

# Electrónica Física

Daniel Vázquez Lago



# Índice general

<b>1. Física de semiconductores</b>	<b>5</b>
1.1. Banda de valencia y conducción . . . . .	5
1.1.1. Semiconductores directos e indirectos . . . . .	6
1.1.2. Forma de los mínimos y máximos de banda: masa equivalente . . . . .	6
1.1.3. Ecuación del movimiento . . . . .	7
1.2. Portadores: concepto de hueco y electrón . . . . .	7
1.3. Densidad de portadores y clasificación de semiconductores . . . . .	9
1.3.1. Densidad de portadores en el caso más general posible . . . . .	9
1.3.2. Semiconductores no degenerados y degenerados . . . . .	10
1.3.3. Semiconductores intrínsecos caso no degenerado . . . . .	11
1.3.4. Semiconductores extrínsecos caso no degenerado . . . . .	12
1.3.5. Semiconductores extrínsecos: régimen intrínseco y extríseco . . . . .	13
1.4. Valores típicos . . . . .	14
1.5. Ejercicios . . . . .	14
1.6. Solucion . . . . .	17
<b>2. Fenómenos de transporte en semiconductores</b>	<b>27</b>
2.1. Arrastre . . . . .	27
2.1.1. Introducción: modelo de arrastre y difusión . . . . .	27
2.1.2. Corriente de arrastre . . . . .	28
2.1.3. Dispersión: efectos en la movilidad . . . . .	29
2.1.4. Resistividad y movilidad . . . . .	31
2.1.5. Curvatura de bandas . . . . .	31
2.2. Difusión . . . . .	31
2.2.1. Corrientes de difusión . . . . .	32
2.2.2. Relaciones de Einstein . . . . .	32
2.3. Procesos de generación y recombinación . . . . .	33
2.3.1. Introducción . . . . .	33
2.3.2. Consideraciones acerca los procesos RG . . . . .	34
2.3.3. Recombinación directa en semiconductores de gap directo . . . . .	34
2.3.4. Recombinación indirecta en semiconductores de gap indirecto: procesos RG . . . . .	35
2.3.5. Simplificaciones: balance detallado . . . . .	36
2.3.6. Recombinación Auger . . . . .	40
2.3.7. Recombinación superficial . . . . .	40
2.4. Ecuaciones de continuidad . . . . .	40
2.4.1. Introducción . . . . .	40
2.5. Pseudoniveles de Fermi . . . . .	41
2.6. Otros fenómenos de transporte . . . . .	42
2.6.1. Emisión termoiónica . . . . .	42

2.6.2. Transporte túnel . . . . .	42
2.6.3. Efectos a campos altos . . . . .	42
2.7. Ejercicios . . . . .	42
<b>3. La unión PN</b>	<b>53</b>
<b>4. El transistor bipolar de unión</b>	<b>55</b>
<b>5. El transistor MOSFET</b>	<b>57</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>59</b>
A.1. Densidad de Estados y Estadística de Fermi-Dirac . . . . .	59
A.1.1. Niveles de energía . . . . .	59
A.1.2. Estadística de Fermi-Dirac . . . . .	62

# Capítulo 1

## Física de semiconductores

### 1.1. Banda de valencia y conducción

Un semiconductor es un material sólido que presenta dos bandas (en realidad presenta más, solo accesibles<sup>1</sup> a energías térmicas o electromagnéticas muy altas, y por tanto innecesarias para nuestro estudio). Para definir una banda primero tenemos que entender que los electrones en los sólidos se pueden describir mediante una suma de ondas planas, y por tanto la energía de estos se puede describir como una función del momento de onda  $E(k)$  (aunque no tiene porque ser necesariamente de la forma  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ ). Así, debido al carácter fermiónico de los electrones y otros potenciales aparecen energías inaccesibles para nuestros electrones, i.e. para ningún  $k$  existen esas energías. Así aparecen diferentes *bandas*, limitadas por una *energía superior* y una *energía inferior*.

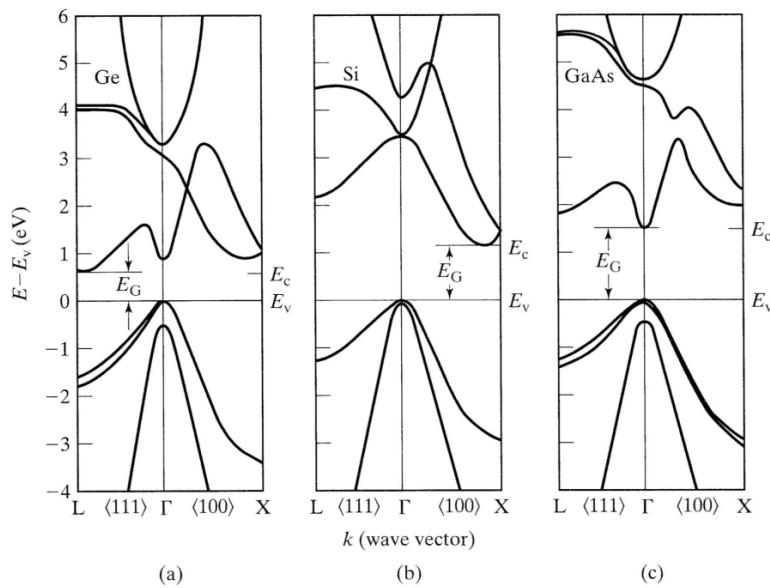


Figura 1.1: Bandas de conducción y valencia para algunos semiconductores.

Como dijimos, un semiconductor posee dos bandas, separadas por una energía  $E_g$ . A la banda con energía superior se le llama **banda de conducción** (B.C) y a la banda inferior se le llama **banda de valencia** (B.V). Las bandas, a su vez, poseen diferentes líneas de dispersión, esto es diferentes

<sup>1</sup>Cuando decimos accesibles nos referimos a que existe una posibilidad no nula de que estén ocupadas.

relaciones  $E(k)$ . El número y forma de estas dependerá del tipo de material y la dirección de la onda, por esa misma razón solemos ver en la parte inferior de las bandas  $\langle 111 \rangle$  o  $\langle 100 \rangle$ . Está denotando la dirección de la onda. En general suelen ser materiales muy simétricos, y por tanto con pocas direcciones representamos todas las posibles relaciones de dispersión.

La *energía mínima de la banda de conducción* se denota como  $E_c$ , la *energía máxima de la banda de valencia* se denota por  $E_v$ , y la diferencia entre el máximo de la BV y el mínimo de BC se denota por  $E_g$ :

$$E_g = E_c - E_v \quad (1.1.1)$$

En general se suele definir  $E_v = 0$  como referencia. Así la banda de valencia posee energías negativas, y la banda de conducción energías positivas. Veamos las características de las bandas:

- **Banda de valencia:** el *máximo siempre aparece en  $k = 0$* . Está dividida en 3 subbandas (3 relaciones de dispersión), 2 de ellas degeneradas en  $k = 0$  (son indistinguibles en  $k = 0$ ).
- **Banda de conducción:** está dividida en subbandas (aunque el número depende del material), y el valor de  $k_{\min}$  tal que  $E_{\min} = E(k_{\min})$  del dependerá del material.

### 1.1.1. Semiconductores directos e indirectos

Como hemos dicho,  $E_c$  es el mínimo de la banda de conducción y  $E_v$  es el máximo de la banda de valencia. En función del valor de  $k_{\min}$  distinguimos dos tipos de semiconductores:

- Definimos un **semiconductor indirecto** a aquel que verifica que  $k_{\min} \neq 0$ . Es decir, el gap de energía sucede entre diferentes momentos (lo que hará que cuando se excite a un electrón de la BV tenga que darsele un momento).
- Definimos un **semiconductor directo** a aquel que verifica que  $k_{\min} = 0$ . Es decir, el gap de energía sucede a  $\Delta k = 0$  (lo que hará que cuando se excite a un electrón de la BV no se pueda intercambiar momento).

### 1.1.2. Forma de los mínimos y máximos de banda: masa equivalente

Cerca de los extremos de las bandas  $E_0 = E(k_0)$  tenemos que se puede aproximar la energía por una función parabólica, tal que:

$$E = E_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)_{k_0} (k - k_0)^2 \quad (1.1.2)$$

Como podemos ver, esto se parece mucho a la expresión  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  que se usa para *partículas libres*. Es decir, cerca de los extremos de las bandas, los *portadores actúan como partículas libres con masa efectiva  $m^*$*  definida como

$$(m^*)^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \quad (1.1.3)$$

Imagen de los mínimos/máximos.

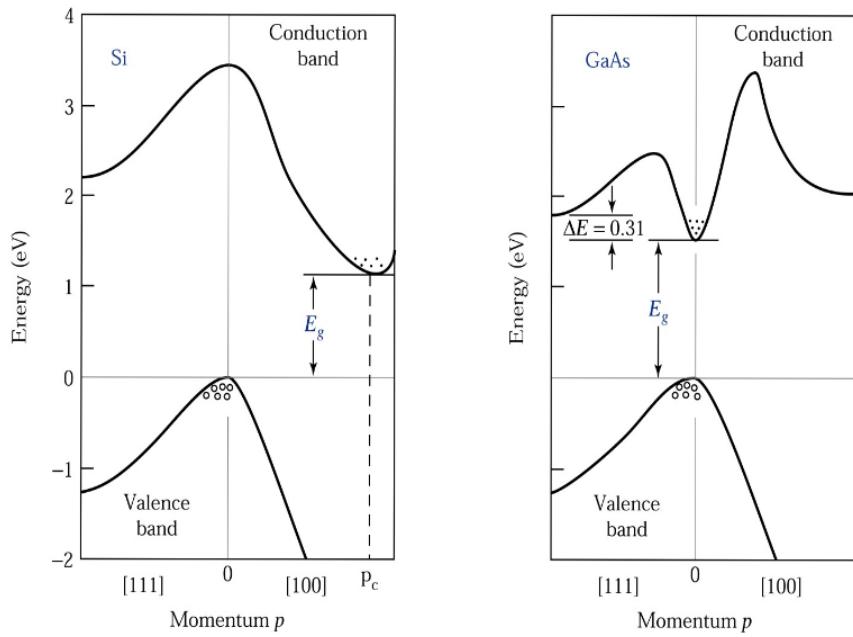


Figura 1.2: A la izquierda semicondutor de gap indirecto y a la derecha de gap directo.

### 1.1.3. Ecuación del movimiento

La ecuación del movimiento para los electrones es una generalización de la ecuación de Newton usando el momento de onda del electrón  $\mathbf{k}$ . Sabiendo que

$$\mathbf{F} = m^* \mathbf{a} = m^* \dot{\mathbf{v}} = m^* \hbar \dot{\mathbf{k}} m^* \quad (1.1.4)$$

de lo que se deduce que

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.1.5)$$

pudiendo ser la fuerza, por ejemplo, la fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , o cualquier otra.

## 1.2. Portadores: concepto de hueco y electrón

En los semiconductores hay 2 tipos de portadores, los portadores tipo hueco (o tipo  $p^2$ ) y tipo electrón (tipo  $n$ ). La pregunta que nos deberíamos plantear en este momento es: ¿Qué sentido tiene que existan portadores tipo electrón/hueco si solo tenemos electrones en el semiconductor?; ¿Como que tipo electrón, no deberían ser electrones? La respuesta como siempre es complicada. Como hemos dicho, cerca de los extremos las partículas, los electrones se comportan como electrones libres con masa efectiva  $m^*$  (de hay viene *tipo electrón* se comportan casi como electrones). Sin embargo, esto lleva a un problema, ya que la masa efectiva de un electrón en el máximo de la banda de valencia sea negativa (en un máximo  $\partial^2 E / \partial k^2 < 0$ ),

Supongamos que tenemos la capa de valencia llena salvo por un electrón, que se ha excitado y ha subido a la capa de conducción. En la banda de valencia habrá entonces  $N$  electrones menos uno. La suma de los momentos de todos los electrones de la banda será entonces:

<sup>2</sup>Por el hecho de que se pueden describir como partículas con carga positiva.

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{4N-1} \mathbf{k}_i \quad (1.2.1)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{4N} (\mathbf{k}_i) - \mathbf{k}_e \quad (1.2.2)$$

denotándolo por  $\mathbf{k}_e$  ya que es un electrón cualquiera (son indistinguibles). Como sabemos, la suma del momento de los electrones en una banda tiene que ser cero, ya que  $k$  tiene tanto valores negativos y positivos, y están todos ocupados. Es decir, tenemos que el momento total de la banda será:

$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_h = -\mathbf{k}_e \quad (1.2.3)$$

si a este momento total lo llamamos  $\mathbf{k}_p$  (momento de portador  $p$  o hueco), tenemos que *el movimiento efectivo de una capa sin un electrón es en el sentido opuesto al que tendría un electrón individual en la misma*. A este artificio matemático lo llamamos hueco, y no es más que la manera de describir el comportamiento de una capa entera a través de unas pocas partículas. La energía también tendrá el signo opuesto, ya que:

$$E_h = \sum_i E_i - E_e \quad (1.2.4)$$

y como  $\sum_i E_i$  es una constante (se define como cero). Así pues:

$$E_h \equiv -E_e \quad (1.2.5)$$

Y por tanto, aunque la masa efectiva de un electrón en el máximo de la banda de valencia sea negativa (en un máximo  $\partial^2 E / \partial k^2 < 0$ ), para el objeto matemático así definido tenemos que la masa efectiva será positiva, y la carga será positiva. Que la carga sea positiva no es tan obvio. Para ello tenemos que ver que la ecuación del movimiento

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}_h}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_h \times \mathbf{B}) \quad (1.2.6)$$

hace que se comporte como un electrón con carga positiva ( $\mathbf{k}_h \equiv -\mathbf{k}_e$ ). La pregunta ahora es: ¿Tiene sentido físico? La respuesta es que sí. El sentido físico está en que cuando excitamos un electrón a la BC desde la BV, queda un estado sin ocupar, un hueco, en la banda de valencia. Este hueco podría ser llenado por los electrones vecinos, que desde fuera lo veríamos como un movimiento efectivo del hueco, que además tendría el sentido contrario al del electrón (si los electrones saltan por ejemplo de izquierda a derecha por culpa de un campo eléctrico, veremos al hueco saltando de la derecha a la izquierda).

Consecuentemente los electrones en la banda de conducción se comportarán como electrones normales libres por la salvedad de que la masa efectiva será diferente; mientras que la falta de electrones en la banda de conducción (por la excitación de estos a la banda de conducción) se describirá a través de una serie de partículas con masa efectiva positiva diferente a la masa del electrón, carga positiva, con momento y energía efectiva de signo contrario al que tendría un electrón libre en la banda de valencia.

## 1.3. Densidad de portadores y clasificación de semiconductores

En esta sección vamos a tratar de expresar la densidad de portadores hueco, denotado por  $p$ , y la densidad de portadores electrones, denotado por  $n$ . Primero estudiaremos el caso mas general posible, en función de la densidad de estados  $g(E)$  y de la función de Fermi-Dirac  $f(E)$ . Luego iremos haciendo ciertas aproximaciones para simplificar los resultados.

### 1.3.1. Densidad de portadores en el caso más general posible

El caso más general, como ya hemos dicho, estudia el número de portadores  $n$  y  $p$  a partir de las integrales sobre las densidades de energía y función de Fermi. La *densidad de estados*  $g(E)$  es la distribución de los estados de energía a una energía dada, mientras que la *función de Fermi* indica, en condiciones de equilibrio, la probabilidad de que un estado permitido de energía  $E$  esté ocupado por un electrón. La función de densidad de estados depende de la dimensión del sistema, tal que:

$$g_{3D}(E) = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}E^{1/2}}{\pi^2\hbar^3} \quad g_{2D}(E) = \frac{m}{\pi\hbar^2} \quad g_{1D}(E) = \frac{\sqrt{2}m^{1/2}}{\pi\hbar\sqrt{E}} \quad (1.3.1)$$

La deducción de estas densidades no es exageradamente complicada, véase apéndice A.1. Por otra parte, la función de Fermi nos dice que la probabilidad de que cierto estado esté ocupado es:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \quad (1.3.2)$$

donde  $E_F$  es la energía de Fermi, de la cual hablaremos más adelante. Naïfmente uno podría pensar que la densidad  $n/p$  sería simplemente la integral  $g(E)f(E)$  entre diferentes intervalos de energía, ya que como sabemos los huecos se encuentran siempre en la banda de conducción, y por tanto entre las energías  $E_{\min}$  y  $E_c$ , mientras que los huecos se encuentran en la banda de valencia, y por tanto entre las energías  $E_{\max}$  y  $E_v$ .

Sin embargo esto no es correcto, por dos razones. La primera de ellas es que por culpa de la forma de parábola cerca del máximo y el mínimo de la banda de valencia y conducción respectivamente, es necesario redefinir el cero en el máximo local/mínimo local. La razón no es evidente a primera vista, pero uno lo puede entender cuando piensa que en un extremo local solo caben 2 electrones (uno con espín arriba y otro con espín abajo). Así pues, las densidades en la banda de valencia  $g_v(E)$  y en la banda de conducción  $g_c(E)$  son:

$$g_c(E) = \frac{(m_n^*)^{3/2}\sqrt{2(E-E_c)}}{\pi^2\hbar^3} \quad E \geq E_c \quad g_v(E) = \frac{(m_p^*)^{3/2}\sqrt{2(E_v-E)}}{\pi^2\hbar^3} \quad E \leq E_v \quad (1.3.3)$$

La segunda razón es que si  $f(E)$  es la probabilidad de que esté un estado ocupado con energía  $E$  en el equilibrio, entonces  $1 - f(E)$  será la probabilidad de que no esté ocupado, y por tanto la probabilidad de que haya un hueco. Así pues, **las densidades de los portadores son**

$$n = \int_{E_c}^{E_{\max}} g_c(E)f(E)dE \quad p = \int_{E_{\min}}^{E_v} g_v(E)(1-f(E))dE \quad (1.3.4)$$

que se puede aproximar para obtener las densidades en función de la llamada *integral de Fermi-Dirac de orden 1/2*  $F_{1/2}(\eta_c)$ . La aproximación consiste básicamente en decir que  $E_{\max} \rightarrow \infty$ , y que por tanto

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{3/2} F_{1/2}(\eta_c) \quad F_{1/2}(\eta_c) = \int_0^\infty \frac{\eta^{1/2}}{1 + e^{\eta - \eta_c}} d\eta \quad (1.3.5)$$

$$\eta = \frac{E - E_c}{kT} \quad \eta_c = \frac{E_F - E_c}{kT} \quad (1.3.6)$$

(no hemos hecho todos los pasos para deducir la forma ya que no se va a usar en ningún momento). Esta ecuación no tiene solución analítica, por tanto es necesario hacer ciertas aproximaciones si queremos trabajar con ella, lo cual trataremos en el siguiente apartado.

