

Daniel Vázquez Lago

Teoría Cuántica De Campos

Índice general

Introducción	5
1. Mecánica Clásica	7
1.1. Formulación Lagrangiana	7
1.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	7
1.1.2. Principio de Hamilton	8
1.2. Simetrías y Teorema de Noether	8
1.3. Oscilaciones pequeñas y modos normales	9
1.4. Formulación Hamiltoniana	10
1.4.1. Hamiltoniano y Ecuaciones Hamiltonianas	10
1.4.2. Corchetes de Poisson	10
1.5. Cinemática Relativista	11
1.6. Electromagnetismo	12
1.6.1. Ecuaciones de Maxwell	12
1.6.2. Transformaciones Gauge	13
2. Campos Clásicos Relativistas	15
2.1. Teoría Relativista Clásica de Campos Escalares	15
2.1.1. Formalismo Lagrangiano	15
2.1.2. Formalismo Hamiltoniano	16
2.1.3. Corchetes de Poisson	17
2.2. Teorema de Noether y simetrías	17
2.2.1. Teorema de Noether para Campos Clásicos	17
2.2.2. Conservación de la Energía y Momento	20
2.3. Teoría Clásica de Campos	20
2.3.1. Formulación Lagrangiana del Electromagnetismo	21
2.3.2. Formulación Hamiltoniana del Electromagnetismo	21
3. Mecánica Cuántica Relativista	23
3.1. Ecuación de Klein-Gordon	23
3.1.1. Formulación de la Ecuación de Klein-Gordon	23
3.1.2. Corriente conservada	24
3.1.3. Interacción con un potencial escalar	24
3.1.4. Interacción con el campo electromagnético	24
3.2. Ecuación de Dirac	24
3.2.1. Formulación de la Ecuación de Dirac	25
3.2.2. Corriente de probabilidad	27
3.2.3. Interacción con el campo electromagnético	27
3.2.4. Invariancia relativista de la ecuación de Dirac y matrices γ	27

3.2.5.	Espinor Adjunto de Dirac	29
3.2.6.	Soluciones a la ecuación de Dirac	30
3.2.7.	Complejidad y proyectores	32
3.2.8.	Vector Espín	32
4.	Teoría Cuántica de Campos	33
4.1.	Introducción	33
4.1.1.	Cuantización de los Modos Normales	33
4.2.	Partículas Escalares	35
4.2.1.	Campo Escalar Libre	35
4.2.2.	Teorema de Wick	35
4.3.	Fermiones	35
4.3.1.	Operadores de creación y destrucción	35
4.3.2.	Espacio de Fock	35
4.3.3.	Cuantización Canónica para Fermiones de Dirac	35
4.4.	Fotones	35
4.4.1.	Cuantización Canónica para Fotones	35
4.4.2.	Espacio de Fock para los fotones	35
4.4.3.	Gauge	35
5.	Interacción entre Campos Cuánticos	37
5.1.	Sección Eficaz y Tasa de Decaimiento	37
5.2.	Diagramas de Feynman	37
6.	Ejercicios y Soluciones	39
6.1.	Interacción entre Campos Cuánticos	39
A.	Invariancia de Lorentz y Poincaré	53
A.1.	Introducción	53
A.1.1.	Espacio de referencia inercial	53
A.2.	Transformaciones de Lorentz y Poincaré	54
A.2.1.	Postulados de la relatividad espacial	54
A.2.2.	Grupo de Lorentz	56
A.3.	Grupo de Poincaré y Grupo Pequeño	59
A.3.1.	Espín Intrínseco y grupo de Poincaré	59
B.	Teoría de Grupos y Grupos de Lie	61
B.1.	Elementos en la teoría de grupos	61
B.2.	Grupo de Lie	62

Introducción

Capítulo 1

Mecánica Clásica

En este capítulo introducimos brevemente la formulación Lagrangiana de la mecánica clásica. La manifestación de las simetrías en esta formulación particular de la mecánica clásica y el teorema de Noether, que nos permite calcular las leyes de conservación se hace en la sección 1.2. Luego veremos tanto la formulación Hamiltoniana y su relación con la mecánica cuántica. finalmente veremos las reglas de la cinemática relativista así como la formulación covariante del electromagnetismo.

1.1. Formulación Lagrangiana

1.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Como sabemos el Lagrangiano de un sistema físico con N grados de libertad viene dado por:

$$L = T - V \quad (1.1.1)$$

donde T es la *energía cinética* y V la *energía potencial*, ambas expresadas en las coordenadas generalizadas q_i y sus respectivas velocidades \dot{q}_i . En un sistema con N grados de libertad, las **ecuaciones de Euler-Lagrange** son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (1.1.2)$$

donde $i = 1 \dots N$. Decimos que dos lagrangianos son **equivalentes** si llevan a las mismas ecuaciones del movimiento. Dos lagrangianos L' y L que divergan entre sí tal que

$$L' = aL + \frac{dF(\mathbf{q}, t)}{dt} + b \quad (1.1.3)$$

son equivalentes. Esto será importante más adelante. Definimos como fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q_i como:

$$Q_i \equiv \sum_{a=1}^n \mathbf{F}_a^{\text{apl}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial q_j} \right) \quad (1.1.4)$$

En general se suele verificar que $\mathbf{F}_a^{\text{apl}} = -\nabla_a V$ para $a = 1, 2, \dots, n$.

1.1.2. Principio de Hamilton

El **principio de Hamilton** nos dice que la trayectoria que sigue un cuerpo entre dos puntos es aquella que hace estacionaria la acción¹ respecto las diferentes variaciones del camino a seguir (es decir, respecto los diferentes caminos $\mathbf{q}(t)$). La acción queda definida como el siguiente funcional:

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.1.5)$$

Entonces el principio de Hamilton nos dice que las ecuaciones del movimiento en el sistema clásico corresponde aquellas que verifiquen

$$\frac{\delta S[\mathbf{q}]}{\delta q_j(t)} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N \quad (1.1.6)$$

Esta condición se puede demostrar que lleva directamente a las ecuaciones de Euler-Lagrange, tal que:

$$\frac{\delta S[\mathbf{q}]}{\delta q_j(t)} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = 0 \quad (1.1.7)$$

1.2. Simetrías y Teorema de Noether

Supongamos que \mathbf{q}' y \mathbf{q} son dos posibles elecciones de las N coordenadas generalizadas para un sistema. Entonces debe existir una función \mathbf{f} invertible que nos permite pasar de una a la otra, tal que $\mathbf{q}' = \mathbf{f}(\mathbf{q})$. Consideremos que existe un parámetro s ² tal que la transformación $\mathbf{q}' = \mathbf{f}_s(\mathbf{q})$ depende del mismo y cuando $s = 0$ se verifica $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$, esto es:

$$\mathbf{q}'(s, t) = \mathbf{f}_s(\mathbf{q}(t)) \quad \text{donde } s \in \mathbb{R} \text{ y } \mathbf{q}'(0, t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{q}(t) \quad (1.2.1)$$

La familia de transformaciones \mathbf{f}_s es definida como una *simetría de la acción*, siempre que se verifique $S[\mathbf{q}] = S[\mathbf{q}'(s)] = S[\mathbf{f}_s(\mathbf{q})]$ para cada s , para cada camino \mathbf{q} para cualquier intervalo temporal definido por t_i y t_f . Que sea independiente del intervalo temporal implica que

$$\left[\frac{d}{ds} L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) \right]_{s=0} = 0 \quad (1.2.2)$$

Definimos $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q})$ como la derivada de la familia \mathbf{f}_s cuando $s = 0$ tal que

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}) \equiv \left. \frac{d\mathbf{q}'}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{ds} \right|_{s=0} \quad (1.2.3)$$

Teorema 1.1

A partir de las anteriores definiciones, el **teorema de Noether** asegura que si \mathbf{f}_s es efectivamente una simetría de la acción, la *primera integral de Noether*

¹Se suele decir que «minimiza» la acción, aunque nunca se hace una exigencia para que esto sea así. El caso más general corresponde a decir que la acción se hace estacionaria, no necesariamente mínima.

²De manera general podría ser una familia de parámetros, aunque para lo que necesitamos uno será suficiente

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \eta_j(\mathbf{q}) \quad (1.2.4)$$

es una *constante del movimiento*, esto es, $dC/dt = 0$.

1.3. Oscilaciones pequeñas y modos normales

Cuando tenemos un sistema físico complejo, estamos interesados en variaciones pequeñas alrededor del equilibrio, que se puede describir en términos de los llamados “modos normales”. Consideremos entonces un sistema con N grados de libertad, con N coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Supongamos entonces que estamos suficientemente cerca de un punto de equilibrio (mínimo local de $V(\mathbf{q})$)-

Definición 1.1

Decimos que un sistema está en **equilibrio** cuando todas las fuerzas asociadas a las coordenadas generalizadas en el sistema se hacen nulas:

$$Q_i(t) = 0 \quad \forall t \quad (1.3.1)$$

Un sistema se dice que está en *equilibrio estático* cuando además las velocidades generalizadas verifican $\dot{q}_n = 0$.

Cuando estamos en un sistema en equilibrio alrededor del punto \mathbf{q}_0 siempre podemos expandir nuestro potencial por Taylor tal que

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \eta_i \eta_j \equiv V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N K_{ij} \eta_i \eta_j \quad (1.3.2)$$

donde $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$. En este caso K es una matriz real y simétrica, y por tanto diagonalizable. La energía cinética por otro lado

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N M_{ij}(\mathbf{q}) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad (1.3.3)$$

donde M también es real y diagonalizable, con valores positivos en el entorno del punto de equilibrio. Nuestro lagrangiano entonces se puede expresar como (lógicamente V_0 no nos interesa, siempre podemos reescalarlo)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N M_{ij}(\mathbf{q})^0 \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N K_{ij} \eta_i \eta_j \quad (1.3.4)$$

Como podemos ver se parece mucho a un oscilador armónico, salvo por los términos acoplados. Siempre existe una transformación ortogonal sobre las coordenadas η que nos permitan escribir el problema como un conjunto de osciladores armónicos linealmente independientes, que se expresan por la coordenada normal ζ_i , cuyo lagrangiano es

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left(\dot{\zeta}_i^2 - \omega_i^2 \zeta_i^2 \right) \quad (1.3.5)$$

y sus ecuaciones son

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i^2 = 0 \quad (1.3.6)$$

donde ω_i son las diferentes frecuencias de oscilación del sistema y se llaman **modos normales** del sistema. Cada modo normal corresponde a una de las posibles soluciones que describen la oscilación del sistema entorno al equilibrio.

1.4. Formulación Hamiltoniana

La mecánica Lagrangiana es una coordenadas generalizadas y velocidades para describir el comportamiento del sistema. Existe un método alternativo, en el que se usan las coordenadas generalizadas y sus respectivos momentos canónicos conjugados. Los dos formalismos están relacionados por una transformación de Legendre.

1.4.1. Hamiltoniano y Ecuaciones Hamiltonianas

El **Hamiltoniano** H asociado con el Lagrangiano L se define a través de la transformada de Legendre multidimensional:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \left(\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i \right) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \quad (1.4.1)$$

donde p_i es el momento canónico conjugado de la coordenada generalizada q_i definido como

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.4.2)$$

Las *ecuaciones del movimiento* ahora son:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.4.3)$$

1.4.2. Corchetes de Poisson

Supongamos dos funciones en el espacio de fases $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ y $G(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, cuya única condición es que el orden de las derivadas no altera el resultado. Si se verifican estas condiciones decimos que F y G son *variables dinámicas*. El **corchete de Poisson** de estas dos funciones se define como

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \quad (1.4.4)$$

Si A , B y C son variables dinámicas y a y b constantes reales, entonces las propiedades de los corchetes de Poisson pueden ser expresadas como

1. Cierre: $\{A, B\}$ es también una función del espacio de fases.
2. Antisimetría: $\{A, B\} = -\{B, A\}$.
3. Bilinealidad: $\{aA + bB, C\} = a\{A, C\} + b\{B, C\}$.
4. Regla del Producto: $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$.
5. Identidad de Jacobi: $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$.

Los corchetes de Poisson encierran gran parte de las propiedades de las variables dinámicas. Por ejemplo, el corchete de Poisson entre $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ con las coordenadas generalizadas y sus momentos:

$$\{q_i, A\} = \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad \{p_i, A\} = -\frac{\partial A}{\partial q_i} \quad (1.4.5)$$

Mientras que con el Hamiltoniano la variable dinámica $A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.4.6)$$

Otros corchetes muy importantes son los *corchetes fundamentales*:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad (1.4.7)$$

1.5. Cinemática Relativista

Definimos el cuadrivector posición para un sistema de referencia:

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) \quad (1.5.1)$$

como todo cuadrivector, cuando queremos describirlo en otros sistema de referencia inercial tendremos que usar las transformaciones de Lorentz a través de la matriz Γ . Las distancias las calculamos a través del tensor de Minkowski

$$x^2 = x^\mu x_\mu = g^{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.5.2)$$

y es un **invariante Lorentz**³, ya que no importa en que sistema de referencia nos encontremos, la distancia (que no es equivalente a la distancia espacial \mathbf{x}^2) entre dos puntos es siempre la misma. Para definir la velocidad de un objeto tal que la distancia V^2 sea invariante Lorentz debemos usar un 4-vector velocidad adecuado. Por eso debemos introducir el **factor de Lorentz** se define como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.5.3)$$

³Cuando decimos que un escalar invariante Lorentz, covariante Lorentz, invariante relativista... nos referimos a que dicho valor no depende del sistema de referencia. Hay varias maneras de cambiar el sistema de referencia: rotarlo, trasladarlo, o darle un *boost* (es decir, considerar que estamos en un sistema de referencia que se mueve con una velocidad \mathbf{v} respecto al anterior). Cuando decimos que un vector o tensor es covariante significa que cuando hacemos un cambio de sistema de referencia este objeto (vector, tensor) se le aplica la matriz de transformación de Lorentz, y por tanto el escalar generado por el vector o tensor es invariante Lorentz.

donde v es la velocidad del sistema de referencia y/o objeto respecto al sistema de referencia de interés. Si v es la velocidad de un objeto respecto a nosotros, definimos como la cuadrivelocidad como

$$V^\mu \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (1.5.4)$$

que verifica siempre

$$V^2 = V_\mu V^\mu = 1 \quad (1.5.5)$$

Definimos como momento a

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = mV^\mu \quad p^2 = m^2 c^2 \quad (1.5.6)$$

