

# Fisica del Estado Solido

Daniel Vázquez Lago



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>7</b>
<b>1. Estructura cristalina</b>	<b>9</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	9
1.1.1. Red . . . . .	9
1.1.2. Base atómica y estructura cristalinas . . . . .	10
1.1.3. Celda: celda unitaria, primitiva, Wigner-Seitz. . . . .	11
1.1.4. Otras definiciones . . . . .	13
1.2. Tipos fundamentales de redes: Redes de Bravais . . . . .	13
1.2.1. Características de las redes del sistema cúbico . . . . .	14
1.2.2. Red diamante . . . . .	16
1.3. Ejemplos . . . . .	16
1.4. Empaquetamiento compacto . . . . .	16
1.5. Intersticios o huecos estructurales . . . . .	18
1.6. Defectos y desorden en los cristales . . . . .	18
1.6.1. Defectos puntuales . . . . .	19
1.6.2. Concentración de defectos térmicos puntuales en equilibrio . . . . .	20
1.6.3. Defectos de línea . . . . .	21
<b>2. Red recíproca y difracción de rayos X</b>	<b>23</b>
2.1. Red recíproca en tres dimensiones . . . . .	23
2.1.1. Definición de la red recíproca . . . . .	23
2.1.2. Red recíproca como transformada de Fourier . . . . .	25
2.1.3. Familias de planos reticulares . . . . .	26
2.1.4. Planos reticulares e índices de Miller . . . . .	27
2.1.5. Zonas de Brillouin . . . . .	28
2.2. Difracción . . . . .	29
2.2.1. Ley de Bragg . . . . .	31
2.3. Factor de estructura . . . . .	32
2.3.1. Factor de estructura atómico . . . . .	32
2.3.2. Factor de estructura para bases poliatómicas . . . . .	33
2.3.3. Cálculo de reglas de selección . . . . .	33
2.4. Diagramas de difracción . . . . .	34
<b>3. Enlace cristalino</b>	<b>37</b>
3.1. Clasificación de los sólidos . . . . .	37
3.2. Cristales moleculares . . . . .	37
3.2.1. Interacción de <i>van der Waals-London</i> . . . . .	37
3.2.2. Interacción de Lennard-Jones . . . . .	40

3.3. Cristales iónicos . . . . .	42
3.4. Cristales covalentes . . . . .	44
3.4.1. La molécula ion de hidrógeno $H_2^+$ . . . . .	45
3.4.2. La molécula de hidrógeno ( $H_2$ ) . . . . .	46
3.4.3. Hibridación . . . . .	48
3.5. Cristales metálicos . . . . .	50
<b>4. Dinámica de redes</b>	<b>53</b>
4.1. Vibraciones de los cristales con base atómica . . . . .	53
4.1.1. La cadena lineal monoatómica . . . . .	53
4.1.2. Cristales monoatómicos tridimensionales . . . . .	57
4.2. Vibraciones de cristales con base diatómica . . . . .	58
4.2.1. La cadena lineal diatómica . . . . .	58
4.2.2. Cristales tridimensionales poliatómicos . . . . .	60
4.3. Fonones . . . . .	61
4.3.1. Cuantización de las ondas elásticas . . . . .	61
4.3.2. Espectroscopía de fonones . . . . .	62
4.4. Vibraciones de los cristales iónicos . . . . .	63
<b>5. Propiedades térmicas reticulares</b>	<b>67</b>
5.1. Densidad de modos . . . . .	67
5.1.1. Condiciones de contorno . . . . .	67
5.1.2. Cálculo de la densidad de modos . . . . .	68
5.1.3. Aproximación de Debye . . . . .	69
5.2. Capacidad térmica reticular . . . . .	70
5.2.1. Estadística de fonones . . . . .	70
5.2.2. Cálculo de la capacidad térmica . . . . .	70
5.3. Efectos anarmónicos . . . . .	72
5.3.1. Dilatación térmica . . . . .	73
5.3.2. Conductividad térmica . . . . .	74
<b>6. Teoría de Drude y Sommerfeld</b>	<b>79</b>
6.1. Teoría de Sommerfeld o de electrones libres . . . . .	79
6.1.1. Niveles de energía . . . . .	79
6.1.2. Estadística de Fermi-Dirac . . . . .	82
6.2. Energía interna y capacidad calorífica . . . . .	83
6.3. Tratamiento clásico de electrones: teoría de Drude . . . . .	84
6.3.1. Teoría de Drude . . . . .	85
6.3.2. Ecuación dinámica de Drude . . . . .	85
6.4. Electrones en campos externos . . . . .	86
6.4.1. Electrones en un campo eléctrico y conductividad eléctrica . . . . .	86
6.4.2. Electrones en campo magnético y eléctrico . . . . .	87
6.4.3. Dependencia con la temperatura de la conductividad eléctrica . . . . .	88
6.4.4. Conductividad AC y propiedades ópticas . . . . .	89
6.5. Transporte térmico . . . . .	90
6.5.1. Efecto Peltier y Seebeck . . . . .	92
6.6. Interacción electrón-electrón . . . . .	92

<b>7. Electrones en un potencial periódico: teoría de bandas</b>	<b>95</b>
7.1. Cadena de electrones . . . . .	95
7.1.1. Cadena de electrones en una dimensión . . . . .	96
7.1.2. Solución a la cadena de electrones unidimensional . . . . .	97
7.1.3. Introducción al llenado de bandas . . . . .	99
7.1.4. Múltiples bandas . . . . .	100
7.2. Aproximación de red vacía . . . . .	101
7.2.1. Teoría de perturbaciones para estados degenerados . . . . .	102
7.2.2. Aproximación a red vacía en 2 y 3 dimensiones . . . . .	105
7.3. Teorema de Bloch . . . . .	105
7.4. Electrones fuertemente ligados . . . . .	107
7.5. Superficie de Fermi y zonas de Briollouin . . . . .	109
7.6. Metales, aislantes y semiconductores . . . . .	111
<b>8. Dinámica semiciclásica de electrones de Bohr</b>	<b>113</b>
8.1. Ecuaciones del movimiento . . . . .	113
8.2. Masa efectiva . . . . .	114
8.3. Movimiento en campos eléctricos. Concepto de hueco. . . . .	115
8.4. Movimiento en campos magnéticos. . . . .	117
8.4.1. Resonancias ciclotrón: determinación experimental de masas efectivas. . . . .	118
8.4.2. Magnetoresistividad y efecto Hall . . . . .	119
<b>9. Cristales semiconductores</b>	<b>123</b>
9.1. Concentración de portadores en equilibrio térmico . . . . .	124
9.2. Semiconductores dopados . . . . .	125
9.3. Concentración de portadores en Semiconductores dopados . . . . .	127
9.4. Conductividad y movilidad . . . . .	127
9.5. Semiconductores inhomogéneos: la unión p-n. . . . .	129
<b>10. Magnetismo de sólidos</b>	<b>133</b>
10.1. Relaciones básicas . . . . .	133
10.2. Diamagnetismo atómico . . . . .	133
10.3. Paramagnetismo atómico . . . . .	134
10.3.1. Origen del momento magnético atómico . . . . .	135
10.3.2. Dependencia de la magnetización respecto $\vec{B}$ y $T$ . . . . .	136
10.3.3. Ley de Curie . . . . .	136
10.4. Paramagnetismo de los electrones de conducción . . . . .	137
10.5. La interacción de intercambio . . . . .	138
10.6. Ferromagnetismo . . . . .	139
10.7. Dominios ferromagnéticos . . . . .	140
10.8. Orden ferrimagnético . . . . .	143
<b>11. Ejercicios y soluciones</b>	<b>145</b>
11.1. Enero 2023 . . . . .	145
Enero 2023 . . . . .	145
11.2. Enero 2021 . . . . .	153
Enero 2021 . . . . .	153
11.3. Enero 2020 . . . . .	160
Enero 2020 . . . . .	160
Julio 2019 . . . . .	163

Enero 2019 . . . . .	164
----------------------	-----

## Prefacio

En este libro podéis encontrar unos apuntes y ejercicios/exámenes de la asignatura de Física del Estado Sólido cursada en el año 2024/2025 en la Universidad de Santiago de Compostela. En general he tratado de que fuera lo más completa posible, pero como podréis ir comprobando aún faltan bastantes conceptos que incluir. Esta es una lista de mejoras generales que podréis completar los lectores a partir del código libre de estos apuntes.:

1. Incluir más ejercicios y exámenes.
2. Incluir imágenes que no sean del libro que fallan en la impresión. Además faltan un montón de imágenes que incluir, y que podrían explicar mejor ciertos conceptos.
3. Una idea buena sería transformar el formato de este libro a uno que incluya anotaciones a los márgenes de las páginas para poder hacer mejores explicaciones de algunas imágenes, y que sea más completo.
4. Desarrollar mejor los conceptos en la parte de la teoría de bandas.
5. Desarrollar mejor ciertas explicaciones en la parte magnética, es bastante pobre.
6. Desarrollar mejor los conceptos de zona reducida y extendida, es bastante lioso.
7. Añadir un apéndice con conceptos de mecánica estadística (función de partición, estadísticas, Z...)



# Capítulo 1

## Estructura cristalina

Las sustancias cristalinas se caracterizan por una periodicidad espacial perfecta, que facilita enormemente la tarea de comprender y calcular sus propiedades físicas. Las sustancias cristalinas se encuentran comúnmente en forma de policristales (aglomerados de pequeñas cristales orientados desordenadamente llamadas cristalitos o granos). Existe una categoría importante de sólidos, que no se tratará aquí denominados amorfos, como el vidrio común y muchos polímeros, que no pertenecen a los sólidos cristalinos, pues aunque poseen cierto orden de corto alcance carecen del orden de largo alcance característico de los cristales.

### 1.1. Conceptos básicos

En esta sección introduciremos las definiciones más importantes que usaremos a lo largo del tema. Es importante memorizarlos bien, ya que serán usados recursivamente a lo largo del libro. También es importante leerlos en el orden que proponemos, ya que muchos derivan de conceptos previos. Estas definiciones son fundamentales para el estudio de la Física del Estado Sólido, y dado que existe una amplísima gama de definiciones que podemos encontrar en la literatura, trataremos de incluir aquellas más interesantes. Dado que nuestro principal libro de referencia es el Física del Estado Sólido [1], usaremos estas para definir los conceptos básicos, aunque es probable que introduzcamos cambios con la finalidad de que se entiendan mejor.

#### 1.1.1. Red

El concepto de red es un concepto fundamental, por lo que es necesario tener muy claro su significado.

**Definición 1.1 (Red).** *Una red es un conjunto de puntos discretos del espacio con vectores posición dados por la combinación lineal*

$$\mathbf{r} = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2 + u_3 \mathbf{a}_3 \quad (1.1.1)$$

donde los  $u_i$  barren todos los enteros. Los  $\mathbf{a}_i$  se denominan **vectores bases primitivos**, y deben ser linealmente independientes.

Con esto podremos tener una idea de lo que es una red. La red más básica que nos podemos imaginar en 2D es el conjunto de puntos definidos por los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$ , mientras que en 3D es el

conjunto de puntos formado por los vectores  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$ . Es bueno imaginarse un conjunto formado por otros vectores, como  $(\hat{\mathbf{i}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}), \hat{\mathbf{k}})$ , o  $(\hat{\mathbf{i}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}), \hat{\mathbf{k}})$ , ya que nos permitirá pensar rápidamente en varias redes. Como bien dice el Kittle [2]: una red no es más que una distribución regular de puntos en el espacio, una abstracción matemática: para crear una estructura cristalina hace falta colocar átomos, y asignar estos a los puntos de la red.

Sin embargo la definición 1.1 es, en cierto modo, engañosa, ya que nos da a entender que si los puntos  $u_i$  no son enteros no se puede formar una red, y esto es falso. Se puede formar una red con valores de  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$  con valores no enteros (por ejemplo, semienteros), solo que en este caso los vectores  $\mathbf{a}_i$  serán **vectores no primitivos**. Sin embargo, *cualquier red posee unos vectores primitivos*. Una definición muy interesante es la que dan en el capítulo 12 del [3]:

**Definición equivalente 1.1.1.** *Una red es un conjunto de puntos donde el alrededor de cada uno de los puntos es indistinguible de cualquier otro punto. Véase la imagen 1.1*

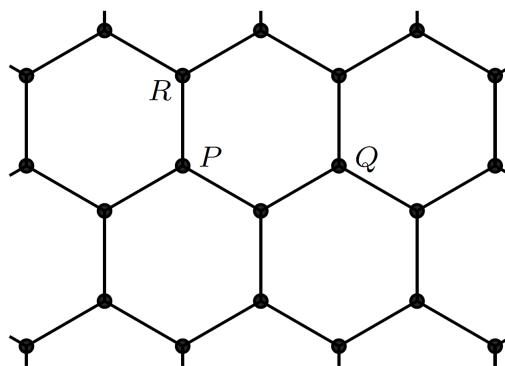


Figura 1.1: Como se puede ver  $R$  y  $P$  no son equivalentes, mientras que  $P$  y  $Q$  sí.

### 1.1.2. Base atómica y estructura cristalinas

Como hemos mencionado en el párrafo anterior, para obtener un cristal tenemos que colocar átomos/moléculas en la red. Básicamente tenemos que asignar a cada punto de red una conjuntos de átomos. A esto se le llamará base atómica, tal y como se define en [1]:

**Definición 1.2 (Base atómica).** *Conjunto de átomos que se asocia a todos y cada uno de los puntos de la red. Se puede tener una base monoatómica (a cada punto de la red se le asocia un átomo), diatómica (dos átomos), triatómica (tres átomos)...*

Una vez tenemos una red y una base atómica asociada a cada punto de red obtendremos la estructura cristalina:

**Definición 1.3 (Estructura cristalina o cristal).** *Es la combinación red+base atómica, asociándose a cada punto de red una base atómica.*

Aunque en el manual [1] no lo menciona, hay que diferenciar entre los vectores base primitivos de la estructura y cristal y vectores base primitivos de la red. Lógicamente podemos coger una base atómica de un número de átomos arbitrario, y hacer traslaciones sencillas para obtener la red cristalina. Sin embargo

### 1.1.3. Celda: celda unitaria, primitiva, Wigner-Seitz.

Una celda es siempre un volumen o un área (en función de la dimensión del espacio), mientras que los diferentes adjetivos denotan las características para cada celda. El tipo de celda más importante es el tipo la celda unitaria primitiva.

**Definición 1.4 (Celda unitaria).** *Volumen (en el caso de una red tridimensional, superficie en una red 2-dimensional) que mediante traslaciones puede recrear la red. Puede contener el número de puntos de red que queramos<sup>1</sup>. La exigencia de que solo tenga uno nos llevará a otra definición.*

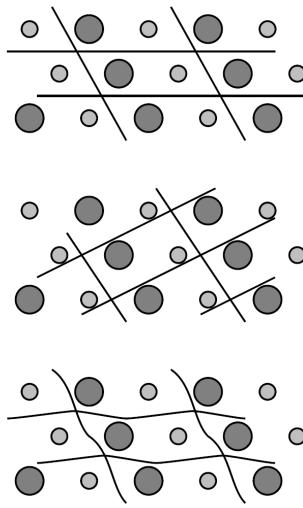


Figura 1.2: La elección de una celda unitaria no es única. Todas estas celdas unitarias pueden ser usadas para reconstruir el cristal.

**Definición 1.5 (Celda unitaria primitiva).** *Decimos que la red y los vectores son primitivos si dos puntos cualesquiera  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  satisfacen siempre la expresión 1.1.1 con una adecuada selección de los números enteros  $u_1, u_2, u_3$ . Denominamos como celda al volumen que ocupa dicho punto de red que se puede replicar mediante traslaciones usando vectores primitivos. En el momento que para replicar la estructura se necesita un no entero la celda, aunque se replique, ya no es primitiva. No existe ninguna celda de volumen menor que pueda servir como bloque constructor para la estructura cristalina. Toda celda primitiva es unitaria. La figura 1.3 muestra en la parte inferior dos posibles celdas unitarias con sus vectores bases asociados.*

Para una red existe más de una elección de vectores base primitivos. Todas las celdas primitivas tienen el mismo volumen pues tienen asociado uno y sólo un punto de red. Todos los puntos de una red son indistinguibles en el sentido de que la red se ve igual desde cualquiera de sus puntos (propia definición de red). También se puede decir que es invariante por traslaciones de vectores de red (*simetría de traslación*).

**Definición 1.6 (Vectores base y celdas no primitivas).** *Vectores base no primitivos: son aquellos que generan la red por combinaciones lineales de la forma de la ecuación 1.1.1 pero donde los  $u_i$  toman también valores no enteros. Un ejemplo es la celda cuadrada centrada que se muestra en la figura . Las celdas (unitarias) no primitivas o celdas convencionales correspondientes son*

<sup>1</sup>Viene del inglés “unity cell” que más bien se podría traducir como celda unidad. De esta forma la entenderíamos como la unidad que nos permite recrear la red con traslaciones. El problema semántico es evidente, ya que en español la palabra celda ya implica unidad que puede replicar la estructura.

siempre de mayor volumen que las primitivas por tener asociado más de un punto de red. Para algunos propósitos (por ejemplo, la indexación de máximos de difracción de rayos x que se verá en el Capítulo 2) la combinación red+base puede variarse, aunque sea a costa de aumentar el número de átomos de la base. En la figura 1.3 puede verse en la parte superior un conjunto de vectores base que no forman una celda primitiva, mientras en la parte inferior (e inferior izquierda) podemos ver vectores base que sí forman una celda primitiva.

**Definición 1.7 (Celda de Wigner-Seitz).** Se construye de la siguiente forma: trazar segmentos que conectan a un punto dado de la red con todos sus vecinos próximos; trazar los planos mediatrixes a dichas líneas. La región así encerrada (poliedro en 3D, polígono en 2D) es la celda de Wigner-Seitz. Ver el ejemplo 2D de la Figura 1.5. La celda de Wigner-Seitz es **siempre primitiva** y contiene todas las simetrías de la red.

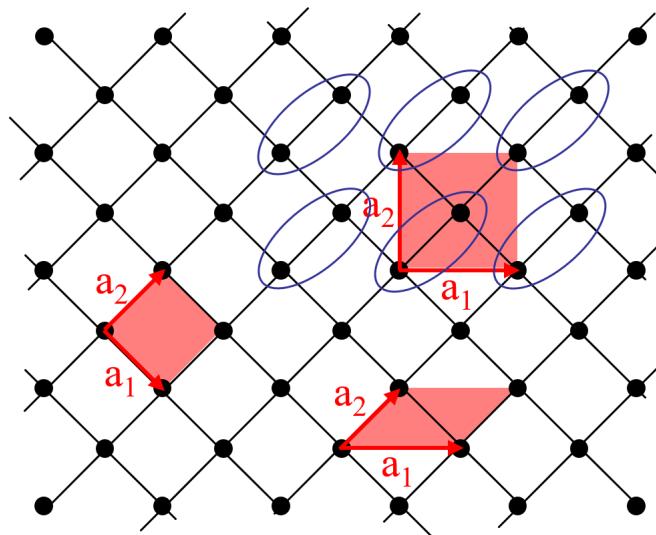


Figura 1.3: Ejemplos de vectores unitarios y sus correspondientes celdas unitarias.

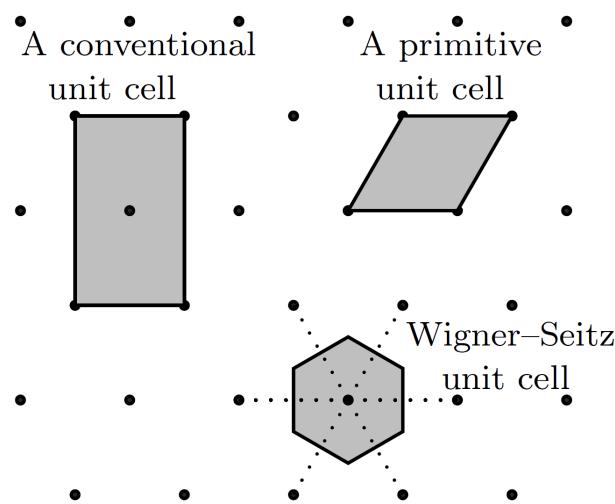


Figura 1.4: Podemos ver algunas de las celdas unitarias para una red triangular.

### 1.1.4. Otras definiciones

**Definición 1.8 (Otras simetrías).** Invariancia por inversión ( $\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$ ), eje de rotación de orden  $n$  (invariancia por giro del ángulo  $2\pi/n$  alrededor del eje), planos de simetría, centros de inversión...

**Definición 1.9 (Número de coordinación).** Es la número de vecinos más próximos (misma distancia) a un punto cualquiera de la red. La misma noción se aplica a átomos cuando se trata de cristales. También se le llaman **índice de coordinación o número de primeros vecinos**.

**Definición 1.10 (Familia de planos reticulares).** Conjunto de planos paralelos y equiespaciados que contienen todos los puntos de la red.

**Definición 1.11 (Número de defectos de Schottky).** (vacantes) en un cristal a temperatura  $T$ :

$$n \approx Ne^{-\epsilon_v/k_B T} \quad (1.1.2)$$

$N$  es el número de átomos y  $\epsilon_v$  la energía necesaria para formar una vacante. Se desarrolla mejor en los apartados 1.6.1 y 1.6.2.

**Definición 1.12 (Número de defectos de Frenkel).** (vacantes-átomos interesticiales) en un cristal a temperatura  $T$ :

$$n \approx \sqrt{NN'}e^{-\epsilon_F/k_B T} \quad (1.1.3)$$

$N$  es el número de átomos,  $N'$  en número de intersticios, y  $\epsilon_v F$  la energía necesaria para formación de un defecto de este tipo. Se desarrolla mejor en los apartados 1.6.1 y 1.6.2.

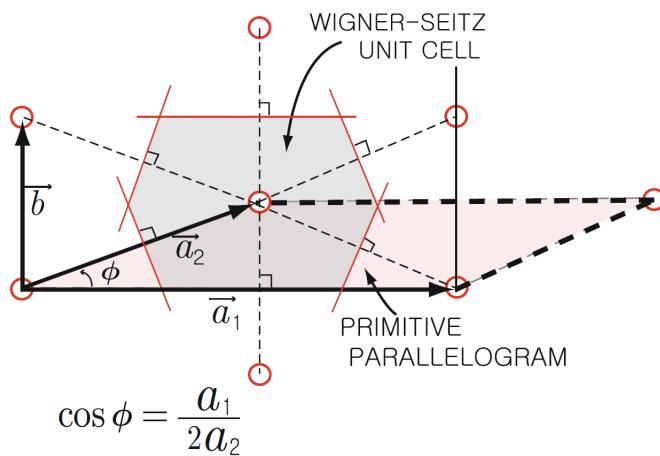


Figura 1.5: celda de Wigner-seitz 2D.

## 1.2. Tipos fundamentales de redes: Redes de Bravais

En la figura 1.6 podemos ver los 14 tipos de redes, llamadas **redes de Bravais**. Solo las celdas etiquetadas como *simples* son primitivas. Estos 14 tipos pueden agruparse a su vez en los 7 *sistemas cristalinos* indicados en la tabla 1.1 (cuando escribimos  $a = b = c$  (o  $a_1 = a_2 = a_3$ ) nos referimos a que todos los lados son igual de largos).

Sistema cristalino	Simetría característica	Número de redes de Bravais	Características de la celda unitaria
Triclinico	Ninguna	1 (Simple)	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
Monoclinico	1 eje de rotación binario ( $n=2$ )	2 (Simple, centrada en las bases)	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
Ortorrombico	2 ejes binarios ( $n=2$ ) mutuamente perpendiculares	4 (Simple, Centrada en las bases, Centrada en el cuerpo, Centrada en las caras)	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	1 eje cuaternario ( $n=4$ )	2 (Simple, Centrada centrada en el cuerpo)	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Cúbico	4 ejes cuaternarios ( $n=4$ ) perpendiculares entre sí	3 (Simple, Centrada en el cuerpo, Centrada en las caras)	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Hexagonal	1 eje senario ( $n=6$ )	1 (Simple)	$a = b \neq c$ $\alpha = 120^\circ$ $\beta = \gamma = 90^\circ$
Romboédrica	1 eje ternario ( $n=3$ )	1 (Simple)	$a = b = c$ $120^\circ > \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$

Tabla 1.1: Redes de Bravais en función del sistema cristalino.

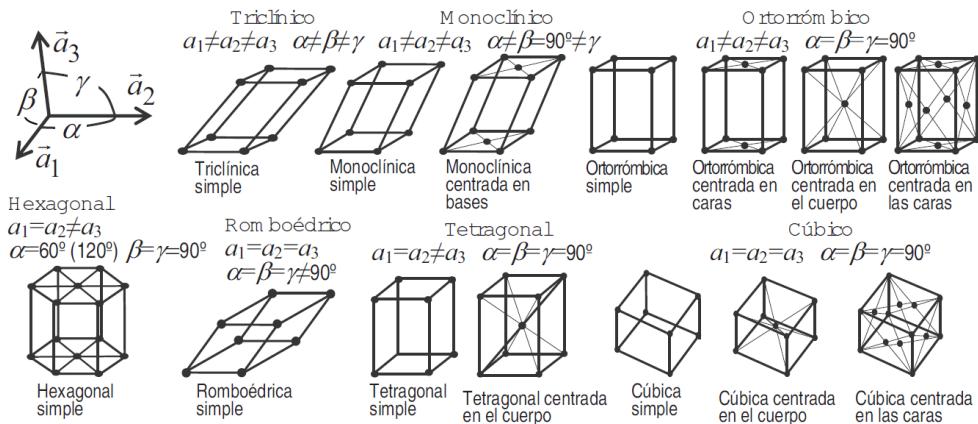


Figura 1.6: celdas unitarias de las 14 posibles redes de Bravais.

### 1.2.1. Características de las redes del sistema cúbico

Las redes del sistema cúbico son las redes mas importantes, por tanto conocer sus características (vectores base primitivo, número de primeros y segundos vecinos, distancias entre vecinos...) es fundamental. Por eso presentamos la tabla 1.2, para tener una referencia a la hora de hacer ejercicios. Como siempre la elección de los vectores unitarios primitivos es arbitraria, siempre habiendo otra posible elección. Por ejemplo otro vector base para la *bcc*(de hecho es la escogida en el [3]) puede ser

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0) \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0) \quad \mathbf{a}_3 = (1/2, 1/2, 1/2) \quad (1.2.1)$$

Red (parámetro $a$ )	<i>sc</i>	<i>bcc</i>	<i>fcc</i>
Vectores unitarios por celda convencional	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$
Volumen celda convencional	$a^3$	$a^3$	$a^3$
Puntos de red por celda convencional	1	2	4
Puntos de red por unidad de volumen	$1/a^3$	$2/a^3$	$4/a^3$
Número de primeros vecinos	6	8	12
Número de segundos vecinos	12	6	6
Distancia entre primeros vecinos	$a$	$a\sqrt{3}/2$	$a/\sqrt{2}$
Distancia entre segundos vecinos	$\sqrt{2}a$	$a$	$a$
Vectores unitarios primitivos	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$	$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}a(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$	$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$

Tabla 1.2: Características de las redes del sistema cúbico

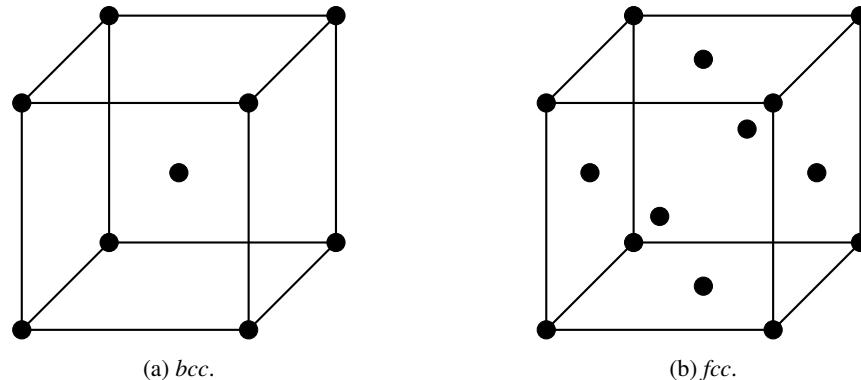


Figura 1.7: Imágenes de las celdas convencionales de la fcc y la bcc

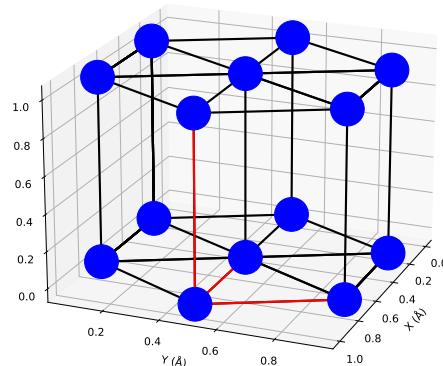


Figura 1.8: Red hexagonal, con el rojo se detallan los vectores base primitivos.

Dibujar mejor las redes fcc y bcc, incluir vectores unitarios primitivos.

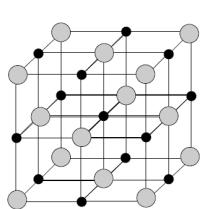
### 1.2.2. Red diamante

La red diamante tampoco es mencionada en el [1] pero sí en el [4], por lo que es importante describirla, aunque sea escuetamente, para poder hacer algún ejercicio. La **red diamante** es una red *fcc* pero con una base diatómica, de tal modo que si uno de los átomos está en  $\mathbf{r}$  el otro se encontrará en  $\mathbf{r} + \alpha(1/4, 1/4, 1/4)$ .

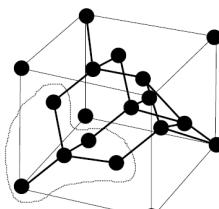
Las características de la red diamante son las mismas que la *fcc* pero teniendo en cuenta la base diatómica, por lo que el número de puntos de red para la celda convencional es 4 pero el número de átomos será 8. Por otro lado cambiará el número de primeros vecinos (ahora son 4, ya que cada átomo está en un tetraedro), mientras que la fracción de empaquetamiento es del 34 %. El ángulo entre los vectores que unen dos primeros vecinos con un átomo es de  $108^{\circ}47'$ , lo cual se puede calcular usando el producto escalar.

Imagen de la red de diamante y sus datos (vectores primitivos, distancia entre vecinos)

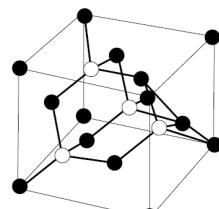
### 1.3. Ejemplos



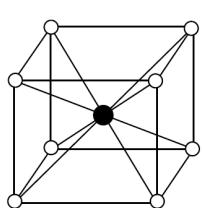
NaCl  
Similares: MgO, PbS,  
KCl, AgBr,...



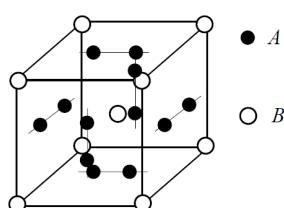
Diamante  
Similares: Ge, Si, Sn,...



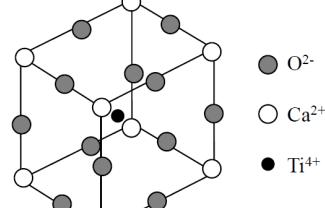
ZnS (blendita de zinc)  
Similares: SiC, GaP,  
GaAs, InSb, AgI,...



CsCl  
Similares: AlNi,  
CuZn (latón  $\beta$ ),  
CuPd, NH<sub>4</sub>Cl, TlI,...



Estructura A-15  
aleaciones binarias  $A_3B$   
 $Nb_3Ge$ ,  $Nb_3Sn$ , ...



Perovskita ( $CaTiO_3$ ).  
Similares:  $BaTiO_3$ ,  $SrTiO_3$ ,  
 $LiNbO_3$ ,... (ferroeléctricos)

en la que cada esfera está en contacto con otras seis (círculos continuos de la figura 1.10, parte superior). Una segunda capa B idéntica se situaría encima de la primera, ocupando la mitad de los huecos intersticiales de la capa A. Una tercera capa se puede añadir de dos maneras: sobre los huecos de la primera capa no ocupados por la segunda, dando lugar ala secuencia ABCABC..., o sobre la vertical de las esferas de la primera capa generando la secuencia ABABAB...

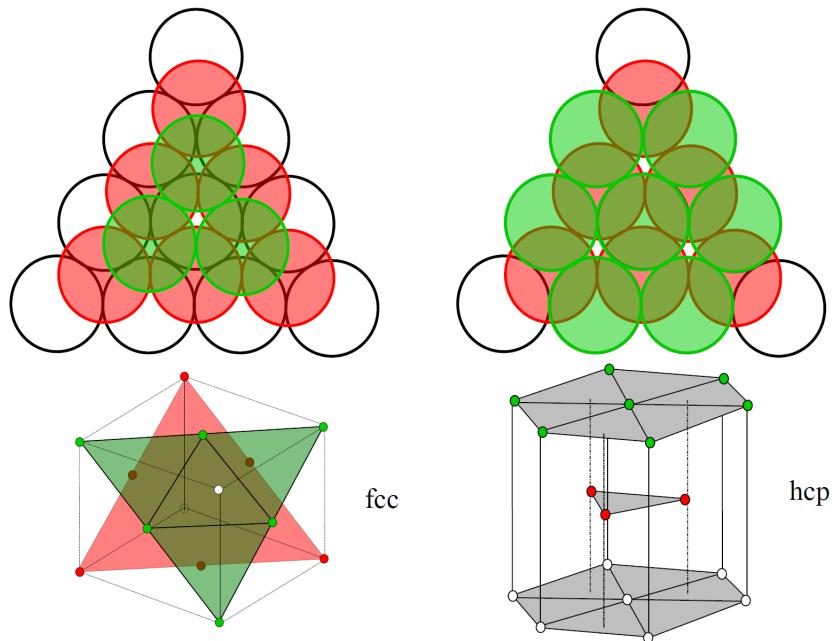


Figura 1.10: Empaquetamiento compacto.

En el primer caso la estructura resultante es una *fcc*, donde las capas de que hablamos son las perpendiculares a la diagonal del cubo (figura 1.10, parte inferior izquierda). En el segundo caso las capas A,B se corresponden con los planos basal e intercalado, respectivamente, de una estructura diagonal compacta (*hcp*) (figura 1.10 parte inferior derecha). Se describe como un red hexagonal (capas A) con una base dos átomos (capas B). En ambas estructuras el número de coordinación es 12.

**Definición 1.13 (fracción de empaquetamiento).** Definimos la fracción de empaquetamiento (f.e.) como la cantidad de espacio ocupada por los átomos (suponiendo que son esféricos, de radio  $r$ ) en la celda convencional y el volumen de la celda convencional (también se puede ser usada otra celda, pero por comodidad se usa esta).

Las fracciones de empaquetamiento para algunas de las estructuras más comunes son:

	<i>sc</i>	<i>bcc</i>	<i>fcc</i>	Hexagonal compacta
f.e.	$\frac{\pi}{6} \approx 52\%$	$\frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 68\%$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 74\%$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 74\%$

Tabla 1.3: fracciones de empaquetamiento compacto para algunas estructuras.

## 1.5. Intersticios o huecos estructurales

Muchos compuestos cristalinos se pueden entender mejor si se conocen los huecos estructurales (entendiendo esto por las mayores oquedades o intersticios entre átomos) asociados a las estructuras básicas. Ilustraremos esto con las redes del sistema cúbico. Ilustraremos esto con la figura 1.11.

En la red *fcc* los mayores huecos son octaédricos, de radio  $0.41R$ . Hay tantos huevos octaédricos como átomos, situándose en los centros de los cubos y de las aristas. Hay también huecos tetraédricos de radio  $0.22R$ . Hay el doble de número de huecos tetraédricos que de átomos. Así, el NaCl es descriptible como una *fcc* de iones  $\text{Cl}^-$  en cuyos intersticios octaédricos se sitúan los iones de  $\text{Na}^+$ . También el diamante o la blenda de cinc se pueden considerar como una estructura *fcc* (de C ó S) en la que la mitad de los huecos tetraédricos están ocupados por los átomos de C o de Zn, respectivamente. En la *bcc* los huecos más grandes son los tetaédricos, aunque también son los más difíciles de visualizar (véase imágenes inferiores de la figura 1.11).

En la red *bcc* existen 6 huevos octaédricos (distorsionados) por celda, situados en los centros de las caras y de las aristas. Sin embargo, los mayores intersticios se dan en los 12 tetaédricos (también distorsionados) por celda: su radio es  $0.29R$ . Como un ejemplo de aplicación, digamos que la gran movilidad de los iones  $\text{Ag}^+$  en el AgI, un excelente elctrólito sólido usado en pilas de estado sólido, proviene de que los 2 iones  $\text{Ag}^+$  por celda se distribuyen estadísticamente entre las 12 posiciones tetraédricas de la red *bcc* que forman los iones  $\text{I}^-$  saltando fácilmente de unas a otras.

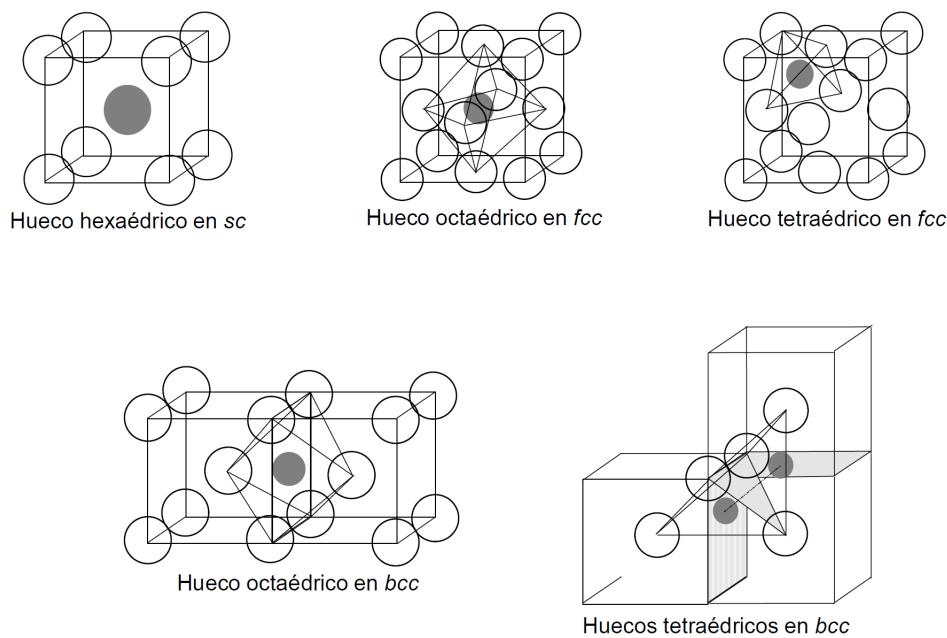


Figura 1.11: Localización de algunos huecos.

## 1.6. Defectos y desorden en los cristales

El cristal perfecto tal como se ha introducido no existe, sino que posee varias clases de imperfecciones o defectos que suelen clasificarse en cuatro clases atendiendo a su dimensión, es decir, su número de dimensiones espaciales en las cuales las alteraciones de la estructura se extienden a distancias (mucho) mayores que el parámetro de red, tal y como se indica en la tabla.

Defecto	Descripción	Ejemplos	Origen
Puntual	Alteración localizada en puntos aislados del cristal. Su extensión no supera en ninguna dirección más de una o unas pocas veces el parámetro de red.	- Vacantes - Átomos intersticiales -Impurezas sustitucionales/intersticiales -Huecos dobles, triples, etc.	-Térmico -Irradiación -Desviaciones de la estequiometría -Deformación plástica
Lineal	Alteración en 1 dirección muchas veces el parámetro de red	-Dislocaciones -Cadenas de defectos puntuales	- Proceso de crecimiento -Deformación plástica
Superficial	Alteración en 2 direcciones muchas veces el parámetro de red	-Bordes de granos -Maclas Superficies del cristal	-Proceso de crecimiento -Deformación plástica -Impurezas en la masa fundida
Espacial	Alteración en las 3 direcciones muchas veces el parámetro de red	-Poros -Inclusiones de otra fase	Ídem

Tabla 1.4: Clasificación de los principales defectos en cristales.

### 1.6.1. Defectos puntuales

El defecto puntual más simple es la vacante: ausencia de un átomo en su posición de la red (defecto de Schottky). Se forman cuando, debido a la agitación térmica, algunos átomos de la capa más próxima a la superficie saltan a ésta. Este hueco emigra por el interior del cristal pues se necesita poca energía para que un átomo vecino se mueva a una vacante, dejando su propio sitio vacío. Los cristales iónicos, donde las vacantes se forman a pares para mantener la neutralidad eléctrica, deben su débil conductividad [ $\sigma \approx 10^{-6}(\Omega m)^{-1}$  vs  $10^8(\Omega m)^{-1}$  de los metales] a esta movilidad de sus átomos. Otro tipo de defecto puntual (térmico) es el defecto de Frenkel, que es un átomo que ha abandonado el nudo de la red y que se aloja en un intersticio. Se trata en realidad de la combinación de una vacante y un átomo intersticial.

Los defectos de Schottky o las impurezas sustitucionales se encuentran de ordinario en los cristales de empaquetamiento denso (*fcc* o *hcp*), en los cuales el alojamiento de átomos en los intersticios es difícil, mientras que los defectos de Frenkel o las impurezas intersticiales suelen formarse en los cristales de empaquetamiento menos denso (diamante), aunque, en el caos de la adición de impurezas, el tipo de defecto que se forme depende del tamaño del átomo de impureza. Por ejemplo, cuando se carburiza hierro (*bcc*), el carbono, por su pequeño tamaño, se difunde hacia el interior intersticialmente. En cambio, las impurezas con que se dopan los semiconductores (diamante) se sitúan en las posiciones regulares. Otro ejemplo son las aleaciones. Así, el bronce no es sino el Cu metálico en el que una pequeña proporción de sus átomos ha sido sustituida por átomos de Sn, constituyendo una solución sólida.

En los cristales iónicos también los electrones pueden participar en la formación de defectos, como los llamados *centro de color* (en los haluros alcalinos, por ejemplo), donde un hueco aniónico (ausencia de un ion negativo) atrapa a un electrón libre. El electrón, así atrapado, tiene uno espectro de niveles similar al de los niveles atómicos. Así, este centro F hace que aparezca una banda de absorción en la *región visible* del espectro. A esto se debe que un cristal de haluro alcalino incoloro se coloree cuando se fuerza la aparición de huecos aniónicos por irradiación con rayos  $x$  o  $\gamma$ .

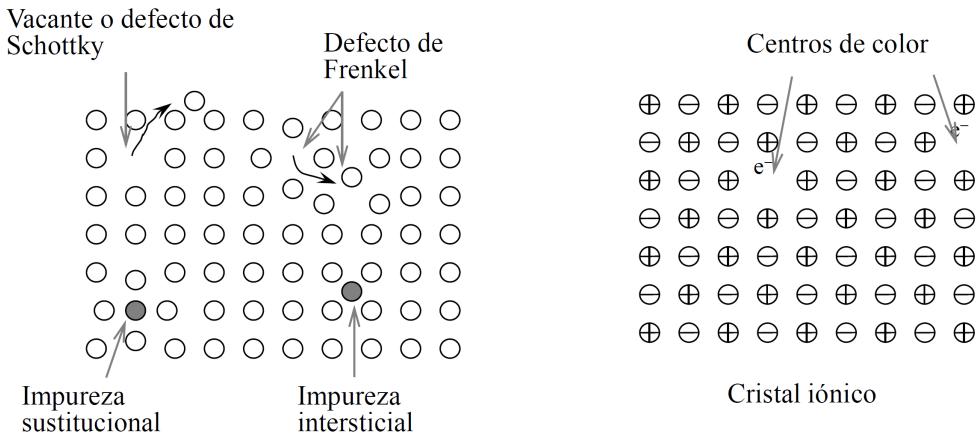


Figura 1.12: Defectos puntuales.

### 1.6.2. Concentración de defectos térmicos puntuales en equilibrio

La formación de defectos puntuales requiere un aporte de energía al cristal proporcional a la energía de enlace (así, por ejemplo, la energía de formación de un hueco es el Ge es  $\sim 2$  eV). Sin embargo, a temperaturas relativamente altas resulta energéticamente rentable la existencia de defectos. Esto se debe a que la formación de defectos puntuales no sólo aumenta la energía interna,  $E$ , del cristal, sino que también aumenta su entropía,  $S$ , de forma que a una temperatura  $R$  la energía libre,  $F = E - TS$ , es mínima para una cierta concentración,  $n$ , de defectos.

Supóngase que hay un sólo tipo de defectos, por ejemplo de Schottky. Si  $\epsilon_v$  es la energía para formar una vacante, la necesaria para formar  $n$ , aisladas y no interaccionantes, será  $n\epsilon_v$ . La entropía (de configuración) es  $S = k_B \ln \Gamma$ , donde  $\Gamma$  es el número de microestados compatibles con el macroestado, en este caso, simplemente el número de maneras en que  $n$  vacantes pueden disponer entre  $N$  nudos. Así:

$$S = k_B \ln \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (1.6.1)$$

Usando la fórmula de Stirling:  $\ln x! \approx x(\ln x - 1)$ , para  $x \gg 1$ , la energía libre se escribe

$$F = n\epsilon_v - k_B T [N \ln N - (N-n) \ln(N-n) - n \ln n] \quad (1.6.2)$$

En equilibrio térmico,  $(\partial F / \partial n)_T = 0 \Rightarrow \epsilon_v = k_B T \ln[(N-n)/n]$ , que para  $n \ll N$  permite despejar

$$n \approx N e^{-\epsilon_v/k_B T} \quad (1.6.3)$$

Como ejemplo numérico, para  $T = 1000\text{K}$  y  $\epsilon_v \approx 1$  eV se tiene que  $n/N \approx 10^{-5}$ . Análogamente, se tratan los defectos de Frenkel. En este caso hay que considerar no sólo las posibilidades de disponer de  $n$  vacantes entre  $N$  nudos, sino también las posibilidades para disponer de  $n$  átomos entre  $N'$  intersticios  $\Gamma = \frac{N!}{(N-n)!n!} \frac{N'!}{(N'-n)!n!}$ . Por lo que el número de defectos en el equilibrio en este caso es:

$$n \approx \sqrt{NN'} e^{-\epsilon_F/k_B T} \quad (1.6.4)$$

donde  $\epsilon_F$  es la energía necesaria para la formación de un defecto de Frenkel.

### 1.6.3. Defectos de línea

En la figura 1.13 se representan un ejemplo del llamado defecto lineal. Se trata de una dislocación en arista, también llamada dislocación de borde y de una dislocación helicoidal. La dislocación de borde se ha producido como resultado del desplazamiento en una distancia atómica de una parte del cristal, la derecha con respecto al plano OMN, mientras que la mitad izquierda permanece inmóvil. Como se puede ver, a  $p$  planos atómicos situados debajo del plano de desplazamiento corresponden  $p + 1$  palmos por encima de dicho plano. El límite dentro la región que ha deslizado y la inmóvil se llama línea de dislocación. Cerca de ésta el cristal está muy deformado. Todo ocurre como si se hubiera removido del cristal un semiplano que termina en la línea de dislocación (también puede pensarse que se añade un semiplano extra). Convencionalmente, la dislocación en arista se designa por el símbolo  $\perp$ , que apunta hacia el semiplano extra.

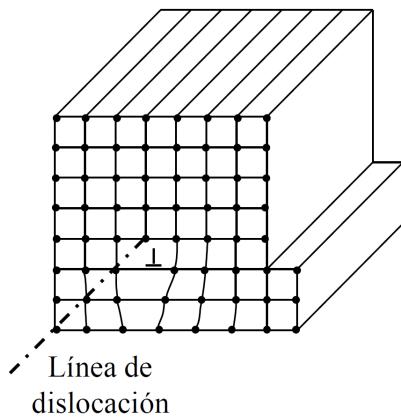


Figura 1.13: Defectos de línea: línea de dislocación.

Existe una importante relación entre dislocaciones y ciertas propiedades mecánicas como la deformación plástica, que aquí solo se tratan someramente. Por ejemplo, en la figura 1.14, para trasladar la dislocación de un extremo a otro solo se requiere un desplazamiento insignificante de los átomos. Una analogía es la arruga en una alfombra: la arruga se mueve más fácilmente que toda la alfombra. De esta forma se puede calcular que valores muy bajos de las tensiones aplicadas a un cristal son suficientes para iniciar una deformación plástica, como en efecto se observa experimentalmente.

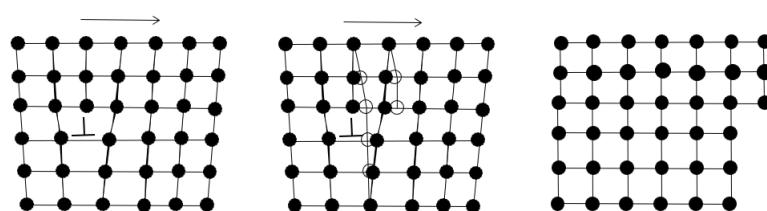


Figura 1.14: Desplazamiento de una dislocación bajo fuerza de cizalla.



## Capítulo 2

# Red recíproca y difracción de rayos X

El objetivo es estudiar cómo se utiliza la difracción de ondas por el cristal para determinar el tamaño de la celda, la posición de los átomos y la distribución de electrones dentro de la celda. Las radiaciones con longitud de onda  $\lambda$  del orden la constante de red  $a$  (algunos  $A$ ), *ven* la estructura atómica del cristal de modo que cada átomo en el cristal es un (re)emisor independiente. La onda difractada depende de todas las posiciones atómicas pues se trata de una *interferencia interna* que es constructiva para ciertas direcciones de salida. A partir de la observación experimental de las *direcciones de máximo* se obtiene importante información de la estructura del cristal. La radiación más utilizada son los rayos  $x$  (con  $\lambda \sim a$ ) algunas de cuyas limitaciones son la dificultad de detectar elementos ligeros como el H, así como diferenciar entre átomos de número atómico próximo. Los electrones, por su menor penetración (interaccionan fuertemente), se utilizan para sondear superficies o capas delgadas. Los neutrones son utilizados para localizar el H en sólidos y sistemas biológicas y el estudio de estructuras magnéticas (gracias al espín).

### 2.1. Red recíproca en tres dimensiones

En esta sección seguiremos las definiciones del Oxford Basics [3], ya que nos parece, desde nuestro punto de vista, un temario mucho mejor formulado. Si bien es cierto que los conceptos están mucho más desarrollados, también se hará un poco más largo que en el manual [1].

#### 2.1.1. Definición de la red recíproca

Toda estructura cristalina tiene dos redes asociadas; la red cristalina y la red recíproca. Los vectores de la red recíproca tienen dimensiones de [1/longitud]. Esta se puede entender como una red en el espacio de Fourier asociado con el cristal.

**Definición 2.1 (Red recíproca).** *Dado una red de puntos  $\mathbf{R}$ , un punto  $\mathbf{G}$  pertenece a la red recíproca si y solo si se verifica*

$$e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}} = 1 \quad (2.1.1)$$

*para todos los puntos  $\mathbf{R}$  de la red.*

Para reconstruir la red recíproca primero escribimos los puntos de la **red real** o **red directa** (ahora se nombrará así para diferenciarla de la red recíproca) como:

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \quad (2.1.2)$$

donde los  $n_i$  son enteros y  $\mathbf{a}_i$  vectores primitivos de la red directa. Hacemos dos enunciados clave ahora:

- Decimos que la red recíproca es una red en el espacio recíproco (explicaremos este concepto más tarde).
- Los vectores primitivos de la red recíproca están definidos como

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij} \quad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.1.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Para que se verifique la ecuación anterior los vectores  $\mathbf{b}_i$  deben ser de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_3 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Dados los vectores  $\mathbf{b}_i$  hemos dicho que si satisfacen la ecuación 2.1.1 estos son los vectores primitivos de la red recíproca. Para comprobar esto vamos a definir como un *punto arbitrario del espacio recíproco*

$$\mathbf{G} = m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3 \quad (2.1.5)$$

y, por el momento, no vamos a exigir que  $m_i$  sean enteros (de hecho va a ser la propia imposición de que  $\mathbf{G}$  es un punto de la red recíproca la que nos va a obligar a que sean enteros). Tal y como hemos definido la red recíproca, el vector  $\mathbf{G}$  descrito antes debe verificar que la siguiente ecuación sea igual a 1:

$$e^{\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}} = e^{i(m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3) \cdot (n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3)} = e^{2\pi i(n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3)}$$

es trivial que si los  $m_i$  son enteros esta propiedad se verifica siempre. Esto prueba que la red recíproca es, en verdad, una red, ya que se construye como la combinación lineal entera de vectores  $\mathbf{b}$  linealmente independientes.

La obtención de redes recíprocas asociadas a redes directas exige trabajar con vectores base primitivos pues sólo entonces la ecuación b) es válida. Como ejemplo, considérense las tres redes del sistema cúbico. Denotando por  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  los vectores de las tres aristas del cubo convencional de arista  $a$ , unos vectores base primitivos son:

$$\begin{array}{llll} sc) & \mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}} & \mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}} & \mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}} \\ bcc) & \mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) \\ fcc) & \mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \end{array}$$

Aplicando ahora las relaciones b) a los vectores base anteriores es fácil deducir que la red recíproca de la sc es otra sc de constante de red  $2\pi/a$ ; la red recíproca de la bcc es una red fcc con constante de red  $4\pi/a$ ; la de la fcc es una bcc con constante de red  $4\pi/a$ . Es decir:

$$\begin{array}{llll}
 sc) & \mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a} \hat{\mathbf{i}} & \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a} \hat{\mathbf{j}} & \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{a} \hat{\mathbf{k}} \\
 bcc) & \mathbf{b}_1 = \frac{4\pi}{a} (\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{b}_2 = \frac{4\pi}{a} (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{b}_3 = \frac{4\pi}{a} (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \\
 fcc) & \mathbf{b}_1 = \frac{4\pi}{a} (-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{b}_2 = \frac{4\pi}{a} (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{b}_3 = \frac{4\pi}{a} (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})
 \end{array}$$

### 2.1.2. Red recíproca como transformada de Fourier

Este apartado tampoco está en el manual de referencia [1] explícitamente, si no que lo dan a cuentagotas, lo cual es un error, desde nuestra perspectiva, ya que nos permitirá entender mejor que es el factor de forma, fundamental para las secciones posteriores. Para este apartado recomendamos el [3].

