Astrofísica

Daniel Vázquez Lago

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Índice general

1. Geodesia **5**
- 1.1. Definiciones básicas . . . 5
- 1.2. Coordenadas astronómicas . . . 6
  - 1.2.1. Coordenadas Horizontales . . . 7
  - 1.2.2. Coordenadas ecuatoriales horarias . . . 8
  - 1.2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas . . . 8
  - 1.2.4. Coordenadas eclípticas . . . 9
- 1.3. Ejercicios . . . 9
- 1.4. Soluciones . . . 10

2. Mecánica Celeste **13**
- 2.1. Problema de los dos cuerpos . . . 13
  - 2.1.1. Leyes de Kepler . . . 13
  - 2.1.2. Ecuaciones diferenciales fundamentales . . . 13
  - 2.1.3. Solución de la ecuación reducida . . . 14
  - 2.1.4. Plano orbital en función de otro plano de referencia . . . 16
  - 2.1.5. Relación entre las anomalías orbitales . . . 17
- 2.2. Problema de los tres cuerpos . . . 18
  - 2.2.1. Introducción . . . 18
  - 2.2.2. Problema de los tres cuerpos restringido y puntos de Lagrange . . . 19
- 2.3. Ejercicios . . . 19
- 2.4. Soluciones . . . 20

Capítulo 1

Geodesia

1.1. Definiciones básicas

Como sabemos la tierra tiene una forma de una esfera achatada, tomando la forma de un elipsoide de revolución. En palabras de Isaac Newton: «Una forma de equilibrio que tiene una masa bajo el influjo de las leyes de gravitación y girando en torno a su eje es la de un esferoide aplastado en sus polos». Un *esferoide aplastado en sus polos* es básicamente un elipsoide de revolución. Definimos pues:

- **Polos:** puntos de corte entre el eje menor de la elipse y elipsoide. Llamamos polo norte (PN) al corte superior y polo sur (PS) al corte superior.
- **Ecuador terrestre:** línea circular correspondiente al corte entre el plano perpendicular al eje menor que pasa por el centro del elipsoide y este.

- **Paralelos:** líneas circulares correspondientes a los cortes entre los planos paralelos al ecuador (paralelo cero) y el elipsoide.
- **Meridianos:** líneas elipsoidales determinadas por el corte entre el elipsoide y el hazde planos que define el eje menor. Se considera *meridiano cero* al que pasa por Greenwich.
- **Vertical de lugar:** es la línea normal al elipsoide en un punto dado.

Al conjunto de variables que permiten describir cualquier punto de la Tierra se le llaman *coordenadas terrestres*, y existen dos tipos de coordenadas terrestres, que se definen en función de la *vertical de lugar*

- **Coordenadas geográficas:** son dos variables angulares (ϕ, λ), que se definen como
  - **Latitud geográfica** ϕ. Toma valores de $90°$ a $-90°$. Para un punto A cualquiera el ángulo ϕ es el comprendido entre la vertical de lugar y el ecuador.
  - **Longitud geográfica** λ. Toma valores entre $180°$ y $-180°$. Para un punto A cualquiera el ángulo λ se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.

- **Coordenadas geocéntricas**: consta de tres variables (ρ, ψ, λ), dos angulares y una distancia. Estas son:

  - **Radio vector** ρ. Distancia entre el centro de la tierra (punto 0) y el punto A.
  - **Latitud geocéntrica** ψ. Toma valores de $90°$ a $-90°$. Para un punto A cualquiera el ángulo ψ es el comprendido entre el radio y el ecuador.
  - **Longitud geocéntrica** λ. Se define igual que la longitud geográfica. Toma valores entre $180°$ y $-180°$. Para un punto A cualquiera el ángulo λ se define como aquel entre la vertical de lugar y el meridiano de Greenwich.

Otra definición importante es la del **plano del horizonte**, que es el plano perpendicular a la vertical de lugar en el punto A. El plano horizonte pertenece a la llamada **esfera celeste topocéntrica**, que es aquella cuyo centro es el observador. En esta esfera, el plano horizonte define lo que una persona diría que es arriba y abajo. La esfera celeste tropocéntrica tiene también un polo norte celeste (PNC) y un polo sur celeste (PSC) paralelo con el eje del mundo, pero no necesariamente con el «arriba» del observador. Al punto Z se le llama **cénit** y al punto Z' se le llama **nádir**.

Como podemos ver el ángulo entre la línea PNC y Z en la esfera topocéntrica es igual a $90° - \phi$, y por tanto independiente al meridiano en el que nos encontremos, solo depende del paralelo en el que se encuentre el punto del observador. A dicho ángulo se le llama **colatitud**.