Definimos como energía relativista al término $E \equiv cp^0$ tal que:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1.5.7)$$

donde mc^2 es la energía en reposo. La energía cinética se define como

$$T = E - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2 \quad (1.5.8)$$

1.6. Electromagnetismo

1.6.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell describen el electromagnetismo y sus interacciones con la materia a partir de las densidades de corriente. Las ecuaciones en unidades del sistema internacional son:

$$\begin{aligned} \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico: } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \text{Ley de Gauss para el magnetismo: } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \text{Ley de Faraday: } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Ley de Ampère-Maxwell: } \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

donde ε_0 es la *permitividad eléctrica* y μ_0 la permeabilidad magnética. Definimos como el cuadri-vector de corriente eléctrica j^μ a

$$j^\mu(x) = (c\rho(x), \mathbf{j}(x)) \quad (1.6.2)$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica y \mathbf{j} la corriente de densidad de carga clásica. Bajo transformaciones de Lorentz los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} se mezclan, al igual que hacen ρ y \mathbf{j} . La invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell no es inmediata, por lo que trataremos de expresarlas a través del **cuadrivector potencial**

$$A^\mu \equiv (A^0(x), \mathbf{A}(x)) \equiv (\Phi(x)/c, \mathbf{A}(x)) \quad (1.6.3)$$

donde ϕ es el potencial eléctrico y \mathbf{A} el potencial vectorial, tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.6.4)$$

El **tensor de campo electromagnético** viene definido

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \quad (1.6.5)$$

Tal que $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Podemos ver que:

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + \partial_i \Phi \right) = -\frac{E^i}{c} \quad (1.6.6)$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} \epsilon^{mnk} \partial_m A^n = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (1.6.7)$$

En resumen, nosotros podemos escribir las matrices de elementos $F^{\mu\nu}$ tal que

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.8)$$

Las ecuaciones de Maxwell en este contexto son:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (1.6.9)$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ se llama el *dual del tensor de campo* y es un *pseudotensor*:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma} \quad (1.6.10)$$

tal que la primera parte encierra las leyes de Faraday y la ley magnética de Gauss, mientras que la segunda encierra la ley de Gauss eléctrica y la ley de Ampere-Maxwell. El dual viene dado por:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.11)$$

Además se verifica que:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 2 [\mathbf{B}^2 - (\mathbf{E}^2/c^2)] \quad \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = (-4/c) \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (1.6.12)$$

Además recordemos que *vector de Poyting* viene dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.6.13)$$

Y la energía por densidad de volumen:

$$U = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right] \quad (1.6.14)$$

1.6.2. Transformaciones Gauge

Capítulo 2

Campos Clásicos Relativistas

Podemos generalizar la mecánica de los sistemas discretos para el caso de campos asignándole a cada punto del espacio uno o más grados de libertad. Haciendo que el número de grados de libertad es finito podemos construir una mecánica relativista consistente a través de las densidades lagrangianas y hamiltonianas. En este tema profundizaremos precisamente en la descripción de los campos clásicos relativistas a través de estas descripciones, enfatizando el rol de las simetrías que llevan a través del teorema de Noether a las cargas y corrientes conservadas.

2.1. Teoría Relativista Clásica de Campos Escalares

2.1.1. Formalismo Lagrangiano

Un campo clásico real es aquel que tiene un grado de libertad por cada punto del espacio 3-dimensional. La correspondencia entre un punto discreto de la mecánica clásica se hace y un campo escalar clásico $\phi(x)$ se hace a través de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} j = 1, 2, \dots, N \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \sum_{l=1}^N \rightarrow \int d^3x \quad q_j(t) \rightarrow \phi(ct, \mathbf{x}) = \phi(x) \\ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \rightarrow L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) \equiv \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) \\ S[\mathbf{q}] = \int dt L \rightarrow S[\phi] = \int dt L = \int dt \left(\int d^3x \mathcal{L} \right) = (1/c) \int d^4x \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

donde L y S son el lagrangiano y la acción respectivamente. Al término \mathcal{L} lo definimos como **densidad Lagrangiana**. Como en general se adopta $c = \hbar = 1$ ¹ la acción se suele denotar $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}$.

También podemos extender el principio de Hamilton sin ningún tipo de problema, salvo el limitado por las condiciones de frontera. No es difícil comprobar que la generalización de este nos lleva a que:

$$c \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)(x)} \right) = 0 \quad x^\mu \in R \quad (2.1.2)$$

¹Unidades naturales

Lógicamente el problema de las superficies de contorno es mucho mas grande ahora. El *principio de Hamilton en la forma covariante* nos dice que las ecuaciones del movimiento clásicas para *cualquier región del espacio-tiempo* R son aquellas que hacen estacionaria la acción respecto las variaciones $\delta\phi$ y $\delta(\partial_\mu\phi)$ que *se hacen nulas en cualquier punto de la superficie* S_R de esta región espacio-temporal. En otras palabras: *consideramos las fluctuaciones de campo que ocurran en regiones espatiotemporales finitas y arbitrarias* de tal modo que los términos de superficie puedan ser obviados.

Al igual que en el caso clásico, siempre podemos construir a partir de una densidad lagrangiana \mathcal{L} una \mathcal{L}' que genere las mismas ecuaciones del movimiento a través del cambio

$$\mathcal{L}' = a\mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu + b \quad (2.1.3)$$

Ejemplo 2.1

La densidad Lagrangiana más simple que es de segundo orden en velocidades generalizadas es la del campo escalar libre:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.1.4)$$

Podemos ver claramente que es la generalización del lagrangiano del oscilador armónico $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$ si ignoramos el término $-\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2$, que es el término de *acoplamiento* en nuestro caso. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos la ecuación del movimiento:

$$\left(\square + m^2\right) \phi(x) = \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) \phi(x) = 0 \quad (2.1.5)$$

y se llama **ecuación de Klein-Gordon**, representando una función de ondas relativista para un campo clásico escalar libre, donde libre significa que las ecuaciones de onda planas $\exp(\pm i p x)$ verifican que $p^2 = m^2$. Las ecuaciones del movimiento para un campo relativista libre se llama muchas veces *ecuaciones de onda relativistas*. Así, la ecuación de Klein-Gordon sería la ecuación de ondas relativista para un campo escalar libre real. Las ondas planas representan un modo normal para este sistema de infinitos osciladores armónicos acoplados.

2.1.2. Formalismo Hamiltoniano

La formulación Hamiltoniana de la teoría clásica de campos está construida de manera completamente análoga a la formulación Lagrangiana pero aplicando ahora la transformación de Legendre. Recordemos que si para cada \mathbf{x} espacial tenemos una coordenada generalizada $\phi(ct, \mathbf{x})$, hay un momento canónico conjugado tal que

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)(x)} \quad (2.1.6)$$

Tal que el Hamiltoniano

$$H = \left[\int d^3x \pi(x) \partial_0\phi(x) \right] - L(\phi, \partial_\nu\phi, x) \quad (2.1.7)$$

Definimos la **densidad Hamiltoniana**

$$\mathcal{H} \equiv \pi(x) \partial_0(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu, x) \quad (2.1.8)$$

Y las *ecuaciones canónicas* o *ecuaciones del movimiento*

$$\partial_0 \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \quad \partial_0 \pi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi)} \quad \partial_\mu^{\text{ex}} \mathcal{H} = -\partial_\mu^{\text{ex}} \mathcal{L} \quad (2.1.9)$$

donde ∂_μ^{ex} quiere decir la *derivada parcial que actúa solo sobre términos explícitos*.

2.1.3. Corchetes de Poisson

La generalización de los corchetes de Poisson apropiada para la teoría clásica de campos es:

$$\{F, G\} = \int d^3z \left(\frac{\delta F}{\delta \phi(x^0, \mathbf{z})} \frac{\delta G}{\delta \pi(x^0, \mathbf{z})} - \frac{\delta F}{\delta \pi(x^0, \mathbf{z})} \frac{\delta G}{\delta \phi(x^0, \mathbf{z})} \right) \quad (2.1.10)$$

donde $\phi(x)$ es un conjunto de campos con momentos conjugados:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)(x)} \quad (2.1.11)$$

Los *corchetes de Poisson fundamentales* se siguen definiendo como

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = \{\pi(x), \pi(y)\} = 0 \quad \{\phi(x), \pi(y)\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.1.12)$$

para $x^0 = y^0$.

2.2. Teorema de Noether y simetrías

2.2.1. Teorema de Noether para Campos Clásicos

Consideremos un sistema físico que consista en N campos ϕ_1, \dots, ϕ_N y para el cual la dinámica del sistema viene dada por la acción $S = (1/c) \int d^4x \mathcal{L}$. Trabajaremos en el espacio de Minkowski y usaremos la forma covariante del principio de Hamilton, en la cual las fluctuaciones de campo $\Delta \phi(x)$ tienen un tamaño grande pero finito y una extensión temporal.

En este caso consideramos las transformaciones de campo arbitrarias y una transformación en el espacio tiempo:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \quad \phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x') \quad (2.2.1)$$

Solo estamos interesados en las transformaciones invertibles. El espacio-tiempo también se transformará, tal que $R \rightarrow R'$. La acción expresada en función de los nuevos campos y coordenadas:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{c} \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi, x) \\ &= \frac{1}{c} \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}'(\phi', \partial'_\nu \phi', x') \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Cualquier transformación que deje las ecuaciones del movimiento invariantes se define como *simetría* de la acción, al igual que en la mecánica clásica discreta. Típicamente, solo existen unas

pocas transformaciones que se correspondan con simetrías. Consideremos una transformación infinitesimal de campos y coordenadas:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu(x) \equiv x^\mu + d\alpha X^\mu(x) \quad (2.2.3)$$

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x') \equiv \phi_i(x) + \delta \phi_i(x) \equiv \phi_i(x) + d\alpha \Phi_i(x) \quad (2.2.4)$$

donde $d\alpha \ll 1$ es un parámetro real e infinitesimal que fija el tamaño de la transformación, mientras que X^μ y $\Phi_i(x)$ determinan la naturaleza del espacio tiempo y transformaciones de campo respectivamente. En otras palabras: estas últimas dependen de la simetría. Al término $d\alpha \Phi$ lo llamamos **variación local** del campo, al que se le suma la variación debido a la transformación de las coordenada para obtener la **variación total** $\Delta \phi_i(x)$:

$$\Delta \phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x) = d\alpha \{ \Phi_i(x) - (\partial_\mu \phi_i(x)) X^\mu(x) \} = d\alpha \Psi_i(x) \quad (2.2.5)$$

De tal modo que

$$\Psi_i(x) \equiv \{ \Phi_i(x) - (\partial_\mu \phi_i(x)) X^\mu(x) \} \quad \Delta \phi(x) = d\alpha \Psi(x) \quad (2.2.6)$$

Para las simetrías o transformaciones de simetría que dejan la acción invariante, tenemos que para *cualquier* campo $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S = S[\phi'] - S[\phi] &= \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi', x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \\ &= \left[\int_{R'} d^4x' \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi', x') - \int_R d^4x' \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x') \right] \\ &\quad + \left[\int_R d^4x' \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi', x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \right] \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Por un lado el segundo corchete solo cambia el nombre de la variable de integración, por lo que en realidad:

$$\begin{aligned} \int_R d^4x' [\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi', x') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)] &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \cdot \Delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \cdot \Delta (\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int_R d^4x \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \cdot \Delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \cdot \partial_\mu \Delta (\phi) \right] = \int_R d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \cdot \Delta \phi \right] \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

donde hemos usado las ecuaciones de Euler-Lagrange y que $\Delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \Delta(\phi)$. Por otro lado, el primer corchete:

$$\int_{R-R'} d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x) = \int_{S_R} [\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x) \delta x^\mu] ds_\mu = \int_R \partial_\mu [\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x) \delta x^\mu]$$

donde el último paso hemos reemplazado ϕ' por ϕ ya que podemos trabajar con el término de primer orden en la transformación infinitesimal. Combinando todos los resultados tenemos que:

$$0 = \delta S = S[\phi'] - S[\phi] = \frac{1}{c} \int_R d^4x \partial_\mu [\pi^\mu(x) \cdot \Delta \phi(x) \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \delta x^\mu] \quad (2.2.9)$$

donde hemos usado que

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)(x)} \quad (2.2.10)$$

Como la región espacio-temporal R es arbitraria para que dicho cambio se anule:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \{ \pi^\mu(x) \cdot \Delta \phi(x) \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \delta x^\mu \} \\ &= d\alpha \partial_\mu \{ \pi^\mu(x) \cdot [\Phi_i(x) - (\partial_\mu \phi_i(x)) X^\mu(x)] + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) X^\mu \} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Teorema 2.1

La **forma simple del teorema de Noether** nos dice que para una transformación infinitesimal caracterizada por X^μ y Φ previamente definidas y de tal manera que la acción es invariante, entonces la **corriente de Noether** asociada a esta simetría continua tiene la forma de

$$j^\mu(x) \equiv \pi^\mu(x) \cdot [\Phi_i(x) - (\partial_\mu \phi_i(x)) X^\mu(x)] + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) X^\mu \quad (2.2.12)$$

donde

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (2.2.13)$$

Cuando $X^\mu = 0$ decimos que tenemos una *simetría interna*, si no es cero decimos que tenemos una *simetría espaciotemporal*. Si además $\Phi = 0$ entonces tenemos una *simetría espacio temporal pura*. La pregunta ahora que nos hacemos es: ¿Si existe una forma simple del teorema de Noether, significa que hay una forma mas completa? La respuesta es que evidentemente sí. La particularización que hacemos en el caso anterior es asumir que $\delta S = 0$, ya que en realidad lo que nos importa es que las ecuaciones del movimiento sean invariantes. El caso mas general es que la diferencia venga dada por un término de superficie

$$\delta S \equiv d\alpha \frac{1}{c} \int_R d^4x \partial_\nu F^\nu \quad (2.2.14)$$

De tal modo que en realidad la corrección:

$$\delta S - d\alpha \frac{1}{c} \int_R d^4x \partial_\nu F^\nu = \frac{1}{c} \int_R d^4x \partial_\mu [\pi^\mu(x) \cdot \Delta \phi(x) \mathcal{L} \delta x^\mu - d\alpha F^\mu] = 0 \quad (2.2.15)$$

y que por tanto la *corriente de Noether generalizada* es:

$$j^\mu(x) \equiv \pi^\mu(x) \cdot [\Phi_i(x) - (\partial_\mu \phi_i(x)) X^\mu(x)] + \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) X^\mu - F^\mu \quad (2.2.16)$$

En inglés existen dos términos, *on-shell* y *off-shell*, que en español se podrían traducir como *en capa* y *fuera de capa*, que se refieren a la forma de la ecuación de dispersión. Cuando decimos que una partícula está on-shell su relación de dispersión tiene un comportamiento normal $p^2 = m^2$, mientras que si está off-shell $p^2 \neq m^2$. Las partículas con comportamiento normal se asocian a partículas reales, mientras que las que están fuera de capa se asocian a partículas virtuales. Las ecuaciones de conservación de corrientes de Noether son válidas únicamente on-shell, es decir, aquellas partículas que satisfacen las ecuaciones de movimiento. No es que no seamos capaces de definir las corrientes, es que su conservación no se verifica. Es importante decir que siempre podemos redefinir la corriente conservada j'^μ a partir de j^μ añadiendo divergencia de un tensor antisimétrico $A^{\mu\nu}$:

$$j'^\mu \equiv j^\mu + \partial_\nu A^{\mu\nu} \quad A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \quad (2.2.17)$$

La forma general de la corriente conservada es:

$$j^\mu(x) \equiv \left(j^0(x), \mathbf{j}(x) \right) \equiv (c\rho, \mathbf{j}(x)) \quad (2.2.18)$$

