2 XI - XIROSCOPIO

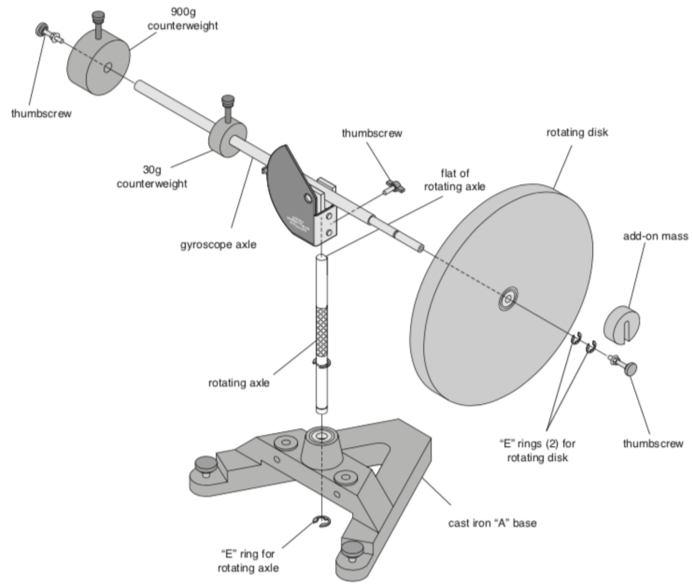

Figura 2.1: Partes do xiroscopio do laboratorio

2.1. Precaucións

O xiroscopio acumula unha considerábel cantidade de energía cinética. Non tratar de paralo en seco, senón ir rozando facendo pinza cos dedos ata que pare.

2.2. Obxectivos

- Estudar a dinámica dun trompo simétrico. Entender a resposta deste corpo ríxido a unha forza externa.
- Analizar os movementos de precesión e nutación.
- Obter os momentos principais de inercia de distintas maneiras e comparalos.

2.3. Material

- Xiroscopio con soporte
- Disco, contrapeso e pesa pequena adicional.
- Soporte para polea
- Tacómetro laser Peak-Tech
- Fío propulsor groso, fío delgado e pesas

2.4. Procedemento experimental

2.4.1. Primeira Parte: Ecuación do movemento

Nesta parte preténdese entender a resposta do xiroscopio a acción de momentos exteriores.

- Equilibrar con coidado o xiroscopio e poñelo en rotación.

- Usando unha vara ou unha regra manter contacto perpendicular co eixe do xiroscopio, exercendo suavemente unha presión constante. Cambiar a dirección de aplicación desta presión. Observar e anotar a resposta do xiroscopio.

- Facer un debuxo representando, para **un caso** concreto, os vectores da forza aplicada $\mathbf{F}$, torque $\mathbf{N}$, momento angular $\mathbf{L}$ e a súa variación $d\mathbf{L}$. Verificar que $\mathbf{N}$ e $d\mathbf{L}$ son vectores paralelos.

- Co xiroscopio xirando, e con moito coidado, agarrar pola base e levantalo. Movelo en diferentes direccións e comprobar que o eixe permanece invariable en dirección. Explica este resultado en base ao aprendido no punto anterior.

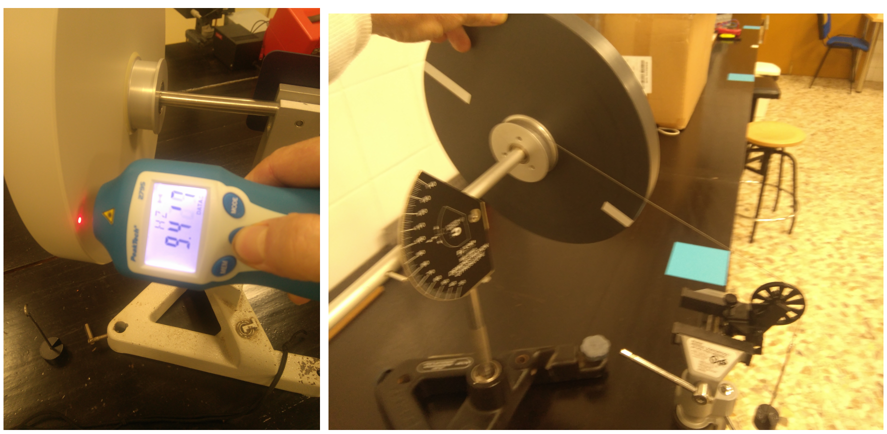

Figura 2.2: Na esquerda: Tacómetro láser. Na pantalla debe aparecer o sinal de eco ((())) para que o número mostrado sexa o resultado dunha medida. Observaremos que hai fortes fluctuacións nese número. A medida correcta producirase cando o díxito das unidades esté estabilizado, e o das décimas baixando amodo. Comprobar que o valor é razoábel. Dereita: montaxe para a medida directa do momento de inercia I_1.

