e_R, e_L$  y  $\nu_{e,L}$ ?

Si, permanece invariante bajo rotaciones débiles de dicho grupo y en la teoría electrodébil, por construcción. Tedríamos que:

$$J_{\text{em}}^\mu = \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \quad (7.1.12)$$

$$J_3^\mu = \overline{\nu_{e,L}} \gamma^\mu \nu_{e,L} - \overline{e_L} \gamma^\mu e_L \quad (7.1.13)$$

La explicación es sencilla:

$$J_3^\mu = \overline{\chi_L} \gamma^\mu \sigma_3 \chi_L e^{i(p_f - p_i)}, \quad J_{\text{em}}^\mu = -\overline{e} \gamma^\mu e$$

y como los neutrinos  $T_3 = 1/2$  y los electrones  $T = -1/2$ , es trivial la expresión, mientras que para la parte electromagnética es el desglose de ambos términos por igual, ya que realmente no “diferencia” izquierdas y derechas.

### Pregunta 15

¿Es válida la teoría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  sólo para leptones, o también para los quarks? Escribe los 6 fermiones (3 leptones y 3 quarks) de la segunda generación que se acoplan en ella, indicando su multiplicidad y quiralidad.

La teoría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  es válida para cualquier partícula con hipercarga, solo que, al igual que para los leptones, asume quarks sin masa (no son físicos). De hecho la teoría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  no distingue los fermiones. Los 6 fermiones de segunda generación:

- Fermiones. Tenemos un doblete a izquierdas  $(\nu_\mu)_L$  y dos singlete a derechas  $(\mu)_R$  y  $(\nu_\mu)_R$ . Aunque el neutrino a derechas no se acopla al tener hipercarga  $Y = (2Q - T_3)$  nula.
- Quarks. Tenemos un doblete a izquierdas  $(s^c)_L$ , y dos singletes a derechas  $(u)_R$  y  $(d)_R$ .

### Pregunta 16

¿En qué máquina se midieron por primera vez  $M_{Z^0}$  y  $\sin^2 \theta_W$  con precisión  $10^{-4}$ ? Indica las partículas colisionantes, su energía, y el año en que se hizo.

Se midieron, por primera vez, en el experimento LEP (ALEPH,L3,DELPHI,OPAL) del CERN. Las partículas colisionantes eran  $e^+e^-$  con una energía de  $\sqrt{s} = 91$  GeV. Se midió en el 1991.

### Pregunta 17

¿Sabes cuánto vale en GeV el valor esperado en el vacío  $v$  del campo de Higgs? ¿Hay algún observable que permita determinarlo únicamente, en la teoría de unificación electrodébil? ¿Conoces la relación entre ambos?

El GeV esperado es de 246 MeV. Si, hay un observable, que es la constante de Fermi  $G_F$ . La relación es:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2} \quad (7.1.14)$$

**Pregunta 18**

¿Es capaz de entender el Modelo Estándar las leyes físicas (no matemáticas) que subyacen en el potencial de autoacoplo del campo de Higgs? ¿Se parece a algún fenómeno que hayas estudiado en otras materias?

No, la teoría no nos informa sobre el mecanismo físico que da lugar al valor en el vacío  $v$  del campo  $H$ . Se puede parecer al método que Landau y Ginzburg le dieron masa al fotón en el interior de un superconductor (1950).

**Pregunta 19**

¿Conoces las masas en  $\text{GeV}/c^2$  de los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ ? Indica la relación que tienen en la teoría de Weinberg con el valor esperado en el vacío del campo de Higgs  $v$  y con las constantes de acople de la simetría gauge.

Si, las masas son  $m_{W^\pm} = 80.38 \text{ GeV}/c^2$  y  $m_Z = 91.18 \text{ GeV}/c^2$ . Las diferentes relaciones que debemos considerar son:

$$v^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda} \quad M_W = \frac{1}{2}vg \quad M_Z = \sqrt{g^2 + (g')^2} \frac{v}{2} \quad (7.1.15)$$

siendo  $g$  y  $g'$  las constantes de acople relacionables con  $\theta_W$  y  $e$ , tal que  $g = e/\sin \theta_W$  y  $g' = e/\cos \theta_W$ .