El **plano de la eclíptica** es el plano que contiene la órbita de la Tierra alrededor del Sol, y está inclinado con respecto al ecuador celeste una cantidad llamada *oblicuidad de la eclíptica* $\varepsilon = 20°26'29''$. En la esfera celeste geocéntrica, cuyo centro es la Tierra, es el Sol quien aparenta moverse a nuestro alrededor. Llamamos **eclíptica** a la intersección del plano de la eclíptica con la esfera celesta.

1.2. Coordenadas astronómicas

Las coordenadas astronómicas nos sirven para designar la posición de un astro en la bóveda celeste. Todos los sistemas de coordenadas que se usan en astronomía son sistemas esféricos/polares,

designando cualquier punto de la esfera celeste con dos ángulos. Toda diferencia entre dos sistemas de coordenadas distintos radica en 4 puntos: la definición de lo que llamamos *plano fundamental*, su *eje x*, *el centro de la esfera elegido*, y si el sistema de coordenadas es *dextrógiro* o *levógiro*. Así, tenemos dos clasificaciones:

- En función del centro de la esfera:
  - **Topocéntrico:** el centro es el observador.
  - **Geocéntrico:** el centro es la tierra.
  - **Helicéntrico:** el centro es el sol.
- En función del plano fundamental:
  - **Horizontales:** en este caso el plano fundamental es el plano del hoirzonte..
  - **Ecuatoriales:** el plano ecuatorial es el plano fundamental.
  - **Eclíptica:** el plano de la eclíptica es el plano fundamental.

Un sistema es **levógiro** cuando el ángulo azimutal (el que manda en el plano fundamental) sigue el sentido antihorario mirando en el sentido del eje X, mientras que es **dextrógiro** si sigue en el sentido horario. La definición del eje X depende del sistema, y será definida en cada apartado.

1.2.1. Coordenadas Horizontales

Las coordenadas horizontales usan el horizonte como plano fundamental, es un tipo de sistema levógiro y el eje X para cualquier observador es aquel que apunta al sur (hemisferio norte) o que apunta al norte (hemisferio sur). Las coordenadas son:

- La **altura** h. Tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano horizonte y la línea que conecta el observador y el punto. La *distancia cenital* se define como el ángulo entre el vector normal del plano y la línea que conecta el observador y el punto.
- El **acimut** A se define como el ángulo entre el eje X y la proyección en el plano fundamental del la línea que conecta el observador y el punto, creciendo en el sentido levógiro.

(a) Coordenadas horizontales.

(b) Cambio de posición del sol a lo largo del día.

Este sistema es un sistema local, es decir, los astros dependen del lugar del punto en la tierra desde el que se está observando. Además, también varían en función del momento del día. Esto es evidente si pensamos por ejemplo en el sol: para diferentes horas del día se encontrará a diferente altura (y en diferente acimutal).

1.2.2. Coordenadas ecuatoriales horarias

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje z entonces el eje del mundo. Es un sistema levógiro, que define el eje X como aquel que apunta hacia el sur (hemisferio norte) o que apunta hacia el norte (hemisferio sur), pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que la altura para las coordenadas horizontales pero ahora usando como referencia el plano ecuatorial. Tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.
- Definimos el **ángulo horario** H como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

1.2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas

En este sistema el plano fundamental es el ecuador celeste, siendo el eje z entonces el eje del mundo. Es un sistema dextrógiro, que define el eje X como aquella recta del plano ecuatorial que se interseca con la eclíptica. También se le llama *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano ecuatorial y el plano eclíptico coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica ε). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que en el sistema ecuatorial horario, tiene valores desde los 90° a −90° Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.
- Definimos el **ascensión recta** α como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano ecuatorial de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

1.2.4. Coordenadas eclípticas

Las coordenadas eclípticas (λ, β) son exactamente iguales que las coordendas ecuatorilaes absolutas pero usando el plano eclíptico como plano fundamental. El eje x entre ambos es el mismo, por lo que la única diferencia entre ambos sistemas es una rotación ε (ángulo entre el plano eclíptico y el plano ecuatorial). Es un sistema dextrógiro, que define el eje X como la *línea del equinocio*. Recordemos que el equinocio es aquel momento del año en el que el plano eclíptico y el plano eclíptico coinciden, mientras que el solsticio aquel en el que el ángulo entre ambos es máximo (eclíptica ε). pero que se encuentra en el plano ecuador. Las coordenadas son:

- La **declinación** δ, definida igual que en el sistema eclíptico horario, tiene valores desde los $90°$ a $-90°$ Para un punto de la esfera celeste, se define como el ángulo entre el plano eclíptico y la línea que conecta el observador y el punto. La diferencia entre la altura y la declinación dependerá del paralelo en la que nos encontremos.
- Definimos el **ascensión recta** λ como el acimut, el ángulo entre el eje x y la proyección en el plano eclíptico de la línea que conecta en observador y el punto, en un sentido levógiro.