En general uno puede pensar en una red recíproca como una transformada de Fourier de la red directa. La mejor manera de entenderlo es suponer un espacio 1-dimensional, y luego generalizar el resultado. Supongamos una red dada por  $R_n = an$ . Si queremos describir la “densidad” de puntos de red en una dimensión, necesitamos una función delta de tal modo que la densidad

$$\rho(r) = \sum_n \delta(r - an) \quad (2.1.6)$$

Las transformadas de Fourier de esta función nos dan:

$$\mathcal{F}[\rho(r)] = \int e^{ikr} \rho(r) dr = \sum_n \int e^{ikr} \delta(r - an) dr = \sum_n e^{ikan} = \frac{2\pi}{|a|} \sum_m \delta(k - 2\pi m/a) \quad (2.1.7)$$

El último paso no es trivial <sup>1</sup>. Como se puede ver  $e^{ikan}$  es la unidad cuando  $k = 2\pi m/a$ , esto es, si  $k$  es un punto de la red recíproca. Si  $k$  no tiene ese valor, entonces los términos de la suma irán oscilando de tal manera que se van cancelando entre ellos, por lo que el resultado será 0. Para obtener el prefactor hay que hacer más calculos, y puede llegar a ser un poco complicado.

Generalizando el resultado al caso D dimensional:

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} = \frac{(2\pi)^D}{v} \sum_{\mathbf{G}} \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{G}) \quad (2.1.8)$$

donde  $v$  es el volumen de la celda. Se puede ver que el término del medio se realiza en la red directa mientras que el último término en la red recíproca. Como se puede comprobar, si  $\mathbf{k}$  es un miembro de la red recíproca, tendremos que  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$  es siempre igual a uno y por tanto la suma es infinita. Sin embargo si  $\mathbf{k}$  no es un vector de la red recíproca, tendremos que los sumandos de la suma oscilarán cancelándose mutuamente. Así obtenemos que los picos de la delta de Dirac ocurren en las posiciones de los vectores de la red recíproca.

#### Transformada de Fourier de una función periódica cualquiera

En la anterior sección hemos considerado la transformada de Fourier de una función  $\rho(\mathbf{r})$  como una Delta de Dirac de los puntos de red. Sin embargo, no obtendríamos un resultado tan diferente si consideramos la transformada de Fourier de *cualquier* función periódica en la red. Sea  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  para un vector de la red  $\mathbf{R}$ . Queremos calcular

<sup>1</sup>Este paso es conocido como la fórmula de Poisson

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \quad (2.1.9)$$

La integral sobre todo el espacio es equivalente a la suma de integrales sobre cada celda unitaria. Como odas las celdas unitarias son iguales esto equivale a hacer:

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = \sum_{\mathbf{R}} \int_{\text{celda-unitaria}} d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{R})} \rho(\mathbf{x}+\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \int_{\text{celda-unitaria}} d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) \quad (2.1.10)$$

donde hemos supuesto la invariancia de  $\rho$  bajo traslaciones por vector de red. La suma de exponentiales nos da una suma de deltas de Dirac igual que en la ecuación 2.1.8:

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = (2\pi)^D \sum_{\mathbf{G}} \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{G}) S(\mathbf{k}) \quad (2.1.11)$$

donde

$$S(\mathbf{k}) = \int_{\text{celda-unidad}} d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) \quad (2.1.12)$$

es lo que se conoce como **factor de estructura**, usado en la sección 2.3.

### 2.1.3. Familias de planos reticulares

Otra manera de entender la red recíproca es mediante los planos reticulares:

**Definición 2.2.** Definimos como **plano reticular**<sup>2</sup> es un plano que contiene al menos 3 puntos de red no colineales<sup>3</sup> y que por tanto contiene un número infinito de puntos.

**Definición 2.3.** Una **familia de planos reticulares** es un conjunto infinito de planos equiespaciados que, como conjunto, contienen todos los puntos de la red.

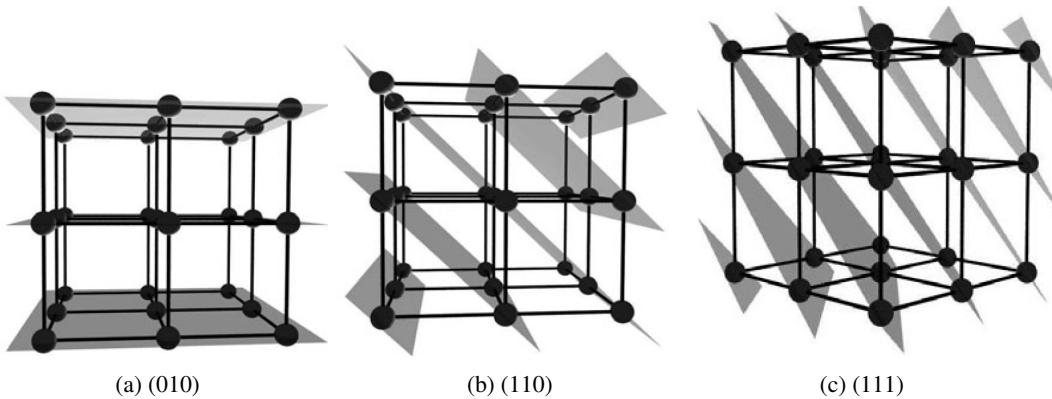


Figura 2.1: familias de planos reticulares para la red cúbica scsegún la notación de Miller.

Las familias de planos reticulares tienen una correspondencia uno a uno con las direcciones de los posibles vectores de la red recíproca. Esta correspondencia se debe a que *los vectores de la red*

<sup>2</sup>También se les puede llamar **planos de red**.

<sup>3</sup>Definimos como puntos colineales aquellos puntos que se encuentran en una misma recta.

recíproca son normales a los planos reticulares. Además el **espacio entre planos reticulares  $d$**  viene dado por

$$d = \frac{2\pi}{|\mathbf{G}_{\text{mín}}|} \quad (2.1.13)$$

donde  $|\mathbf{G}_{\text{mín}}|$  es el vector más pequeño con dirección normal al plano.

Aquí podemos hacer la demostración explícita de como un vector normal a un plano reticular es siempre un vector de la red recíproca  $\mathbf{G}$  para luego demostrar como efectivamente la distancia entre ambos planos es siempre la dicha. De hecho podemos relacionar esto con los índices de Miller.

#### 2.1.4. Planos reticulares e índices de Miller

Existe una notación muy interesante y útil para describir los planos reticulares, asignando a cada plano una terna  $(h,k,l)$  conocida como **índice de Miller**. Para ver cómo podemos describir un plano reticular con una terna, tenemos que empezar definiendo un vector de nuestra red recíproca como:

$$\mathbf{G}_{(h,k,l)} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3 \quad (2.1.14)$$

de tal forma que  $h, k$  y  $l$  son siempre positivos. Dado que  $\mathbf{b}_i$  es un vector primitivo de la red recíproca, cada uno de las diferentes valores de  $h,k,l$  da un vector de la red recíproca diferente. Dado que para cada familia de planos reticulares existe un vector de la red recíproca existe un  $\mathbf{G}$  normal a ellos, y que para cada vector de la red recíproca tenemos una terna  $(h, k, l)$ , podemos afirmar que a cada familia de planos reticulares le corresponde una terna. Sin embargo para  $(hkl)$  deben verificar que no tienen divisores comunes, ya que de tenerlos el vector recíproco no será el vector más corto en dicha dirección y por tanto describirá una familia de planos que no contendrán puntos de red.

Este comentario es sumamente importante. Para una red cúbica (*sc*, *fcc*, *bcc*) es conveniente elegir como los vectores  $\mathbf{a}_i$  los vectores  $a\hat{\mathbf{i}}, a\hat{\mathbf{j}}$  y  $a\hat{\mathbf{k}}$  ( $a$  longitud del cubo). Es decir, elegimos los vectores de la celda convencional unitaria. De esta manera los vectores  $\mathbf{b}_i$  son  $2\pi\hat{\mathbf{i}}/a, 2\pi\hat{\mathbf{j}}/a$  y  $2\pi\hat{\mathbf{k}}/a$ . Como estos vectores no son primativos para las redes *fcc* y *bcc*, tampoco serán primativos los vectores  $\mathbf{b}_i$  para la red recíproca. Esto nos lleva a que a estas redes no todos los índices de Miller  $(hkl)$  les corresponde una familia de planos reticulares. Esto se puede ver bien en la figura siguiente para la *bcc*:

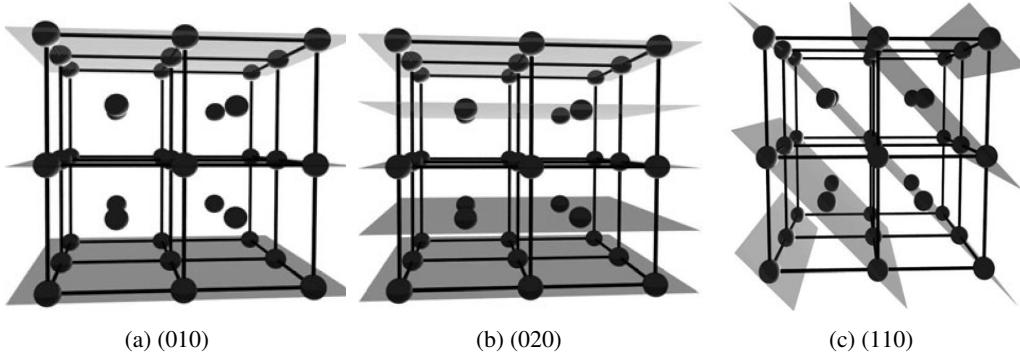


Figura 2.2: familias de planos reticulares para la red cúbica *bcc* según la notación de Miller. Se puede ver que la (010) no describe adecuadamente la red *bcc*.

De la ecuación 2.1.13 podemos deducir que para una familia de planos reticulares definidas por los índices de Miller están separadas una distancia

$$d_{(hkl)} = \frac{2\pi}{|\mathbf{G}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{h^2|\mathbf{b}_1|^2 + k^2|\mathbf{b}_2|^2 + l^2|\mathbf{b}_3|^2}} \quad (2.1.15)$$

De manera equivalente

$$\frac{1}{|d_{(hkl)}|^2} = \frac{h^2}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_2^2} + \frac{l^2}{a_3^2} \quad (2.1.16)$$

Si  $|\mathbf{b}_i| = 2\pi/|\mathbf{a}_i|$  (red cúbica) tenemos que:

$$d_{(hkl)} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \quad (2.1.17)$$

Cuando hablamos del plano (200) entendemos un plano paralelo pero que corta al eje  $\mathbf{a}_1$  en un punto distante a  $a/2$  en el origen. Los índices  $[uvw]$  de una dirección en un cristal son el conjunto de los números enteros más pequeños que poseen la relación de los componentes de un vector en la dirección deseada. En cristales cúbicos la dirección  $[hkl]$  es perpendicular a un plano  $(hkl)$  que posean los mismos índices, pero no es necesariamente cierto para otros sistemas cristalinos.

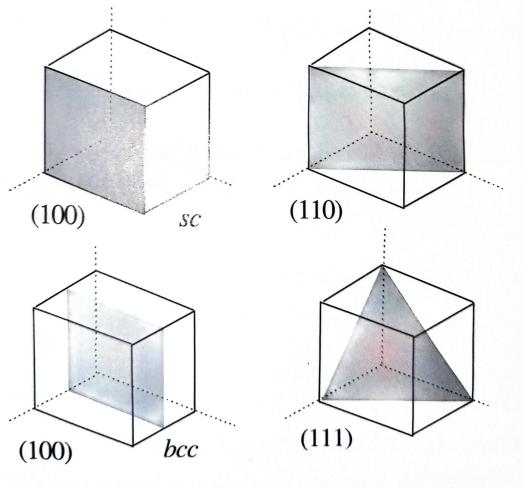


Figura 2.3: Algunos planos reticulares para las redes cúbica simple (sc) y centrada en el cuerpo (bcc) y sus índices de Miller.

### 2.1.5. Zonas de Brillouin

Las zonas de Brillouin jugarán un papel fundamental en los temas posteriores, por lo que tener el concepto claro es fundamental, ya que nos permite describir las excitaciones del espectro de ondas en estructuras periódicas, como los cristales, por lo que será útil para poder estudiar el comportamiento del sonido, o de la luz en su interior.

**Definición 2.4.** Definimos una **zona de Brillouin** como una celda primitiva de la red recíproca.

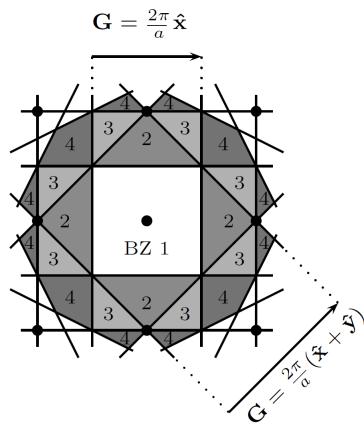
Como se comporta el cristal bajo una onda  $\mathbf{k}$  permanece invariante si hacemos una transformación del tipo  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{G}$ . De esta manera podemos darnos cuenta de que la cantidad relevante aquí es el momento cristalino, y no el momento de la onda. Por eso mismo la zona de Brillouin se ha definido

de tal forma que incluye todos los momentos posibles con comportamiento diferentes entre sí (en una zona de Brillouin cada punto  $\mathbf{k}$  se comporta de manera diferente a cualquier otro  $\mathbf{k}$  de la zona). Mientras que la la definición más general de la zona de Brillouin nos permite elegir una forma cualquiera de la celda primitiva (recordar que hay varias elecciones siempre), en general existen algún tipo de celdas mas convenientes que otras.

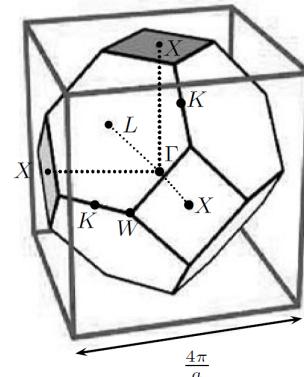
Definiremos la *primera zona de Brillouin* en el espacio recíproco de la misma manera que definimos la celda de Wigner-Seitz en la red directa.

**Definición 2.5.** Comenzando por un punto de la red recíproca  $\mathbf{G} = 0$ , todos los  $\mathbf{k}$  que están mas cerca a  $\mathbf{0}$  que de cualquier otro punto de la red recíproca decimos que se encuentran en la **primera zona de Brillouin**. De manera parecida, todos los puntos  $\mathbf{k}$  que su segundo punto más cercano es el  $\mathbf{0}$ , decimos que pertenece a la **segunda zona de Brillouin**. De manera análoga podemos definir la tercera, cuarta... zona de Brillouin.

Al igual que la celda de Wigner-Seitz, existe un algoritmo simple para construir las zonas de Brillouin. Dibuja las líneas entre los vecinos, y traza una línea perpendicular en el punto mitad entre ambos vecinos. Estas bisectrices formarán las fronteras de las zonas de Brillouin. Cualquier punto que puedas obtener desde el  $\mathbf{0}$  hasta una de las fronteras es un vector de la primera zona de Brillouin (véase imagen 2.4a). La construcción de la primera zona de Brillouin análoga a la la celda de Wigner-Seitz.



(a) zonas de Brillouin red cuadrada.



(b) primera zona de Brillouin de la red fcc.

Figura 2.4

## 2.2. Difracción

Sea una onda plana  $e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  incidente sobre un cristal. En esta sección queremos estudiar cual es la dirección de la onda dispersada para la que tenemos un máximo de difracción. Supongamos que la amplitud de la onda dispersada en la dirección  $\mathbf{k}'$  (ver figura 2.5a) suponiendo *dispersión elástica* ( $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ ). En ese caso la **amplitud de la onda** (la intensidad es  $I \propto A^2$ ) vendrá dada por

$$A_{\text{salida}} \propto \sum_{m,n} f_{mn} e^{i\Delta\phi_{mn}} \quad (2.2.1)$$

siendo  $\Delta\phi_{mn} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{d}_{mn}$  la diferencia de fase entre la onda reemitida por un centro dispersor ( $m$ ) y otro ( $n$ ) a una distancia  $\mathbf{d}_{mn}$  del primero. La suma  $(m, n)$  a todos los centros dispersores puede

hacerse sumando a todas las celdas en *posiciones de red*  $\mathbf{R}_n$  y a todos los átomos de la base en posiciones  $\mathbf{r}_j$  dentro de cada celda, tal y como se puede ver en la figura 2.5b. Entonces esta distancia vendrá dada por  $\mathbf{d}_{mn} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_j$  con lo que la amplitud de onda viene dada por:

$$A_{\text{salida}} \propto \sum_{n,j} f_j e^{-i(\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_j) \cdot \Delta\mathbf{k}} = \sum_j^{\text{base}} f_j e^{-i\mathbf{r}_j \cdot \Delta\mathbf{k}} \sum_n^{\text{red}} e^{-i\mathbf{R}_n \cdot \Delta\mathbf{k}} \quad (2.2.2)$$

con  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ . A  $f_j$  es el llamado *factor de forma atómico*, que da cuenta del distinto *poder dispersor* de los átomos de la base. El máximo de  $A_{\text{salida}}$  lo marca el segundo factor que suma a toda la red, pues es una suma del orden de  $10^{23}$  términos frente a unos pocos del primero.

En cualquier caso no podemos despreciar este primer término, ya que de hacerse cero para alguna onda o dirección de onda, se anularía la amplitud de salida. Esto se estudiará en la siguiente sección 2.3. El máximo se alcanza con la condición de que

$$\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n = 2\pi \times \text{entero} \quad (2.2.3)$$

para cualquier vector de red  $\mathbf{R}_n$ . La interpretación es que todas las celdas (son las celdas las que están conectadas por vectores de red) deben reemitir en fase para que la suma sea máxima (ver figura 2.6a, solo con la interferencia constructiva hay máximo).

La condición (2.2.3) para  $\Delta\mathbf{k}$  implica precisamente que para que haya un máximo  $\Delta\mathbf{k}$  *debe ser un vector de la red recíproca*. Así pues, el resultado básico es que para que haya máximo de difracción (interferencia constructiva) se debe satisfacer

$$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{G} \quad (2.2.4)$$

que también lo podemos expresar como

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}$$

Elevando la ecuación (2.2.4) al cuadrado y teniendo en cuenta que  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$  es inmediato ver que esta condición se puede escribir en función del vector de ondas de la radiación incidente y de los vectores de la red recíproca del cristal:

$$2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} + |\mathbf{G}|^2 = 0$$

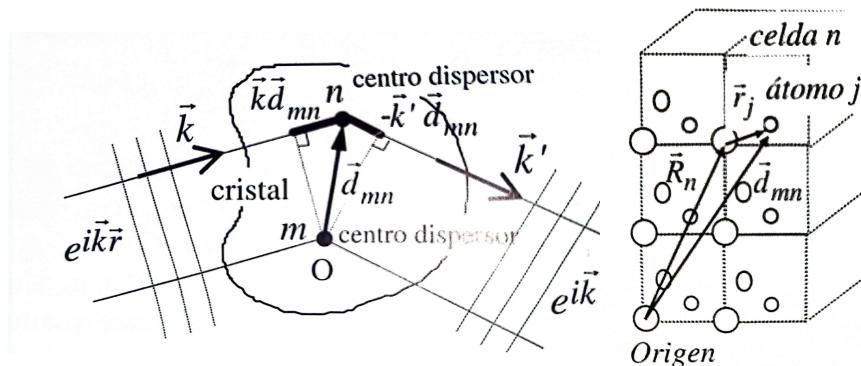
Reemplazando  $\mathbf{G}$  por  $-\mathbf{G}$  en esta expresión, la condición de difracción es:

$$2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} = |\mathbf{G}|^2 \iff \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}|\mathbf{G}| \quad (2.2.5)$$

y la dirección en la que se observa el máximo es entonces  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{G}$ .

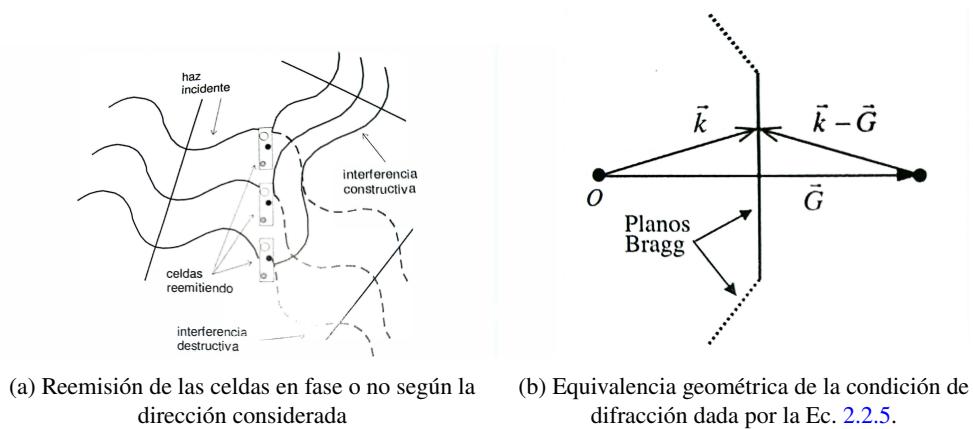
Llamando *plano Bragg* a aquel que es mediatrix a cualquier vector de red de la red recíproca, la interpretación de (2.2.5) es que la difracción ocurre para los índices  $\mathbf{k}$  incidentes tales que, con origen en un punto cualquiera de la red recíproca, su extremo caiga sobre un plano de Bragg (figura 2.6b). En particular, lo anterior es válido para la frontera de la PZB<sup>4</sup> por estar formada por planos de Bragg.

<sup>4</sup>PZB  $\equiv$  Primera zona de Brillouin. Véase definición 2.5.



(a) Diferencia de camino recorrido por las ondas dispersadas por dos centros  $m, n$  separados  $\mathbf{d}_{mn}$ .  
(b) Posición de los centros dispersores de cada celda  $n$  en posición  $\mathbf{R}_n$ .

Figura 2.5



(a) Reemisión de las celdas en fase o no según la dirección considerada  
(b) Equivalencia geométrica de la condición de difracción dada por la Ec. 2.2.5.

Figura 2.6

### 2.2.1. Ley de Bragg

Otra formulación equivalente de la condición de difracción es la llamada **ley de Bragg** (1913), que admite que la radiación sufre una reflexión especular en los distintos planos reticulares (figura 2.7a) de modo que sólo si las reflexiones de dos sucesivos planos están en fase se observará máximo de difracción. Es muy fácil de ver que la diferencia de caminos entre planos sucesivos es de  $2d \sin \theta$  por lo que esta cantidad deberá ser múltiplo entero de longitudes de onda  $\lambda$ , es decir,

$$n\lambda = 2d \sin(\theta) \quad (2.2.6)$$

La equivalencia de la ley de Bragg (ecuación 2.2.6) con la formulación más general de las ecuaciones 2.2.3 y 2.2.4 se deduce de la correspondencia vista entre vectores de la red recíproca y sistemas de planos reticulares. En efecto, el vector  $\mathbf{G}$  a que hace referencia (2.2.4) de componentes  $(h' k' l')$  no necesariamente primos entre sí, verifica  $G = 2k \sin \theta$  (figura 2.7b). Sea ahora  $\mathbf{G}_0$  el vector de la red recíproca paralelo a  $\mathbf{G}$  más corto, que debe tener componentes  $(hkl)$  primas entre sí (por no haber otro más corto), y que verifica  $\mathbf{G} = n\mathbf{G}_0$  (en componentes  $h' = nh, k' = nk, l' = nk$ ). Como  $G_0 = 2\pi/d$  (ecuación 2.1.13), al sustituir resulta  $n2\pi/d = 2k \sin(\theta) \Rightarrow n\lambda = 2d \sin(\theta)$ .

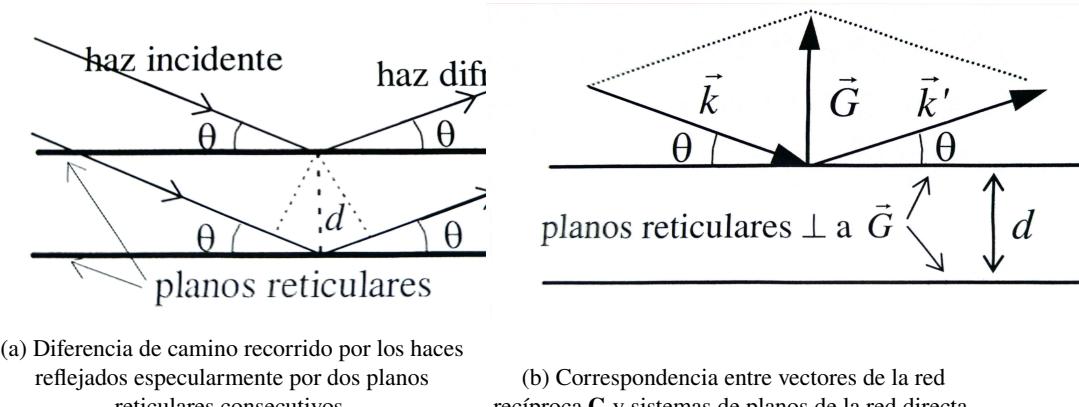


Figura 2.7

## 2.3. Factor de estructura

Como hemos dicho, no solo hay que tener en cuenta la dispersión por los centros de red, si no que también hay que tener en cuenta la dispersión cada celda de la red. Aunque las celdas estén en fase entre sí, si debido a la interferencia entre los átomos de cada celda estas no emiten, no habrá máximo de intensidad. Esto tendrá que ver con el concepto *reglas de selección* que introduciremos más tarde.

Ahora queremos precisar ahora la intensidad de los distintos máximos de difracción. En condición de máximo, la amplitud dispersada (dirección  $\hat{\mathbf{k}}'$ ) es por 2.2.2 y 2.2.3, viene dada por

$$A_{\text{salida}} \propto N \sum_j^{\text{base}} f_j e^{-i\mathbf{r}_j \cdot \Delta\mathbf{k}} = NS_{\mathbf{G}} \quad (2.3.1)$$

siendo  $N$  el número de celdas. El sumatorio denotado por  $S_{\mathbf{G}}$  representa una *suma interferencial dentro de una celda* y se denomina **factor de estructura de la base**, que a su vez depende del **factor de estructura atómico** que representamos por  $f_j$ . y del *número de átomos y tipo de átomos de la base*. Impuesta la condición de máximo de red tendríamos que

$$S_{\mathbf{G}} = \sum_j^{\text{base}} f_j e^{i\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{G}} \quad (2.3.2)$$

### 2.3.1. Factor de estructura atómico

El factor de forma del átomo genérico  $f_j$ , a su vez, no es sino una suma interferencial interna (intraatómica).

$$f_j = \int n_j(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}} d^3\mathbf{r} \quad (2.3.3)$$

siendo  $n_j(\mathbf{r})$  la concentración electrónica en el elemento de volumen  $d^3\mathbf{r}$  del átomo  $j$ , y donde ya se ha supuesto condiciones de máximo de difracción ( $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{G}$ ). El factor de forma atómico, obtenido de la difracción de rayos x da información de la distribución atómica, observándose diferencias de sólo unos pocos por ciento respecto de los valores teóricos de los átomos libres.

### 2.3.2. Factor de estructura para bases poliatómicas

El factor de estructura atómico contiene una información muy relevante acerca de la estructura atómica. Sin embargo, no contiene nada de información acerca de como es la red (el factor de red  $a$ , si es una  $fcc$ ,  $bcc$ ...). Sin embargo el factor de estructura de la base también depende de la disposición de la red. Para esto tenemos que recordar que las redes cúbicas  $fcc$  y  $bcc$  pueden ser descritas como  $sc$  pero con bases poliatómicas. Por ejemplo, la  $bcc$  es una  $sc$  con una base diatómica tal que se encuentran en  $[0,0,0]$  y  $[a/2,a/2,a/2]$ .

Como ya hemos dicho, esto hará que para ciertos máximos de difracción permitidos por la red estén prohibidos por la base atómica ( $S_G = 0$ ), lo que proporciona una valiosa información sobre su estructura. A las condiciones que deben verificarse para que no se anulen las llamamos **reglas de selección**. Como se puede ver en 2.3.2, dado que para que haya máximos  $\Delta k$  debe ser un vector de la red recíproca, y este a su vez puede ser expresado como una terna de  $(h, k, l)$ , tendremos que podremos expresar las reglas de selección diciendo que el vector de onda máximo de red  $(h, k, l)$  es o no es válido. Las condiciones para que se anulen:

Red	Condiciones
$sc$	No se anula nunca.
$bcc$	$h + k + l$ deben de ser impar.
$fcc$	En $h, j, l$ un termino debe tener diferente paridad a los otros dos.
Diamante	(Regla $fcc$ ) o $(h + k + l = 2 + 4n$ con $n$ entero)

### 2.3.3. Cálculo de reglas de selección

A continuación veremos como calcular las reglas de la  $bcc$ , la  $fcc$  y la estructura diamante.

#### Reglas de selección $bcc$

Consideremos un cristal de un átomo  $Z$  con estructura  $bcc$ . La estructura  $bcc$  puede ser descrita como una  $sc$  con dos átomos en las posiciones  $[0,0,0]$  y  $[a/2,a/2,a/2]$ . En ese caso calculamos  $S_G$ :

$$S_G = \sum_j^{\text{base}} f_Z e^{i\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{G}} = f_Z \left( 1 + e^{i2\pi(h/2+k/2+l/2)} \right) = f_Z \left( 1 + e^{i\pi(h+k+l)} \right) = f_Z (1 + (-1)^{h+k+l})$$

Como podremos ver, no habrá máximo de difracción cuando el interior del paréntesis se anule, esto es que  $h + k + l$  sea un número impar. En otras palabras, *habrá máximo de difracción cuando  $h + k + l$  sea par*.

Lógicamente si la estructura está formada por dos átomos diferentes (por ejemplo, el  $CsCl$ ), las reglas de selección cambiarán, ya que  $f_{Cs}$  no tiene por que ser igual a  $f_{Cl}$ . En ese caso:

$$S_G = f_{Cl} + f_{Cs}(-1)^{h+k+l}$$

#### Reglas de selección $fcc$

Para obtener la regla de selección de la  $fcc$  tenemos primero que decir cual es la base poliatómica para la cual puede ser descrita como una  $sc$ . La base es la siguiente:

$$\{[0, 0, 0], [1/2, 1/2, 0], [1/2, 0, 1/2], [0, 1/2, 1/2]\}$$

Aplicando esto en la ecuación 2.3.2:

$$S_{\mathbf{G}} = f_z \left( 1 + (-1)^{h+k} + (-1)^{h+l} + (-1)^{k+l} \right)$$

Aunque mas complicada que la anterior, se puede ver que  $h, l, k$  deben compartir la misma paridad (todos impares o todos pares), aunque en cierto modo es una idea feliz. Si uno de los dos tiene una paridad diferente respecto a los otros dos, tendremos que habrá dos  $(-1)$  elevados a un número impar (los que se deducen de la suma del despareado con cada uno de los otros dos individualmente) mientras que tendremos uno elevado a un número par (suma de los que tiene un número con la misma paridad). En ese caso  $S_{\mathbf{G}} = 0$ .

### Regla selección diamante

La regla de selección del diamante es la mas complicada, ya que la base ahora tendrá 8 átomos, ya que por cada átomo en  $\mathbf{r}$  tendremos que añadir uno en  $\mathbf{r} + (1/4, 1/4, 1/4)$ . Sin embargo si exigimos ya que se verifique la regla de selección de la *fcc* tendremos que  $S_{\mathbf{G}}$  nos quedará solo dependiente de los 4 nuevos átomos:

$$S_{\mathbf{G}} = 4f_Z + f_Z \left( e^{i2\pi(h/4+k/4+l/4)} + e^{i2\pi(3h/4+3k/4+l/4)} + e^{i2\pi(3h/4+3k/4+l/4)} + e^{i2\pi(h/4+3k/4+3l/4)} \right)$$

dado que  $e^{i\pi/2} = i$  tenemos que:

$$S_{\mathbf{G}} = 4f_Z + f_Z \left( (i)^{h+k+l} + (i)^{3h+3k+l} + (i)^{3h+k+3l} + (i)^{3h+k+3l} \right)$$

de tal modo que

$$S_{\mathbf{G}} = 4f_Z + f_Z \left( 1 + (i)^{2h+2k} + (i)^{2h+2l} + (i)^{2h+2l} \right) (i)^{h+k+l}$$

Como hemos impuesto la condición *fcc*, tenemos que el interior del paréntesis da 4, de tal modo que

$$S_{\mathbf{G}} = 4f_Z (1 + (i)^{h+k+l})$$

De tal modo que se anula si  $h + k + l = 2 + 4n$  con  $n$  entero. También se puede describir como: se anula si  $h + k + l = 2 \cdot (\text{impar})$  donde  $\text{impar} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ .

## 2.4. Diagramas de difracción

La condición de máximo (interferencia constructiva), tal como se expresa por ejemplo en la ley de Bragg, es muy exigente pues para observar un máximo de difracción en cierta dirección [figura 2.8 (a)] es necesario no sólo que exista un sistema de planos con la orientación adecuada (con respecto al haz incidente) sino que además tenga el interespaciado preciso dado por la ley de Bragg. Es por eso que para observar máximos experimentalmente se dan más *oportunidades* de cumplimiento girando el cristal según que ejes (*método del cristal giratorio*). Otro método consiste en pulverizar la muestra a analizar (*difractograma de polvo*). La presencia de granos cristalinos orientados al azar hace que los máximos de difracción tengan simetría cilíndrica [figura 2.8 (b)]. El detector se mueve *barriendo* el ángulo  $2\theta$ , obteniéndose un diagrama similar al mostrado.

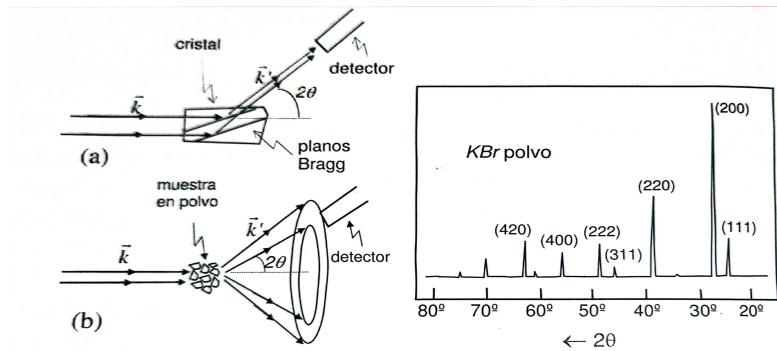


Figura 2.8: Esquemas de dos métodos de difracción (cristal rotatorio y polvo) y ejemplo de difractograma que se obtiene.

Una pregunta que nos podemos hacer es: ¿Cómo podemos diferenciar, si solo obtenemos los picos de difracción, las reglas de selección o la estructura de nuestro cristal? Existen dos formas. La primera, la más sencilla, es usando la siguiente ecuación:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sqrt{h_2^2 + l_2^2 + k_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + l_1^2 + k_1^2}} \quad (2.4.1)$$

En un primer lugar calculamos los senos cocientes de nuestros valores experimentales, colocando el más pequeño de ellos en el divisor. Así obtendremos un conjunto de números dados por  $\{\sin(\theta_1)/\sin(\theta_1), \sin(\theta_2)/\sin(\theta_1), \sin(\theta_3)/\sin(\theta_1)\} \dots$  reales y mayores que uno. Debido a las reglas de selección de cada estructura, podremos hacer lo mismo con el cociente de las ternas. Colocando en la parte inferior la primera terna posible de la estructura (en el caso de la *sc* el (100), en el caso de la *bcc* la (110), en el de la *fcc* la (111)), y colocando arriba las posibles ternas que permite la estructura, podremos obtener un conjunto de valores para cada estructura. Ahora solo queda comparar y ver cuáles son los valores que más coinciden. Si el conjunto del seno tiene valores similares a los del conjunto de la *fcc*, pues tendremos que dicho cristal es muy probable que tenga una estructura parecida.

Otra manera es realizar una tabla, asociando a cada uno de los ángulos un valor de la terna y ver cuál es la que más se acerca. Lógicamente este es un modelo experimental, y habrá diferencias, pero funciona correctamente.

Tanto la falta de monocromatidad como de paralelismo del haz incidente contribuyen a ensanchar los máximos. También, los defectos cristalinos afectan a los difractogramas; así la presencia de dislocaciones afecta a la anchura de los máximos de difracción de modo que su análisis se emplea, por ejemplo, para el estudio de defectos de los metales trabajados en frío. La temperatura, que genera vibraciones alrededor de las posiciones de equilibrio, no contribuye sin embargo a ensanchar los picos sino a disminuir su intensidad. Esto se entiende porque a mayor temperatura, en cualquier instante, menos átomos hay en las posiciones regulares (de equilibrio) y, por otro lado, la contribución de los átomos desviados en una determinada dirección, que generaría cambio en el haz difractado, es anulado por los que están desplazados en el sentido opuesto.

Es interesante hacer notar que la existencia de interferencia constructiva de los  $N$  átomos de un cristal ( $\sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ) es posible sólo gracias a que éstos están en posiciones regulares, es decir, están *ordenados*. Que el orden está estrechamente asociado a la existencia de máximos de difracción lo muestra la figura 2.8 donde se ve la correspondencia entre el orden espacial limitado de los materiales

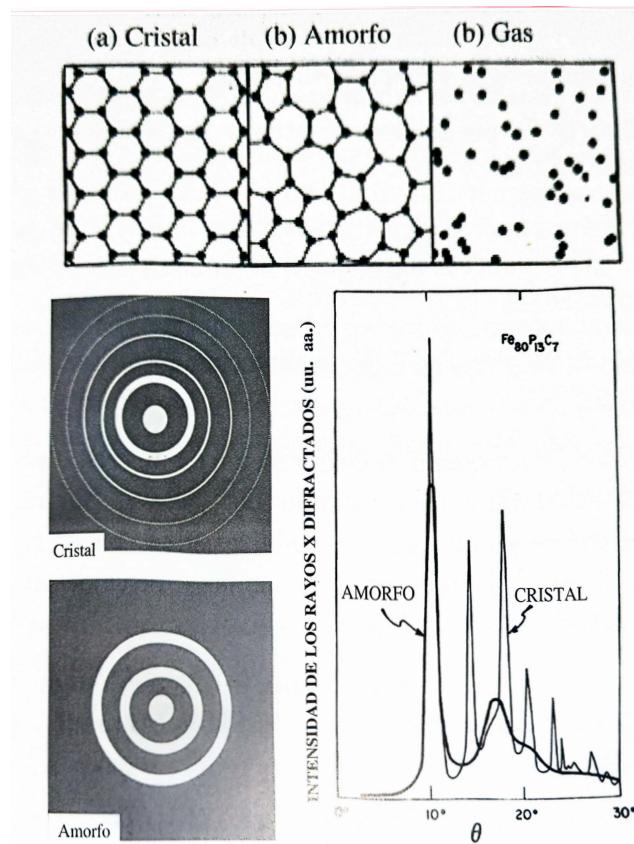


Figura 2.9: Efecto del desorden atómico en la difracción de rayos x.

que se denominan amorfos con su espectro de difracción. Aquí la existencia de los dos picos de difracción a bajo ángulo está asociada al orden de corto alcance (primeros vecinos) característico de estos materiales.

Podemos hacer ejemplos o ejercicios tanto para las reglas de selección como para los índices de miller, para que se entienda bien.

# Capítulo 3

## Enlace cristalino

En este capítulo se estudian los distintos mecanismos de *cohesión* de los cristales. La *distribución electrónica* alrededor de los núcleos caracteriza, a nivel microscópico, el tipo de enlace cristalino: *covalente, metálico, molecular, iónico y de hidrógeno*. La *energía de cohesión* (aquella que se debe suministrar al cristal para separarlo en sus constituyentes) varía para los elementos cristalinos desde 0.02 eV/átomo en el Ne hasta 8.9 en el W.

### 3.1. Clasificación de los sólidos

El cálculo de la energía de cohesión requiere el conocimiento de los estados electrónicos en el cristal. Las funciones de onda electrónicas de los electrones de valencia de los átomos libres cambian (y en consecuencia la distribución de carga) cuando los átomos se unen formando el cristal. En función de cuánto cambian estos estados electrónicos, los sólidos suelen clasificarse en cuatro tipos fundamentales, con distribuciones electrónicas según muestra la figura 3.1:

- **Moleculares**: con cambio mínimo.
- **Iónicos** en los que hay trasferencia de carga.
- **Covalentes** en los que la distribución de carga es direccional y localizada.
- **Metálicos** con carga electrónica extendida a todo el cristal.

### 3.2. Cristales moleculares

Son aquellos en que los nudos están ocupados por moléculas en las que los *enlaces intermoleculares son débiles* (al menos respecto los intramoleculares). Ejemplo de estos son los gases inertes y gases orgánicos (metano...). Los átomos de gases inertes tienen las capas electrónicas cerradas con simetría esférica. La baja energía de ionización ( $\sim 1\%$ ) sugiere que la distribución de carga no se distorsiona apreciablemente.

#### 3.2.1. Interacción de *van der Waals-London*

La deformación atómica más sencilla que conduce a una interacción no nula entre átomos es el desplazamiento de la nube electrónica (*rígida*) de manera que aparezca un momento dipolar. El

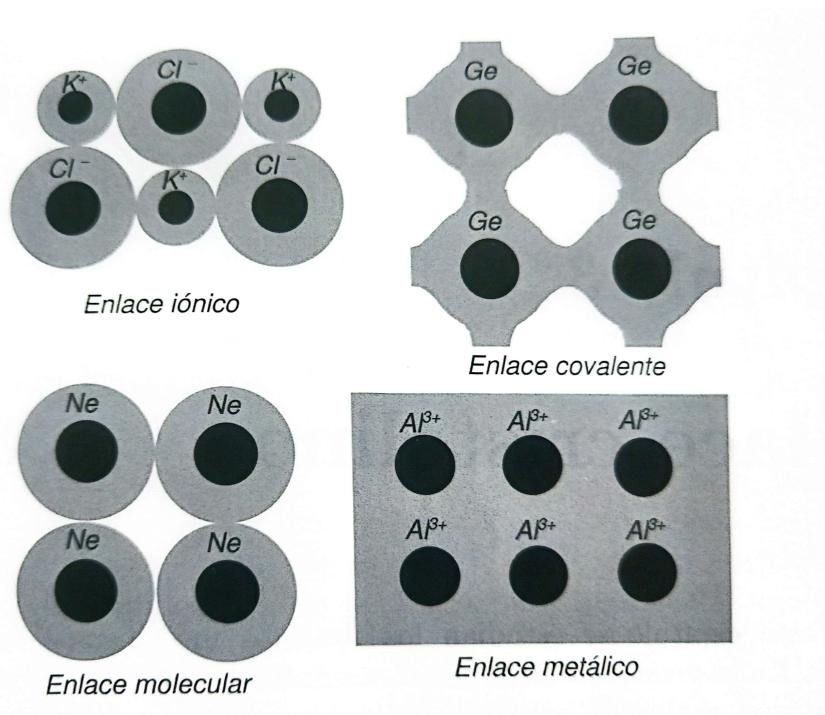


Figura 3.1: Esquema de la distribución electrónica en los tipos de sólidos básicos

modelo simple que muestra en la figura 3.2 en el que se supone  $x_1, x_2 \ll R$ , permite dar cuenta de la existencia de una interacción atractiva entre átomos o moléculas neutros.

La energía de los dos osciladores sin interacción ( $R \rightarrow \infty$ ) esférica

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2M} + \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{p_2^2}{2M} + \frac{1}{2}Cx_2^2 \quad (3.2.1)$$

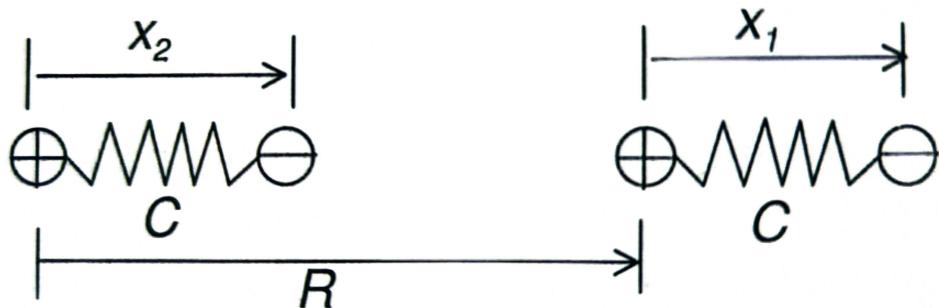


Figura 3.2: Posiciones relativas de los osciladores.

donde  $C = M\omega_0^2$  siendo  $\omega_0$  la frecuencia propia de vibración de la carga (rígida) negativa de los átomos y  $M$  su masa. Por su parte, la energía de interacción de Coulomb se expresa por

$$H_i = \frac{q^2}{R} + \frac{q^2}{R+x_1-x_2} - + \frac{q^2}{R+x_1} - + \frac{q^2}{R-x_2} \approx -\frac{2q^2x_1x_2}{R^3} \quad (3.2.2)$$

donde  $q^2 = e^2$  en unidades cgs o  $q^2 = e^2/4\pi\epsilon_0$  en mks. El hamiltoniano total  $H = H_0 + H_i$  se puede

diagonalizar para obtener sus valores propios, introduciendo las llamadas *variables normales*

$$x_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \quad x_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad (3.2.3)$$

$$p_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2) \quad p_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2) \quad (3.2.4)$$

de modo que

$$H = \left[ \frac{p_s^2}{2M} + \frac{1}{2} \left( C - \frac{2q^2}{R^3} \right) x_s^2 \right] + \left[ \frac{p_a^2}{2M} + \frac{1}{2} \left( C + \frac{2q^2}{R^3} \right) x_a^2 \right] \quad (3.2.5)$$

Formalmente el problema se reduce al de dos *osciladores* independientes, de frecuencias propias:

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 - \frac{2q^2}{MR^3} \quad \omega_a^2 = \omega_0^2 + \frac{2q^2}{MR^3} \quad (3.2.6)$$

En la aproximación  $\frac{2q^2}{MR^3} \ll \omega_0^2$ , podríamos escribir:

$$\omega_s^a = \left[ \left( C \pm \frac{2e^2}{R^3} \right) \right] \cong \left[ 1 \pm \frac{1}{2} \left( \frac{2e^2}{CR^3} - \frac{1}{8} \left( \frac{2e^2}{CR^3} \right)^2 + \dots \right) \right] \quad (3.2.7)$$

en donde  $\omega_0 = (C/m)^{1/2}$ . Dado que la energía del punto cero del sistema es  $\hbar\omega_0$ , ahora el cambio de energía (por oscilador) debido al acoplamiento será  $\Delta E = \frac{1}{2}(\hbar\omega_s + \hbar\omega_a - 2\hbar\omega_0)$ , que es

$$\Delta E \approx -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 \left( \frac{q^2}{CR^3} \right)^2 \propto -C^{-3/2}R^{-6} \quad (3.2.8)$$

La dependencia (3.2.8) coincide con la clásica *dipolo-dipolo inducido*. Observar sin embargo que la interacción es un efecto cuántico en cuanto que  $\Delta E \rightarrow 0$  si  $\hbar \rightarrow 0$ . Esta interacción es la denominada *interacción de van der Waals*, y es la interacción atractiva principal de los gases inertes y también de los cristales de muchas moléculas orgánicas. La interacción de van der Walls no depende para su existencia de ningún solapamiento de las densidades de carga de los dos átomos.

### Interacción repulsiva

Cuando se aproximan los dos átomos sus distribuciones de carga se solapan gradualmente, cambiando por tanto la energía electrostática del sistema. A separaciones suficientemente pequeñas, la energía de solapamiento es repulsiva y en gran parte se debe al **principio de exclusión de Pauli**. El enunciado elemental de este principio es que dos electrones no pueden tener iguales todos sus números cuánticos. Cuando las distribuciones de cargas de dos átomos se solapan existe una tendencia para que los electrones del átomo *B* ocupen parte del átomo *A*, ya ocupados por electrones del mismo átomo *A* y viceversa.

El principio de Pauli impide la ocupación múltiple, y la distribución de electrones al de los átomos con capas cerradas o llenas pueden solaparse solamente si están acompañadas por la promoción parcial de los electrones a estados energéticos más altos no ocupados de los átomos. Así, pues, el solapamiento electrónico aumenta la energía total del sistema y da una contribución repulsiva a la interacción. Es por tanto de esperar un potencial que tenga una parte repulsiva (positiva) y una atractiva (negativa). Los datos experimentales de los gases inertes pueden ajustarse bien por un

potencial *semiempírico* con dependencia de la separación entre átomos según  $R^{-12}$ . El potencial dado al juntar ambas interacciones se llama potencial de Lennard-Jones, y lo describimos en el siguiente apartado.

### 3.2.2. Interacción de Lennard-Jones

El potencial de interacción por par de átomos  $i$  y  $j$  (a distancia  $r_{ij}$ ) resultante (contribución atractiva más repulsiva) puede escribirse Coulomb

$$U(r_{ij}) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] \quad (3.2.9)$$

Esta ecuación describe la llamada **interacción de Lennard-Jones** o **interacción 6-12**. Un modelo parecido a este es el *modelo de las esferas duras*, en el que  $U(r_{ij})$  definida a cachos de tal modo que para  $r < R$  (siendo  $R$  el radio del átomo/molécula/ión) tendremos que  $U = \infty$ . Sin embargo esta función experimental, describe mucho mejor el comportamiento de los sólidos. Los parámetros  $\epsilon$  y  $\sigma$  pueden determinarse a partir de medidas de viscosidad y coeficientes de Virial en la fase gaseosa. El potencial total sobre un átomo  $i$  cualquiera esférica

$$U_i = \sum_{j \neq i}^N U(r_{ij}) = 4\epsilon \left[ B \left( \frac{\sigma}{R} \right)^{12} - A \left( \frac{\sigma}{R} \right)^6 \right] \quad \text{con } B = \sum_{i \neq j}^N p_{ij}^{-12} \quad A = \sum_{i \neq j}^N p_{ij}^{-6} \quad (3.2.10)$$

siendo  $R$  la distancia entre vecinos más próximos y  $p_{ij} = r_{ij}/R$ . Las sumas  $A$  y  $B$  dependen de la estructura cristalina. En el cuadro 3.1 (izquierda) se dan sus valores para algunas de las más comunes. Para calcular estos parámetros podemos usar aproximaciones a primeros vecinos/segundos vecinos, o usar métodos computacionales.

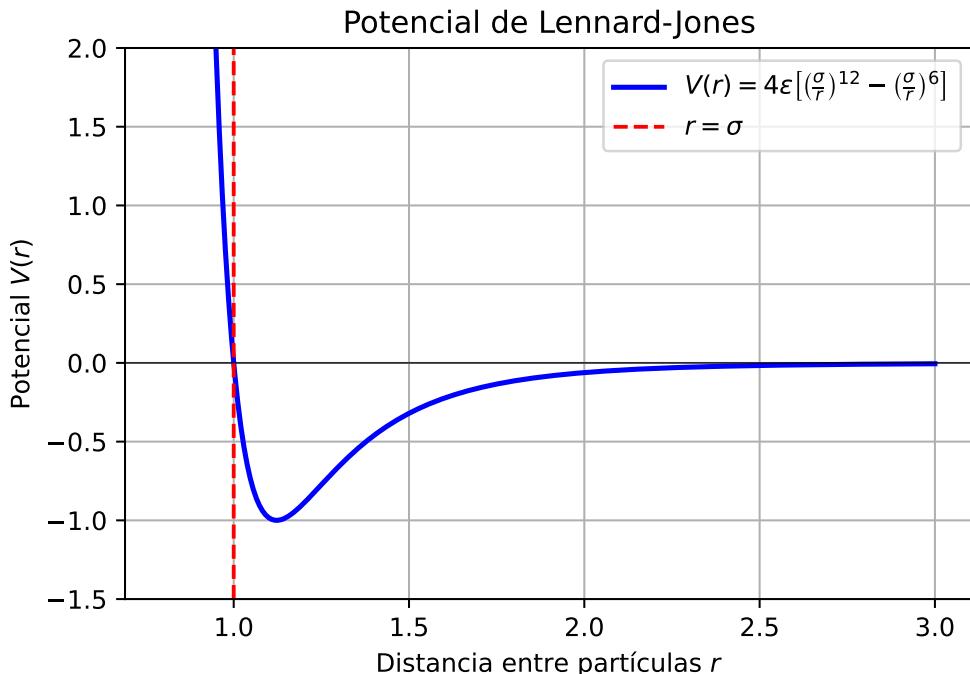


Figura 3.3: Potencial de Lennard-jones para variables reducidas ( $\epsilon, \sigma = 1$ )

El potencial total del cristal resulta (factor 1/2 para impedir que se cuenten dos veces el mismo par de átomos, ya que la interacción  $i \rightarrow j$  también aparece en  $j \rightarrow i$ ):

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^N U_i = 2\epsilon N \left[ B \left( \frac{\sigma}{R} \right)^{12} - A \left( \frac{\sigma}{R} \right)^6 \right] \quad (3.2.11)$$

A partir de la ecuación 3.2.11 se puede calcular la distancia de equilibrio  $R_0$  por la condición  $(dU/dR)_{R_0} = 0$  obteniéndose la ecuación:

$$-2N\epsilon \left[ 12B \frac{\sigma^{12}}{R_0^{13}} - 6A \frac{\sigma^6}{R_0^7} \right] = 0 \quad (3.2.12)$$

de lo cual puede deducirse:

$$\frac{R_0}{\sigma} = \left( \frac{2B}{A} \right)^{1/6} \quad (3.2.13)$$

con, por ejemplo, un valor de  $R_0 = 1.09\sigma$  para la estructura *fcc*. En cuanto a la energía de cohesión (en equilibrio) a temperatura cero se puede obtener sin más que sustituir en 3.2.11  $R = R_0$  resultando

$$U_0(R_0) = -N\epsilon \left( \frac{A^2}{2B} \right) \quad (3.2.14)$$

La estructura con menor  $U_0$  es la *fcc* ( $-8.6N\epsilon$ ), que es la que tienen todos los cristales de gases nobles. Las correcciones mecano cuánticas a  $U_0$  alcanzan un 28 % en el Ne, 10 % para el Ar, un 6 % para el Kr y un 4 % en el Xe. Los valores experimentales para algunos gases nobles (*fcc*) son los mostrados en el cuadro 3.1 (derecha).

Cuanto más pesado es el átomo, menor es la corrección cuántica (y por tanto mejor resultado dará este valor de la energía). Podemos comprender el origen de la corrección cuántica mediante la consideración de un modelo sencillo en el que el átomo está confinado por sus límites fijos. Si la partícula está encerrada en un volumen caracterizado por una distancia  $R$  (que podría ser el radio de los átomos en el cristal o la distancia entre átomos más próximos), tendremos que aplicando el principio de incertidumbre  $p \sim \hbar/R$  nos lleva a una corrección de energía aproximada (por átomo<sup>1</sup>) de:

$$E \sim \frac{p^2}{2M} \sim \frac{\hbar^2}{2MR^2}$$

De este modo la corrección cuántica del punto cero es *inversamente proporcional a la masa*, tal y como se puede ver en el radio

$$R_0 = \frac{(2B/A)^{1/6}\sigma}{(1 - \hbar^2 R_0^4 / 12\epsilon m A \sigma^6)^{1/6}} \quad (3.2.15)$$

que como podemos ver es mayor cuando menor sea la masa de los átomos.