### 1.3.2. Semiconductores no degenerados y degenerados

Como hemos dicho, las densidades de los portadores en función de la integral de Fermi-Dirac La aproximación más interesante es la llamada *aproximación de Boltzmann*, que nos permite obtener una solución muy sencilla, que es la siguiente:

$$F_{1/2}(\eta_c) = \int_0^\infty \frac{\eta^{1/2}}{1 + e^{\eta - \eta_c}} d\eta \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\eta_c} \quad (1.3.7)$$

Esta aproximación solo es válida cuando  $E_c - 3kT > E_F > E_v + 3kT$ , y por tanto cuanta más alta la temperatura más restringida será su aplicación. Cuando un semiconductor verifica estas condiciones para una temperatura dada decimos que se encuentra en el *régimen no degenerado*, mientras que cuando no verifica dichas condiciones decimos que está en el *régimen degenerado*.

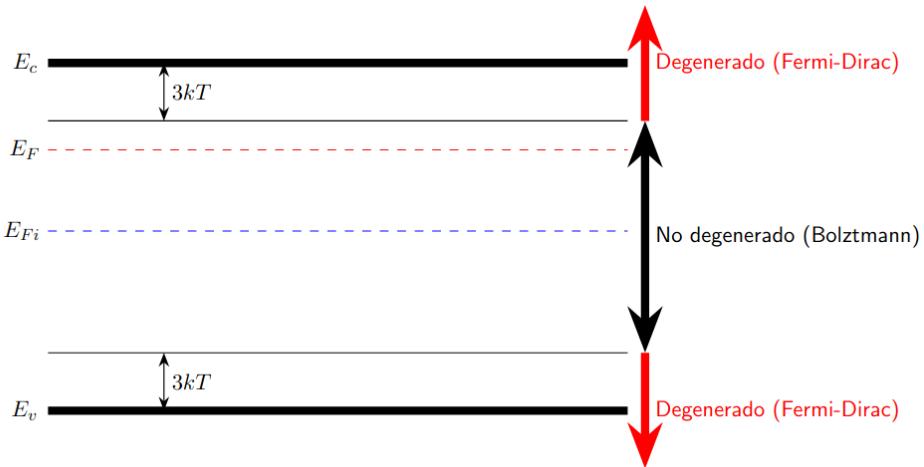


Figura 1.3: Régimen degenerado y no degenerado.

En general nosotros trabajaremos únicamente con semiconductores no degenerados, y por tanto en el rango de validez de la aproximación de Boltzmann, la que da como resultado las siguientes densidades de portadores:

$$p = N_v e^{(E_v - E_F)/kT} \quad n = N_c e^{(E_F - E_c)/kT} \quad (1.3.8)$$

donde  $N_c$  y  $N_v$  son las llamadas **densidades equivalentes de los estados de la banda de valencia y conducción**, con la siguiente forma:

$$N_c = 2 \left( \frac{m_n^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad N_v = 2 \left( \frac{m_p^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (1.3.9)$$

Para una temperatura aproximada de 300K tenemos que

$$N_{C,V} = (2.509 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}) \left( \frac{m_{n,p}^*}{m_0} \right)^{3/2} \quad (1.3.10)$$

siendo  $m_0$  la masa del electrón.

### 1.3.3. Semiconductores intrínsecos caso no degenerado

Definimos como **semiconductor intrínseco** a un material semiconductor extremadamente puro, sin dopantes, cuyas propiedades solo dependan del material. En este tipo de materiales el número de electrones es igual al número de huecos (en virtud de la neutralidad electrónica: el número de electrones en la banda de conducción será el mismo el número que electrones faltan en la banda de valencia, i.e. el número de huecos). Matemáticamente se expresa como

$$n = p = n_i \quad (1.3.11)$$

y se llama *condición intrínseca*. Siempre que estudiemos semiconductores intrínsecos lo haremos a través de los semiconductores no degenerados, ya que de cualquier otra forma no podemos tener expresiones analíticas. Denotamos  $E_i$  al **nivel de fermi intrínseco**. Usando la ecuación anterior, obtenemos que:

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_C N_V} e^{-E_g/2kT} = \quad (1.3.12)$$

donde  $E_g = E_c - E_v$  y se le llama *energía de gap*. El valor de  $n_i$  para un semiconducto dado es muy importante, incluso cuando está dopado. La razón es que siempre podemos expresar  $n$  y  $p$  en función de  $n_i$  (a la misma temperatura), ya que si  $n = p = n_i$ :

$$\begin{aligned} n_i &= N_C e^{(E_i - E_c)/kT} = N_V e^{(E_v - E_i)/kT} \Rightarrow \\ N_C &= n_i e^{(E_c - E_i)/kT} \quad N_V = n_i e^{(E_i - E_v)/kT} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

tal que

$$n = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \quad p = n_i e^{(E_i - E_F)/kT} \quad (1.3.14)$$

lo cual nos está dando en realidad una información muy relevante: en función del nivel de fermi, i.e., si  $E_F > E_i$  o  $E_F < E_i$ , podremos saber si el conductor es de tipo  $n$  o tipo  $p$  (solo cuando  $E_F = E_i$  tenemos  $n = p$ , precisamente la condición intrínseca). Además tenemos que de la expresión anterior podemos deducir la llamada **ley de acción de masas** (que se verifique siempre que estemos en el rango no degenerado):

$$np = n_i^2 \quad (1.3.15)$$

Si nos damos cuenta a partir de las ecuaciones 1.3.13 podemos deducir una *expresión para la posición del nivel de Fermi intrínseco  $E_i$* . Para esto partimos de las ecuaciones 1.3.14, de lo que se deduce que:

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{kT}{2} \ln \left( \frac{N_C}{N_V} \right) = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \quad (1.3.16)$$

Incluso podemos obtener la *expresión para la posición del nivel de Fermi  $E_F$*  para el caso más general. Para esto partimos de las ecuaciones

$$\ln\left(\frac{n}{n_i}\right) = \frac{1}{kT} (E_F - E_i) \Rightarrow E_F = E_i + kT \ln\left(\frac{n}{n_i}\right) \quad (1.3.17)$$

$$\ln\left(\frac{p}{n_i}\right) = \frac{1}{kT} (E_i - E_F) \Rightarrow E_F = E_i - kT \ln\left(\frac{p}{n_i}\right) \quad (1.3.18)$$

Siendo expresiones completamente compatibles (si se verifica una se verifica la otra) además de que mantienen la relación citada antes entre el nivel de Fermi y el número de portadores huecos/electrón.

### 1.3.4. Semiconductores extrínsecos caso no degenerado

Definimos como **semiconductor extrínseco** o **semiconductor dopado** a un material semiconductor al que se le han insertado átomos de otro grupo. Pero antes es importante preguntarse por qué se incluyen estos átomos en nuestro semiconductor, y cuáles son sus ventajas. La respuesta todavía no podemos darla de manera muy profunda, sin embargo si podemos decir lo siguiente: a temperaturas ambiente, la cantidad de portadores tipo  $n$  y tipo  $p$  intrínsecas son muy bajas, y por tanto habrá una conductividad muy baja. Cuando dopamos un semiconductor no solo estamos aumentando el número de portadores de un tipo, estamos aumentando la conductividad. De hecho, al ser capaces de controlar el nivel de dopado, podemos elegir la conductividad arbitrariamente, pudiendo optimizar y controlar totalmente las propiedades eléctricas.

Así pues, tenemos dos tipos de dopantes, que además definirán el tipo de portador mayoritario que tendremos. Tenemos pues:

- **Dopante dador.** Los dopantes dadores o dadores aportan electrones a la banda de conducción (por lo general son elementos del grupo V, aportando un electrón), lo que hará que el portador mayoritario sea el portador  $n$ . A la concentración de dadores la denotamos por  $N_D$ .
- **Dopante acceptor.** Los dopantes aceptores o aceptores aportan huecos a la banda de valencia (por lo general son elementos del grupo III, aportando un hueco), lo que hará que el portador mayoritario sea el portador  $p$ . A la concentración de dadores la denotamos por  $N_A$ .

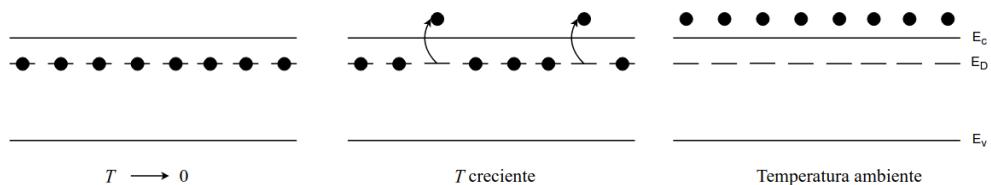


Figura 1.4: Funcionamiento de los conductores tipo  $n$ .

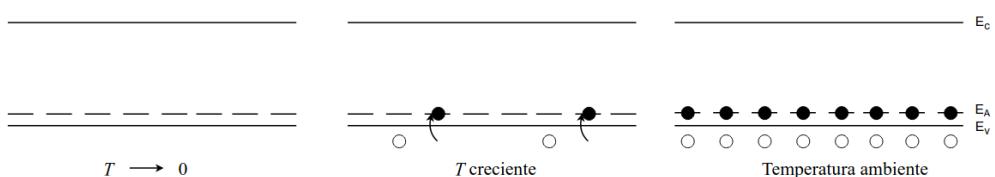


Figura 1.5: Funcionamiento de los conductores tipo  $p$ .

Sin embargo no es igual el número de impurezas  $N_D$  y  $N_A$  al número de portadores que aportan  $N_D^+$  y  $N_A^-$ . Pensemos por ejemplo el caso de los elementos del grupo V. Para que puedan aportar el quinto electrón es necesario romper el enlace que lo une con dicho átomo, es decir, hace falta ionizarlo, lo que se hace a través de la aportación de energía, por ejemplo energía térmica. A partir de cierta temperatura todas las impurezas están ionizadas (temperatura ambiente). Sin embargo no siempre será así, y si la energía térmica no es suficiente para ionizar todas las impurezas, debemos usar las siguientes expresiones:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + g_D e^{(E_F - E_D)/kT}} \quad N_A^- = \frac{N_A}{1 + g_D e^{(E_A - E_F)/kT}} \quad (1.3.19)$$

donde  $E_D$  y  $E_A$  son las correspondientes energías de ionización. Al igual que antes tenemos la condición de electroneutralidad, aunque ahora va a cambiar un poco: tenemos que considerar que  $N_D^+$  y  $N_A^-$  aportan carga. Así pues, la **condición de electroneutralidad para extrínsecos** es:

$$p + N_D^+ = n + N_A^- \quad (1.3.20)$$

lo cual tiene todo el sentido del mundo: si tenemos  $N_D^+ > N_A^-$  (más dadores que aceptores) lógicamente habrá más portadores tipo  $n$  que tipo  $p$ . Dado que la ley de acción de masas  $np = n_i^2$  se cumple para cualquier semiconductor no degenerado, para cualquier conductor no degenerado extrínseco podemos conocer  $n$  y  $p$  en función de  $n_i$ ,  $N_D^+$  y  $N_A^-$  (que surge tras despejar una ecuación de segundo grado):

$$n = \frac{N_D - N_A}{2} + \left[ \left( \frac{N_D - N_A}{2} \right)^2 + n_i^2 \right]^{1/2} \quad p = \frac{N_A - N_D}{2} + \left[ \left( \frac{N_A - N_D}{2} \right)^2 + n_i^2 \right]^{1/2} \quad (1.3.21)$$

Los 3 casos más sencillos que nos pueden plantear son los siguientes:

- Cuando  $N_D^+ = N_A^-$  tenemos que

$$n = p = n_i \quad (1.3.22)$$

- Cuando  $N_D^+ \gg N_A^-, n_i$ . En este caso tenemos las siguientes ecuaciones:

$$n = N_D^+ \quad p = \frac{n_i^2}{N_D^+} \quad (1.3.23)$$

- Cuando  $N_A^- \gg N_D^+, n_i$ . En este caso tenemos las siguientes ecuaciones:

$$p = N_A^- \quad n = \frac{n_i^2}{N_A^-} \quad (1.3.24)$$

El resto de casos habrá que calcularlos aparte.

### 1.3.5. Semiconductores extrínsecos: régimen intrínseco y extríseco

Definimos como **régimen extrínseco** de un semiconductor extrínseco<sup>3</sup> aquel intervalo de temperaturas (aunque puede ser otra variable) en el que todas las impurezas están ionizadas y

---

<sup>3</sup>Muchas veces, cuando se dice que está en el semiconducto r está en el régimen extrínseco ya se asume que está dopado, y por tanto se obvia.

se verifica que  $N_D^+$  o  $N_A^-$  es mucho mayor que  $n_i$ . Definimos como **régimen intrínseco** aquella región de temperaturas en la cual el nivel de impurezas excitadas es comparable o menor al número de portadores excitados por fluctuaciones térmicas  $n_i$ . Cuando la temperatura es baja y no están excitados todas las impurezas, decimos que estamos en el régimen de *freeze out*.

Definimos como **temperatura intríseca** a la temperatura que separa el régimen extrínseco e intrínseco, y se define como aquella temperatura para la cual  $n(T_i) = 2N_D$  o  $p(T_i) = 2N_A$  en función de si es dador o aceptor el dopante.

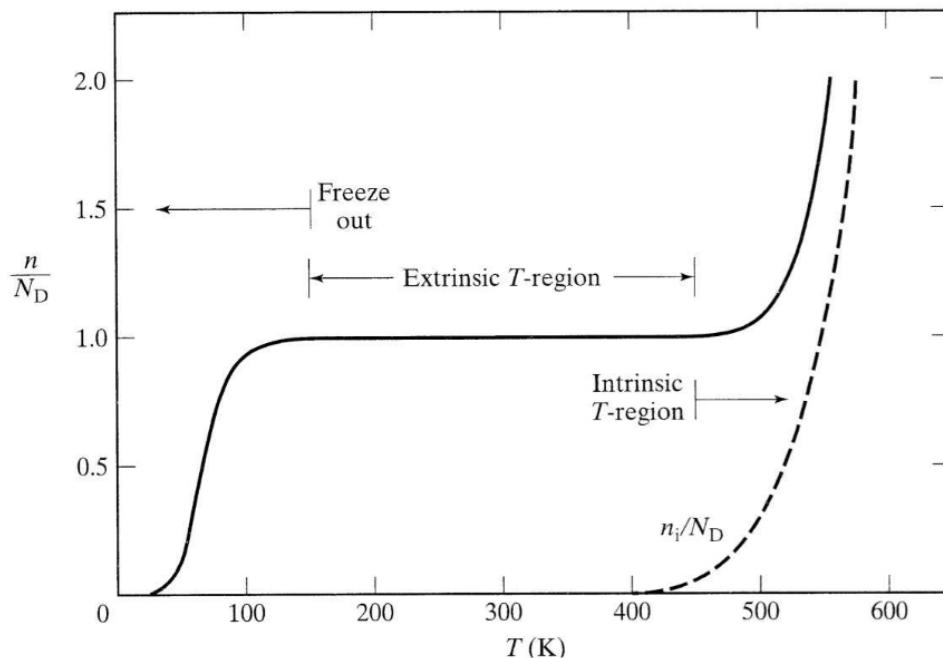


Figura 1.6: Régimenes intrínsecos y extrínsecos en función de la temperatura.

## 1.4. Valores típicos

## 1.5. Ejercicios

### Ejercicio 1.1:

Se dopa silicio con Boro (B) en una proporción de 2 ppm (partes por millón)

- Calcula la concentración intrínseca del Si y obtén una expresión de dicha concentración en función de la temperatura.
- Indica el tipo de conducción de este material y calcula la concentración de impurezas y la de electrones y huecos ( $n$  y  $p$ ) a temperatura ambiente si todos los dopantes están ionizados.
- Calcula la posición del nivel de Fermi y dibuja el diagrama de bandas completo correspondiente.
- ¿Qué pasa si la concentración de impurezas igualase el valor de  $N_V$ ? Representa

gráficamente las bandas de energía frente a la concentración de impurezas usando todas las aproximaciones que conozcas.

(DATO: Constante de red del Si  $a_0 = 5.431 \text{ \AA}$ ).

*Solución en la página 17*

### Ejercicio 1.2:

Una muestra de Si está dopada con  $6 \times 10^{15}$  átomos de As por  $\text{cm}^3$

- ¿Cuál es la concentración de portadores en la muestra de Si a 300 K?
- ¿Cuál es la concentración de portadores a 470 K?
- Para cada una de las dos temperaturas anteriores determinar la posición de  $E_i$ , calcular  $E_F - E_i$  y dibujar a escala el diagrama de bandas de energía para la muestra.
- Si dopamos el Si con  $10^{16}$  átomos donadores y  $5 \times 10^{15}$  átomos aceptores por  $\text{cm}^3$ . ¿Cuál es la concentración de portadores a 300 K?+
- Partimos de una muestra de Si puro y lo dopamos exclusivamente con  $10^{14}$  átomos donadores y  $10^{14}$  átomos aceptores por  $\text{cm}^3$ . Calcula la concentración de portadores y explica el resultado obtenido.