2.4.2. Segunda Parte: Movemento de Preceśión

Queremos saber a resposta do xiroscopio a un torque dado, en función do seu propio momento angular.

- Desequilibra o xiroscopio colgando a pesa adicional no extremo curto do eixo do disco xiratorio.

- Enrola un fío de 1.5 m no carril da roda e tira con forza para producir a rotación do disco con velocidade angular ω o máis alta posíbel[1]. Libera o eixo do xiroscopio no plano horizontal, acompañándoo suavemente coa man para que permaneza nel sen vibracións.

- Mide o período, T_p, dunha revolución completa.

[1] Un bo tirón pode colocar o xiroscopio no rango dos 10-15 Hz. Nota que o tacómetro mide o dobre porque o disco leva dúas tiras brillantes diametralmente opostas.

Obtén a velocidade angular media de rotación, ω, medíndoa co tacómetro dixital na metade da volta de precesión[2].

- Repetir o prodeceso anterior a medida que a frecuencia angular de rotación vai diminuindo ata conseguir un conxunto suficiente de datos $(\omega_i, T_{p,i})$. Cada medida deber ser preparada para que sexa independente da anterior. Para iso, antes de tomala, sempre volver a colocar o eixo en posición horizontal e acompañalo para soltalo sen vibracións.

- Efectúa tres series de polo menos 5 medidas cada unha (segundo vaia diminuíndo a frecuencia) que comecen en valores altos de ω (polo que haberá que lanzar o disco 3 veces).

2.4.3. Terceira Parte: Movemento de Nutación

Equilibra o xiroscopio outra vez (retira a masa colgante adicional) e ponno en rotación co eixo fixo nunha dirección arbitraria. Imprímelle unha pequena perturbación instantánea (un pequeno golpe) no extremo do eixo, observarás un movemento periódico de cabeceo denominado *nutación*.

- Cronometrando un número de nutacións, obtén a frecuencia Ω_n, e mide a frecuencia (media) de rotación do disco ω.

- A medida que a frecuencia de rotación vai decaendo, repite as medidas para obter unha serie de valores $(\Omega_n(i), \omega(i))$. Repite o proceso ata obter tres series de medidas.

2.4.4. Cuarta Parte: Obtención directa dos momentos de inercia

Como se explica no apéndice, chamamos x_3 ao eixo de simetría perpendicular ao disco do xiroscopio e que pasa polo seu centro. Polo tanto, ω_3 denotará a velocidade angular ao redor do devandito eixo, e I_3 o momento de inercia con respecto ao mesmo.

Momento de inercia I_3 con respecto ao eixo de simetría

O momento de inercia pode obterse directamente mediante a expresión

$$\dot{L}_3 = I_3\,\dot{\omega}_3 = N_3 \tag{2.1}$$

Para xerar un torque N_3 enrola un fío ao carril do disco e, no outro extremo, colga unha masa m. Facendo asomar o carril polo borde da mesa consegue que a masa poida caer ata o chan (con coidado de que o fínon roce coa mesa). A forza de tracción $m\,g$ provoca un torque $N_3 = r\,m\,g$ onde r é o radio do disco ao que se enrola a corda, e unha aceleración angular $\dot{\omega}_3 = a/r$ onde a é a aceleración lineal dun punto do borde do carril.

Para obter a, mide a distancia h e o tempo de caída t da pesa ata o chan.

$$a = \frac{2h}{t^2}$$

Substituindo en (2.1) resulta

$$I_3 = \frac{mg\,r^2}{2h}t^2 \tag{2.2}$$

Toma 5 medidas distintas de h e t, e obtén o valor de I_3 coa súa incerteza a partir do axuste a unha recta.

[2] É conveniente utilizar algunha referencia fixa (como a barra vertical adicional) para marcar o paso do extremo longo do eixo do xiroscopio no seu xiro de precesión. Situando esta referencia mediremos o tempo transcorrido cando pase dúas veces consecutivas por diante dela. A frecuencia de rotación do disco ao redor do seu eixo de simetría medirase na metade da volta realizada.