Y para cada corriente de Noether hay una **carga conservada** que es la integral espacial de la densidad de carga $\rho(x)$:

$$Q \equiv \frac{1}{c} \int d^3x j^0(x) \quad (2.2.19)$$

Ejemplo 2.2

Como un primer ejemplo consideremos el lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2$ que bajo la transformación $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + d\alpha$ es invariante. Bajo esta transformación nótese que $X^\mu = 0$ y $\Phi(x) = 1$. Entonces la corriente conservada es:

$$j^\mu(x) \equiv \pi^\mu(x) = \partial^\mu \phi(x)$$

es una corriente conservada

Ejemplo 2.3

Otro Lagrangiano interesante es aquel asociado a un campo escalar complejo tal que

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \quad (2.2.20)$$

Cuando tratamos con un campo escalar complejo ϕ , el tratamiento del problema se hace suponiendo que ϕ y ϕ^* son campos independientes, por lo que a la hora de aplicar las ecuaciones de la forma simple hay que tener en cuenta que es como si tuviéramos dos campos. Como podemos el lagrangiano es invariante ante un cambio de fase global $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x)$, y es un ejemplo de una *simetría global* (es decir, una simetría independiente del espacio tiempo). Este tipo de simetrías es la que lleva a la conservación de fermiones. Veamos que $X^\mu = 0$, y que infinitesimalmente lo que estamos haciendo es la transformación:

$$\phi \rightarrow \phi + \alpha \Delta \phi = \phi + \alpha(i\phi) \quad \phi^* \rightarrow \phi^* + \alpha \Delta \phi^* = \phi^* + \alpha(-i\phi^*) \quad (2.2.21)$$

tal que $\Phi = (i\phi)$ y $\Phi^* = (-i\phi^*)$. En virtud de Ec. (2.2.10) los momentos son $\pi^\mu = \partial^\mu \phi^*$ y $\pi^{*\mu} = \partial^\mu \phi$ tenemos que la *corriente conservada* es

$$j^\mu(x) = \pi^\mu \Phi + \pi^{*\mu} \Phi^* = i [\phi (\partial^\mu \phi^*) - \phi^* (\partial^\mu \phi)] \quad (2.2.22)$$

2.2.2. Conservación de la Energía y Momento

2.3. Teoría Clásica de Campos

En un intento de extender las técnicas vistas en este tema para una teoría particular, vamos a estudiar el importantísimo ejemplo del campo electromagnético clásico, usando las unidades de Lorentz-Heaviside en las que los factores ϵ_0 y μ_0 no aparecen, dejando solo los términos en función de c .

2.3.1. Formulación Lagrangiana del Electromagnetismo

2.3.2. Formulación Hamiltoniana del Electromagnetismo

Capítulo 3

Mecánica Cuántica Relativista

3.1. Ecuación de Klein-Gordon

La extensión relativista mas simple de la mecánica cuántica es aquella que se hace para partículas de espín cero, que de acuerdo con la teoría espín-estadística deberían ser bosones. Aunque ya hemos presentado la ecuación Klein-Gordon en nuestros estudios de campos clásicos, donde era el caso más simple de una densidad lagrangiana, normalmente se asocia a la mecánica cuántica relativista ya que es la extensión más sencilla de la ecuación de Schrödinger, tal y como vamos a ver.

3.1.1. Formulación de la Ecuación de Klein-Gordon

Como sabemos el cuadrimomento verifica que:

$$p^2 = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (3.1.1)$$

que es la relación de dispersión relativista. Podemos cuantizar esta ecuación de tal forma que

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (3.1.2)$$

Podemos hablar de «cuantización» de la relación de dispersión anterior, ya que estamos transformado los valores reales en operadores cuánticos. Al igual que la ecuación de Schrödinger es la cuantización de la relación de dispersion clásica $E = p^2/2m + V$, aquí estamos haciendo exactamente lo mismo. Podemos entender esta cuantización como la *generalización relativista más simple de la ecuación de Schrödinger*. Entonces nuestra relación de dispersión cuantizada es:

$$\left[\partial^0 \partial_0 - \partial^i \partial_i + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right] \quad (3.1.3)$$

que tal y como hemos visto es la **ecuación de Klein-Gordon**. Consecuentemente la ecuación de Klein-Gordon es la generalización relativista de la ecuación de Schrödinger más simple posible. Podemos aplicar esto a nuestro campo ϕ ya que el operador Klein-Gordon $[\partial^2 + (mc/\hbar)^2]$ es invariante Lorentz, teniendo que verificar

$$\left[\square + \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad (3.1.4)$$

que puede ser escrita como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left[\nabla^2 - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi \quad (3.1.5)$$

donde queda claro que nuestra ecuación es una ecuación de segundo orden en el tiempo y el espacio, por lo que la solución completa exige dos condiciones de contorno. La solución más general de esta ecuación es un paquete de ondas planas ϕ (siendo la onda plana ϕ_{\pm}) tal que:

$$\phi = \phi(t, \mathbf{x}) = \int d^3k \left[a_+(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t]} + a_-(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega(\mathbf{k})t]} \right] \quad (3.1.6)$$

$$\phi_{\pm} = \phi_{\mathbf{k}} \equiv a_{\pm} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega(\mathbf{k})t]} \quad (3.1.7)$$

donde $a(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$. Lógicamente las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon incluyen la onda plana tal que $\phi(x) = \phi_{\mathbf{k}}(x)$. Dado que las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon no llevan índices, sus soluciones son campos escalares o pseudo-escalares. Esto última podría hacer pensar que ϕ podría ser interpretado como la función de ondas Ψ en la mecánica cuántica no relativista, pero como $|\phi|^2$ es un invariante Lorentz y la densidad no, $|\phi|^2$ no puede ser interpretado como la densidad de probabilidad. Veamos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x) = i \int d^3k \omega(\mathbf{k}) \left[-a_+(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t]} + a_-(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega(\mathbf{k})t]} \right] \quad (3.1.8)$$

3.1.2. Corriente conservada

La corriente conservada (recordemos que $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$) de nuestro problema es

$$j^{\mu} = i \left[\phi^* \partial^{\mu} \phi - (\partial^{\mu} \phi)^* \phi \right] \quad (3.1.9)$$

Aunque inicialmente se trató de interpretar esta ecuación como la corriente de densidad de probabilidad para un partícula, este término no es siempre positivo. De hecho, esto es, en parte, lo que motivó a Dirac a la formulación de su ecuación.

3.1.3. Interacción con un potencial escalar

Podemos generalizar la ecuación de Klein-Gordon para introducir un potencial escalar. Sin embargo, la verificación del primer postulado de la relatividad especial, que exige que las leyes físicas sean igual en todo sistema de referencia, implica que la introducción de un término de interacción en la ecuación de Klein-Gordon sea tal que la ecuación sea invariante. Una manera de hacer esto se introduce un potencial escalar real $U(x)$ tal que

$$\left[(i\hbar\partial)^2 c^2 - (mc^2 + U)^2 \right] \phi = 0 \quad (3.1.10)$$

Lógicamente las soluciones no serán ondas planas, debido a la dependencia $U(x)$, aunque la corriente j^{μ} sigue siendo la misma.

3.1.4. Interacción con el campo electromagnético

3.2. Ecuación de Dirac

Desarrollada para resolver el problema de la mecánica cuántica relativista tras el fracaso de la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Dirac fue derivada por Dirac en 1928. Esta ecuación

describe la mecánica cuántica relativista para ecuaciones masivas con espín no entero. Este desarrollo fue importantísimo, ya que permitió predecir la existencia de antipartículas así como la estructura fina del hidrógeno.

3.2.1. Formulación de la Ecuación de Dirac

Dirac muy astutamente reconoció que los problemas de la ecuación de Klein-Gordon aparecían por culpa del término con la segunda derivada temporal. Eso llevo a que:

- a) La existencia de energías negativas $E < 0$.
- b) Densidad de corriente (y carga) negativa.

La propuesta de Dirac era hacer que la ecuación fuera lineal en $i\hbar\partial/\partial t$ al igual que en la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (3.2.1)$$

Además esta ecuación debía ser consistente con la relación relativista $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ y debía ser invariante bajo transformaciones de Lorentz. Para que esto último se cumpliera, debía ser lineal con $i\hbar c \nabla$ (y así compatible con que el término $i\hbar\partial/\partial t$ fuera lineal).

Definición 3.1

La ecuación más simple que sea covariante, verifique la relación de dispersión y que sea de orden lineal con el tiempo es la **la ecuación de Dirac** definida por

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = [-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2] \psi \quad (3.2.2)$$

Donde hemos definido el operador Hamiltoniano como

$$\hat{H} \equiv [-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2] = [c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + \beta mc^2] \quad (3.2.3)$$

tal que para una partícula libre $\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi} = -i\hbar \nabla$ y que cada uno de los $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y β son independientes de \mathbf{x} y t . Las relaciones y forma entre los diferentes términos α_i y β son consecuencia de la exigencia de que

$$\hat{H}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3.2.4)$$

Para que esto sea así $\boldsymbol{\alpha}$ y β deben obedecer las llamadas *relaciones de anticomutación del álgebra de Clifford* tal que

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}I \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \beta^2 = I \quad (3.2.5)$$

donde el *anticommutador*¹

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (3.2.6)$$

¹Usamos la misma notación que los corchetes de Poisson, aunque no deben confundirse.

Claramente α y β no pueden ser números. Dirac asumió que eran matrices $N \times N$. Además para que \hat{H} sea hermítico, α y β también deben serlo:

$$\alpha^\dagger = \alpha \quad \beta^\dagger = \beta \quad (3.2.7)$$

Dado que $\alpha_i^2 = \beta^2 = I$ (álgebra de Clifford) los autovalores de α_i^2 y β^2 son 1. Como los autovalores de cualquier matriz al cuadrado son el cuadrado de los autovalores, los autovalores de las matrices hermíticas α_i y β son ± 1 . Y como además $\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i$

$$\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \quad \beta = -\alpha_i \beta \alpha_i \quad (3.2.8)$$

Usando que la traza es independiente del orden de los productos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\alpha_i) &= -\text{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{Tr}(\beta^2 \alpha_i) = \text{Tr}(\alpha_i) = 0 \\ \text{Tr}(\beta) &= -\text{Tr}(\alpha_i \beta \alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i^2 \beta) = \text{Tr}(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Si asumimos que una de las 4 matrices se puede escribir en forma de las otras 3, veremos rápidamente que las relaciones del álgebra de Clifford no se pueden satisfacer. Las 4 matrices son *linealmente independientes*. En el caso de $N = 2$ hay solo 3 matrices con traza nula linealmente independiente son las matrices de Pauli, que junto con I forman el set de combinaciones lineales de matrices hermíticas 2×2 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.10)$$

por lo que no puede ser 2×2 . Cuando $N = 4$ es fácil de ver que las siguientes matrices verifican las condiciones:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

A esta representación de las matrices se le llama **representación de Dirac**. Ahora la función de ondas es un 4-vector columna $\psi(x)$ en la que cada uno de los componentes es una función de ondas:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (3.2.12)$$

que denominamos como **función de ondas de Dirac**, mientras que **espinor de Dirac** se usa para denotar una partícula que se mueve como una función de ondas tras eliminar el factor exponencial, i.e. eliminar $\exp(\pm p \cdot x/\hbar)$. Esto generaliza el concepto de que un 2-espinor en mecánica cuántica relativista con el 2-espinor de la mecánica cuántica no relativista, en la cual representa las dos posibles componentes de espín que describen una partícula de espín 1/2. Por esta razón a veces denominamos al 4-espinor de Dirac el **biespinor**. Definimos como **hermítico conjugado** de la función de ondas al término:

$$\psi^\dagger(x) = (\psi_1^\dagger(x), \psi_2^\dagger(x), \psi_3^\dagger(x), \psi_4^\dagger(x)) \quad (3.2.13)$$

3.2.2. Corriente de probabilidad

La corriente de probabilidad de densidad es:

$$j^\mu = (j^0, \mathbf{j}) \quad j^0 \equiv \psi^\dagger \psi \quad \mathbf{j} \equiv c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi \quad (3.2.14)$$

verificándose que $\partial_\mu j^\mu = 0$ y que

$$\rho = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 > 0 \quad (3.2.15)$$

definida positiva.

3.2.3. Intearcción con el campo electromagnético

3.2.4. Invariancia relativista de la ecuación de Dirac y matrices γ

Para considerar la covariancia de la ecuación de Dirac, debemos restaurar la notación relativista del espaciotiempo, i.e., debemos expresar la ecuación de Dirac en términos de x^μ y ∂_μ . Para esto lo que hacemos es definir las **matrices gamma**:

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \gamma^i \equiv \gamma^0 \alpha_i = \beta \alpha_i \quad (3.2.16)$$

que en la *representación de Dirac*

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

Es fácil de ver que las matrices gamma verifican que:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0 \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I \quad (3.2.18)$$

donde I es la matriz identidad 4×4 . Las relaciones de conmutación corresponden a aquellas propias del álgebra de Clifford. Veamos que:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (3.2.19)$$

tal que

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger \quad (3.2.20)$$

Esta sería la representación de Dirac, aunque existen varias mediadas por las matrices de transformación unitarias S . Algunas de las más interesantes son la representación chiral o de Weyl y la representación de Majorana.

Definición 3.2

La **ecuación de Dirac** se obtiene multiplicando Ec. (3.2.2) por γ_0/c :

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(x) = (i\hbar\boldsymbol{\not{D}} - mc)\gamma(x) = 0 \quad (3.2.21)$$

donde hemos usado la **notación barrada de Feynman** (*Feynman “slashed” notation*) tal que $\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu$.

Esta notación de Feynman permite simplificar mucho la notación, como la interacción de una partícula de Dirac con un campo electromagnético externo:

$$[i\hbar\not{D} - (q/c)\not{A} - mc]\psi(x) = (i\hbar\not{D} - mc)\psi(x) = 0 \quad (3.2.22)$$

donde $D^\mu \equiv \partial^\mu + i(q/\hbar c)A^\mu$. Aunque hemos dicho que la ecuación de Dirac es covariante, no hemos demostrado que lo es. Con la intención de demostrarlo, debemos construir una representación del grupo de Lorentz tal que γ^μ transforma como un cuadvectores contravariante respecto estas transformaciones. Esto nos permitirá, posteriormente, transformar el espinor de Dirac bajo transformaciones de Lorentz.