Tener en cuenta que  $E_G = 1.08 \text{ eV}$  a 470 K y suponer que  $m_e^*/m_h^* = 0.69$  es independiente de la temperatura.

*Solución en la página 19*

### Ejercicio 1.3:

Cuestiones sobre el nivel de Fermi:

- Calcular la temperatura  $T$  para que el nivel de Fermi de un cristal de Silicio tipo N con  $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  quedara a una energía  $E_G/3$  por debajo de la banda de conducción. Suponer que  $N_C$  y  $E_G$  son constantes con la temperatura e iguales a sus valores a temperatura ambiente. Y repetir para el caso de dopar con  $N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .
- En un semiconductor determinado, la probabilidad de que los electrones ocupen un estado de energía  $kT$ , por encima del extremo inferior de la banda de conducción es  $e^{-10}$ . Determinar la posición del nivel de Fermi en dicho material.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un estado de energía  $kT$  por debajo del nivel de Fermi esté ocupado por un hueco?

*Solución en la página 20*

**Ejercicio 1.4:**

Responde a las siguientes cuestiones:

- A 300 K la densidad efectiva de estados en la banda de valencia es  $1.83 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  para el silicio y  $9.0 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  para el GaAs. Calcular sus correspondientes masas efectivas para los huecos. Comparar estas masas con la masa del electrón en el vacío.
- Calcula y representa la posición del nivel intrínseco en silicio a temperatura ambiente y a 1000 °C (tomamos  $m_p = 1.0m_0$  y  $m_n = 0.19m_0$ ), asumiendo que el gap se mantiene constante. ¿Es razonable asumir que  $E_i$  se encuentra en la mitad de la banda prohibida?

*Solución en la página 20*

**Ejercicio 1.5:**

- En GaN a 300 K,  $E_G = 3.43 \text{ eV}$ ,  $m_n^*/m_0 = 0.2$ ,  $m_p^*/m_0 = 1.25$  y  $n_i = 1.37 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-3}$ . Explicar cualitativamente (sin utilizar la fórmula que calcula el valor de  $E_i$ ) si el nivel de Fermi intrínseco en InSb estará más próximo a la  $E_C$  o a la  $E_V$ . Comprobarlo a continuación usando la fórmula.
- Las distribuciones de portadores, o número de portadores en función de la energía en las bandas de conducción y de valencia presentan un máximo a una energía próxima a los bordes de las bandas. Considerando el semiconductor como no degenerado, calcular la energía a la que se encuentra el máximo en la distribución de electrones.

*Solución en la página 21*

**Ejercicio 1.6:**

Dibujar un diagrama de bandas para el silicio dopado con  $10^{17} \text{ átomos/cm}^3$  de arsénico a 300 K y 600 K. Mostrar el nivel de Fermi,  $E_C$ ,  $E_V$  y utilizar el nivel de Fermi intrínseco como energía de referencia, asumiendo el caso de ionización total. La variación del bandgap con la temperatura viene dada por la expresión de Varshni (DOI: 10.1016/0031-8914(67)90062-6):

$$E_G(T) = E_G(0) - \frac{\alpha T^2}{T + \beta} \quad (1.5.31)$$

Para el silicio  $\alpha = 4.73 \times 10^{-4} \text{ eV/K}$ ,  $\beta = 636 \text{ K}$  y  $E_G(0) = 1.17 \text{ eV}$ . Suponer que las masas efectivas se mantienen constantes con la temperatura.

*Solución en la página 23*

**Ejercicio 1.7:**

Calcular el nivel de Fermi y dibujar el diagrama de bandas completo de silicio dopado con  $10^{15}$ ,  $10^{17}$  y  $10^{19} \text{ átomos/cm}^3$  de P ( $E_D = 0.045 \text{ eV}$ ) a temperatura ambiente suponiendo ionización total de las impurezas. A partir del nivel de Fermi calculado comprobar si esta suposición es correcta para cada valor de dopado. Asumir que los átomos donadores ionizados vienen dados por la expresión:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{E_F - E_D}{kT}\right)} \quad (1.5.41)$$

*Solución en la página 24*

### Ejercicio 1.8:

Responde a las siguientes cuestiones:

- Utilizando la expresión para los átomos donadores ionizados dada en el ejercicio anterior, calcular la concentración de donadores sin ionizar para una muestra de silicio dopada con  $10^{16}$  átomos/cm<sup>3</sup> de P ( $E_D = 0.045$  eV) a una temperatura de 50 K. El nivel de Fermi está situado a 0.0459 eV por debajo de la banda de conducción.
- Una muestra de silicio a  $T = 300$  K contiene una concentración de impurezas acceptoras  $N_A = 10^{16}$  cm<sup>-3</sup>. Determinar la concentración de átomos donantes que debe ser añadida para que el silicio sea tipo N y la energía de Fermi esté 0.25 eV por debajo del borde de la banda de conducción.

*Solución en la página 25*

Revisar ejercicios 1,2,3,4. Hechos en la pizarra, copiados en clase. Posibilidad de error: alta.

## 1.6. Solucion

### Solución del ejercicio 1.1 en la página 14:

Veamos las soluciones por apartados

- La concentración intrínseca del Silicio en un semiconductor es el número de portadores  $n_i$  en el semiconductor, si no estuviera dopado. No hay que confundir la concentración intrínseca  $n_i$  con la concentración  $n$ , en la que si se tendrá en cuenta que el material está dopado. La concentración intrínseca es:

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-E_G/2kT} \quad (1.6.1)$$

donde  $E_G = E_c - E - v$ , y además

$$N_{C,V} = 2 \left( \frac{m_{e,p}^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \quad (1.6.2)$$

Las masas  $m_p^* = 1.18m_e$  y  $m_n^* = 0.81m_e$ . Si queremos dar el valor:

$$N_c = 3.22 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad N_v = 1.83 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.3)$$

De lo que se deduce

$$n_i = 9.56 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.4)$$

- b) Están dopando con boro, que es del grupo III, y por tanto es un dador. Esto significa que será un conductor tipo  $p$ . Para calcular la concentración de impurezas, primero tenemos que obtener la densidad de Boro en nuestro silicio. La densidad del silicio se calcular a partir de la constante de red y sabiendo que posee una red diamante. Así pues:

$$N_{Si} = \frac{8}{a_0^3} \quad (1.6.5)$$

de lo que se puede deducir entonces que:

$$N_B = 2 \cdot 10^{-6} \cdot N_{Si} = 9.988 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.6)$$

Nos dicen que todos los dopantes están ionizados, es decir, que estamos en el régimen extrínseco. En este régimen todos los átomos de Boro son impurezas, tal que  $N_A^- = N_A = N_B$ . Suponiendo que  $N_A^- \gg N_D^+$ , tenemos que la ecuación de neutralidad de carga:

$$n \cdot p = n_i^2 \quad p - n - N_A = 0 \quad (1.6.7)$$

usando estas ecuaciones para despejar el valor de  $n$  y  $p$ , tenemos que:

$$p = \frac{N_A}{2} + \left[ \left( \frac{N_A}{2} \right)^2 + n_i^2 \right]^{1/2} \quad (1.6.8)$$

y luego calculamos

$$n = \frac{n_i^2}{p} \quad (1.6.9)$$

Numéricamente podemos obtener los resultados:

$$n = 915.034 \text{ cm}^{-3} \quad p = 9.988 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.10)$$

- c) La posición del nivel de Fermi de un semiconductor dopado se calcula a partir del nivel de Fermi intrínseco. Así pues

$$E_{Fi} = E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3kT}{4} \ln \frac{m_p^*}{m_e^*} = 0.523 \text{ eV} \quad (1.6.11)$$

tal que la energía de Fermi. \*Introducir imagen\*

$$E_F = E_i + kT \ln \left( \frac{p}{n_i} \right) = 0.1350.135 \quad (1.6.12)$$

- d) Cuando la concentración de impurezas es igual al valor de  $N_V$ , dado que  $p = N_V e^{(E_v - E_F)/kT}$ , esto implicaría que  $E_v = E_F$ , y que por tanto la condición de *semiconductor no degenerado*  $E_F > E_v + 3kT$  no se cumpliría. *Tenemos un semiconductor degenerado, teniendo que calcular los valores de n y p mediante las integrales explícitas.* Consecuentemente, estamos ante un semiconductor degenerado. \*Introducir imagen para las bandas\*.

**Solución del ejercicio 1.2 en la página 15:**

- a) Tenemos primero que ver si está degenerado, sin embargo sabemos que para esta temperatura y el nivel de dopamiento no debería estar degenerado, y por tanto podríamos usar la ley de acción de masas junto con la condición de electroneutralidad para despejar  $n$  en función de  $N_D$ ,  $N_A$  y  $n_i$ . Se puede obtener, dado que  $N_D \gg n_i, N_A$ , tenemos que

$$n \approx N_D = 6 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \quad n \cdot p = n_i^2 \Rightarrow p = 1.67 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.13)$$

- b) Nos dicen que a  $T = 470\text{K}$  y que  $E_G = 1.08\text{eV}$ . Lo único que no cambio es  $N_D$ . Lógicamente el número de portadores intrínsecos  $n_i$  cambia al aumentar la temperatura: a mayor energía térmica promocionan más electrones, mas electrones van a poder excitarse desde la banda de valencia. Calculamos  $n_i$  a partir de

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-E_g/2kT} \quad (1.6.14)$$

Luego solo tenemos que hacer

$$N_{c,v} = 4.829 \cdot 10^{15} T^{3/2} \left( \frac{m_{n,p}^*}{m_e} \right) \quad (1.6.15)$$

A esta temperatura tenemos entonces que:

$$N_c = 6.3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad N_v = 3.6 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.16)$$

Y por tanto

$$n_i = 7.74 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.17)$$

De lo que se deduce, de nuevo, aplicando la ley de acción de masas:

$$n = 6.001 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \quad p = 9.98 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.18)$$

- c) Determina la posición del nivel de Fermi intrínseco. Es sencillo que:

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \quad (1.6.19)$$

Una vez tenemos  $E_i$  para cada una de las temperaturas, calculamos la temperatura final

$$E_F = E_i + kT \ln \left( \frac{n}{n_i} \right) \quad (1.6.20)$$

\*Introducir imagen\*

d)

e)

**Solución del ejercicio 1.3 en la página 15:**

- a) La solución es  $T = 536.206\text{K}$ . Para esto tenemos que usar la relación

$$T = \frac{E_F - E_c}{k} \frac{1}{\ln(N_D/N_c)} = \frac{-E_g}{3k} \frac{1}{\ln(N_D/N_c)} \quad (1.6.21)$$

donde  $N_c = 3.22 \cdot 10^{19}\text{cm}^{-3}$ .

- b) Queremos calcular la posición del nivel de Fermi. Usamos la fórmula

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \quad (1.6.22)$$

y usando lo que nos da el enunciado:

$$f(kT + E_c) = \frac{1}{1 + e^{(kT+E_c-E_F)/kT}} = \frac{1}{e^{10}} \quad (1.6.23)$$

Tenemos entonces que

$$1 + e^{\frac{kT+E_c-E_f}{kT}} = e^{10} \quad (1.6.24)$$

De lo que se deduce que  $E_F = E_c + 9kT$ .

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estado de energía  $kT$  por debajo del nivel de Fermi esté ocupado por un hueco? Tenemos que

$$1 - f(E_F - kT) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-1}} \simeq 0.2689 \rightarrow 26.89\% \quad (1.6.25)$$

La probabilidad es no nula y por tanto... (preguntar a Elisa Casal).

**Solución del ejercicio 1.4 en la página 16:**

- a) Tenemos que calcular la masa efectiva de los huecos para dos semiconductores diferentes, dado su densidad efectiva de estados en la banda de valencia. Esto significa que necesitamos invertir la fórmula típica, tal que

$$N_V = 2 \left( \frac{m_p^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \Rightarrow m_p^* = \left( \frac{N_V}{2} \right)^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{kT} \quad (1.6.26)$$

De lo que se deduce que para el Si y el GsAs:

$$\text{Si: } m_p^* = 7.38 \cdot 10^{-31}\text{kg} = 0.81 m_e \quad (1.6.27)$$

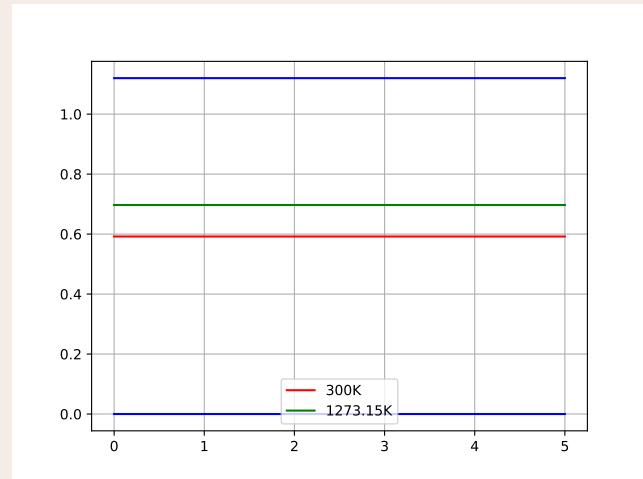
$$\text{GaSi: } m_p^* = 4.59 \cdot 10^{-31}\text{kg} = 0.51 m_e \quad (1.6.28)$$

Nivel intríseco 300K 1.7505319217070854

- b) Tenemos que calcular la posición del nivel intrínseco  $E_i$  a la temperatura ambiente (300 K) y a 1000 °C, asumiendo que  $E_g$  es constante. Veamos que solo es aplicar una fórmula:

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \quad (1.6.29)$$

donde hemos considerado que  $E_g = 1.12$  en el silicio, y que  $E_v = 0$ , ergo  $E_c = 1.12$ . Hacemos la representación gráficamente. Las energías son:  $300K : E_i = 0.57$  eV y a  $1273K E_i : 0.70$  eV. Las masas usadas a  $300K$  son:  $m_p = 0.81m_e$  y  $m_n = 1.18m_e$ .



Viendo esta imagen no parece descabellado considerar  $E_i$  constante.

### Solución del ejercicio 1.5 en la página 16:

- a) El nivel de Fermi intrínseco a temperatura no nula está más cerca de  $E_c$  si la masa efectiva de los huecos es mayor que la masa efectiva de los electrones, y más cerca de  $E_v$  si la masa de los electrones es más grande que la de los huecos. ¿Por qué? Como sabemos, la masa efectiva de los electrones/huecos es inversamente proporcional a la curvatura en el mínimo/máximo de la banda de conducción/valencia. Cuanto mayor sea la curvatura, más energía se tiene que darse para ocupar la misma cantidad de estados. Como consecuencia, la energía de fermi intrínseca, que se define como la mitad del valor entre  $E_c$  y  $E_v$  tendría que tirar hacia la banda con más curvatura, i.e. la que tiene menos masa efectiva. **Francamente no me tiene mucho sentido, ya que  $E_c$  y  $E_v$  no debería cambiar. Existen otras formas de verlo a través de la función de Fermi y la densidad de estados, habría que investigarlo.**

En nuestro caso esto implica que *debería estar más cerca de la banda de conducción*. Para los valores dados, tenemos que

$$E_i = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) = 1.75 \text{ eV} \quad (1.6.30)$$

que considerando  $E_v = 0$  y  $E_c = E_g = 3.43$  eV vemos que está más cerca de la banda de conducción  $E_c$  que de  $E_v$ .

- b) La concentración de electrones en la banda de conducción está dada por:

$$n(E) = g_c(E)f(E)$$

donde

- La densidad de estados en la banda de conducción es:

$$g_c(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m_c^{3/2}}{h^3}(E - E_c)^{1/2}$$

- La función de distribución de Fermi-Dirac en la aproximación no degenerada (Maxwell-Boltzmann) es:

$$f(E) \approx e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}}$$

Por lo que la distribución de portadores en la banda de conducción es:

$$n(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m_c^{3/2}}{h^3}(E - E_c)^{1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}}$$

Para encontrar el máximo, derivamos respecto a  $E$  e igualamos a cero:

$$\frac{d}{dE} \left[ (E - E_c)^{1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}} \right] = 0$$

Aplicando la regla del producto:

$$\frac{1}{2}(E - E_c)^{-1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}} + (E - E_c)^{1/2}e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}} \left( -\frac{1}{k_B T} \right) = 0$$

Factorizando:

$$e^{-\frac{(E-E_F)}{k_B T}} (E - E_c)^{-1/2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{(E - E_c)}{k_B T} \right] = 0$$

Para que se cumpla la igualdad, la expresión entre corchetes debe ser cero:

$$\frac{1}{2} = \frac{(E - E_c)}{k_B T}$$

Despejando  $E$ :

$$E - E_c = \frac{1}{2}k_B T$$

Por lo tanto, el máximo de la distribución de electrones en la banda de conducción se encuentra a:

$$E_{\max,c} = E_c + \frac{1}{2}k_B T$$

Siguiendo el mismo procedimiento para los huecos en la banda de valencia:

$$E_{\max,v} = E_v - \frac{1}{2}k_B T$$

Esto significa que los portadores tienden a concentrarse en energías ligeramente por encima del borde de la banda de conducción y por debajo del borde de la banda de valencia en aproximadamente  $\frac{1}{2}k_B T$ . El doctorando hizo un dibujo que dijo que sale en el Pierret, sobre la multiplicación de producto de la densidad de estados y las bandas. Véase notas a mano.