**Pregunta 20**

¿De qué único parámetro depende el cociente  $M_{Z^0}/M_{W^\pm}$ ? ¿Qué simetría gauge hace posible su independencia de  $v$  y cuáles son sus constantes de acople?

Depende únicamente de  $\cos(\theta_W)$ , es decir, del coseno del ángulo de Weinberg. La simetría que hace posible esta es efectivamente la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , que obliga a que la única relación entre las masas sea el ángulo de Weinberg. Las constantes de acople son  $g$  y  $g'$ , relacionables con  $e$  y  $\theta_W$ , tal que  $g = e/\sin \theta_W$  y  $g' = e/\cos \theta_W$ .

**Pregunta 21**

Indica el tipo de relación que existe entre la constante de Fermi  $G_F$ , la constante de acople  $g^2$  del grupo  $SU(2)_L$  y la masa del  $W^\pm$ .

La relación entre la constante real  $G_F$ ,  $g$  y  $M_W$  es trivial:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (7.1.16)$$

y su valor es  $G_F = 1.166\,378(7) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  y  $M_W = 80.43 \text{ GeV}/c^2$ .

### Pregunta 22

¿Se pudo predecir históricamente la masa del bosón  $W^\pm$  a partir de la constante de Fermi  $G_F$  y la carga del electrón  $e$ ? ¿Qué otro parámetro estuvo involucrado en la predicción? ¿Era conocido cuando se descubrió?

No se podría predecir, ya que la constante de acople  $g = e/\cos(\theta_W)$  depende del ángulo de Weinberg, ya que la masa del bosón W:

$$M_W = \left( \frac{\sqrt{2}g^2}{8G_F} \right)^{1/2} \quad (7.1.17)$$

El bosón W fue descubierto y su masa del bosón medida antes (SPS CERN, 1983) que el cálculo con precisión de  $\theta_W^2$  (LEP CERN, 1991).

### Pregunta 23

¿Es suficiente la teoría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  para predecir  $M_{Z^0}$ , aun conociendo de forma empírica las constantes  $G_F$  (relacionada con  $M_{W^\pm}$ ),  $e$ , y  $\sin^2 \theta_W$ ? Explica el contenido físico de la predicción sobre el parámetro  $\rho$ .

No, ya que la teoría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  no es capaz de dar valor al parámetro  $\rho$ , es decir, no es capaz de dar una relación entre  $M_Z$  y  $M_W$  con ninguna constante.

Esta predicción impone una fuerte restricción sobre el tipo de ruptura espontánea de simetría permisible.

### Pregunta 24

¿Siguen los módulos de la matriz CKM algún patrón aproximado en potencias del seno  $\lambda$  del ángulo de Cabibbo? Indica el nombre del físico que postuló dicho patrón, y cuál fue el descubrimiento que le motivó a hacerlo.

Si, un patrón tal que:

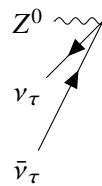
$$|V_{CKM}| \simeq \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1.18)$$

donde  $\lambda \equiv \sin \theta_c$ . Los físicos que lo propusieron fueron Kobayashi y Maskawa en 1973. El motivo fue describir que los quarks tienen masa (SLAC, 1971-1973).

### Pregunta 25

¿Es posible en el Modelo Estándar la desintegración  $Z^0 \rightarrow \nu_\tau \bar{\nu}_\tau$ ? Dibuja el diagrama de Feynman. ¿Predice la teoría los valores de  $C_V$  y  $C_A$  para el  $\nu_\tau$  y de  $\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu_\tau \bar{\nu}_\tau)$ ? ¿En qué acelerador se midió esta última, y en qué año?

Si, es posible dicho decaimiento. El diagrama de Feynman:



Fue medido en el LEP CERN en 1991. Si, la teoría predijo dichos valores, descubriendo que había 3 sabores de neutrinos.

