

# Notas Física del estado sólido

Daniel Vazquez Lago

5 de octubre de 2024



# Índice general

<b>1. Estructura cristalina</b>	<b>7</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	7
1.1.1. Red . . . . .	7
1.1.2. Base atómica y estructura cristalinas . . . . .	8
1.1.3. Celda: celda unitaria, primitiva, Wigner-Seitz. . . . .	9
1.1.4. Otras definiciones . . . . .	11
1.2. Tipos fundamentales de redes: Redes de Bravais . . . . .	12
1.2.1. Características de las redes del sistema cúbico . . . . .	13
1.2.2. Red diamante . . . . .	13
1.3. Empaquetamiento compacto . . . . .	14
1.4. Intersticios o huecos estructurales . . . . .	15
1.5. Defectos y desorden en los cristales . . . . .	15
1.5.1. Defectos puntuales . . . . .	15
1.5.2. Concentración de defectos térmicos puntuales en equilibrio . . . . .	17
1.5.3. Defectos de línea . . . . .	18
<b>2. Red recíproca y difracción de rayos X</b>	<b>21</b>
2.1. Red recíproca en tres dimensiones . . . . .	21
2.1.1. Definición de la red recíproca . . . . .	21
2.1.2. Red recíproca como transformada de Fourier . . . . .	23
2.1.3. Familias de planos reticulares . . . . .	24
2.1.4. Planos reticulares e índices de Miller . . . . .	24
2.1.5. Zonas de Brillouin . . . . .	26
2.2. Difracción . . . . .	27
2.2.1. Ley de Bragg . . . . .	29
2.3. Factor de estructura . . . . .	29
2.4. Diagramas de difracción . . . . .	30
<b>3. Enlace cristalino</b>	<b>33</b>
3.1. Clasificación de los sólidos . . . . .	33
3.2. Cristales moleculares . . . . .	33
3.2.1. Interacción de <i>van der Waals-London</i> . . . . .	34
3.2.2. Interacción de Lennard-Jones . . . . .	35
3.3. Cristales iónicos . . . . .	37
3.4. Cristales covalentes . . . . .	38
3.4.1. La molécula ion de hidrógeno $H_2^+$ . . . . .	38
3.4.2. La molécula de hidrógeno ( $H_2$ ) . . . . .	40
3.4.3. Hibridación . . . . .	43
3.5. Cristales metálicos . . . . .	45

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>4. Dinámica de redes</b>	<b>49</b>
4.1. Vibraciones de los cristales con base atómica . . . . .	49
4.1.1. La cadena lineal monoatómica . . . . .	49
4.1.2. Cristales monoatómicos tridimensionales . . . . .	51
4.2. Vibraciones de cristales con base diatómica . . . . .	53
4.2.1. La cadena lineal diatómica . . . . .	53
4.2.2. Cristales tridimensionales poliatómicos . . . . .	55
4.3. Fonones . . . . .	55
4.3.1. Cuantización de las ondas elásticas . . . . .	55
4.3.2. Espectroscopía de fonones . . . . .	57
4.4. Vibraciones de los cristales iónicos . . . . .	58
<b>5. Propiedades térmicas reticulares</b>	<b>61</b>
5.1. Densidad de modos . . . . .	61
5.1.1. Condiciones de contorno . . . . .	61
5.1.2. Cálculo de la densidad de modos . . . . .	61
5.1.3. Aproximación de Debye . . . . .	62
5.2. Capacidad térmica reticular . . . . .	63
5.2.1. Estadística de fonones . . . . .	63
5.2.2. Cálculo de la capacidad térmica . . . . .	63
5.3. Efectos anarmónicos . . . . .	63
5.3.1. Dilatación térmica . . . . .	63
5.3.2. Conductividad térmica . . . . .	63
<b>6. Gas de fermi de electrones libres</b>	<b>69</b>
6.1. Estados fundamentales del gas de Fermi . . . . .	71
6.1.1. Niveles de energía . . . . .	71
6.1.2. Ocupación de estados a $T > 0$ . . . . .	71
6.1.3. Interacción electrón-electrón . . . . .	71
6.2. Capacidad térmica electrónica . . . . .	71
6.3. Conductividad eléctrica DC . . . . .	71
6.3.1. Modelo cinético de Drude y ecuación dinámica . . . . .	71
6.3.2. Ley de Ohm . . . . .	71
6.3.3. Dependencia con la temperatura de la conductividad eléctrica . . . . .	71
6.4. Conductividad térmica electrónica . . . . .	71
6.5. Ley de Wiedmann-Franz . . . . .	71
6.6. Efecto Hall y magnetoresistividad . . . . .	71
6.7. Conductividad AC y propiedades ópticas . . . . .	71
<b>7. Electrones en un potencial periódico. Teoría de bandas.</b>	<b>75</b>
7.1. Teorema de Bloch . . . . .	75
7.2. Aproximación de red vacía . . . . .	75
7.3. Ecuación de onda del electrón en un potencial periódico . . . . .	75
7.4. Electrones cuasilibres . . . . .	75
7.4.1. Gap de energía en los bordes de zona . . . . .	75
7.5. Electrones fuertemente ligados . . . . .	75
7.6. Superficie de Fermi y zonas de Brioullin . . . . .	75
7.7. Metales, aislantes y semiconductores . . . . .	75

---

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>8. Dinámica semiclásica de electrones de Boch</b>	<b>81</b>
8.1. Ecuaciones del movimiento . . . . .	81
8.2. Masa efectiva . . . . .	81
8.3. Movimiento en campos electricos. Concepto de hueco. . . . .	81
8.4. Movimiento en campos magnéticos. . . . .	81
<b>9. Cristales semiconductores</b>	<b>85</b>
9.1. Concentración de portadores en equilibrio térmico . . . . .	85
9.2. Semiconductores dopados . . . . .	85
9.3. Concentración de portadores en Semiconductores dopados . . . . .	85
9.4. Conductividad y movilidad . . . . .	85
9.5. Semiconductores inhomogeneos: la unión p-n. . . . .	85
<b>10. Magnetismo de sólidos</b>	<b>91</b>
10.1. Relaciones básicas . . . . .	91
10.2. Diamagnetismo atómico . . . . .	91
10.3. Paramagnetismo atómico . . . . .	91
10.4. Paramagnetismo de los electrones de conducción . . . . .	91
10.5. La interacción de intercambio . . . . .	91
10.6. Ferromagnetismo . . . . .	91
10.7. Dominios ferromagnéticos . . . . .	91
10.8. Orden ferrimangético . . . . .	91
<b>11. Superconductividad</b>	<b>97</b>
11.1. Fenomenología básica . . . . .	97
11.2. Aspectos termodinámicos de los superconductores . . . . .	97
11.3. Ecuaciones de London . . . . .	97
11.4. La teoría de Ginzburg-Landau (GL) . . . . .	97
11.5. Propiedades magnéticas de los superconductores de tipo II . . . . .	97
11.6. Introducción a la teoría BCS . . . . .	97
11.7. Compuestos superconductores . . . . .	97

## ÍNDICE GENERAL

---

# 1

## Estructura cristalina

Las sustancias cristalinas se caracterizan por una periodicidad espacial perfecta, que facilita enormemente la tarea de comprender y calcular sus propiedades físicas. Las sustancias cristalinas se encuentran comúnmente en forma de policristales (aglomerados de pequeñas cristales orientados desordenadamente llamadas cristalitos o granos). Existe una categoría importante de sólidos, que no se tratará aquí denominados amorfos, como el vidrio común y muchos polímeros, que no pertenecen a los sólidos cristalinos, pues aunque poseen cierto orden de corto alcance carecen del orden de largo alcance característico de los cristales.

### 1.1. Conceptos básicos

En esta sección introduciremos las definiciones más importantes que usaremos a lo largo del tema. Es importante memorizarlos bien, ya que serán usados recursivamente a lo largo del libro. También es importante leerlos en el orden que proponemos, ya que muchos derivan de conceptos previos. Estas definiciones son fundamentales para el estudio de la Física del Estado Sólido, y dado que existe una amplísima gama de definiciones que podemos encontrar en la literatura, trataremos de incluir aquellas más interesantes. Dado que nuestro principal libro de referencia es el Física del Estado Sólido [1], usaremos estas para definir los conceptos básicos, aunque es probable que introduzcamos cambios con la finalidad de que se entiendan mejor.

#### 1.1.1. Red

El concepto de red es un concepto fundamental, por lo que es necesario tener muy claro su significado.

**Definición 1.1 (Red).** *Una red es un conjunto de puntos discretos del espacio con vectores posición dados por la combinación lineal*

$$\mathbf{r} = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2 + u_3 \mathbf{a}_3 \quad (1.1.1)$$

donde los  $u_i$  barren todos los enteros. Los  $\mathbf{a}_i$  se denominan **vectores bases primitivos**, y deben ser linealmente independientes.

Con esto podremos tener una idea de lo que es una red. La red más básica que nos podemos imaginar en 2D es el conjunto de puntos definidos por los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$ , mientras que en 3D es el conjunto de puntos formado por los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$ . Es bueno imaginarse un conjunto formado por otros vectores, como  $(\hat{\mathbf{i}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}), \hat{\mathbf{k}})$ , o  $(\hat{\mathbf{i}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}), \hat{\mathbf{k}})$ , ya que nos permitirá pensar rápidamente en varias redes. Como bien dice el Kittle [2]: una red no es más que una distribución regular de puntos en el espacio, una abstracción matemática: para crear una estructura cristalina hace falta colocar átomos, y asignar estos a los puntos de la red.

Sin embargo la definición 1.1 es, en cierto modo, engañosa, ya que nos da a entender que si los puntos  $u_i$  no son enteros no se puede formar una red, y esto es falso. Se puede formar una red con valores de  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$  con valores no enteros (por ejemplo, semienteros), solo que en este caso los vectores  $\mathbf{a}_i$  serán **vectores no primitivos**. Una definición muy interesante es la que dan en el capítulo 12 del [3]:

**Definición equivalente 1.1.1.** *Una red es un conjunto de puntos donde el alrededor de cada uno de los puntos es indistinguible de cualquier otro punto. Véase la imagen 1.1*

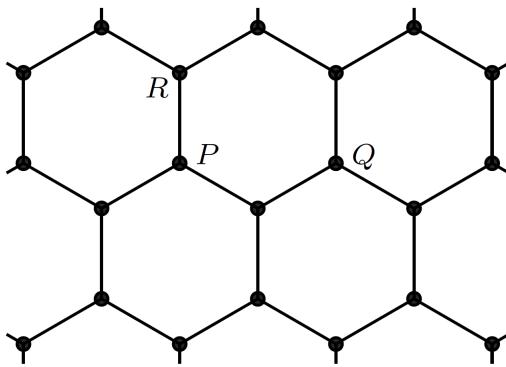


Figura 1.1: Como se puede ver  $R$  y  $P$  no son equivalentes, mientras que  $P$  y  $Q$  sí.

### 1.1.2. Base atómica y estructura cristalinas

Como hemos mencionado en el párrafo anterior, para obtener un cristal tenemos que colocar átomos/moléculas en la red. Básicamente tenemos que asignar a cada punto de red una conjunto de átomos. A esto se le llamará base atómica, tal y como se define en [1]:

**Definición 1.2 (Base atómica).** *Conjunto de átomos que se asocia a todos y cada uno de los puntos de la red. Se puede tener una base monoatómica (a cada punto de la red se le asocia un átomo), diatómica (dos átomos), triatómica (tres átomos)...*

Una vez tenemos una red y una base atómica asociada a cada punto de red obtendremos la estructura cristalina:

**Definición 1.3 (Estructura cristalina o cristal).** *Es la combinación red+base atómica, asociándose a cada punto de red una base atómica.*

Aunque en el manual [1] no lo menciona, hay que diferenciar entre los vectores base primitivos de la estructura y cristal y vectores base primitivos de la red. Lógicamente podemos coger una base atómica de un número de átomos arbitrario. y hacer traslaciones sencillas para obtener la red cristalina. Sin embargo

### 1.1.3. Celda: celda unitaria, primitiva, Wigner-Seitz.

Una celda es siempre un volumen o un área (en función de la dimensión del espacio), mientras que los diferentes adjetivos denotan las características para cada celda. El tipo de celda más importante es el tipo la celda unitaria primitva.

**Definición 1.4 (Celda unitaria).** *Volumen (en el caso de una red tridimensional, superficie en una red 2-dimensional) en el que encontramos un único punto de red, que mediante traslaciones puede recrear la red.*

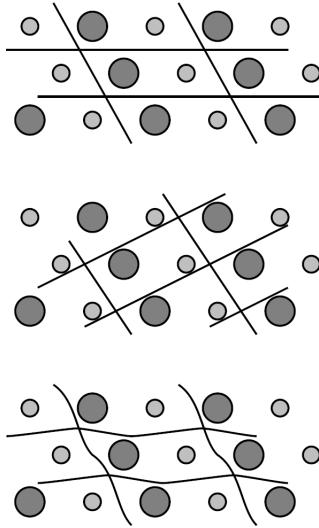


Figura 1.2: La elección de una celda unitaria no es única. Todas estas celdas unitarias pueden ser usadas para reconstruir el cristal.

**Definición 1.5 (Celda unitaria primitiva).** *Decimos que la red y los vectores son primitivos si dos puntos cualesquiera  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  satisfacen siempre la expresión 1.1.1 con una adecuada selección de los números enteros  $u_1, u_2, u_3$ . Denominamos como celda al volumen que ocupa dicho punto de red que se puede replicar mediante traslaciones usando vectores primitivos. En el momento que para replicar la estructura se necesita un no entero la celda, aunque se replique, ya no es primitiva. No existe ninguna celda de volumen menor que pueda servir como bloque constructor para la estructura cristalina. Toda celda primitiva es unitaria. La figura 1.3 muestra en la parte inferior dos posibles celdas unitarias con sus vectores bases asociados.*

Para una red existe más de una elección de vectores base primitivos. Todas las celdas primitivas tienen el mismo volumen pues tienen asociado uno y sólo un punto de red. Todos los puntos de una red son indistinguibles en el sentido de que la red *se ve igual* desde cualquiera de sus puntos (propia definición de red). También se puede decir que es invariante por traslaciones de vectores de red (*simetría de traslación*).

**Definición 1.6 (Vectores base y celdas no primitivas).** *Vectores base no primitivos: son aquellos que generan la red por combinaciones lineales de la forma de la ecuación 1.1.1 pero donde los  $u_i$  toman también valores no enteros. Un ejemplo es la celda cuadrada centrada que se muestra en la figura . Las celdas (unitarias) no primitivas o celdas convencionales correspondientes son siempre de mayor volumen que las primitivas por tener asociado más de un punto de red. Para algunos propósitos (por ejemplo, la indexación de máximos de difracción*

de rayos  $x$  que se verá en el Capítulo 2) la combinación red+base puede variarse, aunque sea a costa de aumentar el número de átomos de la base. En la figura 1.3 puede verse en la parte superior un conjunto de vectores base que no forman una celda primitiva, mientras en la parte inferior (en la izquierda) podemos ver vectores base que sí forman una celda primitiva.

**Definición 1.7 (Celda de Wigner-Seitz).** Se construye de la siguiente forma: trazar segmentos que conectan a un punto dado de la red con todos sus vecinos próximos; trazar los planos mediatrixes a dichas líneas. La región así encerrada (poliedro en 3D, polígono en 2D) es la celda de Wigner-Seitz. Ver el ejemplo 2D de la Figura 1.5. La celda de Wigner-Seitz es **siempre primitiva** y contiene todas las simetrías de la red.

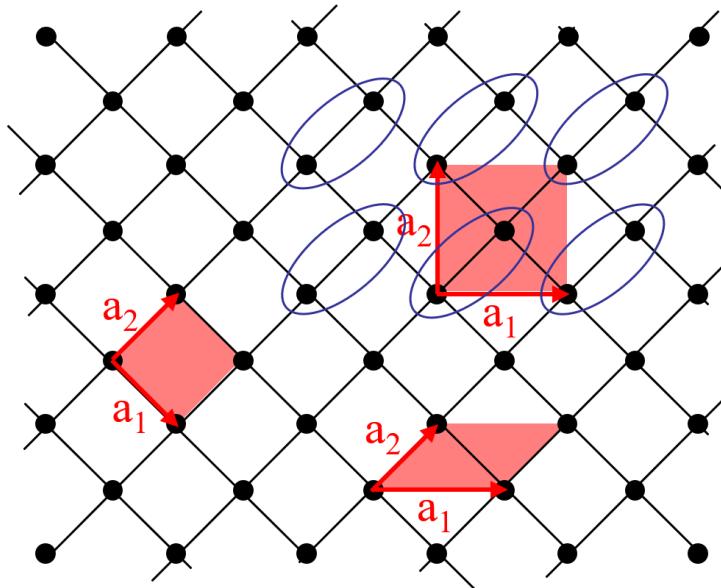


Figura 1.3: Ejemplos de vectores unitarios y sus correspondientes celdas unitarias.

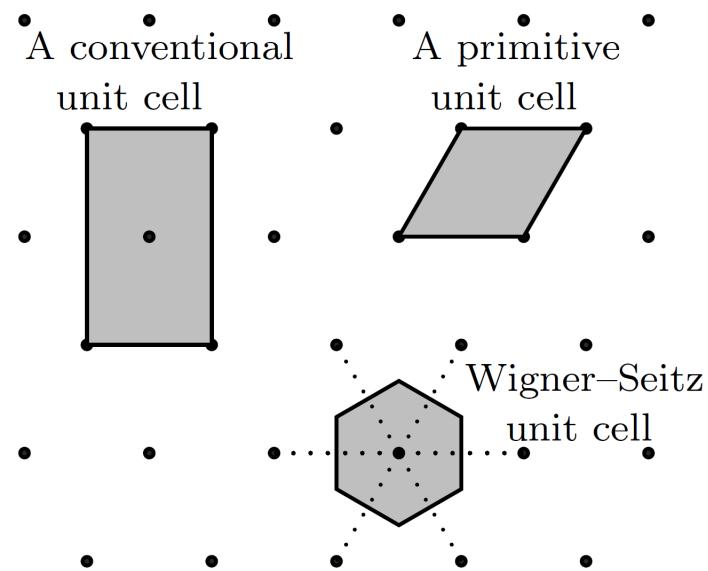


Figura 1.4: Podemos ver algunas de las celdas unitarias para una red triangular.

### 1.1.4. Otras definiciones

**Definición 1.8 (Otras simetrías).** Invariancia por inversión ( $\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$ ), eje de rotación de orden  $n$  (invariancia por giro del ángulo  $2\pi/n$  alrededor del eje), planos de simetría, centros de inversión...