Las diferencias entre energías son muy pequeñas entre la *fcc* y a *hcp*, tal y como podemos ver en la siguiente tabla (tabla 3.1). La razón de esto es que ambas estructuras, tal y como hemos visto en el capítulo 1 son las estructuras compactas por antonomasia, por lo que las diferencias energéticas entre ambas serán diferentes. Que un sólido adopte una u otra dependerá de la variación del potencial de Lennard-Jones o de las posibles impurezas.

<sup>1</sup>Por lo que si se quiere calcular el valor de la energía en el equilibrio o (3.2.13, 3.2.14) se necesita multiplicar por  $N$

Estructura	$B$	$A$	$A^2/2B$	Elemento	Ne	Ar	Kr	Xe
<i>fcc</i>	12.122	14.454	8.617	$R_0/\sigma$	1.14	1.11	1.10	1.09
<i>hcp</i>	12.132	14.455	8.236	$-U/N\epsilon$	5.59	8.24	8.61	8.62
<i>bcc</i>	9.114	12.253	8.611	$-U_0(\text{eV}/\text{at.})$	0.02	0.08	0.12	0.17

Tabla 3.1: A la izquierda los parámetros A y B para las estructuras indicadas. A la derecha valores experimentales para los cristales de gases nobles con estructura *fcc*.

Como podemos ver el valor de la energía de cohesión de equilibrio para los enlaces de van der Waals (3.2.14) cumple que  $U_0 \propto A^2/2B$ , por lo que una estructura será más energéticamente favorable cuanto mayor sea este cociente  $A^2/2B$ . En el caso de los cristales inertes podemos ver que la energía de cohesión es máxima para la estructura *fcc* (tabla 3.1), lo cual se corrobora con los datos experimentales.

### 3.3. Cristales iónicos

La interacción de largo alcance entre iones con carga  $\pm q$  es la interacción electrostática  $\pm q^2/r$  que es atractiva entre iones de carga opuesta e iones de la misma carga. Los iones se distribuyen por sí mismos en la estructura cristalina que dé la interacción atractiva más fuerte compatible con la interacción repulsiva a distancias cortas entre los iones de los átomos, de tal forma que uno de los iones forma una estructura mientras que el otro ion se va metiendo en los huecos. El enlace iónico es fuerte (6-12 eV/ion) y es el resultado de la interacción electrostática *directa* de iones con *capas electrónicas completas*, como por ejemplo el  $\text{Na}^+$  ( $1s^2 2s^2 2p^6$ ) y  $\text{Cl}^-$  ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ ).

Las interacciones repulsivas entre estos iones con configuraciones de gases inertes son semejantes a las correspondientes a los mismos átomos de gases inertes (esto es, una interacción repulsiva del tipo  $B/r^n$  donde  $B$  es una constante semiempírica). La parte de interacción de van der Waals de la interacción atractiva en cristales iónicos es minúscula (del 1 o 2 por ciento), por lo que no es tenido en cuenta. La contribución principal de la energía de enlace de los cristales iónicos es electrostática (recordemos que la de van der Waals es dipolar), y se denomina **energía de Madelung**. Esta contribución podrá ser estimada por la **constante de Madelung** que definiremos posteriormente.

La constante de Madelung aparece al calcular la energía (potencial) de cohesión de un cristal iónico admitiendo una energía potencial por pares de forma

$$U_{ij} = \frac{\pm q^2}{r_{ij}} + \frac{B}{r_{ij}^n} \quad (3.3.1)$$

donde  $B$  y  $n$  ( $n \gg 1$ ) son desconocidos ( $q^2 = e^2$  en unidades cgs o  $q^2 = e^2/4\pi\epsilon_0$  en mks). Otra aproximación válida sería utilizar una intersección repulsiva de la forma, tal que

$$U_{ij} = \frac{\pm q^2}{r_{ij}} + \lambda \exp(-r_{ij}/\rho)$$

donde  $\lambda$  y  $\rho$  son parámetros empíricos. El desarrollo que vamos a hacer ahora pero usando este potencial se puede encontrar en el capítulo 3 del Kittel [2], por lo que recomendamos leer esta parte

<sup>2</sup> Análogamente a las sumas en 3.2.11, al sumar 3.3.1 para todos los pares (N átomos) se tiene <sup>3</sup>:

<sup>2</sup> Realmente no acaba usando este potencial, ya que solo aplica el potencial con la exponencial a los primeros vecinos (que denota por  $z$ ) mientras que al resto le aplica el potencial electrostático. Es bastante llamativo como a pesar de usar otro potencial acaba llegando al mismo resultado de la energía  $U(R_0)$ .

<sup>3</sup> Al igual que antes, el factor 1/2 se debe a que no podemos sumar dos veces la contribución de la misma interacción

$$U = \frac{N}{2} \left( \frac{BA_n}{R^n} - \frac{\alpha q^2}{R} \right) \quad (3.3.2)$$

con

$$A_n = \sum_{i \neq j} p_{ij}^{-n} \quad \alpha = \sum_{j \neq i} \pm p_{ij}^{-1} \quad p_{ij} = \frac{r_{ij}}{R} \quad (3.3.3)$$

tal que a  $\alpha$  se conoce como **constante de Madelung** y su valor depende de la estructura (número de primeros vecinos, de segundos vecinos, distancias relativas...) (cuadro 3.2).

Estructura	ClNa	ClCs	ZnS cúbica
$\alpha$	1.748	1.763	1.638

Tabla 3.2: Constante de Madelung para algunas estructuras muy comunes.

La separación de equilibrio  $R_0$  se calcula a partir de la condición  $(\partial U / \partial R)_{R_0} = 0 \Rightarrow R_0 = (nBA_n / \alpha q^2)^{1/(n-1)}$ , a la cual

$$U(R_0) = -\frac{N}{2} \frac{\alpha q^2}{R_0} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \quad (3.3.4)$$

El exponente  $n$  puede relacionarse con el **coeficiente de compresibilidad**

$$K \equiv -V^{-1} (\partial V / \partial P)_{R_0}$$

(donde  $P$  es la presión y  $V$  el volumen) según la ecuación

$$n = 1 + 18R_0^4 / Kq^2 \alpha \quad (3.3.5)$$

Para ver la relación entre la energía y el coeficiente de compresibilidad tenemos que definir el módulo de comprensibilidad  $B_0$ , como el inverso del coeficiente de compresibilidad:

$$B_0 = -V (\partial P / \partial V)_{R_0} \quad (3.3.6)$$

Dado que  $P = -(\partial U / \partial V)_{R_0}$ <sup>4</sup> el módulo de comprensibilidad es, entonces:

$$B_0 = V \left( \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right)_{R_0} \quad (3.3.7)$$

Dado que  $U$  está definido en función de  $R$ , y  $V$  es una función de  $R$ , podemos, tras hacer unos pocos cálculos (como tener en cuenta que  $(\partial U / \partial R)_{R_0} = 0$ ), podemos llegar a que:

$$B_0 = -V \frac{\partial^2 U}{\partial R} \left( \frac{\partial R}{\partial V} \right)^2 \quad (3.3.8)$$

en  $R = R_0$ . Hay que tener en cuenta que  $V = \beta N R^3$  (en tres dimensiones), siendo  $\beta$  un *factor de estructura de la base* (por ejemplo, para el NaCl es 1). Así podemos estudiar el comportamiento de  $K$  respecto a  $U$ .

<sup>4</sup>Para ver esto basta con recordar la expresión termodinámica de la energía interna:  $dU = TdS - PdV$  de tal modo que  $P = (dU/dV)_S$  a  $S$  constante. Podemos asumir una entropía constante ya que por ahora el sistema es perfecto, está en equilibrio y es infinito. Aún así podemos pesar como esto como una aproximación.

Es probable que veamos la energía definida como negativa, por lo que los signos para cada ejercicio pueden cambiar. Como ejemplo para el NaCl (*fcc*), a partir del valor experimental  $K = 3.3 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{dyna}$  y  $\alpha = 1.75$  se obtiene  $n = 9.4$ . También para el NaCl se obtiene que  $\rho = 0.3 \text{ \AA}$  admitiendo una forma exponencial para la interacción repulsiva, de modo que resulta ser ésta de muy corto alcance.

Las energías de cohesión de cristales iónicos típicos como los haluros alcalinos se predicen según ecuación 3.3.4, con una precisión mejor que el 10 %. El término  $-Naq^2/2R_0$  representa prácticamente el 90 % de  $U(R_0)$ . En el cuadro 3.3 se dan estos valores para algunos *haluros alcalinos*.

	Li	Na	K	Rb	Cs
F	10.5	9.31	8.25	7.86	7.50
	<b>12.6</b>	<b>10.9</b>	<b>9.44</b>	<b>8.94</b>	<b>8.38</b>
Cl	8.63	7.94	7.19	6.94	
	<b>9.82</b>	<b>8.94</b>	<b>8.00</b>	<b>7.69</b>	
Br	8.25	7.56	6.86	6.63	
	<b>9.19</b>	<b>8.44</b>	<b>7.63</b>	<b>7.38</b>	
I	7.69	7.06	6.50	6.31	
	<b>8.38</b>	<b>7.75</b>	<b>7.13</b>	<b>6.88</b>	

Tabla 3.3: Energía de cohesión experimental (eV/par-de-iones). En negrita la energía de cohesión teórica considerando sólo el término  $Naq^2/2R_0$ .

## 3.4. Cristales covalentes

El enlace covalente entre dos átomos, muy común en los compuestos orgánicos, involucra a sendos a electrones de valencia que son compartidos. Este *solapamiento* asociado de carga electrónica en la dirección de la unión de los átomos genera un enlace fuerte (7.3 eV/átomo en el diamante). Los cristales covalentes suelen ser duros y quebradizos.

Los cristales covalentes están formados por átomos que tienen capas electrónicas semillenas, de forma que el número de electrones a ser transferidos de unos átomos a otros (para completar capas electrónicas) es demasiado grande para que sea energéticamente posible. El ejemplo típico es el diamante con átomos C de estructura electrónica  $1s^2 2s^2 2p^2$ . El mecanismo de enlace no se basa por tanto en que los átomos cedan o ganen electrones si no en que éstos sean *compartidos* por átomos vecinos. Por compartir se quiere decir que las funciones de onda de **dos** electrones correspondientes a **dos** átomos **vecinos** solapan de forma que la probabilidad de encontrar cualquiera de los dos electrones en todo el espacio entre los dos núcleos es muy alta.

El enlace covalente es característico de átomos de electronegatividad similar y su capacidad de enlazar reside en que por un lado los electrones están próximos a ambos núcleos a la vez (energía potencial más baja) y por otro la función de onda está más deslocalizada (menor energía cinética). El ejemplo más sencillo de enlace covalente en la molécula H<sub>2</sub>: un átomo de estructura 1s<sup>1</sup> necesita un electrón para completar la capa, y lo hace compartiendo dos electrones con otro átomo H (véase 3.4.1 y 3.4.2).

Algunas propiedades, en particular la energía de cohesión, de los cristales covalentes se puede estudiar utilizando algunos de los resultados que se obtienen para la molécula H<sub>2</sub> porque se pueden considerar un conjunto (ordenado) de pares de átomos unidos por el mecanismo de compartir sendos electrones. La diferencia reside en que mientras que para la molécula H<sub>2</sub> las funciones de onda que

se solapan son funciones de onda asociadas a cada átomo, en el caso de cristales esas funciones son a su vez *mezcla de orbitales s, p* que son los llamados *híbridos* (véase 3.4.3) . El mecanismo de compartir electrones determina que el enlace covalente sea *direccional* (distribución de carga electrónica localizada en la línea de unión entre átomos vecinos) y *saturable* (cada átomo no puede formar más enlaces que átomos tenga en la capa incompleta).

### 3.4.1. La molécula ion de hidrógeno $\text{H}_2^+$

Esta molécula ilustra lo esencial del enlace covalente y admite solución exacta minimizando  $\langle E \rangle = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$  donde

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{q^2}{r_a} - \frac{q^2}{r_b} + \frac{q^2}{R}$$

es el Hamiltoniano del electrón y los dos núcleos, supuestos éstos en reposo (*aproximación adiabática*). Una aproximación es suponer que la función de onda al acercar los núcleos (que llamaremos *orbital-molecular*) es representable por una combinación lineal de los orbitales atómicos aislados ( $R \rightarrow \infty$ , ver figura 3.4), con energías  $E_a = E_b = E_0$ :

$$\Psi = C_a \Psi_a + C_b \Psi_b \quad (3.4.1)$$

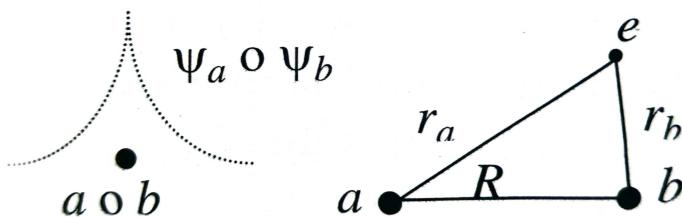


Figura 3.4: Distribución de carga electrónica en torno al núcleo  $a$  o al  $b$  y posiciones relativas.

donde  $C_a$  y  $C_b$  son coeficientes a determinar. De la condición de normalización  $\int_V \Psi \Psi^* d^3r = 1$  se obtiene

$$C_a^2 + 2C_a C_b S + C_b^2 = 1 \quad \text{con} \quad S = \int_V \Psi_a^* \Psi_b d^3r \quad (3.4.2)$$

El valor medio de la energía se calcula según:

$$\langle E \rangle = \int_V \Psi^* H \Psi d^3r = C_a^2 H_{11} + C_a C_b H_{12} + C_a C_b H_{21} + C_b^2 H_{22} \quad (3.4.3)$$

Los términos  $H_{ij}$  vienen dados Por

$$H_{11} = \int_V \Psi_a^* H \Psi_a d^3r = H_{22} = \int_V \Psi_b^* H \Psi_b d^3r = -E_0 + \frac{q^2}{R} - A$$

$$H_{12} = \int_V \Psi_a^* H \Psi_b d^3r = H_{21} = \int_V \Psi_b^* H \Psi_a d^3r = -E_0 S + \frac{q^2}{R} S - J$$

donde

$$A = \int_V \Psi_a \frac{q^2}{r_b} \Psi_a d^3r = \int_V \Psi_b \frac{q^2}{r_a} \Psi_b d^3r$$

es la llamada *integral de Coulomb* [representa la interacción del protón  $a$  ( $b$ ) con el electrón alrededor del protón  $b$ ( $a$ )] y

$$J = \int_V \Psi_a^* \frac{q^2}{r_b} \Psi_b d^3r = \int_V \Psi_b^* \frac{q^2}{r_b} \Psi_a d^3r > 0$$

es la *integral de canje* (no tiene *interpretación clásica*). En este caso, como la distribución de carga alrededor de ambos núcleos debe ser la misma

$$C_a^2 = C_b^2 \Rightarrow C_a = \pm C_b$$

con lo cual sustituyendo en la ecuación 3.4.2 se obtiene que

$$C_a = C_b = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} \Rightarrow \Psi_+ = \frac{\Psi_a + \Psi_b}{\sqrt{2(1+S)}} \quad (3.4.4)$$

$$C_a = -C_b = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}} \Rightarrow \Psi_- = \frac{\Psi_a - \Psi_b}{\sqrt{2(1-S)}} \quad (3.4.5)$$

La solución que así resulta son dos nuevos autoestados, que se corresponden con las combinaciones simétrica y antisimétrica de  $\Psi_a$  y  $\Psi_b$ , denominados orbital enlazante ( $\Psi_+$ ) y orbital antienlazante ( $\Psi_-$ ), de energías, respectivamente

$$\epsilon_+ = -E_0 + \frac{q^2}{R} - \frac{A+J}{1+S} \approx -E_0 - J \quad (3.4.6)$$

$$\epsilon_- = -E_0 + \frac{q^2}{R} - \frac{A-J}{1-S} \approx -E_0 + J \quad (3.4.7)$$

Como se ve en la figura 3.5 la mayor densidad de carga es la solución simétrica en el espacio entre núcleos es la diferencia distintiva. Esta configuración es la de menor energía porque el electrón está menos confiando y tiene por tanto una menor energía cinética  $E_c$  (valor medio de  $\nabla^2\Psi$  menor). Lo mismo vale para la energía potencial  $E_p$  por cuanto el electrón, en el estado simétrico, está en medio más cerca de ambos núcleos a la vez.

La energía de disociación (energía de cohesión),  $E_D$ , y la distancia internuclear en el equilibrio,  $R$ , de la molécula  $H_2^+$ , son respectivamente 2.79 eV y 1.06 Å. Evaluando las integrales  $H_{ij}$ ,  $A$ ,  $S$ , etc. precedentes, y utilizando funciones de onda 1s para los orbitales atómicos ( $\Psi \propto e^{-r/a_0}$  donde  $a_0 = 0.529\text{\AA}$  es el *radio de Bohr*). Si además de orbitales 1s se incluyen los orbitales 2s y 2p en la ecuación 3.4.1 se obtiene  $E_D = 2.71\text{eV}$  y  $R = 1.06\text{\AA}$  de modo que el modelo da cuenta cuantitativamente de la molécula  $H_2^+$ .

### 3.4.2. La molécula de hidrógeno ( $H_2$ )

Es el ejemplo más sencillo de molécula neutra y prototipo de enlace covalente: enlace entre átomos (*objetos neutros*) por medio de electrones igualmente compartidos. Este mecanismo necesariamente comprende el tomar un electrón de cada uno de ellos para formar el enlace. El hamiltoniano es ahora

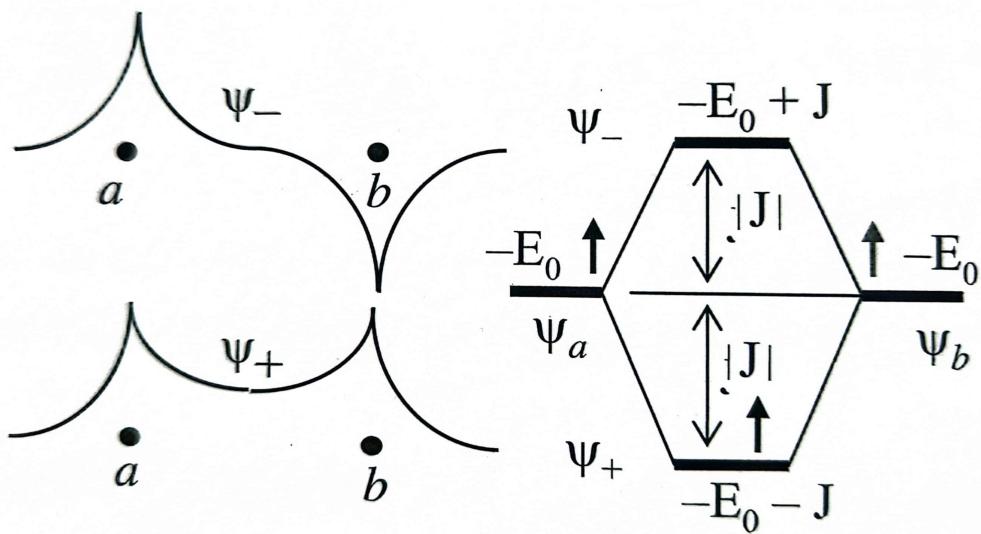


Figura 3.5: Distribución de carga electrónica para las soluciones  $\Psi_-$  y  $\Psi_+$  y los correspondientes niveles de energía.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{q^2}{r_{a_1}} - \frac{q^2}{r_{a_2}} - \frac{q^2}{r_{b_1}} - \frac{q^2}{r_{b_2}} + \frac{q^2}{r_{12}} - \frac{q^2}{R}$$

La presencia del término  $q^2/r_{12}$ , que da cuenta de la interacción repulsiva entre los dos electrones, impide obtener una solución exacta para la molécula de hidrógeno. Ignorando este término, en la llamada *aproximación de electrones independientes*, pueden aplicarse directamente los resultados obtenidos para el ion  $H_2^+$ : la existencia de un estado enlazante y otro antienlazante. El estado de más baja energía se obtiene poniendo ambos electrones en el orbital enlazante, con sus espines opuestos para no violar el principio de exclusión, como se indica en la figura. Este hecho está de acuerdo con el llamado *principio de máximo solapamiento*, según la cual la configuración más estable es aquella en la que las funciones de onda electrónicas individuales solapan lo máximo posible (el aumento de la energía de interacción electroestática se compensa con la disminución de la energía de confinamiento). Este principio exige que, en general, un átomo no puede formar más enlaces covalentes que electrones tenga fuera de capas cerradas (en particular, el H sólo puede formar un enlace). Por esto se dice que el enlace covalente es *saturable*.

Para obtener la energía de cohesión de la molécula  $H_2$  existen dos métodos aproximados que se aplican en general a otras moléculas y sólidos: el de *orbitales moleculares* y el de *electrones de valencia*. En el primero el estado molecular fundamental se representa por la función

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_+(\mathbf{r}_1)\Psi_+(\mathbf{r}_2) \quad (3.4.8)$$

que es simétrica bajo el intercambio de las coordenadas electrónicas (para hacer la función de onda *total* antisimétrica, la función de onda de espín debe ser antisimétrica  $\Rightarrow$  espines antiparalelos) y para  $\Psi_+$  se utiliza el orbital enlazante obtenido para el ion  $H_2^+$ ,  $\Psi_+ \propto \Psi_a + \Psi_b$ . Así:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = [\Psi_a(\mathbf{r}_1) + \Psi_b(\mathbf{r}_1)] [\Psi_a(\mathbf{r}_2) + \Psi_b(\mathbf{r}_2)] \quad (3.4.9)$$

En la aproximación de electrones independientes y utilizando orbitales  $1s$  para las funciones atómicas  $\Psi_a$  y  $\Psi_b$  se obtiene  $E_D = 2.65\text{eV}$  y  $R = 1.6a_0$ , a comparar con los experimentales  $E_D = 4.72\text{eV}$  y  $R = 1.40a_0$ . El origen de este desacuerdo se halla en el error cometido por la necesidad de tener

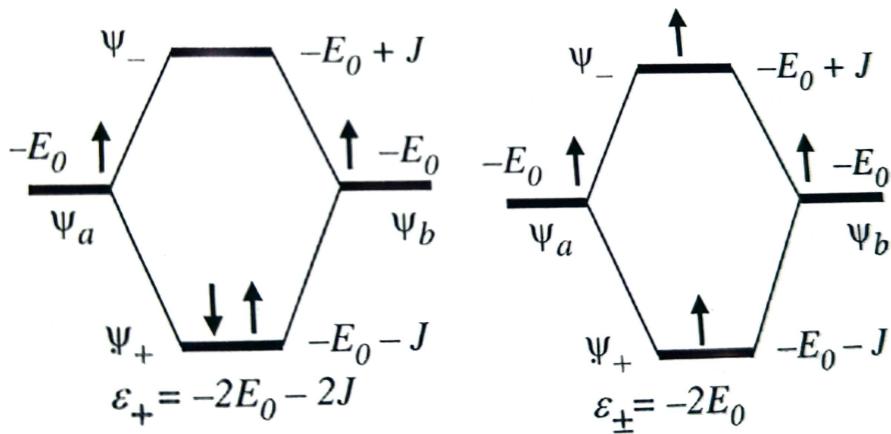


Figura 3.6: Energía con dos electrones en el estado enlazante (espines opuestos) y con un electrón en el estado enlazante.

en cuenta otros orbitales además del 1s, pero sobre todo por aproximar la función de onda  $\Psi(r_1, r_2)$  según la ecuación 3.4.9. Si se desarrolla el producto de esta ecuación se obtiene

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_a(\mathbf{r}_2) + \Psi_b(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) + \Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) + \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1) \quad (3.4.10)$$

Como  $\Psi_a$  es grande cerca del núcleo,  $a$  y  $\Psi_b$  lo cerca del núcleo  $b$ , los dos primeros sumandos de la ecuación 3.4.10 tienen una interpretación física muy diferente de la de los dos últimos. Éstos dan la amplitud de probabilidad de encontrar dos átomos neutros de hidrógeno ( $H+H$ ), mientras que los dos primeros sumandos dan la amplitud de probabilidad de encontrar un protón *desnudo*  $H^+$  y un ion hidrógeno negativo  $H^-$  ( $H^+ + H^-$ ). En la aproximación de electrones independientes estos estados tienen la misma energía (un electrón tiene una energía de enlace de 13.6 eV con un protón independientemente de si ya está enlazado con otro electrón) y por ello sus funciones de onda se mezclan con igual peso. Sin embargo, es bien conocido que un electrón se enlaza con un átomo neutro de hidrógeno para formar  $H^-$  sólo por 0.7 eV (debido a la fuerza de repulsión del primer electrón). Por lo tanto, al menos a separaciones a las que se pueda diferenciar claramente entre los estados  $H^+ + H^-$  y  $H+H$ , la aproximación de electrones independientes es mala. Existen refinamientos dentro del método de *orbitales moleculares* que mejoran el acuerdo con los datos experimentales, en particular, dando pesos distintos a los sumandos de la ecuación 3.4.10.

El método de *electrones de valencia* desprecia por completo la configuración  $H^+ + H^-$ , de modo que usa la función de onda aproximada

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) + \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1) \quad (3.4.11)$$

Utilizando el hamiltoniano completo (sin despreciar el término repulsivo), orbitales 1s para  $\Psi_a$  y  $\Psi_b$ , y aplicando el cálculo variacional se obtiene  $E_D = 3.14$  eV y  $R = 1.64a_0$  que está más cerca de los valores experimentales. El acuerdo se mejora considerando además orbitales  $p$ , la polarización de los orbitales atómicos.

### 3.4.3. Hibridación

La hibridación es una característica del enlace covalente que se origina en átomos con varios electrones fuera de una capa cerrada. De acuerdo con el principio genérico de *máximo solapamiento*

que rige el enlace covalente entre orbitales  $1s$  del  $H_2$  ( $1s^2$ ) es más débil que el enlace entre orbitales  $2p$  del  $F_2$  ( $1s^2 2s^2 2p_x^2 2p_y^2 2p_z^1$ ), por ser esta más direccional (*lóbulos p*) y por tanto permitir más solapamiento. En medio de ambos está el de la molécula HF formado por el solapamiento del orbital  $1s$  del hidrógeno y el  $2p$  del flúor.

Para estar en condiciones de máximo solapamiento puede ser rentable que se produzca primero una *promoción* (excitación) electrónica dando lugar a la formación de nuevos estados, los llamados *orbitales híbridos*, que serán los que se enlacen con orbitales híbridos de átomos vecinos recuperando en el enlace la energía invertida en la promoción. Por ejemplo, en la formación de la molécula  $Cl_2Be$  (Be:  $1s^2 2s^2$ , Cl:  $1s^2 2s^2 2p^6 3p_x^1 3p_y^2 3p_z^2$ ) previamente en el Be se produce la promoción  $1s^2 2s^2 \rightarrow 1s^2 2s^1 2p_x^1$  formándose luego los llamados híbridos  $sp$ , como se ilustra en la figura 3.7 (izquierda), cada uno de los cuales se enlaza con el orbital  $3p_x$  de cada átomo de cloro.

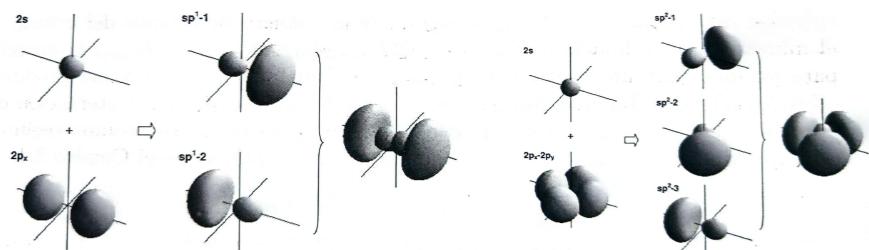


Figura 3.7: Formación de los orbitales híbridos  $sp^1$  (izquierda) y  $sp^2$  (derecha).

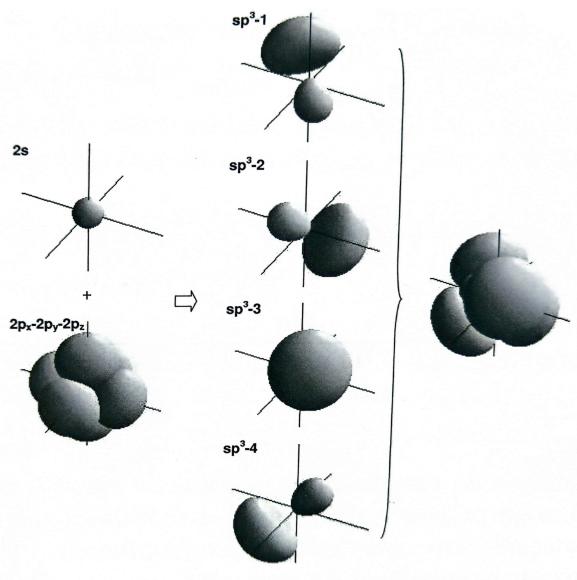


Figura 3.8: Orbitales híbridos  $sp^3$ .

La molécula  $BH_3$  resulta de la promoción  $1s^2 2s^2 2p_x^1 \rightarrow 1s^2 2s^1 2p_x^1 2p_y^1$  del boro dando lugar a los híbridos  $sp_2$ , como se muestra en la figura 3.7 (derecha) con cada uno de los cuales se enlaza a un H.

Otro ejemplo son los híbridos  $sp^3$  tetraédricos del C que resultan de la promoción previa  $1s^2 2s^2 2p_x^1 2p_y^1 \rightarrow 1s^2 2s^1 2p_x^1 2p_y^1 2p_z^1$ . Se forman luego, por combinación lineal de los estados, orbitales híbridos que apuntan a los vértices de un tetraedro regular (figuras 3.8 y 3.9 (a)) y constituyen la base del cristal de diamante y de los semiconductores.

Los enlaces se forman por el acoplamiento de orbitales híbridos de dos átomos vecinos  $a, b$  que

apunten en la misma dirección

$$\Psi = C_a |h(a)\rangle + C_b |h(b)\rangle \quad (3.4.12)$$

El tratamiento es análogo al que se sigue para la molécula H<sub>2</sub> (los orbitales híbridos *h* son sólo algo más complejos que los atómicos al igual que el hamiltoniano) y se obtienen también dos soluciones: un estado enlazante y otro antienlazante. En el estado fundamental los electrones ocuparán los estados de más baja energía (estado enlazante), como se indica en la figura 3.9(b).

En la aproximación del *orbital enlazante*, el cristal puede verse como una estructura periódica de orbitales enlazantes entre los átomos vecinos. La energía de cohesión del cristal es  $\frac{z}{2}NE_{\text{enlazante}}$  siendo *N* el número de átomos del cristal, *z* el número de coordinación,  $E_{\text{enlazante}} = 2(E_+ - E_0 - E_{\text{prom}})$  y *E<sub>prom</sub>* la energía para promocionar un electrón a un orbital de un nivel superior y así producir orbitales híbridos. Incluyendo los llamados *efectos de metalicidad* (interacción de un orbital enlazante de un átomo con los antienlazantes de los átomos vecinos), esta aproximación de las energías de la tabla 3.4.

	C	Si	Ge	Sn
Calculada	14.2	5.0	4.6	3.5
Experimental	<b>7.3</b>	<b>4.6</b>	<b>3.9</b>	<b>3.1</b>

Tabla 3.4: Energías de cohesión (eV/átomo) de algunos cristales covalentes.

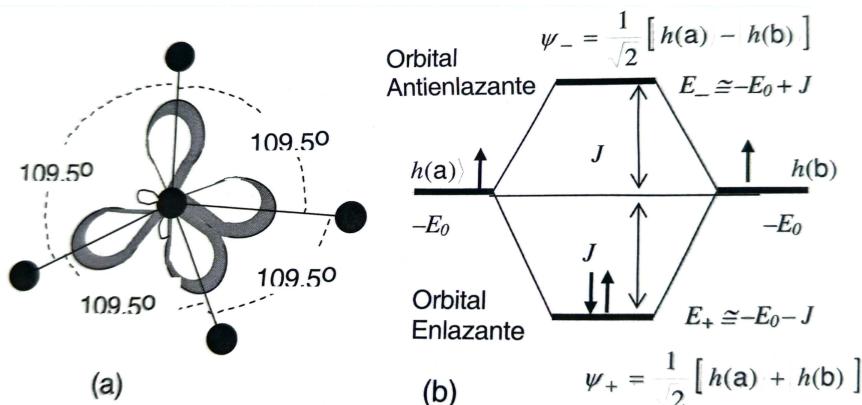


Figura 3.9: Niveles de energía asociados al enlace entre orbitales híbridos.

### 3.5. Cristales metálicos

El enlace metálico puede considerarse como caso límite del enlace iónico, en el cual los iones negativos son precisamente electrones. La diferencia crítica es que la masa muy pequeña del electrón hace que su energía del punto cero sea grande, de modo que no está localizado en un punto de red, lo que a su vez da cuenta de la alta conductividad eléctrica.

Considérese el modelo idealizado (figura 3.10) consistente en iones positivos puntuales de valencia *Z* situados regularmente y bañados por un mar de carga negativa que consideremos confinada en volúmenes esféricos de radio *R* alrededor de cada ion, de modo que la carga electrónica neta alrededor de cada ion es *Ze* ( $\Rightarrow$  densidad de carga  $n = Ze/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ ). *R* o equivalentemente la concentración *n* es desconocida y será determinada por la condición de energía mínima.

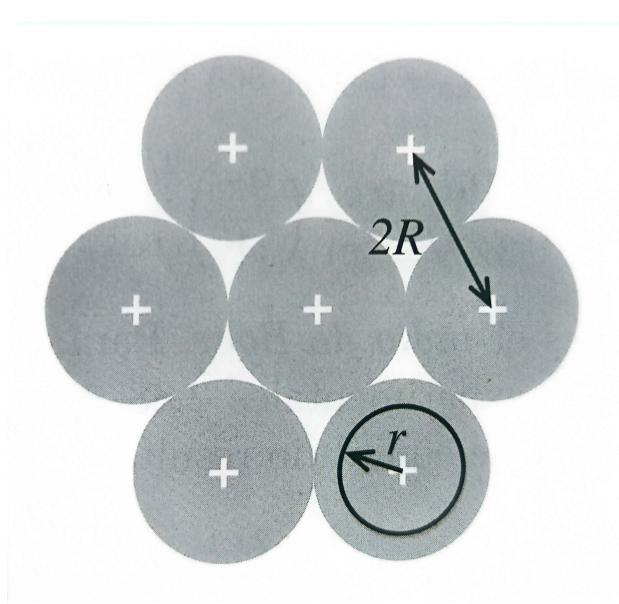


Figura 3.10: Modelo de cristal metálico.

Para determinar la energía comenzamos por calcular la energía potencial. La carga a distancia  $r$  de un ion es

$$q(r) = Ze - n \frac{4}{3} \pi r^3 = Ze \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \quad (3.5.1)$$

y entonces el potencial electrostático es  $\phi(r) = q(r)/4\pi\epsilon_0 r$ . La energía electrostática atractiva ion-electrón será  $dU_{\text{atrac}} = \phi dq$ , es decir,

$$dU_{\text{atrac}} = \underbrace{\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)}_{\phi} \underbrace{\frac{-3Ze}{R^3} r^2 dr}_{dq} = -3Z^2 e^2 \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \frac{r dr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (3.5.2)$$

Integrando sobre el volumen en  $R$  se obtiene la energía potencial por átomo

$$U_{\text{atrac}} = \frac{-3Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^R \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) r dr = -\frac{9Z^2 e^2}{40\pi\epsilon_0 R} \quad (3.5.3)$$

Esta energía potencial contabiliza la interacción atractiva entre iones y electrones así como la repulsión electrón-electrón. Obsérvese que en este modelo no hay interacción entre átomos por ser éstos neutros y esféricamente simétricos.

Falta la energía cinética de los electrones. Esta es muy elevada debido fundamentalmente a su carácter fermiónico: el *principio de exclusión de Pauli* los obliga a ocupar estados distintos, cada vez más energéticos, de modo que incluso a  $T = 0\text{K}$  los más energéticos alcanzan una energía cinética del orden de  $\sim\text{eV}$ . Como se verá en el capítulo 6, la energía cinética total de un gas de electrones de concentración numérica  $n$  viene dada por

$$U_{\text{cinet}} = \frac{3\hbar^2(3\pi^2 n^{2/3})}{10m} \quad (3.5.4)$$

donde  $m$  es la masa del electrón. Como  $n = Ze/\frac{4}{3}\pi R^3$ , se tiene que

$$U_{\text{cinet}} = \frac{3\hbar^2(9\pi\frac{Z}{r})}{10mR^2} \quad (3.5.5)$$

Así como la energía potencial aumenta (se hace menos negativa) al aumentar R, por cercanía de cargas opuestas la energía cinética disminuye porque el confinamiento electrónico es menor. En el equilibrio (radio  $R_0$ , interdistancia  $2R_0$ ), se debe cumplir que  $U_{\text{tot}} = U_{\text{atrac}} + U_{\text{cinet}}$  sea mínima. Imponiendo esta condición resulta

$$2R_0 = \frac{16\hbar^2\pi\epsilon_0}{3Z^{4/3}e^2m} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} = \frac{4.9}{Z^{4/3}}a_0 \quad (3.5.6)$$

donde  $a_0 = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / e^2 m$  es el *radio de Bohr*. Para  $Z = 1$  se tiene  $2R_0 \approx 2.6\text{\AA}$  a comparar con los valores experimentales  $2.88\text{\AA}$  del Au y  $2.56\text{\AA}$  del Cu, por ejemplo. A su vez la energía de equilibrio resultante

$$U_{\text{tot}}(R_0) = -\frac{9e^2}{80\pi\epsilon_0 R_0} \approx -5\text{-eV/at} \quad (3.5.7)$$

a comparar con  $-3.81\text{-eV/at}$  del Au o  $-3.49\text{-eV/at}$  del Cu.

Aunque este modelo recoge lo esencial del enlace metálico, es limitado en cuanto que es independiente de la estructura o no tiene en cuenta otros electrones que los de valencia. Por ello, no puede explicar, por ejemplo, por qué algunos metales cristalizan en el sistema *hcp* y otros lo hacen en el *bcc* o *fcc* o por qué la energía de enlace en el W es tan alta como 8.9 eV/at.

# Capítulo 4

## Dinámica de redes

En este capítulo se comienza el estudio de las vibraciones de los átomos alrededor de sus posiciones de equilibrio y sus efectos observables. Esta llamada *dinámica de redes* es necesaria para explicar propiedades como: i) la conductividad térmica de los aislantes, ii) la dependencia en  $T^3$  del calor específico a baja temperatura, iii) las energías de cohesión, iv) la dilatación térmica, v) la conductividad eléctrica *finita* de los metales, vi) la reflectividad de los cristales iónicos, etc.

### 4.1. Vibraciones de los cristales con base atómica

#### 4.1.1. La cadena lineal monoatómica

Supongamos una cadena lineal de átomos en equilibrio. El potencial que experimenta un átomo  $n$  estará modelizado de tal forma que solo depende las posiciones relativas entre este y sus átomos vecinos. En función de los vecinos que tengamos en cuenta a la hora de describir el potencial tendremos una ecuación u otra. En este caso vamos a suponer que solo tenemos en cuenta las posiciones relativas entre los *primeros vecinos*. Entonces el potencial  $U_n$  viene dado por

$$U_n = U_n(x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n) \quad (4.1.1)$$

Tal y como sabemos, el punto de equilibrio de un átomo ocurre cuando el potencial está en un mínimo, denotando las posiciones de equilibrio como  $x_n^0, x_{n-1}^0 \dots$ . Ahora supongamos que nuestros átomos se encuentran muy cerca del equilibrio pero sin llegar a estarlo, de tal forma que:

$$x_n = x_n^0 + \delta x_n \quad (4.1.2)$$

de tal modo que este  $\delta x_n \ll a$  siendo  $a$  la distancia entre átomos en equilibrio (del orden de Å). A esta aproximación la llamamos **aproximación armónica**, y nos permitirá describir el potencial perturbado como un potencial armónico y por tanto describir el movimiento de los átomos/puntos de red como si fueran osciladores armónicos. En ese caso es evidente que podemos hacer una aproximación de taylor del potencial para esta posición  $x_n$ , de tal modo que:

$$U_i(x_n) \approx U_0 + \left( \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} \right)_{x_n^0} \left\{ [(x_n - x_{n-1}) - (x_n^0 - x_{n-1}^0)]^2 + [(x_{n+1} - x_n) - (x_{n+1}^0 - x_n^0)]^2 \right\} \quad (4.1.3)$$

donde lógicamente el término de primer orden a desaparecido al encontrarse en un mínimo. El término  $U_0$  es la energía en el mínimo. En este caso estamos derivando en  $x$  que sería  $|x_n - x_{n-1}|$

que coincide con  $|x_{n+1} - x_n|$ , ya que solo depende de la distancia relativa (que entre primeros vecinos podemos considerarla igual). Es muy importante tener claro esto, ya que de considerar más vecinos (segundos, terceros...) la derivada no será sobre la misma variable, sino que tendremos  $x_1 = |x_n - x_{n-1}|, x_2 = |x_n - x_{n-2}| \dots$ , generando derivadas diferentes para cada vecino considerado. Esto debe ser así ya que, como podemos ver, esta derivada seguda no es otra cosa (si lo comparamos con el potencial armónico<sup>1</sup>) que la constante de recuperación en un muelle o lo que nosotros llamaremos **constante de fuerza**, y evidentemente la fuerza que pueda ejercer el primer vecino *debe ser mayor* que la que ejerza el tercer vecino, no digamos ya el quinto. Entonces definimos la constante de fuerza  $C_1$  de los primeros vecinos como:

$$C_1 \equiv \left( \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} \right)_{x_n^0} \quad (4.1.4)$$

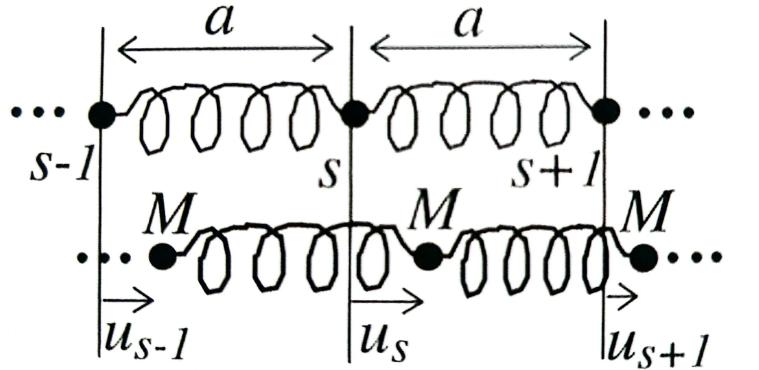


Figura 4.1: Parámetro de red y posiciones de átomos de masa  $M$  conectados por una fuerza de constante  $C$  entre planos adyacentes. Los desplazamientos de los átomos se designan por  $u_{s-1}, u_s, u_{s+1}$ .

En general la ecuación anterior (4.1.3) la podemos escribir en función de los desplazamientos infinitesimales, de tal forma que:

$$U_n(x_n) \approx U_0 + C_1 \{ [\delta x_n - \delta x_{n-1}]^2 + [\delta x_{n+1} - \delta x_n]^2 \} \quad (4.1.5)$$

Una vez tenemos esto ahora solo tenemos que calcular las ecuaciones del movimiento, las cuales vendrán dadas por  $m\ddot{x}_n = F_n$ <sup>2</sup>. Dado que  $\ddot{x}_n = \delta\ddot{x}_n$  (la posición de equilibrio es siempre la misma), tenemos que, para cada átomo de la cadena las ecuaciones son:

⋮

$$m\ddot{x}_{n-1} = F_{n-1} = -2C_1 (2\delta x_{n-1} - \delta x_n - \delta x_{n-2}) \quad (4.1.6)$$

$$m\ddot{x}_n = F_n = -2C_1 (2\delta x_n - \delta x_{n+1} - \delta x_{n-1}) \quad (4.1.7)$$

$$m\ddot{x}_{n+1} = F_{n+1} = -2C_1 (2\delta x_{n+1} - \delta x_{n+2} - \delta x_n) \quad (4.1.8)$$

⋮

<sup>1</sup>El potencial armónico es  $U = \frac{1}{2}kx^2$  donde  $x$  es el desplazamiento relativo respecto el punto de equilibrio

<sup>2</sup>Recordemos que la fuerza viene dada por el menos gradiente del potencial  $\mathbf{F} = -\nabla U$

La solución más sencilla que se nos puede ocurrir es la *solución de ondas planas* o *solución armónica*:

$$\delta x_n = u_k e^{i(\omega t - kx_n^0)} \quad (4.1.9)$$

donde  $u_k$  no es más que la amplitud de la onda, la distancia máxima de la que se puede separar de la posición de equilibrio (recordar que  $a \gg u_k$ , siendo  $a$  la distancia interatómica). En general la amplitud dependerá de  $k$ , por eso denotamos esta por  $u_k$ . Ahora bien, es evidente que no son válidas todas las soluciones armónicas posibles, ya que debe existir una relación entre  $\omega$  y  $k$ . Para hallarla solo debemos sustituir (4.1.9) en 4.1.7, y tener en cuenta que la posición de equilibrio  $x_n^0 = na$ :

$$m\omega^2 e^{i(\omega t - kna)} = 2C [2e^{-ikna} - e^{-k(n+1)a} - e^{-k(n-1)a}] e^{i\omega t}$$

eliminando las exponenciales que sobran

$$m\omega^2 = 2C [2 - e^{ka} - e^{-ka}] = 4C [1 - \cos(ka)]$$

y tras una pequeña modificación, podemos llegar a que:

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \left( \frac{1}{2}ka \right) \right| \quad (4.1.10)$$

que es llamada la **relación de dispersión** y cuya gráfica se muestra en la figura 4.2. Teniendo esto en cuenta la frecuencia máxima a la que puede vibrar la cadena es:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4C}{m}} \quad (4.1.11)$$

La posición de la partícula  $n$  viene dada por:

$$x_n(t) = x_n^0 + u_k e^{-i(\omega t - kx_n^0)} = x_n^0 + u_k e^{-i(\omega t - kna)} \quad (4.1.12)$$

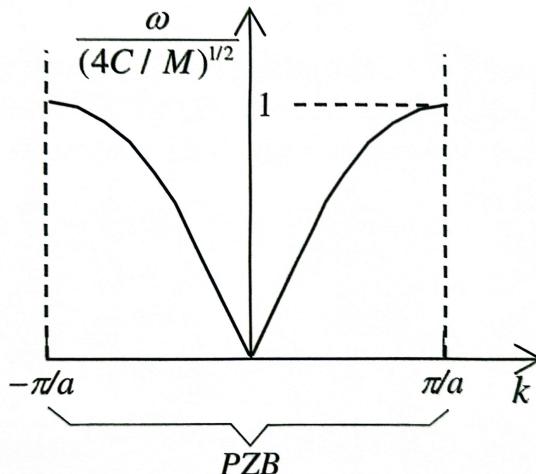


Figura 4.2: Representación de la relación de dispersión de una cadena monoatómica de átomos de masa  $M$  y constante de acoplamiento  $C$ . Observar que para  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow k$

Una vez tenemos esto, algunos puntos importantes dentro del marco de la cadena lineal monoatómica son:

- Hay simetría  $k \rightarrow -k$ .
- Hay periodicidad  $k \rightarrow k + n2\pi/a = k + G$ . La razón de que  $k$  y  $k + G$  sean equivalentes es que dan lugar a las mismas coordenadas atómicas, como se muestra con el ejemplo de la figura 4.3. Por la *redundancia* existente en el espectro sólo consideramos los vectores de onda  $k \in PZB$  (**primera zona de Brillouin**).

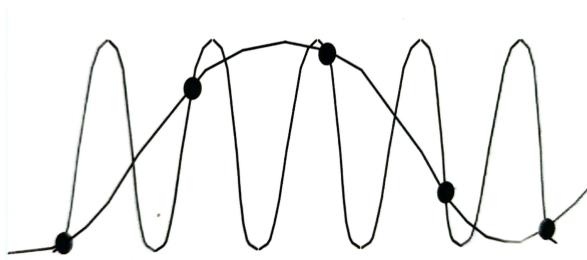


Figura 4.3: Ejemplo de ondas con distinta longitud de onda que, sin embargo, representan el mismo estado de movimiento de los átomos.

Ahora podemos estudiar, por ejemplo, cual es la velocidad de las ondas armónicas viajando a lo largo del sólido. En general diferenciamos dos tipos de velocidades, la velocidad de fase y la velocidad de grupo [3]:

- La **velocidad de fase** es aquella a la que se mueve una fase concreta de la onda (esto es, a la velocidad se mueve aquella que tiene, por ejemplo,  $\omega = 10^{12}$  rad/s):

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (4.1.13)$$

- La **velocidad de grupo** es aquella a la que se mueve el paquete de ondas, esto es, la energía. Es en general la de mayor interés, y viene dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.1.14)$$

En general la velocidad del sonido tiene una frecuencia bastante baja (y por tanto una longitud de onda muy grande). Si nos damos cuenta, para longitudes de onda grandes ( $k \rightarrow 0$ ) la relación de dispersión (4.1.10) es lineal (aproximación de Taylor del seno):

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \frac{ka}{2} \quad (4.1.15)$$

A toda ecuación de dispersión que verifique una relación de dispersión lineal cuando  $k \rightarrow 0$  la llamamos **rama acústica**. Si la dispersión es lineal la velocidad de fase y de grupo coinciden. Entonces la **velocidad del sonido** de un sólido según este modelo viene dada por:

$$v_{\text{sonido}} = \sqrt{\frac{C}{M}} a \quad (4.1.16)$$

sustituyendo aquí la ecuación (4.1.11) podemos expresar la velocidad del sonido como

$$v_{\text{sonido}} = \frac{\omega_{\text{máx}} a}{2} \quad (4.1.17)$$

Incluir los siguientes temas: mas allá de los primeros vecinos, modulo de Young y momento lineal total de la cadena.

### 4.1.2. Cristales monoatómicos tridimensionales

En este caso, los átomos ocupan posiciones  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ . Si llamamos a  $\phi$  al potencial de interacción entre dos átomos, la *aproximación armónica* nos permite aproximar la energía total por un desarrollo en serie a segundo orden:

$$U_{\text{arm}} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} [\mathbf{u}(\mathbf{R}) - \mathbf{u}(\mathbf{R}')] \Phi [\mathbf{u}(\mathbf{R}) - \mathbf{u}(\mathbf{R}')] \quad (4.1.18)$$

con  $\Phi_{ij} = \partial^2 \phi / \partial x_i \partial x_j$ , siendo  $x_i(t) = R_i + u_i(\mathbf{R}, t)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Equivalentemente (4.1.18) se puede escribir como:

$$U_{\text{arm}} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} \mathbf{u}(\mathbf{R}) D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{u}(\mathbf{R}') \quad (4.1.19)$$

donde

$$D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \delta_{\mathbf{RR}'} \sum_{\mathbf{R}''} \Phi(\mathbf{R} - \mathbf{R}'') - \Phi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (4.1.20)$$

es una matriz que contiene las interacciones entre pares de átomos. La **ecuación dinámica** es

$$M \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{R})}{dt^2} = -\frac{\partial U_{\text{arm}}}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{R})} = \sum_{\mathbf{R}'} D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{u}(\mathbf{R}') \quad (4.1.21)$$

que admite soluciones de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{R}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t)} \quad (4.1.22)$$

donde  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k})$  es el *vector de polarización*. Esto no es más que la generalización de la ecuación (4.1.9) al caso 3D. Al sustituir (4.1.22) en (4.1.21) se ve que la condición de existencia de solución es

$$D(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) = M \omega^2(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) \quad (4.1.23)$$

donde  $D(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} D(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$  es la llamada *matriz dinámica*, que se puede ver que es real y simétrica. Esto garantiza la existencia de *tres* soluciones a (4.1.23) que verifican  $\boldsymbol{\epsilon}_i(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j(\mathbf{k}) = \delta_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ), y que se denominan **ramas acústicas** por verificarse en ellas que  $\omega_i(\mathbf{k}) \approx c_i(\mathbf{k})k$  para  $ka \ll 1$ . Dado un  $\mathbf{k}$ , los vectores  $\boldsymbol{\epsilon}$  no tienen en general que ser paralelos o perpendiculares a  $\mathbf{k}$ .

Por eso sólo se puede hablar aproximadamente de *polarización longitudinal* o *transversal*. A pesar de ello, los tres modos posibles para cada  $\mathbf{k}$  se denominan **acústica longitudinal** (LA) y **acústicos transversales** (TA). El resto de las propiedades coinciden con las del caso unidimensional.

## 4.2. Vibraciones de cristales con base diatómica

### 4.2.1. La cadena lineal diatómica

El modelo es una cadena unidimensional con base diatómica. Los átomos de la base se distinguirán por tener masa distinta (véase 4.4), aunque sería equivalente distinguirlos por sus acoplamientos. Como antes, este modelo podría representar vibraciones de cristales reales en direcciones particulares. Las ecuaciones del movimiento, admitiendo interacción sólo a vecinos más próximos y una única constante de fuerza  $C$  son

$$\begin{aligned} M_1 \frac{d^2 u_s}{dt^2} &= C(v_s - u_s) + C(v_{s-1} - u_s) \\ M_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} &= C(u_{s+1} - v_s) + C(u_s - v_s) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

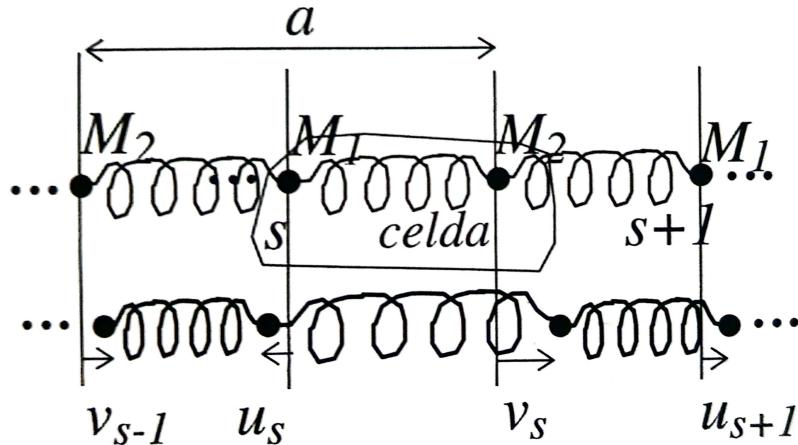


Figura 4.4: Parámetro de red y posiciones de átomos 1 (masa  $M_1$ ) y 2 (masa  $M_2$ ) conectados por una fuerza de constante  $C$  entre planos adyacentes. Los desplazamientos de los átomos 1 se designan por  $u$  y los átomos 2 por  $v$ .

