

Nuclear Entrega 1

Daniel Vázquez

Marzo 2025

Ejercicio 7

a) En este apartado tenemos que obtener la línea Yrast de dos núcleos con $A < 100$ y dos núcleos con $A > 150$. Los núcleos elegidos son el ^{84}Zr y el ^{86}Zr para $A < 100$, ^{156}Eu y ^{160}Eu para el $A > 150$.

^{84}Zr : {0, 539.92, 1262.81, 1887.91, 2136.39, 3088.97, 4068.7,
5135.9, 6302.4, 7498.0, 8743.6, 10175.5, 11821.1, 13666.3,
15659.9, 18032.4, 20618, 23180.0, 26830.1}[MeV]

^{86}Zr : {0, 751.75, 1666.57, 2669.88, 3298.44, 4326.12, 5524.3,
6321.08, 7396.46, 8650.0, 10142.9, 12060.9, 14149.0, 16050
, 18063, 20532}[MeV]

^{156}Eu : {0, 344.53, 797.39, 1340.86, 1959.2, 2633.1, 3314.6, 3836.7, 4380.4,
5006.6, 5716.7, 6489.3, 7315.9, 8082.2, 8848.8, 9647.9, 10414.6, 11097, 12035.4
13202.5, 13967.0, 14421.6, 15764}[MeV]

^{160}Eu : {0, 125.47, 389.37, 765.01, 1229.68, 1760.88, 2845.79, 2931.38, 3465.43, 4020.9, 4660.8,
5707.6, 6175.1, 7027.6, 7929.0, 8865.6, 9825.6, 10808.8, 1820.0, 12865.4, 13952.4, 15086.7, 16273.0,
17512.8, 18797.1, 20141.9}[MeV]

Entonces lo primero que hacemos es seleccionar las energías de las diferentes excitaciones y asociarlas con los diferentes valores de espín. Como pertenecen a bandas rotacionales de núcleos par-par, todos los estados pertenecientes a la línea Yrast deben tener espín par con paridad . Lo primero que hacemos es entrar en la lista de niveles de la nndc (list of levels) y elegir los que, para los estados tienen el valor de energía más pequeño. En principio no nos vamos a fijar en nada más, ya que así es la definición de la línea Yrast. Es posible que existan estados con valores altos (por ejemplo, el o el) que no pertenezcan a bandas rotacionales (siendo excitaciones de partículas individuales o de bandas vibracionales), pero esto debería ser detectable en la propia gráfica del yrast, y mencionado posteriormente. Así pues, las líneas yrast son [Fig. 1](#).

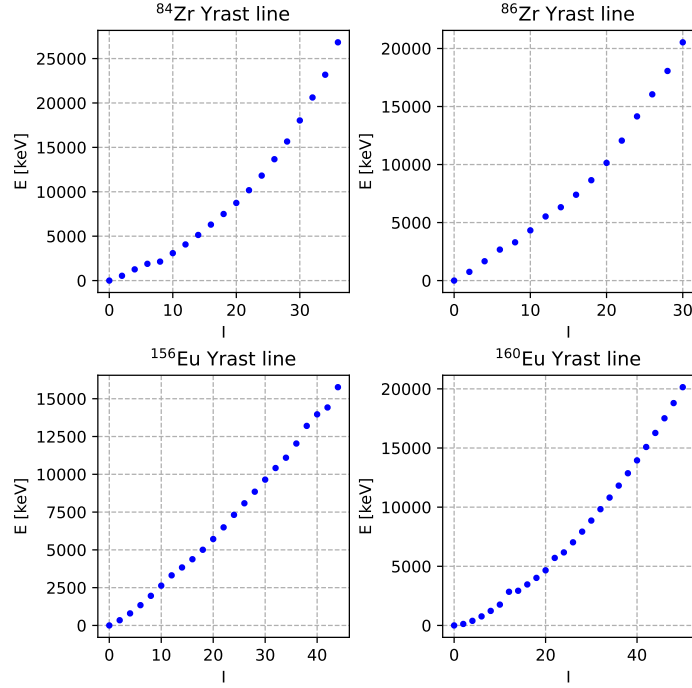
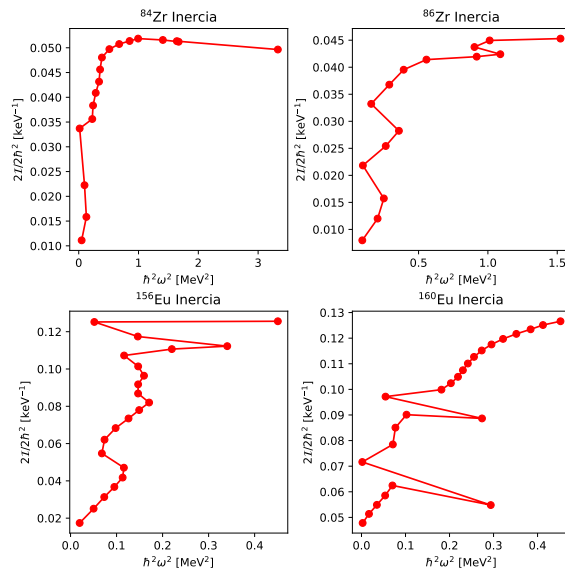