**Definición 1.9 (Número de coordinación).** Es la número de vecinos más próximos (misma distancia) a un punto cualquiera de la red. La misma noción se aplica a átomos cuando se trata de cristales. También se le llamad **índice de coordinación o número de primeros vecinos**.

**Definición 1.10 (Familia de planos reticulares).** Conjunto de planos paralelos y equiespaciados que contienen todos los puntos de la red.

**Definición 1.11 (Número de defectos de Schottky).** (vacantes) en un cristal a temperatura  $T$ :

$$n \approx N e^{-\epsilon_v/k_B T} \quad (1.1.2)$$

$N$  es el número de átomos y  $\epsilon_v$  la energía necesaria para formar una vacante. Se desarrolla mejor en los apartados 1.5.1 y 1.5.2.

**Definición 1.12 (Número de defectos de Frenkel).** (vacantes-átomos intersticiales) en un cristal a temperatura  $T$ :

$$n \approx \sqrt{NN'} e^{-\epsilon_v F/k_B T} \quad (1.1.3)$$

$N$  es el número de átomos ,  $N'$  en número de intersticios, y  $\epsilon_v F$  la energía necesaria para formación de un defecto de este tipo. Se desarrolla mejor en los apartados 1.5.1 y 1.5.2.

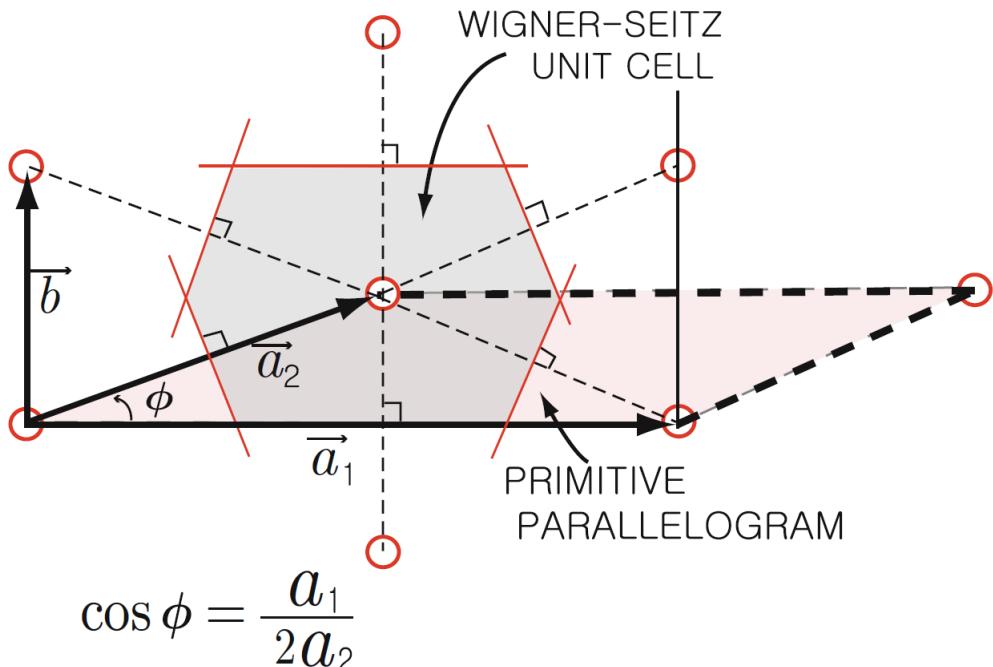


Figura 1.5: celda de Wigner-seitz 2D.

## 1.2. Tipos fundamentales de redes: Redes de Bravais

En la figura 1.6 podemos ver los 14 tipos de redes, llamadas **redes de Bravais**. Solo las celdas etiquetadas como *simples* son primitivas. Estos 14 tipos pueden agruparse a su vez en los 7 *sistemas cristalinos* indicados en la tabla 1.1 (cuando escribimos  $a = b = c$  (o  $a_1 = a_2 = a_3$ ) nos referimos a que todos los lados son igual de largos).

Sistema cristalino	Simetría característica	Número de redes de Bravais	Características de la celda unitaria
Triclínico	Ninguna	1 (Simple)	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
Monoclínico	1 eje de rotación binario ( $n=2$ )	2 (Simple, centrada en las bases)	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
Ortorrómbico	2 ejes binarios ( $n=2$ ) mutuamente perpendiculares	4 (Simple, Centrada en las bases, Centrada en el cuerpo, Centrada en las caras)	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	1 eje cuaternario ( $n=4$ )	2 (Simple, Centrada centrada en el cuerpo)	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Cúbico	4 ejes cuaternarios ( $n=4$ ) perpendiculares entre sí	3 (Simple, Centrada en el cuerpo, Centrada en las caras)	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Hexagonal	1 eje senario ( $n=6$ )	1 (Simple)	$a = b \neq c$ $\alpha = 120^\circ$ $\beta = \gamma = 90^\circ$
Romboédrica	1 eje ternario ( $n=3$ )	1 (Simple)	$a = b = c$ $120^\circ > \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$

Cuadro 1.1: Redes de Bravais en función del sistema cristalino.

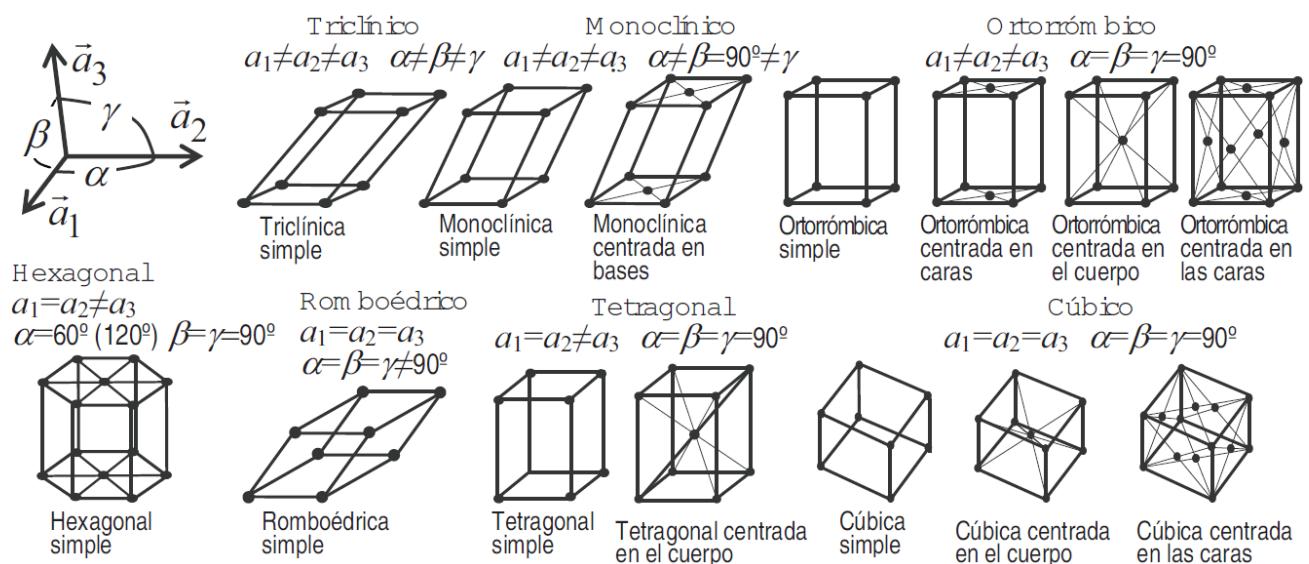


Figura 1.6: celdas unitarias de las 14 posibles redes de Bravais.

### 1.2.1. Características de las redes del sistema cúbico

Las redes del sistema cúbico son las redes más importantes, por tanto conocer sus características (vectores base primitivo, número de primeros y segundos vecinos, distancias entre vecinos...) es fundamental. Por eso presentamos la tabla 1.2, para tener una referencia a la hora de hacer ejercicios. Como siempre la elección de los vectores unitarios primitivos es arbitraria, siempre habiendo otra posible elección. Por ejemplo otro vector base para la *bcc*(de hecho es la escogida en el [3]) puede ser

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0) \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0) \quad \mathbf{a}_3 = (1/2, 1/2, 1/2) \quad (1.2.1)$$

Red (parámetro $a$ )	<i>sc</i>	<i>bcc</i>	<i>fcc</i>
Vectores unitarios por celda convencional	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$
Volumen celda convencional	$a^3$	$a^3$	$a^3$
Puntos de red por celda convencional	1	2	4
Puntos de red por unidad de volumen	$1/a^3$	$2/a^3$	$4/a^3$
Número de vecinos más próximos	$a$	$a\sqrt{3}/2$	$a/\sqrt{2}$
Distancia entre vecinos más próximos	$a$	$a\sqrt{3}/2$	$a/\sqrt{2}$
Número de segundos vecinos	12	6	6
Distancia entre segundos vecinos	$\sqrt{2}a$	$a$	$a$
Vectores unitarios primitivos	$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}}$ $\mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}}$ $\mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}}$	$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}a(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$	$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})$ $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2}a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$

Cuadro 1.2: Características de las redes del sistema cúbico

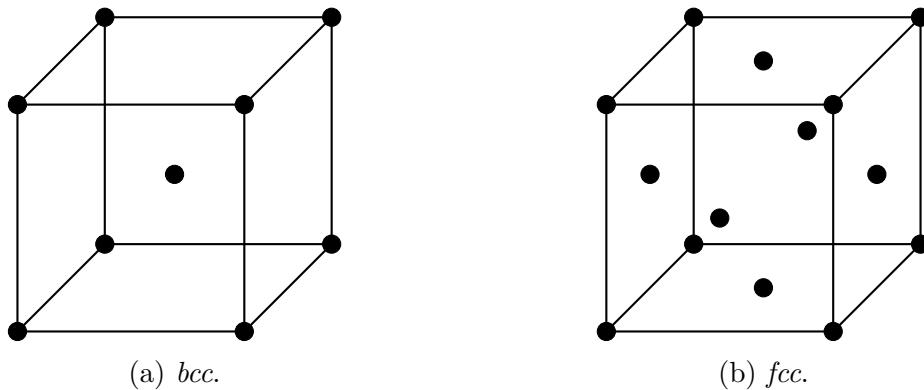


Figura 1.7: Imágenes de las celdas convencionales de la *fcc* y la *bcc*

### 1.2.2. Red diamante

La red diamante tampoco es mencionada en el [1] pero sí en el [4], por lo que es importante describirla, aunque sea escuetamente, para poder hacer algún ejercicio. La **red diamante** es una red *fcc* pero con una base diatómica, de tal modo que si uno de los átomos está en  $\mathbf{r}$  el otro se encontrará en  $\mathbf{r} + a(1/4, 1/4, 1/4)$ .

Las características de la red diamante son las mismas que la fcc pero teniendo en cuenta la base diatómica, por lo que el número de puntos de red para la celda convencional es 4 pero el número de átomos será 8. Por otro lado cambiará el número de primeros vecinos (ahora son 4, ya que cada átomo está en un tetraedro), mientras que la fracción de empaquetamiento es del 34 %. El ángulo entre los vectores que unen dos primeros vecinos con un átomo es de  $108^\circ 47'$ , lo cual se puede calcular usando el producto escalar.

### 1.3. Empaquetamiento compacto

Una pregunta interesante es la de cuáles son las estructuras (cristalinas) más compactas que se pueden construir con esferas iguales. Primero se formaría una capa A de máxima compacidad en la que cada esfera está en contacto con otras seis (círculos continuos de la figura 1.8, parte superior). Una segunda capa B idéntica se situaría encima de la primera, ocupando la mitad de los huecos intersticiales de la capa A. Una tercera capa se puede añadir de dos maneras: sobre los huecos de la primera capa no ocupados por la segunda, dando lugar a la secuencia ABCABC..., o sobre la vertical de las esferas de la primera capa generando la secuencia ABABAB...

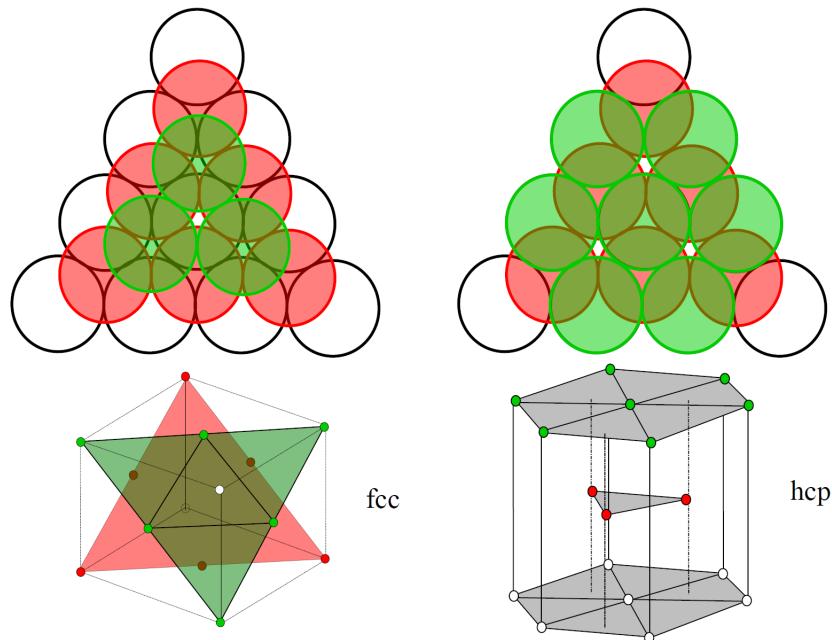


Figura 1.8: Empaquetamiento compacto.

En el primer caso la estructura resultante es una *fcc*, donde las capas de que hablamos son las perpendiculares a la diagonal del cubo (figura 1.8, parte inferior izquierda). En el segundo caso las capas A,B se corresponden con los planos basal e intercalado, respectivamente, de una estructura diagonal compacta (*hcp*) (figura 1.8 parte inferior derecha). Se describe como una red hexagonal (capas A) con una base de dos átomos (capas B). En ambas estructuras el número de coordinación es 12.

**Definición 1.13 (fracción de empaquetamiento).** Definimos la fracción de empaquetamiento (f.e.) como la cantidad de espacio ocupada por los átomos (suponiendo que son esféricos, de radio  $r$ ) en la celda convencional y el volumen de la celda convencional (también se puede usar otra celda, pero por comodidad se usa esta).

Las fracciones de empaquetamiento para algunas de las estructuras más comunes son:

	<i>sc</i>	<i>bcc</i>	<i>fcc</i>	Hexagonal compacta
f.e.	$\frac{\pi}{6} \approx 52\%$	$\frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 68\%$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 74\%$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 74\%$

Cuadro 1.3: fracciones de empaquetamiento compacto para algunas estructuras.

## 1.4. Intersticios o huecos estructurales

Muchos compuestos cristalinos se pueden entender mejor si se conocen los huecos estructurales (entendiendo esto por las mayores oquedades o intersticios entre átomos) asociados a las estructuras básicas. Ilustraremos esto con las redes del sistema cúbico. Ilustraremos esto con la figura 1.9.

En la red *fcc* los mayores huecos son octaédricos, de radio  $0,41R$ . Hay tantos huevos octaédricos como átomos, situándose en los centros de los cubos y de las aristas. Hay también huecos tetraédricos de radio  $0,22R$ . Hay el doble de número de huecos tetraédricos que de átomos. Así, el NaCl es descriptible como una *fcc* de iones  $\text{Cl}^-$  en cuyos intersticios octaédricos se sitúan los iones de  $\text{Na}^+$ . También el diamante o la blenda de cinc se pueden considerar como una estructura *fcc* (de C ó S) en la que la mitad de los huecos tetraédricos están ocupados por los átomos de C o de Zn, respectivamente. En la *bcc* los huecos más grandes son los tetaédricos, aunque también son los más difíciles de visualizar (véase imágenes inferiores de la figura 1.9).

En la red *bcc* existen 6 huevos octaédricos (distorsionados) por celda, situados en los centros de las caras y de las aristas. Sin embargo, los mayores intersticios se dan en los 12 tetaédricos (también distorsionados) por celda: su radio es  $0,29R$ . Como un ejemplo de aplicación, digamos que la gran movilidad de los iones  $\text{Ag}^+$  en el  $\text{AgI}$ , un excelente electrolito sólido usado en pilas de estado sólido, proviene de que los 2 iones  $\text{Ag}^+$  por celda se distribuyen estadísticamente entre las 12 posiciones tetraédricas de la red *bcc* que forman los iones  $\text{I}^-$  saltando fácilmente de unas a otras.

## 1.5. Defectos y desorden en los cristales

El cristal perfecto tal como se ha introducido no existe, sino que posee varias clases de imperfecciones o defectos que suelen clasificarse en cuatro clases atendiendo a su dimensión, es decir, su número de dimensiones espaciales en las cuales las alteraciones de la estructura se extienden a distancias (mucho) mayores que el parámetro de red, tal y como se indica en la tabla.

### 1.5.1. Defectos puntuales

El defecto puntual más simple es la vacante: ausencia de un átomo en su posición de la red (defecto de Schottky). Se forman cuando, debido a la agitación térmica, algunos átomos de la capa más próxima a la superficie saltan a ésta. Este hueco emigra por el interior del cristal pues se necesita poca energía para que un átomo vecino se mueva a una vacante, dejando su propio sitio vacío. Los cristales iónicos, donde las vacantes se forman a pares para mantener la neutralidad eléctrica, deben su débil conductividad [ $\sigma \approx 10^{-6}(\Omega m)^{-1}$  vs  $10^8(\Omega m)^{-1}$  de los metales] a esta movilidad de sus átomos. Otro tipo de defecto puntual (térmico) es el defecto de

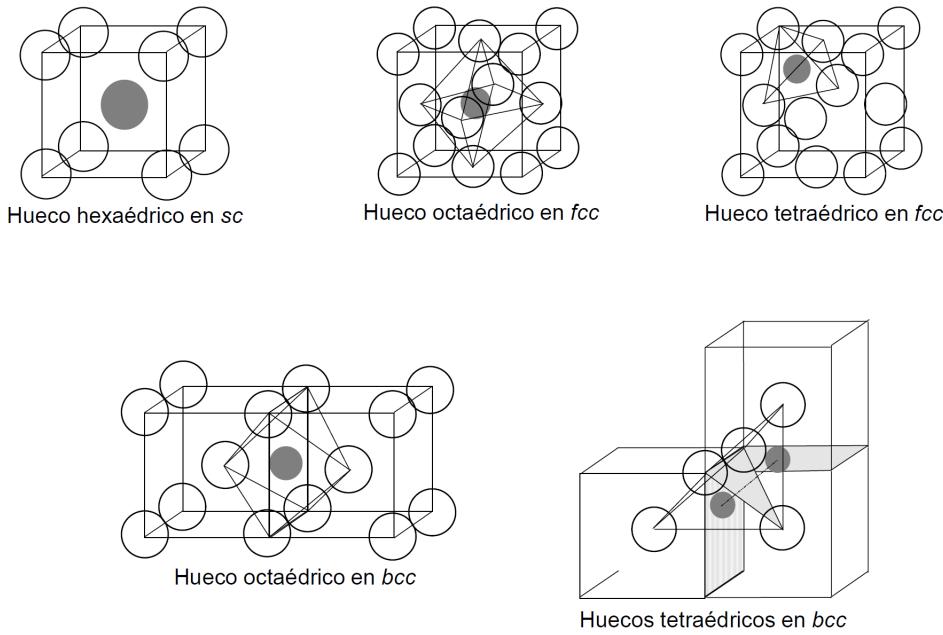


Figura 1.9: Localización de algunos huecos.