### Pregunta 26

¿Puede formarse un bosón  $W^-$  en el choque entre un quark  $d$  y un antiquark  $\bar{u}$ ? Indica qué partículas harías colisionar para formarlo, y a qué energía mínima (supón  $x \approx \frac{1}{3}$  y que los quarks arrastran  $\approx \frac{1}{2}$  del momento del protón). Indica quién lo hizo y el año.

Dado que  $d$  tiene carga -1/3 y  $\bar{u}$  una carga -2/3, en principio no se viola carga. Logicamente debemos usar algún tipo de partícula cargada, como quarks, usando por ejemplo colisiones de protón-antiproton. La energía más pequeña posible en el centro de masas de los quarks sería  $\sqrt{s} = M_W c^2 = 80.4$  GeV. Suponemos que todas las partículas son ultrarrelativistas tal que  $E \approx pc$ . Nos dicen que los quarks arrastran 1/2 del momento del protón, por lo que:

$$\sqrt{s}_{qq} = (E_{q1}^2 + E_{q2}^2)^{1/2} = \frac{\sqrt{(2)}}{3} E_p = \frac{1}{3} \sqrt{s}_{p\bar{p}} \quad (7.1.19)$$

Ahora si se llevan el momento de la mitad:

$$\sqrt{s}_{qq} = \frac{1}{6} \sqrt{s}_{p\bar{p}} \longrightarrow \sqrt{s}_{p\bar{p}}^{\text{mín}} \approx 6M_W c^2 \approx 482 \text{ GeV} \quad (7.1.20)$$

Ellos usaron 540 GeV.

### Pregunta 27

¿Cuántos parámetros reales, medibles e independientes tiene la matriz  $V_{CKM}$  (módulos y fases)?

Tenemos en total  $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$  parámetros, con  $N=3$ , lo que implica en total 1 fase real, medible e independiente, que en la matriz CKM será  $\lambda \equiv \sin \theta_c$ .

### Pregunta 28

Realiza el conteo del número total de parámetros reales que tiene el Modelo Estándar, de forma no redundante. Esto incluye las masas de quarks y leptones, así como los parámetros medibles e independientes de la matriz CKM, y otros. Ten en cuenta que el modelo predice masa nula de los neutrinos. Para QCD, toma sólo  $\alpha_s(M_{Z^0})$ .

Tenemos en total la masa de todos los quarks (6), la masa de todos los leptones (3), la masa del bosón de Higgs (1), el valor del vacío  $v$  (1), las constantes de acople (2)  $g$  y  $g'$ , la constante de QCD (1), y los parámetros de la matriz CKM, 3 reales y 1 fase (4). En total contabilizamos 18.

Las masas de los bosones, la constante de Fermi y la carga del electrón se pueden calcular a partir de  $g$ ,  $g'$  y  $v$ :

$$e = g \sin \theta_W \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} \quad G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} \quad M_W = gv \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos(\theta_W)} \quad (7.1.21)$$

### Pregunta 29

¿Qué fracción (%) de los parámetros anteriores corresponde a constantes de acople adimensionales de los grupos de simetría gauge, y qué fracción a física desconocida?

Pues serían las constantes  $g$ ,  $g'$  y  $\alpha$ , por lo que  $2/18=12\%$  a física desconocida el resto  $88\%$ .

### Pregunta 30

Sabiendo que  $g \approx 0.629$  y  $g' \approx 0.345$ , ¿predice la teoría el valor de la carga del electrón sólo a partir de estos dos parámetros? Si es cierto, calcula  $e$  (en unidades  $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$ ), así como la constante adimensional  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ , y compara con su valor real.

La ecuación que los relaciona es sencilla:

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} \quad (7.1.22)$$

de lo que se deduce que

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \approx 0.302 \quad (7.1.23)$$

y  $\alpha \approx 0.00728$  tal que  $1/137 \approx 0.00729$ .

# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Formulario

Slashed:

$$\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$$

Commutacion de  $\gamma^\mu$ :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