Figura 1: Líneas yrast.

b) En primer lugar tenemos que calcular el momento de inercia en función del cuadrado de la frecuencia. La relación entre el momento de inercia y la frecuencia se hace a través de las siguientes relaciones:

$$\frac{2I}{\hbar^2} = \frac{4J-2}{\Delta E_\gamma} \quad (\hbar\omega)^2 = (J^2 - J + 1) \left[\frac{\Delta E_\gamma}{2J-1} \right]^2 \quad \Delta E_\gamma = E(J) - E(J-2) \quad (1)$$

sacado del paper *The Backbendif Effect in Deformed e-e Nuclei* de Mohhamed E. Kelabi. Véase Fig. 2.

Figura 2: Inercia frente a $\hbar^2\omega^2$.

El apartado b) también nos dice que discutamos la aparición de “backbending” y que identifiquemos las bandas rotacionales. Las bandas rotacionales las identificamos en las líneas yrast, aunque no es difícil hacerlo en las representaciones de la línea de inercia (básicamente una nueva banda rotacional implica un cambio abrupto del momento de inercia y el comportamiento). Por ejemplo en el Europio 160 podemos ver 3 regiones e comportamiento “suave”, en el Europio 156 también tendríamos 3. En el Circonio 84 tendríamos una o dos zonas, y en el Circonio 86 tendríamos 3 o 4. Esto que vemos en la línea de inercia frente $\hbar^2\omega^2$ se corresponde bastante con lo que observamos en las líneas yrast Fig. 3.

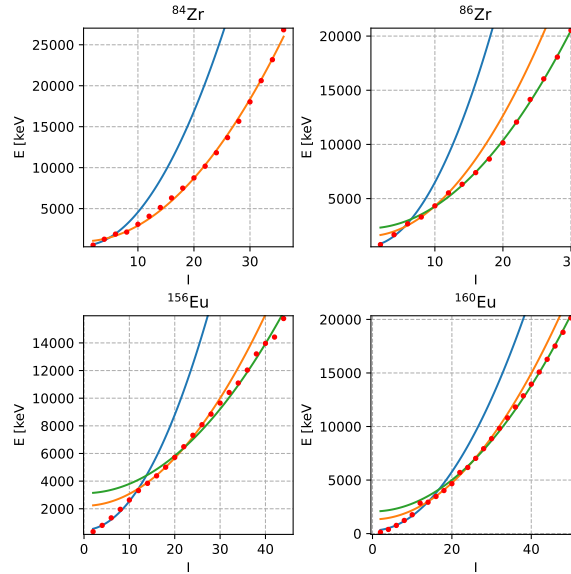


Figura 3: Bandas rotacionales en las líneas yrast.

Discutamos ahora el *backbending*. Citando a Xiang-Xiang Sun y Shan-Gui Zhou, en el apartado Models for Pairing Phenomena del libro Handbook of Nuclear Physics (pág. 2014): “The backbending: In a well-deformed superfluid nucleus, the rotational spectrum follows the $I(I+1)$ law, and the moment of inertia is almost a constant below a certain critical value of rotational frequency. In some deformed nuclei, the observed spectra indicate that there is a very steep increase of moment of inertia at high angular momenta. This is because when a deformed nucleus starts to rotate, the Coriolis force acts in opposite directions on the two nucleons of each time-reversal pair. As a consequence, the rotation tends to align the spins of the nucleons by successive breaking of pairs with high angular momentum”. En nuestras propias palabras: el backbending es el fenómeno por el cual el momento de inercia aumenta súbitamente como consecuencia de la energía rotacional ($\hbar\omega$) rompiendo un par con espines opuestos. En nuestro caso vemos la aparición del backbending en todos los núcleos prácticamente a partir del primer estado excitado. En algunos el backbending es mas fuerte que otros, tal y como podemos ver en Fig. 4.