Defecto	Descripción	Ejemplos	Origen
Puntual	Alteración localizada en puntos aislados del cristal. Su extensión no supera en ninguna dirección más de una o unas pocas veces el parámetro de red.	- Vacantes - Átomos intersticiales - Impurezas sustitucionales/intersticiales - Huecos dobles, triples, etc.	- Térmico - Irradiación - Desviaciones de la estioquimetría - Deformación plástica
Lineal	Alteración en 1 dirección muchas veces el parámetro de red	- Dislocaciones - Cadenas de defectos puntuales	- Proceso de crecimiento - Deformación plástica
Superficial	Alteración en 2 direcciones muchas veces el parámetro de red	- Bordes de granos - Maclas - Superficies del cristal	- Proceso de crecimiento - Deformación plástica - Impurezas en la masa fundida
Espacial	Alteración en las 3 direcciones muchas veces el parámetro de red	- Poros - Inclusiones de otra fase	Ídem

Cuadro 1.4: Clasificación de los principales defectos en cristales.

Frenkel, que es un átomo que ha abandonado el nudo de la red y que se aloja en un intersticio. Se trata en realidad de la combinación de una vacante y un átomo intersticial.

Los defectos de Schottky o las impurezas sustitucionales se encuentran de ordinario en los cristales de empaquetamiento denso (*fcc* o *hcp*), en los cuales el alojamiento de átomos en los intersticios es difícil, mientras que los defectos de Frenkel o las impurezas intersticiales suelen

formarse en los cristales de empaquetamiento menos denso (diamante), aunque, en el caos de la adición de impurezas, el tipo de defecto que se forme depende del tamaño del átomo de impureza. Por ejemplo, cuando se carburiza hierro (*bcc*), el carbono, por su pequeño tamaño, se difunde hacia el interior intersticialmente. En cambio, las impurezas con que se dopan los semiconductores (diamante) se sitúan en las posiciones regulares. Otro ejemplo son las aleaciones. Así, el bronce no es sino el Cu metálico en el que una pequeña proporción de sus átomos ha sido sustituida por átomos de Sn, constituyendo una solución sólida.

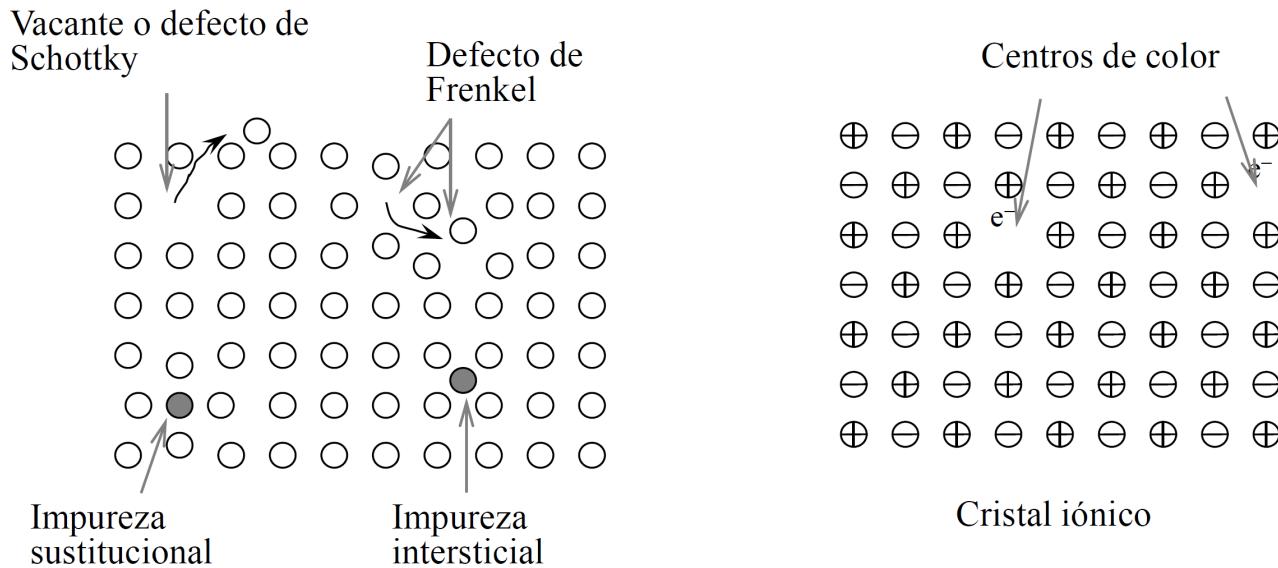


Figura 1.10: Defectos puntuales.

En los cristales iónicos también los electrones pueden participar en la formación de defectos, como los llamados *centro de color* (en los haluros alcalinos, por ejemplo), donde un hueco aniónico (ausencia de un ion negativo) atrapa a un electrón libre. El electrón, así atrapado, tiene una espectro de niveles similar al de los niveles atómicos. Así, este centro F hace que aparezca una banda de absorción en la *región visible* del espectro. A esto se debe que un cristal de haluro alcalino incoloro se coloree cuando se fuerza la aparición de huecos aniónicos por irradiación con rayos  $x$  o  $\gamma$ .

### 1.5.2. Concentración de defectos térmicos puntuales en equilibrio

La formación de defectos puntuales requiere un aporte de energía al cristal proporcional a la energía de enlace (así, por ejemplo, la energía de formación de un hueco es el Ge es  $\sim 2$  eV). Sin embargo, a temperaturas relativamente altas resulta energéticamente rentable la existencia de defectos. Esto se debe a que la formación de defectos puntuales no sólo aumenta la energía interna,  $E$ , del cristal, sino que también aumenta su entropía,  $S$ , de forma que a una temperatura  $R$  la energía libre,  $F = E - TS$ , es mínima para una cierta concentración,  $n$ , de defectos.

Supóngase que hay un sólo tipo de defectos, por ejemplo de Schottky. Si  $\epsilon_v$  es la energía para formar una vacante, la necesaria para formar  $n$ , aisladas y no interaccionantes, será  $n\epsilon_v$ . La entropía (de configuración) es  $S = k_B \ln \Gamma$ , donde  $\Gamma$  es el número de microestados compatibles con el macroestado, en este caso, simplemente el número de maneras en que  $n$  vacantes pueden disponer entre  $N$  nudos. Así:

$$S = k_B \ln \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (1.5.1)$$

Usando la fórmula de Stirling:  $\ln x! \approx x(\ln x - 1)$ , para  $x \gg 1$ , la energía libre se escribe

$$F = n\epsilon_v - k_B T [N \ln N - (N-n) \ln(N-n) - n \ln n] \quad (1.5.2)$$

En equilibrio térmico,  $(\partial F / \partial n)_T = 0 \Rightarrow \epsilon_v = k_B T \ln[(N-n)/n]$ , que para  $n \ll N$  permite despejar

$$n \approx N e^{-\epsilon_v / k_B T} \quad (1.5.3)$$

Como ejemplo numérico, para  $T = 1000\text{K}$  y  $\epsilon_v \approx 1\text{ eV}$  se tiene que  $n/N \approx 10^{-5}$ . Análogamente, se tratan los defectos de Frenkel. En este caso hay que considerar no sólo las posibilidades de disponer de  $n$  vacantes entre  $N$  nudos, sino también las posibilidades para disponer de  $n$  átomos entre  $N'$  intersticios  $\Gamma = \frac{N!}{(N-n)!n!} \frac{N'!}{(N'-n)!n!}$ . Por lo que el número de defectos en el equilibrio en este caso es:

$$n \approx \sqrt{NN'} e^{-\epsilon_F / k_B T} \quad (1.5.4)$$

donde  $\epsilon_F$  es la energía necesaria para la formación de un defecto de Frenkel.

### 1.5.3. Defectos de línea

En la figura 1.11 se representan un ejemplo del llamado defecto lineal. Se trata de una dislocación en arista, también llamada dislocación de borde y de una dislocación helicoidal. La dislocación de borde se ha producido como resultado del desplazamiento en una distancia atómica de una parte del cristal, la derecha con respecto al plano OMN, mientras que la mitad izquierda permanece inmóvil. Como se puede ver, a  $p$  planos atómicos situados debajo del plano de desplazamiento corresponden  $p+1$  palmos por encima de dicho plano. El límite dentro la región que ha deslizado y la inmóvil se llama línea de dislocación. Cerca de ésta el cristal está muy deformado. Todo ocurre como si se hubiera removido del cristal un semiplano que termina en la línea de dislocación (también puede pensarse que se añade un semiplano extra). Convencionalmente, la dislocación en arista se designa por el símbolo  $\perp$ , que apunta hacia el semiplano extra.

Existe una importante relación entre dislocaciones y ciertas propiedades mecánicas como la deformación plástica, que aquí solo se tratan someramente. Por ejemplo, en la figura 1.12, para trasladar la dislocación de un extremo a otro solo se requiere un desplazamiento insignificante de los átomos. Una analogía es la arruga en una alfombra: la arruga se mueve más fácilmente que toda la alfombra. De esta forma se puede calcular que valores muy bajos de las tensiones aplicadas a un cristal son suficientes para iniciar una deformación plástica, como en efecto se observa experimentalmente.

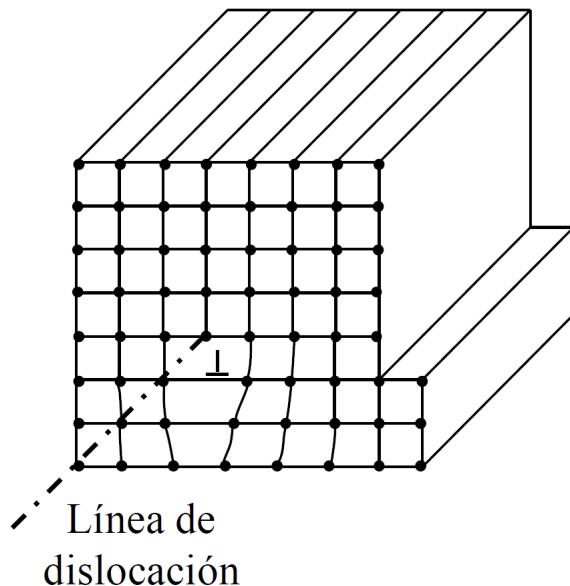


Figura 1.11: Defectos de línea: línea de dislocación.

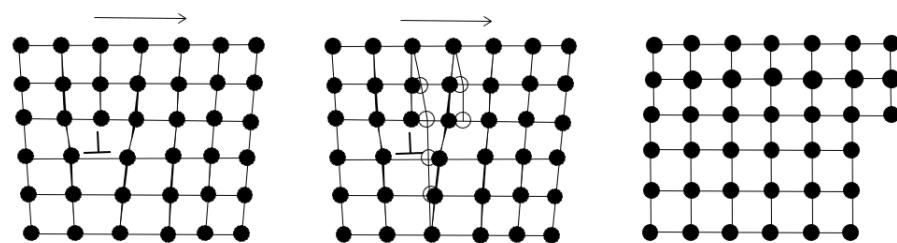


Figura 1.12: Desplazamiento de una dislocación bajo fuerza de cizalla.



# 2

## Red recíproca y difracción de rayos X

El objetivo es estudiar cómo se utiliza la difracción de ondas por el cristal para determinar el tamaño de la celda, la posición de los átomos y la distribución de electrones dentro de la celda. Las radiaciones con longitud de onda  $\lambda$  del orden la constante de red  $a$  (algunos  $A$ ), *ven* la estructura atómica del cristal de modo que cada átomo en el cristal es un (re)emisor independiente. La onda difractada depende de todas las posiciones atómicas pues se trata de una *interferencia interna* que es constructiva para ciertas direcciones de salida. A partir de la observación experimental de las *direcciones de máximo* se obtiene importante información de la estructura del cristal. La radiación más utilizada son los rayos  $x$  (con  $\lambda \sim a$ ) algunas de cuyas limitaciones son la dificultad de detectar elementos ligeros como el H, así como diferenciar entre átomos de número atómico próximo. Los electrones, por su menor penetración (interaccionan fuertemente), se utilizan para sondar superficies o capas delgadas. Los neutrones son utilizados para localizar el H en sólidos y sistemas biológicas y el estudio de estructuras magnéticas (gracias al espín).

### 2.1. Red recíproca en tres dimensiones

En esta sección seguiremos las definiciones del Oxford Basics [3], ya que nos parece, desde nuestro punto de vista, un temario mucho mejor formulado. Si bien es cierto que los conceptos están mucho más desarrollados, también se hará un poco más largo que en el manual [1].

#### 2.1.1. Definición de la red recíproca

Toda estructura cristalina tiene dos redes asociadas; la red cristalina y la red recíproca. Los vectores de la red recíproca tienen dimensiones de [1/longitud]. Esta se puede entender como una red en el espacio de fourier asociado con el cristal.

**Definición 2.1 (Red recíproca).** *Dado una red de puntos  $\mathbf{R}$ , un punto  $\mathbf{G}$  pertenece a la **red recíproca** si y solo si se verifica*

$$e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}} = 1 \quad (2.1.1)$$

*para todos los puntos  $\mathbf{R}$  de la red.*

Para reconstruir la red recíproca primero escribimos los puntos de la **red real** o **red directa** (ahora se nombrará así para diferenciarla de la red recíproca) como:

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \quad (2.1.2)$$

donde los  $n_i$  son enteros y  $\mathbf{a}_i$  vectores primitivos de la red directa. Hacemos dos enunciados clave ahora:

- Decimos que la red recíproca es una red en el espacio recíproco (explicaremos este concepto más tarde).
- Los vectores primitivos de la red recíproca están definidos como

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij} \quad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.1.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Para que se verifique la ecuación anterior los vectores  $\mathbf{b}_i$  deben ser de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \\ \mathbf{b}_3 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Dados los vectores  $\mathbf{b}_i$  hemos dicho que si satisfacen la ecuación 2.1.1 estos son los vectores primitivos de la red recíproca. Para comprobar esto vamos a definir como un *punto arbitrario del espacio recíproco*

$$\mathbf{G} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3 \quad (2.1.5)$$

y, por el momento, no vamos a exigir que  $m_i$  sean enteros (de hecho va a ser la propia imposición de que  $\mathbf{G}$  es un punto de la red recíproca la que nos va a obligar a que sean enteros). Tal y como hemos definido la red recíproca, el vector  $\mathbf{G}$  descrito antes debe verificar que la siguiente ecuación sea igual a 1:

$$e^{\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}} = e^{i(m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3) \cdot (n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3)} = e^{2\pi i(n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3)}$$

es trivial que si los  $m_i$  son enteros esta propiedad se verifica siempre. Esto prueba que la red recíproca es, en verdad, una red, ya que se construye como la combinación lineal entera de vectores  $\mathbf{b}$  linealmente independientes.

La obtención de redes recíprocas asociadas a redes directas exige trabajar con vectores base primitivos pues sólo entonces la ecuación 2.1.4 es válida. Como ejemplo, considérense las tres redes del sistema cúbico. Denotando por  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  los vectores de las tres aristas del cubo convencional de arista  $a$ , unos vectores base primitivos son:

$$\begin{array}{llll} sc) & \mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{i}} & \mathbf{a}_2 = a\hat{\mathbf{j}} & \mathbf{a}_3 = a\hat{\mathbf{k}} \\ bcc) & \mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) \\ fcc) & \mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) & \mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \end{array}$$

Aplicando ahora las relaciones 2.1.4 a los vectores base anteriores es fácil deducir que la red recíproca de la *sc* es otra *sc* de constante de red  $2\pi/a$ ; la red recíproca de la *bcc* es una red *fcc* con constante de red  $4\pi/a$ ; la de la *fcc* es una *bcc* con constante de red  $4\pi/a$ .

### 2.1.2. Red recíproca como transformada de Fourier

Este apartado tampoco está en el manual de referencia [1] explícitamente, si no que lo dan a cuentagotas, lo cual es un error, desde nuestra perspectiva, ya que nos permitirá entender mejor que es el factor de forma, fundamental para las secciones posteriores. Para este apartado recomendamos el [3].

En general uno puede pensar en una red recíproca como una transformada de Fourier de la red directa. La mejor manera de entenderlo es suponer un espacio 1-dimensional, y luego generalizar el resultado. Supongamos una red dada por  $R_n = an$ . Si queremos describir la “densidad” de puntos de red en una dimensión, necesitamos una función delta de tal modo que la densidad

$$\rho(r) = \sum_n \delta(r - an) \quad (2.1.6)$$

Las transformadas de Fourier de esta función nos dan:

$$\mathcal{F}[\rho(r)] = \int e^{ikr} \rho(r) dr = \sum_n \int e^{ikr} \delta(r - an) dr = \sum_n e^{ikan} = \frac{2\pi}{|a|} \sum_m \delta(k - 2\pi m/a) \quad (2.1.7)$$

El último paso no es trivial <sup>1</sup>. Como se puede ver  $e^{ikan}$  es la unidad cuando  $k = 2\pi m/a$ , esto es, si  $k$  es un punto de la red recíproca. Si  $k$  no tiene ese valor, entonces los términos de la suma irán oscilando de tal manera que se van cancelando entre ellos, por lo que el resultado será 0. Para obtener el prefactor hay que hacer más calculos, y puede llegar a ser un poco complicado.

Generalizando el resultado al caso D dimensional:

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} = \frac{(2\pi)^D}{v} \sum_{\mathbf{G}} \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{G}) \quad (2.1.8)$$

donde  $v$  es el volumen de la celda. Se puede ver que el término del medio se realiza en la red directa mientras que el último término en la red recíproca. Como se puede comprobar, si  $\mathbf{k}$  es un miembro de la red recíproca, tendremos que  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$  es siempre igual a uno y por tanto la suma es infinita. Sin embargo si  $\mathbf{k}$  no es un vector de la red recíproca, tendremos que los sumandos de la suma oscilarán cancelándose mutuamente. Así obtenemos que los picos de la delta de Dirac ocurren en las posiciones de los vectores de la red recíproca.