Una solución en modos normales, permitiendo amplitudes distintas para  $M_1$  y para  $M_2$  es

$$u_s = u_k e^{i(ksa - \omega t)} \quad v_s = v_k e^{i(ksa - \omega t)} \quad (4.2.2)$$

Al sustituir (4.2.1) y (4.2.2) se encuentra

$$\begin{aligned} -M_1 \omega^2 u_k &= C(v_k - u_k) + C(v_k e^{-ika} - u_k) \\ -M_2 \omega^2 v_k &= C(u_k e^{ika} - b_k) + C(u_k - v_k) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Para que exista una solución en  $u_k, v_k$  debe verificarse que

$$\begin{vmatrix} 2C - M_1\omega^2 & -C(1 + e^{-ika}) \\ -C(1 + e^{ika}) & 2C - M_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (4.2.4)$$

$$\omega^2 = \frac{C(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \operatorname{sen}(ka/2)} \right] \quad (4.2.5)$$

El mayor cambio respecto a la cadena lineal monoatómica es que ahora existen *dos modos* ( $\pm$ ) para cada valor de  $k$ , como se ilustra gráficamente en la imagen 4.5. Una de las soluciones tiene las características de una *rama acústica*; la otra, por corresponder, como veremos, a frecuencias próximas a las ópticas, se denomina *rama óptica*.

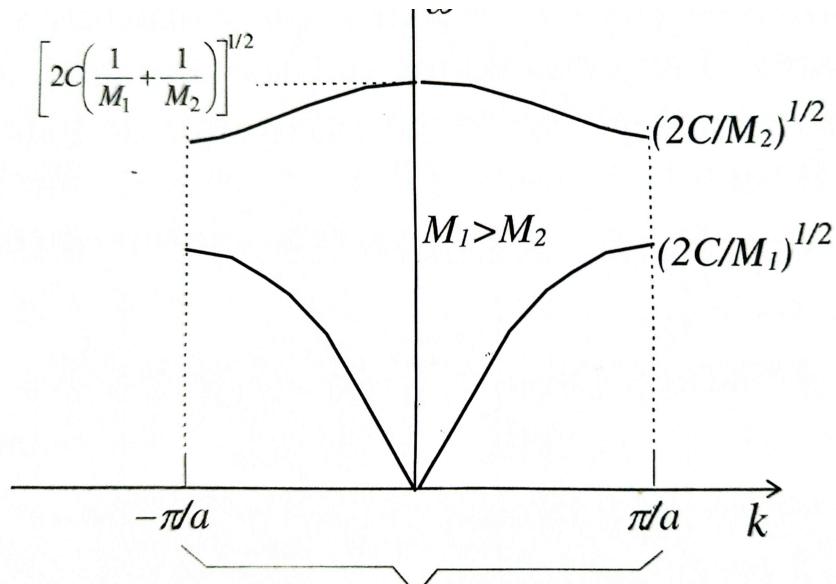


Figura 4.5: Representación de la relación de dispersión de una cadena diatómica de átomos de masas  $M_1$  y  $M_2$  y constante de acoplamiento  $C$ . Observar que para la rama óptica  $\omega \rightarrow \text{cte} \neq 0$  cuando  $k \rightarrow 0$ .

Es interesante excitar el tipo de movimiento atómico asociado a cada una de las ramas. Esto es especialmente sencillo si nos situamos en  $ka \ll 1$ , pues entonces las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) dan  $u_k/v_k = 1$  para la *rama acústica* y  $u_k/v_k = -M_2/M_1$  para la *rama óptica*. Esto quiere decir que el modo acústico los átomos de la celda se mueven en fase, es decir, la celda vibra como un todo y el movimiento es sobre todo *intercelda*. En cambio, en el modo óptico los átomos se mueven en oposición de fase, de modo que el centro de masas está inmóvil y el movimiento es *intracelda*. Estas características además no dependen de la aproximación  $ka \ll 1$ . La figura 4.6 ilustra la esencia del movimiento de los modos ópticos y acústicos en el caso de un cristal diatómico.

Observese que si los dos átomos fueran iones de signo opuesto, como en un cristal iónico, cabría esperar que los modos ópticos fueran excitados por un campo eléctrico de la frecuencia adecuada. Veremos en la sección 4.4 que, en efecto, existe una fuerte interacción de estos modos con las *ondas e.m. infrarrojas*. Nótese finalmente, que si la cadena tuviese una base formada por  $z$  átomos habría una **rama acústica** y  $z - 1$  **ramas ópticas**.

Añadir imágenes de ambos movimientos pag 91-95 oxford, matrices, cadenas diatónicas con misma masa y diferente constante, explicación zona ampliada y reducida.

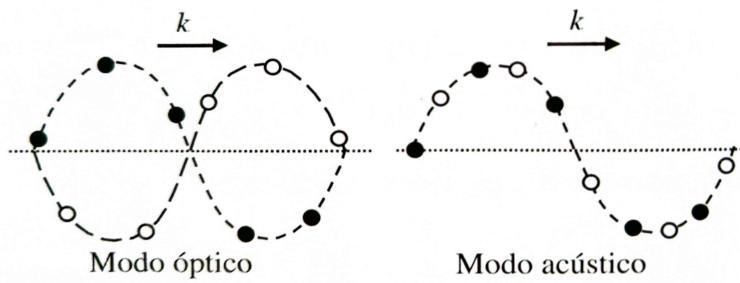


Figura 4.6: Modos óptico y acústica en una cadena diatómica. El desplazamiento atómico respecto a la posición de equilibrio se representa verticalmente.

#### 4.2.2. Cristales tridimensionales poliatómicos

Como generalización (sin demostración) natural de lo que precede, se tiene que en un cristal con base de  $z$  átomos existen, para cada valor de  $k$ ,  $3z$  modos normales. Estos modos se pueden agrupar en  $3z$  ramas, de las que  $3z$  son **acústicas** y  $3z - 3$  son **ópticas**. El factor 3 está asociado a las tres polarizaciones posibles y se habla de modos LA, TA, LO, TO. Cuanto tenemos alta simetría los modos son puros, sin embargo puede ocurrir que para materiales poco simétricos las soluciones sean una mezcla de modos. Además, en los casos de alta simetría es posible que dos modos de vibración (por ejemplo  $TO_1$  y  $TO_2$ ) generen la misma solución  $\omega(\mathbf{k})$ . En este caso decimos que los modos de vibración están degenerados. La figura 4.7 muestra espectros de vibración de algunos sólidos simples. El punto importante es que las frecuencias características de vibración son del orden de  $10^{12}$  Hz que corresponden al *infrarrojo*.

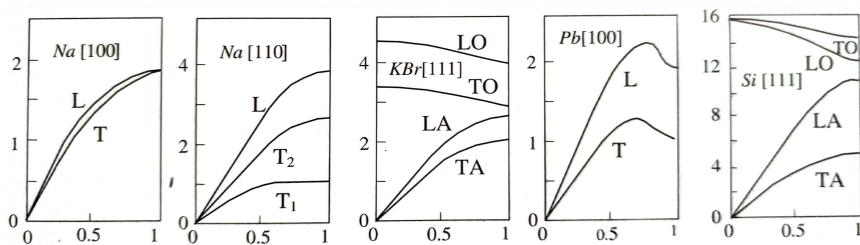


Figura 4.7: Ejemplos de relación de dispersión experimental  $\omega(\mathbf{k})$ . En el eje horizontal se representa  $\mathbf{k}/\mathbf{k}_{\text{máx}}$  para distintas direcciones, y en los ejes verticales la frecuencia  $\omega/2\pi$  en unidades de  $10^{12}$  Hz.

Hay que buscar información sobre la degeneración de los modos y la dirección de las polarizaciones. En principio no hay una regla exacta que te diga si están degenerados o no dos modos, por lo que habrá que buscar más.

## 4.3. Fonones

### 4.3.1. Cuantización de las ondas elásticas

Para introducir el concepto de **fonón** vamos a ver una manera más formal de obtener la relación de dispersión dada por la ecuación 4.1.7 haciendo uso de las *variables normales*. En concreto, si se define

$$\xi(k, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^N u_s(t) e^{-iksa} \quad (4.3.1)$$

$$\Pi(k, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^N p_s(t) e^{iksa} \left[ \text{con } p_s(t) = M \frac{\partial u_s(t)}{\partial t} \right] \quad (4.3.2)$$

multiplicando la ecuación del movimiento (4.1.7) por  $e^{iksa}$  y sumando a todos los valores de  $s$ , se encuentra que

$$M \frac{\partial}{\partial t} \xi(k, t) = \Pi(k, t) \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(k, t) = -M\omega^2(k)\xi(k, t) \quad (4.3.4)$$

con  $\omega^2(k) = \frac{2}{M} \sum_l C_l \operatorname{sen}^2(ka/2)$ , que a primeros vecinos ( $l = \pm 1$ ) se reduce a la ecuación 4.1.7.

Las funciones  $\xi$  y  $\Pi$  responden a las ecuaciones canónicas de un oscilador de masa  $M$  y frecuencia  $\omega$ . Las soluciones  $(\eta, \Pi)$  se denominan *modos normales* o propios del cristal. Cualquier movimiento de los átomos se pueden describir como suma de *modos normales independientes* según

$$u_s(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in PZB} \xi(k, t) e^{iksa} \approx \frac{L}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \xi(k, t) e^{iksa} dk \quad (4.3.5)$$

Por tanto, un modo normal es una *excitación colectiva* (involucra a todos los átomos) caracterizada por un vector de onda  $\mathbf{k}$  y una frecuencia  $\omega$ .

La energía de cada uno de los modos posibles de vibración de un cristal está discretizada, siendo sus valores posibles los conocidos por el oscilador armónico, es decir,

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \left[ n(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega(\mathbf{k}) \quad (4.3.6)$$

donde  $n(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots$  es el llamado **número de ocupación**. La energía mínima  $\frac{1}{2}\hbar\omega(\mathbf{k})$  es la *energía del punto cero* de cada modo. En el caso más general:

$$\epsilon_p(\mathbf{k}) = \left[ n_p(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega_p(\mathbf{k}) \quad (4.3.7)$$

es decir, cada modo normal está caracterizado, además de por el vector de onda y la frecuencia, por el índice de rama,  $p$ . Recuérdese que para un cristal con base de  $z$  átomos el número de modos por cada  $\mathbf{k}$  es  $3z$ .

El *cuanto* de energía de vibración  $\hbar\omega_p(\mathbf{k})$  se denomina **fonón** y es del orden de 4 meV pues  $\omega/2\pi \approx 10^{12}$  Hz. El número de ocupación es una medida de *cuantos fonones* de un determinado tipo hay excitados. En la *aproximación semicásica* ( $n \gg 1$ ) se recupera el sentido de la amplitud de oscilación  $u_k$  de un modo de vector de onda  $\mathbf{k}$  (de la rama  $p$ ) y entonces se verifica

$$\frac{1}{2}NM\omega_p^2(\mathbf{k})u_p^2(\mathbf{k}) = n_p(\mathbf{k})\hbar\omega_p(\mathbf{k}) \quad (4.3.8)$$

Desde el punto de vista clásico, más o menos energía se traduce en mayor o menor amplitud de oscilación, mientras que el punto de vista cuántico se traduce en mayor o menor número de ocupación.

No es difícil verificar que *un modo normal no transporta impulso neto* (centro de masas del cristal inmóvil), por lo que no cabe decir que  $\hbar\mathbf{k}$  es el impulso del fonón, pues entonces el impulso total del modo debería de ser  $n\hbar\mathbf{k}$ . A pesar de esto  $\hbar\mathbf{k}$  del fonón verifica, en su interacción con otras partículas, *leyes de conservación* similares a las del impulso habitual, como vamos a ver.

Añadir demostración de la amplitud de onda, paginas 82-85 del Oxford, conservación del momento, numero de ocupación.

### 4.3.2. Espectroscopía de fonones

Supóngase un cristal monoatómico sobre el que incide una onda (neutrones, rayos x, etc.) de vector de onda  $\mathbf{K}$  y de frecuencia  $\Omega$ . La amplitud dispersada, en la dirección  $\mathbf{K}'$ , por los átomos en posiciones de equilibrio [ $\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{R}_j$ ] es, como sabemos

$$A_{\text{salida}} \propto e^{-i\Omega t} \sum_j e^{-i\Delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_j} \quad (4.3.9)$$

donde  $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}' - \mathbf{K}$ . Supongamos ahora que existe un modo normal establecido en el cristal, de modo que las posiciones atómicas vienen dadas por  $\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{R}_j + \mathbf{u}_j(t)$  donde  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{\pm i[\mathbf{k}\mathbf{R}_j - \omega(\mathbf{k})]t}$ . Al sustituir en (4.3.9) se obtiene, en aproximación armónica ( $u \ll R$ )

$$A_{\text{salida}} \propto e^{-i\Omega t} \sum_j e^{-i\Delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}_j} - i\Delta\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_0 \sum_j e^{-i(\Delta\mathbf{K} \pm \mathbf{k})\cdot\mathbf{R}_j} e^{-i[\Omega \pm \omega(\mathbf{k})]t} \quad (4.3.10)$$

de forma que, además de la dispersión elástica (1º término), tendremos *dispersión inelástica* según las condiciones

$$\Omega' = \Omega \pm \omega(\mathbf{k}) \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K} \pm \mathbf{k} + \mathbf{G} \quad (4.3.11)$$

Por estas relaciones de (cuasi)conservación  $\hbar\mathbf{k}$  recibe el nombre de *cuasiimpulso*. Irradiando un cristal y examinando la radiación dispersada inelásticamente, según estas relaciones es posible conocer el espectro fonónico de un cristal  $\omega(\mathbf{k})$ . Entre las radiaciones más utilizadas están:

- Radiación electromagnética en el rango del **infrarrojo**: cubre  $10 \leq k \leq 10^4 \text{ cm}^{-1}$  y  $10^{12} \leq \nu \leq 10^{14}$  Hz (4 meV  $\leq \epsilon \leq 1$  eV). Aunque su energía es similar a la de los fonones, no lo es  $\hbar\mathbf{k}$  pues  $k_{PZB} \approx 10^8 \text{ cm}^{-1}$ . Se utiliza por ejemplo en análisis químicos para identificar grupos funcionales dentro de las moléculas (*modos ópticos*).

- Radiación electromagnética en el rango de la ***luz visible***: con  $k \approx 10^5 \text{ cm}^{-1}$  ( $2 \leq \epsilon \leq 4 \text{ eV}$ ) se utiliza para la dispersión inelástica (*espectroscopía Raman*). Aunque los cambios de energía de los fotones son muy pequeños, se pueden determinar por técnicas interferométricas. La *espectroscopía Ramen* sirve para estudiar la dinámica de los electrones de conducción en metales, la naturaleza de los cristales, etc.
- **Neutrones**: constituyen la sonda ideal por cuanto los *neutrones térmicos* tienen tanto el vector de onda como la energía comparables a los de los fonones y de hecho la mayoría de las curvas de dispersión de fonones en sólidos se han obtenido empleando neutrones.

El espectro fonónico  $\omega(\mathbf{k})$  permite obtener información muy valiosa sobre las interacciones entre átomos (alcance, intensidad, etc.) en los sólidos. Como ilustración considérese vibraciones unidimensionales incluyendo interacción de un plano con los  $l$  más próximos. Como ya se ha visto la relación de dispersión es entonces

$$\omega^2(k) = \frac{4}{M} \sum_{l>0} C_l \sin^2\left(\frac{1}{2}kla\right) \quad (4.3.12)$$

multiplicando ahora por  $\cos(ksa)$  e integrando (en la *PZB*) se encuentra

$$C_s = \frac{-Ma}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \omega^2(k) \cos(ska) dk \quad (4.3.13)$$

que nos da la constante de fuerza entre cualesquiera planos atómicos a partir de  $\omega(k)$ .

Añadir demostración de la ecuación de dispersión, todo por taylor.

## 4.4. Vibraciones de los cristales iónicos

Las oscilaciones ópticas en cristales iónicos conllevan un campo electromagnético dentro del cristal, y por tanto una interacción de largo alcance (los modos acústicos, por tratarse de movimientos de celdas neutras como un todo, no llevan asociado campo eléctrico). Por esto, *el estudio de los fonones ópticos en los cristales iónicos exige estudiar simultáneamente el movimiento de iones y el campo eléctrico asociado*. Sin embargo, como las ondas electromagnéticas son transversales, el acoplamiento sólo tiene lugar para los modos ópticos transversales, que es para los que se hace este estudio. Para simplificar analizaremos sólo cristales cúbicos diatómicos (tipo CsCl, NaCL, ZnS,...) en el límite  $ka \ll 1$ . En estas condiciones los cristales se pueden tratar isotópicamente y macroscópicamente (medio continuo).

Considérese una celda cualquiera con dos iones de cargas opuestas  $\pm q$ . Representemos por  $u_+$   $u_-$  los desplazamientos locales de sendos iones, y por  $M_+$  y  $M_-$  sus masas. En el límite  $ka \ll 1$  todos los iones del mismo signo en la vecindad de la celda considerada se moverán al unísono de modo que las ecuaciones del movimiento son:

$$M_+ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_+}{\partial t^2} = 2C(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+) + q\mathbf{E} \quad (4.4.1)$$

$$M_- \frac{\partial^2 \mathbf{u}_-}{\partial t^2} = 2C(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) - q\mathbf{E} \quad (4.4.2)$$

donde se ha incluido la *interacción de largo alcance* a través del campo eléctrico.

Introduciendo la coordenada relativa  $\mathbf{w} = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$  en las ecuaciones (4.4.1) y (4.4.2) dan

$$M^* \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -M^* \omega_0^2 \mathbf{w} + q\mathbf{E} \quad (4.4.3)$$

con  $M^* = M_+ M_- / (M_+ + M_-)$  y  $\omega_0 = (2C/M^*)^{1/2}$ , que sería la frecuencia de los modos ópticos, tanto longitudinales como transversales, para  $ka \ll 1$ , suponiendo fuerzas de corto alcance.

Una solución ondulatoria a (4.4.3), es decir, con  $\mathbf{w} \propto e^{-i\omega t}$ , permite, al sustituir, despejar

$$\mathbf{w} = \frac{q\mathbf{E}}{M^*(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.4.4)$$

Por (4.4.4) es obvio que  $\mathbf{w}$  es función del campo eléctrico, pero a su vez el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  tiene su origen en  $\mathbf{w}$ . Esto se puede ver recordando que la *polarización*  $\mathbf{P}$ , está ligada al campo eléctrico a través de la permitividad  $\epsilon(\omega)$  según

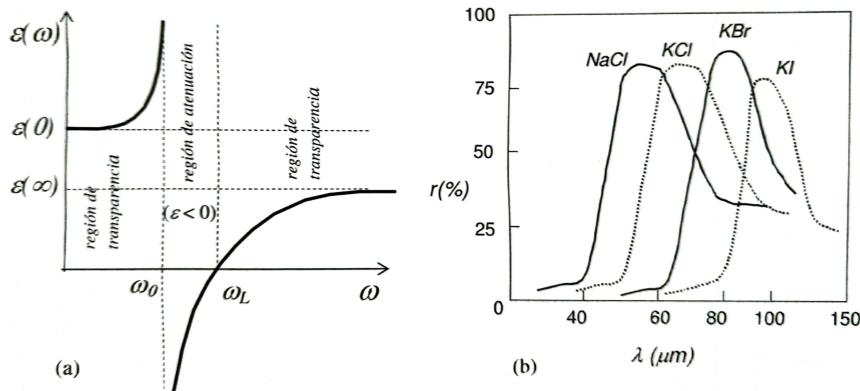


Figura 4.8: (a) Dependencia con la frecuencia de la permitividad eléctrica relativa en cristales iónicos. (b) reflectividad de algunos cristales iónicos para longitudes de onda en el rango infrarrojo.

$$\mathbf{P} = [\epsilon(\omega) - 1] \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.4.5)$$

y observando por otro lado que, la definición de *polarización* como una *densidad de momento dipolar*, se tiene

$$\mathbf{P} = nq(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) + \mathbf{P}_\infty \quad (4.4.6)$$

Aquí  $n$  denota el número de celdas por unidad de volumen y

$$\mathbf{P}_\infty = [\epsilon(\infty) - 1] \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.4.7)$$

es la contribución a  $\mathbf{P}$  de las nubes electrónicas [la notación  $\epsilon(\infty)$  indica que esta contribución se refiere a  $\epsilon(\omega)$  a frecuencias electrónicas muy grandes (comparadas con las de la vibración reticular)]. Combinando (4.4.4) y (4.4.7) se obtiene que

$$\epsilon(0) = \epsilon(\infty) + \frac{nq^2}{\epsilon(0)M^*\omega_0^2} \quad (4.4.8)$$

resulta

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + [\epsilon(0) - \epsilon(\infty)] \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathbf{E} \quad (4.4.9)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 4.8 (a). En ella  $\omega_L$  es la frecuencia para la que  $\omega(\omega_L) = 0$ , que por (4.4.9) verifica  $\omega_L = (\epsilon(0)/\epsilon(\infty))^{1/2}\omega_0 > \omega_0$ .

Los rasgos esenciales del comportamiento de la luz frente a los cristales iónicos se puede deducir de comparar la relación de dispersión (4.4.9) con la general para ondas electromagnéticas trasversales, esto es,

$$\omega = k \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (c = \text{velocidad de la luz}) \quad (4.4.10)$$

Para  $\omega_0 < \omega < \omega_L$ ,  $\epsilon < 0$  y por (4.4.10)  $k$  es complejo puro:  $k \propto i\alpha$ , con lo que la onda con la parte espacial  $E \propto e^{ika} = \epsilon \alpha x$  se amortigua exponencialmente, es decir, hay una fuerte *atenuación*. También  $\epsilon(\omega \rightarrow \omega_0) \rightarrow \infty$  lo que conlleva una reflectividad  $r = (\sqrt{\epsilon(\omega)} - 1)^2 / (\sqrt{\epsilon(\omega)} + 1)^2$  que se acerca a la unidad, de acuerdo con lo que se observara experimentalmente, como se ilustra en la imagen 4.8 (b). Como  $\omega_0 \approx 2\pi \times 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$ , la alta reflectividad tiene lugar en el *infrarrojo*, lo cual se utiliza tanto para determinar experimentalmente  $\omega_0$  como para producir radiación muy monocromática en el infrarrojo mediante sucesivas en cristales iónicos.

Añadir ejercicios (ej 10)



# Capítulo 5

## Propiedades térmicas reticulares

En este Tema se estudia la parte más *física* de las vibraciones atómicas en los sólidos. En concreto, veremos cómo se pueden entender desde la dinámica de red propiedades como *calor específico*, la *conductividad térmica* y la *dilatación térmica* de los sólidos.

### 5.1. Densidad de modos

#### 5.1.1. Condiciones de contorno

Se trata de incluir cuantitativamente el hecho de que todo cristal es finito. Sea un cristal de dimensiones  $N_i \mathbf{a}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) siendo los  $\mathbf{a}_i$  ejes primitivos  $N = N_1 N_2 N_3$  el número de celdas primitivas. Imponiendo sobre las soluciones  $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \epsilon e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t)}$  las llamadas **condiciones de contorno periódicas** o **condiciones de contorno de Born-von Karman**,  $\mathbf{u}(\mathbf{R} + N_i \mathbf{a}_i) = \mathbf{u}(\mathbf{R})$ . Teniendo esto en cuenta en las ecuaciones del movimiento

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \epsilon e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} = \epsilon e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} + N_i \mathbf{a}_i))} = \mathbf{u}(\mathbf{R} + N_i \mathbf{a}_i, t)$$

vemos que se debe verificar que:

$$e^{i N_i \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i} = 2\pi$$

que no es más que la condición de que  $N_i \mathbf{k}$  debe ser un vector de la red recíproca. Generalizando (y reescribiendo un poco la ecuación), esto conlleva que para cualquier  $i = 1, 2, 3$  se encuentra que los vectores  $\mathbf{k}$  son de la forma

$$\mathbf{k} = \frac{n_1}{N_1} \mathbf{b}_1 + \frac{n_2}{N_2} \mathbf{b}_2 + \frac{n_3}{N_3} \mathbf{b}_3 \text{ con } \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{ij} \quad (5.1.1)$$

donde los  $n_i$  son, en principio, cualquier entero. Hemos visto sin embargo que sólo hay que considerar los vectores de onda dentro de la *PZB*. Es fácil de ver que en cualquier celda primitiva de la red recíproca, por ejemplo en la *PZB*, sólo existen, según (5.1.1),  $N_1 N_2 N_3 = N$  valores de  $\mathbf{k}$  posibles. Por lo visto del tema 4, existirán un total de  $3zN$  modos normales. El volumen asociado a cada valor permitido de  $\mathbf{k}$  es  $V_{PZB}/N$ . Como el volumen total del cristal se puede escribir como  $V = V_{\text{celda}} N$  y  $V_{\text{celda}} = 8\pi^3/V_{PZB}$ , resulta que el volumen asociado a cada valor de  $\mathbf{k}$  es  $8\pi^3/V$ .

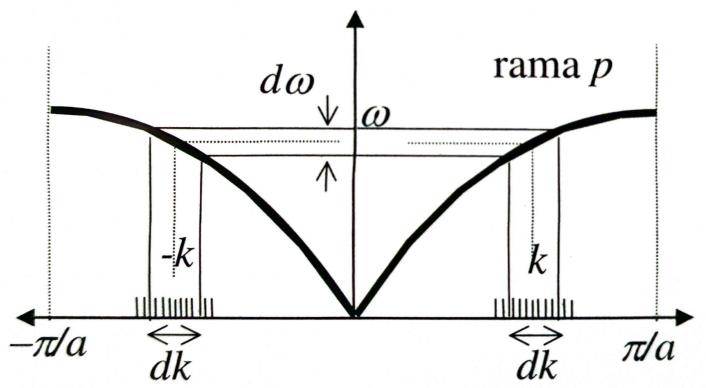


Figura 5.1: Relación de dispersión para una cadena monoatómica. Equivalencia entre la densidad de modos en  $k$  y en  $\omega$ .

Añadir imagen de una esfera dividida en cubitos para entender mejor el concepto de volumen asignado a un vector  $\mathbf{k}$ .

### 5.1.2. Cálculo de la densidad de modos

Para el estudio de muchas propiedades cristalinas es importante conocer cómo se *reparten* los modos posibles no en  $\mathbf{k}$  sino en frecuencia  $\omega$ . Se define así la *densidad de modos* o *estados* para la rama  $p$ ,  $D_p(\omega)$ , como el número de modos por unidad de frecuencia con frecuencias en el intervalo  $(\omega, \omega + d\omega)$ .

En una dimensión, si el cristal es de longitud  $L = Na$ , hay  $N$  valores de  $k$  en la PZB ( $-\pi/a < k \leq \pi/a$ ) de manera que, el intervalo  $\delta k$  asociado a cada modo es  $2\pi/L$ . El número de modos de una rama denotada por  $p$  en el intervalo  $d\omega$  será, según se indica en la figura 5.1:

$$D_p(\omega)d\omega = \frac{2dk}{\delta k} = \frac{L}{\pi} \left| \frac{\partial k}{\partial \omega} \right| d\omega = \frac{L}{\pi} \frac{d\omega}{|\nabla_k \omega(k)|_p} \Rightarrow \\ D_p(\omega) = \frac{L}{\pi} \frac{1}{|\nabla_k \omega(k)|_p} \quad (5.1.2)$$

La generalización a dos y tres dimensiones es, respectivamente:

$$2D) D_p(\omega) = \int_{L_p(\omega)} \frac{S}{4\pi^2} \frac{dL}{|\nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})|_p} \quad (5.1.3)$$

$$3D) D_p(\omega) = \int_{S_p(\omega)} \frac{V}{8\pi^3} \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})|_p} \quad (5.1.4)$$

donde la integral se extiende sobre la línea (en 2D) o superficie (en 3D) del espacio  $\mathbf{k}$  con  $\omega$ . Finalmente,  $D(\omega) = \sum_p D_p(\omega)$ .

Explicar como obtener las diferentes densidades de modo, física detrás para poder deducirlo sin problemas en casos generales.

### 5.1.3. Aproximación de Debye

Esta aproximación consiste en sustituir todas las ramas de vibración por *tres idénticas e isótropas* con relación de dispersión:

$$\omega = ck \quad (0 < k < k_D) \quad (5.1.5)$$

siendo  $c$  la velocidad del sonido en el cristal (para  $k \rightarrow 0$ ) y  $k_D$  el llamado **vector de onda de Debye**. Este se escoge de tal manera que el número total de modos sea el correcto  $(3zN)^1$ . La figura 5.2 ilustra como  $k_D$  debe ser mayor que  $k_{PZB}$  precisamente para que el número total de modos sea el adecuado. Según esta definición

$$3zN = 3 \times \frac{\frac{4}{3}\pi k_D^3}{\frac{8\pi^3}{V}} \Rightarrow k_D^3 = 6\pi^2 n \quad (5.1.6)$$

siendo  $n = zN/V$  la densidad numérica de átomos.

En esta aproximación las superficies de  $\omega$  constante son esferas (la figura 5.3 muestra la sección para  $k_z$  de una superficie  $\omega = \text{cte.}$ ) La densidad de modos viene dada por  $D_D(\omega)d\omega = 3 \times 4\pi k^2 dk / (8\pi^3/V)$ , que al utilizar (5.1.4) permite despejar

$$D_D(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} \quad (0 < \omega < \omega_D) \quad (5.1.7)$$

La frecuencia máxima  $\omega_D = ck_D$  se denomina **frecuencia de Debye**.

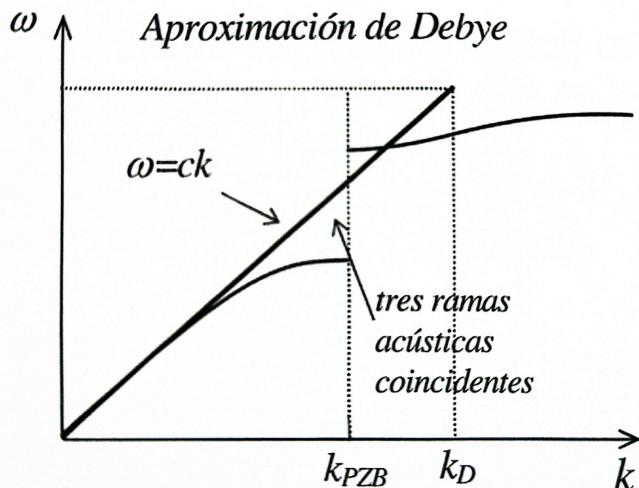


Figura 5.2: Representación de la aproximación de Debye. Todas las ramas se sustituyen por tres acústicas degeneradas.

Añadir páginas 10-15 oxford, explicar mejor lo de la densidad de estados, como poder deducir la ecuación, relevancia.

<sup>1</sup>Es ese ya que hay  $N$  valores posibles de  $k$  y hay  $3z$  modos de vibración para cada  $k$ .

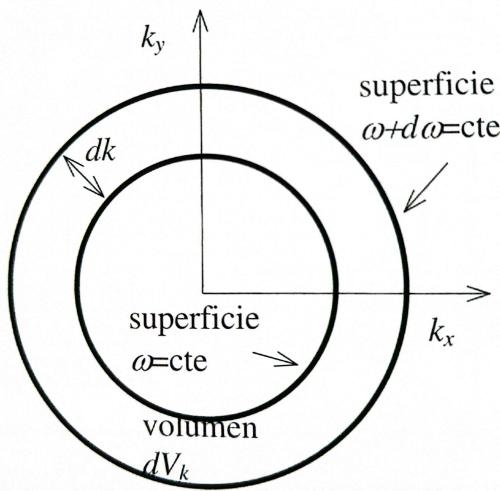


Figura 5.3: Sección de una superficie de frecuencia constante en la aproximación de Debye.

## 5.2. Capacidad térmica reticular

La capacidad térmica reticular (en metales debe añadirse la asociada a los electrones por conducción) está estrechamente relacionada con la energía vibracional y por tanto con los *fonones*. En concreto queremos calcular  $C_V = (\partial U / \partial T)_V$ .

### 5.2.1. Estadística de fonones

Para determinar la energía de un modo necesitamos conocer el número medio de fonones a una temperatura  $T$ . El *factor de Boltzmann* nos dice que la probabilidad de tener un oscilador en un estado de excitación  $n$  es  $P_n \propto e^{-\epsilon_n/k_B T}$  donde  $\epsilon_n = (1/2 + n)\hbar\omega$  es la energía del estados  $n$ . El número medio de excitación  $\langle n \rangle$  (número medio de fonones) de un modo cualquiera  $k, p$  a temperatura  $T$  será:

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_n}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (5.2.1)$$

que es la conocida *distribución de Planck*. La energía media del modo en cuestión será

$$\langle U \rangle = (1 + \langle n \rangle) \hbar\omega \quad (5.2.2)$$

Observar que a altas temperaturas ( $k_B T \gg \hbar\omega$ ): tenemos que

$$\langle n \rangle \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega} \implies \langle U \rangle = k_B T \quad (5.2.3)$$

que es el límite clásico.

Añadir dibujos sobre la estadística de las diferentes distribuciones.

### 5.2.2. Cálculo de la capacidad térmica

Habiendo determinado la energía media de cada modo,

$$\langle U_{\mathbf{k},p} \rangle = \left( \frac{1}{2} + \langle n_{\mathbf{k},p} \rangle \right) \hbar \omega_p(\mathbf{k})$$

la energía de la total media  $U$  será la suma

$$U = \sum_{\mathbf{k},p} U_{\mathbf{k},p} = \sum_{\mathbf{k},p} \frac{\hbar \omega_p(\mathbf{k})}{e^{\hbar \omega_p(\mathbf{k})/k_B T} - 1} = \sum_p \int_0^{\omega_p \text{máx}} \frac{D_p(\omega) \hbar \omega}{e^{\hbar \omega/k_B T} - 1} d\omega \quad (5.2.4)$$

donde se ha omitido la energía del punto cero por no depender de la temperatura. Se ha expresado también la suma en  $\omega$  en vez de  $\mathbf{k}$  a través de la densidad de modos y, además debido a la alta densidad de modos, se ha sustituido la suma por una integral. La suma en (5.2.4) se puede calcular en los casos límites aún si conocer la relación de dispersión  $\omega = \omega_p(\mathbf{k})$ .

1. A altas temperaturas ( $k_B T \gg \hbar \omega_{\text{máx}}$ ) se tiene  $U \approx \sum_{\mathbf{k},p} k_B T$ . Como el número de modos es  $3zN$ ,  $U \approx (3zN)k_B T$ , y finalmente

$$C_V \equiv \frac{\partial U}{\partial T} \approx (3zN)k_B \quad (5.2.5)$$

Este resultado se conoce como **ley de Dulong y Petit** y expresa que el *calor específico por mol* es el mismo para todos los cuerpos.

2. A bajas temperaturas ( $k_B T \ll \hbar \omega_{\text{máx}}$ ) las frecuencias (5.2.4) corresponden a la zona lineal de las ramas acústicas donde  $\omega_p(\mathbf{k}) \approx c_p k$ , lo cual permite aproximar la función densidad de modos por  $D_p(\omega) = V\omega^2/2\pi^2 c_p^3 3$ . Asimismo puede aproximarse  $e^{\hbar \omega_p/k_B T} - 1 \approx e^{\hbar \omega/k_B T}$ . Llamando  $x = \hbar \omega/k_B T$  (5.2.4) se puede escribir finalmente como

$$U \approx \frac{V k_B^4 T^4}{2\pi^2 \hbar^3} \left( \sum_{p=1}^3 \frac{1}{c_p^3} \right) \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \frac{3V k_B^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3} \left( \sum_{i=0}^3 \frac{1}{c_i^3} \right) \quad (5.2.6)$$

Como  $U \propto T^4$  se tiene que  $C_V \propto T^3$ , de acuerdo con lo que se observa experimentalmente. Para cristales isotrópicos  $c_p = c$  para las tres direcciones espaciales ( $p = 1, 2, 3$ ) con lo cual

$$U \approx \frac{9V(k_B T)^4}{\pi^2 c^3} \Rightarrow C_V \approx \frac{36V k_B^4}{\pi \hbar^3 c^3} T^3 \quad (5.2.7)$$

3. A temperaturas intermedias se necesita alguna aproximación. Una es la de Debye, que supone admitir, como ya se ha visto, un espectro lineal. Usando (5.1.7) en (5.2.4) se obtiene

$$U = \frac{3V\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega/k_B T} - 1} d\omega \quad (5.2.8)$$

que derivada con respecto a  $T$  da

$$C_V = \frac{3V\hbar}{2\pi^2 c^3 k_B T^2} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^4}{(e^{\hbar \omega/k_B T} - 1)} d\omega \quad (5.2.9)$$

Se define la **temperatura de Debye**  $\theta_D$  por  $k_B \theta_D = \hbar \omega_D$ , la cual representa básicamente la temperatura a partir la cual todos los modos de vibración de un sólido están excitados, y en consecuencia, aquélla a partir de la cual empieza el *comportamiento clásico*. En términos de

$\theta_D$  y teniendo en cuenta que  $c = \omega_D/k_D = k_B\theta_D/\hbar(6\pi^2zN/V)^{1/3}$ ,  $C_V$  se puede expresar como

$$C_V = 9zNk_B \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (5.2.10)$$

donde de nuevo  $x = \hbar\omega/k_B T$ . Esta ecuación predice que la capacidad térmica molar  $C_V$  es una función universal de  $T/\theta_D$  para todos los sólidos. Esto está en excelente acuerdo (dentro del 1-2 %) con los resultados experimentales que ilustramos en la figura Fig. 5.4, donde la línea continua representa la expresión (5.2.10). Algunas temperaturas de Debye las representamos en la tabla 5.1.

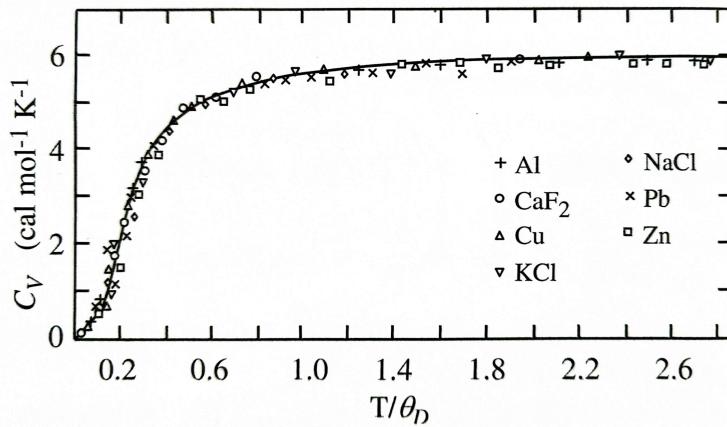


Figura 5.4: Capacidad térmica por mol frente  $T/\theta_D$  para diversos tipos de cristales.

Elemento	$\theta_D$ (K)	Elemento	$\theta_D$ (K)
Na	158	Ca	230
Be	1440	C	2230
Ti	420	Cr	630
Fe	470	Ag	225
Cu	343	In	108
Pb	105	Bi	119
Ar	92	Si	645
Ge	374	Sn	200
W	400	Nb	275

Tabla 5.1: temperatuas de Debye de algunos elementos.

### 5.3. Efectos anarmónicos

Existe, como vamos a ver, algunas propiedades reitculares cuya explicación exige ir más allá de la aproximación armónica. Es el caso de la *dilatación térmica* y *conductividad térmica*.

Esta parte es muy mejorable. Debemos tratar mejor el tiempo característico, el recorrido libre medio, como obtener la dilatación térmica la conductividad térmica. Tanto del Oxford como apuntes de Ramallo.

### 5.3.1. Dilatación térmica

Se verá primero si la fuerza entre un átomo y sus vecinos dependiera linealmente de su desplazamiento (aproximación armónica) la dilatación no existiría. Para simplificar considérese el caso de sólo dos átomos unidos por un potencial armónico  $U(r) = U_0 + c(r - r_0)^2$  donde  $r$  es la interdistancia. Clásicamente, a temperatura  $T$ , la probabilidad de encontrar una separación al sistema con una separación  $r$  es  $P(r) \propto e^{-U(r)/k_B T}$ . La separación media es entonces

$$\langle r \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} r P(r) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} P(r) dr} = r_0 \quad (5.3.1)$$

independiente de la temperatura, y por tanto no hay dilatación. La representación gráfica de este hecho se esquematiza en la figura 5.5 a).

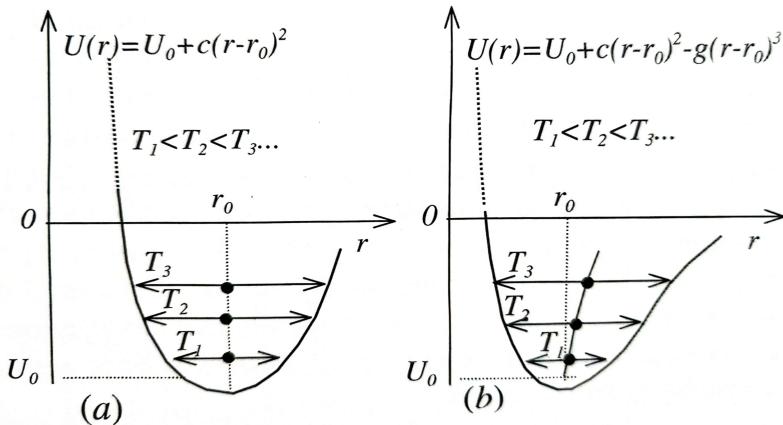


Figura 5.5: Potencial por par de átomos según la aproximación armónica (a) y según la aproximación anarmónica (b) que permite explicar de los cristales cuando se calientan.

En segundo lugar se verá el efecto de añadir un término armónico al potencial, es decir, considerar  $U(r) = U_0 + c(r - r_0)^2 - g(r - r_0)^3$ . Obsérvese que  $g$  tiene que ser positivo para que la contribución repulsiva decrezca más rápidamente que la distancia atractiva. La ecuación (5.3.1) no es ahora analítica, pero si admite, que los términos armónicos son pequeños respecto a  $k_B T$ , puede approximarse  $e^{g(r-r_0)^3/k_B T} \approx 1 + g(r - r_0)^3/k_B T$ , en cuyo caso (5.3.1) es resoluble, resultando en

$$\langle r \rangle = r_0 + \frac{3g}{4c^2} k_B T \quad (5.3.2)$$

Por tanto, la interdistancia media crece con  $T$ , como se muestra en la figura (5.5 (b)). Este modelo clásico predice una dilatación térmica lineal  $\alpha \equiv L^{-1}(dL/dT)$  constante ( $L$  es la longitud de la muestra), que es lo que se observa experimentalmente ( $\alpha \approx 10^{-5} K^{-1}$ ). Es claro que un modelo tan sencillo no considera efectos más complejos, como la anisotropía intrínseca a los sólidos cristalinos.

### 5.3.2. Conductividad térmica

En los sólidos la propagación del calor cumple la *ley de Fourier*:

$$\mathbf{j}_Q = -\kappa \nabla T \quad (5.3.3)$$

donde  $\mathbf{j}_Q$  es la densidad del *flujo de calor* ( $\text{W/m}^2$ ) y  $\kappa$  es la *conductividad térmica* ( $\text{W/mK}$ ). En cristales  $\kappa$  es en general un tensor, pero aquí prescindiremos de esa circunstancia.

Dejando de lado aparte la contribución de los *electrones libres* (muy importante en metales), la propagación de calor sólo puede hacerse por las vibraciones de los átomos, es decir, por *fonones* (el mismo mecanismo para la propagación del sonido). Se puede pensar entonces en un modelo cinético consistente en un *gas de fonones*. En este modelo la conductividad térmica finita está asociada a choques de los fonones que dificultan su propagación. Sin embargo, hay que justificar primero que se le puede dar carácter *corpuscular* al fonón (recuérdese que el fonón es un cuanto de energía asociado al modo normal que *involucra a todos los átomos* del cristal, y por ello está *deslocalizado*). Para ello basta con tener en cuenta que los distintos modos pueden superponerse y formar paquetes de onda de extensión  $\Delta x$  en el espacio real y  $\Delta k$  en el espacio recíproco, verificando  $\Delta x \Delta k \sim 1$ . Una exigencia del modelo es que  $\Delta k$  debe estar bien definido en el espacio recíproco, o sea  $\Delta \ll k_{PZB} \sim a^{-1}$  ( $a \equiv$  distancia intraatómica). Esto implica que  $\Delta x$  debe ser mucho mayor que  $a$ . El modelo será pues aplicable siempre que las longitudes características involucradas (por ejemplo, el *recorrido libre medio*, ver después) sean a su vez mucho mayores que  $a$ .

#### Cálculo de $\kappa$

El modelo cinético que se utiliza para obtener la conductividad térmica (*modelo de Drude*) está basado en las siguientes aproximaciones.

1. Las partículas colisionan con obstáculos con una probabilidad de colisión por unidad de tiempo  $\tau^{-1}$ .
2. Entre colisión y colisión no hay interacción entre partículas: *aproximación de partículas independientes*.
3. Las colisiones *mantienen el equilibrio térmico local*, que quiere decir que el número de fonones en un sitio lo determina la temperatura local, y también que la velocidad con que una partícula emerge de un colisión no está relacionado con velocidad que llevaba antes de la colisión, sino que es al azar en dirección proporcional (en modulo) a la temperatura local.

Con las anteriores aproximaciones se puede demostrar que, en cualquier instante, el tiempo transcurrido desde la última colisión (o hasta la siguiente), promediado para todas las partículas es  $\tau$ ; es igualmente, el tiempo medio entre sucesivas colisiones, de una partícula es también  $\tau$ , de ahí que  $\tau$  recibe el nombre de *tiempo libre medio* (entre colisiones) o *tiempo de relajación*.

Se trata de hacer un balance de flujos (recuérdese que *flujo=densidad×velocidad*) desde un punto cualquiera de referencia  $O$  en el seno del cristal. La densidad de energía  $u = U/V$  de los fonones depende de la posición a través de la temperatura, con lo cual  $u = u[T(x)]$ . Esta energía contiene esencialmente el número de fonones, porque su velocidad la supondremos constante (*aproximación de Debye*). El sitio en que tuvo lugar la última colisión (antes de llegar a  $O$ ) es la que cuenta para computar la energía y el número de fonones. Los fonones recorren una distancia media (hasta llegar a  $O$ ) de  $l = c\tau$ , lo que define el *recorrido libre medio* (ver figura 5.6). Estos fonones tienen una

energía  $u = u[T(x)] = u[T(x_0 + l \cos(\theta))]$ . Sumaremos pues  $j_x(\theta) = c_x u(x_0 + l \cos \theta)$  a todas las direcciones (puntos  $P$ ) (nótese que, por simetría,  $j_y$  y  $j_z$  deben ser nulos):

$$j_x = \langle j_x(\theta) \rangle_\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi j_x(\theta) \sin \theta d\theta \quad (5.3.4)$$

Como  $c_x = -c \cos(\theta)$ , se tiene

$$j_x = -\frac{c}{2} \int_0^\pi u(x_0 + l \cos(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (5.3.5)$$

Usando la aproximación  $u(x_0 + l \cos \theta) \approx u(x_0) + \frac{\partial u}{\partial x} l \cos \theta$  es inmediato obtener:

$$j_x = -\frac{1}{3} cl \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{c_V} \underbrace{\left( -\frac{\partial T}{\partial x} \right)}_{-\nabla T} \quad (5.3.6)$$

esto es

$$\kappa = \frac{1}{3} c_V cl \quad (5.3.7)$$

con  $c_V = C_V/V$ .

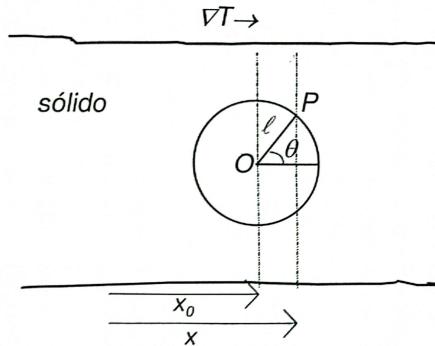


Figura 5.6: Transporte de calor mediante fonones en presencia de un gradiente uniforme de temperatura. La corriente térmica en  $O$  se debe a los fonones que, en media, han sufrido la última colisión en un punto  $P$  a distancia  $l = c\tau$ .

### Mecanismos de scattering

En la aproximación armónica los modos normales son ondas elásticas que se propagan libremente sin interacción mutua. Se podría decir que los fonones tienen un recorrido libre medio infinito (es decir, no chocan). Es necesario pues introducir términos *armónicos* en el potencial elástico. El lenguaje de partículas estas contribuciones dan lugar a tres fonones (figura 5.7) en las que se deben cumplir la conservación de la energía y del cuasiimpulso:

$$\begin{aligned} \sum \hbar\omega_i &= \sum \hbar\omega_f && (i = \text{inicial}, f = \text{final}) \\ \sum \hbar\mathbf{k}_i &= \sum \hbar\mathbf{k}_f + \hbar\mathbf{G} && \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

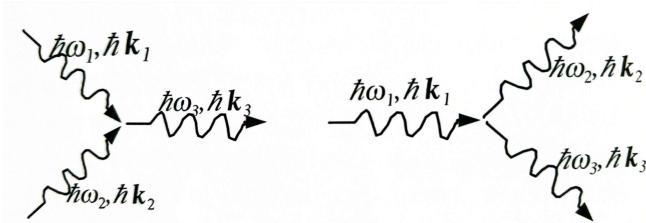


Figura 5.7: Procesos de interacción entre fonones debidos a los términos (*cúbicos*) anarmónicos del potencial de interacción entre átomos. Izquierda: Dos fonones interaccionan dando lugar a un tercer fonón. Derecha: Un fonón *se rompe* en dos.

Las colisiones entre fonones con  $\mathbf{G} = 0$  se denominan *procesos normales* o  $N$  y aquellas  $\mathbf{G} \neq 0$ , *procesos umklapp* o  $U$ . Los procesos  $N$  conservan tanto la energía como la direccionalidad de la misma  $\sum \hbar \mathbf{k}_i$  y por tanto no existe resistencia térmica. Los procesos  $U$ , por contra, degradan la energía porque ésta pierde direccionalidad ( $\sum \hbar \mathbf{k}_i \neq \sum \hbar \mathbf{k}_f$ ).

La figura 5.8 esquematiza ambos procesos y pueden apreciarse que *solo los vectores de onda comparables al tamaño de la PZB pueden sufrir procesos  $U$* , es decir,  $k \approx k_{PZB}$ , o también  $k \approx k_D$  ya que  $k_D \approx k_{PZB}$ . Otros mecanismos posibles de *scattering* de fonones son las *imperfecciones cristalinas* (impurezas químicas, defectos estructurales como vacantes, maclas, dislocaciones, etc. e incluso los límites físicos del cristal) que rompen la periodicidad implícita en la *construcción* de los fonones.

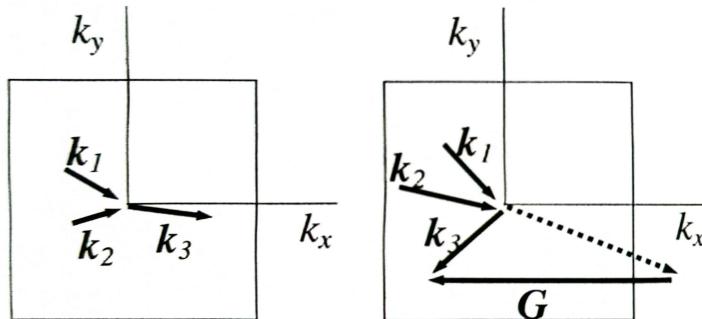


Figura 5.8: Izquierda: Proceso  $N$  que no degrada el transporte de energía térmica. Derecha: Proceso  $U$  que degrada fuertemente el transporte de calor.

### Evolución de $\kappa$ con la temperatura

A bajas temperaturas ( $T \ll \theta_D$ ) el recorrido libre medio lo fija la calidad del cristal ya que no hay fonones con la suficiente energía para sufrir procesos  $U$ . Como  $c_V \propto T^3$  resulta  $\kappa \propto T^3$ . Al aumentar la temperatura (aunque todavía a  $T \ll \theta_D$ ) el número medio de fonones capaces de sufrir procesos  $U$  serán aquellos con  $\omega \approx \omega_D$ , esto es,  $\langle n \rangle_U \approx e^{-\theta_D/T}$ . Admitiendo que  $l \propto \langle n \rangle_U^{-1}$  se tendrá que  $\kappa \propto T^3 e^{\theta_D/T}$ .

Cuando  $T > \theta_D$  una proporción sustancial de todas las colisiones entre fonones serán procesos  $U$ . Entonces  $\langle n \rangle_U \approx \langle n \rangle \approx k_B T / \hbar \omega$ , con lo cual  $l \propto T^{-1}$ . Como estas temperaturas  $c_V \approx \text{cte.}$ , se tiene  $\kappa \propto T^{-1}$ . La evolución global es, cualitativamente, la que ilustra en la figura 5.9 (a). Como puede verse en la figura 5.9 (b), está en buen acuerdo con la observación experimental en el caso de sólidos cristalinos.

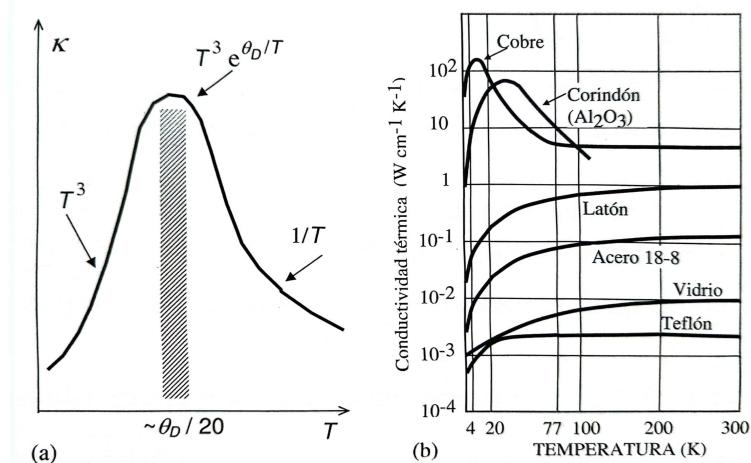


Figura 5.9: (a) Dependencia genérica de la conductividad térmica de los cristales con la temperatura. (b) Conductividad térmica frente a la temperatura para diversos tipos de sólidos.



## Capítulo 6

# Teoría de drude y teoría de Sommerfeld para metales

En este capítulo vamos a tratar dos teorías de los electrones compatibles entre sí: la teoría de Drude de los electrones, que nos permite calcular valores como la conductividad eléctrica, coeficiente de Hall, efecto Peltier... es decir, fenómenos que dependen del movimiento de los electrones en el metal. Por otro lado tendremos la teoría de los electrones libres, que nos permite calcular valores como el coeficiente calorífico, energía interna... es decir, propiedades más relacionadas con la mecánica estadística. A diferencia del manual de la asignatura [1] nosotros usaremos el [3], salvo en aquellos puntos que el primero sea mas completo.