Como sabemos necesitamos encontrar una representación $S(\Lambda)$ tal que la transformación de Lorentz se pueda representar como

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.2.23)$$

donde Λ^μ_ν es la transformación pasiva de Lorentz (cambia el observador $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$). Veamos como se comporta la ecuación de Dirac cuando exigimos que esta sea covariante. Que sea covariante, en primer lugar, significa que

$$(i\hbar\gamma_\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(x') = 0 \quad (3.2.24)$$

y como $S(\Lambda)$ representa, en virtud de lo dicho antes, el grupo de Lorentz (es decir, es una matriz que representa el grupo, véase B) tal que:

$$\begin{aligned} 0 &= (i\hbar\gamma_\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(x') = (i\hbar\gamma_\mu(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu - mc)\psi'(x') \\ &= (i\hbar S(\Lambda)\gamma_\nu S(\Lambda^{-1})\partial_\nu - mc)\psi'(x') = S(\Lambda)(i\hbar\gamma_\nu\partial'_\nu - mc)S(\Lambda^{-1})\psi'(x') \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

De este modo podemos hacer actuar sobre la izquierda $S(\Lambda)^{-1}$ donde tenemos

$$(i\hbar\not{p} - mc)S(\Lambda)^{-1}\psi'(x') = (i\hbar\not{p} - mc)\psi'(x) = 0 \quad (3.2.26)$$

y que por tanto la covarianza de Lorentz exige

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) \quad (3.2.27)$$

bajo cambio en el sistema de referencia. En el caso de que queramos usar \not{D} también podremos ya que A^μ ya es un cuadvectores, igual que ∂_μ . Como sabemos $\Lambda^\mu_\nu = [\exp(-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}/\hbar)]^\mu_\nu$, y $M = L + \Sigma$ donde Σ es el generador asociado al espín intrínseco del fermión. No podemos hacer $M \rightarrow L$ en la exponencial porque la partícula, si originalmente estuviera en reposo, no obtendríamos un valor. Entonces

$$\Lambda^\mu_\nu = \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}/\hbar\right) \right]^\mu_\nu \quad S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\Sigma^{\rho\sigma}/\hbar\right) \quad (3.2.28)$$

donde $\Sigma^{\mu\nu}$ son los *generadores de las transformaciones de Lorentz que actúan en el espín intrínseco*. Como sabemos:

$$\mathbf{S}^{\text{espín}} = \pm \mathbf{S} \quad S^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \Sigma^k \quad (3.2.29)$$

donde \pm es para partículas y antipartículas. La pregunta ahora es ¿Podemos relacionar Σ con γ ? La respuesta es sí. Veamos que:

$$(I + i \frac{1}{2\hbar} \omega_{\rho\sigma} \Sigma^{\rho\sigma} + \dots) \gamma^\mu (I - i \frac{1}{2\hbar} \omega_{\kappa\tau} \Sigma^{\kappa\tau} + \dots) = (I + i \frac{1}{2\hbar} \omega_{\gamma\delta} M^{\gamma\delta} + \dots)^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.2.30)$$

y por tanto como $\omega^{\mu\nu}$ es arbitrario, se debe verificar para los términos de primer orden:

$$[\Sigma^{\rho\sigma}, \gamma_\mu] = -(M^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu = -i (g^{\rho\mu} \delta^\sigma_\nu - g^{\sigma\mu} \delta^\rho_\nu) \gamma^\nu = -i (g^{\rho\mu} \gamma^\sigma - g^{\sigma\mu} \gamma^\rho) \quad (3.2.31)$$

y además como

$$[AB, C] = ABC - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad (3.2.32)$$

se deduce que

$$[\gamma^\rho \gamma^\sigma, \gamma^\mu] = -2 (g^{\rho\mu} \gamma^\sigma - g^{\sigma\mu} \gamma^\rho) \quad (3.2.33)$$

tal que si definimos

$$\sigma^{\rho\sigma} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \quad (3.2.34)$$

vemos que podemos hacer el paralelismo

$$\Sigma^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \hbar \sigma^{\rho\sigma} \quad S(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{4} \omega_{\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma} \right) \quad (3.2.35)$$

que es la *representación de las transformaciones de Lorentz para la ecuación de Dirac*. Todavía queda construir las transformaciones de paridad y de inversión temporal para completar el grupo de Lorentz (no solo el restringido).

3.2.5. Espinor Adjunto de Dirac

Como sabemos:

$$\gamma^0 (\gamma^\mu \gamma^\nu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 (\gamma^\nu)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\nu \gamma^\mu \quad (3.2.36)$$

y definiendo $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ y $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hbar \sigma^{\mu\nu}$. Así llegamos a que

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = S(\Lambda)^{-1} \quad (3.2.37)$$

Definimos el **espinor adjunto de Dirac** como

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi(x)^\dagger \gamma^0 \quad (3.2.38)$$

donde ψ^\dagger es el *hermítico conjugado*. Este transforma como

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S(\Lambda)^{-1} \quad (3.2.39)$$

Podemos formar entonces el siguiente escalar invariante de Lorentz

$$\bar{\psi}'(x')(i\hbar\boldsymbol{\nabla}' - mc)\psi'(x') = \bar{\psi}(x)(i\hbar\boldsymbol{\nabla} - mc)\psi(x) \quad (3.2.40)$$

que es la *densidad lagrangiana* para un fermión libre tal y como vamos a ver después. Es interesante ver las relaciones entre la representación del grupo de Lorentz y la representación Dirac del grupo restringido de Lorentz. Por ejemplo, un vector contravariante que transforman con Λ y uno covariante con Λ^{-1} , mientras que $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ transforman con $S(\Lambda)$ y $S(\Lambda)^{-1}$.

3.2.6. Soluciones a la ecuación de Dirac

En un sistema de referencia que está en reposo, tal que $p^\mu = (p^0, 0)$, siendo la energía $E = mc^2$ ($p_0 = mc$) la solución de la ecuación de Dirac puede ser escrita como una combinación de las siguientes ondas planas:

$$Ae^{-imc^2t/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ae^{-imc^2t/\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ae^{imc^2t/\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ae^{imc^2t/\hbar} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.41)$$

En general se puede denotar por (A es el factor de normalización)

$$u_0^1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_0^2 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_0^1 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_0^2 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.42)$$

donde el cero abajo indica que estas soluciones solo son válidas en el sistema de reposo², mientras que el término de arriba (s de manera general) se usa para diferenciar los dos posibles estados u , donde $s = 1$ implica espín \uparrow mientras que $s = 2$ indica \downarrow (por convención). Distinguimos las notaciones u y v como los estados partícula y los estados anti-partícula. Si $\psi \propto u$ se verifica que $\hat{H}\psi = mc^2\psi$, mientras que si $\psi \propto v$ se verifica que $\hat{H}\psi = -mc^2\psi$, es decir, los estados antipartícula tienen energía negativa. Una manera de “solucionar” este problema es decir que la energía es positiva pero van hacia atrás en el tiempo. Denotamos de manera general los estados partícula por u^s y v^s donde $s = 1, 2$. Es decir, las soluciones para la ecuación de Dirac en el sistema de reposo de la partícula serán:

$$e^{-imc^2t/\hbar}u^1(0) \quad e^{-imc^2t/\hbar}u^2(0) \quad e^{imc^2t/\hbar}v^1(0) \quad e^{imc^2t/\hbar}v^2(0) \quad (3.2.43)$$

Ahora la pregunta es, ¿Cómo será la solución para otro sistema que no sea el de reposo? Pues tal y como hemos visto, ψ es covariante, por lo que en otro sistema de reposo la solución será igual salvo que hay que aplicar $\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$. El término $\Lambda^{-1}x$ transforma la exponencial mientras que $S(\Lambda)$ transforma la base espinorial.

$$e^{-ip \cdot \hbar}u^s(p) = e^{-ip \cdot \hbar}S(\Lambda)u^s(0) \quad e^{ip \cdot \hbar}v^s(p) = e^{ip \cdot \hbar}S(\Lambda)v^s(0) \quad (3.2.44)$$

Y como $S(\Lambda) = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}/\hbar) = \exp(-i\boldsymbol{\eta}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{K}_{\text{int}}/\hbar)$, habiendo que recordar que

²También se puede indicar $u^1(0), u^2(0), v^1(0)$ y $v^2(0)$.

$$K_{\text{int}}^i/\hbar = \Sigma^{0i}/\hbar = \frac{1}{2}\sigma^{0i} = \frac{i}{4}\frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{i}{2}\alpha^i \quad (3.2.45)$$

y de lo que se deduce, usando $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}I$ y $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$, que

$$S(\Lambda) = \exp(\eta \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\alpha}/2) = \sum_{j=0}^{\infty} (1/j!)(\eta/2)^j (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\alpha})^j \quad (3.2.46)$$

que podemos separar en términos pares e impares, tal que:

$$S(\Lambda) = I \cosh(\eta/2) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \sinh(\eta/2) = \cosh(\eta/2) [I + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \tanh(\eta/2)] \quad (3.2.47)$$

y por tanto

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \left[I + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \frac{|\mathbf{p}|c}{E + mc^2} \right] = \frac{(p^0 + mc)I + (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} = \frac{(\not{p}\gamma^0 + mc)}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} \quad (3.2.48)$$

donde hemos usado que $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}\gamma^0$ y que $\not{p}\gamma^0 = p^0I + p^i\alpha^i$ y por supuesto que

$$\cosh(\eta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma + 1)} \quad \tanh(\eta/2) = \frac{\beta\gamma}{\gamma + 1} \quad (3.2.49)$$

tal que

$$\begin{aligned} u^s(p) &= S(\Lambda)u^s(0) = A \frac{\not{p} + mc}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} \begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\ v^s(p) &= S(\Lambda)v^s(0) = A \frac{-\not{p} + mc}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

tal que

$$\phi_1 = \chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.51)$$

Como tenemos que

$$\not{p}^2 = \not{p}\not{p} = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \not{p}^2 - m^2c^2 = 0 \quad (3.2.52)$$

y por tanto

$$(\not{p} - mc)u^s(p) = 0 \quad (\not{p} + mc)v^s(p) = 0 \quad (3.2.53)$$

Debido a esto es obvio que los valores de $u^s(p)$ y $v^s(p)$ son soluciones de la ecuación de Dirac:

$$\begin{aligned} (i\hbar\not{\partial} - mc)e^{-ipx/\hbar}u^s(p) &= (\not{p} - mc)e^{-ipx/\hbar}u^s(p) = 0 \\ (i\hbar\not{\partial} - mc)e^{ipx/\hbar}v^s(p) &= -(\not{p} + mc)e^{ipx/\hbar}v^s(p) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

i aplicamos los operadores espín $s_z = (\hbar/2)\sigma_z$ (suponiendo que el eje z es aquel en el que se encuentra) tenemos que $s_z\phi_{1,2} = \hbar m_s\phi_{1,2}$ y $s_z\chi_{1,2} = \hbar m_s\chi_{1,2}$ donde m_1 es positivo y m_2 negativo (en el caso de electrones sería $+1/2$ y si m_2 sería $-1/2$). Veamos que los espinores adjuntos son:

$$\bar{u}^s(p) = A^*(\phi_s^\dagger 0) \frac{(\not{p}^\dagger + mc) \gamma^0}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} = A^*(\phi_s^\dagger 0) \frac{\gamma^0 (\not{p}^\dagger + mc)}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} \quad (3.2.55)$$

$$\bar{v}^s(p) = A^*(0 \chi_s^\dagger) \frac{(-\not{p}^\dagger + mc) \gamma^0}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} = A^*(0 \chi_s^\dagger) \frac{\gamma^0 (-\not{p}^\dagger + mc)}{\sqrt{2mc(p^0 + mc)}} \quad (3.2.56)$$

La elección de $A = \sqrt{2mc}$ es tal que:

$$\bar{u}^s(p)u^{s'}(p) = 2mc\delta^{ss'} \quad \bar{v}^s(p)v^{s'}(p) = -2mc\delta^{ss'} \quad (3.2.57)$$

Es obvio que $\bar{v}^s(p)u^{s'}(p)$ y $\bar{u}^s(p)v^{s'}(p)$ contienen los términos $(-\not{p} + mc)(\not{p} + mc) = 0$ y $(\not{p} + mc)(-\not{p} + mc) = 0$ respectivamente. Esto origina una ortogonalidad entre los términos u y v para las ondas planas espinoriales

$$\bar{v}^s(p)u^{s'}(p) = \bar{u}^s(p)v^{s'}(p) = 0 \quad \forall s, s' \quad (3.2.58)$$

$$u^s(p)^\dagger u^{s'}(p) = v^s(p)^\dagger v^{s'}(p) = (2E/c)\delta^{ss'} \quad (3.2.59)$$

3.2.7. Completitud y proyectores

La ortogonalidad de las soluciones positivas y negativas de las ondas de espinor implican que *los proyectores de energía postivia y negativa*

$$P_\pm(p) = \frac{\pm\not{p} + mc}{2mc} \quad (3.2.60)$$

Además =

$$p^\mu = \frac{1}{2}\bar{u}^s(p)\gamma^\mu u^s(p) = \frac{1}{2}\bar{v}^s(p)\gamma^\mu v^s(p) \quad (3.2.61)$$

3.2.8. Vector Espín

Introducimos la matriz γ^5 definida como

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv -(i/4!)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (3.2.62)$$

Verificando las siguientes propiedades de conmutación con el resto de matrices

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (\gamma^5)^2 = I \quad [\gamma^5, \sigma_{\mu\nu}] = 0 \quad \gamma^5\sigma^{\mu\nu} = (i/2)e^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} \quad (3.2.63)$$

En la representación de dirac:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.64)$$

tal que $\gamma^5 = \gamma^{5\dagger}$. Además $\gamma'^5 = \det(\Lambda)\gamma^5$, es decir es un pseudo-tensor. Además sabemos que

$$S^i = -\frac{\hbar}{2}\gamma_5\gamma^i \quad (3.2.65)$$

Capítulo 4

Teoría Cuántica de Campos

En el límite macroscópico, en el cual la acción es mucho más grande que \hbar , la mecánica cuántica no relativista se reduce a la mecánica clásica Newtoniana. La extensión relativista de la mecánica cuántica describe el comportamiento de una partícula cuántica relativista, interaccionando con un campo externo. Cuando existe la posibilidad de que se creen partículas o se aniquilen, entonces llegamos a una teoría cuántica de campos.

En este tema vamos a introducir el concepto de que las partículas subatómicas no son más que fluctuaciones de un campo en el espacio. Estas fluctuaciones cuánticas se dan sobre un estado estable o metaestable que llamamos el vacío. Nuestra teoría cuántica de campos describe como estas fluctuaciones interactúan entre sí.

4.1. Introducción

Es interesante introducir primero una motivación para la teoría cuántica de campos en términos que nos resulten familiares, antes de introducirnos de lleno en el formalismo. Así pues, primero trazaremos una analogía con el formalismo de los modos normales discutido en y generalizar el caso para un sistema que sea invariante de Poincaré.

4.1.1. Cuantización de los Modos Normales

Consideremos un sistema clásico con N grados de libertad y un punto de equilibrio estático. Si restringimos el estudio a pequeñas excitaciones/oscilaciones sobre ese equilibrio, entonces podemos entender el sistema como un conjunto de N osciladores armónicos/modos normales con frecuencias angulares ω_i .

