

# Entrega 2 Fisica Nuclear

Daniel Vázquez Lago

22 de abril de 2025

## Resumen

Ejercicios 5 y 6 del segundo boletín de Fisica Nuclear. El ejercicio 5 esta centrado en el cálculo de  $Q_{gs}$  de todos los átomos fisionantes y la comparación con los límites, como Businaro Gallone. El ejercicio 6 está centrado en el cálculo de ciertos parámetros de interés en la fisión nuclear a partir de observables medibles en el laboratorio.

## Índice

<b>Ejercicio 5</b>	<b>1</b>
Apartado a) . . . . .	1
Apartado b) . . . . .	2
<b>Ejercicio 6</b>	<b>3</b>
Apartado a) . . . . .	3
Calculo de TKE . . . . .	4
Cálculo de $A_1$ y $A_2$ . . . . .	4
Calculo de TXE . . . . .	5
Apartado b) . . . . .	5
Apartado c) . . . . .	6
Apartado d) . . . . .	7
<b>Código</b>	<b>9</b>
<b>Referencias</b>	<b>9</b>

donde // indica división entera ( $2.5//2=1, 4.5//2=2$ ...). Ahora lo interesante sucede cuando  $Z$  y  $N$  son impar a la vez, ya que las existen varias posibilidades:

$Z$  y  $N$  impares:

$$Q_{gs1} = M(N, Z) - M(N//2, Z//2) - M(N//2 + 1, Z//2 + 1)$$

$$Q_{gs2} = M(N, Z) - M(N//2 + 1, Z//2) - M(N//2, Z//2 + 1)$$

$$Q_{gs} = \frac{1}{2}(Q_{gs1} + Q_{gs2})$$

que lógicamente darán valores distintos. Lo que sugerimos nosotros es hacer una media de la  $Q_{gs1}$  y  $Q_{gs2}$ . ¿Por qué una media? Porque es la distribución menos sesgada con la información (la que maximiza la entropía) que tenemos (la única información que tenemos es que  $P_{fisin simtrica} = P_1 + P_2$ ) se corresponde precisamente a que ambas posibilidades sean equiprobables (Luis Miguel Varela Cabo, Mecánica Estadística).

## Ejercicio 5

### Apartado a)

Se nos pide calcular los valores de  $Q_{gs}$  para la fisión simétrica para todos los núcleos estables. Para calcular  $Q_{gs}$  primero tenemos que saber que es  $Q_{gs}$ . El parámetro o valor  $Q_{gs}$  de una reacción simétrica es básicamente la diferencia de las masas en reposo del nucleo original y los productos en el estado fundamental, tal que:

$$Q_{gs} = M(N, Z) - 2M(N/2, Z/2)$$

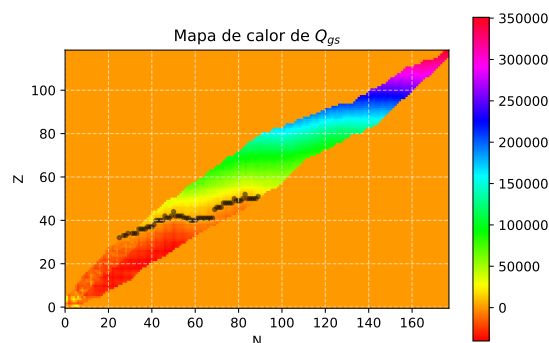
Ahora bien, para núcleos con  $A$  y  $Z$  impar. Cuando  $A$  es impar (es decir,  $Z$  es par y  $N$  impar o viceversa), el resultado es sencillo, ya que podemos escribir directamente:

Si  $Z$  impar:

$$Q_{gs} = M(N, Z) - M(N/2, Z//2 + 1) - M(N/2, Z//2)$$

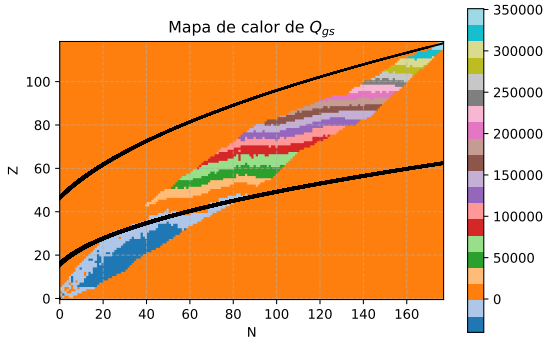
Si  $N$  impar:

$$Q_{gs} = M(N, Z) - M(N//2 + 1, Z/2) - M(N//2, Z/2)$$



**Figura 1:** Valor de  $Q_{gs}$  para cada átomo. El valor negro indica el punto en el que  $Q_{gs} = 0$ . Datos nds

Para núcleos con  $16,4A < Z^2$  tenemos que la fisión es antisimétrica, ya que la barrera presenta un máximo para estas fisiones, mientras que para  $16,4A < Z^2 < 47A$  la fisión simétrica presenta un mínimo en la barrera. Para átomos con  $Z^2 < 47A$  la fisión es espontánea.



**Figura 2:** Valor de  $Q_{gs}$  para cada átomo pero ahora con los límites de Businaro-Gallone (inferior y superior) indicados con líneas negras. atos nds.

## Apartado b)

Para hablar del límite Businaro-Gallone tenemos que hablar de la barrera fisionante o barrera de fisión. La barrera fisionante es consecuencia del balance entre la energía de enlace nuclear, que mantiene unido al núcleo, y la repulsión Coulombiana entre los protones.