### Solución del ejercicio 1.6 en la página 16:

Nos dicen que dibujemos un diagrama de bandas para el silicio dopado por arsénico (grupo V, dador) completamente ionizado. Esto implica necesariamente calcular  $E_i$ ,  $E_c$ ,  $E_v$  y  $E_F$ . Primero vamos a despejar  $E_i$  y  $E_v$ , luego despejaremos en función de estos  $E_F$ . Recordar que

$$E_i = \frac{E_v + E_c}{2} - \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) \quad (1.6.31)$$

- Como hemos dicho despejamos estas energías. Dado que  $E_i$  es nuestra referencia, las ecuaciones a usar son, a una  $T$  dada, que:

$$E_c - E_v = E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T + \beta} \quad E_c + E_v = -2 \cdot \frac{3}{4}kT \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) \quad (1.6.32)$$

De lo cual se deduce que:

$$E_c = \frac{1}{2} \left[ E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T + \beta} - \frac{3}{2}kT^{3/2} \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) \right] \quad (1.6.33)$$

$$E_v = \frac{1}{2} \left[ -E_g(0) + \frac{\alpha T^2}{T + \beta} - \frac{3}{2}kT^{3/2} \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right) \right] \quad (1.6.34)$$

Usando las masas de portadores  $m_n^* = 1.18m_e$  y  $m_p^* = 0.81m_e$  (y considerado, como nos dice el enunciado, que son constantes frente a la temperatura). Obteniendo los siguientes resultados numéricos:

$$300K : \quad E_c = 0.570 \text{ eV} \quad E_v = -0.554 \text{ eV} \quad (1.6.35)$$

$$600K : \quad E_c = 0.531 \text{ eV} \quad E_v = -0.502 \text{ eV} \quad (1.6.36)$$

- Ahora tenemos que calcular  $E_F$ , que viene dado, en un conductor dopado  $N$  no degenerado por (recordar que  $E_i = 0$ )

$$E_F = kT \ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right) \quad (1.6.37)$$

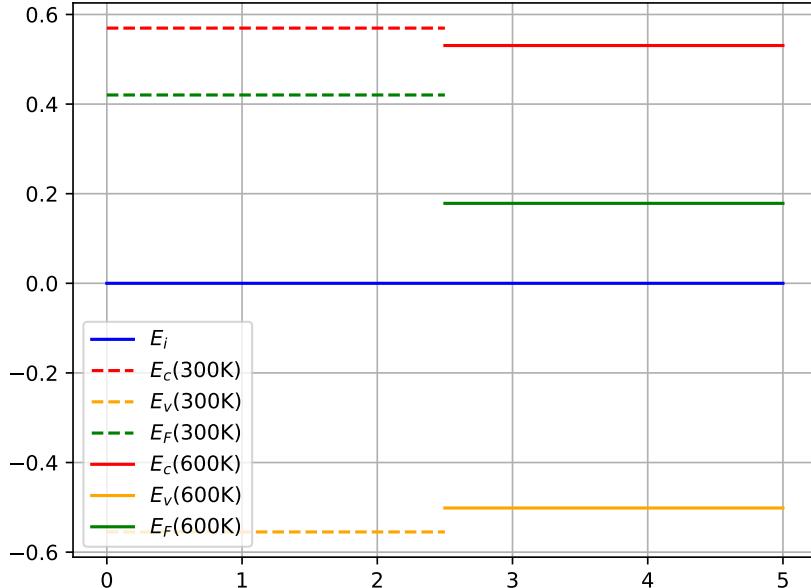
Dado que conocemos  $T$  y  $N_D$ , solo resta saber el valor de  $n_i$ , para lo cual hemos usado la expresión:

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-E_g/2kT} \quad (1.6.38)$$

siendo  $N_c$  y  $N_v$  las típicas funciones que dependen de la masa efectiva y de la temperatura. Así pues, obtenemos los resultados:

$$300K: \quad E_F = 0.420 \text{ eV} \quad 600K: \quad E_F = 0.178 \text{ eV} \quad (1.6.39)$$

Una vez tenemos esto podemos realizar la representación:



### Solución del ejercicio 1.7 en la página 16:

La solución del ejercicio pasa por calcular los valores de los niveles de Fermi usando la ecuación

$$E_F = E_i + kT \ln \left( \frac{N_D}{n_i} \right) \quad (1.6.40)$$

Recordemos que en este caso definimos  $E_c = 0$  eV. Consecuentemente tanto  $E_D$  como  $E_F$  serán negativos. Estamos ante un dador que tiene todos los átomos excitados  $N_D$  tal que  $N_D \gg n_i, N_A$ . Dado que consideramos esto a tempeartura ambiente, tenemos que  $n_i = 1.18 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  y por tanto que para estos  $N_D$ :

$$N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow E_F = -0.27 \text{ eV} \quad (1.6.41)$$

$$N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow E_F = -0.15 \text{ eV} \quad (1.6.42)$$

$$N_D = 10^{19} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow E_F = -0.035 \text{ eV} \quad (1.6.43)$$

Una vez tenemos estos valores de  $E_F$ , veamos si es válido asumir que todos los átomos donadores están ionizados, usando que

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2 \exp [-(E_F - E_D)kT]} \quad (1.6.44)$$

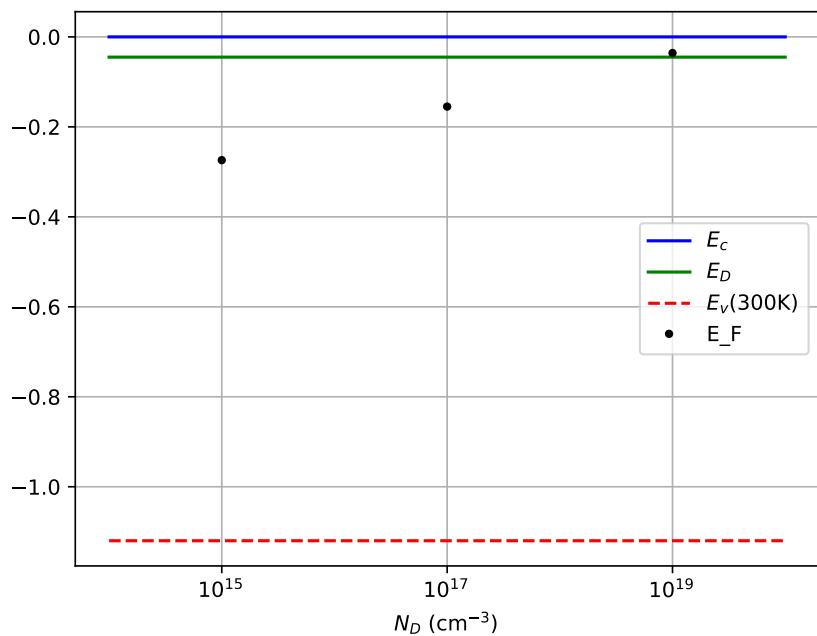
Tal que para las energías dadas:

$$E_F = -0.27 \text{ eV} \Rightarrow N_D^+ = 9.999 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.45)$$

$$E_F = -0.15 \text{ eV} \Rightarrow N_D^+ = 9.722 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.46)$$

$$E_F = -0.034 \text{ eV} \Rightarrow N_D^+ = 2.597 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \quad (1.6.47)$$

Dibujamos los gráficos



Solución del ejercicio 1.8 en la página 17:

Hola



## Capítulo 2

# Fenómenos de transporte en semiconductores

En este tema estudiaremos los fenómenos de transporte en semiconductores, que son varios. Dedicaremos una sección a cada uno de ellos:

- Arrastre.
- Difusión.
- Generación.
- Recombinación.
- Emisión termoiónica.
- Trasmisión túnel.
- Ionización por impacto.

Además veremos *ecuaciones básicas de trasnporte* y métodos de medida de parámetros como resistividad, movilidades, concentración, tiempos de vida, etc.

### 2.1. Arrastre

#### 2.1.1. Introducción: modelo de arrastre y difusión

El **modelo de arrastre-difusión** considera que las corrientes en el interior del semiconductor se debe exclusivamente a dos componentes: arrastre y difusión.

- **Arrastre:** movimiento de los portadores provocado por campos eléctricos externos e internos.
- **Difusión:** movimiento de portadores debido a gradientes de concentración debido a gradientes de concentracion. En la difusión los portadores se desplazarán de donde son mayoritarios a donde son minoritarios.

Así pues, según este modelo, las corrientes de portadores electrón  $J_n$  y de portadores hueco  $J_p$  serán iguales a la suma de las componentes de arrastre y difusión:

$$J_n = J_n|_{\text{arrastre}} + J_n|_{\text{difusión}} \quad J_p = J_p|_{\text{arrastre}} + J_p|_{\text{difusión}} \quad (2.1.1)$$

siendo la *corriente total* la suma de ambas componentes:

$$J = J_n + J_p \quad (2.1.2)$$

### 2.1.2. Corriente de arrastre

Si no aplicamos ninguna fuerza externa, el movimiento de los electrones a temperatura no nula será un proceso aleatorio, en el que se sucederán colisiones con átomos de la red, impurezas, fonones, fotones... de tal manera que *el movimiento efectivo es nulo*. Sin embargo los electrones si poseen velocidad, la cual podemos calcular, en virtud del *teorema de equipartición*, tal que por cada grado de libertad del electrón le asignamos  $kT/2$  de energía cinética. Como en el modelo de semiconductores, los huecos y electrones en las bandas de valencia y conducción son partículas libres (con masa efectiva diferente a  $m_e$ , pero partículas libres a fin de cuentas), podemos aplicarles el teorema de equipartición, tal que:

$$\frac{1}{2}m^*v_{th}^2 = \frac{3}{2}kT \quad (2.1.3)$$

siendo  $v_{th}$  la *velocidad media de cada partícula*. Cuando aplicamos un campo eléctrico  $\mathcal{E}$ , todos los portadores experimentarán una fuerza  $q\mathcal{E}$ , que lo acelera entre las sucesivas colisiones. Esta fuerza aplicada sobre el semiconductor provocará un desplazamiento neto de electrones en la dirección opuesta al campo y de huecos en la dirección del campo. Definimos entonces dos parámetros fundamentales: **camino medio recorrido**  $\lambda$ , que es la distancia media entre dos colisiones ( $\sim 10^{-5}\text{cm}$ ) y el **tiempo medio recorrido**  $\tau$ , que es el tiempo medio entre dos colisiones ( $\sim 10^{-12}\text{s}$ ).

Supongamos entonces que los portadores se mueven a una velocidad constante  $v_a$  (que lógicamente dependerá de la temperatura, de la fuerza del campo...). Como hemos visto en el tema anterior, un hueco es una partícula virtual igual al electrón en todo exceptuando que tiene carga positiva. Si consideramos que el electrón se mueve a una velocidad constante  $v_a$ , el hueco también lo hará. En ese caso la densidad de corriente no es más que:

$$J_n|_{\text{arrastre}} = -qnv_a \quad J_p|_{\text{arrastre}} = qp v_a \quad (2.1.4)$$

siendo  $q$  la carga. Tal y como hemos dicho, la velocidad  $v_a$  no es una constante del material, sino que depende de variables tales como la temperatura, el grado de impurezas o de la intensidad del campo. De manera experimental se sabe, que bajo campos no muy intensos, la velocidad tiene una dependencia lineal con el campo eléctrico, véase Fig. 2.1.

La constante que relaciona la velocidad y el campo eléctrico se llama **movilidad** y se denota por  $\mu$ . Así pues,  $\mu_n$  es la movilidad del electrón y  $\mu_p$  la del hueco, y verifican:

$$v_n = -\mu_n \mathcal{E} \quad v_p = \mu_p \mathcal{E} \quad (2.1.5)$$

midiéndose en  $\text{cm}^2/\text{Vs}$ . Entonces la corriente de arrastre es:

$$J_{\text{arrastre}} = qn\mu_n \mathcal{E} + qp\mu_p \mathcal{E} = q(n\mu_n + p\mu_p) \mathcal{E} \quad (2.1.6)$$

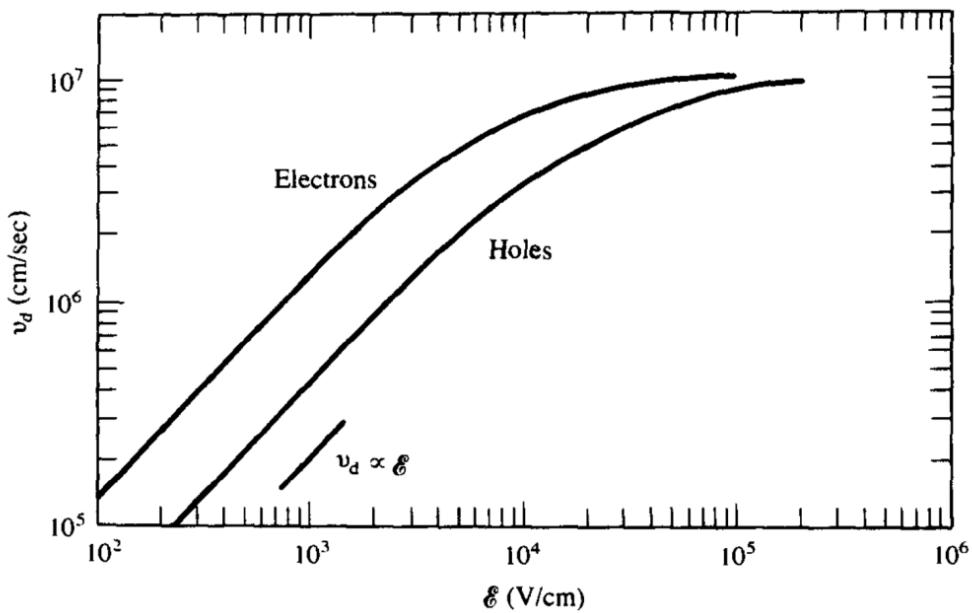


Figura 2.1: Movilidad frente a campo eléctrico. Véase que en la región de campo débil sigue una ecuación lineal, hasta que en campo fuerte se hace constante.

### 2.1.3. Dispersión: efectos en la movilidad

La movilidad, a su vez, depende del grado de dispersión. Si la dispersión es muy baja la movilidad es muy alta: los electrones chocan poco y se pueden acelerar mucho. Como fuentes de dispersión tenemos: *fonones, átomos dopantes ionizados, aleaciones, imperfecciones en la red, defectos en las interfaces...* Los fenómenos que más influencia tienen son:

- Dispersión por choques entre portadores (poca influencia).
- Dispersión por la red cristalina (choques de los portadores con los átomos de la red, que dominan a alta temperatura).
- Dispersión por dopantes ionizadas (choques con impurezas donadoras o aceptadoras, que dominan a baja temperatura).

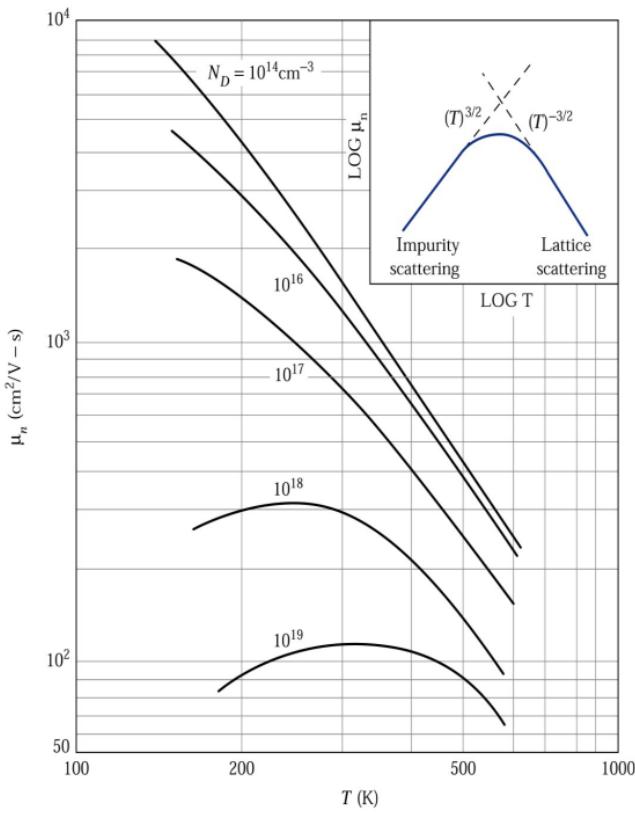
Consecuentemente tenemos dos efectos principales, el efecto debido a las impurezas y el efecto debido a los fonones. La probabilidad de colisión por unidad de tiempo global es la suma de las probabilidades parciales de cada tipo de colisión, según la *regla matthiessen*:

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c \text{ |fonones}} + \frac{1}{\tau_c \text{ |impurezas}} \quad (2.1.7)$$

Los fonones aumentan como  $T^{3/2}$  Y en términos de la movilidad:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_F} + \frac{1}{\mu_I} \quad (2.1.8)$$

lógicamente esto es *generalizable*, pudiendo incluir los mecanismos de dispersión. Como podemos ver en la imagen Fig. 2.2, a altas temperaturas la movilidad se reduce como  $T^{-3/2}$  y a bajas temperaturas aumenta como  $T^{3/2}$ .

Figura 2.2: Movilidad en función de  $T$ .

### Dispersión por impurezas

Las impurezas ionizadas ocurren cuando el portador pasa cerca de un dopante ionizado debido a la fuerza de Coulomb. La probabilidad del choque con los dopantes ionizadas depende de la concentración total (suma de aceptores y donadores), dominando a baja temperatura  $N_I \equiv N_A^- + N_D^+$ . A diferencia de la dispersión por fonones, esta se *reduce al aumentar la temperatura*, ya que los portadores van más rápido y pasan menos tiempo cerca de los dopantes. Teóricamente la movilidad debida a dopantes ionizadas crece con  $T^{3/2}/N_I$ . En resumen: domina a altos dopados (Si) y a bajas temperaturas. El valor de la movilidad en estos casos está dado por la siguiente ecuación:

$$\mu = \mu_{\min} + \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{N}{N_{\text{ref}}}\right)^\alpha} \quad (2.1.9)$$

siendo constantes la mayor parte de los términos (constantes que dependen de la temperatura y la masa efectiva). La única variable sería  $N$ , la concentración de impurezas ( $N_D$  o  $N_A$ ). Los demás parámetros dependen de  $\theta = N_A/N_D$  y de  $T$ .