#### Transformada de Fourier de una función periódica cualquiera

En la anterior sección hemos considerado la transformada de Fourier de una función  $\rho(\mathbf{r})$  como una Delta de Dirac de los puntos de red. Sin embargo, no obtendríamos un resultado tan diferente si consideramos la transformada de Fourier de *cualquier* función periódica en la red. Sea  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  para un vector de la red  $\mathbf{R}$ . Queremos calcular

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \quad (2.1.9)$$

La integral sobre todo el espacio es equivalente a la suma de integrales sobre cada celda unitaria. Como odas las celdas unitarias son iguales esto equivale a hacer:

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = \sum_{\mathbf{R}} \int_{\text{celda-unitaria}} d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{R})} \rho(\mathbf{x} + \mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \int_{\text{celda-unitaria}} d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) \quad (2.1.10)$$

<sup>1</sup>Este paso es conocido como la fórmula de Poisson

donde hemos supuesto la invariancia de  $\rho$  bajo traslaciones por vector de red. La suma de exponentiales nos da una suma de deltas de Dirac igual que en la ecuación 2.1.8:

$$\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})] = (2\pi)^D \sum_{\mathbf{G}} \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{G}) S(\mathbf{k}) \quad (2.1.11)$$

donde

$$S(\mathbf{k}) = \int_{\text{celda-unidad}} d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) \quad (2.1.12)$$

### 2.1.3. Familias de planos reticulares

Otra manera de entender la red recíproca es mediante los planos reticulares:

**Definición 2.2.** Definimos como **plano reticular**<sup>2</sup> es un plano que contiene al menos 3 puntos de red no colineales<sup>3</sup> y que por tanto contiene un número infinito de planos.

**Definición 2.3.** Una **familia de planos reticulares** es un conjunto infinito de planos equiespaciados que, como conjunto, contienen todos los puntos de la red.

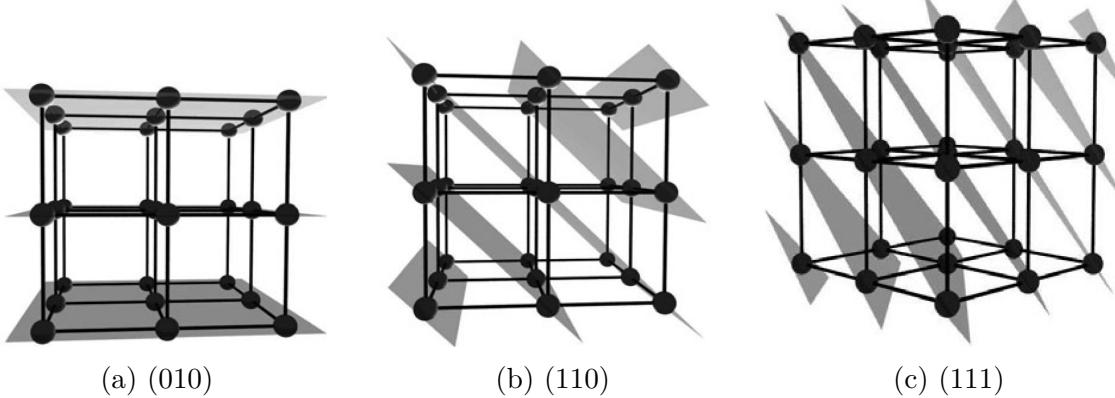


Figura 2.1: familias de planos reticulares para la red cúbica sc según la notación de Miller.

Las familias de planos reticulares tienen una correspondencia uno a uno con las direcciones de los posibles vectores de la red recíproca. Esta correspondencia se debe a que *los vectores de la red recíproca son normales a los planos reticulares*. Además el **espacio entre planos reticulares**  $d$  viene dado por

$$d = \frac{2\pi}{|\mathbf{G}_{\min}|} \quad (2.1.13)$$

donde  $|\mathbf{G}_{\min}|$  es el *vector más pequeño con dirección normal al plano*.

### 2.1.4. Planos reticulares e índices de Miller

Existe una notación muy interesante y útil para describir los planos reticulares, asignando a cada plano una terna  $(h,k,l)$  conocida como **índice de Miller**. Para ver cómo podemos describir

<sup>2</sup>También se les puede llamar **planos de red**.

<sup>3</sup>Definimos como puntos colineales aquellos puntos que se encuentran en una misma recta.

un plano reticular con una terna, tenemos que empezar definiendo un vector de nuestra red recíproca como:

$$G_{(h,k,l)} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3 \quad (2.1.14)$$

de tal forma que  $h, k$  y  $l$  son siempre positivos. Dado que  $\mathbf{b}_i$  es un vector primitivo de la red recíproca, cada uno de los diferentes valores de  $h, k, l$  da un vector de la red recíproca diferente. Dado que para cada familia de planos reticulares existe un vector de la red recíproca existe un  $\mathbf{G}$  normal a ellos, y que para cada vector de la red recíproca tenemos una terna  $(h, k, l)$ , podemos afirmar que a cada familia de planos reticulares le corresponde una terna. Sin embargo para  $(hkl)$  deben verificar que no tienen divisores comunes, ya que de tenerlos el vector recíproco no será el vector más corto en dicha dirección y por tanto describirá una familia de planos que no contendrán puntos de red.

Este comentario es sumamente importante. Para una red cúbica (*sc*, *fcc*, *bcc*) es conveniente elegir como los vectores  $\mathbf{a}_i$  los vectores  $a\hat{\mathbf{i}}$ ,  $a\hat{\mathbf{j}}$  y  $a\hat{\mathbf{k}}$  ( $a$  longitud del cubo). Es decir, elegimos los vectores de la celda convencional unitaria. De esta manera los vectores  $\mathbf{b}_i$  son  $2\pi\hat{\mathbf{i}}/a$ ,  $2\pi\hat{\mathbf{j}}/a$  y  $2\pi\hat{\mathbf{k}}/a$ . Como estos vectores no son primitivos para las redes *fcc* y *bcc*, tampoco serán primitivos los vectores  $\mathbf{b}_i$  para la red recíproca. Esto nos lleva a que a estas redes no todos los índices de Miller  $(hkl)$  les corresponde una familia de planos reticulares. Esto se puede ver bien en la figura siguiente para la *bcc*:

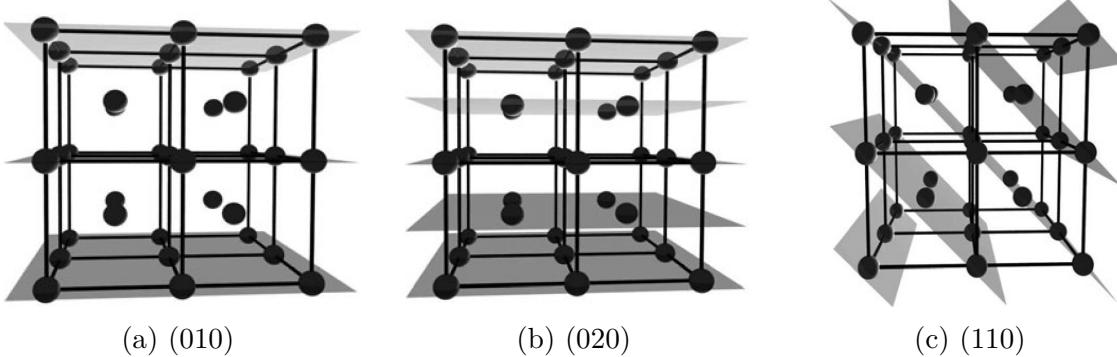


Figura 2.2: familias de planos reticulares para la red cúbica *bcc* según la notación de Miller. Se puede ver que la (010) no describe adecuadamente la red *bcc*.

De la ecuación 2.1.13 podemos deducir que para una familia de planos reticulares definidas por los índices de Miller están separadas una distancia

$$d_{(hkl)} = \frac{2\pi}{|\mathbf{G}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{h^2|\mathbf{b}_1|^2 + k^2|\mathbf{b}_2|^2 + l^2|\mathbf{b}_3|^2}} \quad (2.1.15)$$

De manera equivalente

$$\frac{1}{|d_{(hkl)}|^2} = \frac{h^2}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_2^2} + \frac{l^2}{a_3^2} \quad (2.1.16)$$

Si  $|\mathbf{b}_i| = 2\pi/|\mathbf{a}_i|$  (red cúbica) tenemos que:

$$d_{(hkl)} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \quad (2.1.17)$$

Cuando hablamos del plano (200) entendemos un plano paralelo pero que corta al eje  $\mathbf{a}_1$  en un punto distante a  $a/2$  en el origen. Los índices  $[uvw]$  de una dirección en un cristal son el junio

de los números enteros más pequeños que poseen la relación de los componentes de un vector en la dirección deseada. En cristales cúbicos la dirección  $[hkl]$  es perpendicular a un plano  $(hkl)$  que posean los mismos índices, pero no es necesariamente cierto para otros sistemas cristalinos.

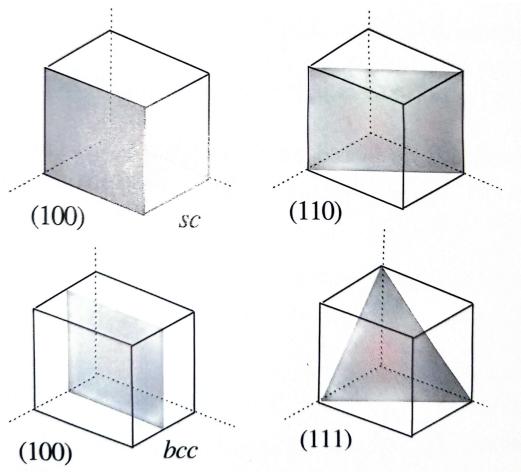


Figura 2.3: Algunos planos reticulares para las redes cúbica simple (*sc*) y centrada en el cuerpo (*bcc*) y sus índices de Miller.

### 2.1.5. Zonas de Brillouin

Las zonas de Brillouin jugarán un papel fundamental en los temas posteriores, por lo que tener el concepto claro es fundamental, ya que nos permite describir las excitaciones del espectro de ondas en estructuras periódicas, como los cristales, por lo que será útil para poder estudiar el comportamiento del sonido, o de la luz en su interior.

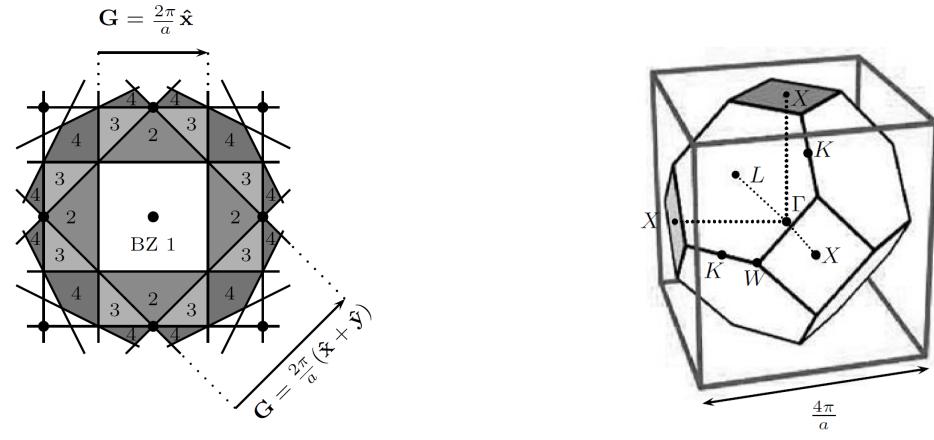
**Definición 2.4.** Definimos una **zona de Brillouin** como una celda primitiva de la red recíproca.

Como se comporta el cristal bajo una onda  $\mathbf{k}$  permanece invariante si hacemos una transformación del tipo  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{G}$ . De esta manera podemos darnos cuenta de que la cantidad relevante aquí es el momento cristalino, y no el momento de la onda. Por eso mismo la zona de Brillouin se ha definido de tal forma que incluye todos los momentos posibles con comportamiento diferentes entre sí (en una zona de Brillouin cada punto  $\mathbf{k}$  se comporta de manera diferente a cualquier otro  $\mathbf{k}$  de la zona). Mientras que la definición más general de la zona de Brillouin nos permite elegir una forma cualquiera de la celda primitiva (recordar que hay varias elecciones siempre), en general existen algún tipo de celdas más convenientes que otras.

Definiremos la *primera zona de Brillouin* en el espacio recíproco de la misma manera que definimos la celda de Wigner-Seitz en la red directa.

**Definición 2.5.** Comenzando por un punto de la red recíproca  $\mathbf{G} = 0$ , todos los  $\mathbf{k}$  que están mas cerca a  $\mathbf{0}$  que de cualquier otro punto de la red recíproca decimos que se encuentran en la **primera zona de Brillouin**. De manera parecida, todos los puntos  $\mathbf{k}$  que su segundo punto más cercano es el  $\mathbf{0}$ , decimos que pertenece a la **segunda zona de Brillouin**. De manera análoga podemos definir la tercera, cuarta... zona de Brillouin.

Al igual que la celda de Wigner-Seitz, existe un algoritmo simple para construir las zonas de Brillouin. Dibuja las líneas entre los vecinos, y traza una línea perpendicular en el punto mitad entre ambos vecinos. Estas bisectrices formarán las fronteras de las zonas de Brillouin. Cualquier punto que puedas obtener desde el  $\mathbf{0}$  hasta una de las fronteras es un vector de la primera zona de Brillouin (véase imagen 2.4a). La construcción de la primera zona de Brillouin análoga a la la celda de Wigner-Seitz.



(a) zonas de Brillouin red cuadrada. (b) primera zona de Brillouin de la red fcc.

Figura 2.4

## 2.2. Difracción

Sea una onda plana  $e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  incidente sobre un cristal. Vamos estudiar la amplitud de la onda dispersada en la dirección  $\mathbf{k}'$  (ver figura 2.5a) suponiendo *dispersión elástica* ( $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ )

$$A_{\text{salida}} \propto \sum_{m,n} f_{mn} e^{i\Delta\phi_{mn}} \quad (2.2.1)$$

siendo  $\Delta\phi_{mn} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot d_{mn}$  la diferencia de fase entre la onda reemitida por un centro dispersor ( $m$ ) y otro ( $n$ ) a  $d_{mn}$  del primero. La suma ( $m, n$ ) a todos los centros dispersores puede hacerse sumando a todas las celdas en *posiciones de red*  $\mathbf{R}_n$  y a todos los átomos de la base en posiciones  $\mathbf{r}_j$  dentro de cada celda.

Según se indica  $d_{mn} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_j$  con lo cualquiera

$$A_{\text{salida}} \propto \sum_{n,j} f_j e^{-i(\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_j) \cdot \Delta\mathbf{k}} = \sum_j^{\text{base}} f_j e^{-i\mathbf{r}_j \cdot \Delta\mathbf{k}} \sum_n^{\text{red}} e^{-i\mathbf{R}_n \cdot \Delta\mathbf{k}} \quad (2.2.2)$$

con  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ . A  $f_j$  es el llamado *factor de forma atómico*, que da cuenta del distinto *poder dispersor* de los átomos de la base. El máximo de  $A_{\text{salida}}$  lo marca el segundo factor que suma a toda la red, pues es una suma del orden de  $10^{23}$  términos frente a unos pocos del primero. Este máximo se alcanza con la condición de que

$$\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n = 2\pi \times \text{entero} \quad (2.2.3)$$

para cualquier vector de red  $\mathbf{R}_n$ . La interpretación es que todas las celdas (son las celdas las que están conectadas por vectores de red) deben reemitir en fase para que la suma sea máxima (ver figura 2.6a).

La condición 2.2.3 para  $\Delta\mathbf{k}$  es precisamente la definición de red recíproca. Así pues, el resultado básico es que para que haya máximo de difracción (interferencia constructiva) se debe satisfacer

$$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{G} \quad (2.2.4)$$

o bien  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}$ . Elevando la ecuación 2.2.4 y teniendo en cuenta que  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$  es inmediato ver que esta condición se puede escribir en función del vector de ondas de la radiación incidente y de los vectores de la red recíproca del cristal:  $2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} + |\mathbf{G}|^2 = 0$ . Reemplazando  $\mathbf{G}$  por  $-\mathbf{G}$  en esta expresión, la condición de difracción es:

$$2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} = |\mathbf{G}|^2 \iff \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}|\mathbf{G}| \quad (2.2.5)$$

y la dirección en la que se observa el máximo es entonces  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{G}$ .

Llamando *plano Bragg* a aquel que es mediatrix a cualquier vector de red de la red recíproca, la interpretación de 2.2.5 es que se da la condición de difracción para los índices  $\mathbf{k}$  incidentes tales que, con origen en un punto cualquiera de la red recíproca su extremo caiga sobre un plano de Bragg (figura 2.6b). En particular, lo anterior es válido para la frontera de la *PZB* por estar formada por planos de Bragg.