### 6.1. Teoría de Sommerfeld o de electrones libres

En 1925 Pauli descubrió lo que hoy llamamos *principio de exclusión*, que dice que dos electrones no pueden estar en el mismo estado. En 1926, Fermi y Dirac derivaron lo que hoy llamamos estadística de Fermi-Dirac, que permite describir el número y densidad de estados ocupados por fermiones (partículas regidas por el principio de exclusión) a temperatura finitas. Sommerfeld fue quien dió cuenta de que usando la estadística Fermi-Dirac era capaz de describir correctamente el comportamiento del electrón en los metales (incorporando además la Teoría de Drude derivada 30 años antes).

#### 6.1.1. Niveles de energía

El comportamiento de los electrones viene determinado por la función de ondas del mismo, obtenida (a no ser que las energías de estos sean ultrarrelativistas) mediante la ecuación de Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (6.1.1)$$

Si tomamos que  $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\Psi(\mathbf{r})$  donde  $E$  es la energía del estado tenemos que la ecuación se transforma en la llamada *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (6.1.2)$$

En función del potencial que usemos para describir el comportamiento de los electrones obtendremos una teoría u otra. La *teoría de los electrones libres* es la mas sencilla de todas, ya que supone que  $V(\mathbf{r}) = 0$ , es decir, que los electrones no experimentan ningún tipo de potencial en el metal (ni con otros electrones, ni vibraciones, ni con los átomos...). Es evidente que una teoría que quisiera ser más realista debería incluir algún tipo de potencial, pero como veremos es suficiente como para predecir algunos valores experimentales (aunque sea en orden de magnitud). En ese caso la ecuación se transforma en:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (6.1.3)$$

Que como podemos ver no es más que una ecuación de onda, por lo que la solución mas general puede ser descrita en función de exponentiales complejas

$$\Psi(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (6.1.4)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector de onda que debe verificar que:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (6.1.5)$$

Esta solución, aunque viola los principios de la mecánica cuántica (la integral en el espacio de  $|\Psi|^2$  es infinita, teniendo que ser 1) y no describe estados reales (energía y momento perfectamente definidos, partícula que podría estar en cualquier parte del universo con la misma probabilidad...), es bastante funcional. Si ahora al electrón lo encerramos en una caja de volumen  $V = L_xL_yL_z$  y exigimos que la función de ondas sea igual en todo el borde  $\Psi(0) = \Psi(L_i)$  ( $i = x, y, z$ ) tenemos que el momento se discretiza (ya no todos los valores son iguales), tal que:

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i}n_i \quad n_i = 1, 2, 3 \dots \quad (6.1.6)$$

para  $i = x, y, z$ . Supongamos de ahora en adelante que los 3 lados son iguales y que por tanto  $V = L^3$ . Como podemos ver esto significa que a un  $\mathbf{k}_n$  concreto se le asocia un volumen en el espacio de los momentos  $k$  de volumen  $8\pi^3/L^3$ . En realidad a cada uno de estos volúmenes podremos asociar dos estados de electron: uno con espín  $\uparrow$  y otro con espín  $\downarrow$ . De este hecho podemos obtener un valor para el número de estados posibles  $\mathcal{N}$  encerrados en una esfera de radio  $k_F$  en el espacio de momentos:

$$\mathcal{N} = 2 \times \frac{1}{8\pi^3/L^3} \iint_0^{k_F} k_F^2 dk d\Omega \quad (6.1.7)$$

En palabras esta ecuación se traduce como: el número de estados totales para dicha esfera es el volumen de la esfera entre el volumen al que asociamos un estado posible. De este modo tenemos que:

$$\mathcal{N} = \frac{V}{3\pi^2}k_F^3 \quad (6.1.8)$$

En el cero absoluto, los electrones tratarán de colocarse en los niveles con menos energía posible (es decir, con menor  $k$ ), por lo que si en tenemos  $N$  partículas posibles (es decir, tenemos que asignar  $N$  estados posibles, tal que  $\mathcal{N} \rightarrow N$  en la ec. anterior). Así el valor de  $k_F$  adquiere el significado de “máximo valor posible de  $k$  para un electrón”, y tiene el valor de:

$$k_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3} \quad (6.1.9)$$

donde  $n = N/V$  es la *densidad de partículas*. Lógicamente valores de  $k > k_F$  no son posibles, ya que eso significaría que esa partícula tiene disponible un estado con menor energía que no está ocupando, lo cual es imposible si estamos en el cero absoluto. Entonces la superficie de la esfera citada antes adquiere un significado más profundo, ya que es la separación entre *los estados ocupados y desocupados* del sistema, denominándose **superficie de Fermi**. De aquí podemos deducir otros muchos términos (como la energía máxima, velocidad máxima...). A todos estos términos los llamamos “de Fermi”. Así tenemos, en resumen:

- **Vector de onda de Fermi (3D):**

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (n \equiv N/V) \quad (6.1.10)$$

- **Vector de onda de Fermi (2D):**

$$k_F = \sqrt{2\pi n} \quad (6.1.11)$$

- **Energía de Fermi:**

$$\varepsilon_F \equiv \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (6.1.12)$$

- **Velocidad de Fermi:**

$$v_F \equiv \sqrt{2\varepsilon_F/m} \quad (6.1.13)$$

- **Temperatura de Fermi:**

$$T_F \equiv \varepsilon_F/k_B \quad (6.1.14)$$

Ahora otra pregunta que nos podemos hacer es: ¿Cuantos estados hay en un intervalo de energías  $\varepsilon$  y  $\varepsilon + d\varepsilon$ ? Para calcularlos esto solo tenemos que saber cuantos estados hay entre  $k$  y  $K + dk$  y hacer el cambio de variable. Entonces en un intervalo  $\varepsilon$  y  $\varepsilon + d\varepsilon$  habrá

$$\mathcal{N}(k + dk) - \mathcal{N}(k) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left((\varepsilon + d\varepsilon)^{3/2} - (\varepsilon)^{3/2}\right)$$

si ahora  $d\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $\mathcal{N}(k + dk) - \mathcal{N}(k) = d\mathcal{N}$  tenemos que

$$d\mathcal{N} = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left((\varepsilon + d\varepsilon)^{3/2} - (\varepsilon)^{3/2}\right) = \frac{V}{3\pi^2} \varepsilon^{3/2} \left((1 + d\varepsilon/\varepsilon)^{3/2} - (1)^{3/2}\right)$$

donde hemos usado que  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$  y cogido el término lineal con  $d\varepsilon$ , de tal modo que:

$$d\mathcal{N} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\varepsilon^{3/2} V}{3\pi^2} \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (6.1.15)$$

Si definimos la **densidad de estados** como  $D(\varepsilon) = d\mathcal{N}/d\varepsilon$  tenemos que:

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (6.1.16)$$

Teniendo en cuenta que  $2m/\hbar^2 = k_F^2/\varepsilon_F$ , y que  $k_F = (3\pi^2n)^{1/3}$  tenemos que la densidad de estados se puede escribir como

$$D(\varepsilon) = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_F} \right)^{1/2} \quad (6.1.17)$$

De lo que se puede deducir la expresión de densidad de estados por unidad de volumen  $d(\varepsilon) = D(\varepsilon)/V$ . Teniendo en cuenta todo lo anterior no es muy difícil deducir que:

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (6.1.18)$$

que sólo es válido para temperaturas  $T = 0$ , ya que estamos asumiendo que la probabilidad de que el estado con  $\varepsilon < \varepsilon_k$  esté ocupado es del 100 %. Sin embargo a temperaturas finitas esta probabilidad dependerá de una función llamada la función de Fermi, que como veremos en el siguiente apartado modificará sustancialmente esta ecuación.

### 6.1.2. Estadística de Fermi-Dirac

Dado un sistema de electrones libres (es decir, no están sometidos bajo ningún tipo de potencial), la probabilidad de que un estado con energía  $E$  esté ocupado viene dado por el factor de Fermi, también llamado **distribución de Fermi-Dirac**:

$$f_{FD}(E, T) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (6.1.19)$$

donde  $\mu$  es el llamado *potencial químico*, aunque en realidad la razón por la cual aparece en la ecuación es en cantidad de constante de integración, de multiplicador de lagrange fruto de la derivación matemática. A bajas energías la función de Fermi se convierte en la función escalón, mientras que a altas temperaturas esta función escalón se va difundiendo. Como podremos ver esta estará relacionada con la energía de Fermi.

Cuando  $T \neq 0$  la probabilidad de que este ocupado un estado de energía  $\varepsilon > \varepsilon_F$  ya no es cero, de tal modo que el número de estados viene dado por:

$$N = \int_0^{\infty} f_{FD}(\varepsilon, T) D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (6.1.20)$$

Si  $T = 0$  tenemos que la ecuación () se recupera verificándose que  $\mu = \varepsilon_F$  dadas las definiciones previas. Sin embargo para temperaturas  $T \neq 0$  no se verifica que sean iguales ( $\mu(T \neq 0) \neq \varepsilon_F$ ). De hecho el valor de  $\mu$  depende en última instancia de la ligadura (6.1.20), de tal modo que para  $T \ll T_F$  se verifica que:

$$\mu(T) \approx \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\pi T}{2T_F} \right)^2 \right] \quad (6.1.21)$$

que se deduce de la expansión de Sommerfeld que veremos en el siguiente apartado.

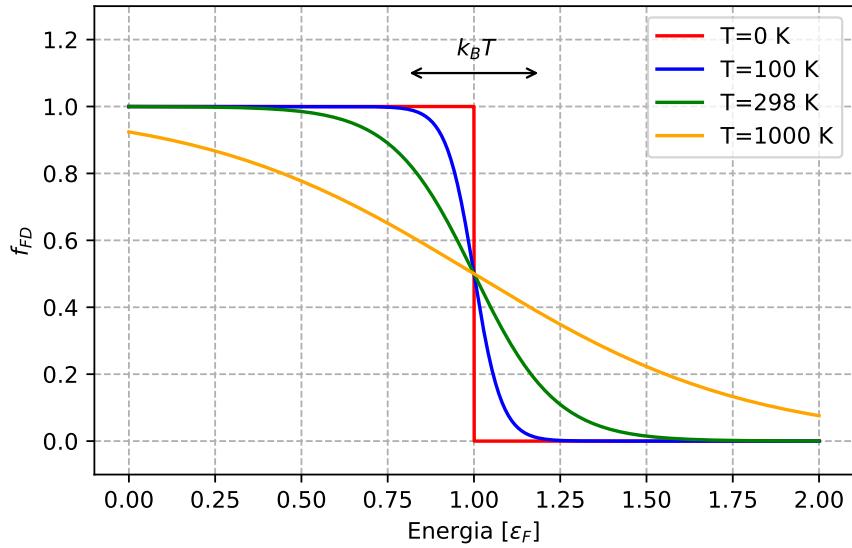


Figura 6.1: Distribución de Fermi-Dirac.

## 6.2. Energía interna y capacidad calorífica

El valor de la energía interna de los electrones es bien sencillo de calcular, ya que vendrá dado por la integral

$$U(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon D(\varepsilon) f_{FD}(T, \varepsilon) d\varepsilon \quad (6.2.1)$$

Lo cual es evidente si pensamos en el significado de cada uno de los miembros: la energía total será la suma (integral) de la energía de cada estado por la probabilidad de que esté ocupado por la cantidad de estados de esa energía. Una vez tenemos esto solo queda calcular la integral. Por ejemplo para  $T = 0\text{K}$  tenemos que:

$$U(0) = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \quad (6.2.2)$$

Ahora bien: ¿Cuál es el valor para  $T \neq 0\text{K}$ ? La respuesta está en la integral, pero debido a la forma de  $f_{FD}$  no parece que la integral sea sencilla de obtener. La mejor manera de calcular esto es usar la *expansión de Sommerfeld* (que exige  $T \ll T_F$ ), que nos dice que para cualquier función  $H(\varepsilon)$  tenemos:

$$\int_0^{\infty} H(\varepsilon) f_{FD}(\varepsilon) d\varepsilon \approx \int_0^{\mu} H(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{6} \left( \frac{dH(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \quad (6.2.3)$$

Así tenemos que la energía total a temperaturas no nulas pero muy inferiores al a temperatura de Fermi:

$$U(T) = U(0) + \frac{\pi^2}{6} \frac{3N}{2\varepsilon_F} k_B^2 T^2 \quad (6.2.4)$$

o lo que es lo mismo:

$$U(T) = U(0) + \frac{\pi^2}{6} \frac{3Nk_B}{2} \frac{T^2}{T_F} \quad (6.2.5)$$

De lo que se deduce que la capacidad calorífica debida a los electrones libres  $C_{el} = (\partial U / \partial T)_V$  viene dada por

$$C_{el} = \frac{\pi^2 N k_B T}{2 T_F} \quad (6.2.6)$$

Es decir, la capacidad calorífica debida a los electrones libres en los metales a bajas temperaturas es típicamente lineal, lo cual no es del todo incorrecto, aunque es cierto que los calores específicos resultantes de esta teoría difieren en un factor 10 respecto al experimental. Lógicamente esto es de esperar, ya que realmente los electrones en los metales no son libres. En general solemos denotar  $C_{el} = \gamma T$ , de tal forma que:

$$\gamma = \frac{\pi^2 N k_B}{2 T_F} \quad (6.2.7)$$

Así tenemos que la capacidad calorífica total a bajas temperaturas

$$C = C_{el} + C_{fon} = \gamma T + \alpha T^3 \quad (6.2.8)$$

lo que hace realmente difícil de medir  $\gamma$  experimentalmente, ya que hace falta energías muy bajas para que no predomine la capacidad calorífica fonónica.

Elemento	$\gamma_{el.libres}$ $\left(10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}^2}\right)$	$\gamma_{exp}$ $\left(10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}^2}\right)$	cociente
Li	1.8	4.2	2.3
Na	2.6	3.5	1.3
Cs	5.3	7.7	1.5
Cu	1.2	1.6	1.3
Au	1.5	1.6	1.1
Sr	4.3	8.7	2.0
Fe	1.5	12	8.0
Zn	1.8	1.4	0.78
Pb	3.6	7.0	1.9
Bi	4.3	0.2	0.047

Tabla 6.1: Predicción de la teoría de  $e^-$  libres y resultado experimental para el coeficiente  $\gamma$  de distintos elementos.

### 6.3. Tratamiento clásico de electrones: teoría de Drude

Los otros metales se caracterizan por una alta conductividad eléctrica,  $\sigma$ , comparada con otros materiales [ $10^8$ - $10^7$   $(\Omega\text{m})^{-1}$  frente a  $10^5$ - $10^{-4}$   $(\Omega\text{m})^{-1}$  en semiconductores y hasta  $10^{-16}$   $(\Omega\text{m})^{-1}$  en aislantes]. Electrones completamente libres e independientes (es decir, no interaccionantes con la red o entre ellos) darían lugar a una conductividad eléctrica infinita. Se introduce por tanto un modelo cinético similar al utilizado en el capítulo 5 con fonones. En este modelo cinético los electrones

se tratan clásicamente. Esto es posible porque podemos formar, a partir de las funciones de onda (6.1.3), un paquete de ondas de extensión espacial  $\Delta x$  verificando  $\Delta k \Delta x \sim 1$ . Como  $\Delta k$  debe estar bien definido, es decir  $\Delta k \ll k_F \sim a^{-1}$ , debe ser  $\Delta x \gg a$ . Por tanto, el modelo será aplicable siempre que las características de posibles perturbaciones (la longitud de onda de campos aplicados o el recorrido libre medio, ver más abajo) sean mucho mayores que  $a$ . Veamos entonces un poco en qué consiste la teoría de Drude.

### 6.3.1. Teoría de Drude

Desde que J.J. Thomson descubrió en 1896 el electrón, diversos físicos se preguntaron como se movían estas cargas dentro del metal. Fue en 1900 cuando Paul Drude dio cuenta de que aplicando la teoría cinética de los gases de Boltzmann al caso de los electrones en un metal podía describir correctamente su movimiento, siendo así la primera teoría que permitía entender la conducción metálica (aún con sus fallas). La teoría de Drude hace entonces 3 suposiciones básicas:

- Existe un tiempo entre las diferentes colisiones<sup>1</sup> de electrones  $\tau$ . La probabilidad de que se haya producido la colisión en un intervalo de tiempo  $dt$  es  $dt/\tau$ .
- Una vez ocurre la colisión, asumimos que el momento del electrón se reduce a cero  $\mathbf{p} = 0$ .
- Entre las colisiones, los electrones con carga  $-e$ , interactúan con los campos externos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ .

Las primeras dos suposiciones son exactamente las mismas que la teoría cinética de gases<sup>2</sup>. La tercera suposición es una generalización lógica, ya que a diferencia de las moléculas del gas, los electrones están cargados, y por tanto deben interactuar los campos electromagnéticos.

### 6.3.2. Ecuación dinámica de Drude

Entonces consideremos un electrón con momento  $\mathbf{p}$  en el instante temporal  $t$ . ¿Cuál será el valor del momento en el instante  $t + dt$ ? Existe dos términos que influyen en el valor final. El primero es que hay una probabilidad de  $dt/\tau$  de que el momento se haga cero. Si no se hace cero (la probabilidad de que no sea cero es  $1 - dt/\tau$ ) el momento se irá acelerando debido a la fuerza  $\mathbf{F}$  (en nuestro caso la fuerza generada por los campos electromagnéticos), por lo que el momento en este caso será la suma del momento anterior y el valor  $\mathbf{F}(t)dt$ . Así, el valor medio del momento en  $t + dt$  será la probabilidad de que se vaya a cero por cero más la probabilidad de que no sea cero mas esta aceleración:

$$\langle \mathbf{p}(t + dt) \rangle = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\mathbf{p}(t) + \mathbf{F}dt) + \mathbf{0} dt / \tau \quad (6.3.1)$$

<sup>1</sup>En la teoría cinética de los gases una colisión se entiende como el choque de las partículas (como dos bolas de billar), sin embargo los electrones interaccionan a través del potencial de Coulomb, que al ser de largo alcance hace difícil estimar una sección eficaz. Además existen otros elementos que pueden interactuar con los electrones: fotones, fonones, defectos... Por esta misma razón estimar  $\tau$  para los electrones es mucho más complicado que estimarlo para los átomos/moléculas de un gas. De hecho suelen interactuar más con fonones y con defectos que con otros electrones.

<sup>2</sup>Lógicamente este no es un modelo perfecto, y se podría hacer mucho más realista considerando que en cada colisión las dos partículas iniciales comienzan con momento  $\mathbf{p}_1^{\text{inicial}}$  y  $\mathbf{p}_2^{\text{inicial}}$  y salen con momentos  $\mathbf{p}_1^{\text{final}}$  y  $\mathbf{p}_2^{\text{final}}$  de tal manera que se conserva energía y momento. Desafortunadamente esto hace extremadamente difícil el cálculo, así que veamos cuán incorrectas son las suposiciones hechas. La primera conjectura no está totalmente errada, ya que experimentalmente si se observa un tiempo medio entre colisiones. La segunda si que es mucho más cuestionable, aunque *en promedio* si se verifica que el momento final es cero. Sin embargo no es correcto que *cada* partícula tenga una energía cinética cero tras la colisión.

Manteniendo los términos de primer orden con  $dt$  tenemos la **ecuación dinámica de Drude**<sup>3</sup>

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{p}}{\tau} \quad (6.3.2)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza que experimenta el electrón, siendo esta la conocida *fuerza de Lorentz*.

$$\mathbf{F} = -e(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.3.3)$$

Uno puede considerar al término  $\mathbf{p}/\tau$  como una *fuerza de arrastre*. Nótese que en el caso de que no hubiera fuerza de arrastre la ecuación diferencial nos lleva directamente a un decaimiento exponencial del momento:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{\text{inicial}} e^{-t/\tau} \quad (6.3.4)$$

lo cual es de esperar teniendo en cuenta que las partículas pierden momento con cada colisión.

## 6.4. Electrones en campos externos

### 6.4.1. Electrones en un campo eléctrico y conductividad eléctrica

Consideremos entonces que nuestros electrones están ante la presencia de un campo eléctrico no nulo. Entonces nuestra ecuación del movimiento es:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathcal{E} - \frac{\mathbf{p}}{\tau} \quad (6.4.1)$$

En un estado estacionario tendremos que el momento  $d\mathbf{p}/dt = 0$ , por lo que

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} = -e\tau\mathcal{E} \quad (6.4.2)$$

siendo  $m$  la masa de un electrón y  $\mathbf{v}$  su velocidad (promediada). Como sabemos el podemos relacionar la existencia de un promedio de la velocidad y el flujo de carga. Si  $n$  es la densidad de electrones en el metal,  $-e$  la carga del electrón y  $\mathbf{v}$  su velocidad, tenemos que el flujo eléctrico es:

$$\mathbf{j} = -env = \frac{e^2\tau n}{m}\mathcal{E} \quad (6.4.3)$$

Como podemos observar  $\mathbf{j}$  no depende de si la carga eléctrica es positiva o negativa, solo de la dirección del campo. Como la conductividad del metal es el coeficiente de proporcionalidad entre  $\mathbf{j}$  y  $\mathcal{E}$  (siguiendo  $\mathbf{j} = \sigma\mathcal{E}$ ) tenemos que  $\sigma$  viene dado por

$$\sigma = \frac{e^2\tau n}{m} \quad (6.4.4)$$

De esta ecuación se puede deducir que midiendo experimentalmente el valor de la conductividad eléctrica podemos determinar el valor de  $\tau n$ .

<sup>3</sup>Cuando escribimos  $\mathbf{p}$  hablamos del valor medio  $\langle \mathbf{p} \rangle$ . Dado que nuestro estudio es puramente probabilístico, deberíamos escribir todas las cantidades como valores medios (hasta la fuerza) de estos eventos aleatorios. Una teoría más detallada debería hablar de “distribuciones de momento” mas que de momento medio. Llevando esto a la práctica obtendremos las ecuaciones de transporte de Maxwell, no discutidas aquí.

### 6.4.2. Electrones en campo magnético y eléctrico

Supongamos que existe un campo eléctrico y magnético no nulo. Ahora la ecuación es:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \mathbf{p}/\tau \quad (6.4.5)$$

Asumiendo que estamos en el caso estacionario otra vez, y que  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  y  $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$ , obtenemos que

$$-e\mathcal{E} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n} + \frac{m}{ne\tau}\mathbf{j} = 0 \quad (6.4.6)$$

y las componentes de la velocidad

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{E_x q \tau}{m} - \omega_c \tau v_y \\ v_y &= \frac{E_y q \tau}{m} + \omega_c \tau v_x \\ v_z &= \frac{E_z q \tau}{m} \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

en donde  $\omega_c = eB/m$  es la llamada **frecuencia ciclotrón**. Ahora tenemos que definir ahora una matriz 3x3 llamada la **matriz resistividad**  $\rho$  tal que

$$\mathcal{E} = \rho \mathbf{j} \quad (6.4.8)$$

De tal modo que:

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \rho_{zz} = \frac{m}{ne^2\tau} = \frac{1}{\sigma} \quad (6.4.9)$$

Si  $\mathbf{B}$  está orientado en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ , tal que

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ne} \quad (6.4.10)$$

siendo el resto de las componentes de  $\rho$  cero. Los términos fuera de la diagonal son conocidos por el nombre de *coeficiente de Hall*, denominados así por Edwin Hall, que descubrió en 1879 que cuando aplicamos un campo magnético perpendicularmente a una corriente eléctrica aparece un voltaje en la dirección perpendicular a la corriente y al campo magnético. Entonces el coeficiente de Hall  $R_H$  viene dado por:

$$R_H = \frac{\rho_{xy}}{|B|} \quad (6.4.11)$$

el cual, siguiendo la teoría de Drude, viene dado por

$$R_H = \frac{-1}{ne} \quad (6.4.12)$$

De tal modo que su medida nos permite calcular la densidad electrónica en el metal. Si consideramos que el valor experimental  $n$  dado por esta teoría es correcta, podremos entonces obtener  $\tau$  a partir de  $n$  y  $\sigma$ . Así obtendríamos un valor  $\sim 10^{-14}$  s para la mayor parte de los metales en una temperatura ambiente. En conclusión, nuestro modelo predice que :

1. La magnetoresistividad es independiente del campo magnético externo  $\rho(\mathbf{B}) = \rho(0)$ .
2.  $R_H < 0$  (dado que  $q = -e$ ), dependiendo su magnitud sólo de la concentración electrónica.

Experimentalmente, la magnetoresistividad presenta gran variedad de comportamientos. Para algunos metales la dependencia es débil; para otros satura a un valor constante para altos valores de  $B$ , pero para ciertas orientaciones crece sin límite (volveremos a ello en el Capítulo 8). En cuanto al coeficiente Hall, el dato experimental es bueno para los metales alcalinos, relativamente aceptable para los metales nobles e inaceptables para otros. En particular resulta inexplicable el signo positivo de  $R_H^{\text{exp}}$  a menos que aceptáramos que los portadores de carga fueran positivos, lo cual a su vez es incompatible con un modelo de electrones libres. En general, además  $R_H = R_H(\mathbf{B})$ , aunque la ecuación  $R_H = -1/ne$  puede aún ser válida en el límite de campos magnéticos altos. Estas discrepancias se resuelven dentro de la Teoría de Bandas (Capítulo 7), que incluye la interacción de los electrones con el potencial periódico que producen los iones de la red.

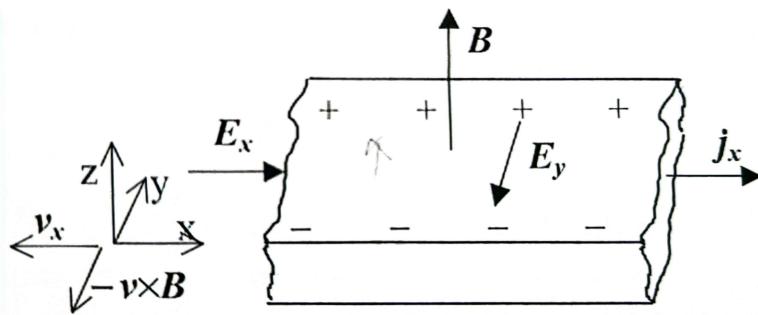


Figura 6.2: Configuración experimental para comprobar el efecto Hall.

Metal	Valencia	$R_H^{\text{exp}}/R_H^{\text{teo}}$	Metal	Valencia	$R_H^{\text{exp}}/R_H^{\text{teo}}$
Li	1	1.25	Na	1	0.83
K	1	0.83	Rb	1	1.0
Cs	1	1.1	Cu	1	0.67
Ag	1	0.77	Au	1	0.67
Be	2	-5	Mg	2	-2.5
In	3	-3.3	Al	3	-3.3

Tabla 6.2: Coeficiente Hall de algunos elementos (relativos al resultado de la teoría de  $e^-$  libres).

### 6.4.3. Dependencia con la temperatura de la conductividad eléctrica

Si admitimos que los dos mecanismos de scattering principales (fonones y defectos) son independientes entre sí, la probabilidad de colisión por unidad de tiempo  $\tau^{-1}$  será la suma de las debidas a ambos mecanismos por separado:

$$\tau^{-1} = \tau_{\text{def}}^{-1} + \tau_{\text{fon}}^{-1} \quad (6.4.13)$$

Como los defectos estructurales en un cristal (impurezas químicas, microgrietas, dislocaciones, etc.) no cambian esencialmente con la temperatura, dan una contribución a  $\sigma$  constante. En cuanto a los

fonones, la probabilidad de colisión variará porque, en particular, varía el número de aquellos. Así tenemos que para la resistividad eléctrica  $\rho \equiv 1/\sigma = m/ne^2\tau$ :

$$\rho = \rho_{\text{def}} + \rho_{\text{fon}}(T) \quad (6.4.14)$$

resultado que se conoce como la *regla de Matthiesen*. A bajas temperaturas se tiene  $\rho \approx \rho_{\text{def}}$ , pues  $\rho_{\text{fon}}(T) \rightarrow 0$  al no existir fonones. En cristales ultrapuros y a muy bajas temperaturas  $\tau$  o  $\ell$  (y por tanto  $\sigma$ ) pueden llegar a ser hasta 6 órdenes de magnitud mayores que a temperatura ambiente. A altas temperaturas, en el límite clásico ( $T > \theta_{\text{Debye}}$ ) la distribución energética de los fonones cambia poco y lo que cuenta es su número medio. En particular, cabe esperar  $\tau \propto \langle n \rangle_{\text{fon}}^{-1}$  y por tanto  $\rho \propto \langle n \rangle_{\text{fon}}$ . Como  $\langle n \rangle_{\text{fon}} \propto T$  se predice la dependencia lineal de  $\rho$  con  $T$ . Esto es en efecto lo que se encuentra experimentalmente en metales. En el caso de medios desordenados como aleaciones, metales amorfos, etc. predomina la dispersión electrónica por defectos sobre la dispersión por fonones y  $\rho$  es casi constante.

#### 6.4.4. Conductividad AC y propiedades ópticas

Se estudia en apartado la predicción del modelo de electrones libres para algunas de las magnitudes ópticas básicas como la reflectividad y la atenuación. Supóngase un campo electromagnético de frecuencia  $\omega$  aplicado sobre el metal. Despreciando el efecto del campo magnético asociado y prescindiendo del carácter vectorial, la ecuación dinámica (??), puede expresarse como  $m\ddot{v} = -mv/\tau - eE_0e^{-i\omega t}$ . Probando para la velocidad media de portadores una solución de la forma  $v = v_0e^{i\omega t}$  (donde  $v_0$  puede ser complejo para tener en cuenta posibles desfases) resulta  $v = -e\tau E/m(1 - i\omega\tau)$ . Usando ahora  $j = -nev$ , se obtiene directamente  $j = \sigma(\omega)E$  donde

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - i\omega\tau} \quad (6.4.15)$$

Aquí  $\sigma(0) = ne^2\tau/m$  es la conductividad eléctrica para  $\omega = 0$ , es decir, DC. Una primera consecuencia de (6.4.15) es que cuando  $\omega\tau \ll 1$ ,  $\sigma(\omega) \approx \sigma(0)$ , la corriente oscila a la misma frecuencia que  $\mathcal{E}$ , gracias a las colisiones, y el comportamiento es puramente resistivo. Sin embargo, cuando  $\omega\tau \gg 1$  las colisiones no son lo suficientemente frecuentes para frenar la inercia de los electrones y éstos se retrasan con respecto a  $\mathcal{E}$ , diminuyendo la absorción de energía.

Aunque  $\sigma(\omega)$  contiene en principio toda la respuesta del gas, es más conveniente utilizar la *formulación óptica*, que consiste en usar permitividad eléctrica relativa  $\epsilon(\omega)$ . Recuérdese que las ecuaciones de Maxwell conducen a la siguiente relación entre  $\epsilon(\omega)$  y  $\sigma(\omega)$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\epsilon_0\omega} \quad (6.4.16)$$

Al sustituir (6.4.15) en (6.4.16) se obtiene

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma_0/\epsilon_0\omega}{1 - i\omega\tau} \quad (6.4.17)$$

Dos casos límite de (6.4.17) son especialmente interesantes:

- **Frecuencia bajas:**  $\omega\tau \ll 1$  y  $\omega \ll \sigma/\varepsilon_0$ . Por ejemplo, en el cobre esto se cumple para  $\omega/2\pi \ll 10^{12}$  Hz ( $\lambda = 0.3\text{mm}$ ), que está en la frontera entre ondas muy cortas radio y el infrarrojo. En este límite (6.4.17) queda

$$\varepsilon(\omega) = \frac{i\sigma_0}{\varepsilon_0\omega} \quad (6.4.18)$$

Introduciendo el índice de refracción  $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)} = n_1 + in_2$ , y teniendo en cuenta  $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ , resulta

$$n = \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\sigma}}(1+i) \quad (6.4.19)$$

Al haber parte imaginaria habrá *atenuación*: la amplitud del campo eléctrico se atenúa como  $E \propto e^{ikx} \propto e^{\omega n_2 x/c} = e^{-x/2\delta}$  (se ha utilizado la relación de dispersión general de las ondas electromagnéticas  $\omega = ck/n$ ). La onda recorre una distancia  $\delta$  antes de atenuarse, llamada *profundidad de penetración*, que viene dada por

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c^2}{\sigma_0\omega}} \quad (6.4.20)$$

Por ejemplo para el cobre y con  $\omega/2\pi \approx 10^{10}\text{Hz}$  (microondas  $\lambda = 3\text{cm}$ )  $\delta$  es tan sólo de unos 10  $\mu\text{m}$ . En cuanto a la reflectividad

$$r = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2 = \frac{(n_1-1)^2 + n_2^2}{(n_1+1)^2 + n_2^2} \quad (6.4.21)$$

Como, por (6.4.19),  $n_1 = n_2 = \sqrt{\sigma/2\varepsilon_0\omega} \gg 1$  (límite de bajas frecuencias), se tiene que  $r \approx 1$ , o sea, la reflectividad tiende al 100 %. De hecho es una regla general que cuanto más absorbe un material tanto más refleja en la superficie.

- **Frecuencias altas:**  $\omega\tau \ll 1$ . En este límite (6.4.17) se aproxima por

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\sigma_0/\varepsilon_0\tau}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6.4.22)$$

donde  $\omega_p^2 = \sigma_0/\varepsilon_0\tau = ne^2/\varepsilon_0 m$  se denomina *frecuencia de plasma*. Se puede comprobar que  $\omega_p$  corresponde a la frecuencia característica de oscilaciones longitudinales de la densidad de densidad del gas de electrones, cuyo *cuanto* se denomina *plasmón*. Estos modos de vibración electrónicas son muy energéticos corresponde al U.V. Para  $\omega < \omega_p$ ,  $\varepsilon(\omega) < 0$ ,  $n \approx n_2$  y existe atenuación. Asimismo, se ve en (6.4.21) que  $r \rightarrow 1$  al tender  $n_1 \rightarrow 0$ . Sin embargo, para  $\omega > \omega_p$ ,  $\varepsilon(\omega)$  es real,  $n_2 = 0$  y el metal se hace *transparente*. Esta transparencia debe ocurrir en el U.V. Para algunos metales, como los alcalinos, esto se verifica bien. En general, las propiedades ópticas de los metales son menos simples de los que predica el modelo de electrones libres y, de nuevo, la estructura de bandas es de referencia obligada para su explicación.

## 6.5. Transporte térmico

Drude, además de describir una ecuación que describe con cierta precisión la conductividad eléctrica, también fue suficientemente valiente como para calcular la conductividad térmica  $\kappa_{el}$

debida a los electrones en movimiento<sup>4</sup> usando la teoría cinética de Boltzmann. Como sabemos la conductividad térmica se define como la constante que relaciona un gradiente de temperatura y la corriente de calor  $\mathbf{j}_Q$ :

$$\mathbf{j}_q = \kappa \nabla T \quad (6.5.1)$$

La derivación usando la teoría de Boltzmann arroja que la la **conductividad térmica**  $\kappa$  viene dada por

$$\kappa = \frac{1}{3} n c_v \langle v \rangle \ell \quad (6.5.2)$$

donde  $c_v$  es la capacidad calorífica por partícula,  $\langle v \rangle$  es la velocidad promedio y  $\ell = \langle v \rangle \tau$  es el *recorrido libre medio* por parte del electrón. Una manera intuitiva de llegar a esta ecuación es la siguiente: una densidad de  $n$  electrones es capaz de transportar una cantidad de calor  $c_v T$  a una velocidad  $\langle v \rangle$  a lo largo de una distancia  $\ell$ . Como hemos visto la capacidad calorífica usando el modelo de gas de electrones libres:

$$c_v = k_B \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F}$$

y la velocidad promedio aproximable como la velocidad de Fermi  $\langle v \rangle \approx v_f$ , tenemos que la **conductividad térmica** debida a los electrones viene dada por

$$\kappa_{el} = \frac{\pi^2}{3} \frac{n \tau k_B^2 T}{m} \quad (6.5.3)$$

Al igual que antes, esta cantidad viene dada por el parámetro desconocido  $\tau$ , al igual que la conductividad eléctrica. Entonces el cociente de ambas será una constante global (salvo por la temperatura) que no dependerá del metal. Entonces el **número de Lorentz**  $L \equiv \kappa/\sigma T$  es una *constante universal* tal que, según lo visto, viene dada por

$$L = \frac{\kappa_{el}}{T \sigma} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^3}{e^2} \approx 2.45 \times 10^{-8} \text{ WattOhm/K}^2 \quad (6.5.4)$$

Este resultado fue considerado un éxito, y el hecho de que este ratio permanecía constante para casi todos los metales fue conocido durante mas de medio siglo como la **ley de Wiedemann-Franz**.

Elemento	$L_{\text{exp}}(273\text{K})$ $10^8 \text{W}\Omega/\text{K}^2$	$L_{\text{exp}}(373\text{K})$ $10^8 \text{W}\Omega/\text{K}^2$
Ag	2.31	2.37
Cu	2.23	2.33
W	3.04	3.20
Zn	2.31	2.33
Pt	2.51	2.60

Tabla 6.3: Números de Lorentz experimentales para varios elementos.

<sup>4</sup>No hay que ignorar que la conductividad térmica tiene varias componentes, como la de los fonones  $\kappa_{fon}$ . En cualquier caso la predominante en la mayor parte de los metales es la procedente de los electrones.

### 6.5.1. Efecto Peltier y Seebeck

El **efecto Peltier** es el nombre que se le da la aparición de una corriente eléctrica  $\mathbf{j}$  cuando un metal o material tiene una corriente de calor  $\mathbf{j}_q$  no nula. El **coeficiente de Peltier**  $\Pi$  viene dado como la constante que relaciona ambas corrientes:

$$\mathbf{j}_q = \Pi \mathbf{j} \quad (6.5.5)$$

Teniendo en cuenta que en la teoría cinética la corriente calorífica se define como

$$\mathbf{j}_q = \frac{1}{3} (c_v T) n \mathbf{v} \quad (6.5.6)$$

Usando que  $\mathbf{j} = -e n \mathbf{v}$  tenemos que el coeficiente Peltier vendrá dado entonces por:

$$\Pi = -\frac{-c_v T}{3e} \quad (6.5.7)$$

Otro coeficiente es el **coeficiente de Seebeck**, que describe otro fenómeno termoeléctrico, que es la formación de una fuerza termoeléctrica en un circuito cerrado que consta de dos metales diferentes, siempre que los puntos de contacto de estos metales estén a diferentes temperaturas. Denotado por  $S$ , se puede relacionar con el coeficiente Peltier a través de la relación  $S = \Pi/T$ , y viene dado por:

$$S = \frac{c_V}{3e} \quad (6.5.8)$$

según la teoría de Drude.

## 6.6. Interacción electrón-electrón

En un metal la distancia media entre electrones de conducción es del orden de unos pocos Å, sin embargo, los recorridos libres medios para las colisiones electrón-electrón son mayores que  $10^4$  Å a temperatura ambiente, y superiores a 10 cm a 1 K. Uno de los factores responsables de esta falta de interacción entre electrones y que justifica la aproximación de electrones independientes es el Principio de Exclusión.

Consideremos la situación especialmente sencilla de una esfera de Fermi con un solo electrón excitado 1 con energía  $\varepsilon_1$  respecto del nivel de Fermi. Como ilustra la figura 6.3 (a), no todos los electrones 2 pueden colisionar con el 1, de modo que  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , pues los estados finales 3 y 4 deben estar desocupados. La condición  $\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  exige  $|\varepsilon_2| < \varepsilon_1$  por lo que sólo una fracción  $\sim \varepsilon_1/\varepsilon_F$  de los electrones totales constituye un blanco para el electrón 1. La condición  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$  limita aún más los estados finales: deben caer en la esfera de estados finales que ilustra la figura 6.3 (b), y fuera del mar de Fermi la fracción permitida resulta ser también  $\sim \varepsilon_1/\varepsilon_F$ . El producto de las dos fracciones es  $\sim (\varepsilon_1/\varepsilon_F)^2$ . En presencia de una temperatura finita puede equipararse  $\varepsilon_1$  con  $k_B T$ , con lo que el Principio de Exclusión reduce las colisiones electrón-electrón en un factor  $\sim (k_B T/\varepsilon_F)^2 \sim 10^4$ . El correspondiente recorrido libre a temperatura ambiente es  $\sim 10^4$  Å, mucho mayor que el debido a la interacción electrón-fonón.

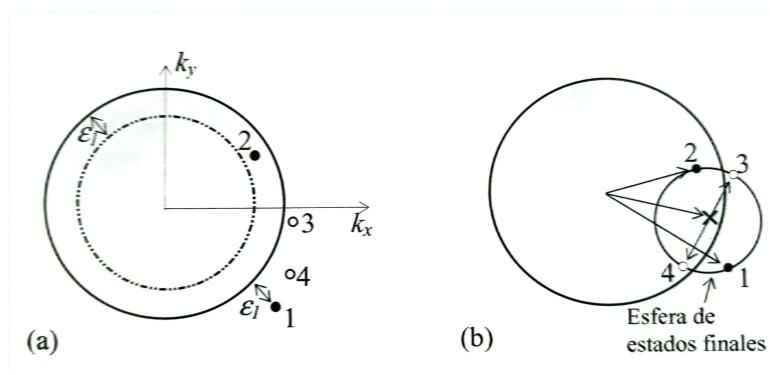


Figura 6.3: Restricción a los procesos de colisión  $e^- - e^-$  debido a las leyes de conservación de la energía (a) y del momento (b).



## Capítulo 7

# Electrones en un potencial periódico: teoría de bandas

Para mejorar algunas de las predicciones del modelo de gas de electrones libres se introduce la interacción de los electrones con la red cristalina a través de un potencial periódico, despreciando las interacciones entre electrones. En este tema vamos a usar los temas 11 y 15 del Oxford Solid State [3], en vez del tema 7 de [1], ya que consideramos que, como muchos temas, está todo muy mal redactado.

Al principio vamos a tratar de estudiar una cadena de electrones unidimensional con los electrones fuertemente atados a los átomos. Esto nos permitirá ver de una manera sencilla el funcionamiento de las bandas, como se llenan, etc. Luego veremos el caso de la aproximación a red vacía, cuando los átomos están débilmente atados a los núcleos, que entraña una mayor dificultad al aparecer la teoría de perturbaciones. Una vez hayamos visto los casos más sencillos veremos la generalización de ambos resultados, manifestado en el teorema de Bloch, para luego estudiar mas a fondo los electrones fuertemente ligados pero ahora en más dimensiones. Finalmente acabaremos con el estudio de los estados ocupados a través de la superficie de Fermi y las zonas de Brillouin.

Revisar el Quinn [5] tema 4, parece que da lo mismo y bastante bien. Revisar también últimos puntos, para hacerlo compatible con el Oxford. En general, este tema debe ser rehecho de cero, en el libro original no me gusta y como está ahora mismo tampoco.

### 7.1. Cadena de electrones

En los capítulos anteriores hemos considerado las propiedades de los fonones a través de un sistema unidimensional y luego lo hemos generalizado para varias dimensiones. En este punto vamos a hacer un tratamiento similar de los electrones, considerando ondas de electrones en vez de fonones (cabe destacar que en la mecánica cuántica y en la teoría cuántica de campos los electrones son ondas, por lo que en realidad esta asunción no está tan alejada de la realidad).

### 7.1.1. Cadena de electrones en una dimensión

Para tratar de describir un sistema de electrones en un átomo/molécula usamos la teoría LCAO<sup>1</sup>, que nos dice que podremos suponer que los orbitales moleculares son un conjunto de combinaciones lineales de orbitales atómicos (denotados por  $n, l, m_l, m_s$ ). En esta imagen asumimos que solo tenemos un orbital en el átomo  $n$  y lo denotamos por  $|n\rangle$ . Por conveniencia y facilidad aplicamos condiciones de contorno de tal manera que si hay  $N$  sitios, el sitio  $N$  y 0 es el mismo. Además consideremos que los orbitales son ortogonales entre sí:

$$\langle n|m \rangle = \delta_{n,m} \quad (7.1.1)$$

Supongamos ahora la función más general del sistema, dada por una combinación de las diferentes funciones orbitales:

$$|\Psi\rangle = \sum_n \phi_n |n\rangle \quad (7.1.2)$$

Si la función de ondas es solución de la ecuación de Schödinger tenemos que:

$$\mathcal{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (7.1.3)$$

tal que:

$$\sum_m \mathcal{H}\phi_m |m\rangle = \sum_m E\phi_m |m\rangle \quad (7.1.4)$$

Si ahora aplicamos  $\langle n|$ , como  $\langle n|\mathcal{H}|m\rangle = H_{mn}$  no es necesariamente cero, tenemos que el problema de los autovalores se ha convertido en un conjunto de ecuaciones lineales (conocidos los valores  $H_{nm}$ ) tal que:

$$\sum_m H_{mn}\phi_m = E\phi_n \quad (7.1.5)$$

Consecuentemente, la solución mas general no es más que una combinación lineal de las soluciones orbitales que calculemos con el modelo. En realidad esta solución es una aproximación, llamada *método variacional*, y será mejor cuantos más orbitales pongamos en el modelo. Si en vez de tener un solo orbital  $|n\rangle$  por sitio, tuviéramos varios  $|n, \alpha\rangle$  (recordemos que en este caso  $n$  denota la posición del electrón, unido al átomo  $n$ -ésimo) siendo  $\alpha$  un conjunto de números, nuestra solución sería cada vez más precisa.

Este método es el llamado LCAO pero aplicado para nuestra cadena de electrones. Sin embargo incluir más orbitales puede provocar que la condición de ortogonalidad ya no se verifique  $\langle n, \alpha | m, \beta \rangle \neq \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$ . En general asumiremos que existe un solo orbital por sitio, en pos de que se verifique la condición de ortogonalidad. Nuestro hamiltoniano vendrá dado por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_j V_j \quad (7.1.6)$$

siendo  $\mathcal{H}_0 = \mathbf{p}^2/2m$  la energía cinética y  $V_j$  la interacción de Coulomb en del electrón en la posición  $\mathbf{r}$  en el núcleo ubicado en  $j$ :

---

<sup>1</sup>De sus siglas en inglés *Linear Combination of Atomic Orbitals*, en español *Combinación Lineal de Orbitales Atómicos* o CLOA

$$V_j = V(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j) \quad (7.1.7)$$

Con estas definiciones tenemos que la solución:

$$\mathcal{H}|m\rangle = (\mathcal{H}_0 + V_m)|m\rangle + \sum_{j \neq m} V_j|m\rangle \quad (7.1.8)$$

Lógicamente  $\mathcal{H}_0 + V_m|m\rangle = \varepsilon_{at}|m\rangle$  (siendo  $\varepsilon_{at}$  la energía atómica). Así tenemos que:

$$H_{nm} = \langle n|\mathcal{H}|m\rangle = \varepsilon_{at}\delta_{nm} + \sum_{j \neq m} \langle n|V_j|m\rangle \quad (7.1.9)$$

Si suponemos que la interacción  $\langle n|V_j|m\rangle$  solo ocurre entre los primeros vecinos, tal que:

$$\sum_{j \neq m} \langle n|V_j|m\rangle = \begin{cases} V_0 & n = m \\ -t & n = m \pm 1 \\ 0 & \text{cualquier otro } n \end{cases} \quad (7.1.10)$$

La consecuencia  $\langle n|V_j|n \pm 1\rangle \neq 0$  es enorme. Como ahora la matriz hamiltoniana no está diagonalizada, los autoestados reales no serán  $|n\rangle$  o  $|m\rangle$ , si no una combinación lineal de ellos, y por tanto es posible que aunque en el estado  $t = 0$  el electrón  $n$  se encuentre en el estado  $|n\rangle$ , el electrón ya no se encuentre en el estado  $|n\rangle$  en el instante  $t \neq 0$ . La matemática detrás de esto no es complicada, aunque si tediosa. Lo importante es que este potencial está permitiendo saltos de electrones entre los diferentes átomos, y cuanto más grande sea  $t$  mas posibles serán. El hamiltoniano no diagonalizado es ahora:

$$H_{nm} = \varepsilon_0\delta_{nm} - t(\delta_{n,n+1} + \delta_{n,n-1}) \quad (7.1.11)$$

### 7.1.2. Solución a la cadena de electrones unidimensional

La solución a la cadena de electrones monoatómica es bien sencilla: es una combinación de ondas planas. Supongamos entonces que la solución es

$$\phi_n = \frac{e^{ikna}}{\sqrt{N}} \quad (7.1.12)$$

donde el  $1/\sqrt{N}$  es el factor de normalización. Sustituyendo esto en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (si quisieramos resolver la ec. dependiente del tiempo solo tendríamos que añadir un término  $e^{i\omega t}$ ). Podemos ver en nuestra solución que  $k \rightarrow k + 2\pi/a$  también es una solución. Además si aplicamos las condiciones de contorno obtenemos que nuestros momentos se cuantizan en unidades de  $2\pi/L$ .

Sustituyendo la solución de ondas planas en nuestra ecuación (7.1.5) tenemos que:

$$\sum_m H_{nm}\phi_m = \varepsilon_0 \frac{e^{-ikna}}{\sqrt{N}} - t \left( \frac{e^{-ik(n+1)a}}{\sqrt{N}} + \frac{e^{-ik(n-1)a}}{\sqrt{N}} \right) = E \frac{e^{-ikna}}{\sqrt{N}} = E\phi_n \quad (7.1.13)$$

de lo que obtenemos el espectro de energías:

$$E = \varepsilon_0 - 2t \cos(ka) \quad (7.1.14)$$

que se parece bastante al espectro de nuestro fonón unidimensional. La curva de dispersión, periódica en  $k \rightarrow k + 2\pi/a$ , tiene una región donde la velocidad de grupo es cero en  $k = n\pi/a$  para cualquier  $n$  entero. A diferencia de los electrones libres, la ecuación de dispersión de los electrones nos da un valor máximo y mínimo de la energía, ahora está acotada. Consecuentemente los electrones solo tienen autovalores en una determinada **banda** de energías  $E \in (\varepsilon_0 - 2t, \varepsilon_0 + 2t)$ , tal y como podemos ver en 7.1a. El término banda se usa entonces para describir el rango posible de valores energéticos en el cual se puede encontrar el electrón y para describir una rama conectada para una función de dispersión (en esta imagen solo hay un modo posible para cada  $k$ , pero en general tendremos más, por ejemplo al considerar mas orbitales, más vecinos o varias dimensiones). Además podemos ver que si las distancias interatómicas son suficientemente grandes el comportamiento de los electrones será exactamente igual al de los orbitales aislados: energías bien definidas en orbitales 7.1b.

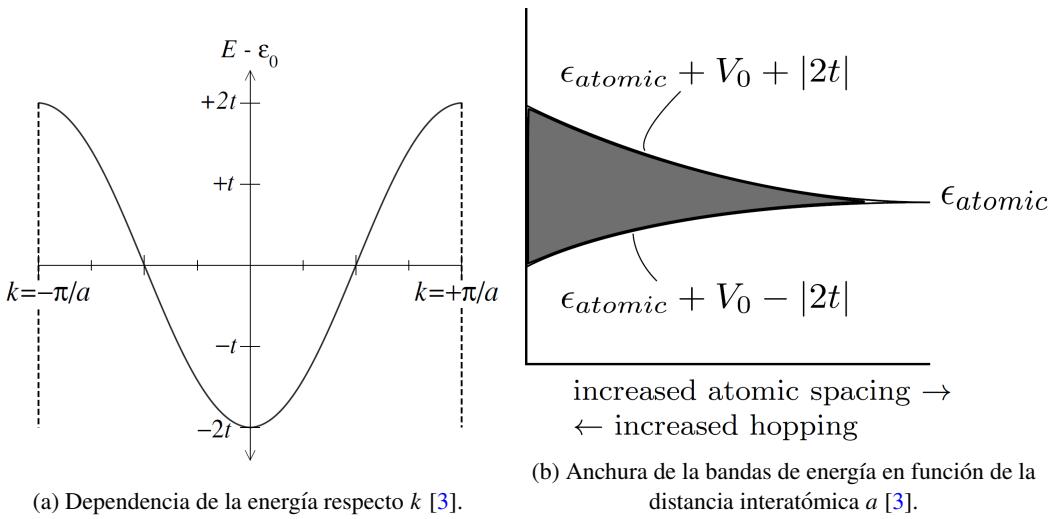


Figura 7.1: Comportamiento de la energía y anchura de bandas en función de  $k$  y  $a$ .

La diferencia energética entre el máximo y mínimo de la banda se le llama *ancho de banda*. Estados con energías mas allá del ancho de banda (o con menos energías) no son posibles. El ancho de banda lo determina el término  $t$  o “término de hopping”, que depende, de varios términos, como la distancia entre átomos. El término  $t$  nos da un valor de la energía de intercambio, es decir, la energía que cuesta transferir el electrón del átomo  $m$  al  $m \pm 1$ . Para pequeños  $k$  tenemos que la ecuación de dispersión nos queda como

$$E(k) = \text{cte} + ta^2 k^2 \quad (7.1.15)$$

El resultado del comportamiento parabólico es muy similar al de los electrones libres, por lo que si relacionamos ambos términos de dispersión salvo que ahora  $m \rightarrow m^*$ :

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} = ta^2 k^2 \quad (7.1.16)$$

tal que

$$m^* = \left( \frac{\hbar^2}{ta^2} \right)^{1/2} \quad (7.1.17)$$

es la **masa efectiva**, que se define como aquella masa la cual debería tener el electrón para que a bajos  $k$  la dispersión se comporte como un conjunto de masa  $m^*$ . Evidentemente la masa efectiva no tiene ninguna relación con la masa del electrón, pero si con el término de intercambio.

### 7.1.3. Introducción al llenado de bandas

Ahora, al igual que en el caso de las vibraciones, debemos imponer condiciones de contorno a fin de representar materiales finitos. Dado que la solución de la función de ondas es la misma (onda plana) podemos pensar que exigir las condiciones de contorno periódicas nos lleva a resultados completamente análogos. Uno de estos resultados es que ahora el número de  $k$ -estados posibles está limitado al número de electrones libres  $N$ . Sin embargo hay 2 estados de espín, por lo que hay  $2N$  estados posibles.

Además hemos visto como la energía se encuentra en una banda. Entonces, por ejemplo, si cada uno de los átomos donase un electrón a la banda tendríamos que la banda estaría medio llena, y por lo tanto aplicar una fuerza externa, como podría ser la fuerza coulombiana a través de un campo eléctrico pequeño, los estados ocupados podrían desplazarse hacia la derecha 7.2 de tal modo que aparece un momento total no cero, y por tanto aparece una corriente. Esto explica porqué muchos cristales de átomos monovalentes son metales.

Por otro lado, si cada átomo de nuestro momento fuera divalente, donando 2 electrones a la banda (lo cual no es incompatible con el modelo ya que podrían tener los mismos números cuánticos solo diferenciándose en el de espín), tendremos que la banda estaría llena: no existe campo eléctrico que pueda mover  $k$  hacia un lado u otro, ya que todos los estados posibles de  $k$  están ocupados. Es decir, *las bandas ocupadas no pueden llevar corriente*, comportándose como aislantes. Lógicamente la realidad es mucho mas complicada, como vamos a ver.