Aquí tenemos que hablar de las coordenadas horizontales y horarias de la esfera celeste. Para que sirven cada una, como se definen. Relaciones entre ellas.

Esfera celeste, en este orden: coordenadas eclípticas, horizontales, absolutas. Para que sirve cada uno, cuales son los ángulos de referencia. En las ecuatoriales hay que hablar de los ángulos del equinocio y solscitio del sol. En lass horizontales también. Como se cambia de un sistema de coordenadas a otra. Matrices de rotación. Tiempo sideral. Diferencia entre levógiro y dextrógiro.

Hablar de la precesión y de la nutación, de los equinocios/polos que también preceden. Influencia de la luna en la ntuación. tabmién hablar de que el punto vernal también precede

Hacer una sección con los cambios de coordenadas, posiciones de los diferentes equinocios en cada coordenada, repasar examenes y juntar preguntas.

1.3. Ejercicios

Ejercicio 1.1:

Prueba que el azimut y el ángulo horario de un astro en sus puntos de orto y ocaso, A_0 y H_0, para un observador a una latitud ϕ, satisfacen la siguientes relaciones:

$$\cos(A_0) = -\frac{\sin(\delta)}{\cos(\phi)} \qquad \cos(H_0) = -\tan\delta\tan\phi \tag{1.3.1}$$

Solución en la página 10

Ejercicio 1.2:

¿Cómo relacionarías la información proporcionada por H_0 con el tiempo que un astro permanece por encima del horizonte?

Solución en la página 11

Ejercicio 1.3:

¿Cuántas horas máximas y mínimas del Sol por encima del horizonte a lo largo de un día podemos tener en Santiago de Compostela? Dato: $\phi = 42°, 52', 40''$.

Solución en la página 11

Ejercicio 1.4:

Las coordenadas ecuatoriales absolutas de una estrella son $\alpha = 3^h 45^m 43^s$, y $\delta = 20°8'27''$. ¿Podremos observarla desde la Facultad de Matemáticas ($\phi = 42°52'26''$) en el instante en el que el punto vernal está en la dirección norte? **[Solución:** Dado que $h < 0°$ ($h = -8°24'29''$), la estrella no será visible.**]**

Solución en la página 11

Ejercicio 1.5:

Un cometa tiene coordenadas ecuatoriales absolutas $\alpha = 10^h 3^m 57^s$ y $\delta = 8°24'54''$. ¿Cuáles son sus coordenadas eclípticas? **[Solución:** $\lambda = 150°3'19''$ $\beta = -3°14'31''$.**]**

Solución en la página 12

1.4. Soluciones

Solución del ejercicio 1.1 en la página 9:

Recordamos que el orto y ocaso son los lugares del plano horizonte donde empieza a ser visible y deja de ser visible. Con respecto las coordenadas horizontales, la altura es cero $h = 0°$, o lo que es lo mismo $z = 90°$. Ahora tenemos que usar las coordenadas de Bessel, que relaciona las coordenadas horizonatles (A,h) y horarias (H, δ):

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h\cos A \\ \cos h\sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

de lo cual se deduce que

$$\sin\delta = -\cos(\phi)\cos A_0 \Rightarrow \cos(A_0) = -\frac{\sin\delta}{\cos\phi} \tag{1.4.2}$$

Y también se deduce que

$$\cos\delta\cos H_0 = \sin\phi\cos A_0 \Rightarrow \cos(H_0) = \frac{\sin\phi}{\cos\delta}\left(-\frac{\sin\delta}{\cos\phi}\right) \Rightarrow \cos(H_0) = -\tan\delta\tan\phi \tag{1.4.3}$$

Solución del ejercicio 1.2 en la página 10:

El tiempo que un astro está encima del horizonte corresponde a $2H_0$. Puso $H_{\text{orto}} = -H_{\text{ocaso}}$.