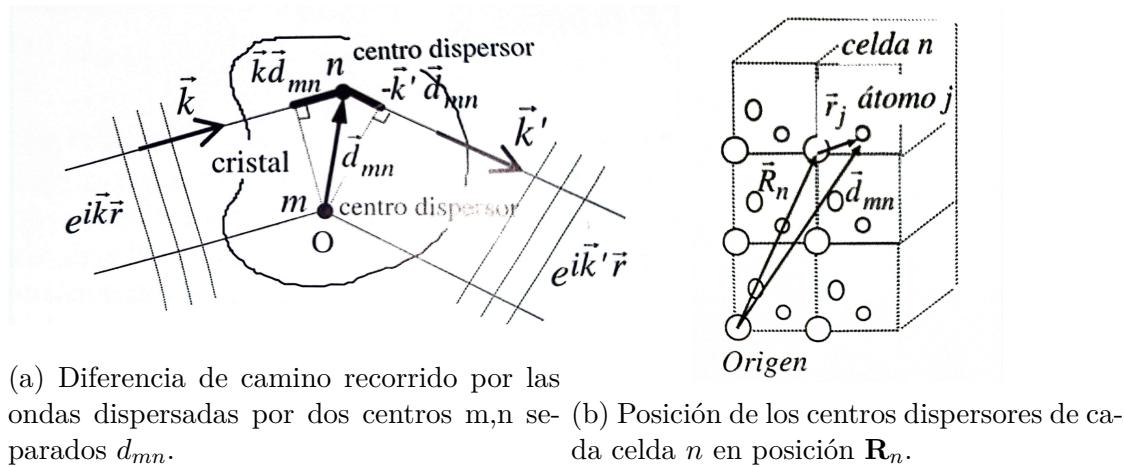


Figura 2.5

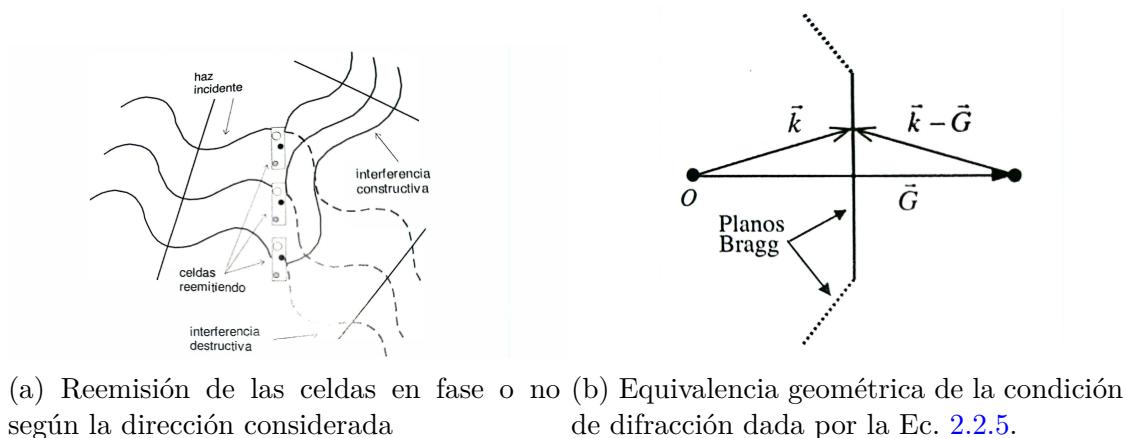


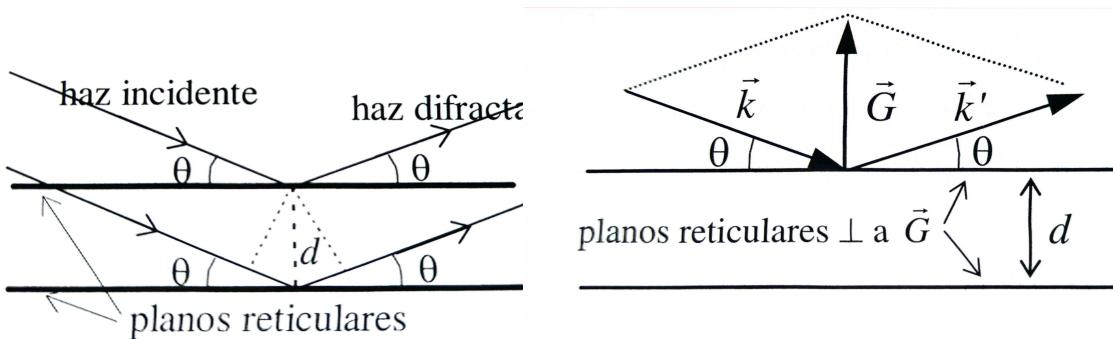
Figura 2.6

### 2.2.1. Ley de Bragg

Otra formulación equivalente de la condición de difracción es la llamada **ley de Bragg** (1913), que admite que la radiación sufre una reflexión especular en los distintos planos reticulares (figura 2.7a) de modo que sólo si las reflexiones de dos sucesivos planos están en fase se observará máximo de difracción. Es muy fácil de ver que la diferencia de caminos entre planos sucesivos es de  $2d \sin \theta$  por lo que esta cantidad deberá ser múltiplo entero de longitudes de onda  $\lambda$ , es decir,

$$n\lambda = 2d \sin(\theta) \quad (2.2.6)$$

La equivalencia de la ley de Bragg (ecuación 2.2.6) con la formulación más general de las ecuaciones 2.2.3 y 2.2.4 se deduce la correspondencia vista entre vectores de la red recíproca y sistemas de planos reticulares. En efecto, el vector  $\mathbf{G}$  a que hace referencia 2.2.4 de componentes  $(h'k'l')$  no necesariamente primos entre sí, verifica  $G = 2k \sin \theta$  (figura 2.7b). Sea ahora  $\mathbf{G}_0$  el vector de la red recíproca paralelo a  $\mathbf{G}$  más corto, que debe tener componentes  $(hkl)$  primas entre sí (por no haber otro más corto), y que verifica  $\mathbf{G} = n\mathbf{G}_0$  (en componentes  $h' = nh$ ,  $k' = nk$ ,  $l' = nk$ ). Como  $G_0 = 2\pi/d$  (ecuación 2.1.13), al sustituir resulta  $n2\pi/d = 2k \sin(\theta) \Rightarrow n\lambda = 2d \sin(\theta)$ .



(a) Diferencia de camino recorrido por los haces reflejados especularmente por dos planos reticulares consecutivos.  
(b) Correspondencia entre vectores de la red recíproca  $\mathbf{G}$  y sistemas de planos de la red directa.

Figura 2.7

### 2.3. Factor de estructura

Se trata de precisar ahora la intensidad de los distintos máximos de difracción. En condición de máximo, la amplitud dispersada (dirección  $\hat{\mathbf{k}}'$ ) es por 2.2.2 y 2.2.3, viene dada por

$$A_{\text{salida}} \propto N \sum_j^{\text{base}} f_j e^{-i\mathbf{r}_j \cdot \Delta\hat{\mathbf{k}}} = NS_{\mathbf{G}} \quad (2.3.1)$$

siendo  $N$  el número de celdas. El sumatorio denotado por  $S_{\mathbf{G}}$  representa una *suma interferencial dentro de una celda* y se denomina *factor de estructura de la base*.

Para bases poliatómicas puede ocurrir que algunos máximos de difracción permitidos por la red estén prohibidos por la base atómica ( $S_{\mathbf{G}} = 0$ ), lo que proporciona una valiosa información sobre su estructura. Por ejemplo, considerando la cúbica bcc (monoatómica) como una sc con

base, están prohibidas las reflexiones ( $hkl$ ) que verifican  $h + k + l = \text{entero impar}$  (por ejemplo 200 tendría pico pero 111 no); si se trata de una *fcc* son nulas las reflexiones en que  $h, k$  y  $l$  tienen *distinta paridad* (por ejemplo el 200 tendría pico, pero 210 no ya que hay un impar y dos pares, mientras que 113 si al ser todos impares). La estructura de diamante tiene un criterio de selección bastante enrevesada, *apareciendo un pico si*

$$\text{Condición } fcc \text{ AND } \{(h + k + l = \text{impar}) \text{ OR } (h + k + l = 2\text{par})\}$$

Solo queda por precisar que el factor de forma del átomo genérico  $f_j$ , a su vez, no es sino una suma interferecnial interna (intraatómica).

$$f_j = \int n_j(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{G}} d^3\rho \quad (2.3.2)$$

siendo  $n_j(\boldsymbol{\rho})$  la concentración electrónica en el elemento de volumen atómico  $d^3\rho$  del átomo  $j$ , y donde ya se ha supuesto condiciones de máximo de difracción ( $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{G}$ ). El factor de forma atómico, obteniendo de la difracción de rayos x da información de la distribución atómica, observándose diferencias de sólo unos pocos por ciento respecto de los valores teóricas de los átomos libres.

## 2.4. Diagramas de difracción

La condición de máximo (interferencia constructiva), tal como se expresa por ejemplo en la ley de Bragg, es muy exigente pues para observar un máximo de difracción en cierta dirección [figura 2.8 (a)] es necesario no sólo que exista un sistema de planos con la orientación adecuada (con respecto al haz incidente) sino que además tenga el interespaciado preciso dado por la ley de Bragg. Es por eso que para observar máximos experimentalmente se dan más *oportunidades* de cumplimiento girando el cristal según que ejes (*método del cristal giratorio*). Otro método consiste en pulverizar la muestra a analizar (*difractograma de polvo*). La presencia de granos cristalinos orientados al azar hace que los máximos de difracción tengan simetría cilíndrica [figura 2.8 (b)]. El detector se mueve *barriendo* el ángulo  $2\theta$ , obteniéndose un diagrama similar al mostrado.

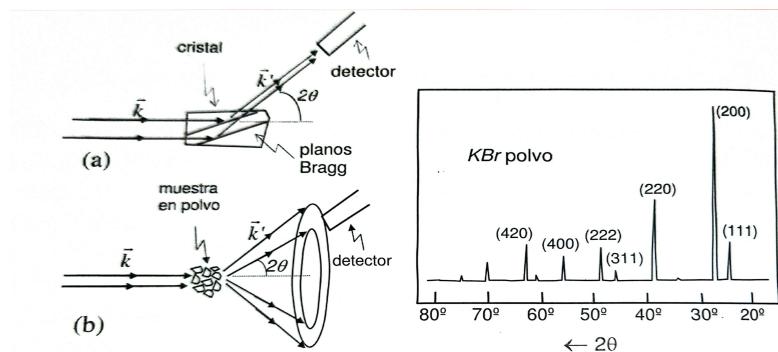


Figura 2.8: Esquemas de dos métodos de difracción (cristal rotatorio y polvo) y ejemplo de difractograma que se obtiene.

Una pregunta que nos podemos hacer es: ¿Cómo podemos diferenciar, si solo obtenemos los picos de difracción, a qué terna esta asociada cada una? Existen dos formas. La primera es realizando el cálculo de

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + l_1^2 + k_1^2}}{\sqrt{h_2^2 + l_2^2 + k_2^2}} \quad (2.4.1)$$

Dado que los valores para cada terna son única, de cada cociente obtendremos un “valor único” (salvo aquellos en los que halla mínimo común múltiplo). De esta manera podríamos separarlos. Otra manera es realizar una tabla, asociando a cada uno de los ángulos un valor de la terna y ver cual es la que mas se acerca. Lógicamente este es un modelo experimental, y habrá diferencias, pero funciona correctamente.

Tanto la falta de monocromaticidad como de paralelismo del haz incidente contribuyen a ensanchar los máximos. También, los defectos cristalinos afectan a los difractogramas; así la presencia de dislocaciones afecta a la anchura de los máximos de difracción de modo que su análisis se emplea, por ejemplo, para el estudio de defectos de los metales trabajados en frío. La temperatura, que genera vibraciones alrededor de las posiciones de equilibrio, no contribuye sin embargo a ensanchar los picos sino a disminuir su intensidad. Esto se entiende porque a mayor temperatura, en cualquier instante, menos átomos hay en las posiciones regulares (de equilibrio) y, por otro lado, la contribución de los átomos desviados en una determinada dirección, que generaría cambio en el haz difractado, es anulado por los que están desplazados en el sentido opuesto.

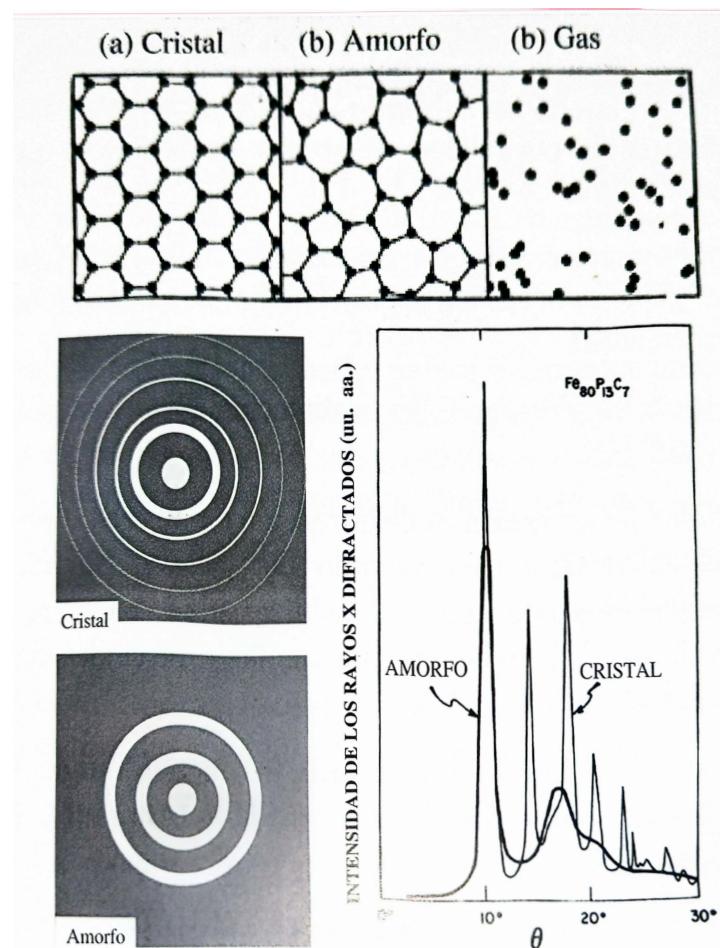


Figura 2.9: Efecto del desorden atómico en la difracción de rayos x.

Es interesante hacer notar que la existencia de interferencia constructiva de los  $N$  átomos de un cristal ( $\sim 10^{28} \text{ m}^{-23}$ ) es posible sólo gracias a que éstos están en posiciones regulares, es decir, están *ordenados*. Que el orden está estrechamente asociado a la existencia de máximos de difracción lo muestra la figura 2.8 donde se ve la correspondencia entre el orden espacial limitado de los materiales que se denominan amorfos con su espectro de difracción. Aquí la existencia de los dos picos de difracción a bajo ángulo está asociada al orden de corto alcance (primeros vecinos) característico de estos materiales.

# 3

## Enlace cristalino

En este capítulo se estudian los distintos mecanismos de *cohesión* de los cristales. La *distribución electrónica* alrededor de los núcleos caracteriza, a nivel microscópico, el tipo de enlace cristalino: *covalente, metálico, molecular, iónico y de hidrógeno*. La *energía de cohesión* (aquella que se debe suministrar al cristal para separarlo en sus constituyentes) varía para los elementos cristalinos desde 0.02 eV/átomo en el Ne hasta 8.9 en el W.

### 3.1. Clasificación de los sólidos

El cálculo de la energía de cohesión requiere el conocimiento de los estados electrónicos en el cristal. Las funciones de onda electrónicas de los electrones de valencia de los átomos libres cambian (y en consecuencia la distribución de carga) cuando los átomos se unen formando el cristal. En función de cuánto cambian estos estados electrónicos, los sólidos suelen clasificarse en cuatro tipos fundamentales, con distribuciones electrónicas según muestra la figura 3.1:

- **Moleculares**: con cambio mínimo.
- **Iónicos** en los que hay trasferencia de carga.
- **Covalentes** en los que la distribución de carga es direccional y localizada.
- **Metálicos** con carga electrónica extendida a todo el cristal.

### 3.2. Cristales moleculares

Son aquellos en que los nudos están ocupados por moléculas en las que los *enlaces intermoleculares son débiles* (al menos respecto los intramoleculares). Ejemplo de estos son los gases inertes y gases orgánicos (metano...). Los átomos de gases inertes tienen las capas electrónicas cerradas con simetría esférica. La baja energía de ionización ( $\sim 1\%$ ) sugiere que la distribución de carga no se distorsiona apreciablemente.

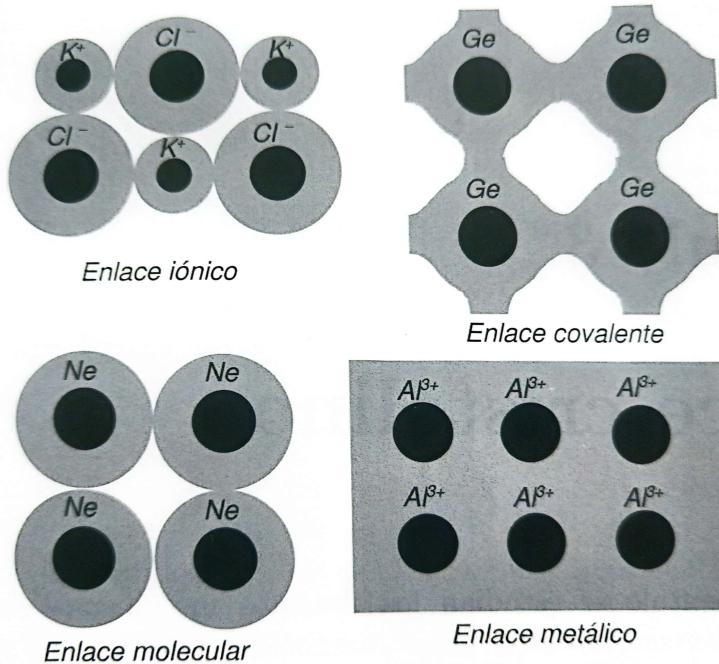


Figura 3.1: Esquema de la distribución electrónica en los tipos de sólidos básicos

### 3.2.1. Interacción de *van der Waals-London*

La deformación atómica más sencilla que conduce a una interacción no nula entre átomos es el desplazamiento de la nube electrónica (*rígida*) de manera que aparezca un momento dipolar. El modelo simple que muestra en la figura 3.2 en el que se supone  $x_1, x_2 \ll R$ , permite dar cuenta de la existencia de una interacción atractiva entre átomos o moléculas neutros.

La energía de los dos osciladores sin interacción ( $R \rightarrow \infty$ ) esférica

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2M} + \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{p_2^2}{2M} + \frac{1}{2}Cx_2^2 \quad (3.2.1)$$

donde  $C = M\omega_0^2$  siendo  $\omega_0$  la frecuencia propia de vibración de la carga (*rígida*) negativa de los átomos y  $M$  su masa. Por su parte, la energía de interacción de Coulomb se expresa por

$$H_i = \frac{q^2}{R} + \frac{q^2}{R+x_1-x_2} - + \frac{q^2}{R+x_1} - + \frac{q^2}{R-x_2} \approx -\frac{2q^2x_1x_2}{R^3} \quad (3.2.2)$$

donde  $q^2 = e^2$  en unidades cgs o  $q^2 = e^2/4\pi\epsilon_0$  en mks. El hamiltoniano total  $H = H_0 + H_i$  se puede diagonalizar para obtener sus valores propios, introduciendo las llamadas *variables normales*

$$x_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \quad x_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \quad (3.2.3)$$

$$p_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2) \quad p_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2) \quad (3.2.4)$$

de modo que

$$H = \left[ \frac{p_s^2}{2M} + \frac{1}{2} \left( C - \frac{2q^2}{R^3} \right) x_s^2 \right] + \left[ \frac{p_a^2}{2M} + \frac{1}{2} \left( C + \frac{2q^2}{R^3} \right) x_a^2 \right] \quad (3.2.5)$$

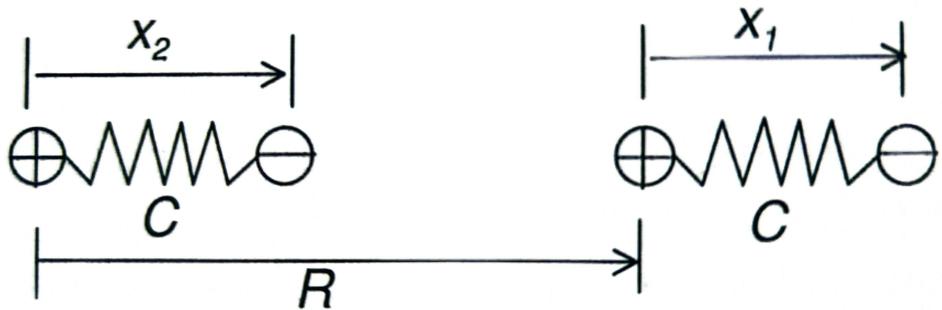


Figura 3.2: Posiciones relativas de los osciladores.