### Dispersión por fonones

La dispersión por fonones viene a ser la dispersión por vibraciones en la red cristalina. Ocurren a temperaturas mayores al cero absoluto, aumentando progresivamente con un ratio de  $T^{3/2}$ . Estas vibraciones modifican el potencial periódico, y permite intercambiar energía entre portadores y los núcleos del cristal. Dado que aumenta con  $T^{3/2}$ , tenemos que  $\mu_{\text{fon}} \propto T^{-3/2}$ .

### 2.1.4. Resistividad y movilidad

La **resistividad** ( $\rho$ ) se define como la constante de proporcionalidad entre el campo eléctrico aplicado y la corriente total de carga por unidad de área que fluye en el mismo (suponiendo un material homogéneo). Al inverso de la resistividad lo llamamos **conductividad** ( $\sigma$ ) tal que

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho} \quad (2.1.10)$$

Como sabemos  $\mathbf{J}_{\text{arrastre}} = q(\mu_n n + \mu_p p) \mathcal{E}$ . Entonces podemos relacionar la resistividad/conductividad de un material con la movilidad, tal que

$$\rho = \frac{1}{q(\mu_n n + \mu_p p)} \quad (2.1.11)$$

### 2.1.5. Curvatura de bandas

El campo eléctrico se puede estudiar y entender como el gradiente de una función llamada *potencial escalar* que representa la energía por unidad de carga. Así pues, la acción de un campo eléctrico en un semiconductor hace que aparezca una diferencia de energía entre los diferentes puntos del semiconductor, haciendo que las bandas a lo largo del semiconductor no tengan la misma energía, tal y como podemos ver en .

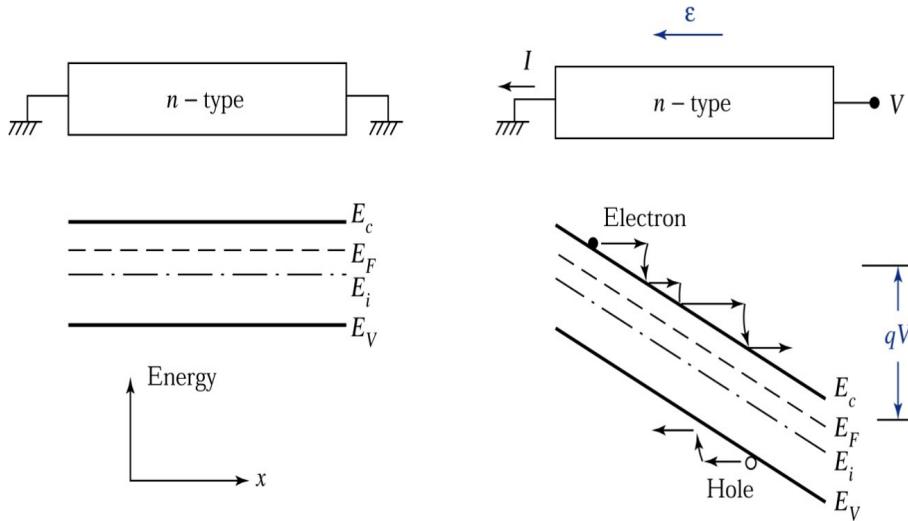


Figura 2.3: Efecto de un campo eléctrico externo en las bandas.

Si  $\psi$  es el *potencial escalar electroestático*, tenemos que:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{q} \frac{dE_i}{dx} = -\frac{d\psi}{dx} \quad (2.1.12)$$

## 2.2. Difusión

La difusión es un proceso por el cual las partículas tienden a dispersarse o redistribuirse como resultado de su alta concentración en ciertas zonas del sólido o bajas concentraciones en otra zona

a temperatura no nula. En este caso las partículas que sufren difusión son electrones y huecos, que harán aparecer corrientes de difusión.

### 2.2.1. Corrientes de difusión

La **ley de Flick** nos dice que las corrientes de difusión son directamente proporcionales a los gradientes de concentración de partículas, esto es:

$$J_p|_{\text{difusión}} = -qD_p \nabla p \quad J_n|_{\text{difusión}} = qD_n \nabla n \quad (2.2.1)$$

siendo  $D_p$  y  $D_n$  las llamadas *constantes de difusión*, que dependen básicamente de dos términos: la velocidad media de nuestras partículas  $v_{th}$  y el camino medio recorrido  $\lambda$ , tal que:

$$D_n = v_{th} \lambda_n \quad D_p = v_{th} \lambda_p \quad (2.2.2)$$

En palabras: la capacidad de una partícula para difundirse depende tanto de qué tan rápido se mueve como de la distancia que recorre antes de cambiar de dirección. Para verlo mejor: imagina que una partícula se mueve en un entorno donde, cada cierto tiempo, choca y cambia de rumbo. Cuanto mayor sea su velocidad y mayor sea la distancia que recorre entre choques, más lejos llegará en promedio en un mismo intervalo de tiempo. Así, el producto de estos dos factores (velocidad y distancia entre colisiones) te da una medida de la eficacia con la que la partícula se dispersa en el medio. Esta difusión generará entonces la corriente de difusión de portadores tipo  $n$  y tipo  $p$ .

$$J_n|_{\text{difusión}} = qD_n \frac{dn}{dx} \quad J_p|_{\text{difusión}} = -qD_p \frac{dp}{dx} \quad (2.2.3)$$

### 2.2.2. Relaciones de Einstein

Las relación de Einstein para electrones nos permite relacionar el coeficiente de difusión y la movilidad para cada uno de los portadores con su carga y la temperatura del medio. La deducción de estas es trivial, ya que es considerar que el semiconductor está en equilibrio y no degenerado

$$J_n|_{\text{difusión}} + J_n|_{\text{arrastre}} = q\mu_n n \mathcal{E} + qD_n \frac{dn}{dx} = 0 \quad (2.2.4)$$

tal que

$$n = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \Rightarrow \frac{dn}{dx} = -\frac{n_i}{kT} e^{(E_F - E_i)/kT} \frac{dE_i}{dx} = -\frac{n}{kT} \frac{dE_i}{dx} = -\frac{q}{kT} \mathcal{E} \quad (2.2.5)$$

de lo cual se deduce

$$J_n = (qn\mathcal{E})\mu_n - qD_n \frac{q}{kT} n \mathcal{E} = 0 \quad (2.2.6)$$

resolviendo obtenemos la **relación de Einstein para los electrones**

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q} \quad (2.2.7)$$

válida para semiconductores no degenerados tanto en equilibrio como fuera de él.

## 2.3. Procesos de generación y recombinación

Cuando un semiconductor es perturbado de su estado de equilibrio, el semiconductor responde modificando el número de portadores que hay en el mismo. La recombinación-generación (denotada por RG o R-G) es el mecanismo con el que describimos el proceso por el cual un exceso o deficiencia de portadores se estabiliza (si la perturbación se mantiene en el tiempo) o es eliminada (si la perturbación es temporal). Dado que durante la perturbación el sistema está bajo condiciones de no equilibrio, muchas de los fenómenos que aparecen en el semiconductor no puedan ser descritos a través de los procesos RG.

### 2.3.1. Introducción

En un semiconductor definimos como **recombinación** al proceso por el cual electrones y huecos son aniquilados/destruidos, mientras que la **generación** es el proceso por el cual electrones y huecos son creados. Esta descripción así hecha es muy general, y por tanto varios tipos de procesos podrían incluirse en lo que llamamos RG. Generalmente se usan las gráficas de banda energética para describir visualmente cuales son los posibles procesos RG, aunque sea solo para entender su naturaleza. También se suele describir que papel tiene la energía y que tipo de energía se emite/absorbe en estos procesos.

#### Procesos de recombinación

Existen varios tipos de procesos de recombinación:

- **Recombinación directa.** Es el tipo más simple de recombinación. En este hay una aniquilación directa entre un hueco en la banda de valencia y un electrón en la banda de conducción, en el que el electrón «cae» a la banda de valencia. Es un proceso típicamente radiativo, en el que el exceso de energía se convierte en un fotón de luz.
- **Recombinación de centro RG.** Recordemos que las impurezas generan niveles energéticos en la región del gap de energía. Los defectos cristalinos, particularmente las impurezas atómicas, pueden generar niveles energéticos en medio del gap. En este proceso de recombinación, los llamados centros RG con energía  $E_T$  actúan como intermediarios. Existen varios tipos de recombinaciones de centro RG. En la primera de ellas tanto el electrón en la BC y el hueco en la BV se ven atraídos al mismo centro RG, aniquilándose. Otra posibilidad es que un portador salte a la banda contrario usando el centro RG como mediador. A este proceso se le llama *recombinación termal*, ya que no es un proceso radiativo (no emite fotones), emitiendo calor, o, en su defecto, fonones. También existen recombinaciones de centro RG usando como centros RG los niveles energéticos de los dadores y aceptores (que recordemos están muy cerca de los niveles energéticos de las bandas), aunque no son tan comunes. Estos procesos son radiativos, pero poco probables, y se denominan *recombinación a través de niveles profundos*. No son tan probables porque, a temperaturas ambientales, la probabilidad de que vuelvan a excitarse al nivel de la banda de conducción es altamente probable.
- **Recombinación Auger** En el proceso Auger lo que ocurre es que una recombinación directa/de centro RG ocurre simultáneamente con la colisión de dos portadores. Consecuentemente, estos portadores altamente energéticos se «termalizan» ( pierden energía en pasos pequeños mediante pequeñas colisiones con la red cristalina). La dispersión posterior del electrón que se lleva toda la energía sucede a través de diferentes pasos, como una «escalera», lo cual sucede

porque la relajación del portador energético no es un proceso instantáneo, sino que sucede en varias etapas debido a la dispersión con fonones. Los fonones (vibraciones cuánticas de la red cristalina) tienen energías discretas, lo que significa que el portador pierde energía en múltiplos de estas energías fonónicas. En semiconductores típicos, los fonones ópticos tienen energías del orden de decenas de meV, por lo que un electrón altamente excitado no puede perder toda su energía de golpe, sino que la va cediendo en ‘saltos’ discretos al emitir fonones ópticos uno tras otro.

- **Recombinación superficial:**

Importante colocar las imágenes

### Procesos de generación

Existen varios tipos de generación, uno por cada uno de los procesos de recombinación. Así pues, existe generación directa, la cual necesita energía térmica o electromagnética (a través de fotones); generación por centros RG (energía térmica), y en último lugar la generación a través de impactos ionizantes (proceso inverso a la recombinación Auger). En estos últimos, el par de portadores se genera como consecuencia del impacto de un portador con un átomo cristalino. La generación de portadores a través de impacto ionizante ocurre recurrentemente cuando hay regiones con un campo eléctrico  $\mathcal{E}$  muy alto, y es el responsable de los fenómenos de avalancha de las uniones  $pn$ .

#### 2.3.2. Consideraciones acerca los procesos RG

Los procesos de recombinación y generación ocurren permanentemente, incluso en el equilibrio termodinámico, siendo el principal problema de los procesos RG el cálculo del ratio de producción de los diferentes procesos. Típicamente, uno solo necesita centrarse en el proceso principal (el que mayor ratio de producción tiene). En los semiconductores dopados no degenerados a una temperatura ambiente, uno espere que los procesos dominantes sean procesos directos o de centro RG.

Conociendo la forma de las bandas de energía (más concretamente, cual es el valor de  $k$  para el cual la energía de la banda de conducción es mínima) podremos dilucidar cual de los procesos es dominante: o de tipo directo o de centro RG. ¿Cómo? Pues es bien sencillo: los fotones, al ser partículas sin masa, son capaces de llevar muy poco momento, y por tanto las transiciones son casi verticales, es decir, solo son capaces de describir los semiconductores de tipo directo (mínimo BC y máximo de BV en  $k = 0$ ). Por otro lado, los fonones pueden transmitir momentos y energía mucho mas grandes, por lo que son capaces de describir tanto los procesos en los semiconductores directos e indirectos, aunque en el caso de los directos no es un proceso dominante. Los procesos térmicos están relacionados con la recombinación de centro RG y los procesos fotónicos con la recombinación directa, y por tanto podemos diferenciar cuando uno y otro son dominantes.

#### 2.3.3. Recombinación directa en semiconductores de gap directo

Definimos como  $G$  ( $R$ ) el número de pares electrones (huecos) generados /cm<sup>3</sup>s. Estas tasas de recombinación y generación dependen en general del número de huecos y electrones que haya en el medio, por lo que en general:

$$R = \beta np \quad G = \alpha np \quad (2.3.1)$$

Para un conductor en equilibrio termodinámico  $G_{th} = R_{th}$  (siendo estas las tasas de generación/combinación en el equilibrio), manteniéndose  $n$  y  $p$  constantes. En el equilibrio  $R = G = \beta n_{n0} p_{n0}$ .

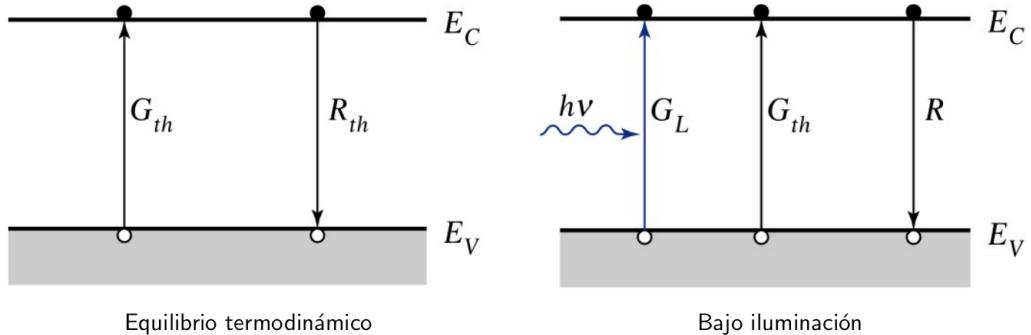


Figura 2.4: Procesos de generación y recombinación en equilibrio y sin luz.

Ahora bien, cuando iluminamos uno de estos semiconductores aumenta su generación en un término  $G_L$ , tal que ahora  $G = G_L + G_{th}$ . Consecuentemente tenemos que se incrementa en un número determinado el número de portadores en el semiconductor  $\Delta n$  y  $\Delta p$  ( $\Delta n = \Delta p$ , neutralidad de carga). Así pues tenemos que la tasa:

$$\frac{dp_n}{dt} = G - R = G_L + G_{th} - R \quad R = \beta n_n p_n = \beta(n_{n0} + \Delta n)(p_{n0} + \Delta p) \quad (2.3.2)$$

Una vez llegamos al estado estacionario, podemos obtener entonces lo que llamamos el *ratio de recombinación*  $U = R - G_{th}$ , esto es:

$$U = R - G_{th} = \beta(n_{n0} + p_{n0} + \Delta p)\Delta p \quad (2.3.3)$$

Cuando tenemos  $p_{n0} \ll n_{n0}$  (bajo nivel de inyección tipo N), tenemos que:

$$U = \beta n_{n0} \Delta p = \frac{p_n - p_{n0}}{\frac{1}{\beta n_{n0}}} = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} \quad (2.3.4)$$

### 2.3.4. Recombinación indirecta en semiconductores de gap indirecto: procesos RG.

#### Definición de términos

La estadística RG es el nombre que se le da a la caracterización matemática de los procesos de recombinación y generación. Dado que los procesos RG cambian las concentraciones de los portadores con el tiempo, la «caracterización matemática» de estos procesos no es más que la definición de las relaciones entre  $\partial n / \partial t$  y  $\partial p / \partial t$ . Recordemos que los procesos RG lo que hacen es insertar una banda energética  $E_T$  en la posición central del gap de bandas. Así pues definimos:

- Variación de  $n$  debida a procesos RG:  $\left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{RG}$ .
- Variación de  $p$  debida a procesos RG:  $\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{RG}$ .
- Número de centros RG llenos de electrones por  $\text{cm}^3$ :  $n_T$ .

- Número de centros RG llenos de huecos por  $\text{cm}^3$ :  $p_T$
- Número total de centros RG por  $\text{cm}^3$ :  $N_T$

Es importante que quede muy claro que  $\partial n/\partial t|_{RG}$  y  $\partial p/\partial t|_{RG}$  son tasas netas, teniendo en cuenta tanto los procesos de recombinación como los procesos de generación. Cuando  $\partial n/\partial t|_{RG}$  es negativo, la tasa de neta de electrones es negativa  $R > G$ ; y si es positiva, la tasa de electrones es positiva  $G > R$ . La desigación de  $|_{RG}$  no denota otra cosa que «tasa de cambio producida por los procesos RG». Esto es importante, ya que pueden ocurrir otros procesos además de estos.

Le llamo a  $n_T$  centros ocupados y a  $p_T$  centros libres.

### Obtención de las tasas de producción

Existiendo 4 tipos de transiciones RG, que son:

- **Captura de un electrón en un centro RG.** Se define  $c_n$  como el *coeficiente de captura de electrones* ( $\text{cm}^3/\text{s}$ ) con signo positivo. La tasa de captura de un electrón en un centro RG debe ser proporcional al número de centros disponibles para la captura  $p_T$  y el número de electrones  $n$ .
- **Emisión de un electrón por un centro RG.** Se define  $e_n$  como el *coeficiente de emisión de electrones* ( $\text{cm}^3/\text{s}$ ) con signo positivo. La tasa de emisión de electrones debe ser proporcional al número de centros RG ocupados  $n_T$ .
- **Captura de un hueco en un centro de RG** (o un electrón de un RG cae a BV). Se define  $c_p$  como el *coeficiente de captura de huecos* ( $\text{cm}^3/\text{s}$ ) con signo positivo. La tasa de captura de un hueco en un centro RG debe ser proporcional al número de centros disponibles para la captura  $n_T$  y el número de huecos  $p$ .
- **Emisión de un hueco por un centro de RG** (o un electrón de BV cae a RG). Se define  $e_p$  como el *coeficiente de emisión de electrones* ( $\text{cm}^3/\text{s}$ ) con signo positivo. La tasa de emisión de huecos debe ser proporcional al número de centros RG ocupados  $p_T$ .