Momento de inercia I_1 con respecto a un eixo perpendicular ao de simetría

- Fai unha montaxe que suxeite o lado longo do brazo do xiroscopio a dous resortes verticais colgados dun soporte (barra adicional).

- Mide a constante recuperadora do resorte mediante o método dinámico (medindo periodos) colgando unha pesa. Supón que ambos resortes son iguais.

- Equilibra con coidado o xiroscopio e engancha o extremo longo do eixo de rotación aos dous resortes de forma que esté en equilibrio en posición horizontal. D será a lonxitude do brazo de par, dende o eixo de xiro da precesión ata o punto de aplicación dos resortes.

- Pon en oscilación o eixo do xiroscopio no plano vertical e mide a frecuencia de oscilación. A ecuación do movemento

$$I_1 \, \ddot{\varphi} = N_1 = -2kD^2\varphi \tag{2.3}$$

conduce a unha solución harmónica $\varphi(t) = a\cos(\omega_1 t)$ de frecuencia

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{I_1}}D \tag{2.4}$$

de onde podes extraer I_1.

2.4.5. Medidas do xiroscopio

Usando a regra metálica e o calibre, mide todas as distancias que sexan relevantes para obter os resultados anteriores. Para evitar desmontar o xiroscopio, esta é a *lonxitude total do eixo*:

xiroscopio escuro Leybold (sen parafuso final)	$\rightarrow$	$48 \pm 0{,}1$cm
xiroscopio claro Phywe	$\rightarrow$	$50 \pm 0{,}1$cm

e a masa do disco: 1.741 kg a do Leybold (escuro) e 1.340 kg a do Phywe (claro).

2.5. Resultados a presentar no informe

- Fai un debuxo do xiroscopio identificando todas as partes e sitúa sobre el un sistema de referencia inercial para describilo. Debuxa os vectores forza $\vec{F}$, posición do punto de aplicación $\vec{r}$, torque $\vec{N}$, momento angular $\vec{L}$, variación de momento angular $d\vec{L}$. Verifica que ambos membros da ecuación (2.5) son vectores paralelos. Faino para tres casos de $\vec{F}$ distintos en posicións diferentes.

- Obtén os valores de I_3 e de I_1 de forma directa, facendo uso das ecuacións (2.2) e (2.4).

- Usando os datos $(\Omega_p(i), \omega(i))$ e, a partir do axuste da relación lineal (2.8) do apéndice, obtén o valor do momento de inercia I_3 respecto do eixo de rotación do disco. Acha a media dos valores axustados e compárao con valor obtido directamente.

- Usando I_3 e os datos $(\Omega_n(i), \omega(i))$, determina, a partir de (2.9), o valor de I_1. Acha a media dos valores axustados e compárao co valor obtido directamente.

2.5.1. Suxerencias para unha análise detallada

- Explica por que ao mover e xirar a base do xiroscopio, a dirección do eixo de rotación do disco non varía (podes comprobalo tú mesmo). Os xiroscopios son utilizados en navegación para coñecer a orientación da nave con respecto ao horizonte.
- Calcula de maneira teórica os momentos de inercia I_3 e I_1 (para este, supoñer que o disco e o contrapeso son masas puntuais) e comparalos cos valores obtidos nos apartados anteriores.
- Unha das aplicacións tecnolóxicas do xiroscopio é o uso como estabilizador frente a vibracións. Isto débese a que ao perturbar o sistema, o eixe de simetría oscila de forma estable ao redor da dirección orixinal. Ocórreseche algunha forma de comprobar este efecto?

2.6. Apéndice: introducción teórica

A ecuación que describe o movemento dun corpo ríxido sometido a un torque $\mathbf{N}$ é

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}\,. \tag{2.5}$$

Esta ecuación é a xeneralización a un sólido da ecuación de Newton $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$. Igualmente, o momento angular

$$\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{2.6}$$

é a xeneralización do momento lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. A diferencia de m, que é un escalar, I é unha matriz 3×3. Por esta razón, en xeral, os vectores $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ non serán paralelos. A matriz I denomínase *tensor de inercia*. As cantidades da diagonal I_{ii} $i = 1, 2, 3$ son os *momentos de inercia* do corpo con respecto aos tres eixos. Por exemplo, para un sistema compuesto por N partículas de masas m_a,

$$I_{11} = \sum_{a=1}^{N} m_a (x_{a,2}^2 + x_{a,3}^2)\,.$$

É dicer, contribuen todos os elementos compoñentes, proporcionalmente a súa masa e ao cadrado da súa distancia ao eixo x_1. En cada sistema de coordenadas, as compoñentes I_{ij} da matriz I son distintas. Hai un sistema moi vantaxoso de eixos no que I ées *diagonal* e *constante*

