Apuntes Cuantica III

Daniel Vázquez Lago

9 de julio de 2024

Índice

1. Conceptos básicos

1.1. Postulados mecánica cuántica

1.2. Simetrías

1.2.1. Traslación temporal

1.2.2. Traslación especial

1.3. Matrices de Pauli

1.4. Relatividad especial

En relatividad especial cualquier fenómeno físico viene determinado por su posición en el espacio-tiempo. Un vector en el espacio-tiempo es un cuadrivector (1 dimensión temporal y 3 espaciales). Consecuentemente todo observable medible del espacio debe estar escrito en esta forma 4-vectorial. Normalmente usamos la notación de índices (en todo el texto usaremos la convención de Eisntein):

$$x^\mu \equiv (ct, x^1, x^2, x^3) \tag{1.1}$$

donde muchas veces $ct \equiv x^0$. En general $c = 1$ haciendo que el tiempo y el espacio sean intercambiables, facilitando las cuentas pero haciendo que para recuperar las magnitudes habituales tengamos que multiplicar/dividir por la velocidad de la luz.

Como todo espacio vectorial, existe un tensor métrico, el llamado **tensor de Minkowski**, que nos permite obtener distancias entre 4-vectores, así como la norma de un 4-vector. El tensor de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Lógicamente si aplicamos el tensor sobre cualquier 4-vector podremos subir y bajar índices:

$$x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu \qquad\qquad x_\mu = (ct, -x^1, -x^2, -x^3) \tag{1.3}$$

de tal modo que un 4-vector con los índices bajados tienen una forma diferente a los 4-vectores con los índices subidos. Esto genera lo que llamamos un **cuadrivector covariante** (índice subido) y un **cuadrivector contravariante** (índice bajado). Para obtener la norma de un cuadrivector basta con:

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \tag{1.4}$$

De este modo:

$$x^2 = (x_0)^2 - [(x_x)^2 + (x_y)^2 + (x_z)^2] \tag{1.5}$$

de tal modo que la *la norma de un cuadrivector puede ser negativa.* Un vector muy importante que usaremos muy a menudo es el **cuadrivector momento** p^μ. Este está definido por:

$$p^\mu \equiv (E/c, p_x p_y, p_z) \equiv (E/c, \mathbf{p}) \tag{1.6}$$

Todo cuadrimomento debe verificar que $p^2 = mc^2$, obteniendo entonces una relación intrínseca entre energía, masa y momento:

$$E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \tag{1.7}$$

2. Estructura fina del hidrógeno

Para entender las correciones relativistas de los niveles de energía del hidrógeno necesitamos usar la ecuación de Dirac, resoluble para el potencial de Coulomb. Es conveniente usar la teoría de las perturbaciones manteniendo solo los términos hasta los términos en el Hamiltoniano de Dirac para evitar cálculos tediosos.

2.1. Ecuación de Dirac

La **ecuación de Schrödinger** viene dada:

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{2.1}$$

Para corregir las ecuacion de Schrödinger en lo que se llamará la *ecuación de Dirac*, para la cual tuvimos introducir unas nociones básicas de relatividad especial. La ecaución de Dirac es entonces:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0 \qquad \mu \in \{0,1,2,3\} \tag{2.2}$$

Donde necestiamos explicitar las matrices γ^μ.

2.2. Acoplo de un Campo Electromagnético a la ecuación de Dirac

2.3. El átomo de hidrógeno sin correcciones