La energía total del sistema en el punto de escisión se describe como la suma de las masas de los fragmentos ( $M_1$ ,  $M_2$ ) y el potencial Coulombiano entre ellos:

$$V = M_1 + M_2 + V_C \quad (1)$$

ya que podemos considerar este punto el punto en el que ya son apreciables dos fragmento, aunque aún pueden intercambiar material. Por otro lado la barrera fisionante  $B_f$  se define como la diferencia entre esta energía total y la masa del sistema fisionante en su estado fundamental  $M_{FS}$ :

$$B_f = V - M_{FS} = V_C - Q_{gs} \quad (2)$$

donde  $Q_{gs}$  es la energía liberada en la fisión desde el estado fundamental. El potencial Coulombiano entre los fragmentos, considerando distancias en femtómetros (fm) y energías en MeV, se expresa como:

$$V_C \approx 1,44 \frac{Z_1 Z_2}{R_{12}} \quad (3)$$

donde  $Z_1$  y  $Z_2$  son los números atómicos de los fragmentos y  $R_{12}$  es la distancia efectiva entre ellos. Esta distancia incluye la deformación de los fragmentos:

$$R_{12} \approx r_0 A_1^{1/3} \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_1 \right) + r_0 A_2^{1/3} \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 \right) \quad (4)$$

donde  $r_0$  es el radio nuclear medio ( $\sim 1,2$  fm),  $A_1$  y  $A_2$  son los números másicos de los fragmentos, y  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  son sus parámetros de deformación (típicamente alrededor de 0.6). En núcleos pesados, la barrera es mínima en configuraciones simétricas ( $M_1 \approx M_2$ ), facilitando fisión en dos fragmentos similares. En cambio, en núcleos ligeros, la barrera es máxima en la fisión simétrica, siendo más favorable

configuraciones asimétricas ( $M_1 < M_2$ ). El límite en el que sucede este cambio de fisión simétrica y antisimétrica, se llama límite de **Businaro-Gallone**.

Para el cálculo usaremos el modelo de la gota líquida, eliminando el término de pairing para que las ecuaciones aparezcan de manera continua.

$$M({}_Z^A X_N) \equiv M(Z, A) = ZM({}_1^1 H) + Nm_n - \frac{B(Z, A)}{c^2}$$

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sy} \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

**Cuadro 1:** Valores del modelo de la gota líquida

$a_v$ (MeV)	$a_s$ (MeV)	$a_c$ (MeV)	$a_{sy}$ (MeV)
15.5	16.8	0.72	23

¿Qué tenemos que hacer entonces? Tenemos que calcular los puntos en los que  $B_f$  para la fisión simétrica no tiene un mínimo ni un máximo, tal que, para un  $Z$  fijo:

$$\frac{\partial B_f}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial^2 B_f}{\partial A^2} = 0 \quad (5)$$

A través del siguiente código en python podemos calcular el valor analítico de  $B_f$  (cálculo simbólico)

```
1 import sympy as sp
2 import numpy as np
3
4 # Variables simbolicas
5 A, Z = sp.symbols('A Z')
6 A1, Z1 = sp.symbols('A_1 Z_1')
7 beta1, beta2 = sp.symbols('beta1 beta2')
8 r0 = sp.symbols('r0')
9 a_v, a_s, a_c, a_sy = sp.symbols('a_v a_s a_c a_sy')
10
11 # Energia de enlace B(Z,A)
12 def B(Z_val, A_val):
13     return a_v * A_val - a_s * A_val**(2/3) -
14         a_c * Z_val * (Z_val - 1) * A_val**
15         (-1/3) - a_sy * (A_val - 2*Z_val)**2 /
16         A_val
17
18 # Q-valor
19 Z2=Z-Z1
20 A2=A-A1
21 Q = B(Z1, A1) + B(Z-Z1,A-A1) - B(Z, A)
22
23 # Potencial Coulombiano
24 sqrt_term = sp.sqrt(5 / (4 * sp.pi))
25 R12 = r0 * A1**(1/3) * (1 + sqrt_term * beta1
26     ) + r0 * A2**(1/3) * (1 + sqrt_term *
27     beta2)
28 VC = 1.44 * Z1 * Z2 / R12
29
30 # Barrera de fisin
31 Bf = VC - Q
32
33 # Simplificamos un poco
34 Bf_simplified = sp.simplify(Bf)
35 latex_str = sp.latex(Bf_simplified, mode='
36     equation', mul_symbol='cdot')
```

```

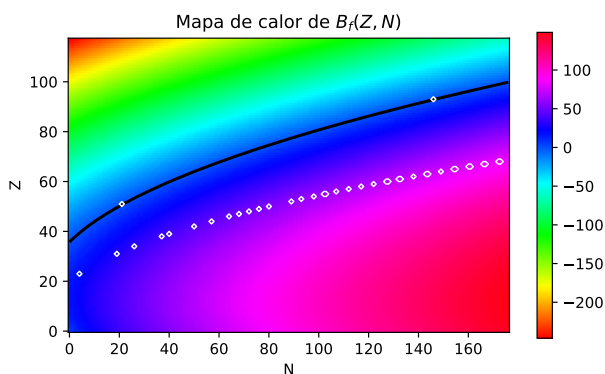
# Sustituciones numericas
33 param_values = {
    a_v: 15.8, # MeV
35    a_s: 18.3, # MeV
    a_c: 0.714, # MeV
37    a_sy: 23.2, # MeV
    r0: 1.2, # fm
39    beta1: 0.6, # deformacion
    beta2: 0.6 # deformacion
41 }

# Reemplazamos constantes
43 Bf_numeric = Bf_simplified.subs(param_values)