Solución del ejercicio 1.3 en la página 10:

El máximo de horas ocurre cuando estamos el solsticio de verano. En este caso sabemos que $\delta = \epsilon$. Usando las ecuaicones del primer ejercicio:

$$H_0 = 7^h 34^m 57^s \Rightarrow 2H_0 = 15^h 9^m 54^s \tag{1.4.4}$$

El mínimo de horas del sol es en el solsticio de invierno. En este caso

$$\delta = -\varepsilon \Rightarrow 2H_0 = 8^h 50^m 4^s \tag{1.4.5}$$

Solución del ejercicio 1.4 en la página 10:

Nos dan las coordenadas ecuatoriales absolutas. La condición para no ver un astro desde un punto de la tierra es que dicho astro, en las coordenadas horizontales, verifique que su altura tiene ángulos negativos ($h < 0°$). Consecuentemente solo tenemos que calcular h a partir de α y δ. ¿Cómo lo hacemos?

Primero calculamos el valor de las coordenadas ecuatoriales horarias. Como sabemos $\delta_{\text{horaria}} = \delta_{\text{absolutas}}$ y $\alpha + H = \theta$, siendo θ la posición del punto vernáculo en las horizontales. Cuando nos dicen que el punto vernáculo apunta al norte, nos están dado el dato de θ. Como x en las horarias apunta al sur, $\theta = 180°$. Así pues:

$$H = 12^h - 3^h 45^m 43^s = 8^h 14^m 17^s \approx 120.24° \qquad \delta = 20°8'27'' \tag{1.4.6}$$

Ahora solo tenemos que transformar las coordenadas ecuatoriales horarias en las horizontales. Esto también es sencillo, ya que es rotar un ϕ los ejes x y z, tal que:

$$\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\ \cos h\sin A\\ \sin h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\phi & 0 & -\cos\phi\\ 0 & 1 & 0\\ \cos\phi & 0 & \sin\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\delta\cos H\\ \cos\delta\sin H\\ \sin\delta\end{pmatrix} \tag{1.4.7}$$

Y ya podríamos obtener el valor de h, solo faltando despejar. Teniendo en cuenta que $\phi = 42°52'26''$. Para calcular h (que es lo único que necesitamos en realidad) despejamos:

$$\sin h = \cos\phi\cos\delta\cos H + \sin\phi\sin\delta \tag{1.4.8}$$

que es:

$$\sin h = -0.1125 \quad \Longrightarrow \quad h = -6.46^\circ \tag{1.4.9}$$

La solución correcta es $h = -8^\circ 24' 29''$. La diferencia es posiblemente culpa de los decimales, porque no hemos convertido correctamente los segundos y minutos.

Solución del ejercicio 1.5 en la página 10:

Para pasar de las coordenadas ecuatoriales absolutas a las coordenadas eclípticas solo tenemos que hacer una rotación, ya que el eje x es el mismo (punto vernal). Así pues, solo tenemos que aplicar la matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon & \sin\epsilon \\ 0 & -\sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1.4.10}$$

Recordamos que $\varepsilon = 20^\circ 26' 29''$, $\alpha = 10^h 3^m 57^s$ y $\delta = 8^\circ 24' 54''$. Primero obtenemos β:

$$\sin\beta = -\sin\epsilon\cos\delta\sin\alpha + \cos\epsilon\sin\delta \tag{1.4.11}$$

$$\sin\beta = 0.05986 \quad \Longrightarrow \quad \beta = 3.432^\circ \tag{1.4.12}$$

Luego solo tenemos que despejar λ. Sabiendo que

$$\cos\lambda = \frac{\cos\delta\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\lambda = -0.853^\circ \Rightarrow \lambda = 150.19^\circ \tag{1.4.13}$$

Siendo la solución correcta $\lambda = 150^\circ 3' 19''$ $\beta = -3^\circ 14' 31''$.

Capítulo 2

Mecánica Celeste

2.1. Problema de los dos cuerpos

2.1.1. Leyes de Kepler

Podríamos decir que el problema de los dos cuerpos comienza con la formulación de las tres leyes para el movimiento planetario por parte de Kepler. Estas tres leyes trataban de dar cuenta sobre como se movían los astros alrededor del Sol, y entonces los primeros pasos para la descripción de los cuerpos celestes:

- **Ley de las órbitas**: los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos de la elipse.
- **Ley de las áreas**: la línea que conecta un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- **Ley de períodos**: el cuadrado del período orbital de un planeta (T) es proporcional al cubo del a distancia media del planeta al Sol:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \tag{2.1.1}$$

  donde a es el semi-eje mayor de la elipse, que es igual al promedio entre las distancias en perihelio r_p y afelio r_a[1]

2.1.2. Ecuaciones diferenciales fundamentales

El *problema de los dos cuerpos* o *problema de Kepler* es el nombre que se le da al problema de la dinámica de dos cuerpos celestes (suponiendo que estos están completamente aislados). Este problema hoy en día esta asociado a 6 ecuaciones diferenciales no linales, autónomas[2] de segundo orden, las cuales vienen dadas en última instancia por la *ley de gravitación universal de Newton*. Estas ecuaciones diferenciales son:

[1] Más tarde definiremos mejor que es un afelio y perihelio, pero dicho rápidamente, el afelio es el punto de la órbita del planeta más alejado del Sol, y el perhelio el punto más cercano.