Si aumentamos el tamaño de las excitaciones alrededor de este punto de equilibrio, empezaremos a encontrar desviaciones del comportamiento cuadrático que se pueden caracterizar como constantes de acoplamiento pequeñas entre estos modos normales y se puede estudiar con una teoría de perturbaciones. Como sabemos el hamiltoniano en este caso viene dado por

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left(\pi_j^2 + \omega_j^2 \zeta_j^2 \right) \quad (4.1.1)$$

Cuantizar el sistema implica pasar a

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}_j^2 + \omega_j^2 \hat{\zeta}_j^2 \right) \quad (4.1.2)$$

donde $\hat{\zeta}$, $\hat{\pi}$ y ω_j son el operador hermítico coordenada del modo normal, el operador hermítico momento conjugado del modo normal, y la frecuencia angular del modo normal i -ésimo. En la representación más típica de la mecánica cuántica los operadores son $\hat{\zeta} \rightarrow \zeta$ y $\hat{\pi} \rightarrow -i\hbar\partial/\partial\zeta$. En esta representación se verifica la cuantización canónica

$$[\hat{\zeta}_j(t), \hat{\zeta}_k(t)] = [\hat{\pi}_j(t), \hat{\pi}_k(t)] = 0 \quad [\hat{\zeta}_j(t), \pi_k(t)] = i\hbar\delta_{jk} \quad (4.1.3)$$

donde $\hat{\zeta}_j(t)$ y $\hat{\pi}_j(t)$ son los operadores en la representación de Heisenberg. Podemos considerar la representación de Schrödinger (los operadores no dependen del tiempo):

$$\hat{\zeta}_j \equiv \hat{\zeta}(t_0) \quad \hat{\pi}_j \equiv \hat{\pi}(t_0) \quad (4.1.4)$$

de tal modo que el operador coordenada generalizada tiene la siguiente ecuación generalizada $\hat{\zeta}_j |\zeta_j\rangle = \zeta_j |\zeta_j\rangle$, al igual que $\hat{\pi}_j |\pi_j\rangle = \pi_j |\pi_j\rangle$. Dado que todas las coordenadas y momentos canónicos conmutan, podemos usar estos estados como una base para nuestro espacio de Hilbert asociado a los modos normales $|\zeta\rangle \equiv |\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n\rangle$ y $|\pi\rangle \equiv |\pi_1\pi_2\ldots\pi_n\rangle$. Así pues

$$\begin{aligned} \langle \zeta | \zeta' \rangle &= \delta^n(\zeta - \zeta') & \int d^n \zeta |\zeta\rangle \langle \zeta'| &= I \\ \langle \pi | \pi' \rangle &= \delta^n(\pi - \pi') & \int d^n \pi |\pi\rangle \langle \pi'| &= I \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Es importante ver que esto es válido para *cualquier* sistema con n coordenadas generalizadas, no solo un conjunto de osciladores armónicos. Los llamados **operadores escalera** nos permiten reformular el hamiltoniano para un oscilador armónico cuántico:

$$\hat{a}_j \equiv \sqrt{\frac{\omega_j}{2\hbar}} \left(\hat{\zeta}_j + \frac{i}{\omega_j} \hat{\pi}_j \right) \quad \hat{a}_j^\dagger \equiv \sqrt{\frac{\omega_j}{2\hbar}} \left(\hat{\zeta}_j - \frac{i}{\omega_j} \hat{\pi}_j \right) \quad (4.1.6)$$

tal que

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk} I \quad (4.1.7)$$

aunque en general no se escribe el operador identidad. Usando estos operadores podemos escribir el hamiltoniano como

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) \equiv \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j \left(\hat{N}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (4.1.8)$$

Al operador $\hat{N}_j \equiv \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ se le llama operador número.

4.2. Partículas Escalares

4.2.1. Campo Escalar Libre

4.2.2. Teorema de Wick

4.3. Fermiones

4.3.1. Operadores de creación y destrucción

4.3.2. Espacio de Fock

4.3.3. Cuantización Canónica para Fermiones de Dirac

4.4. Fotones

4.4.1. Cuantización Canónica para Fotones

4.4.2. Espacio de Fock para los fotones

4.4.3. Gauge

Capítulo 5

Interacción entre Campos Cuánticos

5.1. Sección Eficaz y Tasa de Decaimiento

5.2. Diagramas de Feynman

Capítulo 6

Ejercicios y Soluciones

6.1. Interacción entre Campos Cuánticos

Ejercicio 6.1

Considera el decaimiento $\mathcal{P}_A \rightarrow \mathcal{P}_1(p_1)\mathcal{P}(p_2)$ donde la partícula \mathcal{P}_A está inicialmente en reposo y $m_1 = m_2 = m$. Demuestre que, después de evaluar parcialmente las integrales del espacio de fases, la tasa de desintegración puede ser escrita como

$$\Gamma = \frac{\sqrt{m_A^2 - 4m^2}}{64\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d^2\Omega \quad (6.1.1)$$

Solución 6.1

Como sabemos la tasa de decaimiento de la desintegración $i \rightarrow f$ viene dada por la ecuación

$$\Gamma = \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_F |\mathcal{A}_{fi}|^2$$

Como sabemos el término $|\mathcal{A}_{fi}|^2$ encierra toda la física de la teoría de cuántica del sistema, ya que $\int d\Pi_F$ no es más que la integral en el espacio de fases del sistema final. Para nuestro caso la integral en el espacio de fases es:

$$\int d\Pi_F = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_1^3}{2E_1} \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2^3}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A - p_1 - p_2)$$

Como nos dicen que el sistema inicial está en reposo tenemos que

$$k_A = (m_A, 0) \quad p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1) \quad p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$$

Debido a la delta de Dirac se impone la conservación de la energía y el momento. La conservación del momento obliga a que $\mathbf{k}_A = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, y como $\mathbf{k}_A = 0$ se debe verificar que

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

De esta forma hemos reducido las 6 variables de integración en 3:

$$\int d\Pi_F = \int \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d\mathbf{p}_1^3}{4E_1E_2} (2\pi)^4 \delta(E_A - E_1 - E_2)$$

la delta de Dirac restante representa la *conservación de la energía*, obligando a que $E_A = E_1 + E_2$, y como la partícula A está en reposo $E_A = m_A$ tenemos que:

$$m_A = \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2} + \sqrt{m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2}$$

y como además $m_1 = m_2 = m$ y $|\mathbf{p}_1|^2 = |\mathbf{p}_2|^2 = |\mathbf{p}|^2$ se verifica que

$$m_A = 2\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$$

de tal modo que

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{m_A^2/4 - m^2}$$

Entonces haciendo un sencillo cambio de variables en la delta de Dirac tenemos que

$$\delta(E_A - E_1 - E_2) = \delta\left(m_A - 2\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}\right)$$

y como sabemos

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad f(x_0) = 0$$

tal que en nuestro caso

$$f'(x) = -\frac{2|\mathbf{p}|}{\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}} \implies f'(x_0) = -\frac{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}}{m_A}$$

donde hemos usado que $|\mathbf{p}|_0 = \sqrt{m_A^2/4 - m^2}$ lo cual se ha deducido antes. Consecuentemente esto se convierte en:

$$\delta(E_A - E_1 - E_2) = \frac{m_A}{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}} \delta(|\mathbf{p}| - \sqrt{m_A^2/4 - m^2})$$

Si reescribimos la integral en función del módulo y de la variable angular de $|\mathbf{p}|$ tenemos que

$$\int d\Pi_F = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_A}{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}} \int \frac{|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\Omega}{4E_1E_2} \delta(|\mathbf{p}| - \sqrt{m_A^2/4 - m^2})$$

De esta forma la última delta de Dirac reduce las variables de integración de 3 a 2, tal que:

$$\int d\Pi_F = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_A}{4\sqrt{m_A^2/4 - m^2}} \frac{1}{m_A^2} (m_A^2/4 - m^2) \int d\Omega$$

Reescribimos como:

$$\int d\Pi_F = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{m_A^2 - 4m^2}}{m_A} \int d\Omega$$

De lo que se deduce que:

$$\Gamma = \frac{1}{2m_A} \int d\Pi_F |\mathcal{A}_{fi}|^2 = \frac{\sqrt{m_A^2 - 4m^2}}{64\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d\Omega$$

tal y como queríamos demostrar.

Ejercicio 6.2

Verifica la siguiente igualdad:

$$T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = N \left\{ \Psi(x)\bar{\Psi}(y) + \overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)} \right\}$$

para el caso donde Ψ y $\bar{\Psi}$ son campos fermiónicos.

Solución 6.2

Para demostrar la igualdad vamos a seguir los siguientes pasos:

1. Desarrollamos la notación que vamos a usar.
2. Definimos $T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$.
3. Definimos $N(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$.
4. Definimos $\overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)}$.
5. Desarrollamos el término $T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$ para relacionarlo con la contracción y el producto ordenado normal.

Para definir el producto ordenado temporal y normal tenemos primero que describir los campos Ψ y $\bar{\Psi}$ en función de los operadores de creación y destrucción. Dado que hay un montón de términos encerrados en los campos, nosotros vamos a usar una notación que reduzca estas contribuciones:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{r=1}^2 \Psi_b^{r+} + \Psi_c^{r-} & \Psi_b^{r+} &\propto b_{\mathbf{p}}^r & \Psi_c^{r-} &\propto c_{\mathbf{p}}^{r\dagger} \\ \bar{\Psi} &= \sum_{r=1}^2 \Psi_b^{r-} + \Psi_c^{r+} & \Psi_b^{r-} &\propto b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} & \Psi_c^{r+} &\propto c_{\mathbf{p}}^r \end{aligned}$$

De esta forma simplificaremos mucho los cálculos. Además como estamos trabajando con fermiones las reglas de conmutación implican anti-conmutadores:

$$\{\Psi_b^{r+}, \Psi_b^{s-}\} = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad \{\Psi_c^{r+}, \Psi_c^{s-}\} = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

siendo el resto de las anti-conmutaciones cero. Así tenemos que

$$\{\Psi_b^{r\pm}, \Psi_c^{s\pm}\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} = -\Psi_c^{s+} \Psi_b^{r+}$$

Entonces el término $T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$, que es el **producto ordenado temporal**, tal que

$$T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = \begin{cases} \Psi(x)\bar{\Psi}(y) & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\bar{\Psi}(y)\Psi(x) & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

El factor menos se debe a que estamos trabajando con fermiones. Es decir:

$$\text{Si } x^0 > y^0 : \quad T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = \sum_{r,s} \left(\Psi_b^{r+} \Psi_b^{s-} + \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-} \Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+} \right)$$

$$\text{Si } y^0 > x^0 : \quad T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = - \sum_{r,s} \left(\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_c^{s+} \Psi_b^{r+} + \Psi_b^{s-} \Psi_c^{r-} + \Psi_c^{s+} \Psi_c^{r-} \right)$$

El término $N(\Psi(x)\bar{\Psi}(y))$ es el **producto ordenado normal**, y viene dado por

$$\begin{aligned} N(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) &= N\left(\sum_{r,s} (\Psi_b^{r+} + \Psi_c^{r-}) (\Psi_b^{s-} + \Psi_c^{s+})\right) = \\ &= N\left(\sum_{r,s} (\Psi_b^{r+} \Psi_b^{s-} + \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-} \Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+})\right) \end{aligned}$$

Usando que $N(bc^\dagger) = -c^\dagger b$ y $N(cb^\dagger) = -b^\dagger c$, tenemos que:

$$N(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)) = \sum_{r,s} -\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-} \Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+}$$

Ahora definimos la **contracción** $\overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)}$. Como sabemos, para los fermiones la contracción sigue la siguiente forma

$$\overline{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)} = \begin{cases} \langle 0 | \Psi(x), \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle & \text{si } x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \bar{\Psi}(y), \Psi(x) | 0 \rangle & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

apareciendo el menos debido a que en los campos fermiónicos (a diferencia de los bosónicos) las permutaciones se hacen a través de los anticonmutadores. Veamos entonces que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi(x), \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle &= \sum_{r,s} \langle 0 | \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) | 0 \rangle \\ &= \sum_{r,s} \langle 0 | \{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \} | 0 \rangle \\ &= \sum_{r,s} \{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \} \end{aligned}$$

Ya que como sabemos $\{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \}$ es un resultado numérico. De manera completamente análoga:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \bar{\Psi}(y), \Psi(x) | 0 \rangle &= \sum_{r,s} \langle 0 | \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) | 0 \rangle \\
&= \sum_{r,s} \langle 0 | \{ \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) \} | 0 \rangle \\
&= \sum_{r,s} \{ \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) \}
\end{aligned}$$

Entonces la contracción es:

$$\overline{\Psi(x) \bar{\Psi}(y)} = \begin{cases} \sum_{r,s} \{ \Psi_b^{r+}(x) \Psi_b^{s-}(y) \} & \text{si } x^0 > y^0 \\ - \sum_{r,s} \{ \Psi_c^{r+}(y) \Psi_c^{s-}(x) \} & \text{si } y^0 > x^0 \end{cases}$$

Ahora reescribimos $T(\Psi(x) \bar{\Psi}(y))$. Si $x^0 > y^0$

$$\begin{aligned}
T(\Psi(x) \bar{\Psi}(y)) &= \sum_{r,s} (\Psi_b^{r+} \Psi_b^{s-} + \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-} \Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+}) = \\
&= \sum_{r,s} (\{ \Psi_b^{r+}, \Psi_b^{s-} \} - \Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_b^{r+} \Psi_c^{s+} + \Psi_c^{r-} \Psi_b^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+}) \\
&= N(\Psi(x), \bar{\Psi}(y)) + \overline{\Psi(x) \bar{\Psi}(y)}
\end{aligned}$$

De la misma manera, $T(\Psi(x) \bar{\Psi}(y))$ si $y^0 > x^0$ también verifica la relación

$$\begin{aligned}
T(\Psi(x) \bar{\Psi}(y)) &= - \sum_{r,s} (\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_c^{s+} \Psi_b^{r+} + \Psi_b^{s+} \Psi_c^{r-} + \Psi_c^{s+} \Psi_c^{r-}) \\
&= \sum_{r,s} (-\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} - \Psi_c^{r+} \Psi_b^{s+} - \Psi_b^{r-} \Psi_c^{s-} - \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+}) \\
&= \sum_{r,s} (-\Psi_b^{s-} \Psi_b^{r+} + \Psi_c^{r+} \Psi_b^{s+} + \Psi_b^{r-} \Psi_c^{s-} + \Psi_c^{r-} \Psi_c^{s+} - \{ \Psi_c^{r+}, \Psi_c^{s-} \}) \\
&= N(\Psi(x), \bar{\Psi}(y)) + \overline{\Psi(x) \bar{\Psi}(y)}
\end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar. Cabe decir que para esta última relación hemos aplicado que

$$\sum_{r,s} (\Psi_c^{r+} \Psi_b^{s+} + \Psi_b^{r-} \Psi_c^{s-}) = - \sum_{r,s} (\Psi_c^{r+} \Psi_b^{s+} + \Psi_b^{r-} \Psi_c^{s-})$$

Ejercicio 6.3

Calcula la contribución principal de $\langle f | S - 1 | i \rangle$ en la perturbación teórica por el proceso de difusión $\psi \bar{\psi} \rightarrow \psi \bar{\psi}$ en la teoría de Yukawa usando que viene de:

$$N [\bar{\psi}_I(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}_I(x_2) \psi(x_2)] \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} \quad (6.1.2)$$

y compárala con los resultados vistos en el problema P6. En particular, muestra los dife-

rentes signos de las diferentes contribuciones de cada uno de los términos que pueden ser expresadas en el diagrama de Feynman.