```

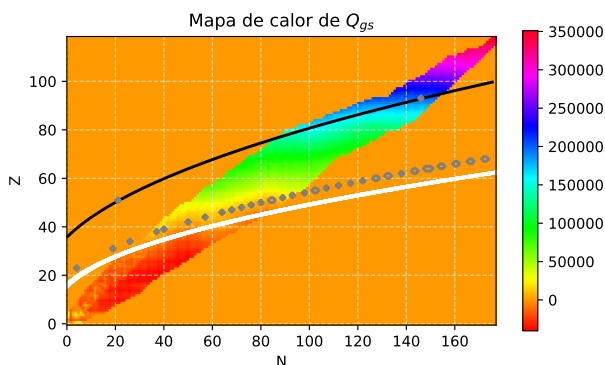
Con el cálculo simbólico podemos obtener una ecuación exacta pero es bastante larga, y más las derivadas. Poniendo aquí la fórmula exacta no vamos a ganar nada francamente. Sin embargo, con esta podemos obtener fácilmente un mapa de calor donde representamos  $B_f$  para la fisión simétrica en cada punto  $Z$  y  $N$ . La línea negra marca los puntos donde la fisión simétrica comenzaría a ser espontánea, mientras que los puntos blancos (excepto los superiores) indican los puntos en los que la fisión pasa de ser antisimétrica (abajo) y simétrica (arriba) 4:

**Figura 3:** Mapa de calor de  $B_f(Z, N)$  simétrica usando el modelo de la gota líquida.



Y ahora dibujamos encima de la otra, siendo la línea blanca  $16,4A < Z^2$

**Figura 4:** Mapa de calor de  $Q_{gs}$  simétrica comparado con el límite businaro gallone (gris)



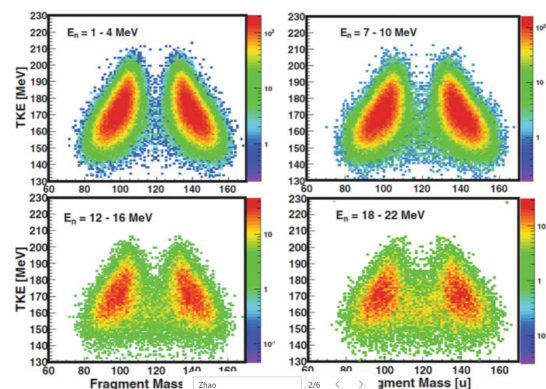
La pregunta que nos atañe ahora: ¿Tiene sentido que coincidan? La verdad es que no, como podemos comprobar el límite de Busaro-Gallone está obteniendo valores de la altura de la barrera, mientras que  $Q_{gs}$  es un valor que no depende de la barrera, por lo que es bastante sorprendente que coincidan, aunque no exactamente, si no que parece que hay una distancia. Una buena aproximación al límite de businaro gallone (calculado por Santiago Manuel Durán) sería  $17A < Z^2$  y como podmeos ver se acercaría bastante al valor aquí obtenido numéricamente.

## Ejercicio 6

El  $^{238}\text{U}$  con  $E^* = 10$  MeV (energía de excitación) se fisiona en diferentes pedazos. El problema nos plantea estimar: la energía cinética total  $TKE(Z)$  y la energía de excitación total  $TXE(Z)$  en función del producto de la fisión. Posteriormente nos de estimar la multiplicidad de neutrones  $\nu(Z)$ , la distancia entre fragmentos en el punto de escisión, la energía intrínseca  $E^{int}(Z)$  y la de deformación  $E^{def}(Z)$  con las aproximaciones que creamos adecuados. Como dato nos dicen que la barrera de fisión  $^{238}\text{U}$  es de 5.63 MeV.

Un comentario breve que tenemos que hacer antes es el siguiente: como dato nos dan  $\langle A \rangle$  que son números no enteros, mientras que nosotros sabemos que el número  $A_i$  de un núcleo es un número entero. ¿Qué es entonces? Es, pues, un promedio de todos los posibles números másicos emitidos para cada  $Z$ .

Por ejemplo  $Z = 30$  se podría emitir con  $A = 74$  o con  $A = 79$  (con  $\langle E^* \rangle = 14,7$  MeV), tal y como se puede ver en [1] cada uno con cierta probabilidad (figura 5).



**Figura 5:** Imagen en la que se puede ver que TKE es una distribución en función de la masa, y no un valor fijo [1].

### Apartado a)

¿Como calculamos TKE y TXE, si solo conocemos la energía de excitación, la masa inicial de la partícula, que  $Z$  y  $A$  se conservan y  $Z_1$  y  $Z_2$ ? Pues bien, el cálculo se hace a través de la conservación del momento. Veamos todas las

ecuaciones que conocemos. Tenemos 4 variables desconocidas (ya que conocido  $A_1$  conocemos  $M_1$  y conocido  $A_2$  conocemos  $M_2$  y viceversa):

Conservación número másico:

$$A = A_1 + A_2$$

Conservación de la energía:

$$E^* + M(Z, A) = \underbrace{T_1 + T_2 + M_1(Z_1, A_1) + M_2(Z_2, A_2)}_{TKE} + T_X E$$