[2] Que una ecuación diferencial sea autónoma significa que no depende explícitamente de la coordenada diferencial, en nuestro caso, el tiempo.

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{r} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{r} \end{cases} \tag{2.1.2}$$

donde $\mathbf{r}_1$ es la posición del cuerpo de masa m_1, $\mathbf{r}_2$ la posición del cuerpo de masa m_2 y $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ la distancia entre los dos cuerpos. Para resolver este problema de manera analítica se suele usar un cambio de variables muy sencillo:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{2.1.3}$$

tal que $\mathbf{r}_c$ es la *posición del centro de masas* y $\mathbf{r}$ es la *posición reducida*. Veamos que este cambio de coordenadas es invertidble:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c + \frac{m_2}{m_2+m_1}\mathbf{r} \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c - \frac{m_1}{m_2+m_1}\mathbf{r} \tag{2.1.4}$$

Una vez fijamos el nuevo sistema llamado **sistema reducido**, tenemos que las ecuaciones diferenciales pasan a ser mucho más sencilas:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \quad 0 \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{2.1.5}$$

donde μ es la llamada *masa reducida* y se define como $\mu = G(m_1 + m_2)$. a primera ecuación tiene una solución extremadamente sencilla $\mathbf{r}_c(t) = a + bt$, y esta nos lleva a la conservación de las cantidades *momento total* $\mathbf{P}$ y *momento angular total* $\mathbf{L}$, definidos como

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2 \tag{2.1.6}$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$. Siempre podemos encontrar un sistema de referencia donde el centro de masas está quieto, tal que $\mathbf{P} = 0$. A este sistema de referencia lo llamamos *sistema de referencia del centro de masas*, y lo que nos dice es que $\mathbf{r}_c(t) = 0$, y por tanto que el movimiento de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ está determinado únicamente por su movimiento relativo $\mathbf{r}$. A la hora de describir la órbita de dos cuerpos este es el sistema de referencia mas usado, por ser el más sencillo.

2.1.3. Solución de la ecuación reducida

El problema de los dos cuerpos se reduce ahora a obtener la solución de la ecuación reducida

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad \mu = G(m_1 + m_2)$$

Estas 3 ecuaciones diferenciales de grado 2 se pueden expresar como 6 ecuaciones diferenciales de grado 1, tales que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Para solucionar estas ecuaciones diferenciales lo que haremos es suponer que existen varias cantidades conservadas (las cuales efectivamente se cosnervarán). Estas cantidades conservadas son:

- **Momento angular**: $\mathbf{c} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$.

- **Energía**: $h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$.
- **Vector excéntrico**: $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}\mathbf{v} \wedge \mathbf{c} - \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Estas cantidades representan un total de siete constantes del movimiento. Sin embargo, no son completamente independientes, ya que están ligadas por al menos dos relaciones fundamentales:

- Ortogonalidad entre el momento angular y el vector excétrico

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 0. \tag{2.1.8}$$

- Relación entre la excentricidad, energía y momento angular.

$$e^2 = \frac{2hc^2}{\mu^2} + 1 \tag{2.1.9}$$

  siendo c el módulo de $\mathbf{c}$ y e el módulo de $\mathbf{e}$, al que se le llama **excentricidad**.

Debido a estas restricciones, el número de grados de libertad efectivos en el problema de la masa reducida se reduce a cinco, con un parámetro libre que definirá nuestra órbita, a saber, un ángulo. Antes de hablar del ángulo debemos definir el plano en el que dicho ángulo es un ángulo polar, el cual será evidente: si $\mathbf{c}$ se conserva, la posición $\mathbf{r}$ y velocidad $\mathbf{v}$ de neustra partícula virtual forman un plano en el que el movimiento de la masa reducida está restringida. Este plano se llama *plano orbital*, y el movimiento de las partículas 1 y 2 están restrigidas a este plano, y por tanto el movimiento reducido depende de dos coordenadas, de la distancia al punto cero del sistema de referencia (que en general será $\mathbf{r}_c = 0$) y el ángulo con un eje de dicho plano (un eje arbitrariamente elegido). Dado que $\mathbf{c} \times \mathbf{e} = 0$, podemos afirmar que el vector excéntrico $\mathbf{e}$ vive en el plano orbital, y como no varía con el tiempo, es un buen eje para tomarlo como eje de referencia. En general este vector se suele elegir como el ángulo el conformado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{e}$, que llaremos **anomalía verdadera**.