Formalmente el problema se reduce al de dos *osciladores* independientes, de frecuencias propias:

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 - \frac{2q^2}{MR^3} \quad \omega_a^2 = \omega_0^2 + \frac{2q^2}{MR^3} \quad (3.2.6)$$

El cambio en la energía (por oscilador) debido al acoplamiento será  $\Delta E = \frac{1}{2}(\hbar\omega_s + \hbar\omega_a - 2\hbar\omega_0)$ , que en la aproximación  $\frac{2q^2}{MR^3} \ll \omega_0^2$  es

$$\Delta E \approx -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 \left( \frac{q^2}{CR^3} \right)^2 \propto -C^{-3/2}R^{-6} \quad (3.2.7)$$

La dependencia (3.2.7) coincide con la clásica *dipolo-dipolo inducido*. Observar sin embargo que la interacción es un efecto cuántico en cuanto que  $\Delta E \rightarrow 0$  si  $\hbar \rightarrow 0$ .

**Interacción repulsiva.** Además de la *repulsión electroestática* entre las nubes electrónicas, el *Principio de Pauli* impide que átomos con capas llenas puedan solaparse a menos que haya promoción parcial de los electrones a estados energéticos más altos desocupados (lo cual implicaría un costo de energía). Es de esperar entonces que la interacción repulsiva sea de corto alcance y, en efecto, los datos experimentales de los gases inertes pueden ajustarse bien por un potencial *semiempírico* con dependencia de la separación entre átomos según  $R^{-12}$ .

### 3.2.2. Interacción de Lennard-Jones

El potencial de interacción por par de átomos  $i$  y  $j$  (a distancia  $r_{ij}$ ) resultante (contribución atractiva más repulsiva) puede escribirse Coulomb

$$U(r_{ij}) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right] \quad (3.2.8)$$

Esta ecuación describe la llamada **interacción de Lennard-Jones** o **interacción 6-12**. Un modelo parecido a este es el *modelo de las esferas duras*, en el que  $U(r_{ij})$  definida a cachos de tal modo que para  $r < R$  (siendo  $R$  el radio del átomo/molécula/ión) tendremos que  $U = \infty$ . Sin embargo esta función experimental, describe mucho mejor el comportamiento de los sólidos.

Los parámetros  $\epsilon$  y  $\sigma$  pueden determinarse a partir de medidas de viscosidad y coeficientes de Virial en la fase gaseosa. El potencial total sobre un átomo  $i$  cualquiera esférica

$$U_i = \sum_{j \neq i}^N U(r_{ij}) = 4\epsilon \left[ B \left( \frac{\sigma}{R} \right)^{12} - A \left( \frac{\sigma}{R} \right)^6 \right] \quad \text{con } B = \sum_{i \neq j}^N p_{ij}^{-12} \quad A = \sum_{i \neq j}^N p_{ij}^{-6} \quad (3.2.9)$$

siendo  $R$  la distancia entre vecinos más próximos y  $p_{ij} = r_{ij}/R$ . Las sumas  $A$  y  $B$  dependen de la estructura cristalina. En el cuadro 3.1 (izquierda) se dan sus valores para algunas de las más comunes. Para calcular estos parámetros podemos usar aproximaciones a primeros vecinos/segundos vecinos, o usar métodos computacionales.

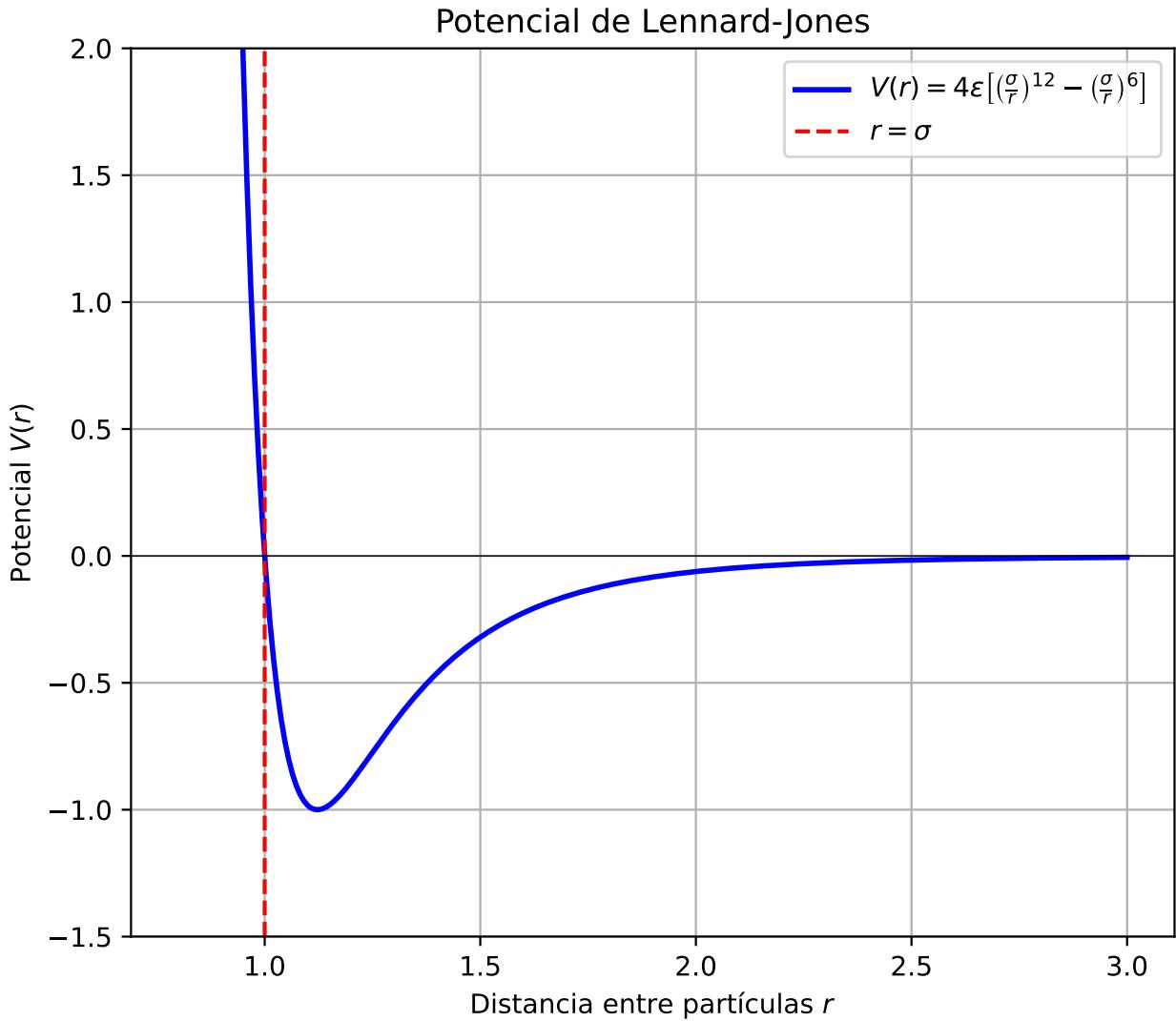


Figura 3.3: Potencial de Lennard-jones para variables reducidas ( $\epsilon, \sigma = 1$ )

El potencial total del cristal resulta

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^N U_i = 2\epsilon N \left[ B \left( \frac{\sigma}{R} \right)^{12} - A \left( \frac{\sigma}{R} \right)^6 \right] \quad (3.2.10)$$

A partir de la ecuación 3.2.10 se puede calcular la distancia de equilibrio  $R_0$  por la condición  $(dU/dR)_{R_0} = 0$  obteniéndose  $R_0/\sigma = (2B/A)^{1/6}$  (1.09 para una estructura *fcc*). Los valores

experimentales para algunos gases nobles (*fcc*) son los mostrados en el cuadro 3.1 (derecha). La pequeña desviación de los átomos más ligeros se debe a *efectos cuánticos del punto cero*. Esto se entiende por el espacio de confinamiento del átomo en el cristal, la energía cinética será  $p^2/2m = (h/\lambda)^2/2m$ : inversamente proporcional a la masa.

En cuanto a la energía de cohesión (en equilibrio) a temperatura cero se puede obtener sin más que sustituir en 3.2.10  $R = R_0$  resultando

$$U_0 \equiv (R_0) = -N\epsilon(A^2/2B) \quad (3.2.11)$$

La estructura con menor  $U_0$  es la *fcc* ( $-8,6N\epsilon$ ), que es la que tienen todos los cristales de gases nobles. Las correcciones mecano cuánticas a  $U_0$  alcanzan casi un 30% en el Ne y hasta un 4% en el Xe. Las diferencias entre energías son muy pequeñas entre la *fccy* a *hcp*, tal y como podemos ver en la siguiente tabla (tabla 3.1). La razón de esto es que ambas estructuras, tal y como hemos visto en el capítulo 1 son las estructuras compactas por antonomasia, por lo que las diferencias energéticas entre ambas serán diferentes. Que un sólido adopte una u otra dependerá de la variación del potencial de Lennard-jones o de las posibles impurezas.

Estructura	B	A	Elemento	Ne	Ar	Kr	Xe
<i>fcc</i>	12.122	14.454	$R_0/\sigma$	1.14	1.11	1.10	1.09
<i>hcp</i>	12.132	14.455	$-U/N\epsilon$	5.59	8.24	8.61	8.62
<i>bcc</i>	9.114	12.253	$-U_0(\text{eV/at.})$	0.02	0.08	0.12	0.17

Cuadro 3.1: A la izquierda los parámetros A y B para las estructuras indicadas. A la derecha valores experimentales para los cristales de gases nobles con estructura *fcc*.

### 3.3. Cristales iónicos

Son los formados por iones positivos y negativos. En este tipo de cristales uno de los iones forma una estructura mientras que el otro ion se va metiendo en los huecos. El enlace iónico es fuerte (6-12 eV/ion) y es el resultado de la interacción electrostática *directa* de iones con *capas electrónicas completas*, como por ejemplo el  $\text{Na}^+$  ( $1s^22s^22p^6$ ) y  $\text{Cl}^-$  ( $1s^22s^22p^63s^23p^6$ ).

**Constante de Madelung.** Aparece al calcular la energía (potencial) de cohesión de un cristal iónico admitiendo una energía potencial por pares de forma

$$U_{ij} = \frac{\pm q^2}{r_{ij}} + \frac{B}{r_{ij}^n} \quad (3.3.1)$$

donde  $B$  y  $n$  ( $n \gg 1$ ) son desconocidos ( $q^2 = e^2$  en unidades cgs o  $q^2 = e^2/4\pi\epsilon_0$  en mks). Otra aproximación válida sería utilizar una intersección repulsiva de la forma  $\lambda e^{-r_{ij}/\rho}$ . Análogamente a las sumas en 3.2.10, al sumar 3.3.1 para todos los pares (N átomos) se tiene

$$U = \frac{N}{2} \left( \frac{BA_n}{R^n} - \frac{\alpha q^2}{R} \right) \quad (3.3.2)$$

con

$$A_n = \sum_{i \neq j} p_{ij}^{-n} \quad \alpha = \sum_{j \neq i} \pm p_{ij}^{-1} \quad p_{ij} = \frac{r_{ij}}{R} \quad (3.3.3)$$

tal que a  $\alpha$  se conoce como **constante de Madelung** y su valor depende de la estructura (cuadro 3.2).

Estructura	ClNa	ClCs	ZnS cúbica
$\alpha$	1.748	1.763	1.638

Cuadro 3.2: Constante de Madelung para algunas estructuras muy comunes.

La separación de equilibrio  $R_0$  se calcula a partir de la condición  $(\partial U / \partial R)_{R_0} = 0 \Rightarrow R_0 = (nBA_n/\alpha q^2)^{1/(n-1)}$ , a la cual

$$U(R_0) = -\frac{N}{2} \frac{\alpha q^2}{R_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (3.3.4)$$

El exponente  $n$  puede relacionarse con el coeficiente de compresibilidad  $K \equiv -V^{-1}(\partial V / \partial P)_{R_0}$  (donde  $P$  es la presión y  $V$  el volumen) según  $n = 1 + 18R_0^4/Kq^2\alpha$ . Como ejemplo para el NaCl (*fcc*), a partir del valor experimental  $K = 3,3 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{dyna}$  y  $\alpha = 1,75$  se obtiene  $n = 9,4$ . También para el NaCl se obtiene que  $\rho = 0,3 \text{ \AA}$  admitiendo una forma exponencial para la interacción repulsiva, de modo que resulta ser ésta de muy corto alcance.

Las energías de cohesión de cristales iónicos típicos como los haluros alcalinos se predicen según ecuación 3.3.4, con una precisión mejor que el 10 %. El término  $-N\alpha q^2/2R_0$  representa prácticamente el 90 % de  $U(R_0)$ . En el cuadro 3.3 se dan estos valores para algunos *haluros alcalinos*.

	Li	Na	K	Rb	Cs
F	10.5	9.31	8.25	7.86	7.50
	<b>12.6</b>	<b>10.9</b>	<b>9.44</b>	<b>8.94</b>	<b>8.38</b>
Cl	8.63	7.94	7.19	6.94	
	<b>9.82</b>	<b>8.94</b>	<b>8.00</b>	<b>7.69</b>	
Br	8.25	7.56	6.86	6.63	
	<b>9.19</b>	<b>8.44</b>	<b>7.63</b>	<b>7.38</b>	
I	7.69	7.06	6.50	6.31	
	<b>8.38</b>	<b>7.75</b>	<b>7.13</b>	<b>6.88</b>	

Cuadro 3.3: Energía de cohesión experimental (eV/par-de-iones). En negrita la energía de cohesión teórica considerando sólo el término  $N\alpha q^2/2R_0$ .

## 3.4. Cristales covalentes

El enlace covalente entre dos átomos, muy común en los compuestos orgánicos, involucra a sendos a electrones de valencia que son compartidos. Este *solapamiento* asociado de carga electrónica en la dirección de la unión de los átomos genera un enlace fuerte (7.3 eV/átomo en el diamante). Los cristales covalentes suelen ser duros y quebradizos.

### 3.4.1. La molécula ion de hidrógeno $\text{H}_2^+$

Esta molécula ilustra lo esencial del enlace covalente y admite solución exacta minimizando  $\langle E \rangle = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$  donde

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{q^2}{r_a} - \frac{q^2}{r_b} + \frac{q^2}{R}$$

es el Hamiltoniano del electrón y los dos núcleos, supuestos éstos en reposo (*aproximación adiabática*). Una aproximación es suponer que la función de onda al acercar los núcleos (que llamaremos *orbital-molecular*) es representable por una combinación lineal de los orbitales atómicos aislados ( $R \rightarrow \infty$ , ver figura 3.4), con energías  $E_a = E_b = E_0$ :

$$\Psi = C_a \Psi_a + C_b \Psi_b \quad (3.4.1)$$

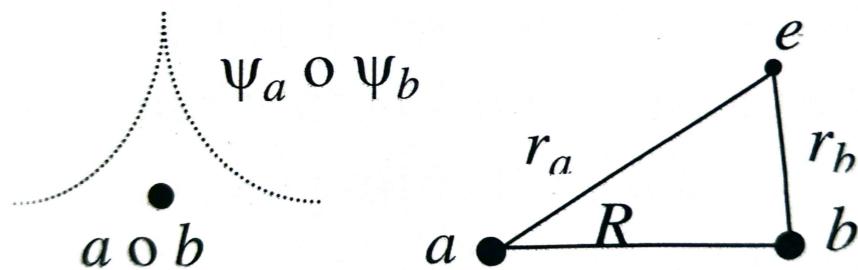


Figura 3.4: Distribución de carga electrónica en torno al núcleo  $a$  o al  $b$  y posiciones relativas.

donde  $C_a$  y  $C_b$  son coeficientes a determinar. De la condición de normalización  $\int_V \Psi \Psi^* d^3r = 1$  se obtiene

$$C_a^2 + 2C_a C_b S + C_b^2 = 1 \quad \text{con} \quad S = \int_V \Psi_a^* \Psi_b d^3r \quad (3.4.2)$$

El valor medio de la energía se calcula según:

$$\langle E \rangle = \int_V \Psi^* H \Psi d^3r = C_a^2 H_{11} + C_a C_b H_{12} + C_a C_b H_{21} + C_b^2 H_{22} \quad (3.4.3)$$

Los términos  $H_{ij}$  vienen dados Por

$$H_{11} = \int_V \Psi_a^* H \Psi_a d^3r = H_{22} = \int_V \Psi_b^* H \Psi_b d^3r = -E_0 + \frac{q^2}{R} - A$$

$$H_{12} = \int_V \Psi_a^* H \Psi_b d^3r = H_{21} = \int_V \Psi_b^* H \Psi_a d^3r = -E_0 S + \frac{q^2}{R} S - J$$

donde

$$A = \int_V \Psi_a \frac{q^2}{r_b} \Psi_a d^3r = \int_V \Psi_b \frac{q^2}{r_a} \Psi_b d^3r$$

es la llamada *integral de Coulomb* [representa la interacción del protón  $a$  ( $b$ ) con el electrón alrededor del protón  $b(a)$ ] y

$$J = \int_V \Psi_a^* \frac{q^2}{r_b} \Psi_b d^3r = \int_V \Psi_b^* \frac{q^2}{r_b} \Psi_a d^3r > 0$$

es la *integral de canje* (no tiene *interpretación clásica*). En este caso, como la distribución de carga alrededor de ambos núcleos debe ser la misma

$$C_a^2 = C_b^2 \Rightarrow C_a = \pm C_b$$

con lo cual sustituyendo en la ecuación 3.4.2 se obtiene que

$$C_a = C_b = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}} \Rightarrow \Psi_+ = \frac{\Psi_a + \Psi_b}{\sqrt{2(1+S)}} \quad (3.4.4)$$

$$C_a = -C_b = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}} \Rightarrow \Psi_- = \frac{\Psi_a - \Psi_b}{\sqrt{2(1-S)}} \quad (3.4.5)$$

La solución que así resulta son dos nuevos autoestados, que se corresponden con las combinaciones simétrica y antisimétrica de  $\Psi_a$  y  $\Psi_b$ , denominados orbital enlazante ( $\Psi_+$ ) y orbital antienlazante ( $\Psi_-$ ), de energías, respectivamente

$$\epsilon_+ = -E_0 + \frac{q^2}{R} - \frac{A+J}{1+S} \approx -E_0 - J \quad (3.4.6)$$

$$\epsilon_- = -E_0 + \frac{q^2}{R} - \frac{A-J}{1-S} \approx -E_0 + J \quad (3.4.7)$$

Como se ve en la figura 3.5 la mayor densidad de carga es la solución simétrica en el espacio entre núcleos es la diferencia distintiva. Esta configuración es la de menor energía porque el electrón está menos confiando y tiene por tanto una menor energía cinética  $E_c$  (valor medio de  $\nabla^2\Psi$  menor). Lo mismo vale para la energía potencial  $E_p$  por cuanto el electrón, en el estado simétrico, está en medio más cerca de ambos núcleos a la vez.