Conservación momento:

$$(T_1 + M_1)^2 - M_1^2 = (T_2 + M_2)^2 - M_2^2 \rightarrow$$

$$\text{No relativista} \rightarrow T_1 M_1 = T_2 M_2$$

**Cálculo de TKE** . Cuando estábamos calculando la energía cinética se nos dijo que  $\beta$  era la velocidad media entre la velocidad de la luz, y no el factor cuadrupolar. Con esto podemos calcular fácilmente  $TKE$  ya que la energía cinética sería:

$$T_{1d} = (\gamma_1 - 1)M_{1d} \approx \frac{1}{2}M_{1d}v_1^2$$

$$T_{2d} = (\gamma_2 - 1)M_{2d} \approx \frac{1}{2}M_{2d}v_2^2$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  y  $v_i = \beta_i c$ . Le llamamos  $T_{1d}$  ya que esta sería la energía cinética del *fragmento medido*, y por tanto no es la energía cinética de *los fragmentos en el momento de escisión*. Para calcular esto último tenemos que tener en cuenta que la emisión de neutrones aumenta la energía cinética de nuestras partículas, aunque tan poco que no hace falta que lo tengamos en cuenta, ya que si nos fijamos:

$$T_{1d} - T_1 = \frac{p_n^2}{2M_{1d}} = \frac{m_n}{M_{1d}} T_n$$

teniendo que  $m_n/M_{1d} < 0,01$  para nuestro fragmento más pequeño. Entonces:

$$\frac{T_{1d}}{T_1} = \frac{M_{1d}v_{1d}^2}{M_1v_1^2} \approx 1 \quad (6)$$

es decir:

$$\frac{v_{1d}^2}{v_1^2} \approx \frac{M_1}{M_{1d}} \quad (7)$$

tal que

$$v_1 \approx \sqrt{\frac{M_{1d}}{M_1}} v_{1d} \quad (8)$$

y como a lo sumo se desprende 1 o 2 neutrones, la raíz cuadrada del cociente de la masa de los fragmentos antes y después de la escisión es prácticamente 1, tal que:

$$v_1 \approx v_{1d} = \beta c \quad (9)$$

Véase 2 para resultados.

**Cálculo de  $A_1$  y  $A_2$**  Para calcular  $A_1$  y  $A_2$  tenemos que usar las ecuaciones de conservación del número másico y la conservación del momento. La segunda nos dice que si

$$T_1 M_1 = T_2 M_2 \quad (10)$$

si separamos  $M_1$  y  $M_2$  en función de  $A$  y  $\Delta$  tenemos:

$$T_1(A_1 \cdot u + \Delta_1) = T_2(A_2 \cdot u + \Delta_2) \quad (11)$$

y si despreciamos el exceso de masas frente la masa  $A_i \cdot u$  tenemos:

$$T_1 A_1 \approx T_2 A_2 \quad (12)$$

que sería más correcto expresar como

$$\beta_1 A_1 = \beta_2 A_2 \quad (13)$$

ya que así no tenemos que calcular las masas  $M_{1d}$  y  $M_{2d}$ , que, aunque conozcamos  $\langle A \rangle$ , no conocemos (nos faltaría conocer en el momento de la medición  $\langle \Delta \rangle$  o  $\langle E^* \rangle \dots$ ).

Estas ecuaciones se vuelven en cierto exactas para la fisión simétrica. Cuando no es simétrica tenemos que será una aproximación, ¿Cuan buena? Pues teniendo en cuenta que quizás la  $\Delta_1 - \Delta_2 \approx 10$  MeV y  $u = 931$  MeV estaríamos hablando de, como mucho, un 1 % de error. Entonces si hacemos:

$$A_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1} A_2 \quad (14)$$

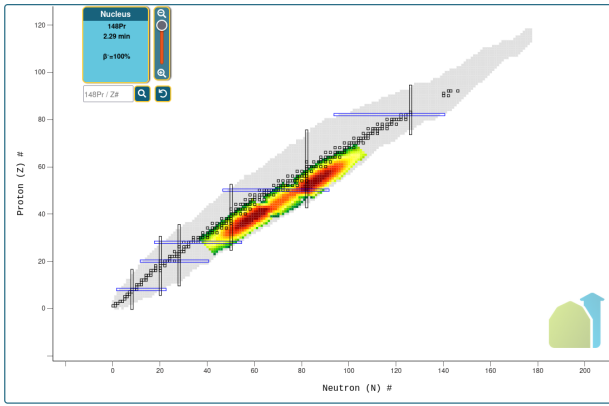
aplicando la conservación del número másico:

$$A_2 = \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} + 1 \right)^{-1} A \quad (15)$$

$$A_1 = \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} + 1 \right)^{-1} A \quad (16)$$

así obtenemos aproximadamente  $A_1$  y  $A_2$ , eligiendo el valor entero más cercano. Véase 2 para resultados. Es interesante ver que  $A_1$  y  $A_2$  no son valores enteros, sin embargo es normal ya que estamos trabajando con promedios, y es posible que a veces salga un fragmento con más neutrones que otro, tal y como podemos ver en la siguiente imagen 6.

Sin embargo esto nos lleva a otro problema: ¿Cómo calculamos  $\Delta$  si no conocemos  $A$ ? Esto lo responderemos en el siguiente apartado.

**Figura 6:** yield de los fragmentos de la fisión de uranio 238.

**Calculo de TXE** Como sabemos  $\langle Q_{gs} \rangle$ , ya que:

$$Q_{gs} = M - M_1 - M_2 = \Delta - \Delta_1 - \Delta_2 \quad (17)$$

siendo  $M$  las masas en el *estado fundamental*. Para calcular  $\Delta$  necesitamos conocer el valor de  $A$  entero, pero solo sabemos el valor de  $\langle A \rangle$ . ¿Cómo calculamos  $\Delta$ ? Pues haciendo la interpolación entre el valor de  $A_i$  y  $A_s$  siendo estos los enteros inferior y superior para un  $A$  dado. ¿Sería factible hacer un cálculo sencillamente con el entero más próximo? La respuesta es que no, ya que aunque haya  $A_1$  y  $A_2$  muy cerca de estos, hay otro que están en un punto medio (por ej.,  $Z = 30$ ,  $\langle A \rangle = 79,43$ ). Y no solo esto, como podemos ver en la imagen 7, los valores de  $\Delta$  (keV) pueden llegar a oscilar 10 MeV entre el valor superior e inferior, y esto ya sería un valor no despreciable (TXE está en ese orden). Así que es mejor hacer una interpolación, tal que:

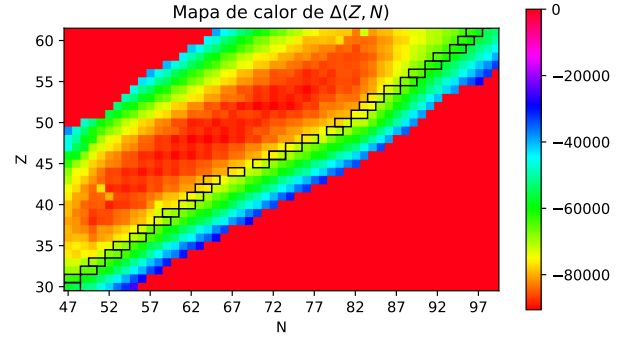
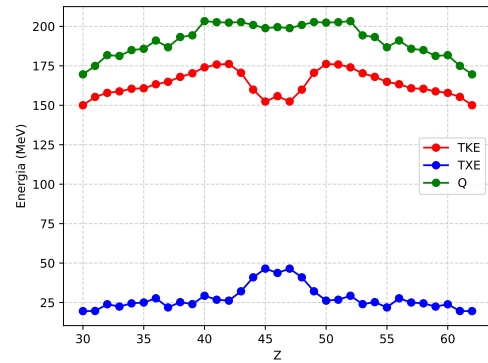
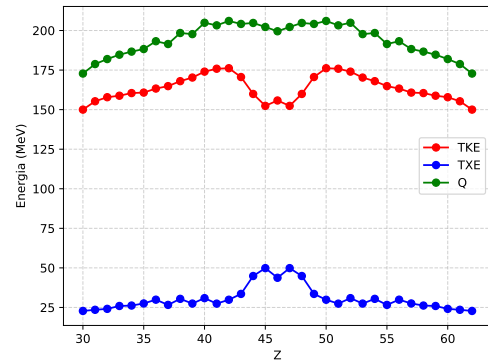
$$Q_{gs} = \Delta - \langle \Delta_1 \rangle - \langle \Delta_2 \rangle \quad (18)$$

Otra forma de calcularlo sería aplicar la fórmula semiempírica de masas para valores de  $A$  no enteros, aunque eso incurriría en el problema de como aplicar el pairing para valores reales, el cual tendríamos que “eliminar”. Nosotros obtamos por hacerlo usando interpolaciones, nos parece un poco más preciso, aunque la forma será prácticamente igual.

Ya que no hace falta ahora usar la aproximación anterior de despreciar el exceso de masas, ya que conocemos  $A$  con una precisión relativamente buena. Así, es fácil de calcular  $\langle TXE \rangle$ , ya que por conservación de la energía:

$$\langle TXE \rangle = \underbrace{Q_{gs} - E^*}_{Q_{ge}} - \langle TKE \rangle$$

Véase tabla 2 para resultados. En las imágenes 8 y 9 podemos ver la diferencia, que a decir verdad no es mucha. Aún así es interesante saberlo para futuros cálculos.

**Figura 7:**  $\Delta$  en KeV para cada  $Z$  y  $A$  de la región de interés centrada en los fragmentos. Los recuadros negros son los valores en los que oscilaría nuestro  $\langle A \rangle$  en el momento de la escisión.**Figura 8:** Valores de TXE, TKE y  $Q$  aproximando  $\langle A \rangle$ .**Figura 9:** Valores de TXE, TKE y  $Q$  interpolando  $\langle \Delta \rangle$ .

## Apartado b)

Ahora vamos a calcular la multiplicidad de neutrones  $\langle \nu \rangle$  para cada fisión, y luego podemos hacer un promedio del total. La manera de calcularlo es muy sencilla, ya que solo hay que el número de protones y neutrones en el experimento es conservado, tal que:

$$N = (\langle A_1 \rangle - Z_1) + (\langle A_2 \rangle - Z_2) + \langle \nu(Z_1, Z_2) \rangle$$

de lo que se deduce que cada

**Cuadro 2:** Valores de  $A_1$ ,  $A_2$  y  $TXE$  y  $TKE$  en la escisión para cada fisión.  $TKE$ ,  $TXE$  y  $Q$  en MeV.

	$\langle A_1 \rangle$	$\langle A_2 \rangle$	$Q_{ge}$	TKE	TXE
$Z_1 = 30, Z_2 = 62$	77.62	160.38	172.80	150.01	22.79
$Z_1 = 31, Z_2 = 61$	79.43	158.57	178.79	155.28	23.51
$Z_1 = 32, Z_2 = 60$	81.73	156.27	181.96	157.85	24.11
$Z_1 = 33, Z_2 = 59$	84.14	153.86	184.73	158.80	25.92
$Z_1 = 34, Z_2 = 58$	86.65	151.35	186.66	160.47	26.20
$Z_1 = 35, Z_2 = 57$	89.21	148.79	188.29	160.77	27.52
$Z_1 = 36, Z_2 = 56$	91.70	146.30	193.23	163.32	29.91
$Z_1 = 37, Z_2 = 55$	94.11	143.89	191.47	164.86	26.61
$Z_1 = 38, Z_2 = 54$	96.64	141.36	198.43	168.00	30.43
$Z_1 = 39, Z_2 = 53$	99.39	138.61	197.73	170.28	27.45
$Z_1 = 40, Z_2 = 52$	101.92	136.08	204.90	174.01	30.88
$Z_1 = 41, Z_2 = 51$	104.33	133.67	203.27	175.85	27.41
$Z_1 = 42, Z_2 = 50$	106.54	131.46	206.04	176.17	29.87
$Z_1 = 43, Z_2 = 49$	108.43	129.57	204.15	170.60	33.55
$Z_1 = 44, Z_2 = 48$	112.59	125.41	204.78	159.91	44.87
$Z_1 = 45, Z_2 = 47$	116.11	121.89	202.23	152.38	49.85
$Z_1 = 46, Z_2 = 46$	119.00	119.00	199.53	155.78	43.75