Solución 6.3

Primero tenemos que expresar S en función de valores conocidos.:

$$S = T \left[\exp \left(i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x \right) \right] \quad (6.1.3)$$

Como sabemos la teoría de Yukawa $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda \bar{\Psi} \Psi \phi$. Entonces el término principal de $S - 1$ es

$$S - 1 \approx T \left[\frac{(i\lambda)^2}{2} \iint \bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \phi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \phi(x_2) dx_1 dx_2 \right]$$

Cuando apliquemos $S - 1$ sobre los estados inicial $|i\rangle$ y final $\langle f|$, como no hay bosones ϕ en ambas situaciones, la única posibilidad de que no sea nulo es que los términos bosónicos se contraigan $\phi(x) \phi(y)$. Además, como tenemos fermiones con un momento inicial y final diferente lo los términos de contracción Ψ y $\bar{\Psi}$ dan como resultado cero. Consecuentemente tenemos que el único término que contribuye es:

$$\left\langle f \left| \frac{(i\lambda)^2}{2} \iint N \left[\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \right] \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} d^4x_1 d^4x_2 \right| i \right\rangle$$

Podemos sacar la integral en el espacio fuera de tal modo que:

$$\frac{(i\lambda)^2}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 \left\langle f \left| N \left[\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \right] \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} \right| i \right\rangle$$

donde los estados final e inicial se definen, en un scattering partícula-antipartícula como:

$$\langle f| = -\sqrt{4E_{\mathbf{q}'} E_{\mathbf{p}'}} \langle 0| b_{\mathbf{p}'}^{r'} c_{\mathbf{q}'}^{s'} \quad |i\rangle = b_{\mathbf{p}}^{\dagger r} c_{\mathbf{q}}^{\dagger s} |0\rangle \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} \quad (6.1.4)$$

El producto normal $N \left[\bar{\Psi}(x_1) \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(x_2) \right]$ contiene 16 términos, pero solo unos pocos de ellos generan valores no nulos, ya que

$$\Psi \propto b_{\mathbf{p}} + c_{\mathbf{p}}^{\dagger} \quad \bar{\Psi} \propto b_{\mathbf{p}}^{\dagger} + c_{\mathbf{p}}$$

Solo existen 4 términos que no se hacen nulos. Estos son:

$$\begin{array}{cc} N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^{\dagger}}] & N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^{\dagger}}] \\ N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^{\dagger}} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] & N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^{\dagger}} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^{\dagger}} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] \end{array}$$

Podemos ver que de estos 4, solo hay dos términos diferentes, ya que son simétricos bajo $x_1 \leftrightarrow x_2$. Así:

$$N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^\dagger} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] \equiv N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger}] = -b_1^\dagger c_2^\dagger c_1 b_2 \quad (6.1.5)$$

$$N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{c_1} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{b_2^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger}] \equiv N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^\dagger} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] = b_1^\dagger c_1^\dagger c_2 b_2 \quad (6.1.6)$$

Entonces tenemos que la contribución principal depende de dos términos

$$\langle f | S - 1 | i \rangle \approx (i\lambda)^2 \iint (I + H) \overline{\phi(x_1)} \phi(x_2) d^4x_1 d^4x_2$$

Veamos cada término por separado. Escribimos los campos explícitamente

$$\Psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}} \left[b_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) e^{+ipx} \right] \quad (6.1.7)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}}} \left[c_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(\mathbf{p}) e^{+ipx} \right] \quad (6.1.8)$$

Y ahora calculamos cada uno de los términos I y H por separado. El primero lo relacionamos con 6.1.5 y el segundo con 6.1.6.

- Para calcular I lo primero que tenemos que hacer es coger los términos destrucción y los aplicamos sobre los términos creación del término $|i\rangle$. Así:

$$\begin{aligned} N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_1)}_{b_1} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger}] |i\rangle &= - \sum_{m,n} \iint \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6} \frac{e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2}}{\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}} [\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \cdot u^m(\mathbf{k}_1)] \\ &\times [\underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger} \cdot \bar{v}^n(\mathbf{k}_2)] \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{k}_1}^m c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{q}}^{r\dagger} |0\rangle = \\ &= e^{-ipx_1 - iqx_2} [\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \cdot u^s(\mathbf{p})] [\underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger} \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})] |0\rangle \end{aligned}$$

apareciendo el signo menos debido a que $c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} = -b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{k}_2}^n$. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}'}^{s'} c_{\mathbf{q}'}^{r'} [\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \cdot u^s(\mathbf{p})] [\underbrace{\Psi(x_2)}_{c_2^\dagger} \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})] | 0 \rangle \\ = - \left[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p}) \right] \left[v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q}) \right] e^{ix_1 p'} e^{ix_2 q'} \end{aligned}$$

Todo junto hace que:

$$I = - \left[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p}) \right] \left[v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q}) \right] e^{ix_1(p-p')} e^{ix_2(q-q')}$$

- Para calcular H tenemos que replicar paso por paso el apartado anterior, de tal modo que

$$\begin{aligned}
 N[\underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_1)}_{c_1^\dagger} \underbrace{\bar{\Psi}(x_2)}_{c_2} \underbrace{\Psi(x_2)}_{b_2}] |i\rangle &= \underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_1^\dagger} \sum_{m,n} \iint \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6} \frac{e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2}}{\sqrt{4E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2}}} \\
 &\times [\bar{v}^n(\mathbf{k}_2) \cdot u^m(\mathbf{k}_1)] \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{k}_1}^m c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{q}}^{r\dagger} |0\rangle = \\
 &= - \underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_1^\dagger} e^{-ipx_2 - iqx_2} [\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})] |0\rangle
 \end{aligned}$$

apareciendo el signo menos debido a que $c_{\mathbf{k}_2}^n b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} = -b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} c_{\mathbf{k}_2}^n$. Ahora tenemos que

$$\langle 0 | \sqrt{4E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}^{s'} c_{\mathbf{q}'}^{r'} \underbrace{\bar{\Psi}(x_1)}_{b_1^\dagger} \underbrace{\Psi(x_2)}_{c_1^\dagger} |0\rangle = [\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] e^{x_1(p'+q')}$$

Todo junto hace que:

$$H = [\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})] [\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] e^{ix_1(p+q)} e^{ix_2(p'+q')}$$

El resto del cálculo es muy sencillo. Teniendo en cuenta que:

$$\overline{\phi(x_1)} \phi(x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

el valor de la primera contribución de $\langle f | S - 1 | i \rangle$ es:

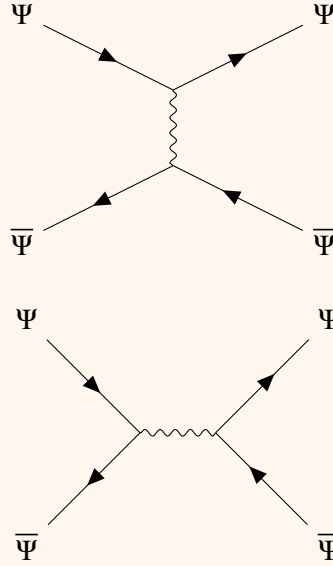
$$\begin{aligned}
 \langle f | S - 1 | i \rangle &\approx (i\lambda)^2 \iiint \frac{d^4x_1 d^4x_2 d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} [I + H] = \\
 &= (i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \\
 &\times \left[-[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p})] [v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})] \delta(k+p-p') \delta(k+q-q') \right. \\
 &\left. + [\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})] [\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] \delta(k+p'+q') \delta(k-p-q) \right]
 \end{aligned}$$

Llegando finalmente a la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
 \langle f | S - 1 | i \rangle &\approx (i\lambda)^2 \left\{ -\frac{[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p})] [v^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})]}{(p-p')^2 - \mu^2} \right. \\
 &\left. + \frac{[\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})] [\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] }{(p+q)^2 - \mu^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Ahora nos pide que la comparemos con dos casos: aquella obtenida en el ejercicio 6 y según los diagramas de Feynman. La diferencia con el ejercicio 6 es clara: ahora aparecen

términos espinoriales y además un signo menos delante del primer término. Los términos espinoriales son evidentes, ya que ahora estamos trabajando con fermiones y no con bosones, mientras que el signo menos aparece porque ahora las conmutaciones se hace a través del anti-conmutador. El cálculo a través del diagrama de Feynman de esta primera contribución coincide con el resultado obtenido numéricamente, siendo el primer término el que se debe a la dispersión elástica y el según debido a la desintegración de las partículas:



$$\sim -(i\lambda)^2 \frac{[\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot u^s(\mathbf{p})][\bar{v}^{r'}(\mathbf{q}') \cdot \bar{v}^r(\mathbf{q})]}{(p-p')^2 - \mu^2}$$

$$\sim (i\lambda)^2 \frac{[\bar{v}^r(\mathbf{q}) \cdot u^s(\mathbf{p})][\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}') \cdot v^{r'}(\mathbf{q}')] }{(p+q)^2 - \mu^2}$$

Ejercicio 6.4

Muestra que \mathcal{L}_{QED} es invariante bajo las transformaciones de Gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad \Psi_f \rightarrow e^{ieq_f \lambda} \Psi_f$$

y deduce que las ecuaciones del movimiento.

Solución 6.4

La lagrangiana de la electrodinámica cuántica (QED) está dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \sum_f \bar{\Psi}_f (i\not{D} - m_f) \Psi_f$$

donde Ψ_f es el campo fermiónico también denotado directamente por Ψ . Además tenemos que

- $\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu \equiv \gamma^\mu \partial_\mu - ieq_f \gamma^\mu A_\mu$ que es la derivada covariante.
- $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ que es el tensor de campo electromagnético.

Queremos verificar que \mathcal{L}_{QED} es invariante bajo las transformaciones de gauge:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

$$\Psi_f \rightarrow e^{ieq_f \lambda} \Psi_f$$

donde λ es una función escalar arbitraria. La primera parte del lagrangiano solo puede ser alterado bajo la transformación de gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, ya que no depende de Ψ_f . Entonces, bajo dicha transformación, nuestro tensor campo electromagnético

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \lambda) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + (\partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda) = F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

El segundo término depende tanto de A_μ como de Ψ_f , por lo que hay que considerar ambas simultáneamente. Veamos que, bajo la segunda transformación, el campo y anti-campo transforman como

$$\begin{aligned} \Psi_f &\rightarrow e^{ieq_f \lambda} \Psi_f, \\ \bar{\Psi}_f &\rightarrow e^{-ieq_f \lambda} \bar{\Psi}_f. \end{aligned}$$

De esto se deduce que bajo dicha transformación $\bar{\Psi}_f m \Psi_f \rightarrow \bar{\Psi}_f m \Psi_f$ ya que las fases se cancelan entre sí. La parte menos trivial:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi_f &\rightarrow \partial_\mu (e^{ieq_f \lambda} \Psi_f) - ieq_f A_\mu e^{ieq_f \lambda} \Psi_f - ieq_f (\partial_\mu \lambda) e^{ieq_f \lambda} \Psi_f \\ &\quad e^{ieq_f \lambda} \partial_\mu (\Psi_f) - ieq_f A_\mu e^{ieq_f \lambda} \Psi_f \end{aligned}$$

donde hemos derivado el producto, cancelándose los términos con $\partial_\mu \lambda$. Entonces al aplicar la fase $e^{-ieq_f \lambda}$ del $\bar{\Psi}_f$ y al no interaccionar con γ^μ , tenemos que, bajo dichas transformaciones de Gauge

$$\bar{\Psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi_f \rightarrow \bar{\Psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi_f, \quad (6.1.9)$$

Una vez hemos demostrado que $\mathcal{L}_{\text{QED'}}$ es invariante bajo transformaciones Gauge, ahora tenemos que hallar las ecuaciones del movimiento. Las ecuaciones del movimiento las obtenemos al hacer:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \longrightarrow -\partial_\mu F^{\mu\nu} + eq_f \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = 0 \quad (6.1.10)$$

Y al hacer:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = 0 \longrightarrow (i\not{D} - m) \Psi_f = 0 \quad (6.1.11)$$

si aplicáramos las leyes de Euler-Lagrange para Ψ_f obtendríamos la misma ecuación que la anterior, solo que de otra forma. Consecuentemente las ecuaciones del movimiento de la QED son:

$$(i\not{D} - m) \Psi = 0 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = qe \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \quad (6.1.12)$$

Ejercicio 6.5

Verifica las siguientes identidades de la matriz γ^5 tal que

$$\text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (6.1.13)$$

Solución 6.5

Para resolver este ejercicio tendremos que usar que la traza verifica que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ y que además $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

a) Para esto aplicamos simplemente que

$$\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3] = \frac{i}{2} \text{Tr}[\{\gamma^1\gamma^2, \gamma^3\gamma^4\}] = \frac{i}{4} \text{Tr}[\{\{\gamma^1, \gamma^2\}, \{\gamma^3, \gamma^4\}\}]$$

y como sabemos que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$, todos los términos del interior son cero al verificar que $\mu \neq \nu$. La traza de la matriz es nula, por lo que efectivamente se verifica que $\text{Tr}[\gamma^5] = 0$.

b) La demostración de este también es sencilla. Como $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, tenemos que

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\mu]$$

Como $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$, es sencillo ver que tenemos el mismo valor a ambos lados. De este modo tenemos que

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5] = -\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5]$$

Y por tanto:

$$2 \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5] = 0 \Rightarrow \text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5] = 0$$

tal y como queríamos demostrar.

c) Este es un poco más complicado, por lo que lo haremos cualitativamente. El punto principal es que cuando 2 o más índices están repetidos, podremos hacer el producto directamente tal que $\gamma^\kappa\gamma^\kappa = \frac{1}{2}\eta^{\kappa\kappa}\mathbf{I}$, de tal modo que en ese caso podemos aplicar la demostración para que sea cero. Consecuentemente la única posibilidad de que no se anule es que todos los índices μ, ν, σ, ρ sean diferentes. Si son diferentes, entonces siempre podemos intercambiarlos de tal manera que formen una γ^5 . Cada permutación nos lleva a la aparición de un -1 , por lo que si n es el número de permutaciones:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = (-1)^n\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (-1)^n(-i)\gamma^5$$

La expresión de las permutaciones y la condición de que solo sea no nula cuando los índices sean diferentes se expresa directamente usando la levi-civita de 4 dimensiones. Como además $\gamma^5\gamma^5 = 1$ y $\text{Tr}(1) = 4$, tenemos que:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Ejercicio 6.6

Demuestra que $(p \cdot \sigma)(p \cdot \overline{\sigma}) = m^2$ y úsalo para demostrar que los espinores satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0$$

Solución 6.6

La primera parte nos pide demostrar que $(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = m^2$. Para esto vemos que

$$p \cdot \sigma = p^0 1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad p \cdot \bar{\sigma} = p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Que no son más que matrices (lógicamente p^0 está multiplicado por la matriz identidad). Entonces:

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = (p^0)^2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 + p^0 \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} p^0$$

Y como p^0 va con la matriz identidad los dos últimos términos se cancelan entre sí, obteniendo que

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = (p^0)^2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2$$

Y debido a las propiedades de las matrices de Pauli $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{p}^2$, tal que

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

Tal y como queríamos demostrar. Para la segunda parte del ejercicio tenemos que usar que $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$. Como además:

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \quad v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

Y usando que

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que:

$$\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \bar{\sigma}^\mu \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} \quad \gamma^\mu v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\sigma^\mu \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \bar{\sigma}^\mu \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix}$$

Para la primera ecuación:

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (p \cdot \sigma) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ (p \cdot \bar{\sigma}) \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ m \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix}$$

Que como podemos ver:

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} - m \right) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \left(\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \sigma} - m \right) \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = 0$$

siendo trivial que es igual a cero ya que $\sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} - m = 0$ por lo demostrado en la primera parte del ejercicio.

$$(\not{p} - m)v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -(p \cdot \sigma) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ (p \cdot \bar{\sigma}) \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ -m \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix}$$

Y al igual que en el caso anterior, tenemos que:

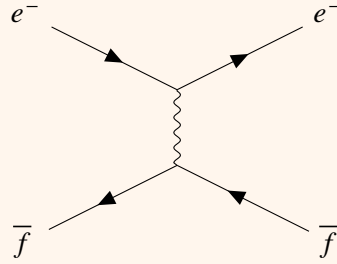
$$(\not{p} - m)v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \left(-\sqrt{p \cdot \sigma} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} + m \right) \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \left(\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \sqrt{p \cdot \sigma} - m \right) \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = 0$$

Ejercicio 6.7

Usando el régimen no relativista calcula, para la dispersión partícula-antipartícula, la amplitud, y muestra que el potencial es atractivo $q_f = -1$ y repulsivo para $q_f = +1$.