$$\cos(f) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{r}||\mathbf{e}|} \tag{2.1.10}$$

Una vez tenemos todo esto la ecuación diferencial del vector posición reducido tiene la siguiente solución

$$\mathbf{r}(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos(f)} \tag{2.1.11}$$

A la cantidad $l = c^2/\mu$ la llamamos *semilatus rectum* se define como la distancia para la cual $f = \pi/2$. En el caso de una elipse, esta distancia se puede entender como la distancia que hay entre uno de los focos de la elipse y la elipse en una línea perpendicular al semieje mayor. Esta definición es un poco liosa, por eso recomendamos ver el dibujo. La distancia entre el centro y la masa reducida también depende de la anomalía verdadera, y la excentricidadde, que define el tipo de órbita que seguirá nuestra partícula. Las trayectorias son cónicas, tales que:

- **Trayectoria circular**: ocurre cuando $e = 0$, tal que $r = l$.

- **Trayectoria elíptica**: ocurre cuando $e = 0$. En este caso aparecen lo que llamamos la *periapsis*, que es la distancia más pequeña a la que se puede encontrar nuestra partícula reducida del centro del SR, tal que $r_{per} = l/(1+e)$; y la *apoapsis* que es la distancia más grande a la que se puede encontrar nuestra partícula del centro del, tal que $r_{ap} = l/(1-e)$. Cuando estos términos se refieren a la trayecotia de la tierra sobre el sol las llamamos perigeo y apogeo, y cuando es de un planeta cualquiera respecto al sol decimos perihelio y apohelio.

- **Trayecotria hiperbólica**: ocurre cuando $e = 1$.

- **Trayecotia parabólica**: ocurre cuando $e > 1$.

-

Figura 2.1: Órbitas de Kepler en función de la excentricidad. En color rojo $e = 0.7$, en color verde $e = 1$ y en color azul $e = 1.3$. Imagen de la Wikipedia.

2.1.4. Plano orbital en función de otro plano de referencia

Como hemos visto, los cuerpos se mueven en el llamado plano orbital. Su movimiento, en este plano, depende de 3 parámetros: el momento angular $\mathbf{c}$ (el cual define la dirección del plano y el *semilatus rectum*), la anomalía verdadera f[3] y el valor de la excentricidad e. Sin embargo nosotros no usaremos como referencia el plano orbital, sino otro. Para definir el plano orbital respecto al *plano de referencia* (esto es, el eje de coordenadas), usamos 3 coordenadas, para las cuales es importante definir el *vector nodo ascendente* $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{c}$. Este vector define lo que llamamos el punto nodo ascendente, y está contenido tanto en el plano orbital como en el plano de referencia. Las 3 coordenadas:

[3] Se emplea el tiempo de paso por el periastro τ, la anomalía media M y la longtidu media L.

- **Inclinación** (i): ángulo entre el plano de la órbita y el plano referencia.

$$\cos(i) = \frac{\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{c}||\hat{\mathbf{z}}|} \tag{2.1.12}$$

- **Longitud del nodo ascendente** (Ω). Ángulo medido en plano de referencia desde la dirección de referencia hasta la dirección del nodo ascendente:

$$\cos(\Omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{N}||\hat{\mathbf{x}}|} \tag{2.1.13}$$

- **Argumento del periastro** (ω). Ángulo medido en el plano de la órbita desde la dirección del nodo ascendente hasta el periastro.

$$\cos(\omega) = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{N}||\mathbf{e}|} \tag{2.1.14}$$

Figura 2.2: Definición de los 3 parámetros necesarios para describir un plano orbital en el de referencia.

2.1.5. Relación entre las anomalías orbitales

En mecánica celeste, es fundamental entender distintos ángulos que describen la posición de un cuerpo en su órbita alrededor de un foco. Cada uno de estos ángulos tiene un significado físico particular y es útil en distintos contextos del estudio de las órbitas.

Anomalía excéntrica (E)

La anomalía excéntrica E es un ángulo auxiliar que permite traducir la posición de un cuerpo en una órbita elíptica a una posición equivalente en un círculo auxiliar. Se usa para facilitar los cálculos matemáticos en las ecuaciones de Kepler, ya que describe el movimiento de un punto ficticio que se mueve con velocidad angular uniforme.