$$\langle \nu(Z_1, Z_2) \rangle = N - (\langle A_1 \rangle - Z_1) - (\langle A_2 \rangle - Z_2)$$

siendo todos datos que conozcamos. Como sabemos el  $A$  de cada fragmento en el momento de la escisión y conocemos  $\langle A \rangle$  después de la emisión de neutrones, podemos calcular  $\nu$  para cada fragmento, tal que:

$$\langle \nu(Z_i) \rangle = A_i - \langle A_i \rangle \quad (19)$$

de lo que se obtiene la tabla 3 y la gráfica 10. Como podemos ver los resultados obtenidos son como esperábamos, obteniendo un crecimiento lineal y creciente que tiene un máximo cuando  $Z \approx 46$  (fisión simétrica, cayendo abruptamente para luego volver a crecer. Una explicación sería que en el entorno  $Z, N \approx 50, 132$  tendríamos un núcleo muy estable (doble número mágico) muy poco deformado que se llevaría poca energía de deformación y por tanto poca energía intrínseca, ya que como podemos ver en la figura 13 la mayor parte de energía de excitación es energía de deformación, lo cual explicaría que expulsara pocos neutrones al ser proporcional  $TXE(Z_i) \propto \langle \nu(Z_i) \rangle$ . Cabe destacar que  $\langle \nu(30) \rangle$  es negativo, lo cual se debe a “un error debido al redondeo de la velocidad y la masa media de la tabla”.

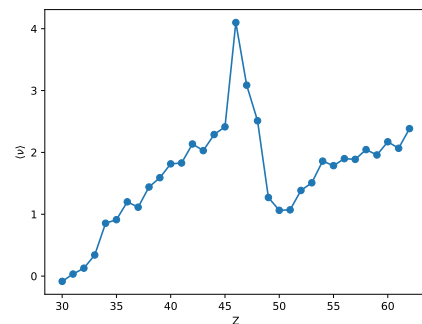
En la figura 11 estudiamos que pasaba (por mera curiosidad) cuando exigíamos a  $A$  ser entero (aproximándolo). Como vemos el resultado es terrible, obteniendo una especie de zig-zag con un valor muy negativo.

### Apartado c)

Tenemos que calcular la distancia entre fragmentos en el punto de escisión, que denotamos por  $d$ . Como ya hemos

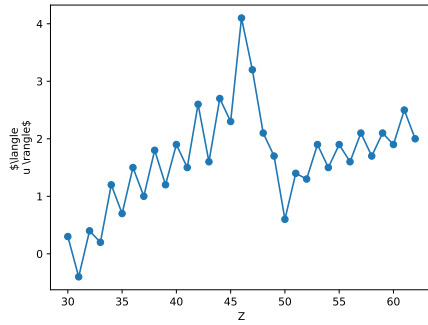
**Cuadro 3:** Valores de  $\langle \nu \rangle$  para cada  $A$ 

$Z_i$	$A_i$	$\langle A_i \rangle$	$\langle \nu(Z_i) \rangle$
30	77.62	77.70	-0.08
31	79.43	79.40	0.03
32	81.73	81.60	0.13
33	84.14	83.80	0.34
34	86.65	85.80	0.85
35	89.21	88.30	0.91
36	91.70	90.50	1.20
37	94.11	93.00	1.11
38	96.64	95.20	1.44
39	99.39	97.80	1.59
40	101.92	100.10	1.82
41	104.33	102.50	1.83
42	106.54	104.40	2.14
43	108.43	106.40	2.03
44	112.59	110.30	2.29
45	116.11	113.70	2.41
46	119.00	114.90	4.10
47	121.89	118.80	3.09
48	125.41	122.90	2.51
49	129.57	128.30	1.27
50	131.46	130.40	1.06
51	133.67	132.60	1.07
52	136.08	134.70	1.38
53	138.61	137.10	1.51
54	141.36	139.50	1.86
55	143.89	142.10	1.79
56	146.30	144.40	1.90
57	148.79	146.90	1.89
58	151.35	149.30	2.05
59	153.86	151.90	1.96
60	156.27	154.10	2.17
61	158.57	156.50	2.07
62	160.38	158.00	2.38

**Figura 10:** Valor de  $\nu$  usando  $\langle A \rangle$ .

calculado  $TKE$  sin necesidad de  $d$ , podemos despejar  $d$  con las siguientes ecuaciones:



**Figura 11:** Valor de  $v$  usando  $A$  entero.

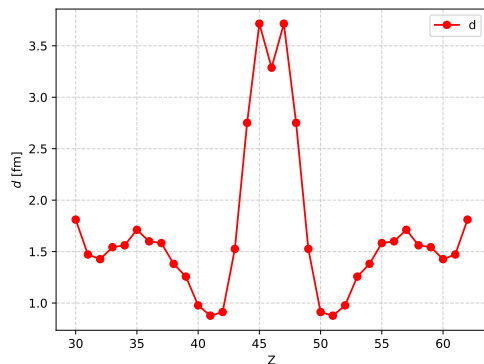
$$TKE(Z) = 1,44 \frac{Z(92 - Z)}{R(Z) + R(92 - Z) + d}$$

$$R_i \approx r_0 \langle A_i^{1/3} \rangle \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_i \right)$$

donde hemos supuesto que  $R_i$  es ese radio y  $\langle A_i^{1/3} \rangle$  el valor del número atómico en el momento de la escisión. Esta expresión tiene el origen en la fuerza coulombiana de repulsión que obtienen inmediatamente los dos núcleos al ser objetos cargados tan próximos. Así pues solo queda despejar:

$$d \approx \frac{1,44Z(92 - Z)}{TKE} - R(Z) - R(92 - Z)$$

tal que  $r_0 = 1,2$  fm. En una fisión de estas características los fragmentos se encuentran, en el momento de la escisión, extremadamente deformados, mucho más que lo que están en el estado fundamental, por lo que sería lógico darles un  $\beta$  ciertamente elevado. Nosotros elegimos 0.6 por que es el que se usa en las diapositivas.

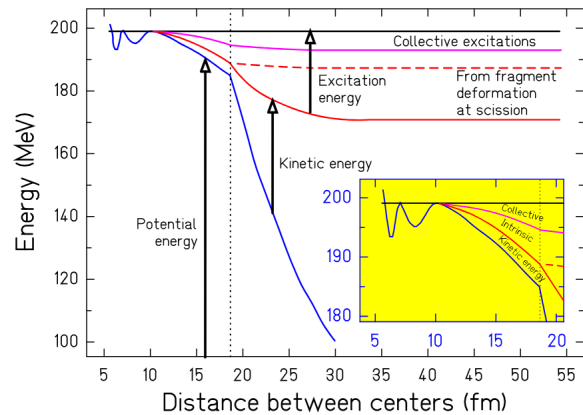
**Figura 12:** Valor de la distancia  $d$  en función de  $Z$ .

### Apartado d)

Aquí vamos a comentar como obtener la energía intrínseca  $E^{int}(Z)$  y la energía de deformación  $E^{def}(Z)$ , siguiendo el siguiente orden "First the intrinsic excitation energy is

**Cuadro 4:** Valores de la distancia  $d$  para cada fisión. Los valores  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son las deformaciones de cada núcleo respectivamente

	$d$ [fm]	$\beta_1$	$\beta_2$
$Z_1 = 30, Z_2 = 62$	1.81	0.60	0.60
$Z_1 = 31, Z_2 = 61$	1.47	0.60	0.60
$Z_1 = 32, Z_2 = 60$	1.43	0.60	0.60
$Z_1 = 33, Z_2 = 59$	1.54	0.60	0.60
$Z_1 = 34, Z_2 = 58$	1.56	0.60	0.60
$Z_1 = 35, Z_2 = 57$	1.71	0.60	0.60
$Z_1 = 36, Z_2 = 56$	1.60	0.60	0.60
$Z_1 = 37, Z_2 = 55$	1.58	0.60	0.60
$Z_1 = 38, Z_2 = 54$	1.38	0.60	0.60
$Z_1 = 39, Z_2 = 53$	1.26	0.60	0.60
$Z_1 = 40, Z_2 = 52$	0.98	0.60	0.60
$Z_1 = 41, Z_2 = 51$	0.88	0.60	0.60
$Z_1 = 42, Z_2 = 50$	0.91	0.60	0.60
$Z_1 = 43, Z_2 = 49$	1.53	0.60	0.60
$Z_1 = 44, Z_2 = 48$	2.75	0.60	0.60
$Z_1 = 45, Z_2 = 47$	3.71	0.60	0.60
$Z_1 = 46, Z_2 = 46$	3.29	0.60	0.60

**Figura 13:** Esquema de la energía intrínseca, colectiva y de deformación [2], [3].

statistically partitioned between the fragments and then one calculates for each fragment the intrinsic excitation coming from the fragment's deformation and from the damping of collective modes"[2]. Conociendo la altura de la barrera de fisión  $BF = 5,63$  MeV y conociendo la energía de excitación del  $^{238}\text{U}$   $E^* = 10$  MeV se puede conocer la energía que tenemos disponible por encima de la barrera  $E^{bf} = E^* - BF$ . La energía disponible en el momento de la escisión se puede separar en tres partes: la energía intrínseca, la energía de estados colectivos y la energía de deformación:

$$TXE = E^{int} + E^{col} + E^{def}$$

la energía intrínseca se puede calcular a partir de la energía disponible por encima de la barrera y la energía disipada:

$$E^{int} = E^{bf} + E^{dis}$$

pudiendo calcular esta última a través del efecto par-impar del que hablaremos más adelante. Para calcular  $E^{def}$  tendremos que saber  $E^{col}$  y  $E^{int}$ , y este último le damos el siguiente valor

$$E^{col} = 0$$

aunque podríamos obtenerlo con un modelo fenomenológico como el modelo GEF [3]. ¿Por qué cero? Porque efectivamente, la única manera de calcularlo es recurrir a modelos teóricos, bien sea del tipo del GEF basado en una mezcla de teoría y parametrizaciones, o cualquier otro, y como no hemos estudiado ninguno, pues no los podemos usar. Experimentalmente no se puede medir, ya que "The deformation and collective energies are dissipated into intrinsic excitation energy after scission, when the fragments are not in contact anymore." [2]. Es decir, tras la escisión, se transformaría en energía intrínseca no diferenciable de la de deformación. Así pues:

$$E^{def} = TXE - E^{int}$$

Para calcular  $E^{int}$  usamos que:

$$E_{int} = -G \log \delta_0$$

donde

$$\delta_0 = \frac{\sum_{par} Y(Z_i) - \sum_{impar} Y(Z_i)}{\sum Y(Z_i)}$$

tal que:

$$Y(Z_i) = \frac{N(Z_i)}{N_T}$$

siendo  $N(Z_i)$  el número de cuentas del átomo  $Z_i$  y  $N_T$  el número de cuentas totales, la suma de todos. A veces es normal normalizar a 2 los yields, ya que "Since each event leads to two fragments, the yields are normalized so that  $\sum Y = 2$ " [4]. De hecho en el Pellerau [1] efectivamente normaliza los yields a 2.