Una vez entendemos esto, es claro que las ecuaciones que rigen los procesos RG son (no pueden ser de otra forma)

$$r_N = \frac{\partial n}{\partial t} \Big|_{RG} = e_n n_T - c_n n p_T \quad r_P = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{RG} = e_p p_T - c_p p n_T \quad (2.3.5)$$

#### 2.3.5. Simplificaciones: balance detallado

Existen varias simplificaciones. La más simple de todas es aquella en la que se aplica el **principio de balance detallado**. Este nos dice que bajo condiciones de equilibrio cada proceso fundamental y su inverso se autobalancean independientemente de cualquier otro proceso que pueda ocurrir en el interior del semiconductor. El equilibrio básicamente supone que el número de creación de huecos y electrones es cero, es decir:

$$r_N = r_P = 0 \quad (2.3.6)$$

Luego tenemos que una de las constantes  $e_{n,p}$  o  $c_{n,p}$  se puede reescribir en función de la otra y en función del número de centros RG  $n_T/p_T$  ocupados y el número de portadores  $n$ . El subíndice 0 indica que estamos en el equilibrio:

$$r_N = c_{n0}p_{T0}n_0 - e_{n0}n_{T0} = 0 \Rightarrow e_{n0} = \frac{c_{n0}p_{T0}n_0}{n_{T0}} \quad (2.3.7)$$

$$r_P = c_{p0}n_{T0}p_0 - e_{p0}p_{T0} = 0 \Rightarrow e_{p0} = \frac{c_{p0}n_{T0}p_0}{p_{T0}} \quad (2.3.8)$$

Si reescribimos  $n_1 = n_0p_{T0}/n_{T0}$  y  $p_1 = p_0n_{T0}/p_{T0}$  para simplificar las expresiones, tenemos que:

$$e_{n0} = c_{n0}n_1 \quad e_{p0} = c_{p0}p_1 \quad (2.3.9)$$

La simplificación se hace cuando asumimos que *los coeficientes de emisión y captura son aproximadamente los mismos en el equilibrio y fuera del equilibrio*, tal que

$$e_n \approx e_{n0} = c_{n0}n_1 \approx c_n n_1 \quad e_p \approx e_{p0} = c_{p0}p_1 \approx c_p p_1 \quad (2.3.10)$$

En el caso de que podamos asumir que los coeficientes de emisión y captura son parecidos a los coeficientes en el equilibrio:

$$\begin{aligned} r_N &= -\left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{RG} = c_n (p_{Tn} - n_{Tn}) \\ r_P &= \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{RG} = c_p (n_{Tp} - p_{Tp}) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Reescribiendo  $n_1$  y  $p_1$ :

$$n_1 = \frac{p_{T0}n_0}{n_{T0}} = \left( \frac{N_T - n_{T0}}{n_{T0}} \right) n_0 = \left( \frac{N_T}{n_{T0}} - 1 \right) n_0 \quad (2.3.12)$$

$$p_1 = \frac{n_{T0}p_0}{p_{T0}} = \left( \frac{N_T - p_{T0}}{p_{T0}} \right) p_0 = \left( \frac{N_T}{p_{T0}} - 1 \right) p_0 \quad (2.3.13)$$

Para un semiconductor no degenerado:

$$n_0 = n_i e^{(E_F - E_i)/kT} \quad (2.3.14)$$

Usando la definición de  $n_T$  como

$$\frac{n_{T0}}{N_T} = \frac{1}{1 + g_T e^{(E_T - E_F)/kT}} \quad (2.3.15)$$

Tomando  $E'_T = E_T \pm \ln(g_T)$ , donde + es para un centro R-G acceptor y un signo – para un centro R-G donador. Sustituyendo en  $n_1$  y  $p_1$ :

$$n_1 = \left( \frac{N_T}{n_{T0}} - 1 \right) n_0 = n_i e^{(E'_T - E_i)/kT} \quad p_1 = \left( \frac{N_T}{p_{T0}} - 1 \right) p_0 = n_i e^{(E_i - E'_T)/kT} \quad (2.3.16)$$

Asumiendo que  $E_T$  y  $g_T$  son conocidos podemos calcular  $n_1$  y  $p_1$ . Si  $E'_T$  esa en el centro del gap,  $n_1 \approx p_1 \approx n_i$ . Para la mayor parte de lo análisis que hacemos consideramos que el diapositiva se

encuentra en estado estacionario o quasi-estacionario (situación estable independiente del tiempo, distinto de equilibrio). En estado estacionario simplifica mucho el cálculo ya que si partimos que  $n_T$  no cambia con el tiempo, y asumiendo que  $n_T$  sólo puede cambiar mediante los centros de R-G:

$$\frac{\partial n_T}{\partial t} = - \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{R-G} + \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{R-G} = r_N - r_P = 0 \Rightarrow r_N = r_P \quad (2.3.17)$$

La misma creación o aniquilación de huecos y electrones bajo las condiciones de estado estacionario, dejan fijo el valor de  $n_T$  para valores dados  $n$  y  $p$ . En concreto si igualamos el lado derecho de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_N &= - \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{R-G} = c_n (p_T n - n_T n_1) \\ r_P &= - \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{R-G} = c_p (n_T n - p_T p_1) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Teniendo en cuenta que  $p_T = N_T - n_T$ , si despejamos  $n_T$  obtenemos:

$$n_T = \frac{c_n N_T n + c_p N_T p_1}{c_n (n + n_1) + c_p (p + p_1)} \quad (2.3.19)$$

Obtenemos

$$R = r_N = r_P = \frac{n p - n_i^2}{\frac{1}{c_p N_T} (n + n_1) + \frac{1}{c_n N_T} (p + p_1)} = \frac{n p - n_i^2}{\tau_p (n + n_1) + \tau_n (p + p_1)} \quad (2.3.20)$$

donde  $\tau_n$  y  $\tau_p$  son la vida media de los electrones y huecos minoritarios. El símbolo  $R$  identifica la tasa neta de recombinación en estado estacionario. Vamos a realizar ahora dos simplificaciones para obtener un resultado más sencillo de la recombinación para los casos de:

- Bajo nivel de inyección.
- Semiconductor vacío de portadores.

### Bajo nivel de inyección

Vamos ahora a realizar otra simplificación para obtener un resultado más sencillo de la recombinación para el caso de **bajo nivel de inyección (BNI)**, que implica:

$$\begin{cases} \Delta n = n - n_0 \\ \Delta p = p - p_0 \end{cases} \text{ BNI} \rightarrow \begin{cases} \Delta n \ll n_0; \text{ Tipo N: } n \approx n_0 \\ \Delta p \ll p_0; \text{ Tipo P: } p \approx p_0 \end{cases} \quad (2.3.21)$$

Asumiendo las siguientes consideraciones:

- Bajo nivel de inyección.
- Los centros RG dominantes introducen un nivel de energía  $E_T$  próximo al centro del gap. Tenemos que  $n_1 \approx p_1 \approx n_i$ .
- La concentración de centros RG es muy baja lo que implica que  $\Delta n \approx \Delta p$ .

- Consideramos que  $E'_F$  está próximo a la mitad del gap con lo que podemos aproximar  $n_1 \approx p_1 \approx n_i$ .
- Las vidas medias  $\tau_n$  y  $\tau_p$ , no se diferencian en más que unos cuantos órdenes de magnitud.
- Por último:  $n = n_0 + \Delta n$  y  $p = p_0 + \Delta p$ ;  $\Delta n \approx \Delta p$  y  $n_1 \approx p_1 \approx n_i$ .

Obtenemos el siguiente valor como *tasa de recombinación*:

$$R = \frac{(n_0 + \Delta n)(p_0 + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_0 + \Delta n + n_1) + \tau_n(p_0 + \Delta p + p_1)} \quad (2.3.22)$$

Veamos cual es este valor de  $R$  para los tipo  $p$  y tipo  $n$ :

- Para un semicondutor tipo N podemos considerar que  $n_0 \gg p_0$  y  $n_0 p_0 = n_i^2$ , así:

$$\left. \begin{array}{l} n_0 \gg p_0 + \Delta p + n_i \\ \tau_n \approx \tau_p \end{array} \right\} \rightarrow \tau_p n_0 \gg \tau_n(p_0 + \Delta p + n_i) \quad (2.3.23)$$

Teniendo en cuenta que  $n_0 \Delta p \gg p_0 \Delta n$  y que  $n_0 \Delta p \gg (\Delta p)^2$ :

$$R \approx \frac{n_0 \Delta p}{\tau_p n_0} = \frac{\Delta p}{\tau_p} \quad (2.3.24)$$

- Para un semicondutor tipo P, haciendo las mismas consideraciones

$$\left. \begin{array}{l} p_0 \gg n_0 + \Delta n + n_i \\ \tau_n \approx \tau_p \end{array} \right\} \rightarrow \tau_n p_0 \gg \tau_p(n_0 + \Delta n + n_i) \quad (2.3.25)$$

Teniendo en cuenta que  $p_0 \Delta n \gg n_0 \Delta p$  y que  $p_0 \Delta n \gg (\Delta n)^2$ :

$$R \approx \frac{p_0 \Delta n}{\tau_n p_0} = \frac{\Delta n}{\tau_n} \quad (2.3.26)$$

### Semiconductor vacío de portadores

La región vacía de portadores se define como un volumen del semiconductor donde consideramos que el semiconductor está vacío de portadores:

$$\left. \begin{array}{l} n \ll n_i \\ p \ll n_i \end{array} \right\} np \ll n_1 p_1 = n_i^2 \quad (2.3.27)$$

En este caso:

$$R = \frac{np - n_i^2}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)} = -\frac{n_i}{\tau_g} \quad (2.3.28)$$

donde  $\tau_g = \tau_p(n_1/n_i) + \tau_n(p_1/n_i)$  es el tiempo medio de generación. El signo menos indica que dentro de la región vacía tiene lugar una generación neta de portadores. Si  $E'_T = E_i$  entonces  $\tau_g = \tau_p + \tau_n$ .

### 2.3.6. Recombinación Auger

Como sabemos, la recombinación Auger ocurre cuando se transfiere energía y momento de una recombinación de un par de portadores a un tercer portador, lo que hace que adquiera una energía y momento elevados. Esta energía y momento elevados se dispersan al medio a través de la dispersión con la red cristalina, por ejemplo en forma de fonones. Esta dispersión en forma de fonones hace que pierda energía de manera discreta, lo cual tiene sentido si pensamos que está emitiendo cuantos de energía (fonones). Este tipo de procesos es importante a alto dopado/alto nivel de inyección:

$$R_{\text{Auger}} = \beta n^2 p \quad R_{\text{Auger}} = \beta p^2 n \quad (2.3.29)$$

La constante  $\beta$  depende fuertemente de la tempeartura.

¿Por qué es un proceso que cobra importancia a alto nivel de inyección y dopado? ¿Qué significa alto nivel de inyección? ¿Esta  $\beta$  coincide con la  $\beta$  del proceso de fotogeneración?

### 2.3.7. Recombinación superficial

La recombinación superficial es la recombinación que ocurre cerca de la superficie debido a la aparición de estados energéticos que se pueden usar como centros RG. Con bajo nivel de inyección, la concentración superficial es similar a la concentración en volumen. Así, la tasa de recombinación por unidad de área y tiempo es:

$$U \simeq v_{th} \sigma_p N_{st} (p_s - p_{n0}) \quad (2.3.30)$$

donde  $p_s$  es la *concentración de huecos en la superficie*,  $N_{st}$  la *densidad de centros recombinationares por unidad de área en la superficie*,  $v_{th}$  la *velocidad térmica* y  $\sigma_p$  es el *coeficiente de captura de huecos*. A baja inyección definimos el coeficiente de la siguiente manera:

$$S_{lr} \equiv v_{th} \sigma_p N_{st} \quad (2.3.31)$$

¿Cómo aparecen estos centros RG? ¿Por qué? ¿No fallan las unidades? ¿Por qué esa aproximación a bajo nivel de inyección?

## 2.4. Ecuaciones de continuidad

### 2.4.1. Introducción

La tasa de cambio de portadores viene dada entonces por la suma de todas las tasas de cambio estudiadas hasta el momento: arrastre, difusión, recombinación-generación...

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{\text{Arrastre}} + \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{\text{Difusión}} + \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{\text{RG}} + \left. \frac{\partial n}{\partial t} \right|_{\text{Otros}} \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\text{Arrastre}} + \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\text{Difusión}} + \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\text{RG}} + \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\text{Otros}} \quad (2.4.2)$$

Ahora solo tenemos que sustituir las expresiones vistas. Recordemos que las ecuaciones de continuidad nos dicen que la tasa de cambio por unidad de volumen es igual a la divergencia de la corriente. Así pues:

- Las ecuaciones de *arrastre* nos dicen que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Big|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J}_n|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q} \nabla \cdot (qn\mu_n \mathcal{E}) \quad (2.4.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J}_p|_{\text{Arrastre}} = \frac{1}{q} \nabla \cdot (qp\mu_p \mathcal{E}) \quad (2.4.4)$$

- Las ecuaciones de *difusión* nos dicen que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Big|_{\text{Difusión}} = \frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J}_n|_{\text{Difusión}} = \frac{1}{q} \nabla \cdot (D_n \nabla n) \quad (2.4.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\text{Difusión}} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J}_p|_{\text{Difusión}} = -\frac{1}{q} \nabla \cdot (D_p \nabla p) \quad (2.4.6)$$

- Las ecuaciones de *Recombinación-Generación* nos dicen que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Big|_{\text{Arrastre}} = G_n - R_n \quad (2.4.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\text{Arrastre}} = G_p - R_p \quad (2.4.8)$$

De lo que se deduce que las **ecuaciones de continuidad** son

$$n = \nabla \cdot (qn\mu_n \mathcal{E} + D_n \nabla n) + G_n - R_n \quad (2.4.9)$$

$$p = \nabla \cdot (qp\mu_p \mathcal{E} + D_p \nabla p) + G_p - R_p \quad (2.4.10)$$

Y si consideramos la movilidad como la difusión constantes en el semiconductor:

$$n = \mu_n (\nabla n) \cdot \mathcal{E} + \mu_n n \nabla \cdot \mathcal{E} + D_n \nabla n + G_n - R_n \quad (2.4.11)$$

$$p = \mu_p (\nabla p) \cdot \mathcal{E} + \mu_p p \nabla \cdot \mathcal{E} - D_p \nabla p + G_p - R_p \quad (2.4.12)$$

Esta sería la *expresión más general posible*, lógicamente ahora habría que hacer diferentes aproximaciones en función del caso.

## 2.5. Pseudoniveles de Fermi

Los pseudoniveles de Fermi se introducen de manera que podemos reexpresar las concentraciones, sustituyendo  $E_F \rightarrow E_{Fn}$ ,  $E_{Fp}$ , esto es, *pseudonivel de Fermi para electrones y para huecos*:

$$n = N_C e^{(E_{Fn} - E_c)/kT} \quad p = N_V e^{(E_v - E_{Fp})/kT} \quad (2.5.1)$$

Estos son válidos cuando los electrones y huecos están en equilibrio térmico en sus bandas, y el tiempo de recombinación es mayor que el tiempo que necesitan parar que alcancen el equilibrio dentro de las bandas.

¿Por qué se introducen, qué ganamos? ¿Es fenomenológico?

## 2.6. Otros fenómenos de transporte

Existen otros procesos que provocan corrientes en los portadores. Estas son:

### 2.6.1. Emisión termoiónica

En este proceso los electrones son emitidos al vacío.

¿Qué es el vacío?

### 2.6.2. Transporte túnel

Existe la posibilidad no nula de que los electrones traspasen una barrera de potencial a través del efecto túnel. Este proceso es importante cuando hay un hueco entre dos semiconductores (que se representa como un potencial constante y alto respecto el nivel de Fermi).

### 2.6.3. Efectos a campos altos

Al aumentar el campo eléctrico lo suficiente ( $\sim 5 \times 10^3$  V/m) la velocidad se satura. Sin embargo, cuando nuestro semiconductor tiene más de un mínimo local en la banda de valencia, puede ocurrir que  $E$  sea tan grande que haga que pasen del mínimo absoluto a este mínimo local, lo que haría que la masa efectiva cambiase (al tener diferente Curvatura) lo que puede ocasionar que no satura, si no que disminuya o aumente la velocidad.

## 2.7. Ejercicios

### Ejercicio 2.1:

Cuestiones sobre la resistividad y movilidad:

- La resistividad de un material tipo N es por lo regular más pequeña que la resistividad de un material tipo P de dopado comparable, explica por qué suele ocurrir esto. Calcula la resistividad del Si si se dopa con fósforo con una concentración de  $10^{17}$  cm $^{-3}$ . Repite el cálculo para el caso en que dopemos con aluminio con la misma concentración y calcular la corriente de arrastre en ambos casos considerando un campo eléctrico de  $10^5$  V/cm.
- Calcula la densidad de impurezas necesarias para tener un cristal de Si tipo P con resistividad  $0.1$  Ω·cm. ¿Qué proporción hay de átomos de impureza sobre el número de átomos de Si? (DATO: Constante de red del Si  $a_0 = 5.431$  Å). Si suponemos que el semiconductor es no degenerado, ¿cuánto vale  $D_p$ ?

*Solución en la página 46*

**Ejercicio 2.2:**

Responde a las siguientes cuestiones:

- Calcular la resistividad del GaAs intrínseco a temperatura ambiente ( $\mu_n = 9200 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ,  $\mu_p = 320 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ).
- La movilidad de los electrones en el silicio es  $\mu_n = 1300 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  a temperatura ambiente. Si asumimos que la movilidad está limitada principalmente por la dispersión con la red cristalina, calcular la movilidad a  $T = 150 \text{ K}$ .
- Dos mecanismos de dispersión tienen lugar en un semiconductor. Si sólo el primer de los mecanismos está presente la movilidad es de  $250 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ . Si sólo el segundo de los mecanismos está presente la movilidad es de  $650 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ . Calcular la movilidad cuando los dos mecanismos están presentes.