Anomalía media (M)

La anomalía media M representa un ángulo ficticio que describe el avance de un cuerpo en su órbita suponiendo que se mueve a velocidad angular constante. Es decir, no refleja directamente la posición real del cuerpo, sino una versión simplificada que facilita los cálculos de tiempo y evolución orbital. Se mide a partir del periastro τ y se usa en la ecuación de Kepler para determinar la posición real del cuerpo en cada instante de tiempo.

Longitud media (L)

La longitud media L es la suma de la anomalía media M y la longitud del periastro, es decir:

$$L = M + \varpi. \tag{2.1.15}$$

Físicamente, la longitud media proporciona una forma conveniente de expresar la posición promedio del cuerpo en la órbita sin depender de la excentricidad de esta. Se usa en cálculos de efemérides y en la predicción de posiciones orbitales a largo plazo.

Significado físico y aplicación

Cada una de estas anomalías es clave para la descripción y predicción del movimiento orbital. Mientras que la anomalía verdadera da la posición real del cuerpo en su órbita, la anomalía media y la longitud media permiten reformular el problema en términos matemáticos más simples, facilitando así el cálculo de trayectorias y tiempos de paso por ciertos puntos de la órbita. Esto es fundamental en la astrodinámica para la navegación espacial y la predicción de efemérides de cuerpos celestes.

Hizo todo el cálculo sobre como obtener **e** (demostración de que se conserva), como obtener e y su relación con la energía (fácil, pero zzz).

Tambíen hizo un dibujo, donde el eje x es la energía, el eje y el momento angular, y reprsento cual es el tipo de órbita en función de la región de dicho espacio de fases (elíptico, hiperbólico, parabólico, colisión...)

Se está centrnado bastante en las características de la anomalía media (dice que varía a velocidad constante). Hablar de las demas cosas, significado, uso, razón. (Video de true anomaly vs mean anomaly), así vemos la relación entre ellas.

2.2. Problema de los tres cuerpos

2.2.1. Introducción

Se le llama al problema de los tres cuerpos al problema de la dinámica de tres masas m_1, m_2 y m_3 que se mueven por la acción gravitacional mutua entre ellos. En general este probema no tiene solución analítica, dado que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones que podemos emplear.

2.2.2. Problema de los tres cuerpos restringido y puntos de Lagrange

El problema restringido o problema de euler al problema de la dinámica de 3 cuerpos en el que despreciamos el efecto gravitacional sobre los otros dos, que orbitan entre sí. Esto se puede hacer cuando una de las masas es mucho menor que las otras dos (los llamados *cuerpos primarios*) $m_1, m_2 \gg m_3$. Un ejemplo de un cuerpo al que se le podría aplicar este tipo de dinámica es a un asteroide en el sistema solar donde m_1 y m_2 son el Sol y Júpiter. Este problema sí que es intregable, y se obtiene a partir de los siguientes pasos:

- Se considera que los cuerpos masivos m_1 y m_2 se mueven en órbtia circular alrededor de su centro de masas (O) y en el mismo plano de movimiento. Obtenemos la dinámica de ambos cuerpos.
- Luego obtenemos la posición y velocidad de m_3 a partir de las posiciones y velocidades de m_1 y m_2 en cada momento.

En el el problema de los tres cuerpos restringido aparecen 5 puntos de equilibrio (en un instante dado). A estos puntos se le llaman *puntos de Lagrange*, y los dividimos en 2 tipos:

- *Colineales*: L_1, L_2 y L_3. Son inestables tipo *silla*, también poseen una parte tipo *centro*, que se emplea para situar satélites. En el caso Sol-Tierra econtramos por ejemplo el telescopio James Webb en L_2 o la sonda SOHO en L_1.
- *Triangulares*: L_4 y L_5. Son estables siempre que se verifique $\mu = m_2/(m_1 + m_2) < 0.0385$ (cuando $m_1 > m_2$) son linealmente estables, en caso contrario, son inestables. Cuando son estables (por ejemplo, Sol-Júpiter) encontramos asteroides confinados en estos puntos. También podemos encontrar algunos asteroides en los sistemas Sol-Tierra o Sol-Marte.

2.3. Ejercicios

Ejercicio 2.1:

Prueba que el vector excentricidad, o eje excéntrico, $\vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \wedge \vec{c}) - \frac{\vec{r}}{r}$, lleva sentido hacia la periapsis.