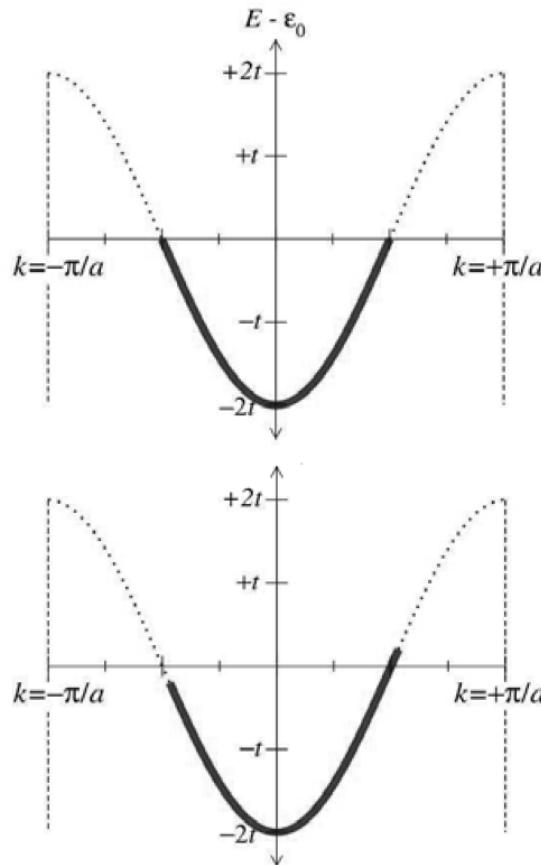


Figura 7.2: Dependencia de la energía respecto  $k$  [3].

### 7.1.4. Múltiples bandas

En el modelo introducido, hemos considerado que solo hay un átomo en la celda unidad y un sólo orbital por átomo. Lógicamente para mejorar el modelo deberíamos considerar que hay mas de un orbital en cada celda unitaria. Veamos los dos posibles casos:

- Una posibilidad es considerar que en la celda unitaria hay un átomo pero con varios orbitales atómicos. Cuando los átomos están muy lejos entre sí, cada átomo solo tiene los orbitales asignados, tal que los electrones se colocan en dichos orbitales de manera exacta. Sin embargo, cuando los átomos se acercan y las energías posibles para cada electrón comienzan a aumentar (apareciendo bandas) es posible que las bandas de los diferentes orbitales se superpongan, tal y como muestra la imagen 7.3b.
- Una situación similar es cuando consideramos dos átomos por celda unidad pero solo un orbital atómico por átomo. El resultado es un espectro como el de la imagen 7.3a. Al igual que en el caso de las vibraciones, ahora tenemos dos posibles valores de la energía para cada momento. En el lenguaje de los electrones decimos que hay dos bandas (no hacemos la distinción entre banda acústica u óptica, aunque la idea es similar). Notemos que el gap entre todas bandas no hay estados  $k$  que puedan producir dichas energías.

Supongamos el caso en el que ambos átomos son divalentes (tienen dos electrones en la última capa de valencia). Ambas bandas estarían completamente llenas, tanto los estados con espín arriba  $\uparrow$  y abajo  $\downarrow$ . Por otro lado, si fueran monovalentes solo estaría llena la banda con menos energía (con ambos espines), quedando los estados con la banda de más energía completamente vacía. En el esquema en zona extendida la superficie de Fermi y la primera zona de Brillouin coincidirían. ¿Y si ahora introducimos un campo eléctrico externo no nulo? Pues ahora los electrones tendrían que saltar de una banda a otra, para que así aparezca un momento cristalino no nulo. Sin embargo el campo eléctrico debe ser lo suficientemente fuerte para que el electrón salte sobre las bandas (una temperatura alta también puede ayudar, ya que existen fluctuaciones energéticas térmicas). Sin embargo esto se ha hecho para el caso en el que ambos orbitales están separados, pero para distancias interatómicas suficientemente pequeñas podría ser que no existiera tal separación y se comportase como un metal en cualquiera de los casos. Esto se tratará de manera mas profunda en la sección final.

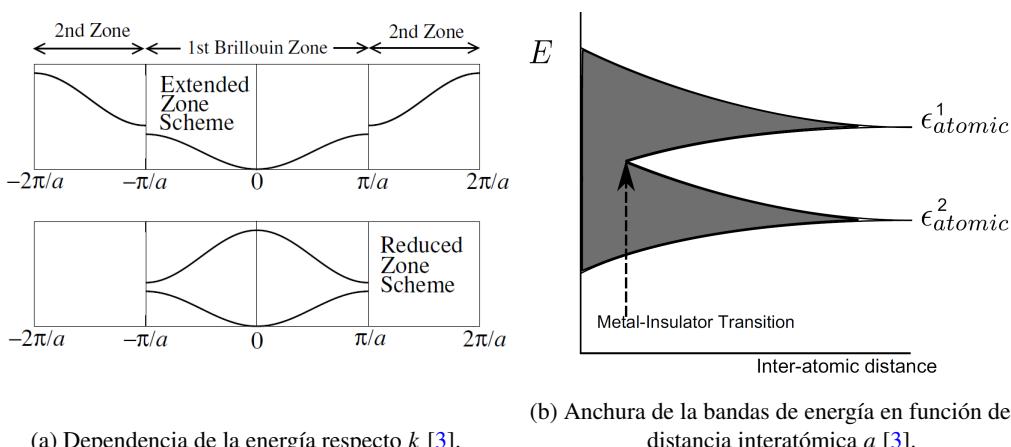


Figura 7.3: Comportamiento de la energía y anchura de bandas en función de  $k$  y  $a$ .

## 7.2. Aproximación de red vacía

En la sección anterior hemos descrito algunas de las propiedades de los electrones en un potencial periódico para el modelo unidimensional. Ahora haremos la expansión a 3 dimensiones y a un potencial muy débil. De hecho la sección anterior es el caso opuesto al que vamos a estudiar aquí, ya que suponía electrones muy fuertemente ligados a los átomos. Supongamos que nuestro hamiltoniano viene dado por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V(\mathbf{r}) \quad (7.2.1)$$

tal que  $V(\mathbf{r})$  es periódico, es decir que verifica

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = V(\mathbf{r}) \quad (7.2.2)$$

donde  $\mathbf{R}$  es un **vector de red**. Como sabemos los autoestados de la ecuación de Schrödinger libre (sin potencial) son ondas planas denotadas por  $|\mathbf{k}\rangle$  tal que

$$|\mathbf{k}\rangle \equiv Ae^{i\mathbf{kr}} \quad (7.2.3)$$

donde la energía viene dada por

$$\varepsilon_0 = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m} \quad (7.2.4)$$

El valor medio  $\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle$  debe venir dado por:

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{L^3} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \equiv V_{\mathbf{k}' - \mathbf{k}} \quad (7.2.5)$$

que es cero a no ser que  $\mathbf{k}' - \mathbf{k}$  sea un *vector de la red recíproca*. Consecuentemente cualquier solo ondas planas separadas por un vector de red recíproca  $\mathbf{G}$  pueden interactuar. Aplicando teoría de perturbaciones tenemos que:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0(\mathbf{k}) + \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k} \rangle = \varepsilon_0(\mathbf{k}) + V_0 \quad (7.2.6)$$

nos mueve un término  $V_0$  todos los posibles autovalores (siendo este su único efecto). Lógicamente este término no va a afectar nada a la física de nuestro problema, por lo que asumir que es cero solo simplifica las ecuaciones. La teoría de perturbaciones de segundo orden nos dice que

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'=\mathbf{k}+\mathbf{G}} \frac{\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle}{\varepsilon_0(\mathbf{k}) - \varepsilon_0(\mathbf{k}')} \quad (7.2.7)$$

donde el ' nos dice que  $\mathbf{G} \neq 0$ . Entonces existen 3 posibilidades:

- Que  $\varepsilon(\mathbf{k}') \neq \varepsilon(\mathbf{k})$ . En ese caso tenemos que  $\varepsilon(\mathbf{k}) \approx \varepsilon_0(\mathbf{k})$ , ya que estamos suponiendo que el potencial periódico es muy débil y por tanto  $\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle \ll \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}')$ .
- Que se verifique que  $\varepsilon(\mathbf{k}') = \varepsilon(\mathbf{k})$ , es decir que el estado con dicha energía está *degenerado*. Debido a que  $\varepsilon(\mathbf{k}') = \varepsilon(\mathbf{k})$  y que  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}$  con  $\mathbf{G} \neq 0$ , tenemos que la única posibilidad es que

$$k' = -k = \frac{n\pi}{a} \quad (7.2.8)$$

donde  $a$  es la distancia característica de la red. Es decir, los únicos estados degenerados de energía son aquellos que están en las zonas de frontera de Brillouin.

- Que se verifique que  $\varepsilon(\mathbf{k}') \approx \varepsilon(\mathbf{k})$ , es decir que el estado con dicha energía está casi degenerado. Debido a que  $\varepsilon(\mathbf{k}') \approx \varepsilon(\mathbf{k})$ , cosa que solo pasa si la diferencia entre ambos es  $\mathbf{G}$  y el vector de onda está muy próximo del plano de Bragg, tal que  $k \approx n\pi/a$ , tendremos que  $\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle \sim \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}')$  y por tanto no es despreciable.

Como podemos ver esto nos lleva a que los vectores de onda que no estén en una de las zonas de frontera de Brillouin (es decir, que caigan en un plano de Braggs) tienen una energía  $\varepsilon(\mathbf{k})$ , y por tanto cuanto más lejos del plano de Bragg más válido será el comportamiento de electrones libres.

### 7.2.1. Teoría de perturbaciones para estados degenerados

Para estados degenerados la teoría de perturbaciones nos dice que los autoestados son una combinación lineal de los estados originales, y los autovalores una combinación de ambos también. Entonces el problema es básicamente diagonalizar  $\mathcal{H}$ , para lo cual tenemos que conocer los términos de la matriz, dados por:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k} | \mathcal{H} | \mathbf{k} \rangle &= \varepsilon_0(\mathbf{k}) \\ \langle \mathbf{k}' | \mathcal{H} | \mathbf{k} \rangle' &= \varepsilon_0(\mathbf{k}') = \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \\ \langle \mathbf{k}' | \mathcal{H} | \mathbf{k} \rangle &= V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = V_{\mathbf{G}}^* \\ \langle \mathbf{k} | \mathcal{H}' | \mathbf{k} \rangle &= V_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} = V_{\mathbf{G}}\end{aligned}$$

de tal modo que

$$\mathcal{H} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) & V_{\mathbf{G}}^* \\ V_{\mathbf{G}} & \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \end{pmatrix} \quad (7.2.9)$$

Usando el principio variacional, el autoestado será una combinación de  $|\mathbf{k}\rangle$  y  $|\mathbf{k}'\rangle$  que verifique:

$$|\Psi\rangle = \alpha|\mathbf{k}\rangle + \beta|\mathbf{k}'\rangle = \alpha|\mathbf{k}\rangle + \beta|\mathbf{k} + \mathbf{G}\rangle \quad (7.2.10)$$

tal que:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) & V_{\mathbf{G}}^* \\ V_{\mathbf{G}} & \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (7.2.11)$$

Sea  $\varepsilon$  el autovalor de  $\mathcal{H}$ , tenemos que la ecuación para calcularlo es:

$$(\varepsilon_0(\mathbf{k}) - \varepsilon)(\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{G}) - \varepsilon) - |V_{\mathbf{G}}|^2 = 0 \quad (7.2.12)$$

Entonces en función de cada caso tendremos diferentes comportamientos. Veamos cada caso por separado. C

#### Vector de ondas en el plano de Bragg

El caso más simple es en el que precisamente  $\mathbf{k}$  es un vector que cae en el plano de Bragg. En este caso la ecuación se convierte:

$$(\varepsilon_0(\mathbf{k}) - E)^2 = |V_{\mathbf{G}}|^2 \quad (7.2.13)$$

Con las dos soluciones:

$$E_{\pm} = \varepsilon_0(\mathbf{k}) \pm |V_G| \quad (7.2.14)$$

Es decir, existe un gap en los bordes de la zona de Brillouin (planos de Bragg). Siempre que existan dos momentos  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$  con una  $\varepsilon_0(\mathbf{k})$  en presencia de un potencial  $V_G$  periódico, los autoestados de energía estarán separados por  $\pm|V_G|$ .

Es decir, habrá regiones de energía inaccesibles para cualquier estado  $|\mathbf{k}\rangle$ , formando, al igual que en la sección anterior, bandas de energía permitidas y bandas de energías prohibidas. Las bandas de energías prohibidas estarán asociadas a los valores  $\varepsilon(\mathbf{k})$  si  $\mathbf{k} \in \{\text{PZB}, \text{SZB}, \text{TZB}, \dots\}$ , tal que la banda es  $E \in (\varepsilon(\mathbf{k}) - V_G, \varepsilon(\mathbf{k}) + V_G)$ .

### Caso unidimensional

Para entender el mejor estos conceptos vamos a estudiar el caso unidimensional con un potencial concreto:  $V(x) = V_0 \cos(2\pi x/a)$  con  $V_0 > 0$ . La frontera de la primera zona de Brillouin (en 1D son puntos, al igual que en 2D son líneas y en 3D planos) son  $k = \pi/a$  y  $k' = -k = -\pi/a$ ; de tal modo que se verifica que  $k' - k = G$  y que  $\varepsilon_0(k') = \varepsilon_0(k)$ . Las soluciones:

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k\rangle \pm |k'\rangle) \quad (7.2.15)$$

asignando a cada uno de estos los autovalores de energías  $E_{\pm}$  respectivamente. Dado que podemos escribir estas autofunciones como exponenciales complejas, tenemos que:

$$\psi_+ \sim e^{ikx/a} + e^{-ikx/a} \propto \cos(x\pi/a)$$

$$\psi_- \sim e^{ikx/a} - e^{-ikx/a} \propto \sin(x\pi/a)$$

Si nos fijamos en las densidades de probabilidad  $|\psi_{\pm}|^2$  tenemos que la densidad de  $\psi_+$  es máxima cuando el potencial  $V$  es máximo mientras que  $\psi_-$  es máxima cuando el potencial es mínimo, tal y como podemos ver en la figura 7.4. Consecuentemente el principio general es que el potencial periódico hace que interfieran las ondas  $|\mathbf{k}\rangle$  y  $|\mathbf{k} + \mathbf{G}\rangle$ , y cuando estas energías son las mismas, la mezcla de entre ellas es fuerte y ambas se combinan para generar dos estados, una de máxima energía y otra de mínima energía.

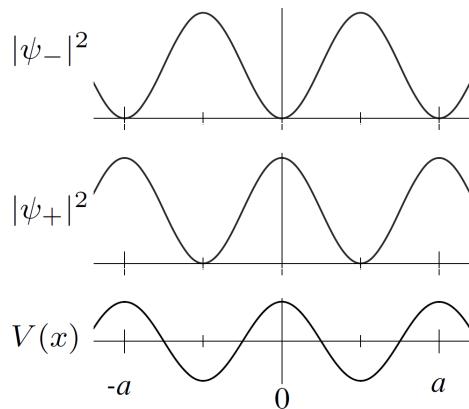


Figura 7.4: Forma de las funciones de onda cuando  $k = n\pi k/a$ .

### Vector de ondas cerca del plano de Bragg

No es muy complicado de extender este razonamiento a puntos muy cerca del  $\mathbf{k}$  que esté en la zona de frontera cerca del  $\mathbf{k}$  degenerado. Por simplicidad, seguiremos considerando el caso unidimensional. Supongamos entonces las energías en los estados  $k = n\pi/a + \delta$  y  $k = -n\pi/a + \delta$ . En este caso estamos estudiando vectores de onda en la proximidad del plano de Bragg, tal que

$$\varepsilon_0(n\pi/a + \delta) = \frac{\hbar^2}{2m} [(n\pi/a)^2 + 2n\pi\delta/a + \delta^2] \quad (7.2.16)$$

$$\varepsilon_0(-n\pi/a + \delta) = \frac{\hbar^2}{2m} [(n\pi/a)^2 - 2n\pi\delta/a + \delta^2] \quad (7.2.17)$$

Como podemos ver ahora la ecuación característica (aquella que nos calcula los autovalores de la energía) vendrá dada por:

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} [(n\pi/a)]^2 - E + \frac{\hbar^2}{2m} 2n\pi\delta/a \right) \left( \frac{\hbar^2}{2m} [(n\pi/a)]^2 - E - \frac{\hbar^2}{2m} 2n\pi\delta/a \right) - |V_G|^2 = 0 \quad (7.2.18)$$

que despejando:

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} [(n\pi/a)]^2 - E \right)^2 = \left( \frac{\hbar^2}{2m} 2n\pi\delta/a \right)^2 + |V_G|^2 \quad (7.2.19)$$

de tal modo que la solución viene dada por:

$$E_{\pm} = \frac{\hbar^2}{2m} [(n\pi/a)^2 + \delta^2] \pm \sqrt{\left( \frac{\hbar^2}{2m} 2n\pi\delta/a \right)^2 + |V_G|^2} \quad (7.2.20)$$

y si  $\delta \ll 1$

$$E_{\pm} = \frac{\hbar^2(n\pi/a)^2}{2m} \pm |V_G| + \frac{\hbar^2\delta^2}{2m} \left[ 1 \pm \frac{\hbar^2(n\pi/a)^2}{m} \frac{1}{|V_G|} \right] \quad (7.2.21)$$

Como podemos ver cerca de la zona de Brillouin el valor de  $E_{\pm}$  depende de  $\delta^2$ , lo que significa que cerca de las bandas prohibidas tenemos espectros parabólicos, como vemos en la imagen 7.5. Esto se parece mucho a la estructura de la primera sección, de tal forma que aparecen bandas energéticas donde existen autoestados válidos, llamadas **bandas permitidas**, y las bandas donde hay gaps de energía y no hay estados posibles para dichas energías, formado las **bandas prohibidas**.

En la siguiente imagen podemos ver cual es la forma de la dispersión de energía en dos esquemas que tenemos que tener muy claro que aportan la misma información, solo que uno lo hace de una manera mucho más compacta. Aunque pueda parecer que la zona reducida (7.6b) nos dice que para cada  $k$  tenemos varios valores posibles de energía, eso no es verdad. Cuando pasamos de una línea inferior a una línea superior estamos sumando al  $\mathbf{k}$  un  $\mathbf{G}$ , en el caso 1D estamos sumando a  $k$  un valor  $\pi/a$ , obteniendo así las diferentes líneas.

Usando el concepto de la *masa efectiva*, que es como recordamos la masa *que tendría que tener nuestra carga* para que se comportaría como un electrón libre, tenemos que los autovalores de la energía las podemos poner (aproximadamente):

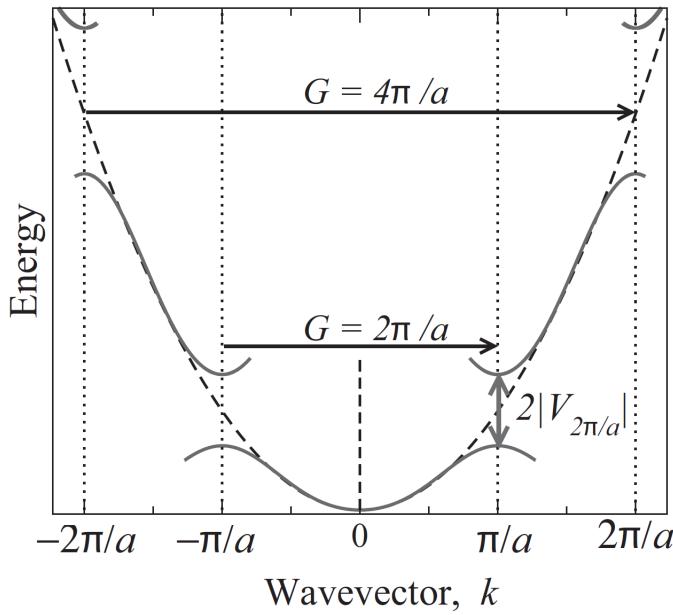


Figura 7.5: Dispersión del momento en la región de casi electrones libres, pudiéndose observar que los momentos cerca de la zona de Brillouin se comportan como paráolas.

$$E_+(G + \delta) = C_+ + \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m_+^*} \quad (7.2.22)$$

$$E_-(G + \delta) = C_- - \frac{\hbar^2 \delta^2}{2m_+^*} \quad (7.2.23)$$

donde la masa efectiva debe venir dada por

$$m_\pm^* = \frac{m}{\left| 1 \pm \frac{\hbar^2(n\pi/a)^2}{m} \frac{1}{|V_G|} \right|} \quad (7.2.24)$$

### 7.2.2. Aproximación a red vacía en 2 y 3 dimensiones

Los principios de la la aproximación a red vacía son muy similares en 2 y 3 dimensiones a los mencionados anteriormente: cerca de la zona de brillouin tenemos que aparece un gap debido a la interacción con un vector de onda separado por un vector de la red recíproca. Esto generará dos estados, uno con más energía y otro con menos energía. Como podemos ver la generalización no es muy complicada, solo que ahora existirá que hay varios posibles  $\mathbf{k}'$  generados por la traslación de un vector de la red recíproca, por lo que la degeneración es múltiple, y la matriz hamiltoniana a diagonalizar tendrá una extensión mayor. Este caso de varios estados con la misma energía lo podemos ver claramente en el caso 2 dimensional de la figura 7.7.

## 7.3. Teorema de Bloch

En el modelo de casi electrones libres o aproximación a red vacía partimos de que las ondas planas son perturbadas débilmente por un potencial periódico. Pero en los materiales reales, la

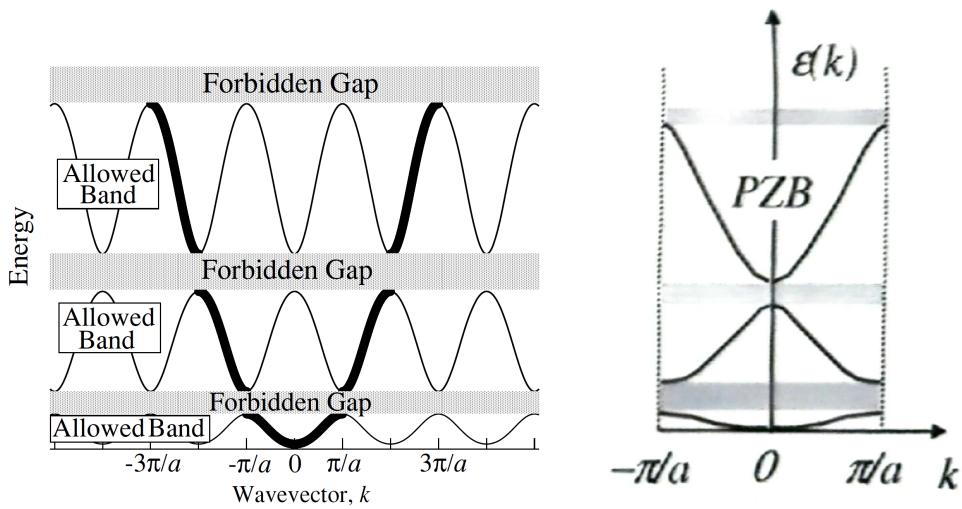


Figura 7.6: Dispersion de la energía en función del momento en el esquema ampliado y reducido.

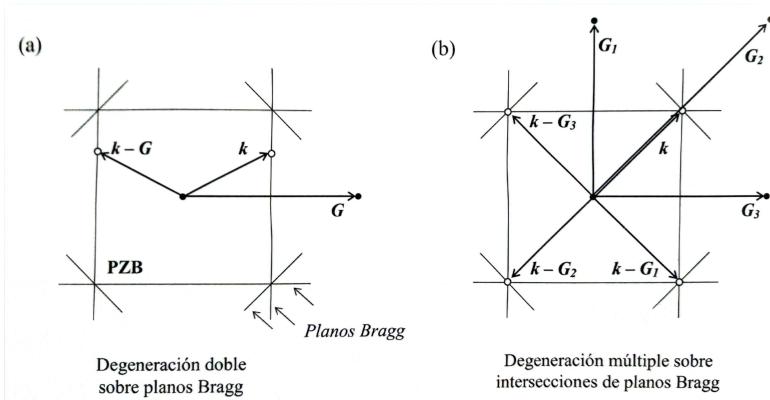


Figura 7.7: (a) Ejemplo de estados doblemente degenerados sobre planos Bragg de una red cuadrada. (b) Estados cuádruplemente degenerados sobre las esquinas de la PZB de una red cuadrada.

interacción entre átomos/electrones puede ser tan fuerte que la teoría de perturbaciones no sea válida. ¿Cómo hacemos entonces para describir el comportamiento de los electrones sin ondas planas? El hecho es que, en realidad, el momento  $\mathbf{k}$  usando en las ondas planas no es una cantidad conservada, mientras que el momento del cristal si lo es. No importa como de fuerte sea el potencial periódico, el momento cristalino es conservado. Este hecho descubierto por Felix Bloch se convirtió en el **teorema de Bloch**:

El **teorema de Bloch** nos dice que un electrón en un potencial periódico se puede describir en términos de las autofunciones de la forma

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\mathbf{r}) \quad (7.3.1)$$

donde  $u_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  es un potencial periódico en la celda unitaria y  $\mathbf{k}$  es el momento cristalino que podemos escogerlo de tal forma que caiga en la primera zona de Brillouin.

En el esquema de zona reducida existirán varios estados posibles con el mismo  $\mathbf{k}$  cada uno denotado por  $\alpha$ . La función periódica  $u$  es usualmente llamada la **función de Bloch** y  $\Psi$  la **función de onda plana modificada**. Como  $u$  es periódico, tenemos que se puede expresar como la suma de ondas planas sobre la red recíproca:

$$u_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \tilde{u}_{\mathbf{G},\mathbf{k}}^{\alpha} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \quad (7.3.2)$$

Esto garantiza que  $u_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  para cualquier *vector de red*. Esta es otra manera de expresar el teorema de Bloch, de tal manera que la suma de ondas planas  $\mathbf{k}$  pueden diferir por un conjunto de vectores recíprocos  $\mathbf{G}$ .

Una de las consecuencias del teorema de Bloch es que aquellas ondas que no estén separadas por un vector de ondas de la red recíproca no son capaces de interaccionar, esto es, que  $\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = 0$  si  $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k} + \mathbf{G}$ , de lo cual se deduce que en realidad la ecuación de Schrödinger

$$\left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (7.3.3)$$

en el espacio de momentos

$$\sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} \Psi_{\mathbf{k}-\mathbf{G}} = \left[ E - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right] \Psi_{\mathbf{k}} \quad (7.3.4)$$

donde  $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$  no es cero si  $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{G}$ . Entonces es claro que tenemos una ecuación de Schrödinger para un conjunto de  $\Psi_{\mathbf{k}-\mathbf{G}}$  que verifique que  $\Psi_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}^{\alpha}(\mathbf{r})$ .

Aunque debe no debería ser sorprendente que los electrones en un potencial periódico se comporten como una combinación lineal de ondas planas en función del momento cristalino, no debemos subestimar la importancia del teorema de Bloch. Este teorema nos dice que incluso cuando el potencial del electrón siente cada átomo de manera muy fuerte, los electrones siguen comportándose como si no sintieran a los átomos, siendo casi electrones libres.

## 7.4. Electrones fuertemente ligados

En esta sección vamos a aproximar el cálculo de las funciones de onda y energías electrónicas en el caso de que los átomos próximos perturben levemente los estados atómicos, enfoque particularmente útil para describir electrones de bandas internas *d* de metales de transición y aislantes. Recomendamos pág. 112-114 John J. Quinn [5].

Consideramos para simplificar una cristal monoatómico, y denotamos por  $\epsilon_n$ ,  $\phi_n$  las energías y autoestados atómicos:  $\mathcal{H}_{\text{at}} \phi_n = \epsilon_n \phi_n$ . La aproximación lineal es probar como solución  $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} C_{\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ , donde la función  $\Phi$  será una combinación lineal de orbitales atómicos degenerados

$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_n b_n \phi_n(\mathbf{r})$ . Debemos exigir que  $\Psi_{\mathbf{k}}$  sea de la forma de Bloch. Esto se cumple si  $C_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ , como es fácil de comprobar, con lo que

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad (7.4.1)$$

Por otro lado el hamiltoniano completo será

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{at}} + \Delta U(\mathbf{r}) \quad (7.4.2)$$

donde  $\Delta U(\mathbf{r})$  se supone sólo apreciable lejos de los iones (figura 7.8).

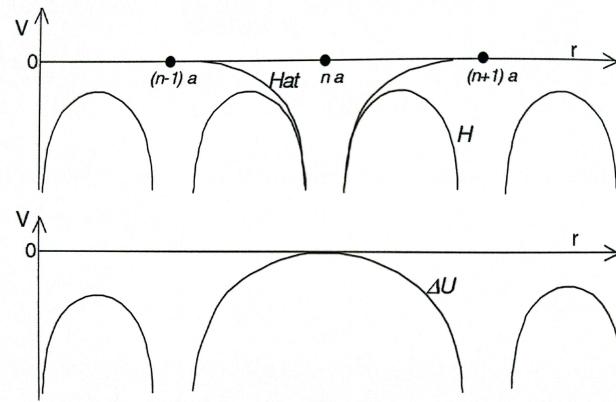


Figura 7.8: Potencial periódico expresado como suma de un potencial atómico más una perturbación.

Utilizando la ecuación de Schrödinger podemos hallar que

$$(\mathcal{H}_{\text{at}} + \Delta U)|\Psi_{\mathbf{k}}\rangle = \varepsilon(\mathbf{k})|\Psi_{\mathbf{k}}\rangle \quad (7.4.3)$$

que multiplicando por  $\langle \psi_s |$

$$\varepsilon_s \langle \phi_s | \Psi_{\mathbf{k}} \rangle + \langle \phi_s | \Delta U | \Psi_{\mathbf{k}} \rangle = \varepsilon(\mathbf{k}) \langle \phi_s | \Psi_{\mathbf{k}} \rangle \quad (7.4.4)$$

y despejando

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_s + \frac{\langle \phi_s | \Delta U | \Psi_{\mathbf{k}} \rangle}{\langle \phi_s | \Psi_{\mathbf{k}} \rangle} \quad (7.4.5)$$

utilizando ahora la ecuación (7.4.1) e introduciendo la simplificación de considerar en  $\phi$  sólo orbitales de tipo  $s$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) &= \varepsilon_s + \frac{\sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \int \phi_s(\mathbf{r}) \Delta U(\mathbf{r}) \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3\mathbf{r}}{\sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \int \phi_s(\mathbf{r}) \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3\mathbf{r}} \\ &= \varepsilon_s - \frac{\beta + \sum_{\mathbf{R} \neq 0} \gamma(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}}{1 + \sum_{\mathbf{R} \neq 0} \alpha(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}} \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

donde hemos usado la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\beta &= - \int d^3\mathbf{r} \Delta U(\mathbf{r}) |\phi_s(\mathbf{r})|^2 \\ \alpha(\mathbf{R}) &= \int d^3\mathbf{r} \phi_s^*(\mathbf{r}) \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \\ \gamma(\mathbf{R}) &= - \int d^3\mathbf{r} \phi_s^*(\mathbf{r}) \Delta U(\mathbf{r}) \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R})\end{aligned}\quad (7.4.7)$$

Teniendo en cuenta que para un nivel  $s$   $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(r)$ , y que para un cristal monoatómico existe simetría de inversión ( $\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$ ) se tiene  $\gamma(\mathbf{R}) = \gamma(R)$ ,  $\alpha(\mathbf{R}) = \alpha(R)$  y  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})$ . Finalmente, despreciando  $\gamma$  y  $\alpha$  salvo para los vecinos más próximos (vmp), resulta:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_s - \frac{\beta + \gamma_{\text{vmp}} \sum_{\text{vmp}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{1 + \alpha_{\text{vmp}} \sum_{\text{vmp}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} \quad (7.4.8)$$

En ocasiones, puede también despreciarse la pequeña contribución de  $\alpha_{\text{vmp}}$  en el denominador, quedando

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_s - \beta - \gamma_{\text{vmp}} \sum_{\text{vmp}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) \quad (7.4.9)$$

El resultado es que cada nivel atómico discreto da lugar a una banda posible de valores de la energía (dependientes de  $\mathbf{k}$ ), cuya anchura está controlada por  $\gamma$ . Es importante que este modelo puede dar lugar a *solapamiento* entre bandas (que para cierto  $\mathbf{k}$  una banda tenga mayores valores de  $\varepsilon$  que la banda inmediatamente superior) incluso en 1D (figura 7.9).

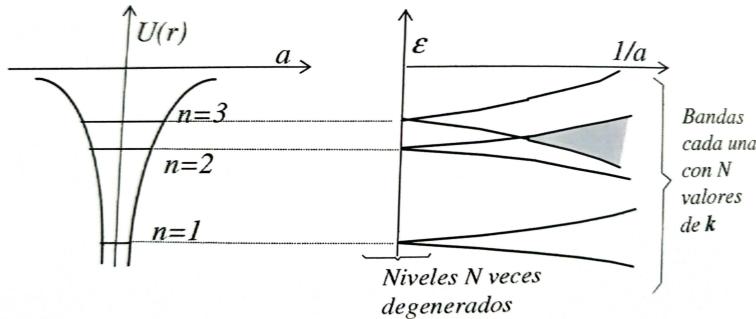


Figura 7.9: Bandas de energía a partir de la aproximación de electrones fuertemente ligados. La zona sombreada representa el solapamiento entre la 1<sup>a</sup> y 2<sup>a</sup> bandas.

## 7.5. Superficie de Fermi y zonas de Briollouin

Una vez conocida la relación de dispersión monoeléctrica  $\varepsilon(\mathbf{k})$ , se estudia a continuación como se ocupan los distintos niveles energéticos con los electrones aportados por el cristal. El concepto de la superficie de Fermi (estudiada en el capítulo anterior) como la superficie en el espacio de fases que separa, a  $T = 0$  K, los estados electrónicos llenos de los vacíos, sigue teniendo sentido. Como se verá, la relación topológica entre la superficie de Fermi y las zonas de Brillouin es determinante para muchas propiedades metálicas.

En la figura 7.10 (a) se encuentran las primeras zonas de Brillouin para la red cuadrada, y la superficie de Fermi en la aproximación de red vacía. En este ejemplo, la primera zona de Brillouin

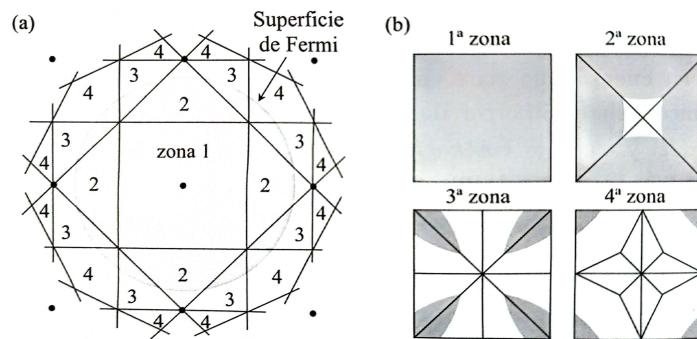


Figura 7.10: 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup> zonas de Brillouin para una red cuadrada 2D, según los esquemas en zona extendida (a) y reducida (b). En gris se representan los estados ocupados.

(PZB) está completamente llena, y la 2<sup>a</sup> (SZB), 3<sup>a</sup> (TZB) y 4<sup>a</sup> (CZB) parcialmente llenas. Se puede hacer una transformación al esquema en zona reducida por las traslaciones en vectores de red y resulta lo que ilustra la figura 7.10 (b) (obsérvese que todas las zonas tienen el mismo volumen fásico). Las regiones grises son las ocupadas por electrones y tienen una energía inferior a la de las regiones blancas. En la figura 7.11 se muestran otros ejemplos de zonas de Brillouin, esta vez para la estructuras *bccy fcc*. Finalmente, en la figura 7.12 se muestra un ejemplo, correspondiente a una estructura *fcc*, de cómo es la relación topológica entre las zonas de Brillouin y la superficie de Fermi para electrones libres, según la valencia de los átomos que componen la estructura.

La forma real de la superficie de Fermi puede determinarse mediante experimentos de magnetoresistencia, efecto pelicular anómalo, resonancia ciclotrón, magnetoacústica y el efecto Haas-van Alphen (oscilación del momento magnético de un metal en función de la intensidad del campo magnético aplicado). Como ya se explicó anteriormente, las superficies de Fermi se ven más deformadas (respecto de las de electrones libres) cerca de las fronteras de zona, de modo que en general las cortas perpendicularmente.

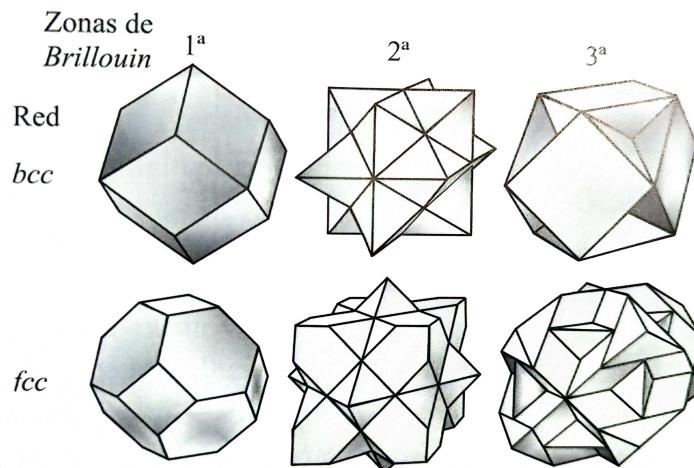


Figura 7.11: Primeras zonas de Brillouin para las estructuras *bccy fcc*, según el esquema en zona reducida.

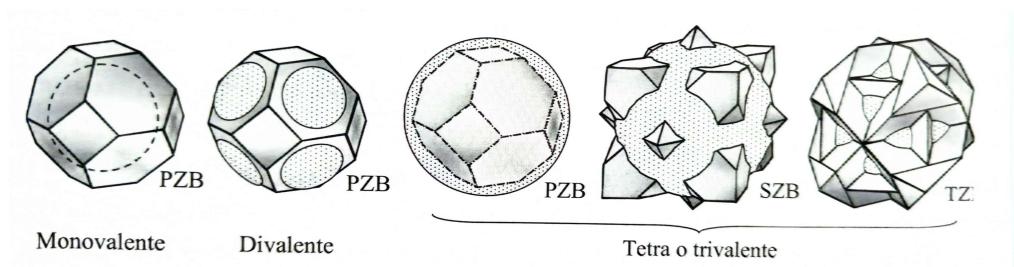


Figura 7.12: Relación entre las primeras zonas de Brillouin de la estructura *fcc* y la superficie de Fermi de electrones libres (esférica), según la valencia atómica.

## 7.6. Metales, aislantes y semiconductores

La importancia del “mapeo” de la superficie de Fermi en las distintas zonas, del que hemos visto algunos ejemplos, viene de lo siguiente. Como se verá en detalle en el siguiente Capítulo 8, debido al gap de energía en las fronteras de zona, las bandas llenas son aislantes, las zonas casi llenas conducen por cargas positivas, y las casi vacías por cargas negativas. Hay que recordar también que, como hemos visto, el número de electrones posibles en una zona o banda es  $2N$  siendo  $N$  el número de celdas primitivas en el cristal. En base a esto caben varias posibilidades: una sustancia con un número *ímpar* de electrones de valencia por celda primitiva será siempre un *metal* (conductor) ya que no puede llenar bandas enteras. Si el número de electrones es *par* es necesario saber si las bandas sucesivas se solapan en energía o no. Si no hay solapamiento será *aislante* y si solapan será un *metal* (o *semimetal* si el solapamiento pequeño). Podría darse también el caso de materiales aislantes con un gap de energía tan pequeña ( $< 1$  eV) que para  $T \neq 0$  K conduzcan por promoción térmica de electrones entre bandas (*semiconductores*). Estas posibilidades se esquematizan en la figura 7.13.

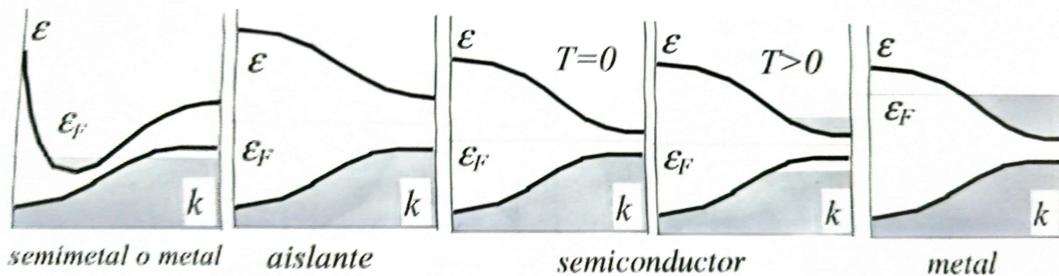


Figura 7.13: Clasificación de los sólidos según la relación que hay entre el nivel de Fermi y la estructura de bandas.

Hacen falta muchos ejemplos, o bien en forma de ejercicios o de manera explícita. Además la relación superficie de fermi y zonas de brillouin, así como la explicación de las zonas extendidas/reducidas deja mucho que desear (en todos los libros). Revisar el [5], quizás haya algo de interés.



## Capítulo 8

# Dinámica semiclásica de electrones de Boch

En este capítulo se estudia el comportamiento de electrones en un cristal frente a campos eléctricos y magnéticos. Para ello se utiliza el formalismo clásico visto en capítulos anteriores, bajo el supuesto de que los campos externos varían suavemente en la escala del paquete de onda. La estructura de bandas de energías  $\varepsilon_n(\mathbf{k})$  se supondrá conocida.

### 8.1. Ecuaciones del movimiento

El paquete de ondas Bloch está constituido por funciones de onda cercanas al vector de onda  $\mathbf{k}$  particular. La velocidad de grupo resulta ser la expresión familiar  $\mathbf{v} = d\omega/d\mathbf{k}$ . Como la frecuencia asociada con una función de energía  $\varepsilon$  es  $\omega = \varepsilon/\hbar$  se tiene para la velocidad  $\mathbf{v}$  del electrón:

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \hbar^{-1} \frac{d\varepsilon(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}} \quad (8.1.1)$$

Los efectos del cristal (potencial-periódico) sobre el movimiento de los electrones se contienen en la relación de dispersión  $\varepsilon(\mathbf{k})$ . En presencia de fuerzas externas las energías electrónica aumentará a una velocidad

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (8.1.2)$$

Pero por otro lado,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (8.1.3)$$

Combinando las dos relaciones anteriores se llega a

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F} \quad (8.1.4)$$

que muestra que  $\hbar\mathbf{k}$  se comporta frente a campos externos como lo hace el impulso de una partícula libre; de ahí el nombre de cuasi-impulso para  $\hbar\mathbf{k}$ . Las ecuaciones (8.1.1) y (8.1.4) constituyen la base del modelo semiclásico. Esta aproximación presupone que el índice de banda  $n$  es una constante del movimiento, es decir, se prohíben las transiciones electrónicas inter-bandas. Como se puede

demostrar (*Ashcroft and Mermin* [6], Apéndice J), esto implica que, si  $E$  y  $B$  son los amplitudes de los campos eléctrico y magnético aplicados y  $\omega$  su frecuencia, se tenga que exigir:

$$\begin{aligned}\hbar\omega &\ll \varepsilon_g \\ eEa &\ll \varepsilon_g^2/\varepsilon_F \\ e\hbar B/m &\ll \varepsilon_g^2/\varepsilon_F\end{aligned}\tag{8.1.5}$$

siendo  $\varepsilon_g$  el gap de energía,  $\varepsilon_F$  la energía de Fermi y  $a$  la constante de red.

## 8.2. Masa efectiva

Vamos a intentar expresar las ecuaciones semicásicas en la forma Fuerza=Masa×Aceleración. Si derivamos (8.1.1) respecto al tiempo:

$$a_i = \dot{v}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i} \right) = \frac{1}{\hbar} \sum_j \frac{\partial}{\partial k_j} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i} \right) \frac{d\varepsilon}{dk_i} = \frac{1}{\hbar^2} \sum_j \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_j \partial k_i} F_j\tag{8.2.1}$$

Si ahora definimos un tensor  $\mathcal{M}^{-1}$  por

$$\left( \mathcal{M}^{-1} \right)_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_j \partial k_i}\tag{8.2.2}$$

tendremos de (8.2.1)

$$\mathbf{a} = \mathcal{M}^{-1} \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathcal{M} \mathbf{a}\tag{8.2.3}$$

donde el tensor simétrico  $\mathcal{M}(\mathbf{k})$  se denomina *tensor de masa*. Aparte de la anisotropía, explícita en su carácter tensorial, es destacable que no es constante, sino que depende de  $\mathbf{k}$  a través de la relación de dispersión  $\varepsilon(\mathbf{k})$ , que a su vez depende del potencial interno cristalino.

El concepto de masa cristalina se simplifica cuando se trata con electrones y huecos en los extremos de las bandas (figura 8.1), como es el caso de los semiconductores (capítulo 9). Si  $\mathbf{k}_0$  es el vector de onda asociado al extremo de una banda, podemos aproximar la energía en torno a  $\mathbf{k}_0$  según:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}_0) + \sum_{i,j} (k_i - k_{0i}) \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} (k_j - k_{0j})\tag{8.2.4}$$

Por tanto la masa tensorial para un electrón que se mueve en las proximidades de  $\mathbf{k}_0$  será:

$$\left( \mathcal{M}^{-1} \right)_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} = \text{cte}\tag{8.2.5}$$

y se habla entonces de *masa efectiva*, denotada generalmente por  $m^*$ . En consecuencia, para semiconductores, para pasar de electrones libres a electrones de Bloch basta hacer la correspondencia  $m \rightarrow m^*$ , anisotropía aparte. Una simplificación adicional viene del carácter simétrico del tensor  $m^*$  pues cabe tomar el sistema coordenado de modo que

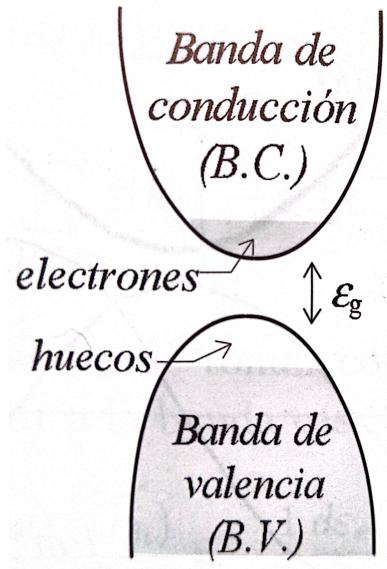


Figura 8.1: Representación de los estados ocupados por electrones (en el fondo de la banda de conducción) y por huecos (en el techo de la banda de valencia) en un semiconductor.

$$(m^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/m_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_3^* \end{pmatrix} \Rightarrow (m^*) = \begin{pmatrix} m_1^* & 0 & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* \end{pmatrix} \quad (8.2.6)$$

y toda la dinámica del electrón en el externo de la banda viene controlada por tres masas efectivas  $m_1^*, m_2^*, m_3^*$ . La energía en (8.2.4) se expresa entonces por

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k}_0) + \frac{\hbar^2(k_1 - k_{01})^2}{2m_1^*} + \frac{\hbar^2(k_2 - k_{02})^2}{2m_2^*} + \frac{\hbar^2(k_3 - k_{03})^2}{2m_3^*} \quad (8.2.7)$$

y entonces se ve que las superficies de energía  $\epsilon = \text{cte}$  son elipsoides de semiejes:

$$\frac{\sqrt{2m_1^*[\epsilon - \epsilon(\mathbf{k}_0)]}}{\hbar} \quad \frac{\sqrt{2m_2^*[\epsilon - \epsilon(\mathbf{k}_0)]}}{\hbar} \quad \frac{\sqrt{2m_3^*[\epsilon - \epsilon(\mathbf{k}_0)]}}{\hbar} \quad (8.2.8)$$

### 8.3. Movimiento en campos electricos. Concepto de hueco.

Un importante resultado es que la densidad de corriente eléctrica de una banda llena es nula en presencias de campos externos. Por definición

$$\mathbf{j} \equiv -e \sum_i \mathbf{v}_i = -e\hbar^{-1} \sum_i \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{k}}$$

donde la suma es toda la PZB por la condición de banda llena. Como  $\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon(-\mathbf{k})$ , se tiene que  $\partial \epsilon / \partial \mathbf{k}|_{\mathbf{k}} = -\partial \epsilon / \partial \mathbf{k}|_{-\mathbf{k}}$ , y los términos del anterior sumatorio se anulan por parejas  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  ya que la PZB tiene simetría de inversión. El resultado anterior implica que hay tantos electrones que se mueven en la dirección  $-\mathbf{E}$ , como es de esperar para una carga negativa, como en la dirección  $+\mathbf{E}$ , como correspondería a una carga positiva. Para comprender este comportamiento consideremos la evolución de un solo electrón bajo efecto de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  uniforme. La integración de (8.1.4) es inmediata y da

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(0) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} t \quad (8.3.1)$$

Si hacemos un esquema unidimensional, como se ilustra en la figura 8.2, deducimos que el movimiento del electrón en  $\mathbf{k}$  es periódico (y también lo es en el espacio real, pues si  $\varepsilon$  es periódico también lo es  $\mathbf{v} \propto \partial\varepsilon/\partial\mathbf{k}$  y por tanto la posición). Conforme el electrón se acerca a la frontera de zona presenta un comportamiento anómalo asociado a su masa efectiva *negativa* en esa región. En realidad este comportamiento no es observable debido a las colisiones, que mantienen al electrón alrededor del fondo de la banda, donde el comportamiento es “normal”. Naturalmente, el comportamiento del electrón a la combinación Fuerzas externas+Potencial cristalino es completamente normal.

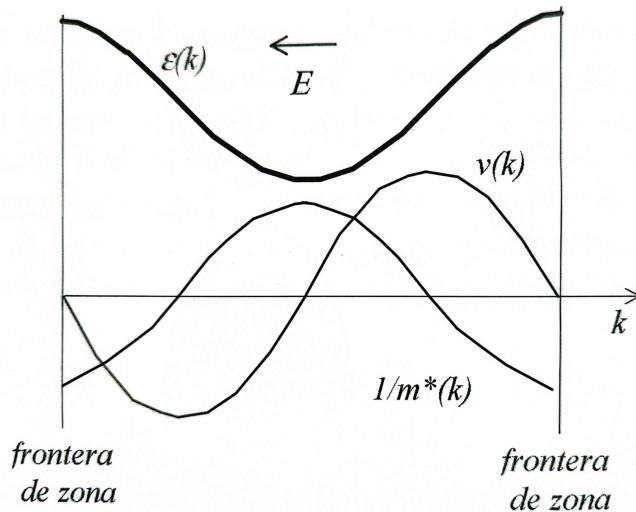


Figura 8.2: Energía, masa efectiva y velocidad de un electrón según su posición en la PZB. Nótense los estados “anómalos” (con masa efectiva negativa) cerca de las fronteras de zona.

A diferencia del ejemplo anterior, los estados “anómalos” son observables en la situación de una banda casi llena. Para simplificar consideremos una banda con un solo estado electrónico vacante respecto con el vector de onda  $\mathbf{k}_e$ , en cuyo caso diremos que existe un *hueco*. Veamos la respuesta global de la banda frente a campos eléctricos. Denotaremos con subíndice  $h$  las magnitudes de banda, y con  $e$  las del estado electrónico ausente. Respecto al vector de onda que asociar a la banda:

$$\mathbf{k}_h \equiv \left( \sum_{PZB} \mathbf{k} \right) - \mathbf{k}_e = -\mathbf{k}_e \quad (8.3.2)$$

pues  $(\sum_{PZB} \mathbf{k}) = 0$  por simetría de la PZB. En lo que respecta a la energía

$$\varepsilon_h(\mathbf{k}_h) \equiv \left[ \sum_{PZB} \varepsilon(\mathbf{k}) \right] - \varepsilon_e(\mathbf{k}_e) = -\varepsilon_e(\mathbf{k}_e) \quad (8.3.3)$$

pues la constante  $\sum_{PZB} \varepsilon(\mathbf{k})$  se puede tomar como cero. A partir de  $\mathbf{k}_h$  y  $\varepsilon_h$  la velocidad  $\mathbf{v}_h$  que se debe asociar a la banda casi llena es

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{k}_h) \equiv \frac{1}{\hbar} \frac{d\varepsilon_h(\mathbf{k}_h)}{d\mathbf{k}_h} = -\frac{1}{\hbar} \frac{d\varepsilon_e(\mathbf{k}_e)}{d(-\mathbf{k}_e)} = \mathbf{v}_e(\mathbf{k}_e) \quad (8.3.4)$$

En cuanto masa efectiva

$$m_h^{-1} \equiv \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\varepsilon_h(\mathbf{k}_h)}{d\mathbf{k}_h^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2\varepsilon_e(\mathbf{k}_e)}{d(-\mathbf{k}_e)^2} = -m_e^{-1}(\mathbf{k}_e) \quad (8.3.5)$$

de donde se deduce que la masa efectiva del hueco es positiva, por tratarse de un estado electrónica cerca del techo de la banda, donde  $1/m_e \propto d^2\varepsilon_e/d\mathbf{k}_e < 0$ . Si aplicamos ahora la ecuación dinámica (8.1.4) al electrón ausente  $\hbar d\mathbf{k}_e/dt = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B})$ , al sustituir  $\mathbf{k}_e$  por  $-\mathbf{k}_h$  y  $\mathbf{v}_e$  por  $\mathbf{v}_h$  obtenemos:

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}_h}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_h \times \mathbf{B}) \quad (8.3.6)$$

de donde se ve que un hueco se comporta como una partícula de carga eléctrica *positiva* con masa positiva. Finalmente, la conductividad eléctrica de una banda parcialmente llena viene dada por

$$\sigma = \frac{e^2\tau}{V} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{M}^{-1}(\mathbf{k}) \quad (8.3.7)$$

donde la suma se extiende a todos los estados ocupadas en la banda. Esta expresión es una generalización vista en el Capítulo 7 para  $e^-$  libres. En efecto, para electrones libres  $\mathcal{M}^{-1}(\mathbf{k}) = m^{-1}$ , con lo que  $\sigma = e^2\tau N/Vm = ne^2\tau/m$ .