Solución 6.7

La dispersión partícula-antipartícula viene dada por el siguiente diagrama de Feynman:



Aplicando las reglas de Feynman podemos hallar que la amplitud viene dada por (recordemos que $q_e = -1$):

$$i\mathcal{A} \approx \left[\bar{u}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \right] \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{v}^r(q)(iq_f e\gamma^\mu)v^{r'}(q') \right]$$

Como sabemos $q^2 = (p' - p)^2$. Cuando consideramos el régimen no relativista. En este régimen tenemos que considerar que

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

Y por tanto tenemos que

$$\bar{u}^{s'}(p)\gamma^0 u^s(p) = 2m\delta^{ss'} \quad \bar{u}^{s'}(p)\gamma^i u^s(p) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Lo mismo se aplica a v y \bar{v} , salvo que en este caso aparece un signo menos ya que:

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}$$

tal que

$$\bar{v}^r(p)\gamma^0 v^{r'}(p) = -2m\delta^{rr'} \quad \bar{v}^r(p)\gamma^i v^{r'}(p) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Entonces, como solo el caso $\mu = \nu = 0$ es no nulo, y $q^2 \approx -|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2$ (conservación del momento), nuestra amplitud queda como:

$$\mathcal{A} = (4m_e m_f \delta^{ss'} \delta^{rr'}) \frac{q_f e^2}{-|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2}$$

Si relacionamos la amplitud con la amplitud de dispersión en la mecánica cuántica no relativista ignorando el término de masas y de espín ($4m_e m_f \delta^{ss'} \delta^{rr'}$):

$$\mathcal{A} = \frac{-q_f e^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2} = - \int d^3\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')\mathbf{r}}$$

El término de la derecha se parece mucho a una transformada de Fourier (salvo por el factor $(2\pi)^{-3/2}$) donde $\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. Entonces podemos obtener $U(\mathbf{r})$ como la transformada de Fourier del momento \mathbf{p} de $\mathcal{A}/(2\pi)^{3/2}$, tal que

$$U(\mathbf{x}) = e^2 q_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{p}|^2}$$

Esta integral es bastante sencilla de calcular:

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{p}|^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{ipr \cos(\theta)} dp d\cos(\theta) d\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{2 \sin(pr)}{pr} dp = \frac{2}{4\pi^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{r}$$

De lo que se deduce que

$$U(\mathbf{x}) = \frac{e^2 q_f}{4\pi r}$$

que es el potencial de Coulomb, atractivo si $q_f = -1$ y repulsivo si $q_f = 1$.

Apéndice A

Invariancia de Lorentz y Poincaré

A.1. Introducción

Los principios de la relatividad especial y general son las piezas angulares del entendimiento del universo. Nosotros nos restringiremos nuestra atención a la relatividad especial, caracterizada por las transformaciones de Poincaré, que entenderemos como la combinación de las transformaciones de Lorentz y rotaciones/traslaciones espacio-temporales simultáneamente.

Nosotros clasificamos las partículas fundamentales según la representación del grupo de Poincaré bajo el que se ven transformadas, que está en última instancia relacionada con la masa y con el espín. Las partículas con espín enteros se llaman *bosones* y obedecen la estadística de Bose-Einstein, mientras que las partículas con espines semi-enteros se llaman *fermiones* y obedecen la estadística de Fermi-Dirac.

A.1.1. Espacio de referencia inercial

Definimos como **espacio de referencia inercial** es un espacio de tres dimensiones con un reloj en cada punto del espacio. Un **evento** es un punto en el espacio-tiempo:

$$E = (t, \mathbf{x}) = (t, x, y, z) \quad (\text{A.1.1})$$

La trayectoria de una partícula descrito en este sistema de referencia es un conjunto de eventos espacio-temporales, i.e., si $E(t, \mathbf{x})$ es un elemento de la trayectoria espacio-temporal, entonces la partícula está en \mathbf{x} en el instante t . Cuando hablamos de la relatividad espacial es general describir un suceso como $E = (ct, \mathbf{x})$ donde c es la *velocidad de la luz* para conservar las unidades. A todo el conjunto de puntos espacio-temporales lo conocemos como *espacio de Minkowski*, $\mathbf{R}^{(1,3)}$.

Cuando una partícula no está sometida a fuerzas externas decimos que es *libre*. Un *sistema de referencia inercial* es un sistema de referencia en el que la partícula libre se mueve en líneas rectas a una velocidad constante. Un *observador inercial* es un observador que describe los eventos en el espacio respecto su propio sistema de referencia inercial. Así que, para un observador inercial, la trayectoria de una partícula libre se describiría como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{u}t \quad (\text{A.1.2})$$

donde \mathbf{u} es un vector constante 3-dimensional.

A.2. Transformaciones de Lorentz y Poincaré

Primero construiremos las transformaciones de Lorentz para luego desarrollar el grupo de Lorentz y extenderlo hacia el grupo de Poincaré.

A.2.1. Postulados de la relatividad espacial

Como sabemos los postulados de la relatividad espacial son:

- a) Las leyes de la física son iguales en todos los sistemas de referencia inerciales.
- b) La velocidad de la luz es constante e igual en todos los sistemas de referencia inerciales.

Si E_1 y E_2 son dos eventos espacio-temporales denotados por un observador O por $x_1^\mu(ct_1, \mathbf{x}_1)$ y $x_2^\mu(ct_2, \mathbf{x}_2)$, entonces el **intervalo espacio-temporal** de estos dos eventos en el sistema de referencia O está definido como

$$z^\mu \equiv \Delta x^\mu = (c\Delta t, \Delta \mathbf{x}) \quad (\text{A.2.1})$$

Supongamos que en este caso los eventos consisten en un rayo de luz, siendo E_1 la salida del rayo y E_2 la llegada a los dos puntos. Entonces tendremos que $c = \Delta x / \Delta t$, de lo que se deduce que $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$. Para un sistema O' donde los eventos se denotan por $x_1'^\mu(ct_1', \mathbf{x}_1')$ y $x_2'^\mu(ct_2', \mathbf{x}_2')$. Debido al postulado (b) de la relatividad especial tenemos que $c = \Delta x' / \Delta t'$ y por tanto $(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = 0$. Entonces para todo sistema de referencia este intervalo debe ser igual, ya que de otra forma no se cumplirían los postulados de la relatividad especial. Definimos entonces el **tensor métrico de Minkowski** $g_{\mu\nu}$ tal que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

que se puede denotar también por $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ¹. Así podemos definir:

$$x^2 \equiv x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2 = (ct)^2 - \mathbf{x}^2 \quad (\text{A.2.3})$$

donde hemos usado *convención de suma de Einstein*. Se define entonces el **intervalo espaciotemporal** o **distancia** entre dos eventos E_1 y E_2 como

$$s^2 \equiv (\Delta x)^2 = (ct)^2 - (\Delta \mathbf{x})^2 \quad (\text{A.2.4})$$

Consideremos ahora el caso especial en el que en el instante $t = 0$ dos observadores sincronizan sus orígenes y su eje de coordenadas coincide. Es decir, en el instante $t = 0$ O y O' coinciden $x^\mu = x'^\mu = 0$. Es posible pensar que en este instante es posible hacer un cambio de coordenadas (invertible) tal que $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ donde

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \equiv \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (\text{A.2.5})$$

¹También es común denotarlo por $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

donde hemos definido $\Lambda^\mu_\nu \equiv \partial x'^\mu / \partial x^\nu$. Los 16 elementos de Λ deben ser reales. Nótese que como x^μ es un vector fila, tenemos que $\Lambda^\mu_{\text{columna}}$. De manera histórica decimos que x^μ es la forma *contravariante*.

Un concepto muy importante es el concepto del *tiempo propio* asociado a un objeto, que es el tiempo que muestra el reloj que lleva consigo el objeto. También es importante el concepto de *distancia propia*, que es la distancia que tiene un objeto medido en su propio sistema de referencia. Para una partícula libre, definimos como *sistema de referencia propio* como el sistema de referencia inercial en el que la partícula está en reposo.

La posibilidad de que Λ dependa de x^μ no parece muy extraña, sin embargo, por el postulado (a) Λ^μ_ν debe ser independiente del espacio-tiempo ², i.e., toda transformación de Lorentz contiene 16 constantes independientes. Para un x^μ tenemos

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad x \rightarrow x' = \Lambda x \quad (\text{A.2.6})$$

La transformación más general entre dos sistemas de referencia inerciales es

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad x \rightarrow x' = \Lambda x + a \quad (\text{A.2.7})$$

y se llama **transformación de Poincaré**, donde a^μ es una traslación espacio-temporal. Para que se verifique (en el caso de dos eventos relacionados con la propagación de la luz)

$$z'^2 = z'^T g z' = z^T \Lambda^T g \Lambda z = z^2 = 0 \quad (\text{A.2.8})$$

Se debe verificar que $\Lambda^T g \Lambda = g$. Es decir, *el tensor métrico de Minkowski es invariante bajo transformaciones de Lorentz*. Además como $\det(g) = -1$, y $\det(g) = \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(\Lambda)^2 \det(g)$, se tiene que

$$\det(\Lambda) = \pm 1 \quad (\text{A.2.9})$$

Otras propiedades interesantes del tensor métrico

$$g^{-1} = g \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2.10})$$

Veamos las propiedades de Λ .

$$g \Lambda^T g \Lambda = g g = I \quad (\text{A.2.11})$$

Aplicando Λ^{-1} (se puede aplicar ya que $\det(\Lambda) \neq 0$) a la derecha tenemos que:

$$\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g \quad (\text{A.2.12})$$

es la inversa de la transformación de Lorentz. Un cuadrivector contravariante cualquiera transforma como $V^\mu \rightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$, mientras que uno *covariante* transforma como $V_\mu \rightarrow V'_\mu = V_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$, tal que $V_\mu V^\mu = V^\mu V_\mu$ es **invariante** bajo la transformación de Lorentz:

$$V'_\mu V'^\mu = V_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\sigma V^\sigma = V_\nu \delta^\nu_\sigma V^\sigma = V_\nu V^\nu \quad (\text{A.2.13})$$

Lo mismo se aplica a los tensores, donde hay m términos contravariantes y n covariantes $T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}$. Los términos contravariantes transforman con Λ mientras que los covariantes con Λ^{-1} .

²Véase prueba en el Anthony G. Williams pág. 6-7.

Las *transformaciones de Lorentz* forman un grupo, ya que que satisfacen las condiciones que debe cumplir un grupo (véase B):

- Cierre: si Λ_1 y Λ_2 entonces $\Lambda_1\Lambda_2$ es también una transformación de Lorentz.
- Asociatividad: las transformaciones de Lorentz tienen como operación el producto matricial y este es asociativo.
- Identidad: la $\Lambda = I$ es una transformación de Lorentz ya que $I^T g I = g$.
- Inversos: para cada uno de las transformaciones de Lorentz tenemos un inverso dado por $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$.

El grupo de Lorentz se denota típicamente por $O(1, 3)$ y es la generalización del grupo de rotación $O(3)$ a las 4 dimensiones propias de un espacio de Minkowski. No es difícil de ver que la *transformación de Poincaré* $x' \equiv p(x) \equiv \Lambda x + a$ también es un grupo, siendo las transformaciones de Lorentz un subgrupo ($a = 0$) de este.

En función de la elección del determinante y el valor de Λ_0^0 tenemos diferentes tipos de transformaciones de Lorentz. Las rotaciones y boost (transformaciones de Lorentz) satisfacen los requisitos de un grupo y por tanto forman un subgrupo dentro del grupo de Lorentz. Muchas veces se le denota por $SO^+(1, 3)$, siendo la S el especial ya que están restringidos a $\det(\Lambda) = +1$. Tenemos pues que $SO^+(1, 3) \subset O(1, 3)$ que consiste en todos los elementos Λ_r posibles. Los grupos (ii), (iii) y (iv) no contienen la identidad y por tanto no forman un subgrupo. En la siguiente tabla vemos que tipos hay:

Clase de Lorentz	$\det \Lambda$	Λ_0^0	Transformación
(i) Rotaciones y Boost	+1	≥ 1	$(\Lambda_r)_\nu^\mu \in SO^+(1, 3)$
(ii) Inversión de paridad	+1	≥ 1	$(P\Lambda_r)_\nu^\mu = P_\sigma^\mu (\Lambda_r)_\nu^\sigma; P_\nu^\mu = g^{\mu\nu}$
(iii) Inversión temporal	-1	≤ -1	$(T\Lambda_r)_\nu^\mu = T_\sigma^\mu (\Lambda_r)_\nu^\sigma; T_\nu^\mu = -g^{\mu\nu}$
(iv) Inversión espacial	+1	≤ -1	$(PT\Lambda_r)_\nu^\mu = (PT)_\sigma^\mu (\Lambda_r)_\nu^\sigma; (PT)_\nu^\mu = -\delta_\nu^\mu$

Tabla A.1: Tipos de transformaciones de Lorentz

Function	Transformation	Type
$s(x)$	$s'(x') = s(x)$	Escalar
$p(x)$	$p'(x') = \det(\Lambda)p(x)$	Pseudoescalar
$v^\mu(x)$	$v'^\mu(x') = \Lambda_\nu^\mu v^\nu(x)$	Vector
$a^\mu(x)$	$a'^\mu(x') = \det(\Lambda)\Lambda_\nu^\mu a^\nu(x)$	Pseudovector (vector axial)
$t^{\mu\nu}(x)$	$t'^{\mu\nu}(x') = \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\tau^\nu t^{\sigma\tau}(x)$	Tensor de segundo orden

Tabla A.2: Clasificación de las funciones espacio-temporales en función de la transformación de Lorentz.