Solución en la página 20

Ejercicio 2.2:

El pasado mes de octubre se pudo observar desde nuestra posición geográfica el cometa C/2023 A3 (Tsuchinshan-ATLAS) en su acercamiento en movimiento parabólico al Sistema Solar. Queremos calcular su distancia más cercana al Sol y para ello nos hemos descargado sus efemérides del Small-Body Database (https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/) para el día 12/10/2024 a las 22:00 horas:

$$\vec{r} = (5.3823308478186 \times 10^{-1}, 9.0771915790989 \times 10^{-2}, 9.6661892045926 \times 10^{-2}) \text{ ua}$$
$$\vec{v} = (1.7983375835632 \times 10^{-2}, -1.7986317330981 \times 10^{-2}, 2.0201122328974 \times 10^{-2}) \text{ ua/d}$$

Así, obten/responde a las siguientes preguntas:

a) Obtén el perihelio de eeste cometa.

b) En la misma base de datos se indica que el perihelio es de 0.3914 ua, ¿es la misma que has encontrado? ¿Por qué?

Datos: $G = 6.6738 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2} = 1.4881×10^{-34} ua^{3}d^{-2}kg^{-1}. Masa del Sol: 1.989×10^{30} kg. [Solución: 2.1.) 0.3787 ua.]

Solución en la página 21

Ejercicio 2.3:

Marte tiene dos satélites naturales, Phobos y Deimos, que orbitan a su alrededor en órbita elíptica, del mismo modo que Marte orbita alrededor del Sol. Hemos observado que el período orbital de Phobos es de 0.319033 días y su semi-eje mayor es de 9400 km. Sabiendo que el período y semi-eje mayor de Marte son de 686.98 días y 227.956×10^6 km, respectivamente, halla la masa de Marte. Dato: Masa del Sol 1.989×10^{30} kg. [Solución: 6.46×10^{23} kg.]

Solución en la página 21

Ejercicio 2.4:

La Estación Espacial Internacional (ISS) realiza 15.5 órbitas alrededor de la Tierra en un día y alcanza una altitud sobre la superficie terrestre de 413 km en el perigeo y de 422 km en el apogeo.

a) Halla el semi-eje mayor, la excentricidad y el período de la órbita de la ISS alrededor de la Tierra.

b) Calcula las velocidades máxima y mínima alcanzadas.

c) Estima la masa de la Tierra. ¿Es el mismo valor que encontramos en las bases de datos?

Datos: $G = 6.6738 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, radio medio de la Tierra $R = 6367.44$ km. [Solución: 5.1) $a = 6784.945$ km, $e = 0.00066$, $T = 92.9$ min. 5.2) $v_{\text{máx}} = 7777.01$ m/s, $v_{\text{mín}} = 7521.52$ m/s. 5.3) $M_T = 5.946912 \times 10^{24}$ kg.]

Solución en la página 22

2.4. Soluciones

Solución del ejercicio 2.1 en la página 19:

Tenemos que demostrar que el vector excentricidad lleva el sentido hacia la periapsis.

Tenemos que $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{u}}_3$ donde $\hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{u}}_1 \wedge \hat{\mathbf{u}}_2$. Supongo que $m_2 \gg m_1$. Entonces:

$$\mathbf{r}_c \simeq \mathbf{r}_2 = 0 \qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \qquad \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_2 \tag{2.4.1}$$

Y por tanto $\mathbf{e} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{c}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$. Ahora hacemos que

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_2 & \hat{\mathbf{u}}_3 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = vc\hat{\mathbf{u}}_1 \tag{2.4.2}$$

Y por tanto:

$$\mathbf{e} = \frac{vc}{\mu}\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1 \Rightarrow \mathbf{e} = \left[\frac{vc}{\mu} - 1\right]\hat{\mathbf{u}}_1 \tag{2.4.3}$$

quedando demostrado que lleva el sentido de la periapsis.

Solución del ejercicio 2.2 en la página 19:

Tenemos la ecuación para conocer el ángulo:

$$r(f) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos(f)} \tag{2.4.4}$$

Cuando $e = 1$ tenemos perihelio $f = 0$. El valor de $r_p = c^2/2\mu$. El valor de la masa reducida

$$\mu = G(m_{\text{sol}} + m_{\text{cometa}}) \simeq Gm_{\text{sol}} = 2.95 \cdot 10^{-4}\text{ua}^3/d$$

(ddespreciamos la masa del cometa).Ahora calculamos

$$c = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = 0.015ua^2/ \tag{2.4.5}$$

de lo que puedo obtener el valor de r_p:

$$r_p = \frac{c^2}{2\mu} = 0.379\text{ua} \tag{2.4.6}$$

Solución del ejercicio 2.3 en la página 20:

prueba

Solución del ejercicio 2.4 en la página 20:

prueba