# Notas Teoria cuantica de campos

Daniel Vazquez Lago

15 de septiembre de 2024

# Índice general

# 1
# El campo de Klein-Gordon

## 1.1. La ecuación de Klein-Gordo

Una manera de tratar de combinar la mecánica cuántica y la relatividad especial es trabajar con las ecuaciones de orden pero abandonar la ecuación de Schödinger y tratar de construir una compatible con las simetrías relativistas. En la mecánica cuántica asociamos los operadores diferenciales con la energía y el momento:

$$\text{Energía:}E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{Momento:}\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla \tag{1.1.1}$$

En una teoría no relativista la relación de dispersión es $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$. Substituir los operadores momento y energia en esta relación de dispersión nos lleva a la ecuación de Schödinger $i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi$, donde $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$. Veremos ver que pasa al usar la relación dispersión relativista:

$$E^2 = c^4m^2 + c^2\mathbf{p}^2 \tag{1.1.2}$$

que pasa a ser

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^4m^2\phi - \hbar^2c^2\nabla^2\phi \tag{1.1.3}$$

donde $\phi$ es la *función de ondas*. Podemos expresar esta ecuación en términos relativistas si usamos $x^\mu = (ct, x^i)$ y el operador D'Alembert operador $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$ de tal modo que se convierte en:

$$\left(\Box + \frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \tag{1.1.4}$$

esta es la **ecuación de Klein-Gordon**.

### 1.1.1. Ondas planas como solución

Vamos a ver ahora las soluciones mas simples de las ecuaciones de Klein-Gordon, que no son otras que las ondas planas. Podemos ver que:

$$\phi(x) = Ne^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \tag{1.1.5}$$

donde $N$ es el factor normalizador. Si substituimos esta ecuación en **??** tedremos que:

$$\frac{-E^2 + c^2\mathbf{p}^2 + c^4m^2}{c^2\hbar^2}\phi = 0 \tag{1.1.6}$$

y por lo tanto que $E$ está relacionada con $p$ mediante la ecuación de dispersión relativista. El punto ahora es que tenemos dos tipos de soluciones para la energía:

$$E = \pm w_{\mathbf{p}} \qquad w_{\mathbf{p}} = \sqrt{c^4m^2 + c^2\mathbf{p}^2} \tag{1.1.7}$$

El hecho de que la relación de dispersión sea cuadrática procede de que la ecuación Klein-Gordon es una ecuación de segundo orden en la derivada temporal. Cuando constuimos el espacio de soluciones tenemos que incluir aquellas que corresponden a energías negativas.

### 1.1.2. Interpretación probabilistica: ¿Problemas?

La presencia de soluciones para la ecuación de ondas que nos llevan a la existencia de una energía negativa debería chirriarnos bastante, sobretodo porque no parece que tenga un límite inferior, por lo que podríamos llegar a soluciones con menor energía *ad infinitum*.

La presencia de energía negativa también nos lleva a problemas cuando tratamos de realizar la interpretación probabilistica. Normalente, en la mecánica cuántica, la densidad de probabilidad viene dada por el módulo al cuadrado de la ecuación de ondas:

$$\rho = |\psi|^2 \tag{1.1.8}$$

Y la *corriente de probabilidad* dada por

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi\right) \tag{1.1.9}$$

de tal modo que la conservación de la probabilidad queda como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{1.1.10}$$

¿Podemos construir algún tipo de cantidad conservada para el campo de Klein-Gordon? La respuesta es que si siempre que cojamos un $\phi$ complejo. De este modo de la ecuación Klein-Gordon deducimos que

$$\phi^*\left(\Box + \frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \Leftrightarrow \phi\left(\Box + \frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right)\phi^* = 0 \tag{1.1.11}$$

lo que implica que

$$\phi^*\Box\phi - \phi\Box\phi = 0 \tag{1.1.12}$$

Si expresamos esto con índices relativistas tenemos que

$$\phi^*\Box\phi = \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi = \partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi) - \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi \tag{1.1.13}$$

y de manera similiar el otro término (mismo procedimiento). Dado esto, podemos ver que la expresión 1.1.12, de tal modo que podemos escribir la ecuación

$$\partial_\mu\left(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*\right) = 0 \tag{1.1.14}$$