A.2.2. Grupo de Lorentz

Definimos como transformaciones activas aquellas que cambian el sistema físico y no el observador, mientras que las transformaciones pasivas son transformaciones del observador que no cambian el sistema físico. La relación entre unas y otras (y sus diferencias) pueden ser estudiadas usando rotaciones en dos dimensiones.

Podemos considerar una transformación infinitesimal de Lorentz escrita como $\Lambda \rightarrow I + d\omega$ tal que

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} + d\omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + O(\omega^2) \quad (\text{A.2.14})$$

Dado que $g = \Lambda^T g \Lambda$ veamos que

$$g = \Lambda^T g \Lambda = g - d\omega^T g - g d\omega + O(\omega^2) = g - (gd\omega)^T - g d\omega + O(\omega^2) \quad (\text{A.2.15})$$

que exige que $(gd\omega)^T = -gd\omega$, lo cual lleva si definimos $g_{\mu\rho} d\omega^{\rho}_{\nu} = d\omega_{\mu\nu}$ a la condición de que:

$$d\omega_{\mu\nu} = -d\omega_{\nu\mu} \quad (\text{A.2.16})$$

Como podemos ver esto implica que $d\omega_{\mu\nu}$ tiene 6 parámetros independientes, ya que los términos de la diagonal deben ser necesariamente cero ($d\omega_{\mu\mu} = -d\omega_{\mu\mu}$) y los términos del triángulo superior e inferior son iguales. En el caso de D dimensiones tendríamos que habría $D(D-1)/2$ parámetros independientes. Veamos que un conjunto de 6 matrices antisimétricas linealmente independientes $(M^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta}$ pueden ser calculadas a través de la siguiente relación

$$(M^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} \equiv i \left(g^{\mu\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} - g^{\nu\alpha} \delta^{\mu}_{\beta} \right) \quad (g M^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} \equiv i \left(\delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha} \delta^{\mu}_{\beta} \right) \quad (\text{A.2.17})$$

Siendo las 6 matrices independientes las denotadas por los índices $\mu\nu = 01, 02, 03, 23, 31, 12$. Veamos que $\mu\nu$ denota simplemente la matriz independiente, mientras que α y β se refieren a las filas y columnas. Es decir, $(M^{01})^{\alpha}_{\beta}$ es una matriz completamente diferente a $(M^{02})^{\alpha}_{\beta}$ o a $(M^{31})^{\alpha}_{\beta}$, siendo estas matrices 4×4 . Podemos expresar entonces una matriz ω^{α}_{β} cualquiera como

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\gamma} \omega_{\gamma\beta} = -\frac{i}{2} \quad (\text{A.2.18})$$

donde se suma sobre todos los μ, ν posibles. El último paso se deduce de la relación

$$g^{\alpha\gamma} (\delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha} \delta^{\mu}_{\beta}) \equiv -i (M^{\mu\nu})^{\gamma}_{\beta} \quad (\text{A.2.19})$$

Como podemos ver esto esto significa que

$$A^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \frac{i}{2} d\omega_{\mu\nu} (M^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} + O(\omega^2) \quad (\text{A.2.20})$$

De lo que se deduce que $SO^+(1, 3)$ es un grupo de Lie con 6 generadores independientes $M^{\mu\nu}$ (matrices, donde $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$) y 6 parámetros infinitesimales $\omega_{\mu\nu}$ (que igual son antisimétricos). Consecuentemente podemos expresar

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta} = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right) \right]^{\alpha}_{\beta} \quad (\text{A.2.21})$$

donde nuestros generadores verifican las relaciones de conmutación

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} M^{\mu\rho} - g^{\mu\rho} M^{\nu\rho} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho}) \quad (\text{A.2.22})$$

la cual define el álgebra de Lie y las transformaciones de Lorentz. La pregunta ahora es: ¿Qué significa cada cosa? Pues bien, como sabemos tenemos 6 generadores M . Tres de ellos corresponderán a una rotación y los otros 3 corresponderán a un boost. Las cantidades infinitesimales asociadas son en el caso de la rotación ω se podrá relacionar con el vector normal al plano en el que sucede la rotación; mientras que en el caso del boost se relacionará con la dirección en la que está ocurriendo el boost. La demostración es tediosa, por lo que podemos pasar un poco de ella e ir directo al grano.

Rotaciones

El principal punto es asumir que las rotaciones siempre solo afectan a las partes espaciales, esto es $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Es lógico entonces pensar que $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3) = (M^{23}, M^{31}, M^{12})$ genera la parte espacial, donde J_1 implica la rotación con eje normal x , J_2 eje normal y y J_3 por el eje normal z (y por tanto M^{23} significa que la rotación está sucediendo en el plano yz , lógicamente). Es decir:

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} M^{jk} \quad (\text{A.2.23})$$

y por tanto si expresamos $\alpha_k = \epsilon^{ijk} \omega_{ij}$ la matriz que genera la rotación:

$$(\Lambda_{\text{rot}})^\mu_\nu \equiv [\exp(i\alpha \cdot \mathbf{J})]^\mu_\nu \equiv \left[\exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{ij} M^{ij}\right) \right]^\mu_\nu \quad (\text{A.2.24})$$

que como vemos combina toda posible rotación. De hecho podríamos hacer el caso general $\alpha = (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta))$ y estudiar como funciona.

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.25})$$

Boost

Los boost, por otro lado, dependen de la dirección $\boldsymbol{\eta} = \eta \hat{\mathbf{n}}$, donde

$$\cosh(\eta) \equiv \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{A.2.26})$$

$$\sinh(\eta) = \beta\gamma \quad \tanh(\eta) = \beta \quad (\text{A.2.27})$$

y por tanto

$$e^\eta = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \eta = -\ln[\gamma(1 - \beta)] \quad (\text{A.2.28})$$

A modo de facilitar los cálculos, cuando $\hat{\mathbf{n}}$ tiene una dirección $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ o $\hat{\mathbf{z}}$ la matriz boost viene dada por

$$\Lambda_{\text{boost}}(x, v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.29})$$

$$\Lambda_{\text{boost}}(y, v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_{\text{boost}}(z, v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.30})$$

Como podemos ver esto significa los boosts siempre implican el término 0 y una espacial i (o varias). Entonces no debería sorprender que

$$\Lambda_{\text{boost}}(v\hat{\mathbf{n}}) = \exp(i\eta K_{\hat{\mathbf{n}}}) = \exp(i\eta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{K}) \quad (\text{A.2.31})$$

donde $\omega^{0i} = -\eta^i$ y $\mathbf{K} = (K^1, K^2, K^3) = (M^{01}, M^{02}, M^{03})$.

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.32})$$

Resumen

Teorema A.1

De esta forma la matriz de transformación de Lorentz en el caso más general es:

$$\Lambda(\omega)^\mu_\nu = A_P(\alpha, \eta)^\mu_\nu = [\exp(\pm i\alpha \cdot \mathbf{J} + i\eta \cdot \mathbf{K})]^\mu_\nu \quad (\text{A.2.33})$$

donde $\pm = +$ si la rotación es pasiva y $\pm = -$ si la rotación es activa.

Verificando las siguientes condiciones:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k \quad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k \quad (\text{A.2.34})$$

donde llamamos \mathbf{J} hermítico y \mathbf{K} antihermítico. Además tenemos los siguientes invariantes, llamados *invariantes de Casimir*:

$$C_1 \equiv \mathbf{J}^2 - \mathbf{K}^2 = \frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad C_2 \equiv \mathbf{J} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\mu\nu} M^{\rho\sigma} \quad (\text{A.2.35})$$

A.3. Grupo de Poincaré y Grupo Pequeño

A.3.1. Espín Intrínseco y grupo de Poincaré

Los generadores de la transformación de Lorentz puede desarrollarse como la suma de una parte asociada con el espacio-tiempo $L^{\mu\nu}$ y con la parte espín $\Sigma^{\mu\nu}$. Entonces el generador total de Lorentz:

$$M^{\mu\nu} \equiv L^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu} \quad (\text{A.3.1})$$

Dado que \mathbf{J} viene dado por $J^i = (1/2)\epsilon^{ijk} M^k$ entonces:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad L^i = (1/2)\epsilon^{ijk} L^k \quad S^i = (1/2)\epsilon^{ijk} S^k \quad (\text{A.3.2})$$

El momento angular total satisface el algebra de Lie y genera las rotaciones del sistema. Esperamos, igual que \mathbf{J} , el momento angular \mathbf{L} y de espín \mathbf{S} satisfagan también el álgebra de Lie y sus conmutaciones. El boost generador también se podrá expresar en función de una parte extrínseca (asociada al momento angular) y una parte intrínseca:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{ext}} + \mathbf{K}_{\text{int}} \quad K_{\text{int}}^i \equiv L^{0i} \quad K_{\text{int}}^i = \sigma^{0i} \quad (\text{A.3.3})$$

Consecuentemente las partículas se clasifican en función de su representación en el grupo de Lorentz y como transforman en el mismo (escalares, vectoriales, axiales...).

Apéndice B

Teoría de Grupos y Grupos de Lie

B.1. Elementos en la teoría de grupos

Definición B.1

Una serie de elementos $\{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ se define como **grupo** (denotado por G) cuando una operación entre dos elementos del mismo grupo $g_i g_j \equiv g_i \circ g_j$ (llamada *operación de grupo*) tiene las siguientes propiedades:

- a) *Cierre*: si $g_i, g_j \in G$ entonces $g_i g_j \in G$.
- b) *Asociativa*: $g_i(g_j g_k) = (g_i g_j)g_k$ para todo $g_i, g_j, g_k \in G$.
- c) *Identidad*: existen un e (en general denotado por I) perteneciente al grupo tal que $eg_i = g_i e = e$ para todo $g_i \in G$.
- d) *Inversa*: para todo $g_i \in G$ existe un $g_i^{-1} \in G$, llamado *inversa* de g_i tal que $g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = e$.

Además si $[g_i, g_j] = 0$ (i.e. $g_i g_j = g_j g_i$) decimos que el grupo es **abeliano**. Si no verifica esto decimos que es no abeliano. El grupo de traslaciones es abeliano, mientras que el grupo de rotaciones es no abeliano.

Una **representación** de un grupo G es una realización específica D de un grupo abstracto en términos de *matrices*, tal que para cualquier $g \in G$ existe una matriz $D(g)$ siendo la *operación de grupo* una multiplicación de matrices. Los grupos deben contener el inverso de cada uno de los elementos, tal que la representación matricial es un mapeo de un grupo abstracto en forma de matrices invertibles tal que

- a) Si $g, g', g'' \in G$ y $gg' = g''$ entonces $D(g)D(g') = D(g'')$.
- b) Para todo g se verifica $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$

Una representación D a través de matrices $n \times n$ de un grupo G se dice que *tiene una dimensión* n y es necesariamente un subgrupo de una serie de matrices complejas $n \times n$ invertibles conocidas como grupo lineal general $GL(\mathbb{C}^n)$, i.e., $D(g) \in GL(\mathbb{C}^n)$.

Una representación $D(g)$ es *reducible* cuando tiene un subespacio no trivial que representa también al grupo. Cuando no es reducible decimos que es *irreducible*. Si $D(g) \forall g \in G$ se puede

expresar como un bloque diagonal por una matriz S entonces estamos ante una *representación completamente reducible*. Matemáticamente:

$$SD(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

$\forall g \in G$. Una representación completamente reducible se puede descomponer en una suma de matrices $D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus D_3(g) \oplus \dots$. Para cada una de las submatrices $D_i(g)$ son una representación con menos dimensional del grupo.

Cuando decimos que una representación es *fiel* cuando cada uno de las matrices representa un $g \in G$, de tal manera que no se pierde información. La *representación estándar* de cada uno de los grupos decimos que es una representación fiel. Típicamente esto significa que la correspondencia entre g y $D(g)$ es invertible, lo cual suele suceder para la representación con menos dimensión. Por ejemplo, para $SU(N)$ la representación estándar es una serie de matrices $N \times N$ matrices unitarias especiales. La *representación fundamental* es aquella representación irreducible con dimensión finita.

B.2. Grupo de Lie

Una **variedad** es un espacio que localmente se puede representar como un espacio Euclídeo, o mejor dicho, que recubre localmente el espacio Euclídeo. Por ejemplo, una esfera es una variedad bidimensional. Una **variedad diferenciable** es una variedad en la que podemos aplicar localmente cálculo.

Un grupo de Lie es un grupo continuo y una variedad diferenciable. En él cada uno de los puntos de la variedad son elementos del grupo. Los elementos de un *grupo continuo* entorno a un punto cualquiera pueden ser designados con parámetros reales, como podrían ser los ángulos de Euler en rotaciones de 3 dimensiones.

Más específicamente, un grupo continuo es un **grupo de Lie** cuando es infinitamente diferenciable respecto sus parámetros reales. Los grupos de Lie son también variedades suaves. En particular esta definición es un grupo de Lie real, que incluye los grupos $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ y $SO(1, 3)$. Además también podemos extender las consideraciones a grupos de Lie complejos.

Para un grupo de Lie con n parámetros reales tal que $\omega \in \mathbb{R}^n$, existe siempre un ω suficientemente pequeño tal que

$$g(\omega) = I + i\omega \cdot \mathbf{T} + O(\omega^2) \quad \text{con } T^a \equiv \left. \frac{\partial g}{\partial \omega^a} \right|_{\omega=0} \quad (\text{B.2.1})$$

donde la suma sobre todos los a es entendida y donde T^a se define como el *generador* del grupo de Lie. Los T^a son necesariamente independientemente lineales dado que cada ω especifica únicamente un grupo elemental cerca de la unidad. El número de parámetros n está relacionado con la dimensión del grupo $d(G) = n$.

En general estamos muy interesados en las representaciones matriciales de los grupos de Lie, donde los generadores abstractos son T^a están representados por matrices $d \times d$. Podemos ver que:

$$g(\omega) = e^{i\omega \cdot T} \quad (\text{B.2.2})$$

siempre que ω esté suficientemente cerca del origen de \mathbb{R}^n . Aunque no exista una correspondencia uno a uno entre ω y *todos* los elementos g del grupo de Lie, sí que existe una región finita cerca de la identidad donde esta relación uno a uno se verifica y donde podemos relacionar unívocamente $g(\omega) = \exp(i\omega \cdot \mathbf{T})$.

El **álgebra de Lie** \mathfrak{g} consiste en un vector del espacio de matrices hecho por combinaciones lineales de los generadores $\omega \cdot \mathbf{T}$, con una operación definida por el corchete de Lie

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Este corchete de Lie $[X, Y]$ verifica

■ **Antisimetría:**

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

■ **Identidad de Jacobi:**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Diferentes grupos de Lie pueden tener el mismo álgebra de Lie, de tal manera que puedan ser *localmente isomórfica*. Por ejemplo, $SU(2)$ y $SO(3)$ tienen el mismo álgebra de Lie, aunque los grupos de Lie tienen un carácter diferente.

En este punto nos centraremos en como