## 8.4. Movimiento en campos magnéticos.

Bajo un campo magnético la fuerza que actúa sobre los portadores  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , por ser perpendicular a  $\mathbf{v}$ , conserva la energía electrónica:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \varepsilon(\mathbf{k}) = \text{cte} \quad (8.4.1)$$

Otra ley de conservación se deduce de la ecuación dinámica

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

En efecto, descomponiendo  $\mathbf{k}$  en sus componentes paralela y perpendicular a  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\perp} + \mathbf{k}_{\parallel}$ ) se tendrá  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\parallel} = 0$ , de donde  $\mathbf{k}_{\parallel} = \text{cte}$ . Por tanto, en un campo magnético los electrones se mueven a lo largo de las curvas de intersección de las superficies de energía constante con planos perpendiculares al campo magnético aplicado (ver Fig. 8.3)

Veamos ahora cómo son las órbitas en el espacio real. La proyección de  $\hbar d\mathbf{k}/dt = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  en la dirección perpendicular a  $\mathbf{B}$  da:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hbar \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{dt} = -e\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) = -eB\mathbf{v}_{\perp} \quad (8.4.2)$$

Como  $d\mathbf{r}_{\perp}/dt = \mathbf{v}_{\perp}$ , la ecuación anterior se integra fácilmente para dar

$$\mathbf{r}_{\perp}(t) = \mathbf{r}_{\perp}(0) - \frac{\hbar}{eB} [\mathbf{k}_{\perp}(t) - \mathbf{k}_{\perp}(0)] \quad (8.4.3)$$

cuya interpretación es que la proyección perpendicular a  $\mathbf{B}$  de la órbita en el espacio real no es sino la órbita en el espacio  $\mathbf{k}$  girada  $\pi/2$  alrededor de la dirección de  $\mathbf{B}$  y escalada en el factor  $-\hbar/eB$ . Por su parte, la velocidad paralela al campo vendrá dada por  $\mathbf{v}_{\parallel} = \hbar^{-1}d\varepsilon/d\mathbf{k}_{\parallel}$ , que no tiene por qué ser constante.

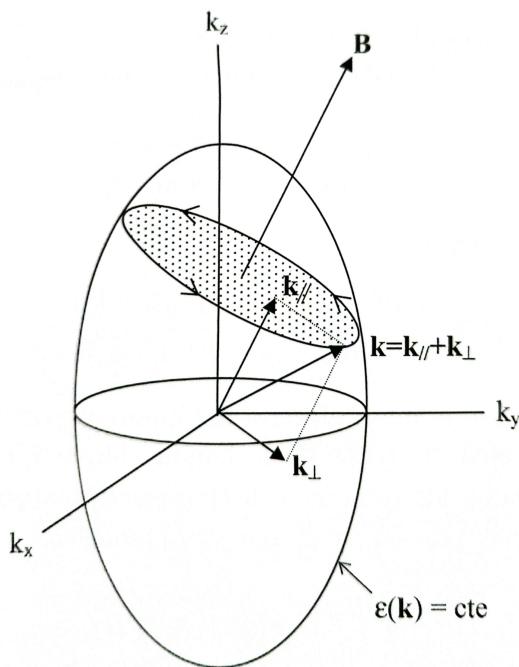


Figura 8.3: Movimiento de un electrón en el espacio de fases bajo influencia de un campo magnético.

Hay, como ilustra la figura 8.4 en un ejemplo 2D, órbitas *tipo electrón* y *tipo hueco* que difieren por el sentido de recorrido, pues la velocidad es opuesta al serlo el gradiente de energía (aunque en ambos casos son electrones los que describen las órbitas). Como regla general, las órbitas que encierran estados desocupados son tipo huevo, y las que encierran estados ocupados son de tipo electrónico.

#### 8.4.1. Resonancias ciclotrón: determinación experimental de masas efectivas.

Las órbitas (cerradas) electrónicas naturalmente periódica con período (pag. 231 *Ashcroft and Mermin* [6])

$$T(\varepsilon, k_{\parallel}) = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (A(\varepsilon, k_{\parallel})) \quad (8.4.4)$$

siendo  $A(\varepsilon, k_{\parallel})$  el área encerrada por la órbita (en el espacio de fases). Este período es una propiedad de toda la órbita, no de un estado electrónico particular. La frecuencia  $\omega_c(\varepsilon, k_{\parallel}) = 2\pi/T(\varepsilon, k_{\parallel})$  se denomina *frecuencia ciclotrón*, y es una generalización de la frecuencia ciclotrón del electrón libre ( $\omega_c = eB/m$ ). Por comparación con esta última expresión, se introduce

$$m^*(\varepsilon, k_{\parallel}) = \frac{eB}{\omega_c(\varepsilon, k_{\parallel})} = \frac{\hbar^2}{2\pi} (A(\varepsilon, k_{\parallel})) \varepsilon \quad (8.4.5)$$

que se conoce como *masa efectiva ciclotrónica*, cuyo valor depende de la masa efectiva (vista anteriormente, y con la que no debe de confundirse, pues la masa efectiva ciclotrónica es una propiedad de toda la órbita y no de un estado individual).

Para estados cerca de los extremos de bandas, de interés en los semiconductores, es fácil demostrar que  $\omega_c$  puede expresarse por

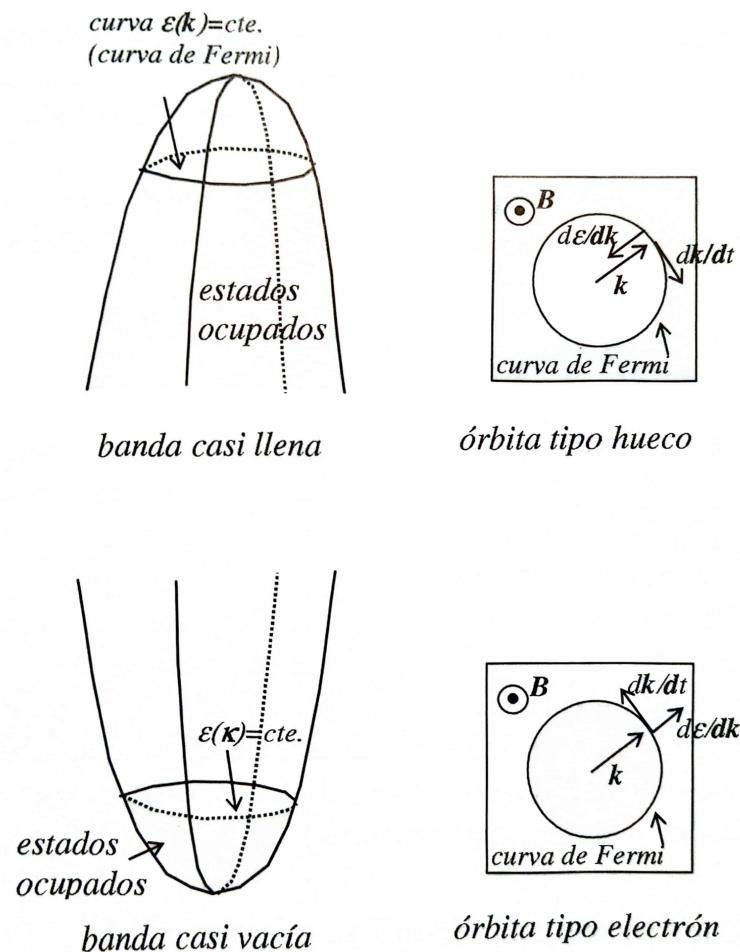


Figura 8.4: Órbitas en el espacio de fases de electrones y de huecos bajo la influencia de un campo magnético.

$$\omega_c = e \left( \frac{B_1^2 m_1^* + B_2^2 m_2^* + B_3^2 m_3^*}{m_1^* m_2^* m_3^*} \right)^{1/2} \quad (8.4.6)$$

donde las  $B_i$  son las componentes de  $\mathbf{B}$  a lo largo de los ejes principales del elipsoide  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \text{cte}$ , y  $m_1^*, m_2^*, m_3^*$  las correspondientes componentes del tensor de masa efectiva. La ecuación (??) permite acceder experimentalmente a las masas efectivas de los electrones y huecos en semiconductores. La determinación experimental de  $\omega_c$  se realiza por resonancia con un campo electromagnético de frecuencia adecuada. En concreto se detectan los máximos de absorción de una onda electromagnética polarizada circularmente aplicada en la dirección de un campo magnético externo estático y homogéneo (el único requisito es que las colisiones no impidan observar el efecto, esto es, que se cumpla  $\omega_c \tau > 1$  lo que exige trabajar a bajas temperaturas).

#### 8.4.2. Magnetoresistividad y efecto Hall

En campos magnéticos débiles ( $\omega_c \tau \ll 1$ ) de forma que el electrón sólo recorre una pequeña parte de su órbita cerrada entre colisiones, la resistencia crece proporcionalmente al cuadrado del campo magnético. Esto es de esperar ya que, en primer lugar, la magnetoresistividad  $\rho(\mathbf{B}) -$

$\rho(0)$  debe ser siempre positiva pues el campo magnético siempre dificultará en alguna medida el movimiento longitudinal de los portadores. Esto descarta la dependencia lineal  $\mathbf{B}$ , que implica un cambio de signo en la magnetoresistividad al cambiar  $\mathbf{B}$  de signo, de modo que  $\rho(\mathbf{B})$  debe depender cuadráticamente de  $\mathbf{B}$ .

Para ver el comportamiento de la magnetoresistividad como del efecto Hall debe estudiarse el transporte de corriente bajo campo eléctrico y magnético aplicados simultáneamente. En presencia de campos  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , la densidad de corriente se puede escribir como

$$\mathbf{j} = \sigma_E \mathbf{E} + \sigma_B (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) \quad (8.4.7)$$

donde tanto  $\sigma_E$  como  $\sigma_B$  son escalares que dependen de la concentración de portadores, de su masa efectiva, de su tiempo de relajación y del campo magnético. Considerando  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  y  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  la ecuación (8.4.7) puede escribirse como

$$\mathbf{j} = \sigma(B) \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \sigma_E & -B\sigma_B & 0 \\ B\sigma_B & \sigma_E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E} \quad (8.4.8)$$

en régimen estacionario ( $j_y = 0$ ) se obtiene, respectivamente, para la Magnetoresistividad y el coeficiente Hall

$$\rho = \frac{E_z}{j_x} = \frac{\sigma_E}{\sigma_E^2 + \sigma_B^2 B^2} \quad R = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{-\sigma_B}{\sigma_E^2 + \sigma_B^2 B^2} \quad (8.4.9)$$

Para la aproximación más simple, es decir, electrones *cuasilibres*:

$$\sigma_E = \frac{ne^2\tau/m^*}{1 + (\omega_c\tau)^2} \quad \omega_B = \frac{e\tau}{m^*}\sigma_E \quad (\omega_c = eB/m^*)$$

con lo cual

$$\rho = \frac{m^*}{ne^2\tau} = \rho(0) \quad R = -\frac{1}{ne} \quad (8.4.10)$$

En el caso de existir varios portadores, incluso la aproximación más simple, es decir,  $\rho(\mathbf{B}) = \rho_i(0)$  para cada uno de los portadores  $i$ , sí se obtendría una magnetoresistividad global.

Suponiendo que las superficies equienergéticas (en particular la de Fermi) son esferas *ligeramente* deformadas, se puede aproximar

$$\sigma(B) \approx \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 1 - 5(\omega_c\tau)^2 & -2\omega_c\tau & 0 \\ 2\omega_c\tau & 1 - 5(\omega_c\tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.4.11)$$

con lo cual (en régimen estacionario)

$$\rho(B) \approx \rho(0) [1 + (\omega_c\tau)^2] \Rightarrow \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)} \propto B^2 \quad (8.4.12)$$

Para el coeficiente Hall se obtendría

$$R \approx -\frac{1}{ne} [1 + 3(\omega_c\tau)^2] \quad (8.4.13)$$

Obsérvese que para  $B \rightarrow 0$  se reencuentran los resultados del electrón libre. En campos magnéticos intensos ( $\omega_c\tau \gg 1$ ) la magnetorresistividad presenta una gran variedad de comportamientos dependiendo de la topología de la superficie de Fermi: puede saturar para todas las direcciones de  $\mathbf{B}$ , solo para algunas puede crecer indefinidamente con el campo implica la existencia de órbitas *abiertas*.

En cuanto al coeficiente Hall, a campos altos resulta válida la expresión de electrones libres, sólo que la concentración de electrones  $n_e$  se sustituyen por la concentración neta de portadores ( $n_e - n_h$ ) siendo  $n_h$  la concentración de huecos, es decir

$$R_H = -\frac{1}{e(n_e - n_h)} \quad (8.4.14)$$

en el caso de que  $n_e = n_e h$  (los llamados *metales compensados*) la expresión anterior no es válida-



## Capítulo 9

# Cristales semiconductores

Como ya se describió en capítulos anteriores, un semiconductor no es sino un aislante (a  $T = 0\text{K}$ ) pero con un gap de energía suficientemente pequeño ( $\varepsilon_g < 1\text{ eV}$ ) como para que, digamos a temperatura ambiente, una proporción apreciable de la banda de valencia (B.V.) pasan a ocupar la banda de conducción (B.C.). Estos electrones térmicamente excitados y los huecos que dejan de la B.V. pueden transportar corriente eléctrica (figura 9.1).

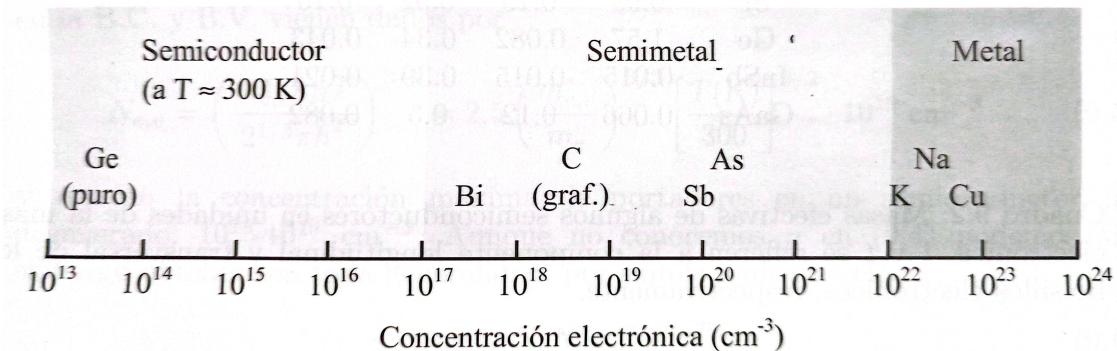


Figura 9.1: Concentración de portadores para algunos metales, semimetales y semiconductores.

Una propiedad especial de los semiconductores, que no se encuentra en metales, es que su conductividad eléctrica se puede alterar en muchos órdenes de magnitud añadiendo pequeñas cantidades de otros elementos, que se denominan genéricamente *impurezas*. Éstas determinan el carácter electrón o hueco de la conducción. Toda la electrónica de estado sólido (transistores, conmutadores diodos, células fotovoltaicas, etc.) descansa en esta propiedad conocida como *dopado*.

Los semiconductores son generalmente cristales de enlace covalente. Los más comunes son los del grupo IV y los compuestos de los grupos III-V. El gap de energía  $\varepsilon_g$  de algunos materiales se muestra en la tabla 9.1. Obsérvese la suave dependencia de  $\varepsilon_g$  con la temperatura, debida en parte a la variación del espacio atómico (dilatación).

Otro parámetro fundamental es la masa efectiva, algunos de cuyos valores numéricos se muestran en la tabla 9.2. Hay dos masas de huecos porque en estos semiconductores hay dos bandas de valencia degeneradas (los máximos coinciden), pero que tienen distinta curvatura y, por tanto, distintas masas efectivas:

Cristal	$\varepsilon_g$ (0 K)	$\varepsilon_g$ (300 K)
Si	1.17	1.12
Ge	0.75	0.6
InSb	0.23	0.17
GaAs	1.52	1.43
Te	0.33	-
SiC	43.0	-
C (dia)	5.5	5.5

Tabla 9.1: Gap de energía para algunos materiales semiconductores.

Cristal	$m_l$	$m_t$	$m_h$	$m'_h$
Si	0.98	0.19	0.52	0.16
Ge	1.57	0.082	0.34	0.043
InSb	0.015	0.015	0.39	0.021
GaAs	0.066	0.12	0.5	0.082

Tabla 9.2: Masas efectivas de algunos semiconductores en unidades de la asa electrónica.  $l$  y  $t$  se refieren a la componente longitudinal y transversal de los bolsillos electrónicos, respectivamente.

## 9.1. Concentración de portadores en equilibrio térmico

Una propiedad fundamental de un semiconductor a temperatura  $T$  es la concentración electrónica  $n$  en la B.C. y la de los huecos  $p$  en la B.V. Si denotamos por  $D_c(\varepsilon)$  y  $D_v(\varepsilon)$  las correspondientes densidades de estados por unidad de volumen, tendremos:

$$\begin{aligned} n &= \int_{\varepsilon_c}^{\infty} D_c(\varepsilon) f_{FD}(\varepsilon, T) d\varepsilon \\ p &= \int_{-\infty}^{\varepsilon_v} D_v(\varepsilon) [1 - f_{FD}(\varepsilon, T)] d\varepsilon \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

En la aproximación parabólica ( $m^* = \text{cte}$ ) la densidad de estados es una generalización directa de la obtenida para electrones libres. En concreto se encuentra

$$D_{c,v}(\varepsilon) = \sqrt{2|\varepsilon - \varepsilon_{c,v}|} \frac{m_{c,v}^{*3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \quad (9.1.2)$$

siendo  $m_{c,v}^* = (m_1^* m_2^* m_3^*)^{1/3}$  la masa efectiva media geométrica de los valores principales del tensor de masa efectiva de la B.C. y B.V. respectivamente. En todo lo que sigue adoptaremos como válidas las condiciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c - \mu &\gg k_B T \\ \mu - \varepsilon_v &\gg k_B T \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

en cuyo caso se dice no degenerado y se puede aplicar la estadística de Maxwell-Boltzmann en vez de la de Fermi-Dirac. En estas condiciones las ecuaciones (9.1.1) se reducen a:

$$\begin{aligned} n &= N_c(T) e^{-\frac{\varepsilon_c - \mu}{k_B T}} \\ n &= N_v(T) e^{-\frac{\mu - \varepsilon_v}{k_B T}} \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

donde los prefactores  $N_c$  y  $N_v$ , a veces denominadas desidades efectivas de estados de la B.C. y B.V. vienen dados por

$$N_{c,v} = \left( \frac{m_{c,v}^* k_B T}{2^{1/3} \pi \hbar^2} \right)^{3/2} = 2.5 \left( \frac{m_{c,v}^*}{m_e} \right)^{3/2} \left[ \frac{T(\text{K})}{300} \right]^{3/2} \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3} \quad (9.1.5)$$

y marcan la concentración máxima de portadores en un semiconductor no degenerado:  $10^{18}$ – $10^{19} \text{cm}^{-3}$ . Aunque no conocemos  $\mu$  en (9.1.4) podemos sin embargo obtener con toda generalidad, por simple multiplicación

$$np = N_c N_v e^{-\varepsilon_g / k_B T} \quad (9.1.6)$$

que se conoce como *ley de acción de masas*, y donde ya no interviene  $\mu$ . En el caso de un semiconductor *intrínseco*, que es aquél donde las impurezas no tienen influencia relevante (por ejemplo porque su número es despreciable), deberá ocurrir que  $n = p = n_i$ , lo que permite obtener de (9.1.4) y (9.1.6)

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\varepsilon_g / 2k_B T} \quad (9.1.7)$$

Por ejemplo,  $n_i(300\text{K}) \approx 10^{10} \text{cm}^{-3}$  en el Si. Asimismo, se obtiene

$$\mu = \varepsilon_v + \frac{1}{2}\varepsilon_g + \frac{3}{4}k_B T \ln \left( \frac{m_v^+}{m_c^+} \right) \quad (9.1.8)$$

de modo que  $\mu$  está situado aproximadamente en la mitad del gap. La figura 9.2 ilustra algunas de las relaciones encontradas.

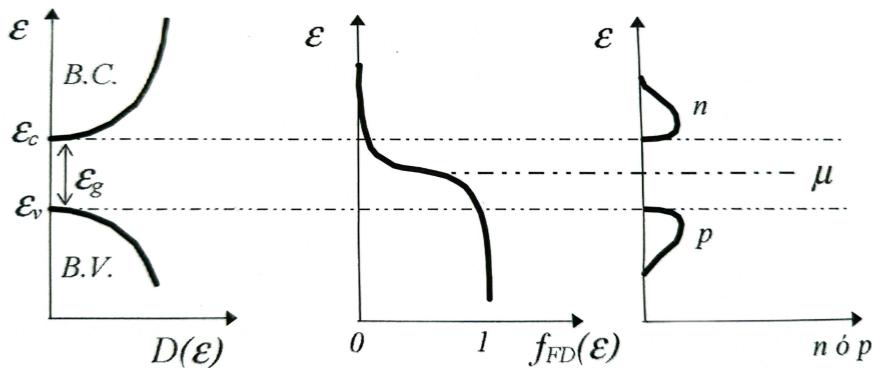


Figura 9.2: Densidad de estados, ocupación de estados, y concentración de huecos y electrones para un semiconductor intrínseco.

## 9.2. Semiconductores dopados

La manera de incrementar y controlar los portadores de carga en un semiconductor es dopándolo, esto es, añadiendo sustitucionalmente ciertas impurezas eléctricamente activas. Las impuras que aportan electrones (huecos) son normalmente elementos del grupo V (III) que se llaman dadoras (aceptores) y entonces el semiconductor se dice de tipo *n* (tipo *p*). Supongamos por concretar un semiconductor del grupo IV, como el Ge, dopado con impurezas dadoras repartidas aleatoriamente en el cristal. Cada una se puede considerar un centro de carga  $+e$  al que está ligado un electrón, ya

que los otros cuatro están ya ocupados formando los cuatro enlaces covalentes de la estructura del diamante. La energía necesaria para ionizar la impureza, pasando entonces el electrón del estado ligado localizado al estado libre deslocalizado (es decir, a la B.C.), es relativamente baja. Esto se debe a que el electrón en exceso ve un potencial periódico además de un centro de carga atractora  $+e$ , lo que significaba pasar de  $m$  a  $m^*$ . Pero además, el electrón está en un medio dieléctrico (polarizable) que es el propio semiconductor, lo que implica pasar de  $e^2$  a  $e^2/\kappa$  siendo  $\kappa$  la permitividad eléctrica relativa del medio, por ejemplo  $\kappa(\text{Ge}) = 15.8$ ,  $\kappa(\text{Si}) = 11.7$ . Cuantitativamente se procede utilizando las fórmulas del átomo de hidrógeno. Así el radio de la primera órbita de Bohr  $a_0 = \hbar^2/2me^2 = 0.53 \text{ \AA}$  pasa a ser

$$a_d = \frac{m}{m^*} \kappa a_0 \quad (9.2.1)$$

y la energía de ionización  $\epsilon_0 = me^4/2\hbar^2 = 13.6 \text{ eV}$  queda en

$$\epsilon_d = \frac{m^*}{m} \frac{1}{\kappa^2} \epsilon_0 \quad (9.2.2)$$

Para valores típicos de  $m^*$  y  $\kappa$ ,  $a_d$  puede ser  $10^2 \text{ \AA}$  o más, y  $\epsilon_d$  puede quedar en  $0.01 - 0.1 \text{ eV}$ . Argumentos similares se pueden desarrollar para las impurezas acceptoras, que se ionizan fácilmente (energía de ionización  $\epsilon_a$ ) captando un electrón de la B.V. Este electrón que ahora está localizado deja un hueco “libre” en la B.V. que contribuye a la conducción. Las impurezas dadoras generan un nuevo nivel energético ( $\epsilon_D$ ) situado una energía  $\epsilon_d$  por debajo de la banda de conducción, y las acceptoras generan otro nivel ( $\epsilon_A$ ) situado una energía  $\epsilon_a$  por encima de la banda de valencia (ver figura 9.3).

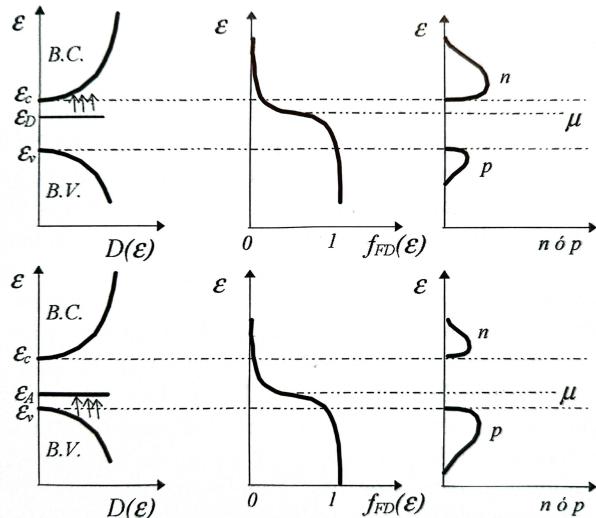


Figura 9.3: Densidad de estados, ocupación de estados, y concentración de huecos y electrones para semiconductores con impurezas dadoras (arriba), o acceptoras (abajo).

La información fundamental respecto a los niveles de asociados a las impurezas es su grado de ocupación a una temperatura determinada. En el caso de impurezas acceptoras esta coincidirá con la impurezas ionizadas (que han captado un electrón de la banda de valencia). Utilizando la mecánica estadística es fácil comprobar que a una temperatura determinada la concentración de impurezas acceptoras ionizadas viene dada por

$$N_A^- = \frac{N_A}{1 + 2e^{(\epsilon_A - \mu)/k_B T}} \quad (9.2.3)$$

donde  $N_A$  es la concentración total de impurezas aceptoras. Nótese la similitud de esta expresión con la distribución de Fermi-Dirac (la diferencia es debida a que la repulsión entre  $e^-$  localizados hace muy improbable la ocupación de la impureza con dos electrones simultáneamente). En el caso de impurezas dadoras, la proporción de impurezas ionizadas (que han donado un  $e^-$  a la banda de conducción) coincidirá con el grado de *desocupación* de los niveles asociados. De manera análoga, se encuentra que la concentración de dichas impurezas ionizadas a una temperatura dada viene dada por

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2e^{(\mu - \varepsilon_D)/k_B T}} \quad (9.2.4)$$

donde ahora  $N_D$  es la concentración total de impurezas dadoras.

### 9.3. Concentración de portadores en Semiconductores dopados

La cercanía de los niveles dadores y aceptoras a las bandas hace esperar en un semiconductor dopado, por ejemplo tipo  $n$ , esa mucho más probable la promoción de electrones a la B.C. desde los niveles dadores que desde la B.V. Dicho de otro modo, la concentración de portadores estará controlada por las impururas; el semiconductor se dice entonces en *régimen de ionización*. Una vez todas las impurezas dadoras están ionizadas (esto ocurre a partir de la llamada *temperatura de saturación*,  $T_s \leq 100$  K) se entra en el *régimen de saturación*, en que  $n \approx N_D$  y por tanto independientes de la temperatura (numéricamente  $10^{14} < N_D < 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ). Los electrones se dicen en este caso portadores mayoritarios y correspondientes, por la ley de acción de masas, los huecos son minoritarios. Al aumentar la temperatura deberá ocurrir que el número de electrones procedentes de la B.V. supere el debido a las impurezas, de modo que  $n \gg N_D$  entrándose entonces en el *régimen intrínseco*, en que la presencia de impurezas resulte irrelevante y  $n \approx n_i$ . La temperatura a partir de la cual se entra en este régimen se conoce como *temperatura intrínseca*,  $T_i$ . Argumentos similares, aunque complementarios, se pueden aducir para semiconductores tipo  $p$ . La figura 9.3, ilustra el efecto de las impurezas.

El estudio Cuantitativamente parte de las expresiones (9.1.1) para la concentración de portadores en las bandas que, por la generalidad de su obtención, siguen siendo válidas en presencia de impurezas. No obstante, desconocemos el potencial químico, pues la expresión (9.1.8) vista no es ahora válida, ya que al haber aporte extra de electrones y/o huecos ya no se verifica la condición  $n = p$ . La generalización de esta condición en presencia de impurezas es

$$n + N_A^- = p + N_D^+ \quad (9.3.1)$$

llamado condición de *electroneutralidad*. La utilización consiste en sustituir (9.1.1), (9.2.3) y (9.2.4) en (9.3.1) con objeto de delimitar  $\mu$  y llevárselo luego a (9.1.1) para conocer la concentración de portadores a cualquier temperatura. Cualitativamente la evolución de  $n$  en función de la temperatura para un semiconductor tipo  $n$  es el que ilustra la figura 9.4.

### 9.4. Conductividad y movilidad

Consideraremos sólo semiconductores no degradados, es decir, aquéllos para los que la aproximación de Boltzmann (9.1.3) es válida. Las contribuciones a la conductividad eléctrica debidas a electrones en la B.C. y a huecos en la B.V. se expresan por

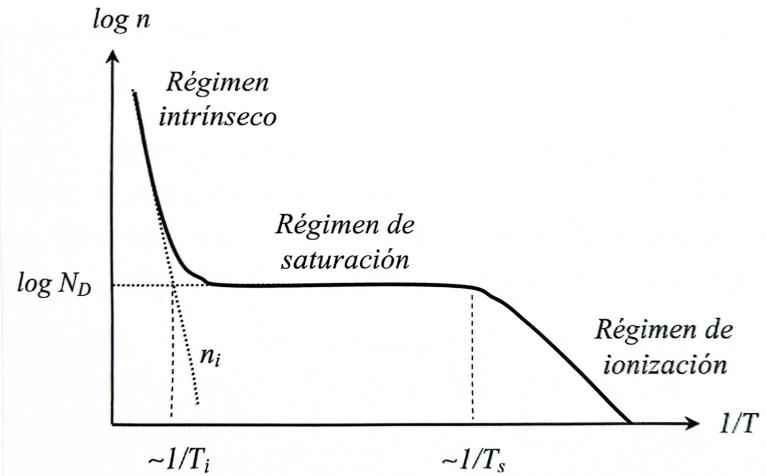


Figura 9.4: Dependencia con la temperatura de la concentración de portadores en un semiconductor dopado con impurezas dadoras.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{ne^2\bar{\tau}_e}{m_c^*} \\ \sigma_p &= \frac{pe^2\bar{\tau}_h}{m_v^*}\end{aligned}\quad (9.4.1)$$

y la conductividad eléctrica total vendrá dada por  $\sigma = \sigma_n + \sigma_p$ . Los tiempos de relajación de la ecuación anterior (9.4.1) son medias para todos los electrones en la B.C. y huecos en la B.V., pues todos ellos participan en la conducción: la aproximación de Boltzmann hace que la probabilidad de ocupación de un estado en B.V. o B.C. sea muy pequeña por lo que un electrón y/o hueco tiene acceso a los niveles próximos, condición necesario para que se pueda “acelerar”. Las ecuaciones (9.4.1) pueden expresarse en función de las correspondientes *movilidades*  $\mu_n$  y  $\mu_p$  según

$$\begin{aligned}\sigma_n &= en\mu_n \quad \left( \mu_n \equiv \frac{e^2\bar{\tau}_e}{m_c^*} \right) \\ \sigma_p &= ep\mu_p \quad \left( \mu_p \equiv \frac{e^2\bar{\tau}_h}{m_v^*} \right)\end{aligned}\quad (9.4.2)$$

Los mecanismos básicos de dispersión de los portadores que afectan a la movilidad en semiconductores son: los fonones, como en metales, y las impurezas ionizadas a través de la dispersión de Rutherford (salvo a muy bajas temperaturas en que permanecen neutras). Sin entrar en detalles digamos que las dependencias respectivas con la temperatura son:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{fon}} &\propto T^{-3/2} \\ \mu_{\text{imp}} &\propto T^{3/2}\end{aligned}\quad (9.4.3)$$

Obsérvese que la movilidad por interacción con fonones disminuye al aumentar la temperatura por aumentar el número de éstos, pero sin embargo, la movilidad aumenta para la interacción con impurezas. La razón es que al aumentar la temperatura aumenta la velocidad de los portadores de modo que están menos tiempo en el radio de influencia de cada interacción. La figura 9.5 muestra

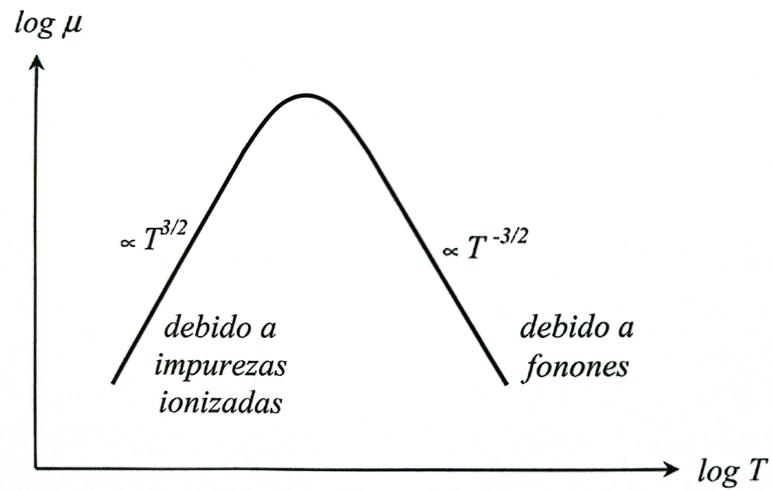


Figura 9.5: Dependencia con la temperatura de la movilidad en un semiconductor con impurezas.

los dos regímenes comentados (el cambio de régimen depende de la concentración de impurezas, pero en general ocurre para  $T < 100$  K).

Es interesante particularizar para un semiconductor intrínseco a *alta temperatura*. A partir de (9.1.5), (9.1.7) y (9.4.2) se encuentra para la conductividad eléctrica

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p \propto \left( T^{3/2} e^{-\varepsilon_g/2k_B T} \right) T^{-3/2} = e^{-\varepsilon_g/2k_B T} \quad (9.4.4)$$

Este resultado proporciona un método sencillo para determinar el gap de energía de un semiconductor a partir de la conductividad en función de la temperatura.

## 9.5. Semiconductores inhomogéneos: la unión p-n.

Se estudia el comportamiento de una unión de un semiconductor tipo *p* con otro tipo *n*, que es la base de buena parte de la microelectrónica. Cualitativamente, los electrones tienden a difundirse del lado *n* donde son mayoritarios al *p* donde son minoritarios, y viceversa para los huecos. Esta difusión origina un campo eléctrico en una región de dimensiones  $d_n + d_p$  alrededor de la superficie de separación que frena la difusión, llegándose así al equilibrio. Además, como los portadores son muy móviles, la concentración de los mismos debe ser muy baja allí donde el campo eléctrico es apreciable. Por tanto la ausencia de portadores libres en la región de campo hace que ésta aparezca cargada, tal como ilustra la figura 9.6 justificando además el nombre de *región de carga espacial* que recibe. Típicamente  $d_n + d_p \sim 10^2 - 10^4 \text{ Å}$  y el campo en la región de carga es  $10^5 - 10^7 \text{ V/m}$ .

Vamos a considerar ahora qué ocurre si se aplica un potencial externo  $V$  (tomaremos  $V > 0$  si es más alto de lado *p* que el lado *n*, ver 9.7). Puesto que muy cerca de la unión, en la capa de carga espacial, la concentración de portadores es casi nula, la resistencia eléctrica que ésta presenta será mucho mayor que en las regiones homogéneas. Esto implica que cuando se aplica un potencial  $V$  a la unión de mayor caída se dará en la carga espacial. Queremos deducir aproximadamente la corriente eléctrica a través de la unión si  $V \neq 0$ . Para empezar, consideremos en detalle la corriente debida a huecos. Hay dos contribuciones:

- La corriente de generación  $j_h^{\text{gen}}$  del lado *n* al *p*, que aparece por los huecos generados térmicamente del lado *n* donde son minoritarios al lado *p* donde son mayoritarios. Aunque

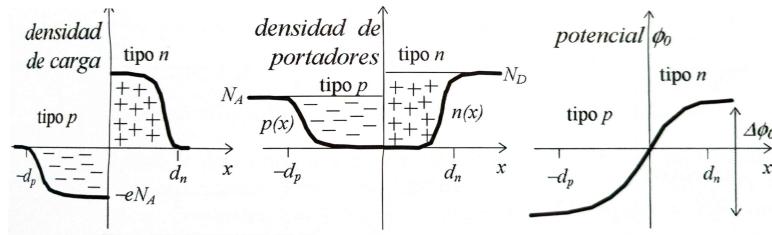


Figura 9.6: Densidad de carga, densidad de portadores, y potencial eléctrico en la región de caga especial de unión  $p - n$ .

la concentración es pequeño, la corriente a través de la unión puede ser alta ya que los huecos se ven lanzados por el campo eléctrico en la unión, y será poco sensible al valor de  $V$  si  $eV \gg \varepsilon_g$ .

- La corriente de recombinación  $j_h^{\text{rec}}$ , del lado  $p$  al lado  $n$ , debida a los huecos que, llegados a la unión del lado  $p$ , tengan energía suficiente para vencer el campo eléctrica en la misma. Esta corriente debida a huecos será:

$$j_h^{\text{rec}} \propto \exp\left(-e\frac{\Delta\phi_0 - V}{k_B T}\right) = j_h^{\text{rec}}|_{V=0} \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) \quad (9.5.1)$$

Se debe cumplir además que

$$(j_h^{\text{rec}})|_{V=0} = (j_h^{\text{gen}})|_{V=0} \approx (j_h^{\text{gen}})_V \quad (9.5.2)$$

por la pequeña dependencia de  $J_h^{\text{rec}}$  al potencial externo; con esto

$$j_h^{\text{rec}} = j_h^{\text{gen}} \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) \quad (9.5.3)$$

de donde

$$j_h = j_h^{\text{rec}} - j_h^{\text{gen}} = j_h^{\text{gen}} \left[ \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - 1 \right] \quad (9.5.4)$$

Análogo análisis se aplica a los electrones, de forma que para la densidad de corriente eléctrica

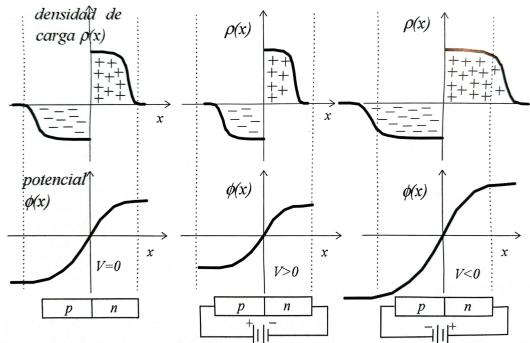


Figura 9.7: Efecto de un potencial externo sobre la densidad de carga en la región de caga especial de unión  $p - n$ .

total se tiene

$$j = (j_h^{\text{rec}} - j_e^{\text{gen}}) \left[ \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - 1 \right] \quad (9.5.5)$$

Se puede probar que el término  $j_h^{\text{gen}} + j_e^{\text{gen}}$  varía con la temperatura según  $\exp(-\varepsilon_g/k_B T)$ . La alta simetría de la unión respecto de la polarización en voltaje tal como resume la ecuación (9.5.5) y se representa en la , constituye el principio *rectificador* de la unión.

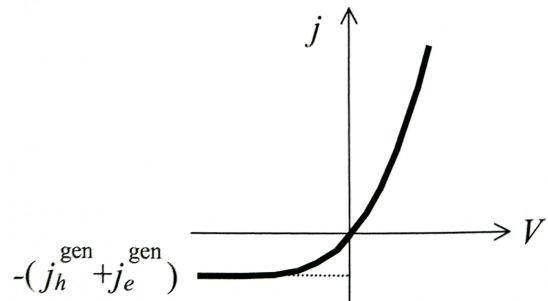


Figura 9.8: Relación  $j - V$  para la unión  $p - n$ .



# Capítulo 10

## Magnetismo de sólidos

En este Capítulo se estudian algunas de las contribuciones más importantes al magnetismo de los sólidos. Como se verá, alguna de ellas (como la ferromagnética) constituye un fenómeno cooperativo que lleva asociado una transición de fase. Es también destacable que el magnetismo de sólidos es en buena medida un efecto cuántico dado que muchas de sus causas (el momento magnético de espín, la interacción de intercambio, etc.) no tienen análogo clásico.

### 10.1. Relaciones básicas

La **magnetización** (o imanación)  $\mathbf{M}$  se define como el momento magnético por unidad de volumen

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_V \boldsymbol{\mu} \quad (10.1.1)$$

donde los  $\boldsymbol{\mu}$  son los momentos magnéticos atómicos o iónicos en el “volumen de control”  $V$ . Recordemos que para partículas sin espín  $\boldsymbol{\mu} = \sum_i \frac{1}{2} \mathbf{r}_i \times q_i \mathbf{v}_i$  y que para *lazos* de corriente  $\boldsymbol{\mu} = IA$  siendo  $I$  la intensidad y  $\mathbf{A}$  el área encerrada. El magnetismo de los sólidos se clasifica de acuerdo a la interrelación de su magnetización con el campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$ . Así, se introduce la *susceptibilidad magnética*  $\chi$  por

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (10.1.2)$$

En general  $\chi$  será un tensor, pero no consideraremos esta complicación aquí. Si un medio tiene  $\chi$  negativa se dice *diamagnético* y si por contra  $\chi$  es positiva el sólido se dice *paramagnético*. Además, existe un grupo de materiales que pueden poseer magnetización aun en ausencia de campo aplicado y que son *ferromangélicos* (observar que  $\chi \rightarrow \infty$ ).

### 10.2. Diamagnetismo atómico

La naturaleza del diamagnetismo atómico se puede comprender a partir de un modelo clásico en que cada órbita electrónica es considerada una espira de corriente. De acuerdo con la ley de Lenz, al variar el flujo magnético sobre el circuito surge una fuerza electromotriz de inducción que hace variar la corriente y por tanto genera un momento magnético adicional. Así, si  $A$  es el área de la órbita,  $\omega$  la velocidad angular e  $I$  la intensidad de corriente, el momento magnético será

$\mu = IA = -(e\omega/2\pi)A$ , y bajo la aplicación de un campo  $B$  perpendicular a la órbita, aquél se incrementa en

$$\Delta\mu = -\frac{eA}{2\pi}\Delta\omega \quad (10.2.1)$$

La variación de velocidad angular  $\Delta\omega$  se determina del balance de fuerzas sobre la órbita, que consideramos circular de radio  $r$  (ver figura 10.1): antes de la aplicación del campo de fuerza nuclear se equipara a la fuerza centrífuga,  $F_{\text{núcleo}} = m\omega^2 r$ ; tras la aplicación del campo aparece adicionalmente la fuerza de Lorentz  $F_L = evB$  dirigida hacia el núcleo, que se compensa con un aumento de la velocidad angular

$$m(\omega + \Delta\omega)^2 r = F_{\text{núcleo}} + evB \quad (10.2.2)$$

Como para los campos magnéticos aplicables en un laboratorio  $evB \ll m\omega^2 r$ , se tiene que  $\Delta\omega \ll \omega$ . Así pues, despreciando términos en  $\Delta\omega^2$  se deduce

$$\Delta\omega = \frac{evB}{2mr\omega} = \frac{eB}{2m} \quad (10.2.3)$$

que se denomina *frecuencia de Larmor*. Combinando con (10.2.1) y generalizando a un átomo de  $Z$  electrones:

$$\Delta\mu = -Z \frac{e^2 A}{4\pi m} B = -Z \frac{e^2 \langle \rho^2 \rangle}{4m} B \quad (10.2.4)$$

siendo  $\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$  el valor cuadrático medio de la distancia de los electrones al eje que pasa por el núcleo paralelamente al campo (eje  $z$ ). Si admitimos simetría esférica,  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$  y con ello el radio cuadrático medio atómico resulta  $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{2} \langle \rho^2 \rangle$ . Llamando  $n$  al número de átomos por unidad de volumen la magnetización resultante es

$$M = n\Delta\mu = -\frac{nZe^2 \langle r^2 \rangle}{6m} B \quad (10.2.5)$$

y la susceptibilidad magnética

$$\chi = \frac{M}{H} \approx \frac{\mu_0 M}{B} = -\frac{\mu_0 n Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6m} \quad (10.2.6)$$

que es el resultado clásico de *Langevin*. Aunque en general  $B = \mu_0(H + M)$ , aquí se ha aproximado  $B \approx \mu_0 H$  dado que  $|M| \ll H$  (o bien que  $|\chi| \ll 1$ ). En efecto, para  $n = 5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  y  $r = 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\chi = -10^{-6} Z$ . El diamagnetismo atómico es propio de *todos los cuerpos sin excepción*, aunque a menudo está enmascarado por el paramagnetismo o el ferromagnetismo.

### 10.3. Paramagnetismo atómico

Además de la contribución diamagnética ya vista en la sección anterior, algunos átomos presentan un momento magnético *permanente* debido al espín y al momento angular orbital de los electrones (los momentos magnéticos nucleares son  $\sim 10^3$  veces más pequeños y no se tendrán en cuenta). En ausencia de un campo externo los momentos magnéticos atómicos están orientados al azar y la magnetización resultante es nula. Sin embargo, como se verá, bajo la aplicación de un campo magnético los momentos atómicos se orientan en su mismo sentido dando lugar a una magnetización (*paramagnética*), que puede ser mucho mayor que la diamagnética.

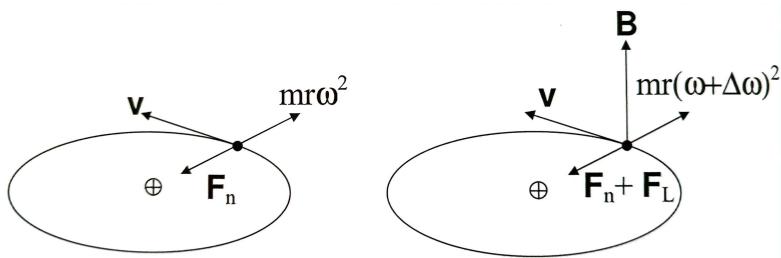


Figura 10.1: Balance de fuerzas sobre un electrón orbitando en torno a un núcleo en ausencia (izquierda) o en presencia (derecha) de un campo magnético externo. El referencial usado es uno centrado en el núcleo y que gira con el electrón de modo que hay que considerar las fuerzas iniciales (aquí sólo hay fuerza centrífuga).

### 10.3.1. Origen del momento magnético atómico

El momento magnético orbital electrónico  $\mu_L$  se relaciona con el momento angular orbital  $\hbar\mathbf{L}$  por

$$\mu_L \equiv -\frac{e}{2m}\mathbf{r} \times \mathbf{p} = -\mu_B\mathbf{L} \quad (10.3.1)$$

donde  $\mu_B = e\hbar/2m = 9.3 \times 10^{-24}$  J/T es el llamado *magnetón de Bohr*. Los momentos magnéticos magnéticos de espín  $\mu_S$  están relacionados con el momento angular de espín  $\hbar\mathbf{S}$  por:

$$\mu_S = -g_0\mu_B\mathbf{S} \quad (10.3.2)$$

siendo  $g_0 \approx 2$ . Como para un solo electrón  $S = 1/2$ ,  $\mu_B$  es interpretable como el momento magnético de espín de un electrón libre. En el caso atómico (varios electrones con contribución orbital y de espín) el momento magnético total  $\mu$  también resulta ser proporcional al momento angular electrónico total  $\hbar\mathbf{J} = \hbar\mathbf{L} + \hbar\mathbf{S}$  según

$$\mu = -g\mu_B\mathbf{J} \quad (10.3.3)$$

donde

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L-1)}{2J(J+1)} \quad (10.3.4)$$

es el llamado *factor de Landé*. El momento magnético asociado a átomos e iones con capas electrónicas cerradas es nulo. Si existen capas electrónicas interiores parcialmente desocupadas (elementos de transición, tierras raras y actinídos), o capas de valencia con número impar de electrones el momento magnético es distinto de cero. El cálculo de  $L$ ,  $S$  y  $J$  del estado atómico fundamental a partir de los momentos angulares electrónicos individuales se hace por las reglas de Hund:

1.  $S$  toma el valor más alto posible compatible con el principio de exclusión (momentos magnéticos de espín paralelos).
2.  $L$  toma el máximo valor compatible con este valor de  $S$  (momentos magnéticos paralelos).
3.  $J = |L - S|$  para una capa llena a menos de la mitad, y  $J = L + S$  si a más de la mitad.

### 10.3.2. Dependencia de la magnetización paramagnética con la temperatura y el campo magnético

Los niveles de energía de un momento magnético  $\mu$  en un campo de inducción  $\mathbf{B}$  en la dirección de  $z$  se expresan por

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B} = g\mu_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = g\mu_B J_z B \quad \mu_z = g\mu_B J_z \quad (10.3.5)$$

donde  $J_z = -J_1, \dots, J$  es el *número cuántico azimutal o magnético*. Queremos calcular el valor medio de  $J_z$  (las componentes no paralelas al campo promedian a cero). Estadísticamente la ocupación relativa de niveles a temperatura  $T$  la da el factor de Boltzmann  $\exp(-U/k_B T) = \exp(-g\mu_B J_z B/k_B T)$ , de modo que la magnetización neta  $M$  de un conjunto de momentos magnéticos *independientes* con una concentración  $n$  vendrá dada por

$$M = n \frac{\sum_{J_z=-J}^{+J} -g\mu_B J_z \exp(-g\mu_B J_z B/k_B T)}{\sum_{J_z=-J}^{+J} \exp(-g\mu_B J_z B/k_B T)} \quad (10.3.6)$$

tras algunas manipulaciones la suma anterior se iguala a

$$M = ng\mu_B J B_J(x) \quad (10.3.7)$$

donde

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right) \quad x \equiv \frac{g\mu_B J B}{k_B T} \quad (10.3.8)$$

es la **función de Brillouin**.  $B_J$  crece linealmente con  $x$  para  $x \ll 1$  y satura a  $q$  para valores altos de  $x$ . Por tanto  $M$  tiene a la magnetización de saturación a campos  $B$  altos correspondiendo al máximo alineamiento de los dipolos con el campo  $J_z = -J$ . La figura 10.2 ilustra la variación de  $B_J(x)$  y de la magnetización paramagnética para distintos  $J$ .

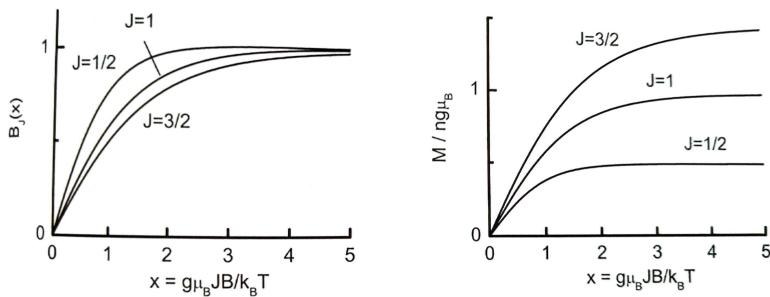


Figura 10.2: Dependencia con  $x$  de la función de Brillouin y de la magnetización paramagnética para distintos valores de  $J$ .

### 10.3.3. Ley de Curie

A temperatura ambiente, para los campos más altos alcanzables en un laboratorio ( $\sim 10$  T)  $x \ll 1$ , y  $B_J(x)$  se approxima Por

$$B_J(x) = \frac{J+1}{3J} x \quad (10.3.9)$$

de modo que la susceptibilidad paramagnética es

$$\chi = \frac{M}{H} \approx \frac{mu_0 M}{B} = \frac{nJ(J+1)g^2\mu_0 mu_B^2}{3k_B T} \quad (10.3.10)$$

donde  $p = g\sqrt{J(J+1)}$  es el *número efectivo de magnetos de Bohr*. La relación (10.3.10) se denomina **ley de Curie** y a  $C$  se le denomina *constante de Curie*. Numéricamente se encuentra que  $\chi \sim 10^{-3}$ , lo que justifica la aproximación  $B = \mu_0(H + M) \approx \mu_0 H$ . Es destacable que, aunque pequeña, es  $10^2 - 10^3$  veces mayor que la correspondiente a la contribución diamangética.

La tabla muestra la comparación entre el valor de  $p$  teórico y el experimental determinado por el coeficiente en  $1/T$  de la susceptibilidad medida para un conjunto de iones de tierras raras (capa  $f$  interna incompleta). El acuerdo es muy bueno excepto para el Eu para el que como  $J = 0$ , habría que considerar la contribución a  $M$  en (10.3.6) de otros multipletos (estados excitados con distinto  $J$ ). La situación es muy distinta para los iones de los elementos de transición (capa  $d$  externa incompleta), como se muestra en la tabla , donde aunque se verifica la ley de Curie sólo hay acuerdo si se admite que  $L = 0$ . Se interpreta esta anulación del momento angular orbital como un efecto producido por los iones vecinos, siendo afectadas las capas electrónicas  $d$  por el campo eléctrico que estos generan (a esto lo llamamos *efecto de campo cristalino*). Éste, sin embargo, no afecta a las tierras raras pues la capa interna  $f$  está mucho más cerca del núcleo y protegida del campo “ambiental” por las capas  $5s$  y  $5p$ .

## 10.4. Paramagnetismo de los electrones de conducción

Los resultados anteriores no son válidos para los electrones de conducción pues por el principio de exclusión no se pueden considerar independientes, que es lo que hemos admitido en la sección anterior. En efecto, vamos a ver cómo el principio de Pauli limita fuertemente el alineamiento de los espines electrónicos con el campo. La figura 10.3 muestra cómo actúa un campo magnético  $B$  sobre el mar de Fermi.

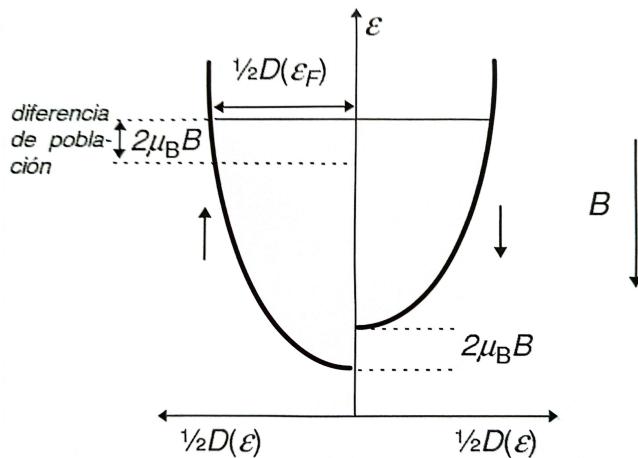


Figura 10.3: Desplazamiento relativo de los niveles energéticos electrónicos correspondientes a espín  $\uparrow$  y espín  $\downarrow$ .

Como  $S = \pm 1/2$ , por (10.3.2) se tiene  $\mu = \mu_B$ , de modo que las energías electrónicas se corren en  $\pm \mu_B B$  según la orientación del momento magnético de espín. La diferencia en la concentración de electrones con espín  $\uparrow$  y  $\downarrow$ ,  $\Delta n$ , es igual al área de la proporción rectangular indicada (observar

también que la condición de equilibrio exige que el potencial químico  $\varepsilon_F$  sea el mismo para ambos grupos de espines). Como para los mayores campos alcanzables  $\mu_B B \ll \varepsilon_F$  (por ejemplo,  $\mu_B B \approx 0.6$  meV a  $B = 10$  T), el área se aproxima por  $\Delta n \approx \frac{1}{2}D(\varepsilon_F)2\mu_B B$ . Utilizando que para electrones libres  $D(\varepsilon_F) = 3n/2\varepsilon_F = 3n/2k_B T_F$  resulta

$$M = \mu_B \Delta n = \frac{3n\mu_B^2}{2k_B T_F} B \quad (10.4.1)$$

que se conoce como magnetización de espín de Pauli. Aquí se ha considerado que el mar de Fermi estaba completamente lleno, es decir,  $T = 0$  K.