c) Los resultados esperados por un fluido y por un sólido vienen dadas por la ecuación

$$\mathcal{I}_{sol} = \frac{2}{5}AmR^2 \left[1 + \frac{\beta}{3} (1 + 0.16\beta) \right] \quad \mathcal{I}_{flu} = \frac{9}{8\pi}\beta AmR^2$$

Donde $R = r_0A^{1/3}$ tal que $r_0 = 1.2$ fm. Una de las razones por las que cogimos nucleo par-par es porque así podemos obtener los valores de la deformación cuadrupolar usando como base de datos:

$$^{84}\text{Zr} : \beta = 0.177(5) \quad ^{86}\text{Zr} : \beta = 0.148(14) \quad ^{156}\text{Eu} : \beta = 0.189(3) \quad ^{160}\text{Eu} : \beta = 0.303(5)$$

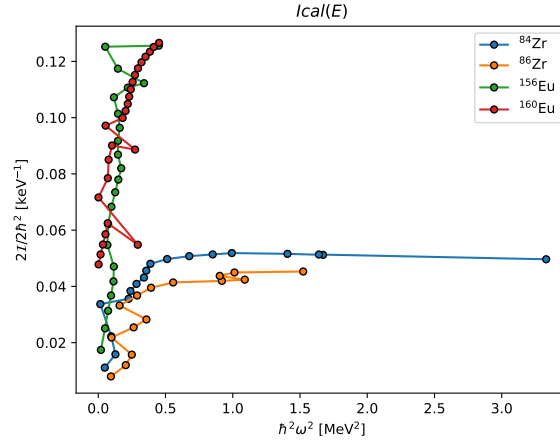


Figura 4: Bandas rotacionales en las líneas yrast.

Y usamos los siguientes defectos de masa para calcular m :

$$\begin{aligned} {}^{84}\text{Zr} : \Delta &= -71422 \text{ [keV]} & {}^{86}\text{Zr} : \Delta &= -77969 \text{ [keV]} \\ {}^{156}\text{Eu} : \Delta &= -64212 \text{ [keV]} & {}^{160}\text{Eu} : \Delta &= -66064 \text{ [keV]} \end{aligned}$$

Así pues tenemos los siguientes resultados numéricos 1. Véase Fig. 5 para la representación gráfica.

Tabla 1: Valores de la inercia en el caso sólido y fluido para cada uno.

	${}^{84}\text{Zr}$	${}^{86}\text{Zr}$	${}^{156}\text{Eu}$	${}^{160}\text{Eu}$
\mathcal{I}_{sol}	0.042450	0.043384	0.118941	0.128557
\mathcal{I}_{flu}	0.006342	0.005472	0.018898	0.031533

Como podemos ver a alta frecuencia el comportamiento se parece al de un sólido (acercándose bastante el valor) tal que a altas frecuencias $\mathcal{I} \approx \text{cte}$, mientras que para los valores de frecuencia más bajos tendríamos un comportamiento fluido, pero que rápidamente tiende al sólido creciendo de manera constante $\mathcal{I} = \alpha(\hbar^2\omega^2)^2$ en cada una de las bandas rotacionales individualmente. A este fenómeno, en el que se le conoce como *backbending*.

d) Ahora tenemos que buscar las bandas vibracionales. Como sabemos los fonones cargan una energía de $n\hbar\omega$ siendo n el número de excitación. Consecuentemente, si la energía de un estado 2^+ viene dada por una excitación fonónica $E(2^+) = \hbar\omega$, debería ocurrir que la siguiente excitación 4^+ (del mismo modo de vibración) verique $E(4^+) = 2\hbar\omega$. Así pues, la relación

$$\frac{E(4^+)}{E(2^+)} \approx 2$$

Para la excitación de tercer podríamos encontrar un $E(6^+)$ tal que:

$$\frac{E(6^+)}{E(2^+)} \approx 3$$

Lógicamente podríamos buscar vibraciones de un fonón en 0^+ y en 2^+ , o vibraciones de dos fonones en 4^+ o 2^+ . Sin embargo nosotros queremos asegurarnos de que es de una banda vibracional. Si fuera un 2^+ podría pertenecer a cualquier otro fenómeno (excitación de partícula individual dentro