La energía de disociación (energía de cohesión),  $E_D$ , y la distancia internuclear en el equilibrio,  $R$ , de la molécula  $H_2^+$ , son respectivamente 2.79 eV y 1.06 Å. Evaluando las integrales  $H_{ij}$ ,  $A$ ,  $S$ , etc. precedentes, y utilizando funciones de onda  $1s$  para los orbitales atómicos ( $\Psi \propto e^{-r/a_0}$  donde  $a_0 = 0.529\text{\AA}$  es el *radio de Bohr*). Si además de orbitales  $1s$  se incluyen los orbitales  $2s$  y  $2p$  en la ecuación 3.4.1 se obtiene  $E_D = 2.71\text{eV}$  y  $R = 1.06\text{\AA}$  de modo que el modelo da cuenta cuantitativamente de la molécula  $H_2^+$ .

### 3.4.2. La molécula de hidrógeno ( $H_2$ )

Es el ejemplo más sencillo de molécula neutra y prototipo de enlace covalente: enlace entre átomos (*objetos neutros*) por medio de electrones igualmente compartidos. Este mecanismo necesariamente comprende el tomar un electrón de cada uno de ellos para formar el enlace. El hamiltoniano es ahora

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{q^2}{r_{a_1}} - \frac{q^2}{r_{a_2}} - \frac{q^2}{r_{b_1}} - \frac{q^2}{r_{b_2}} + \frac{q^2}{r_{12}} - \frac{q^2}{R}$$

La presencia del término  $q^2/r_{12}$ , que da cuenta de la interacción repulsiva entre los dos electrones, impide obtener una solución exacta para la molécula de hidrógeno. Ignorando este término,

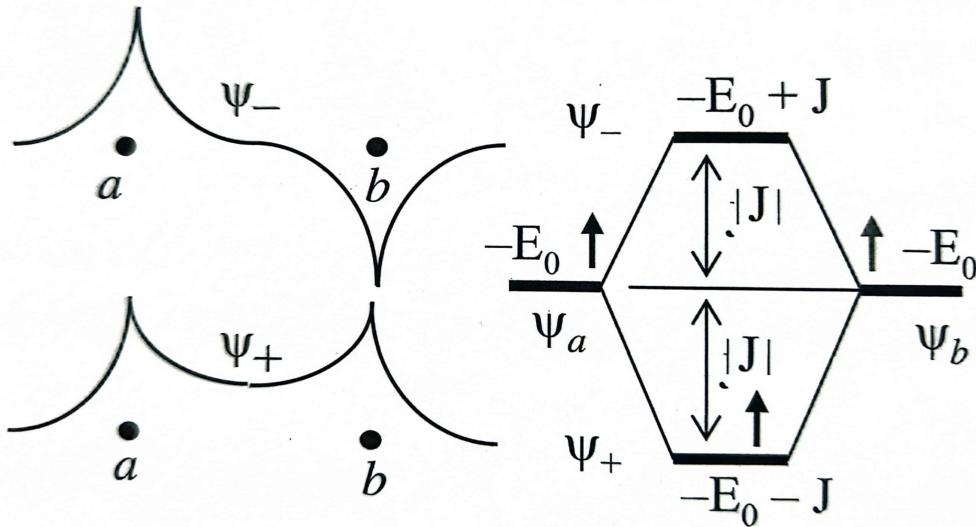


Figura 3.5: Distribución de carga electrónica para las soluciones  $\Psi_-$  y  $\Psi_+$  y los correspondientes niveles de energía.

en la llamada *aproximación de electrones independientes*, pueden aplicarse directamente los resultados obtenidos para el ion  $H_2^+$ : la existencia de un estado enlazante y otro antienlazante. El estado de más baja energía se obtiene poniendo ambos electrones en el orbital enlazante, con sus espines opuestos para no violar el principio de exclusión, como se indica en la figura . Este hecho está de acuerdo con el llamado *principio de máximo solapamiento*, según la cual la configuración más estable es aquella en la que las funciones de onda electrónicas individuales solapan lo máximo posible (el aumento de la energía de interacción electroestática se compensa con la disminución de la energía de confinamiento). Este principio exige que, en general, un átomo no puede formar más enlaces covalentes que electrones tenga fuera de capas cerradas (en particular, el H sólo puede formar un enlace). Por esto se dice que el enlace covalente es *saturable*.

Para obtener la energía de cohesión de la molécula  $H_2$  existen dos métodos aproximados que se aplican en general a otras moléculas y sólidos: el de *orbitales moleculares* y el de *electrones de valencia*. En el primero el estado molecular fundamental se representa por la función

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_+(\mathbf{r}_1)\Psi_+(\mathbf{r}_2) \quad (3.4.8)$$

que es simétrica bajo el intercambio de las coordenadas electrónicas (para hacer la función de onda *total* antisimétrica, la función de onda de espín debe ser antisimétrica  $\Rightarrow$  espines antiparalelos) y para  $\Psi_+$  se utiliza el orbital enlazante obtenido para el ion  $H_2^+$ ,  $\Psi_+ \propto \Psi_a + \Psi_b$ . Así:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = [\Psi_a(\mathbf{r}_1) + \Psi_b(\mathbf{r}_1)][\Psi_a(\mathbf{r}_2) + \Psi_b(\mathbf{r}_2)] \quad (3.4.9)$$

En la aproximación de electrones independientes y utilizando orbitales  $1s$  para las funciones atómicas  $\Psi_a$  y  $\Psi_b$  se obtiene  $E_D = 2,65\text{eV}$  y  $R = 1,6a_0$ , a comparar con los experimentales  $E_D = 4,72\text{eV}$  y  $R = 1,40a_0$ . El origen de este desacuerdo se halla en el error cometido por la

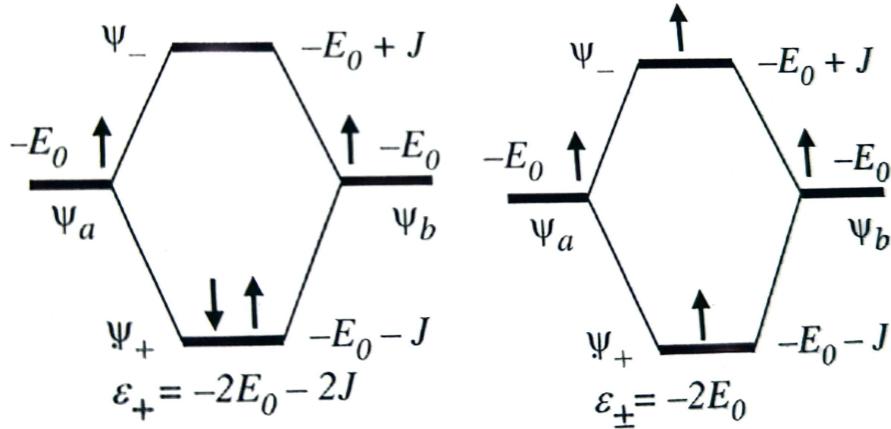


Figura 3.6: Energía con dos electrones en el estado enlazante (espines opuestos) y con un electrón en el estado enlazante.

necesidad de tener en cuenta otros orbitales además del  $1s$ , pero sobre todo por aproximar la función de onda  $\Psi(r_1, r_2)$  según la ecuación 3.4.9. Si se desarrolla el producto de esta ecuación se obtiene

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_a(\mathbf{r}_2) + \Psi_b(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) + \Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) + \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1) \quad (3.4.10)$$

Como  $\Psi_a$  es grande cerca del núcleo,  $a$  y  $\Psi_b$  lo cerca del núcleo  $b$ , los dos primeros sumandos de la ecuación 3.4.10 tienen una interpretación física muy diferente de la de los dos últimos. Éstos dan la amplitud de probabilidad de encontrar dos átomos neutros de hidrógeno ( $H+H$ ), mientras que los dos primeros sumandos dan la amplitud de probabilidad de encontrar un protón *desnudo*  $H^+$  y un ion hidrógeno negativo  $H^-$  y un ion hidrógeno negativo  $H^-$  ( $H^++H^-$ ). En la aproximación de electrones independientes estos estados tienen la misma energía (un electrón tiene una energía de enlace de 13.6 eV con un protón independientemente de si ya está enlazado con otro electrón) y por ello sus funciones de onda se mezclan con igual peso. Sin embargo, es bien conocido que un electrón se enlaza con un átomo neutro de hidrógeno para formar  $H^-$  sólo por 0.7 eV (debido a la fuerza de repulsión del primer electrón). Por lo tanto, al menos a separaciones a las que se pueda diferenciar claramente entre los estados  $H^++H^-$  y  $H+H$ , la aproximación de electrones independientes es mala. Existen refinamientos dentro del método de *orbitales moleculares* que mejoran el acuerdo con los datos experimentales, en particular, dando *pesos* distintos a los sumandos de la ecuación 3.4.10.

El método de *electrones de valencia* desprecia por completo la configuración  $H^++H^-$ , de modo que usa la función de onda aproximada

$$\Psi(r_1, r_2) = \Psi_a(\mathbf{r}_1)\Psi_b(\mathbf{r}_2) + \Psi_a(\mathbf{r}_2)\Psi_b(\mathbf{r}_1) \quad (3.4.11)$$

Utilizando el hamiltoniano completo (sin despreciar el término repulsivo), orbitales  $1s$  para  $\Psi_a$

y  $\Psi_b$ , y aplicando el cálculo variacional se obtiene  $E_D = 3,14 \text{ eV}$  y  $R = 1,64a_0$  que está más cerca de los valores experimentales. El acuerdo se mejora considerando además orbitales  $p$ , la polarización de los orbitales atómicos.

### 3.4.3. Hibridación

La hibridación es una característica del enlace covalente que se origina en átomos con varios electrones fuera de una capa cerrada. De acuerdo con el principio genérico de *máximo solapamiento* que rige el enlace covalente entre orbitales  $1s$  del  $\text{H}_2$  ( $1s^2$ ) es más débil que el enlace entre orbitales  $2p$  del  $\text{F}_2$  ( $1s^2 2s^2 2p_x^2 2p_y^2 2p_z^1$ ), por ser esta más direccional (*lóbulos p*) y por tanto permitir más solapamiento. En medio de ambos está el de la molécula HF formado por el solapamiento del orbital  $1s$  del hidrógeno y el  $2p$  del flúor.

Para estar en condiciones de máximo solapamiento puede ser rentable que se produzca primero una *promoción* (excitación) electrónica dando lugar a la formación de nuevos estados, los llamados *orbitales híbridos*, que serán los que se enlacen con orbitales híbridos de átomos vecinos recuperando en el enlace la energía invertida en la promoción. Por ejemplo, en la formación de la molécula  $\text{Cl}_2\text{Be}$  ( $\text{Be}$ :  $1s^2 2s^2$ ,  $\text{Cl}$ :  $1s^2 2s^2 2p^6 3p_x^1 3p_y^2 3p_z^2$ ) previamente en el Be se produce la promoción  $1s^2 2s^2 \rightarrow 1s^2 2s^1 2p_x^1$  formándose luego los llamados híbridos  $sp$ , como se ilustra en la figura 3.7 (izquierda), cada uno de los cuales se enlaza con el orbital  $3p_x$  de cada átomo de cloro.

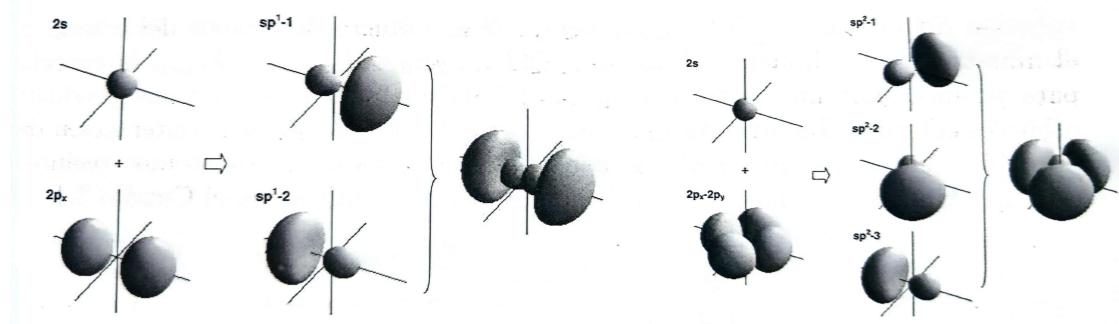
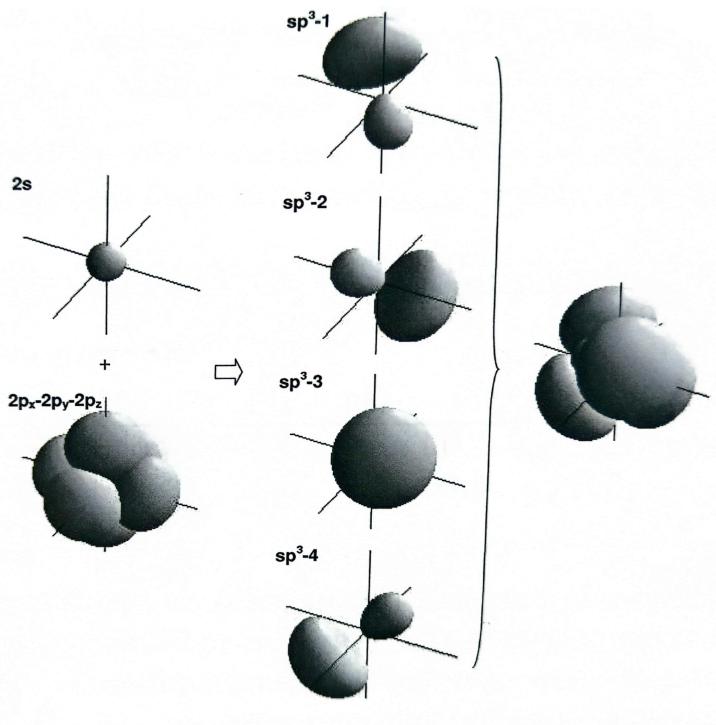


Figura 3.7: Formación de los orbitales híbridos  $sp^1$  (izquierda) y  $sp^2$  (derecha).

La molécula  $\text{BH}_3$  resulta de la promoción  $1s^2 2s^2 2p_x^1 \rightarrow 1s^2 2s^1 2p_x^1 2p_y^1$  del boro dando lugar a los híbridos  $sp_2$ , como se muestra en la figura 3.7 (derecha) con cada uno de los cuales se enlaza a un H.

Otro ejemplo son los híbridos  $sp^3$  tetraédricos del C que resultan de la promoción previa  $1s^2 2s^2 2p_x^1 2p_y^1 \rightarrow 1s^2 2s^1 2p_x^1 2p_y^1 2p_z^1$ . Se forman luego, por combinación lineal de los estados,

Figura 3.8: Orbitales híbridos  $sp^3$ .

orbitales híbricos que apuntan a los vértices de un tetaedro regular (figuras 3.8 y 3.9 (a)) y constituyen la base del cristal de diamante y de los semiconductores.

Los enlaces se forman por el acoplamiento de orbitales híbridos de dos átomos vecinos  $a, b$  que apunten en la misma dirección

$$\Psi = C_a |h(a)\rangle + C_b |h(b)\rangle \quad (3.4.12)$$

El tratamiento es análogo al que se sigue para la molécula  $H_2$  (los orbitales híbridos  $h$  son sólo algo más complejos que los atómicos al igual que el hamiltoniano) y se obtienen también dos soluciones: un estado enlazante y otro antienlazante. En el estado fundamental los electrones ocuparán los estados de más baja energía (estado enlazante), como se indica en la figura 3.9(b).

En la aproximación del *orbital enlazante*, el cristal puede verse como una estructura periódica de orbitales enlazantes entre los átomos vecinos. La energía de cohesión del cristal es  $\frac{z}{2}NE_{\text{enlazante}}$  siendo  $N$  el número de átomos del cristal,  $z$  el número de coordinación,  $E_{\text{enlazante}} = 2(E_+ - E_0 - E_{\text{prom}})$  y  $E_{\text{prom}}$  la energía para promocionar un electrón a un orbital de un nivel superior y así producir orbitales híbridos. Incluyendo los llamados *efectos de metalicidad* (interacción de un orbital enlazante de un átomo con los antienlazantes de los átomos vecinos), esta aproximación de las energías de la tabla 3.4.

	C	Si	Ge	Sn
Calculada	14.2	5.0	4.6	3.5
Experimental	<b>7.3</b>	<b>4.6</b>	<b>3.9</b>	<b>3.1</b>

Cuadro 3.4: Energías de cohesión (eV/átomo) de algunos cristales covalentes.