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Este é un sistema *non-inercial* no que os eixos ortogonais son solidarios co corpo e se denomina sistema de *eixos principais*, (x_1, x_2, x_3). En corpos con simetría, os eixos principais coinciden cos eixos de simetría. Nun cubo trátase dos eixos perpendiculares ás caras. Un xiroscopio, ou trompo simétrico, é un corpo que ten un eixe de simetría cilindrica que tomaremos como o eixe x_3, ademáis de ter un punto fixo. A simetría cilíndrica implica que as direccións x_1 y x_2 son indistinguibles e, por tanto, I só terá dúas compoñentes diferentes $I_{11} = I_{22} \equiv I_1$ y $I_{33} \equiv I_3$.

Supoñamos que o eixo do xiroscopio está situado horizontalmente e o disco xira con velocidade angular $\omega_3 = \omega$ ao redor do seu eixo de simetría. Se engadimos unha masa m a unha distancia d do punto de apoio, o torque que exerce será $N = mgd$ na dirección horizontal, o cal causará, unha rotación do vector $\mathbf{L}$ no mesmo plano, un ángulo $d\boldsymbol{\phi} = d\phi\,\hat{\mathbf{z}}$. É dicer $\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathbf{L} + d\mathbf{L}$ con $d\mathbf{L} = \mathbf{L} \times d\boldsymbol{\phi}$ (ver fig. 2.3). Polo tanto $dL = Ld\phi \operatorname{sen} \pi/2 = Ld\phi$. Así

$$N = \frac{dL}{dt} = L\frac{d\phi}{dt} = L\Omega_p \tag{2.7}$$

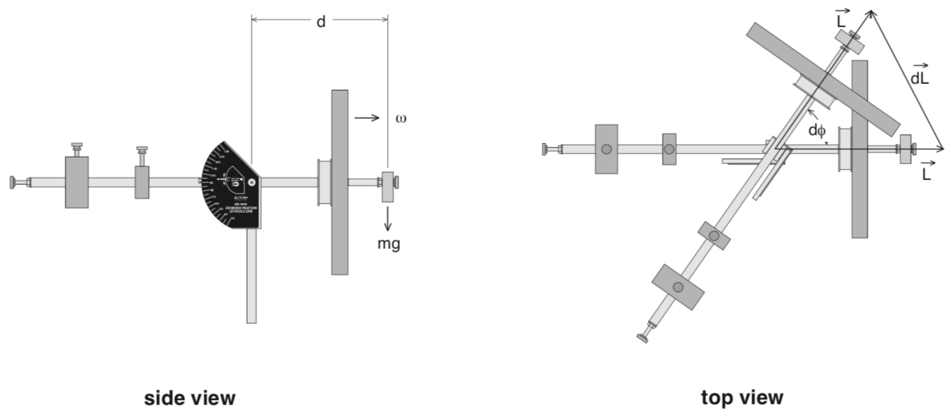

Figura 2.3: Torque e precesión ocasionadas por unha masa adicional

onde Ω_p é a velocidade angular de precesión. Despexando obtemos unha relación entre as velocidades angulares de precesión e rotación

$$\Omega_p = \frac{N}{L} = \frac{mgd}{I_3 \omega}\,. \tag{2.8}$$

Unha das aplicacións tecnolóxicas do xiroscopio é o seu uso como estabilizador frente a vibracións. Isto débese a que ao perturbar o sistema, o eixo de simetría oscila de forma estable confinado a un sector ao redor da dirección orixinal. Ditas oscilacións son as nutacións, e súa amplitude é menor canto maior é a frecuencia de xiro. A teoría afirma que, para pequenas amplitudes de nutación, cúmprese[3]

$$\Omega_n = \frac{I_3}{I_1}\omega\,. \tag{2.9}$$

onde $I_1 = I_{11} = I_{22}$ é o momento de inercia en relación aos eixos x_1 ou x_2, que son perpendiculares ao eixo de simetría x_3.

[3]Ver Mecánica de Symon, Eq. (11.81)