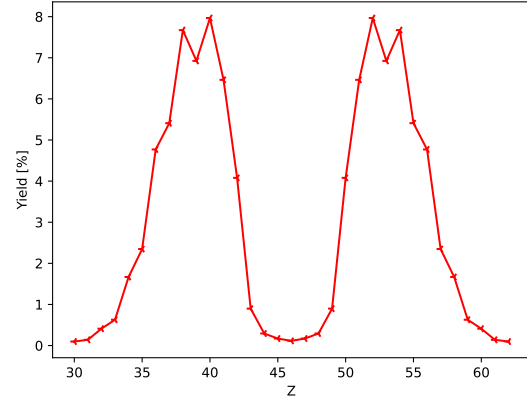
Sin embargo poco importa si informamos de que hacemos, ya que la información contenida. Así tenemos que:

$$\delta_0 = 0,0806 \quad E_{dis} = 10,07 \text{ MeV}$$

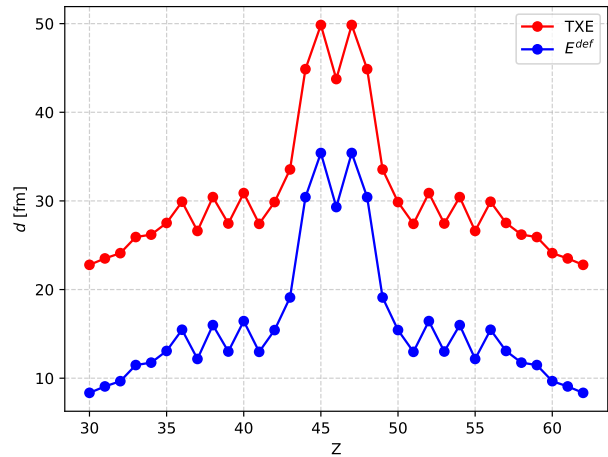
$$E_{bf} = 4,37 \text{ MeV} \quad E_{int} = 14,44 \text{ MeV}$$

En la tabla ?? vemos el valor de  $E^{def}$  para cada fisión, ya que TXE cambia si los fragmentos cambian. En la imagen 15 vemos  $E^{def}$  y TXE, siendo la diferencia obviamente una constante igual a  $E^{int}$ .

**Figura 14:** Yield por fragmento Z. Normalizado a 1 tal que  $\sum Y = 1$ .



**Figura 15:** Energía de deformación en función de Z.



**Cuadro 5:** Valores de la distancia  $E^{def}$  para cada fisión

$E^{def}$ [MeV]	
$Z_1 = 30, Z_2 = 62$	135.57
$Z_1 = 31, Z_2 = 61$	140.84
$Z_1 = 32, Z_2 = 60$	143.41
$Z_1 = 33, Z_2 = 59$	144.36
$Z_1 = 34, Z_2 = 58$	146.03
$Z_1 = 35, Z_2 = 57$	146.33
$Z_1 = 36, Z_2 = 56$	148.88
$Z_1 = 37, Z_2 = 55$	150.42
$Z_1 = 38, Z_2 = 54$	153.56
$Z_1 = 39, Z_2 = 53$	155.84
$Z_1 = 40, Z_2 = 52$	159.57
$Z_1 = 41, Z_2 = 51$	161.41
$Z_1 = 42, Z_2 = 50$	161.73
$Z_1 = 43, Z_2 = 49$	156.16
$Z_1 = 44, Z_2 = 48$	145.47
$Z_1 = 45, Z_2 = 47$	137.94
$Z_1 = 46, Z_2 = 46$	141.34



## Código

El código de Python con el que se han hecho los cálculos con las tablas de datos está en mi github (enlace). Poner el código cuando tenemos toda la lectura de datos leyendo .csv no tendría sentido.

## Referencias

- [1] E. Pellereau et al. “Accurate isotopic fission yields of electromagnetically induced fission of  $^{238}\text{U}$  measured in inverse kinematics at relativistic energies”. En: *Phys. Rev. C* 95 (5 mayo de 2017), pág. 054603. doi: 10.1103/PhysRevC.95.054603. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.95.054603>.
- [2] Karl-Heinz Schmidt y Beatriz Jurado. “Final excitation energy of fission fragments”. En: *Phys. Rev. C* 83 (6 jun. de 2011), pág. 061601. doi: 10.1103/PhysRevC.83.061601. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.83.061601>.
- [3] K.-H. Schmidt et al. “General Description of Fission Observables: GEF Model Code”. En: *Nuclear Data Sheets* 131 (2016). Special Issue on Nuclear Reaction Data, págs. 107-221. ISSN: 0090-3752. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nds.2015.12.009>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0090375215000745>.
- [4] R. Capote et al. “Prompt Fission Neutron Spectra of Actinides”. En: *Nuclear Data Sheets* 131 (2016). Special Issue on Nuclear Reaction Data, págs. 1-106. ISSN: 0090-3752. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nds.2015.12.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0090375215000678>.