*Solución en la página 47*

**Ejercicio 2.3:**

Obtener las concentraciones de electrones y huecos, movilidades y resistividades de muestras de silicio a  $300K$  para las siguientes concentraciones de impurezas:

- $1 \times 10^{15} \text{ átomos/cm}^3$  de boro.
- $1 \times 10^{16} \text{ átomos/cm}^3$  de boro y  $1.5 \times 10^{16} \text{ átomos/cm}^3$  de arsénico.
- $5 \times 10^{15} \text{ átomos/cm}^3$  de boro,  $10^{17} \text{ átomos/cm}^3$  de arsénico y  $10^{17} \text{ átomos/cm}^3$  de galio.

Considerar que, las movilidades para portadores mayoritarios:

$$\mu_n(N) = 65 + \frac{1265}{1 + \left(\frac{N}{8.5 \times 10^{16}}\right)^{0.72}} \quad \mu_p(N) = 48 + \frac{447}{1 + \left(\frac{N}{6.3 \times 10^{16}}\right)^{0.76}} \quad (2.7.15)$$

Para portadores minoritarios:

$$\mu_n(N) = 232 + \frac{1180}{1 + \left(\frac{N}{8 \times 10^{16}}\right)^{0.9}} \quad \mu_p(N) = 130 + \frac{370}{1 + \left(\frac{N}{8 \times 10^{17}}\right)^{1.25}} \quad (2.7.16)$$

*Solución en la página 47*

**Ejercicio 2.4:**

Responde a las siguientes preguntas

- Una muestra de silicio intrínseco es dopada desde un lateral con donadores de tal forma que:

$$N_D = N_0 \exp(-ax).$$

Suponiendo condiciones de equilibrio y que  $N_D \gg n_i$ , encontrar la expresión del campo eléctrico interno  $E(x)$ . Evaluar  $E(x)$  para  $a = 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ .

- (b) Si ahora el perfil de dopado es:

$$N_D(x) = N_0 + (N_L - N_0)(x/L),$$

obtener una expresión para el campo eléctrico en un plano  $x$  dentro del dispositivo, considerando constantes el coeficiente de difusión y la movilidad. ¿Cuál es la expresión de la diferencia de potencial entre las superficies frontal y trasera de la muestra si la muestra es de longitud  $L$ ? Consideraremos condiciones de equilibrio térmico y eléctrico.

*Solución en la página 48*

### Ejercicio 2.5:

Una muestra de silicio tipo N tiene una resistividad de  $0,5 \Omega \cdot \text{cm}$  a temperatura ambiente. Se introducen  $N_T = 5 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  impurezas metálicas que crean un nivel energético a  $E_C - E_T = 0,530 \text{ eV}$ . Los tiempos de vida media de electrones y huecos son:

$$\tau_n = 1,25 \times 10^{-8} \text{ s}, \quad \tau_p = 3,13 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

- (a) Calcular la tasa de recombinación de portadores en una zona sin portadores móviles. ¿Cuál es el fenómeno dominante, la generación o la recombinación?
- (b) Suponer que sólo los portadores minoritarios han desaparecido, mientras que la concentración de mayoritarios es similar a la del equilibrio. Calcular la tasa de recombinación de portadores.

*Solución en la página 49*

### Ejercicio 2.6:

Responde a las siguientes cuestiones

- (a) Calcular la concentración de electrones y huecos en un semiconductor de Si dopado tipo N ( $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ), que se encuentra bajo iluminación constante en estado estacionario con:

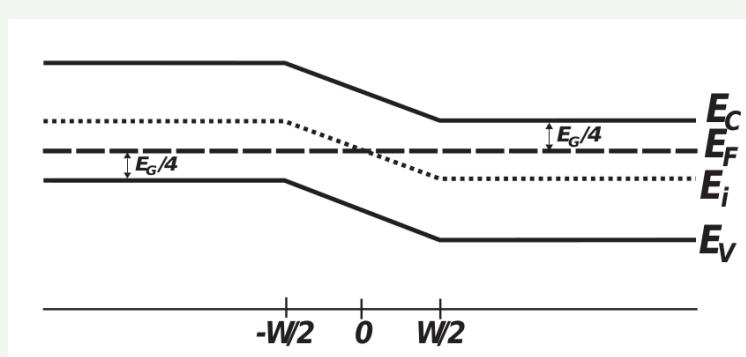
$$G_L = 10^{18} \text{ cm}^{-3}\text{s}^{-1}, \quad \tau_n = \tau_p = 10 \mu\text{s}.$$

- (b) Dibujar el diagrama de bandas antes y después de iluminar. Asumir bajo nivel de inyección.

*Solución en la página 50*

### Ejercicio 2.7:

Un semiconductor de silicio está caracterizado por el siguiente diagrama de bandas de energía:

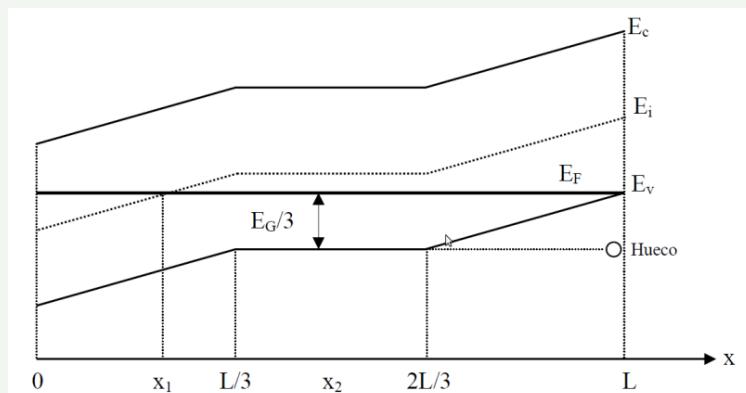


- (a) Si el semiconductor de Si se mantiene a temperatura ambiente, determinar la resistividad del semiconductor para la región  $x > W/2$ . Para los electrones en la región  $x > W/2$  que intentan moverse a la región  $x < -W/2$  sin modificar su energía total, ¿cuál es la mínima energía cinética que deben tener?
- (b) Calcular y representar gráficamente el potencial electrostático y el campo eléctrico en función de  $x$ . Explicar si el semiconductor está en equilibrio termodinámico.
- (c) Responder las siguientes preguntas:
- ¿Cuál es la densidad de corriente de electrones ( $J_n$ ) y de huecos ( $J_p$ ) en  $x = 0$ ?
  - ¿Existe corriente de arrastre de electrones en  $x = 0$ ? Si así fuera, ¿cuál es la dirección del flujo de corriente de arrastre?
  - ¿Existe corriente de difusión de electrones en  $x = 0$ ? En tal caso, ¿cuál es la dirección del flujo de corriente de difusión?

*Solución en la página 50*

### Ejercicio 2.8:

Interpretación de un diagrama de bandas de energía para un semiconductor de silicio tomando  $L = 1$  micra:



- (a) Calcula y representa graficamente el potencial electrostático y el campo eléctrico en el interior del semiconductor. Determina si el sistema esta o no en equilibrio termodinámico.

- (b) Calcula si el semiconductor es degenerado en alguna zona. En  $x = x_2$ , ¿a qué es igual  $p$ ?
- (c) Captura la densidad de corriente de electrones  $J_n$  y la densidad de corriente de arrastre de huecos  $J_p^a$  que fluye en  $x = x_1$ . Determina cuanto vale la energía cinética del hueco que aparece en el diagrama en la posición  $x = L$ .

*Solución en la página 52*

### Solución del ejercicio 2.1 en la página 42:

- a) La diferencia radica en la masa efectiva, que se expresa en la movilidad:

$$\rho = \frac{1}{q(n\mu_n + p\mu_p)} \quad (2.7.64)$$

Cuando  $\mu_n > \mu_p \Rightarrow \rho_n < \rho_p$ . Y esto siempre ocurre. Las movilidades dependen de la temperatura y la cantidad que esté dopado, por lo que puede ser diferente. Para un semiconductor dopado tipo  $N$ :

$$\rho_N = \frac{1}{qn\mu_n} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{19} \cdot 10^{17} \cdot 1350} = 0.0463 \Omega \text{cm} \quad (2.7.65)$$

Y para un tipo  $P$ :

$$\rho_P = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{19} \cdot 10^{17} \cdot 480} = 0.13 \Omega \text{cm} \quad (2.7.66)$$

(valores de movilidad sacados de la Wikipedia). Ahora podemos calcular la corriente de arrastre (usamos que  $J = qnN\epsilon$ , donde  $\epsilon = 10^5$  eV)

$$J_N = 2.16 \cdot 10^6 \text{ A cm}^{-2} \quad J_P = 7.68 \cdot 10^3 \text{ A cm}^{-2} \quad (2.7.67)$$

- b) Ahora lo que hacemos es considerar que el número de impurezas es igual al número de huecos (están todas completamente ionizadas). Lo que nos queda entonces es:

$$N_A = \frac{1}{q\rho\mu_p} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{19} \cdot 0.1 \cdot 480} = 1.3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} \quad (2.7.68)$$

Podemos calcular con  $a_0$  el número de átomos de silicio por unidad de volumen:

$$N_{Si} = 5 \cdot 10^{22} \text{ at cm}^{-3} \quad (2.7.69)$$

Y solo tenemos, para calcular la proporción:

$$\frac{N_A}{N_{Si}} = 2.6 \cdot 10^{-6} = 2.6 \text{ ppm} \quad (2.7.70)$$

Para acabar necesitamos calcular la relación de Eistein (solo usable en semiconductores no degenerados). Así tenemos que

$$D_p = \frac{kT}{q}\mu_p = 12.4 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (2.7.71)$$

**Solución del ejercicio 2.2 en la página 43:**

- a) Para calcular la resistividad usamos la fórmula:

$$\rho = \frac{1}{q(\mu_p p + \mu_n n)} \quad (2.7.72)$$

Donde solo tenemos que sustituir  $n, p \rightarrow n_i$ . Calculamos usando que  $n_i = 2.25 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$  de lo que se deduce que:

$$\rho = 4.33 \cdot 10^9 \Omega\text{cm} \quad (2.7.73)$$

- b) No conocemos la fórmula explícita, pero sí que sabemos que  $\mu_{\text{impurezas}} \propto T^{3/2}$ . Por tanto podemos calcular:

$$\frac{\mu_{\text{imp}}(T = 150K)}{\mu_{\text{imp}}(T = 300K)} = \left(\frac{150}{300}\right)^{3/2} \quad (2.7.74)$$

De lo que obtenemos:

$$\mu_{\text{imp}}(T = 150K) = 459.62 \text{ cm}^2/\text{Vs} \quad (2.7.75)$$

- c) Tenemos que usar la *regla mathiessen*:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \quad (2.7.76)$$

De lo que obtenemos:

$$\mu = 180.55 \text{ cm}^2/\text{Vs} \quad (2.7.77)$$

**Solución del ejercicio 2.3 en la página 43:**

Primero tenemos que evaluar si son dadores/aceptores, calcular  $n$  y  $p$ , luego evaluar las fórmulas para portadores mayoritarios y minoritarios, y finalmente la resistividad. Para calcular  $n$  y  $p$ :

- a) El Boro es un átomo aceptor, por lo que tendremos como dato  $N_A = 10^{15}$  átomos/cm<sup>3</sup>. Ahora calculamos, usando que  $n_i = 1.18 \times 10^{10}$ :

$$p = N_A = 10^{15} \quad p = \frac{n_i^2}{n} = \quad (2.7.78)$$

Calculamos las movilidades, usando la mayoritaria para los huecos y la minoritaria para los electrones:

$$\mu_n = \quad \mu_p = \quad (2.7.79)$$

La resistividad  $\rho$  se calcula ahora fácilmente:

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n n + \mu_p p)} \quad (2.7.80)$$

- b) El Arsénico es un átomo dador, por lo que tendremos como dato  $N_{D\text{eff}} = 5 \times 10^{15}$  átomos/cm<sup>3</sup>, que se deduce de:

$$N_{D\text{eff}} = N_{As} - N_B = 5 \times 10^{15} \quad (2.7.81)$$

Ahora calculamos, usando que  $n_i = 1.18 \times 10^{10}$ :

$$n = N_{D\text{eff}} = 10^{15} \quad p = \frac{n_i^2}{n} = \quad (2.7.82)$$

Calculamos las movilidades, usando la mayoritaria para los electrones y la minoritaria para los huecos:

$$\mu_n = \quad \mu_p = \quad (2.7.83)$$

La resistividad  $\rho$  se calcula ahora fácilmente:

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n n + \mu_p p)} \quad (2.7.84)$$

- c) El Galio es un átomo aceptor, por lo que tendremos como dato  $N_{A\text{eff}} = 5 \times 10^{15}$  átomos/cm<sup>3</sup>, que se deduce de:

$$N_{A\text{eff}} = N_{\text{Ga}} + N_{\text{B}} - N_{\text{As}} = 5 \times 10^{15} \quad (2.7.85)$$

Ahora calculamos, usando que  $n_i = 1.18 \times 10^{10}$ :

$$p = N_{A\text{eff}} = 5 \times 10^{15} \quad p = \frac{n_i^2}{n} = \quad (2.7.86)$$

Calculamos las movilidades, usando la mayoritaria para los huecos y la minoritaria para los electrones:

$$\mu_n = \quad \mu_p = \quad (2.7.87)$$

La resistividad  $\rho$  se calcula ahora fácilmente:

$$\rho = \frac{1}{e(\mu_n n + \mu_p p)} \quad (2.7.88)$$

### Solución del ejercicio 2.4 en la página 43:

- a) Nos dicen que  $N_D = N_0 \exp(-ax)$ , y queremos calcular  $E(x)$ . Dependerá del nivel de profundidad que quieras darle al ejercicio. Suponemos, al no dar datos de los procesos recombinación-generación, que estamos en el *modelo de arrastre-difusión*. Así pues, tenemos que:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{J}_{\text{arr}} + \mathbf{J}_{\text{diff}}) = 0 \rightarrow J_{\text{arr}} + J_{\text{diff}} = 0 \quad (2.7.89)$$

tal que (pasamos de vectorial a escalar)

$$J_{\text{arr}} + J_{\text{diff}} = 0 \rightarrow q\mu_n n \mathcal{E} + qD_n \frac{dn}{dx} = 0 \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{D_n}{\mu_n} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \quad (2.7.90)$$

donde usaremos que  $n \sim N_D$  y que  $D_n/\mu_n = kT/q$  es la *relación de Einstein*. Así pues:

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{q} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \quad (2.7.91)$$

- b) Considerando que estamos en equilibrio térmico  $T = \text{cte}$  y en equilibrio eléctrico  $\mathbf{J}_T = 0$ . Igual que antes:

$$\mathcal{E} = -\frac{kT}{q} \frac{d(\ln(n))}{dx} \quad (2.7.92)$$

y ahora podemos hallar la diferencia de potencial total:

$$\Delta V = - \int_0^L \mathcal{E} dx \quad (2.7.93)$$

Esto es:

$$\Delta V = \frac{kT}{q} [\ln(n(L)) - \ln(n(0))] = \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{n(L)}{n(0)} \right) \quad (2.7.94)$$

### Solución del ejercicio 2.5 en la página 44:

Nos dan  $E_c - E_T = 0.530\text{eV}$ , nos dan  $N_T, \rho, \tau_n$  y  $\tau_p$ . Son bastantes datos, por lo que es normal liarse, así que tenemos que tener muy claro que nos están preguntado y las aproximaciones que podemos hacer. No nos dan la temperatura, por lo que asumimos temperatura ambiente  $300K$ . Por ejemplo, al darnos  $E_T$  respecto  $E_c$ , podemos deducir  $E_T - E_i$ , y ver si podemos usar la aproximación a niveles profundos. Veamos que si  $E_c = E_g$  y  $E_v = 0$ :

$$E_i = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \left( \frac{m_n^*}{m_p^*} \right) = \quad (2.7.95)$$

donde  $E_g = 1.12\text{ eV}$ ,  $m_n = 1.18m_e$  y  $m_p = 0.81m_e$ . Así  $E_i = \text{eV}$  y por tanto:

$$E_T - E_i = E_g - 0.530 - E_i = 0.037\text{ eV} \quad (2.7.96)$$

que es comparable a  $kT$  y por tanto no suficiente como para hacer la aproximación a niveles profundos  $n_1 = p_1 = n_i$ , y hay que calcularlos con las siguientes fórmulas:

$$n_1 = n_i e^{(E'_T - E_i)/kT} \quad p_1 = p_i e^{(E_i - E'_T)/kT} \quad (2.7.97)$$

- a) Queremos calcular la tasa de recombinación, es decir,  $R$ , en una zona sin portadores. Esto significa que la *aproximación a semiconductor vacío de portadores es válido*. Es decir, tenemos que:

$$R = \frac{np - n_i}{\tau_p(n + n_1) + \tau_n(p + p_1)} \approx -\frac{n_i^2}{\tau_p n_1 + \tau_n p_1} \quad (2.7.98)$$