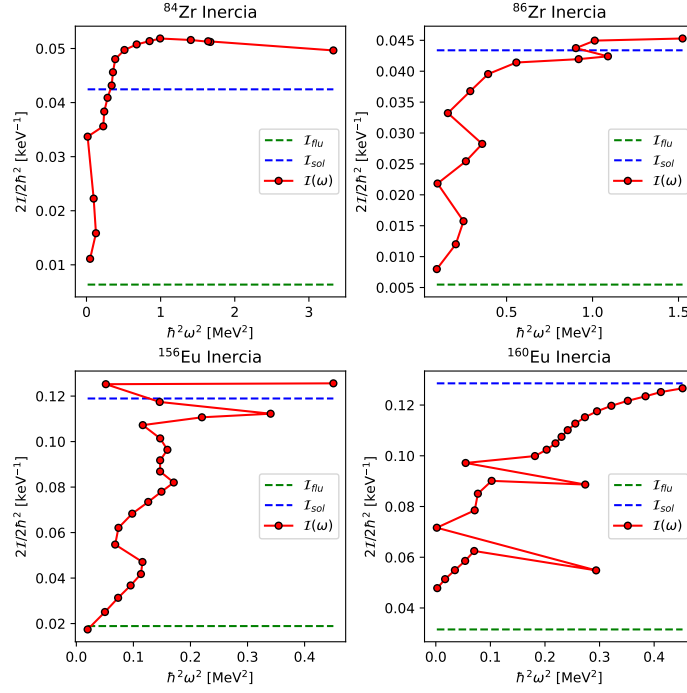


Figura 5: Inercia con el el momento de inercia fluido y sólido.

del marco del modelo de capas). Así pues, siendo un 6^+ o 8^+ nos aseguramos que sea, con bastante probabilidad, una excitación vibracional.

Así pues, busquemos tanto el ^{84}Zr y ^{86}Zr . En el ^{84}Zr podemos ver que los valores con $E(2^+)$ y con $E(4^+)$ que mejor verifican dichas relaciones son los mismos que hemos usado, tal que:

$$^{84}\text{Zr} : E(2^+) = 539.92 \text{ keV} \quad E(4^+) = 1262.81 \quad E(6^+) = 1887.91 \text{ keV} \quad E(8^+) = 2136.39 \text{ keV}$$

tal que podemos ver que:

$$^{84}\text{Zr} : \frac{E(4^+)}{E(2^+)} = 2.34 \quad \frac{E(6^+)}{E(2^+)} = 3.50 \quad \frac{E(8^+)}{E(2^+)} = 3.96$$

En el ^{86}Zr ocurre un poco lo mismo:

$$^{86}\text{Zr} : E(2^+) = 751.75 \text{ keV} \quad E(4^+) = 1666.57 \quad E(6^+) = 2669.88 \text{ keV} \quad E(8^+) = 3298.44 \text{ keV}$$

tal que podemos ver que:

$$^{86}\text{Zr} : \frac{E(4^+)}{E(2^+)} = 2.22 \quad \frac{E(6^+)}{E(2^+)} = 3.55 \quad \frac{E(8^+)}{E(2^+)} = 4.39$$

Estas serían las mejores candidatas a *bandas rotacionales* que tenemos para nuestros dos átomos.

Ejercicio 8

Aquí tenemos que aplicar la corrección de Strutinsky a nuestros núcleos dados. Primero vamos a realizar la representación en bandas de estos núcleos:

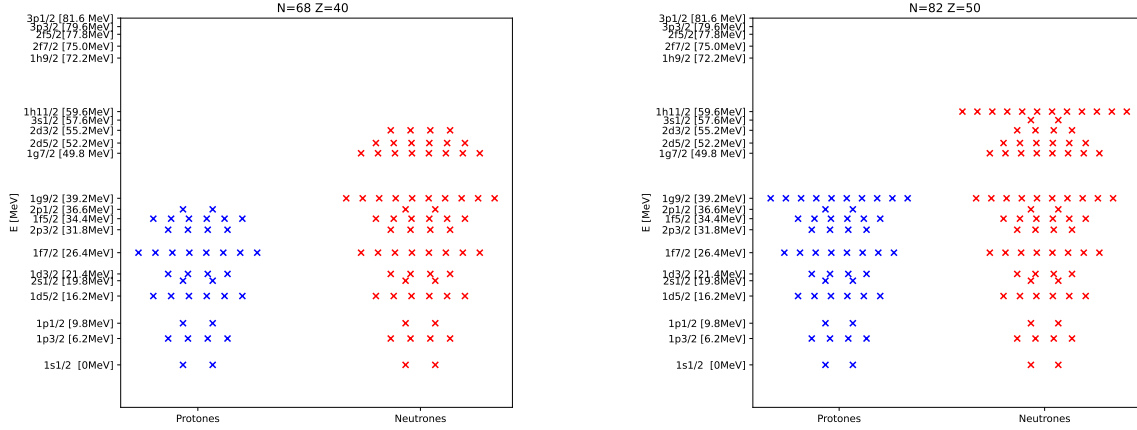


Figura 6: Esquema de bandas para cada uno de los núcleos dados.