Landau mostró que se debe considerar la alteración del movimiento estacional electrónico por el campo magnético, que da lugar a una contribución diamagnética igual a  $-1/3$  de la paramagnética, de modo que finalmente:

$$M = \frac{n\mu_B}{k_B T_F} B \quad (10.4.2)$$

Numéricamente resulta una susceptibilidad  $\sim 10^{-5}$ ; este valor concuerda dentro de un factor 2 para los metales alcalinos y es bastante inferior al experimental en algunos metales de transición debido a la contribución de los electrones  $3d$  (además de los  $4s$ ). Como la susceptibilidad paramagnética electrónica es sólo poco mayor que la diamagnética atómica (capas electrónicas internas) bastantes metales como el Al, Pb, Sb, Au, Zn, etc. resultan ser globalmente diamagnéticos.

## 10.5. La interacción de intercambio

La magnetización espontánea en ausencia de campo, propia de los materiales ferromagnéticos es debida al alineamiento de los dipolos magnéticos (localizados o deslocalizados). La interacción magnética clásica entre dipolos es demasiado pequeña como para dar cuenta de este alineamiento. En efecto, la energía de interacción de dos momentos magnéticos de magnitud  $\mu_B$  a distancia  $r = 3\text{\AA}$  es  $\mu_B^2 \mu_0 / 4\pi r^3 \approx 2 \times 10^{-6}$  eV, que en temperatura  $k_B T$  tendríamos que  $T \approx 0.03$  K, y sin embargo muchos materiales ferromagnéticos mantienen su magnetización espontánea a temperaturas del orden de 1000K. Vamos a ver cualitativamente que el orden del orden magnético reside paradojalmente en la interacción eléctrica entre electrones (orientación colectiva de espines).

Si consideramos dos electrones sabemos que la función de onda debe ser antisimétrica bajo permutación de coordenadas y espín  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1)$ , de donde se deduce que  $\Psi = 0$  para  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2$ . Esto no indica sino que para espines paralelos hay probabilidad nula de encontrar los dos electrones en la misma posición, pero no excluye dos electrones con espines opuestos. Así, la antisimetría de la función de onda tiende a mantener a los electrones con espines paralelos alejados y en consecuencia disminuye la energía de repulsión de Coulomb respecto la configuración de espines antiparalelos. Esto es lo que se conoce como **interacción de intercambio**. En caso de electrones atómicos, si se tienen en cuenta las energías electrostáticas de interacción con los núcleos puede ocurrir que a la distribución de carga orbital asociada a espines antiparalelos corresponda menor energía de modo que al final la interacción de intercambio favorece el antialineamiento.

Las dos situaciones opuestas se recogen en el llamado **modelo de Heisenberg**, en el cual la energía de interacción entre los átomos  $i$  y  $j$  está contenida en el término  $\mathcal{J}_{ij}$  tal que

$$U_{ij} = -\mathcal{J}_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (10.5.1)$$

donde  $\mathcal{J}$  es la llamada **integral de intercambio**, relacionada con el solapamiento de las distribuciones de carga de los átomos  $i$  y  $j$ , que puede ser positiva o negativa. El hamiltoniano global sería:

$$\mathcal{H} = - \sum_{i,j} \mathcal{J}_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (10.5.2)$$

## 10.6. Ferromagnetismo

Podríamos ahora definir un medio ferromagnético como aquél en el que existe una interacción de intercambio con integral de intercambio positiva, causando el alineamiento de espines origen de magnetización espontánea. Para simplificar el tratamiento que origina el término  $U_{ij}$  se introduce la llamada *aproximación de campo medio*: se supone que el efecto de interacción de canje de un espín  $\mathbf{S}_i$  con otro  $\mathbf{S}_j$  se puede calcular reemplazando  $\mathbf{S}_j$  con su valor medio  $\langle \mathbf{S}_j \rangle$ . En ese caso, en un campo externo  $\mathbf{B}$

$$\mathcal{H} = - \sum_{i,j} \mathcal{J}_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + g\mu_B \mathbf{B} \sum_i \mathbf{S}_i \quad (10.6.1)$$

pasa a ser

$$\mathcal{H} = - \sum_i \mathbf{S}_i \left( \sum_j \mathcal{J} \langle \mathbf{S}_j \rangle g\mu_B \mathbf{B} \sum_i \mathbf{S}_i \right) \quad (10.6.2)$$

En un medio homogéneo  $\langle \mathbf{S}_j \rangle$  es el mismo para todos los espines. El valor común  $\langle \mathbf{S} \rangle$  se relaciona con la magnetización por

$$\mathbf{M} = -g\mu_B n \langle \mathbf{S} \rangle \quad (10.6.3)$$

Además la suma  $\sum_j \mathcal{J}_{ij} \approx z\mathcal{J}$  donde  $z$  es el número de vecinos más próximos. Así:

$$\mathcal{H} = g\mu_B \left( \frac{z\mathcal{J}}{ng^2\mu_B^2} \mathbf{M} + \mathbf{B} \right) \cdot \sum_i \mathbf{S}_i \quad (10.6.4)$$

Observar que esta es la energía que tendría un conjunto de espines desacoplados en presencia de un *campo efectivo*

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \frac{z\mathcal{J}}{ng^2\mu_B^2} \mathbf{M} + \mathbf{B} \quad (10.6.5)$$

y si  $\lambda = \frac{z\mathcal{J}}{ng^2\mu_B^2\mu_0}$  tenemos que

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = \lambda\mu_0 \mathbf{M} + \mathbf{B} \quad (10.6.6)$$

Dado que bajo  $\mathbf{B}_{\text{eff}}$  los espines se comportan como paramagnéticos, vamos a utilizar la ecuación anterior en los resultados anteriores del paramagnetismo para calcular la respuesta del material ferromagnético. Por ejemplo, a altas temperaturas, la susceptibilidad magnética puede aproximarse por

$$\mu_0 \mathbf{M} = \chi_p \mathbf{B}_{\text{eff}} = \lambda\mu_0 \mathbf{M} + \mathbf{B} \quad (10.6.7)$$

donde  $\chi_p = C/T$  es la ley de Curie. Despejando  $\mathbf{M}$  e introduciendo la *temperatura de Curie*  $T_c \equiv C\lambda$  tenemos que

$$\mu_0 \mathbf{M} = \frac{C}{T - T_c} \mathbf{B} \quad (10.6.8)$$

con lo que finalmente se tiene la susceptibilidad magnética efectiva

$$\chi = \frac{M}{H} \approx \mu_0 \frac{M}{B} = \frac{C}{T - T_c} \quad (10.6.9)$$

De nuevo, se ha utilizado  $B \approx \mu_0 H$  dado que  $\chi \ll 1$  salvo cuando  $T \rightarrow T_c$  (donde  $\chi \rightarrow \infty$ ).  $T_c$  es la **temperatura de Curie**, y la fórmula anterior (10.6.9) se llama la **ley de Curie-Weiss**, describiendo correctamente la susceptibilidad observada para  $T > T_c$ .

Para ver lo que ocurre a  $T < T_c$  hay que utilizar la expresión general (10.3.7). Poniendo, por ejemplo,  $J = 1/2$ ,  $S = 1/2$  y  $L = 0$  ( $g = 2$ ) obtenemos que

$$M = n\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B_{\text{eff}}}{k_B T}\right) \quad (10.6.10)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{B}_{\text{eff}} \approx \lambda\mu_0 \mathbf{M}$  e introduciendo las *magnetización* y *temperatura reducidas*:

$$m \equiv \frac{M}{n\mu_B} \quad t \equiv \frac{T}{T_c} \quad (10.6.11)$$

resulta

$$m = \tanh\left(\frac{m}{t}\right) \implies t = \frac{m}{\operatorname{arctanh}(m)} = \frac{2m}{\ln[(1+m)/(1-m)]} \quad (10.6.12)$$

La anterior ecuación sólo tiene solución para  $t < 1$ , o sea  $T < T_c$  de modo que  $T_c$  marca la temperatura por debajo de la cual puede haber magnetización espontánea. Podríamos decir que para  $T < T_c$  tenemos una fase ordenada (espines alineadas) y esta propiedad la que hace que el ferromagnetismo sea una transición de fase, y que  $T_c$  su temperatura crítica. Cuando  $T \rightarrow 0$ , la imanación de saturación (todos los espines alineados) tiende a  $M_s(0) = n\mu_B$  (en general a  $ng\mu_B J$  si  $J \neq 1/2$ ). Los datos experimentales refrendan aproximadamente el enfoque de campo medio como en la figura 10.4.

Experimentalmente se encuentra que  $M_s(0) = n_B n\mu_B$  donde  $n_B$  es el **número efectivo de magnetones de Bohr**. Hay que tener en cuenta que  $n_B$  no siempre coincide con  $gJ$ . En particular para los metales de transición no coincide con  $g_0 S$ . Para estos metales debe considerarse un modelo de electrones itinerantes o de bandas, según el cual el magnetismo proviene del espín de los electrones de conducción pero por el desplazamiento relativa de las subbandas con espín arriba y abajo forzado por la interacción de intercambio.

## 10.7. Dominios ferromagnéticos

Aunque en una muestra ferromagnética a  $T \ll T_c$  todos los momentos magnéticos son paralelos, a escala macroscópicas el momento magnético global puede ser mucho menor que el de saturación. La razón está en que las muestras se componen de pequeñas regiones llamadas *dominios*, dentro de los cuales la magnetización está saturada pero la orientación puede variar de dominio a dominio. La existencia de dominios tiene su origen en el concurso de varias energías:

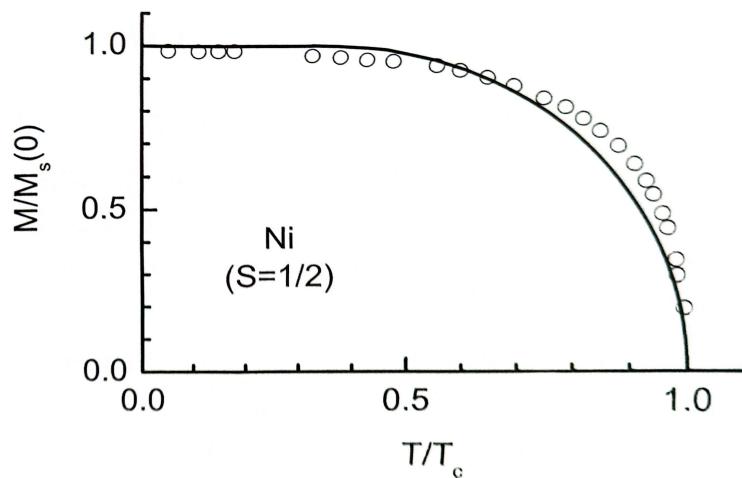


Figura 10.4: Dependencia con la temperatura de la magnetización espontánea para el Ni cuando  $T < T_c$ , y compensación con las predicciones de campo medio.

- a) **Energía de anisotropía.** Ocurre que en los cristales se dan direcciones (o ejes) privilegiados o de fácil imanación y otras de difícil imanación. La causa de la anisotropía está en que por el acoplamiento espín-órbita una rotación de espín arrastra a la distribución de carga o parte orbital. Este hecho cambia la energía de canje entre espíns así como la energía electroestática de las distribuciones de carga entre átomos (distinto solapamiento etc.). Por ejemplo, en el cobalto, de estructura hexagonal, la densidad de energía de anisotropía se expresa por

$$u = K_1 \sin^2 \theta + K_2 \sin^4 \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo de la magnetización con el eje hexagonal.

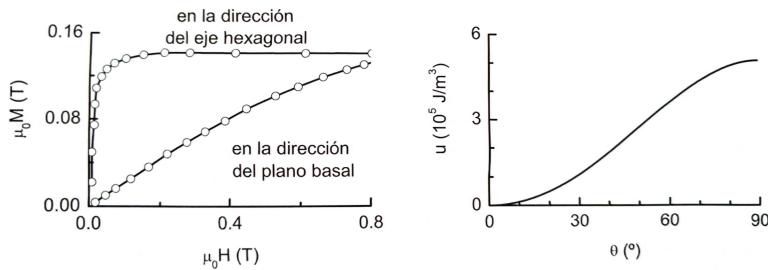


Figura 10.5: En la izquierda la magnetización de una muestra de Co para las direcciones paralela y perpendicular al plano basal de la estructura hexagonal. En la derecha de anisotropía del Co según el ángulo que forma la magnetización con el eje hexagonal.

- b) **Energía de intercambio.** Se determina a partir de

$$U = - \sum_{i,j} \mathcal{J}_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (10.7.1)$$

donde la suma se extiende a todos los espines del material. El mínimo de energía de canje en un ferromagnético corresponde de imanación homogénea (todos los espíns alineados).

- c) **Energía de interacción espín-campo magnético.** Es la energía de interacción de los espines del material ferromagnético con un campo magnético aplicado  $\mu_0 \mathbf{H}_a$  que viene dado por

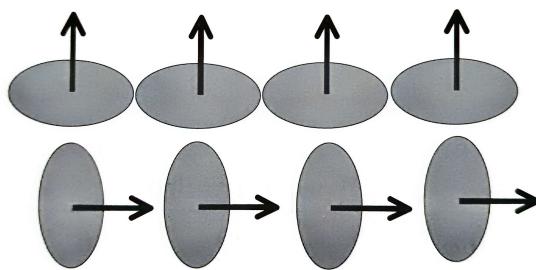


Figura 10.6: Distribución electrónica para diferentes orientaciones del campo magnético aplicado.

$$U = - \int \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_a dV \quad (10.7.2)$$

d) **Energía magnetostática.** Es debida a la interacción de los dipolos magnéticos con el campo creado por ellos mismos  $\mathbf{H}_M$ :

$$U = - \int \frac{\mu_0}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_M dV \quad (10.7.3)$$

donde el factor 1/2 se introduce para no contar dos veces la misma interacción.

El mínimo de la energía total no corresponde a la configuración saturada (salvo a altos campos aplicados), sino más bien a cierta estructura de dominios. Las fronteras de separación entre éstos se denominan paredes de Bloch. El cambio de espín ocurre de modo gradual a lo largo de muchas constantes de red (por ejemplo, 300 en el hierro) pues cambios bruscos de espín están penalizados por la contribución de la energía de intercambio. El espesor de la pared Bloch no aumenta, sin embargo, indefinidamente ya que en ella la inmensa mayoría de los espines no están orientados a lo largo del eje de fácil imantación, lo que incrementa su energía. La Fig. 10.7 muestra cómo aparece la división en dominios de una muestra ferromagnética con objeto de minimizar su energía magnetostática. La subdivisión es frenada tanto por la energía de canje como por la energía de anisotropía.

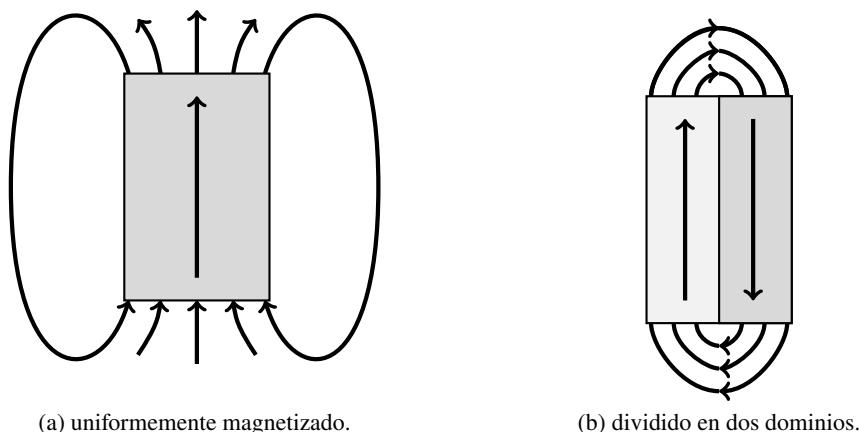


Figura 10.7: Aparición de dominios en una muestra ferromagnética. Las flechas indican la orientación de los momentos magnéticos en cada dominio.

Bajo la aplicación de un campo, el volumen de los dominios favorablemente orientados crece a costa de aquéllos de peor orientación, y también puede tener lugar la rotación de la imantación de

cada dominio (ver Fig. 10.8). Este proceso es reversible a bajos campos, pero a mayores campos el desplazamiento de las fronteras de dominios se hace irreversible por la presencia de defectos en la estructura. Debido a esto, si una vez alcanzada la saturación se quita el campo aplicado, se conserva cierta imantación llamada remanente. Para conseguir anular la imantación se debe aplicar un campo en sentido opuesto llamado coercitivo  $\mu_0 H_c$ . En la figura 10.9 muestra este fenómeno de la histéresis. Así, como para un núcleo de transformador exigiríamos baja coercitividad para minimizar pérdidas por histéresis, para un imán permanente es conveniente alta coercitividad y remanencia.

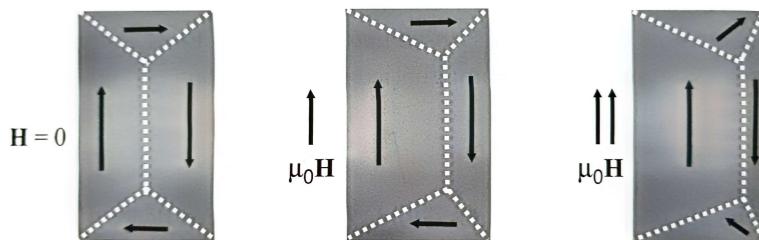


Figura 10.8: Desplazamiento de las fronteras entre dominios debido a una variación del campo magnético aplicado.

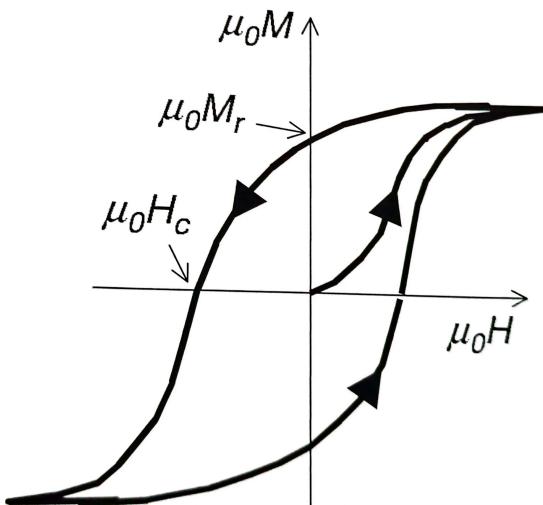


Figura 10.9: Histéresis de la dependencia  $M(H)$  debida al anclaje de las paredes Bloch en los defectos del material.

## 10.8. Orden ferrimagnético

Existe un grupo de materiales que experimentan una interacción de intercambio negativa por la que los momentos magnéticos de espín de los átomos con capas incompletas se orientan antiparalelamente. En este caso el orden magnético se manifiesta por debajo de la llamada *temperatura de Neel*.

Algunos materiales antiferromagnéticos pueden presentar, en su fase ordenada, una magnetización no nula (por ejemplo si los iones que los componen presentan momentos magnéticos distintos). Estos materiales se conocen como **ferrimagnéticos**. La mayoría de los materiales ferrimagnéticos son cristales iónicos por lo que poseen una baja conductividad eléctrica.



## Capítulo 11

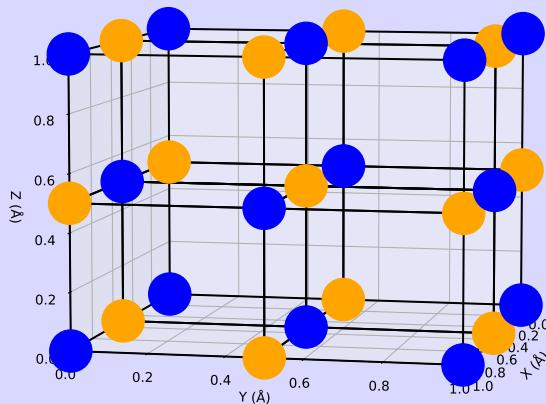
# Ejercicios y soluciones

### 11.1. Enero 2023

#### Ejercicio 11.1.1

La estructura de la figura está formada por átomos de Bi en los nodos de una *fcc*, y átomos de Li en todos los huecos octaédricos de dicha *fcc* de átomos de Bi. El lado de la sc es  $a = 6.74\text{\AA}$ . Responde a:

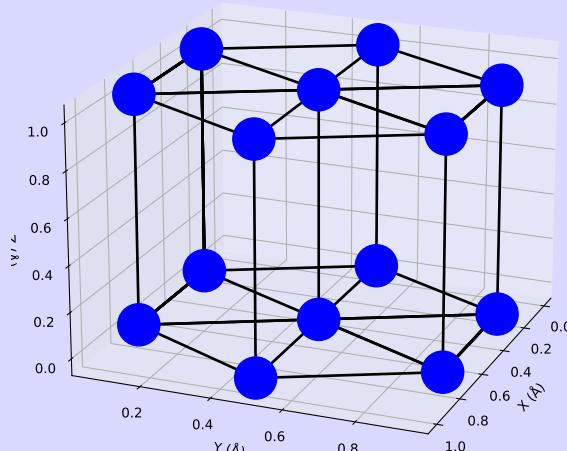
- ¿Cuál es su forma estequiométrica?
- ¿Cuántas ramas de vibración y de qué tipo presenta esta estructura? ¿Podrían estar degeneradas para algunas direcciones cristalográficas? En tal caso, explica por qué y pon algún ejemplo (indicando la dirección y las ramas que estarían degeneradas).
- Calcula la temperatura de Debye y el calor específico a 300K. Dato: velocidad del sonido en ese material es 1029 m/s.



**Ejercicio 11.1.2**

Sea la red hexagonal simple de la figura ( $a = 3\text{\AA}$ ,  $c = 4\text{\AA}$ ).

- Dibuja sobre la figura unos vectores base e indica las componentes.
- Calcula la red recíproca. ¿De qué tipo de red se trata?
- Una muestra de polvo con esta estructura se ilumina con RX (rayos X) de longitud de onda  $\lambda = 5\text{\AA}$ . Determina los picos de difracción de menor y mayor ángulo.
- Calcula la relación de dispersión electrónica en el marco de la aproximación de electrones fuertemente ligados, utilizando solo orbitales  $s$  y teniendo en cuenta hasta segundos vecinos. Calcula las masas efectivas electrónicas  $m_x^*$ ,  $m_y^*$  y  $m_z^*$  cerca del fondo de la banda. Datos:  $\gamma_1 = 0.4 \text{ eV}$ ,  $\gamma_2 = 0.2 \text{ eV}$ .
- Cada átomo aporta un electrón a la conducción, y entre la PZB y la SZB hay un gap de energía despreciable. Indica si el metal es aislante, metal, semimetal o semiconducto, y que bandas contribuirían a la conducción eléctrica. Justifica las respuestas.

**Ejercicio 11.1.3**

Un semiconductor extraído de una computadora tiene como parámetros  $\varepsilon_g = 1 \text{ eV}$ ,  $m_e^* = m_h^* = m_e$ . Está dopado con una concentración de aceptores de  $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Calcular la concentración de electrones y huecos a 300 K.

**Solución 11.1.1**

- La fórmula estequiométrica es evidente:  $\text{Li}_3\text{Bi}$ .

- b) Como sabemos las ramas de vibración dependen de dos factores: la dimensión de la estructura  $D$  y el número de átomos dentro de la base atómica  $z$ . La ecuación es:

$$\text{Acústicas: } D \quad \text{Ópticas: } D(z - 1) \quad (11.1.1)$$

En nuestro caso  $D = 3$  y  $z = 2$ . Entonces tenemos 3 ramas acústicas y 9 ramas ópticas, obteniendo los 12 modos normales esperados. La respuesta a la pregunta de si podrían estar degeneradas algunas ramas es complicada, ya que no existe un método unívoco que nos diga cuáles son y cuán degeneradas están. Dado la simetría del problema, la respuesta es que en principio deberían estar degeneradas algunas ramas, en particular las vibraciones en las direcciones de las aristas  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  deberían estar degeneradas. La razón: alta simetría.

- c) La temperatura de Debye viene dada por la ecuación

$$\theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$$

Mientras que la velocidad del sonido  $c$  nos permite relacionar  $\omega$  Y  $k$  tal que  $\omega = ck$ . Y, como sabemos que  $k_D$  viene dada por

$$k_D^3 = 6\pi^2 n$$

siendo  $n = zN/V$  la densidad numérica de átomos. Entonces podemos obtener  $\theta_D$  a partir de los datos dados, ya que  $z = 4$  y  $N/V$  es exactamente igual al número de puntos de red por celda, tal que  $N/V = 4/a^3$ . Entonces:

$$\theta_D = \frac{\hbar c}{k_B} \sqrt[3]{6\pi^2 n} \longrightarrow \theta_D = 114.53 \text{ K}$$

La capacidad calorífica a la temperatura  $T = 300\text{K}$ . Como  $T \approx 2.6\theta_D$  es válida la aproximación a temperaturas altas en la que:

$$C_V = 3zNk_B$$

Obteniendo como resultado

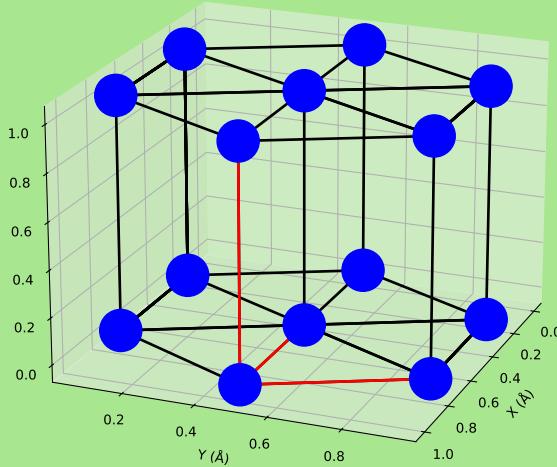
$$C_V \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}}$$

### Solución 11.1.2

- a) Los vectores de la base son los siguientes:

$$\mathbf{a}_1 = (a \cdot \sin(30^\circ), a \cdot \cos(30^\circ), 0) \quad \mathbf{a}_2 = (a, 0, 0) \quad \mathbf{a}_3 = (0, 0, c)$$

Y en la figura estos vectores son:



b) Como sabemos la red recíproca viene dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_3 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}\end{aligned}$$

Y por tanto tenemos que la red recíproca de una hexagonal es:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}(0, 1, 0) \quad \mathbf{b}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}(\cos(30^\circ), \sin(30^\circ), 0) \quad \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{c}(0, 0, 1)$$

Lógicamente existen otras redes válidas en función de los vectores primitivos que cojamos.

c) Tenemos que obtener los picos de difracción de menor y mayor ángulo. Para esto usamos la ley de Bragg:

$$\sin(\theta) = \frac{n\lambda}{2d}$$

donde  $d = 2\pi/|\mathbf{G}|$  siendo  $\mathbf{G}$  un vector cualquiera de la red recíproca. Podemos escribir entonces:

$$\sin(\theta) = \frac{n\lambda|\mathbf{G}|}{4\pi}$$

Lógicamente el  $\theta$  más pequeño corresponde a  $n = 1$  y a  $|\mathbf{G}|_{\min}$ . ¿Cuál es el  $|\mathbf{G}|_{\min}$ ? Pues sería  $2\pi/c$ . Entonces tenemos que:

$$\sin(\theta_{\min}) = \frac{\lambda}{2c} \Rightarrow \theta_{\min} = 38.69^\circ$$

Para hallar el más grande tenemos que calcular cual es el  $n|\mathbf{G}|/4\pi$  que se acerca más a 1. Veamos entonces que tenemos que calcular varios. Vamos a probar con varios:

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}|_{[001]} &= \frac{2\pi}{c} = 1.57 \text{ \AA}^{-1} \\ |\mathbf{G}|_{[100]} &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} 2.42 \text{ \AA}^{-1} \\ |\mathbf{G}|_{[002]} &= \frac{4\pi}{c} = 3.14 \text{ \AA}^{-1} \\ |\mathbf{G}|_{[110]} &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} (2 + \sqrt{3})^{\sqrt{2}} = 4.17 \text{ \AA}^{-1} \\ |\mathbf{G}|_{[200]} &= \frac{8\pi}{\sqrt{3}a} = 4.84 \text{ \AA}^{-1} \end{aligned}$$

Y como tenemos que  $\lambda/4\pi = 0.397 \text{ \AA}$  tenemos que el más grande que da un valor válido  $\leq 1$  es  $|\mathbf{G}|_{[100]}$ , de lo que se deduce que el mayor ángulo posible es:

$$\theta_{\max} = 74.21^\circ$$

- d) En primer lugar tenemos que calcular cuantos primeros y segundos vecinos. Dado que  $a < c < 2a$ , tendremos 6 primeros vecinos separados a una distancia de  $a$  y 2 segundos vecinos separados a una distancia de  $c$ . Dado que la aproximación es la de electrones fuertemente ligados tenemos que usar la ecuación:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \approx \varepsilon_s - \beta - \sum_{\mathbf{R}} \gamma(\mathbf{R}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})$$

Debido a la simetría del problema tendremos que:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) &\approx \varepsilon_s - \beta - \gamma_1 \left( \cos(k_x a) + \cos\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) \right. \\ &+ \cos\left(-\frac{k_x a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) + \cos(-k_x a) + \\ &+ \left. \cos\left(-\frac{k_x a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) + \cos\left(\frac{k_x a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) \right) \\ &- 2\gamma_2 \cos(k_z c) \end{aligned}$$

Lógicamente tenemos que reducir la parte de los cosenos con  $\gamma_1$ . En primer lugar usamos las propiedades conocidas de  $\cos(x) = \cos(-x)$  (el cual ya hemos aplicado

para reducir  $\gamma_2$ ) tal que

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{k}) \approx & \varepsilon_s - \beta - \gamma_1 \left( 2 \cos(k_x a) + 2 \cos\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) \right. \\ & \left. + 2 \cos\left(\frac{k_x a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) \right) - 2\gamma_2 \cos(k_z c)\end{aligned}$$

Y usando que  $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$  y que  $\sin(A \pm B) = \sin(A)\sin(B) \pm \cos(A)\cos(B)$  obtenemos que:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \approx \varepsilon_s - \beta - \gamma_1 2 \cos(k_x a) - 4\gamma_1 \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) - 2\gamma_2 \cos(k_z c)$$

Esta sería la relación de dispersión electrónica teniendo en cuenta hasta segundos vecinos. Las masas efectivas electrónicas son fáciles de calcular, ya que solo tenemos que aplicar la ecuación

$$(m_{ij}^*)^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j} \right]_{\mathbf{k}_0}$$

Veamos que para  $m_i^* = m_{ii}^*$  con  $i = x, y, z$  las derivadas son:

$$\begin{aligned}(m_x^*)^{-1} &= \frac{\gamma_1 a^2}{\hbar^2} \left( 2 \cos(k_x a) + \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) \right) \\ (m_y^*)^{-1} &= \frac{3\gamma_1 a^2}{\hbar^2} \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_y a\right) \\ (m_z^*)^{-1} &= \frac{2\gamma_2 c}{\hbar^2} \cos(k_z c)\end{aligned}$$

Como nos dicen que esto es en el fondo de la banda  $\mathbf{k} \approx 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned}(m_x^*)^{-1} &= \frac{3\gamma_1 a^2}{\hbar^2} \\ (m_y^*)^{-1} &= \frac{3\gamma_1 a^2}{\hbar^2} \\ (m_z^*)^{-1} &= \frac{2\gamma_2 c^2}{\hbar^2}\end{aligned}$$

Y por tanto las masas son:

$$\begin{aligned}(m_x^*) &= \frac{\hbar^2}{3\gamma_1 a^2} = 0.705 m_e \\ (m_y^*) &= \frac{\hbar^2}{3\gamma_1 a^2} = 0.705 m_e \\ (m_z^*) &= \frac{\hbar^2}{2\gamma_2 c^2} = 1.191 m_e\end{aligned}$$

- e) En este ejercicio uno podría pensar que bastaría decir que tenemos un átomo por celda unidad que aporta un solo electrón, y que por tanto este siempre será un metal, ya que la banda de valencia estará medio llena siempre, ya que tenemos  $2N$  estados posibles de  $k$  (el factor 2 es debido al espín) y solo  $N$  electrones, de tal forma que la banda de valencia es la única que contiene electrones ergo la única que contribuye a la conducción eléctrica.

Sin embargo, este razonamiento no es el correcto. Cuando tenemos átomos fuertemente ligados hay que tratar con la superficie de Fermi (volumen delimitado por la misma) y el volumen de la primera zona de Brillouin. Como sabemos, la primera zona de Brillouin de una red hc es un prisma hexagonal. Como sabemos, un gap despreciable hace que los electrones vayan ocupado los estados con menor  $k$ , llenando una esfera, como en el caso de un gas de electrones libres. Esta esfera tiene un radio (en el espacio de momentos) determinada por:

$$k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n} = \sqrt[3]{3\pi^2 \frac{1}{a^2 c/2}} = \sqrt[3]{\frac{6\pi^2}{a^2 c}}$$

Mientras que el lado más pequeño de la primera zona de Brillouin es  $\pi/c$  ya que  $\pi/c < 2\pi/\sqrt{3}a$ . Entonces si el radio de la superficie de Fermi es mas grande que el radio mínimo pero mas pequeño que la distancia  $2\pi/\sqrt{3}a$ , tendremos que tanto la zona PZB y SZB están ocupadas Numéricamente

$$k_F = 0.98 \text{ \AA} \quad l_{\min} = 0.79 \text{ \AA} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}a} = 1.21 \text{ \AA}$$

De lo cual se deduce que efectivamente ambas zonas están parcialmente ocupadas: es un metal y hay conducción multibanda.

### Solución 11.1.3

Cuando dopamos un semiconductor tenemos dos posibilidades en función de  $T$ : que el número de impurezas sea irrelevante en comparación a las fluctuaciones térmicas y que por tanto podamos asumir que estamos en el régimen intrínseco ( $n = p$ ), o que estemos en un régimen extrínseco en el que se verifique  $N_A = p$  o  $N_D = n$ . La estimación de la temperatura  $T_i$  es sencilla, hacemos que  $n \approx N_A \rightarrow p \approx 2N_A$

$$2N_A^2 = N_c N_v e^{-\epsilon_g/k_B T_i}$$

Tal que:

$$T_i = \frac{\epsilon_g}{k_B} \frac{1}{\ln(2N_A^2/N_c N_v)}$$

Usando que  $N_c = N_v = 2.5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  en nuestro caso (sustituimos en la ecuación general  $N_c(T)$  la temperatura  $T = 300\text{K}$  cuando estamos en el régimen no degenerado, el cual se verifica si  $\epsilon_g \gg k_B T$ , como en nuestro caso), tenemos que:

$$T_i = 776 \text{ K}$$

Como estamos en el caso extrínseco podemos hacer que  $p = N_A$  y por tanto solo resta calcular  $n$  que se hace a partir de:

$$np = N_c N_v e^{-\varepsilon_g / k_B T}$$

De lo que deducimos

$$n = \frac{N_c N_v}{N_A} e^{-\varepsilon_g / k_B T}$$

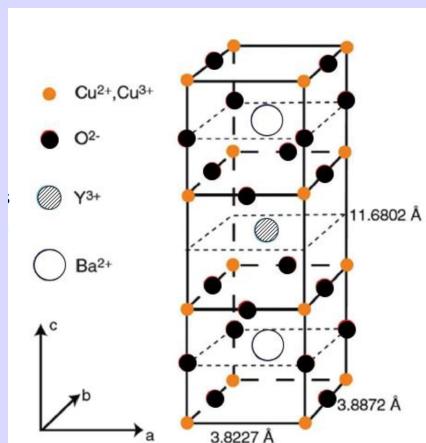
obteniendo que:

$$p = 10^{16} \text{ cm}^{-3} \quad n = 6.14 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$$

## 11.2. Enero 2021

### Ejercicio 11.2.1

El dibujo representa la celda primitiva de un superconductor de alta temperatura crítica muy estudiado. Los ángulos entre los ejes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son rectos. Indica el tipo de red cristalina, rodea con un círculo los átomos de una posible base atómica y escribe la fórmula estequiométrica.

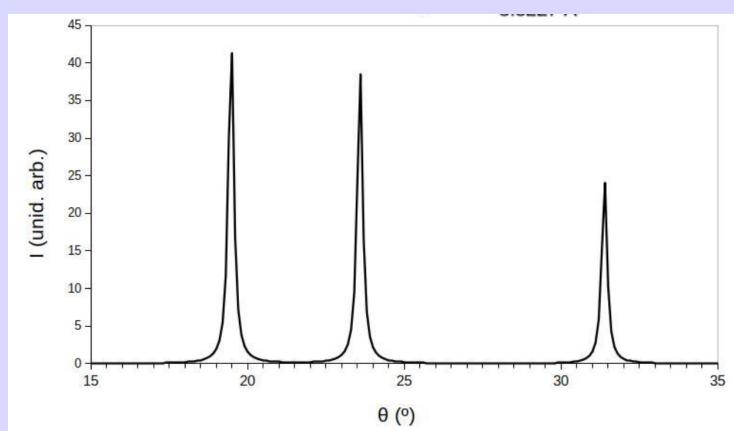


### Ejercicio 11.2.2

Explica en qué consiste la aproximación de Debye, para qué se utiliza, y qué sentido físico tienen la frecuencia de Debye y la temperatura de Debye.

### Ejercicio 11.2.3

Un sólido cristalino monoatómico tiene una estructura de la que se duda entre cúbica simple y tetragonal simple. Para determinarla se le somete a un difractómetro de rayos X en polvo cuyo difractograma obtenido es como se muestra. Analizando los máximos, argumentar si el difractograma es compatible con alguna de las dos estructuras.



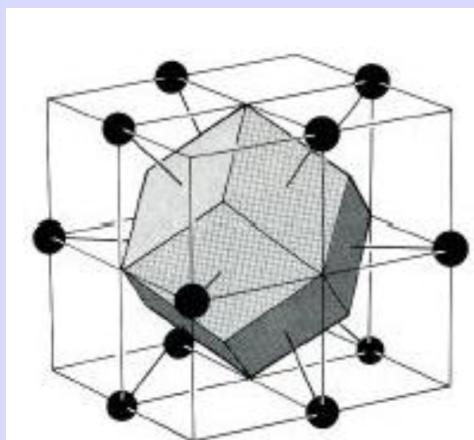
**Ejercicio 11.2.4**

Sea un gas de Fermi de electrones libres en el que cada estado  $k$  está ocupado con un solo electrón con espín  $\uparrow$  (en teoría esta situación podría conseguirse aplicando un campo magnético suficientemente alto). Calcula el aumento de energía cinética respecto al estado fundamental (en el que hay dos electrones por estado  $k$ ).

**Ejercicio 11.2.5**

Sea una estructura *bcc* monoatómica con parámetro de red (de la celda cúbica)  $a = 0.5 \text{ nm}$ .

- Determinan el mayor y menor vector de onda posible de sus modos normales de vibración. ¿Cambiaría la respuesta si existiera una base atómica de más de un átomo?
- Los átomos que forman la estructura son divalentes, y el potencial periódico que ejercen sobre los electrones crea un gap de energía de 1.5 eV sobre la frontera de la primera zona de Brillouin. Suponiendo que la estructura electrónica puede describirse por la aproximación de electrones cuasilibres, discute si el material es aislante, metálico, semimetalico o semiconductor.



Red recíproca y PZB de la bcc

**Ejercicio 11.2.6**

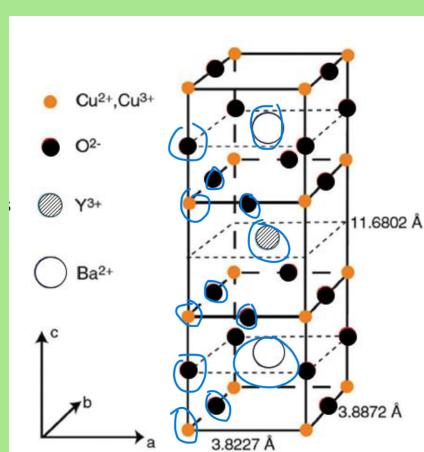
¿Se puede decir algo seguro sobre la capacidad de conducir sobre la capacidad de conducir de un hipotético metal de valencia impar con un número impar de átomos por celda primitiva?

**Solución 11.2.1**

La red es ortorrómbica y la fórmula estequiométrica es:



mientras que la base atómica viene dada por:



### Solución 11.2.2

La aproximación de Debye consiste en suponer que la relación de dispersión  $\omega(k)$  es lineal para todas las ramas en todas las direcciones, siendo la constante de proporcionalidad la velocidad del sonido en el sólido:

$$\omega = ck$$

Se utiliza para obtener soluciones sencillas en la densidad de estados, y por tanto para obtener las primeras soluciones a diferentes problemas el cálculo de la energía interna de un sólido debido a las vibraciones o la capacidad calorífica. La frecuencia de Debye es la frecuencia máxima a la que puede vibrar un sólido, mientras que la temperatura de Debye es la temperatura que marca el comienzo del comportamiento clásico, en el que los estados de vibración empiezan a ser equiprobables (el número medio de ocupación no depende de  $\omega$ ) y la capacidad calorífica constante.

### Solución 11.2.3

Dado que no nos dan  $a$ , tenemos que estudiar el cociente de los senos para poder hallar los máximos. Para la  $sc$  se verifica que:

$$\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} = \left( \frac{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2} \right)^{1/2}$$

Entonces hacemos la comparación entre los valores experimentales ( $\theta_1 = 19.5^\circ$ ,  $\theta_2 = 23.5^\circ$ ,  $\theta_3 = 31.5^\circ$ ) y los valores para la  $sc$ . Veamos que

	$\theta_2/\theta_1$	$\theta_3/\theta_1$
Experimental	1.19	1.57
$sc$	1.41	1.73

Como podemos ver no coincide. La tetragonal se diferencia con la cúbica simple en que hay un lado desigual (por ejemplo el lado  $z$ ). Esto hace que a la ley de Brag se vea modificada respecto a la cúbica, ya que ahora la distancia entre planos reticulares es  $d = ah + ak + cd$

(donde  $a = 2\pi/a^*$  y  $c = 2\pi/c^*$  siendo  $a^*$  y  $c^*$  las distancias de cada uno de los lados). Consecuentemente la idexación de los máximos es:

$$2 \sin(\theta) = \lambda \sqrt{a^2 h^2 + a^2 k^2 + c^2 l^2}$$

Si definimos  $\alpha = c/a$ , tenemos que la división de los senos:

$$\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} = \left( \frac{h_2^2 + k_2^2 + \alpha^2 l_2^2}{h_1^2 + k_1^2 + \alpha^2 l_1^2} \right)^{1/2}$$

Para que  $\theta_2/\theta_1 \approx 1.19$  (usamos [100] ya que es la siguiente distancia más pequeña) basta que se verifique que

$$1.19 = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha = 0.84$$

Entonces con este  $\alpha$  tenemos que  $\theta_3/\theta_1$  (para  $\theta_3$  usamos el plano [101] ya que es la siguiente distancia más pequeña) verifica que:

$$\frac{\sin(\theta_3)}{\sin(\theta_1)} = \left( \frac{1 + \alpha^2}{\alpha^2} \right)^{1/2} = 1.55$$

Coinciendo los valores esperados de la tetragonal simple con los valores experimentales. Ahora deberíamos calcular el siguiente ángulo  $\theta_4$  porque si  $\theta_4 < 35^\circ$  debería aparecer en el diagrama. Este ángulo está asociado a [111], por lo que:

$$\sin(\theta_4) = \left( \frac{2 + \alpha^2}{\alpha^2} \right)^{1/2} \sin(\theta_1) \rightarrow \sin(\theta_4) = 0.654$$

de lo que se deduce

$$\theta_4 = 40.81^\circ$$

por lo que es posible que todavía sea tetragonal.

#### Solución 11.2.4

Como sabemos el número de estados disponibles  $N$  viene dada por:

$$N = 2 \times \frac{1}{8\pi^3/V} \iint k^2 dk d\Omega$$

donde el 2 se debe al factor espín. Consecuentemente si no lo tenemos la expresión será

$$N = \frac{1}{8\pi^3/V} \iint k^2 dk d\Omega$$

Por lo que para un estado y otro estado tenemos momentos de Fermi diferentes. Denotamos por  $k_F^*$  al no fundamental:

$$k_F^3 = 3\pi n \quad (k_F^*)^3 = 6\pi n$$

La energía viene dada por la ecuación:

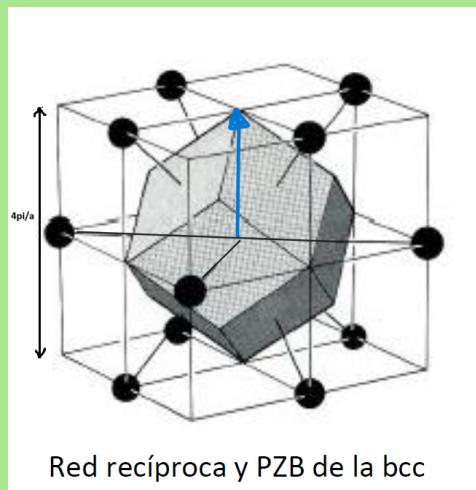
$$U = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

y  $\varepsilon_F \propto k_F^2$ . Entonces la energía relativa entre el estado fundamental  $U$  y la energía del estado no fundamental  $U^*$ , dada por:

$$\frac{U^*}{U} = \frac{(k_F^*)^2}{k_F^2} = (2)^{2/3}$$

### Solución 11.2.5

1. La red recíproca de una *bcc* es una red *fcc* de parámetro  $4\pi/a$ . No hay un menor vector de onda posible ya que nos podemos acercar cuanto queramos al cero  $\mathbf{k} = 0$ . El mayor vector de onda posible, si tomamos las condiciones de contorno recíprocas depende de la densidad de átomos en el sólido. Como sabemos podemos tomar siempre el momento tal que caiga en la PZB, por lo que el momento máximo es el punto más alejado de la PZB. En la imagen siguiente vemos cual podría ser la distancia mas alejada



Logicamente hay mas puntos que se separan del centro la *misma distancia*. No es difícil de ver que:

$$k_{\max} = \frac{2\pi}{a} \rightarrow k_{\max} = 1.26 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

que es la mitad del valor del parámetro  $4\pi/a$ . Ahora nos preguntan si se ve modificado  $k_{\max}$  y  $k_{\min}$  si aumentamos el número de átomos de la base atómica. La respuesta es que no, ya que la PZB sigue siendo la misma. Lo que aumentaría es el número de ramas disponibles.

2. Para saber si es conductor, aislante... primero tenemos que ver si existe la posibilidad de que haya momentos ocupados en la segunda banda SZB. Para que esto tendremos

que calcular cual es el estado menos energético de la SZB y compararlo con el estado más energético de la PZB. Dado que estamos usando la aproximación de electrones cuasi-libres:

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

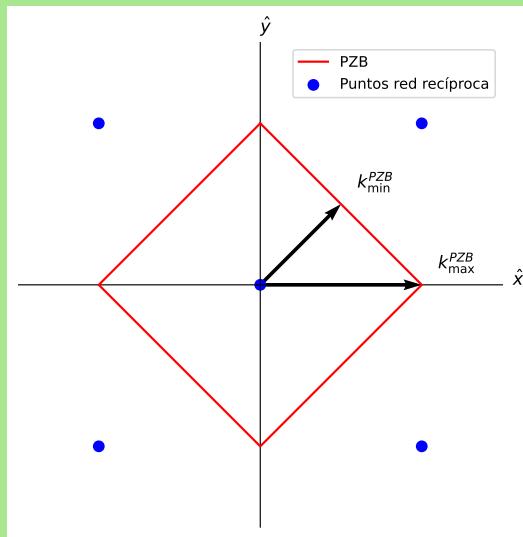
La energía más pequeña de la SZB viene dado por:

$$\varepsilon_{\text{mín}}^{\text{SZB}} = \frac{\hbar^2 (k_{\text{mín}}^{\text{PZB}})^2}{2m_e} + \frac{\varepsilon_{\text{gap}}}{2}$$

donde  $k_{\text{mín}}^{\text{PZB}}$  es el momento mas pequeño que caiga en la frontera de PZB. Por otro lado

$$\varepsilon_{\text{máx}}^{\text{PZB}} = \frac{\hbar^2 (k_{\text{máx}}^{\text{PZB}})^2}{2m_e} - \frac{\varepsilon_{\text{gap}}}{2}$$

donde  $k_{\text{máx}}^{\text{PZB}}$  es el momento mas pequeño que caiga en la frontera de PZB. La distancia mínima la podemos visualizar fácilmente cuando hacemos un corte transversal de la figura:



Viendo esta imagen es fácil de ver que  $k_{\text{mín}}^{\text{SZB}}$  viene dada por:

$$k_{\text{mín}}^{\text{PZB}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{a}$$

En el anterior apartado ya hemos calculado el momento máximo que cae en la PZB

$$k_{\text{máx}}^{\text{PZB}} = \frac{2\pi}{a}$$

Sustituyendo todo en las energías y restando tenemos que:

$$\varepsilon_{\text{mín}}^{\text{SZB}} - \varepsilon_{\text{máx}}^{\text{PZB}} = -\frac{\hbar^2 2\pi^2}{2m_e a^2} + \varepsilon_{\text{gap}} = (-3.0 + 1.5) \text{ eV} = -1.5 \text{ eV}$$

De lo que se deduce que ambas bandas están ocupadas pero no completamente ocupadas, por lo que es un conductor. Como hay solapamiento de bandas es un **metal**.

### Solución 11.2.6

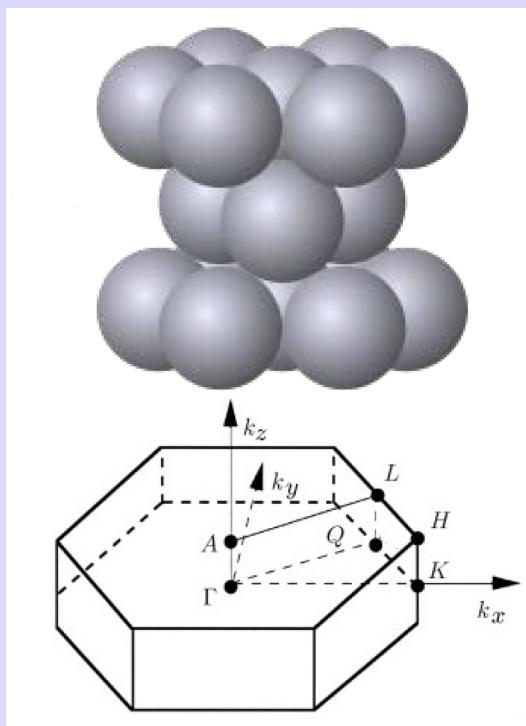
La respuesta es que sí. Cuando tenemos un metal de valencia impar con un número impar de átomos por celda primitiva el número de electrones aportados por celda primitiva (producto de los dos anteriores) sigue siendo impar, de tal forma que la última banda es una banda semillena y por tanto es un **conductor**.

### 11.3. Enero 2020

#### Ejercicio 11.3.1

Sea la estructura hexagonal compacta (*hcp*) de átomos monovalentes de la figura. La separación entre vecinos próximos es  $a = 1\text{\AA}$ . La figura inferior representa su PZB.

- Calcula el valor que tendría el vector de Fermi según el modelo de electrones libres. [1 punto]
- Calcula el factor de estructurar de la base  $S_G$ . Comprueba que  $S_G = 0$  para los  $\mathbf{G}$  asociados a las caras hexagonales de la PZB (eso conllevaría la anulación de un posible gap de energía sobre esas caras). [1 punto]
- En el marco del modelo de electrones cuasilibres, explica si a  $T = 0\text{ K}$  el material sería conductor, aislante o semimetal. [1 punto]
- Indica el grado de degeneración de los estados  $L$ ,  $H$ ,  $K$  y  $A$  de la figura. [0.4 puntos]



#### Ejercicio 11.3.2

En una estructura *fcc* monoatómica con  $a = 0.3\text{ nm}$ , un difractograma en polvo, usando que  $\lambda = 0.1\text{ nm}$ , tiene uno de los máximos en  $\theta = 19.47^\circ$ . ¿A qué ángulo aparecerá el siguiente pico? [1 punto]

**Ejercicio 11.3.3**

¿Cómo cambiaría la separación entre vecinos próximos y la energía de cohesión del  $\text{Ce}^- \text{Na}^+$  si los iones tuviesen el doble de carga? [1 punto]

**Ejercicio 11.3.4**

¿El número de colisiones  $U$  entre fonones (que son las que disminuyen la conductividad térmica reticular  $\kappa_{\text{ret}}$ ) crece siempre con la temperatura  $T$ ? ¿Es eso compatible con que  $\kappa_{\text{ret}}$  crece con  $T$  a bajas temperaturas? [1 punto]

**Ejercicio 11.3.5**

Consideremos la dilatación térmica de un metal. ¿Cómo es afectada la energía (cinética) total de los electrones de conducción? ¿Aumenta o disminuye? Argumenta. [1 punto]

**Ejercicio 11.3.6**

Utilizando el método de electrones fuertemente ligados calcula  $\varepsilon(\mathbf{k})$  para una estructura cúbica simple (utiliza la aproximación de orbitales  $s$ ). A partir del resultado calcula las masas efectiva cerca del fondo de la banda. ¿Cómo son en esa región las superficies de energía constante? [1 punto]

**Ejercicio 11.3.7**

Para un semiconductor dopado con impurezas aceptoras, representa gráficamente la concentración tanto de huecos como de electrones frente a la temperatura. Utiliza la representación de Arrhenius:  $\log(n, p)$  vs  $1/T$ . [1 punto]

**Ejercicio 11.3.8**

Representa (y justifica) el comportamiento de la magnetización frente a  $B/T$  de un material paramagnético. A temperatura ambiente: ¿de qué orden es el campo magnético que haría falta para alinear los momentos magnéticos atómicos? [0.6 puntos]

**Solución 11.3.1**

- El valor del vector de onda de Fermi depende de la densidad de electrones. Los átomos son monovalentes (aporta cada uno un átomo). Tenemos entonces que la densidad electrónica viene dada por  $n = N/V$  siendo  $N$  el número de átomos en la celda primitiva. La celda primitiva (si consideramos que una *hcpes* una red *hexagonal simple* con una base diatómica) en la *hcp* tiene 2 átomos y el volumen viene dado por

$$V = ca^2$$

**Julio 2019**

**Enero 2019**

# Bibliografía

- [1] José Antonio Veira Jesús Maza, Jesús Mosqueria. *Física del Estado Sólido*.
- [2] Charles Kittel. *Física del Estado Sólido*.
- [3] Steve H. Simon. *The Oxford Solid State Basics*.
- [4] José Antonio Veira Jesús Maza, Jesús Mosqueria. *Física del Estado Sólido: ejercicios resueltos*.
- [5] Kyung Soo-Yi John J. Quinn. *Solid State Physics*.
- [6] Mermin Aschroft. *Solid State Physics*.