Entonces tenemos que

$$R = \quad (2.7.99)$$

- b) Suponemos que solo los portadores minoritarios han desaparecido ( $p \approx 0$ ), mientras que  $n$  es similar al equilibrio  $n \approx n_0$ . Tenemos ahora que:

$$R = -\frac{n_i^2}{\tau_p(n_0 + n_1) + \tau_n(p_1)} \quad (2.7.100)$$

Calculando  $n$  a partir de  $\rho$  usando que  $n = 1/q\mu_n\rho$ :

$$R = \quad (2.7.101)$$

**Solución del ejercicio 2.6 en la página 44:**

- a) Tenemos un semiconductor tipo N a  $N_D$  dado,  $G_L$  y tiempos de vida medios, y queremos calcular  $n$  y  $p$  en el estado estacionario, esto es, queremos calcular  $n$  cuando  $R = G$ . Como sabemos,  $G = G_{th} + G_L$ , y que  $n = N_D$  (estamos a 300K, podemos considerar que todas las impurezas están ionizadas) y por tanto que  $n_{n0} \gg p_{n0}$  (recordemos que  $n_{n0}$  y  $p_{n0}$  denotan concentración de portadores cuando no hay luz), ya que:

$$n_{n0} = N_D \quad p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_{n0}} \quad (2.7.102)$$

donde  $n_i = 1.18 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  para el Si a 300K. Entonces solo tenemos que usar la ecuación para  $p_{n0} \ll n_{n0}$ :

$$G_L = U = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} \quad (2.7.103)$$

De lo que se deduce que *la concentración de portadores  $p_n$  es:*

$$p_n = G_L \tau_p + p_{n0} \quad (2.7.104)$$

y usando que  $\Delta n = \Delta p$ , tenemos que:

$$n_n = n_{n0} + \Delta p = n_{n0} + G_L \tau_p \quad (2.7.105)$$

- b) Para dibujar el diagrama de Bandas solo tenemos que calcular en nivel de fermi  $E_F$  para las concentraciones nuevas. Así pues, usamos que:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left( \frac{m_n^*}{m_p^*} \right) - kT \ln \left( \frac{p}{n_i} \right) \quad (2.7.106)$$

Usando que  $E_i = \text{eV}$ , los valores de la energía de Fermi:

$$\text{Sin iluminación: } E_F = \text{eV} \quad \text{Con iluminación: } E_F = \text{eV} \quad (2.7.107)$$

**Solución del ejercicio 2.7 en la página 44:**

- a) La resistividad, como hemos visto a lo largo de todos los ejercicios, viene dada por:

$$\rho = \frac{1}{q(\mu_n n + \mu_p p)} \quad (2.7.108)$$

Por lo que solo tenemos que calcular  $n$  y  $p$  para  $\mu_n$  y  $\mu_p$  dados (valores que tendremos que coger de otro ejercicio). Así pues, obtenemos  $n$  y  $p$  a partir de las ecuaciones:

$$n = N_C e^{(E_c - E_F)/kT} \quad p = N_V e^{(E_F - E_v)/kT} \quad (2.7.109)$$

Donde conocemos  $N_C$  y  $N_V$  a 300K (temperatura ambiente) y la diferencia de  $E_c - E_F = E_g/4$  y  $E_F - E_v = 3E_g/4$  en  $x > W/2$  (véase diagrama de bandas). Así pues conocemos los valores:

$$n = \text{cm}^{-3} \quad p = \text{cm}^{-3} \quad (2.7.110)$$

Ahora solo queda calcular la energía cinética mínima  $T_{\min}$  que deben tener. Como podemos ver la energía de la banda de conducción aumenta de la región  $x > W/2$  a la región  $x < W/2$ . Así pues:

$$T_{\min} = E_c(-W/2) - E_c(W/2) = E_g/2 = \quad (2.7.111)$$

b) Como sabemos el campo eléctrico viene dado por:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \frac{dE_i}{dx} \quad (2.7.112)$$

y el potencial  $V(x) = -E_i(x) + V_0$  donde  $V_0$  es una constante arbitraria que nos ayuda a redefinir el cero del potencial. Como para calcular la derivada (y  $V_0$  siempre nos permite redefinir el cero de  $V$ ) solo necesitamos conocer la *dependencia de  $E_i$  con la posición*, podemos escribir

$$E_i = E_{i0} - \frac{E_g}{2} \frac{x}{W} \quad (2.7.113)$$

siendo  $E_{i0}$  una constante irrelevante que contiene información de la energía respecto al cero  $E_F = 0$  eV. Así pues:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{q} \frac{E_g}{2W} \quad (2.7.114)$$

Así pues:

$$V = V_0 + \frac{E_g}{q} \frac{x}{2W} \quad (2.7.115)$$

Para ver si está en equilibrio termodinámico tenemos que ver si  $J_n = J_p = 0$ . Veamos que  $J_n = 0$  implica que:

$$J_n = J_n|_{\text{difusión}} + J_n|_{\text{arrastre}} = q\mu_n n \mathcal{E} + qD_n \frac{dn}{dx} = 0 \quad (2.7.116)$$

De tal modo que, si estamos en equilibrio se tiene que verificar que

$$\mathcal{E}_n = \frac{D_n}{\mu_n} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = \frac{kT}{q} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \quad (2.7.117)$$

donde hemos aplicado las reglas de Einstein (válido para el equilibrio y fuera del equilibrio). Ahora solo tenemos que evaluar  $n(x)$  y su derivada. Es sencillo de ver que la única dependencia mostrada en el diagrama de bandas:

$$n = \begin{cases} N_c e^{-\frac{1}{kT} \frac{3E_g}{4}} & \text{si } x < -W/2 \\ N_c e^{-\frac{1}{kT} \frac{E_g}{4} \left( \frac{-x+W}{W/2} \right)} & \text{si } -W/2 < x < W/2 \\ N_c e^{-\frac{1}{kT} \frac{E_g}{4}} & \text{si } W/2 < x \end{cases} \quad (2.7.118)$$

De lo cual deducimos que la derivada es:

$$\frac{dn}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -W/2 \\ \frac{1}{kT} \frac{E_g}{4} \frac{2}{W} N_c e^{-\frac{1}{kT} \frac{E_g}{4} \left( \frac{-x+W}{W/2} \right)} & \text{si } -W/2 < x < W/2 \\ 0 & \text{si } W/2 < x \end{cases} \quad (2.7.119)$$

Consecuentemente el campo eléctrico:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{1}{q} \frac{E_g}{2W} \quad \text{si } -W/2 < x < W/2 \quad (2.7.120)$$

Que como podemos ver es la misma expresión. Para los portadores huecos se puede llegar a lo mismo siguiendo los mismos pasos (la única diferencia es que aparecen dos signos menos que se cancelan).

c) Respondemos a cada una de las preguntas:

- La densidad de corriente de electrones y de huecos en  $x = 0$  es cero, como hemos visto en el apartado anterior. De otra manera no estaríamos en el equilibrio termodinámico.
- Corriente de arrastre hay, ya que el campo eléctrico no es nulo (en  $x = 0$ ). Así pues:

$$\mathbf{J}_n|_{\text{arrastre}} = q\mu_n n \mathcal{E} = -\mu_n \frac{E_g}{2W} N_c e^{-\frac{1}{kT} \frac{E_g}{2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (2.7.121)$$

- Corriente de difusión hay, y en virtud de que  $\mathbf{J}_n|_{\text{arrastre}} = -\mathbf{J}_n|_{\text{difusión}}$ , tenemos que

$$\mathbf{J}_n|_{\text{arrastre}} = -q\mu_n n \mathcal{E} = \mu_n \frac{E_g}{2W} N_c e^{-\frac{1}{kT} \frac{E_g}{2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (2.7.122)$$

### Solución del ejercicio 2.8 en la página 45:

- a) Queremos calcular el potencial electrostático y el campo eléctrico en el interior del semiconductor. Usamos la misma relación que en el ejercicio anterior:
- b) Evidentemente es degenerado en  $x = L$ , ya que  $E_F = E_v$ . En  $x_2$  tenemos que:

$$p = N_V e^{\frac{E_F - E_v}{kT}} = N_V e^{\frac{E_g}{3kT}} \quad (2.7.123)$$

Los datos:

$$p = \quad (2.7.124)$$

- c) Nos piden la densidad de corriente de electrones  $J_n$  y la densidad de corriente de huecos en  $x = x_1$ .

# **Capítulo 3**

## **La unión PN**



## **Capítulo 4**

# **El transistor bipolar de unión**



## **Capítulo 5**

# **El transistor MOSFET**



# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Densidad de Estados y Estadística de Fermi-Dirac

#### A.1.1. Niveles de energía

El comportamiento de los electrones viene determinado por la función de ondas del mismo, obtenida (a no ser que las energías de estos sean ultrarrelativistas) mediante la ecuación de Schrödinger:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (\text{A.1.1})$$

Si tomamos que  $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \Psi(\mathbf{r})$  donde  $E$  es la energía del estado tenemos que la ecuación se transforma en la llamada *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.1.2})$$

En función del potencial que usemos para describir el comportamiento de los electrones obtendremos una teoría u otra. La *teoría de los electrones libres* es la mas sencilla de todas, ya que supone que  $V(\mathbf{r}) = 0$ , es decir, que los electrones no experimentan ningún tipo de potencial en el metal (ni con otros electrones, ni vibraciones, ni con los átomos...). Es evidente que una teoría que quisiera ser más realista debería incluir algún tipo de potencial, pero como veremos es suficiente como para predecir algunos valores experimentales (aunque sea en orden de magnitud). En ese caso la ecuación se transforma en:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.1.3})$$

Que como podemos ver no es más que una ecuación de onda, por lo que la solución mas general puede ser descrita en función de exponentiales complejas

$$\Psi(\mathbf{r}) = A e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.1.4})$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector de onda que debe verificar que:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (\text{A.1.5})$$

Esta solución, aunque viola los principios de la mecánica cuántica (la integral en el espacio de  $|\Psi|^2$  es infinita, teniendo que ser 1) y no describe estados reales (energía y momento perfectamente definidos, partícula que podría estar en cualquier parte del universo con la misma probabilidad...), es bastante funcional. Si ahora al electrón lo encerramos en una caja de volumen  $V = L_x L_y L_z$  y exigimos que la función de ondas sea igual en todo el borde  $\Psi(0) = \Psi(L_i)$  ( $i = x, y, z$ ) tenemos que el momento se discretiza (ya no todos los valores son iguales), tal que:

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i \quad n_i = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.1.6})$$

para  $i = x, y, z$ . Supongamos de ahora en adelante que los 3 lados son iguales y que por tanto  $V = L^3$ . Como podemos ver esto significa que a un  $\mathbf{k}_n$  concreto se le asocia un volumen en el espacio de los momentos  $k$  de volumen  $8\pi^3/L^3$ . En realidad a cada uno de estos volúmenes podremos asociar dos estados de electron: uno con espín  $\uparrow$  y otro con espín  $\downarrow$ . De este hecho podemos obtener un valor para el número de estados posibles  $N$  encerrados en una esfera de radio  $k_F$  en el espacio de momentos:

$$N = 2 \times \frac{1}{8\pi^3/L^3} \iint_0^{k_F} k_F^2 dk d\Omega \quad (\text{A.1.7})$$

En palabras esta ecuación se traduce como: el número de estados totales para dicha esfera es el volumen de la esfera entre el volumen al que asociamos un estado posible. De este modo tenemos que:

$$N = \frac{V}{3\pi^2} k_F^3 \quad (\text{A.1.8})$$

En el cero absoluto, los electrones tratarán de colocarse en los niveles con menos energía posible (es decir, con menor  $k$ ), por lo que si en tenemos  $N$  partículas posibles (es decir, tenemos que asignar  $N$  estados posibles, tal que  $N \rightarrow N$  en la ec. anterior). Así el valor de  $k_F$  adquiere el significado de “máximo valor posible de  $k$  para un electrón”, y tiene el valor de:

$$k_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3} \quad (\text{A.1.9})$$

donde  $n = N/V$  es la *densidad de partículas*. Lógicamente valores de  $k > k_F$  no son posibles, ya que eso significaría que esa partícula tiene disponible un estado con menor energía que no está ocupando, lo cual es imposible si estamos en el cero absoluto. Entonces la superficie de la esfera citada antes adquiere un significado más profundo, ya que es la separación entre *los estados ocupados y desocupados* del sistema, denominándose **superficie de Fermi**. De aquí podemos deducir otros muchos términos (como la energía máxima, velocidad máxima...). A todos estos términos los llamamos “de Fermi”. Así tenemos, en resumen:

- **Vector de onda de Fermi (3D):**

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (n \equiv N/V) \quad (\text{A.1.10})$$

- **Vector de onda de Fermi (2D):**

$$k_F = \sqrt{2\pi n} \quad (\text{A.1.11})$$

- **Energía de Fermi:**

$$\varepsilon_F \equiv \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (\text{A.1.12})$$

■ **Velocidad de Fermi:**

$$v_F \equiv \sqrt{2\varepsilon_F/m} \quad (\text{A.1.13})$$

■ **Temperatura de Fermi:**

$$T_F \equiv \varepsilon_F/k_B \quad (\text{A.1.14})$$

Ahora otra pregunta que nos podemos hacer es: ¿Cuántos estados hay en un intervalo de energías  $\varepsilon$  y  $\varepsilon + d\varepsilon$ ? Para calcularlos esto solo tenemos que saber cuántos estados hay entre  $k$  y  $K + dk$  y hacer el cambio de variable. Entonces en un intervalo  $\varepsilon$  y  $\varepsilon + d\varepsilon$  habrá

$$\mathcal{N}(k + dk) - \mathcal{N}(k) = \frac{V}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left( (\varepsilon + d\varepsilon)^{3/2} - (\varepsilon)^{3/2} \right)$$

si ahora  $d\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $\mathcal{N}(k + dk) - \mathcal{N}(k) = d\mathcal{N}$  tenemos que

$$d\mathcal{N} = \frac{V}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left( (\varepsilon + d\varepsilon)^{3/2} - (\varepsilon)^{3/2} \right) = \frac{V}{3\pi^2} \varepsilon^{3/2} \left( (1 + d\varepsilon/\varepsilon)^{3/2} - (1)^{3/2} \right)$$

donde hemos usado que  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$  y cogido el término lineal con  $d\varepsilon$ , de tal modo que:

$$d\mathcal{N} = \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\varepsilon^{3/2} V}{3\pi^2} \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (\text{A.1.15})$$

Si definimos la **densidad de estados** como  $D(\varepsilon) = d\mathcal{N}/d\varepsilon$  tenemos que:

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (\text{A.1.16})$$

Teniendo en cuenta que  $2m/\hbar^2 = k_F^2/\varepsilon_F$ , y que  $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  tenemos que la densidad de estados se puede escribir como

$$D(\varepsilon) = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_F} \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.17})$$

De lo que se puede deducir la expresión de densidad de estados por unidad de volumen  $d(\varepsilon) = D(\varepsilon)/V$ . Teniendo en cuenta todo lo anterior no es muy difícil deducir que:

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{A.1.18})$$

que sólo es válido para temperaturas  $T = 0$ , ya que estamos asumiendo que la probabilidad de que el estado con  $\varepsilon < \varepsilon_F$  esté ocupado es del 100 %. Sin embargo a temperaturas finitas esta probabilidad dependerá de una función llamada la función de Fermi, que como veremos en el siguiente apartado modificará sustancialmente esta ecuación.

### A.1.2. Estadística de Fermi-Dirac

Dado un sistema de electrones libres (es decir, no están sometidos bajo ningún tipo de potencial), la probabilidad de que un estado con energía  $E$  esté ocupado viene dado por el factor de Fermi, también llamado **distribución de Fermi-Dirac**:

$$f_{FD}(E, T) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (\text{A.1.19})$$

donde  $\mu$  es el llamado *potencial químico*, aunque en realidad la razón por la cual aparece en la ecuación es en cantidad de constante de integración, de multiplicador de lagrange fruto de la derivación matemática. A bajas energías la función de Fermi se convierte en la función escalón, mientras que a altas temperaturas esta función escalón se va difundiendo. Como podremos ver esta estará relacionada con la energía de Fermi.

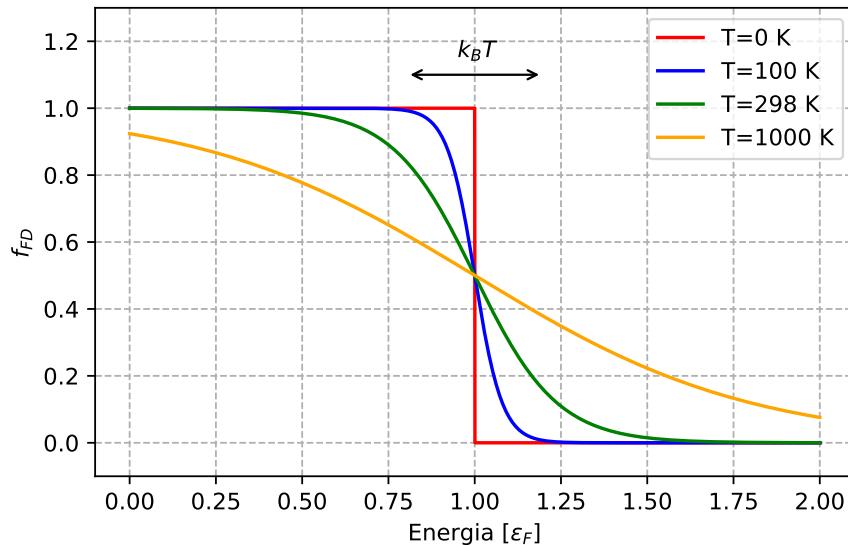


Figura A.1: Distribución de Fermi-Dirac.

Cuando  $T \neq 0$  la probabilidad de que este ocupado un estado de energía  $\varepsilon > \varepsilon_F$  ya no es cero, de tal modo que el número de estados viene dado por:

$$N = \int_0^{\infty} f_{FD}(\varepsilon, T) D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{A.1.20})$$

Si  $T = 0$  tenemos que la ecuación () se recupera verificándose que  $\mu = \varepsilon_F$  dadas las definiciones previas. Sin embargo para temperaturas  $T \neq 0$  no se verifica que sean iguales ( $\mu(T \neq 0) \neq \varepsilon_F$ ). De hecho el valor de  $\mu$  depende en última instancia de la ligadura (A.1.20), de tal modo que para  $T \ll T_F$  se verifica que:

$$\mu(T) \approx \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\pi T}{2T_F} \right)^2 \right] \quad (\text{A.1.21})$$

que se deduce de la expansión de Sommerfeld.