Como podemos ver, para el núcleo $Z=50$ y $N=82$ tenemos que dos números mágicos. Para el núcleo $Z=40$ y $N=68$ no tenemos números mágicos, aunque si capas llenas. Esto significa que deberían ser núcleos con cierta estabilidad. La corrección de Strutinsky predeciría entonces que

$$\delta E_{\text{shell}} = E_{\text{shell}} - \tilde{E}_{\text{shell}}$$

sea negativa, por lo menos, cerca de los números mágicos. Lo primero que tenemos que hacer es calcular $\tilde{\lambda}_F$ lo cual se hace a través de la siguiente fórmula

$$A = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}_F} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad g(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_i \exp \left[-\frac{(\varepsilon_i - \varepsilon)^2}{\gamma} \right]$$

siendo A el número de protones o neutrones. Representamos gráficamente $g(E)$ en función de γ en Fig. 7.

Tenemos que resolver independientemente el problema para los protones y neutrones, para luego sumarlos a la hora de considerar el núcleo global. Lógicamente, al tener integrales no analíticas, la única forma de resolver el problema es hacerlo de manera computacional. Así pues, primero calculamos $\tilde{\lambda}_F$ para cada uno de los Z y N , con diferentes γ (en particular 1,2,10,20) en tabla 2. De tal modo que obtenemos los siguientes valores de δE_{shell} en tabla 3. Como podemos ver las variaciones son muy pequeñas para poco γ , lo cual tiene sentido si pensamos que para poco γ estamos cerca del problema discreto (en el que $\tilde{E} \approx E$). También podemos ver que en general para el núcleo doblemente mágico los valores de δE son negativos (excepto para $\gamma = 3$), mientras que para el no mágico $\delta E > 0$ (excepto para $\gamma = 0.8, 1$). Este resultado tiene bastante sentido, ya que $\delta E < 0$ indica que el núcleo es más estable de lo que predecía el modelo de bandas, lo cual es de esperar para un núcleo doblemente mágico. Para el no doblemente mágico $\delta E > 0$ implica que es más inestable de lo que se predecía.

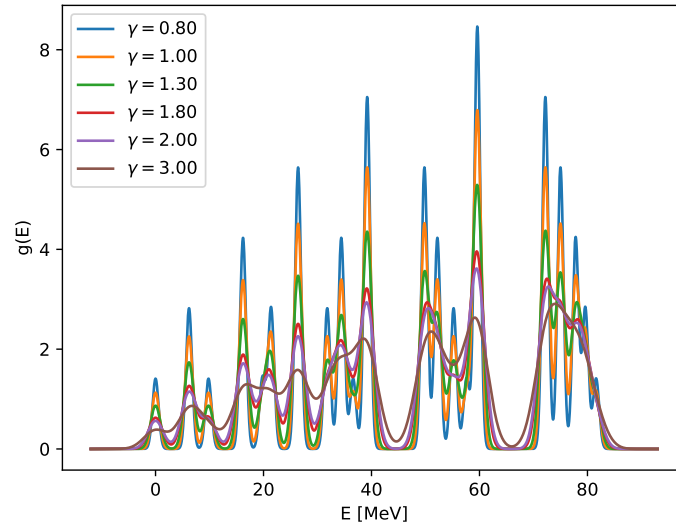


Figura 7: La densidad de estados frente a la energía según la corrección de Strutinsky.

Tabla 2: Valores de λ_F [MeV] para cada átomo y γ .

γ	Z=50	N=82	Z=40	N=60
0.80	45.341647	67.770095	37.731095	56.482370
1.00	44.514230	66.631873	37.649193	56.520170
1.30	44.520530	65.915758	37.508490	56.576872
1.80	44.535231	65.926259	37.287986	56.604172
2.00	44.543631	65.930459	37.218684	56.581072
3.00	44.581432	65.961959	37.023380	56.366867

Tabla 3: Valores de δE [MeV] para cada uno de los valores.

γ	Z=50	N=82	Z=40	N=60
0.800000	-0.000000	-0.000000	-0.039040	-0.059641
1.000000	-0.000000	-0.000000	-0.057124	-0.097171
1.300000	-0.000000	-0.000000	0.141067	0.041274
1.800000	-0.000044	-0.000006	0.630400	0.483845
2.000000	-0.000280	-0.000029	1.009655	0.729752
3.000000	0.056875	0.011372	3.433639	2.834942