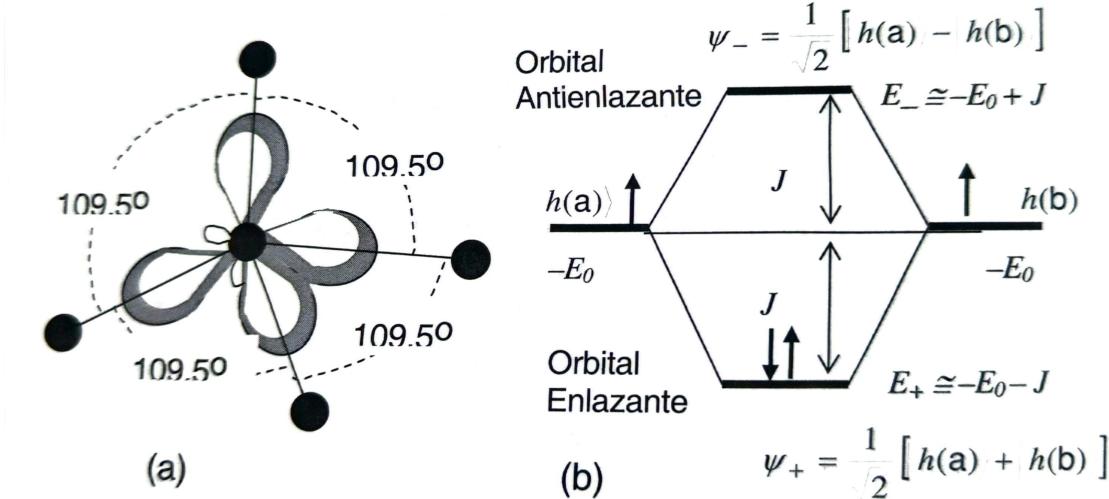


Figura 3.9: Niveles de energía asociados al enlace entre orbitales híbridos.

### 3.5. Cristales metálicos

El enlace metálico puede considerarse como caso límite del enlace iónico, en el cual los iones negativos son precisamente electrones. La diferencia crítica es que la masa muy pequeña del electrón hace que su energía del punto cero sea grande, de modo que no está localizado en un punto de red, lo que a su vez da cuenta de la alta conductividad eléctrica.

Considérese el modelo idealizado (figura 3.10) consistente en iones positivos puntuales de valencia  $Z$  situados regularmente y bañados por un mar de carga negativa que consideremos confinada en volúmenes esféricos de radio  $R$  alrededor de cada ion, de modo que la carga electrónica neta alrededor de cada ion es  $Ze$  ( $\Rightarrow$  densidad de carga  $n = Ze/\frac{4}{3}\pi R^3$ ).  $R$  o equivalentemente la concentración  $n$  es desconocida y será determinada por la condición de energía mínima.

Para determinar la energía comenzamos por calcular la energía potencial. La carga a distancia  $r$  de un ion es

$$q(r) = Ze - n\frac{4}{3}\pi r^3 = Ze \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \quad (3.5.1)$$

y entonces el potencial electrostático es  $\phi(r) = q(r)/4\pi\epsilon_0 r$ . La energía electrostática atractiva ion-electrón será  $dU_{\text{atrac}} = \phi dq$ , es decir,

$$dU_{\text{atrac}} = \underbrace{\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)}_{\phi} \underbrace{-\frac{3Ze}{R^3} r^2 dr}_{dq} = -3Z^2 e^2 \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) \frac{r dr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (3.5.2)$$

Integrando sobre el volumen en  $R$  se obtiene la energía potencial por átomo

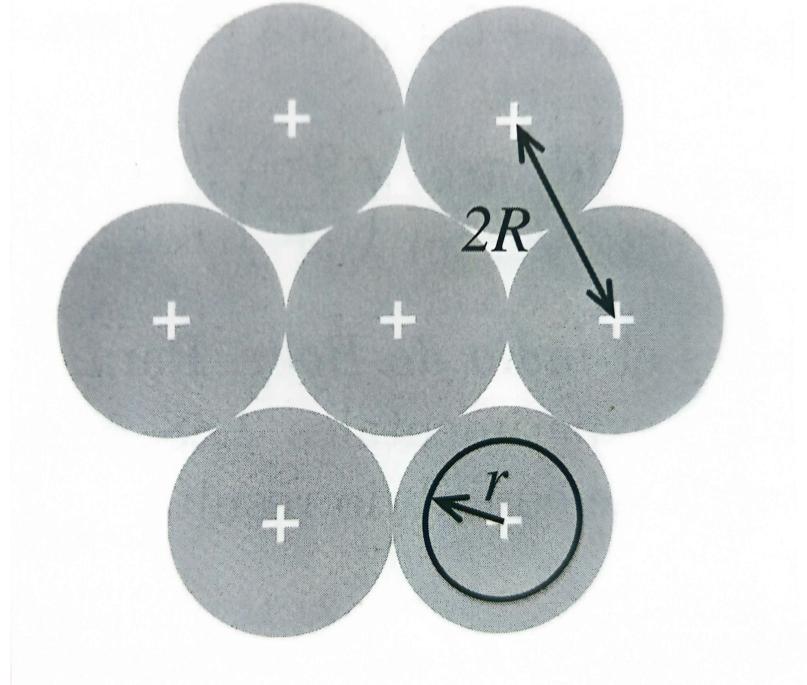


Figura 3.10: Modelo de cirstal metálico.

$$U_{\text{atrac}} = \frac{-3Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^R \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) r dr = -\frac{9Z^2e^2}{40\pi\epsilon_0 R} \quad (3.5.3)$$

Esta energía potencial contabiliza la interacción atractiva entre iones y electrones así como la repulsión electrón-electrón. Obsérvese que en este modelo no hay interacción entre átomos por ser éstos neutros y esféricamente simétricos.

Falta la energía cinética de los electrones. Esta es muy elevada debido fundamentalmente a su carácter fermiónico: el *principio de exclusión de Pauli* los obliga a ocupar estados distintos, cada vez más energéticos, de modo que incluso a  $T = 0\text{K}$  los más energéticos alcanzan una energía cinética del orden de  $\sim\text{eV}$ . Como se verá en el capítulo 6, la energía cinética total de un gas de electrones de concentración numérica  $n$  viene dada Por

$$U_{\text{cinet}} = \frac{3\hbar^2(3\pi^2n^{2/3})}{10m} \quad (3.5.4)$$

donde  $m$  es la masa del electrón. Como  $n = Ze/\frac{4}{3}\pi R^3$ , se tiene que

$$U_{\text{cinet}} = \frac{3\hbar^2(9\pi\frac{Z}{r})}{10mR^2} \quad (3.5.5)$$

Así como la energía potencial aumenta (se hace menos negativa) al aumentar  $R$ , por cercanía de cargas opuestas la energía cinética disminuye porque el confinamiento electrónico es menor. En el equilibrio (radio  $R_0$ , interdistancia  $2R_0$ ), se debe cumplir que  $U_{\text{tot}} = U_{\text{atrac}} + U_{\text{cinet}}$  sea mínima. Imponiendo esta condición resulta

$$2R_0 = \frac{16\hbar^2\pi\epsilon_0}{3Z^{4/3}e^2m} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} = \frac{4.9}{Z^{4/3}}a_0 \quad (3.5.6)$$

donde  $a_0 = \hbar^2 4\pi \epsilon_0 / e^2 m$  es el *radio de Bohr*. Para  $Z = 1$  se tiene  $2R_0 \approx 2,6\text{\AA}$  a comparar con los valores experimentales  $2,88\text{\AA}$  del Au y  $2,56\text{\AA}$  del Cu, por ejemplo. A su vez la energía de equilibrio resultante

$$U_{\text{tot}}(R_0) = -\frac{9e^2}{80\pi\epsilon_0 R_0} \approx -5\text{-eV/at} \quad (3.5.7)$$

a comparar con  $-3,81\text{-eV/at}$  del Au o  $-3,49\text{-eV/at}$  del Cu.

Aunque este modelo recoge lo esencial del enlace metálico, es limitado en cuanto que es independiente de la estructura o no tiene en cuenta otros electrones que los de valencia. Por ello, no puede explicar, por ejemplo, por qué algunos metales cristalizan en el sistema *hcp* y otros lo hacen en el *bcc* o *fcc* o por qué la energía de enlace en el W es tan alta como 8.9 eV/at.



# 4

## Dinámica de redes

En este capítulo se comienza el estudio de las vibraciones de los átomos alrededor de sus posiciones de equilibrio y sus efectos observables. Esta llamada *dinámica de redes* es necesaria para explicar propiedades como: i) la conductividad térmica de los aislantes, ii) la dependencia en  $T^3$  del calor específico a baja temperatura, iii) las energías de cohesión, iv) la dilatación térmica, v) la conductividad eléctrica *finita* de los metales, vi) la reflectividad de los cristales iónicos, etc.

### 4.1. Vibraciones de los cristales con base atómica

Aquí se utilizará la llamada *aproximación armónica* que consiste en aceptar que las desviaciones de las posiciones atómicas (respecto del equilibrio) son mucho menores que las distancias interatómicas

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \Delta\mathbf{r}(t) \quad \text{con} \quad |\Delta\mathbf{r}(t)| \ll |\mathbf{r}(t)| \sim |\mathbf{R}| \quad (4.1.1)$$

Esta aproximación equivale a decir que la fuerza elástica sobre un átomo es *lineal* con los desplazamientos relativos  $\mathbf{F} \propto \Delta\mathbf{r}(t)$ .

#### 4.1.1. La cadena lineal monoatómica

El modelo es una cadena unidimensional de átomo de masa  $M$  e interdistancia  $a$  que puede servir para representar algunas de las vibraciones de un cristal tridimensional. Así, las vibraciones elásticas de un cristal cuando el vector de onda  $\mathbf{k}$  apunta en las direcciones [100], [110] ó [111] en un cristal cúbico pueden suponerse unidimensionales en el sentido de que se necesita una sola coordenada, pues se espera que los planos de átomos perpendiculares  $\mathbf{k}$  se muevan en fase.

Denotando por  $u_s$  la desviación del átomo (o plano)  $s$  (ver figura 4.1), su ecuación del movimiento es

$$M \frac{d^2 u_s}{dt^2} = F_s = -\frac{\partial U_{\text{arm}}}{\partial u_s} \quad (4.1.2)$$

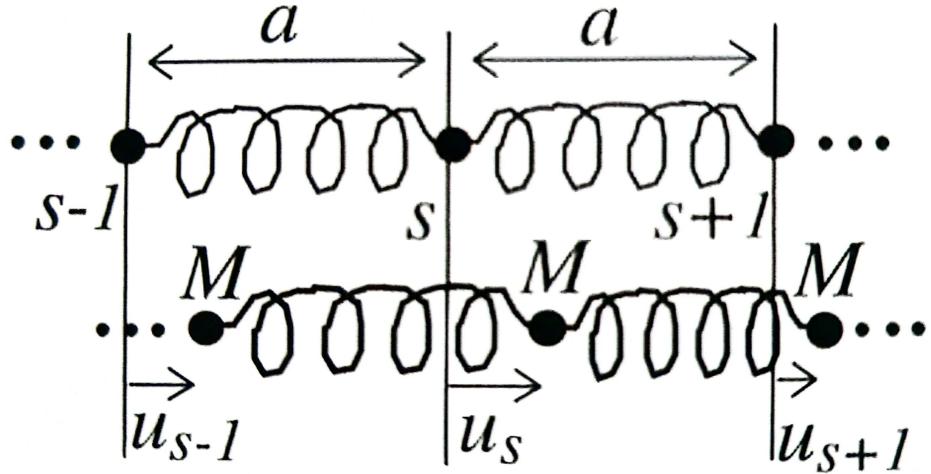


Figura 4.1: Parámetro de red y posiciones de átomos de masa  $M$  conectados por una fuerza de constante  $C$  entre planos adyacentes. Los desplazamientos de los átomos se designan por  $u_{s-1}, u_s, u_{s+1}$ .

con

$$U_{\text{arm}} = \frac{1}{2} \sum_{s,l} \frac{C_l}{2} (u_{s+l} - u_s)^2 \quad (4.1.3)$$

$C_l$  es la constante de fuerza entre dos átomos separados  $la$ . Esta expresión se justifica por la aproximación armónica citada. Si los desplazamientos son suficientemente pequeños el término dominante del desarrollo en serie de Taylor de la energía potencial es el cuadrático, pues el lineal no existe porque se exige  $U_{\text{arm}}$  mínimo (derivada nula) en  $u_s$ . El factor  $1/2$  que multiplica a la suma se introduce para no contar dos veces la misma interacción.

Para simplificar se tendrían en cuenta aquí solo interacciones entre vecinos más próximos, es decir,  $l = \pm 1$ , con lo cual  $C_{\pm} = C$  y

$$U_{\text{arm}} = \frac{C}{2} \sum_s \left[ (u_{s+1} - u_s)^2 + (u_{s-1} - u_s)^2 \right] \quad (4.1.4)$$

y por tanto la fuerza total sobre  $s$

$$F_s = C(u_{s+1} - u_s) + C(u_{s-1} - u_s) \quad (4.1.5)$$

Por la anisotropía de los sólidos, en general  $C$  será diferente según la dirección en la que se producen las oscilaciones.

Con esta aproximación, la ecuación del movimiento (4.1.2) admite la solución armónica

$$u_s = u_k e^{i(ksa - \omega t)} \quad (4.1.6)$$

siempre que se verifique

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \left( \frac{1}{2} ka \right) \right| \quad (4.1.7)$$

que es llamada la *relación de dispersión* y cuya gráfica se muestra en la figura 4.2. Algunos puntos importantes son:

- Hay simetría  $k \rightarrow -k$ .
- Hay periodicidad  $k \rightarrow k + n2\pi/a = k + G$ . La razón de que  $k$  y  $k + G$  sean equivalentes es que dan lugar a las mismas coordenadas atómicas, como se muestra con el ejemplo de la figura 4.3. Por la *redundancia* existente en el espectro sólo consideramos los vectores de onda  $k \in PZB$  (**primera zona de Brillouin**).
- La *velocidad de grupo*  $v_g = d\omega/dk$  se anula en  $k = \pm\pi/a$ . Observar que éstos precisamente los valores que satisfacen la condición de Bragg, por lo que parece como si la onda  $k = \pi/a$  se reflejara internamente ( $k \rightarrow -k$ ) para dar lugar a una *onda estacionaria*.
- No pueden existir ondas viajeras con  $\omega > 2(C/M)^{1/2}$ .
- Para  $ka \rightarrow 0 \approx a(C/M)^{1/2}k$ , es decir, la *la velocidad de fase*  $c = \omega/k$  es constante, y es por lo que la relación de dispersión (4.1.7) se denomina *rama acústica*.  $c = a\omega_{\text{máx}}/2$  es la velocidad del sonido en el cristal.

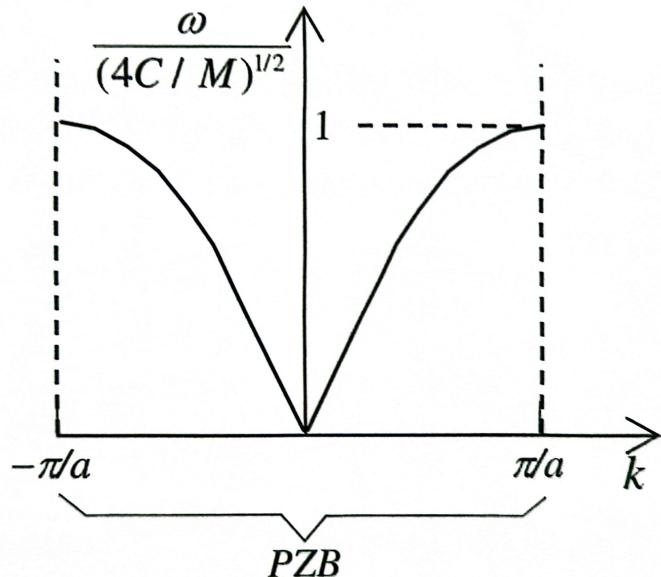


Figura 4.2: Representación de la relación de dispersión de una cadena monoatómica de átomos de masa  $M$  y constante de acoplamiento  $C$ . Observar que para  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow k$

#### 4.1.2. Cristales monoatómicos tridimensionales

En este caso, los átomos ocupan posiciones  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ . Si llamamos a  $\phi$  al potencial de interacción entre dos átomos, la *aproximación armónica* nos permite aproximar la energía total por un desarrollo en serie a segundo orden:

$$U_{\text{arm}} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} [\mathbf{u}(\mathbf{R}) - \mathbf{u}(\mathbf{R}')] \Phi [\mathbf{u}(\mathbf{R}) - \mathbf{u}(\mathbf{R}')] \quad (4.1.8)$$

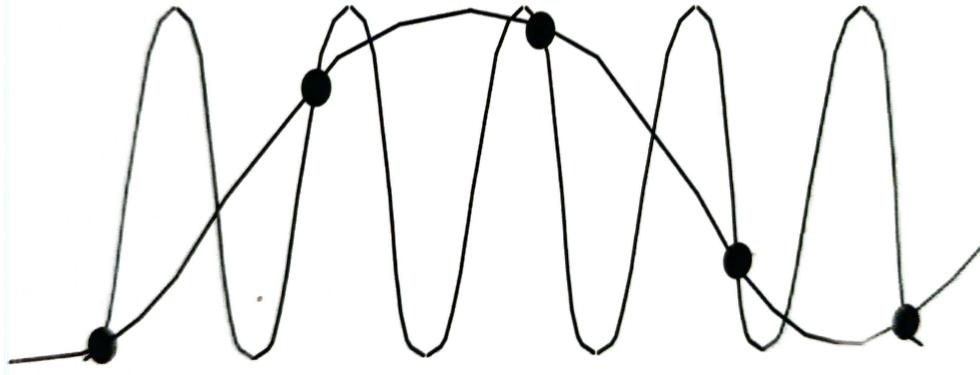


Figura 4.3: Ejemplo de ondas con distancia longitud de onda que sin embargo representan el mismo estado de movimiento de los átomos.

con  $\Phi_{ij} = \partial^2\phi/\partial x_i\partial x_j$ , siendo  $x_i(t) = R_i + u_i(\mathbf{R}, t)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Equivalentemente (4.1.8) se puede escribir como:

$$U_{\text{arm}} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} \mathbf{u}(\mathbf{R}) D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{u}(\mathbf{R}') \quad (4.1.9)$$

donde

$$D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \sum_{\mathbf{R}''} \Phi(\mathbf{R} - \mathbf{R}'') - \Phi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (4.1.10)$$

es una matriz que contiene las interacciones entre pares de átomos. La **ecuación dinámica** es

$$M \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{R})}{dt^2} = -\frac{\partial U_{\text{arm}}}{\partial \mathbf{u}(\mathbf{R})} = \sum_{\mathbf{R}'} D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \mathbf{u}(\mathbf{R}') \quad (4.1.11)$$

que admite soluciones de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{R}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t)} \quad (4.1.12)$$

donde  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k})$  es el *vector de polarización*. Al sustituir (4.1.12) en (4.1.11) se ve que la condición de existencia de solución es

$$D(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) = M\omega^2(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) \quad (4.1.13)$$

donde  $D(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} D(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$  es la llamada *matriz dinámica*, que se puede ver que es real y simétrica. Esto garantiza la existencia de *tres* soluciones a (4.1.13) que verifican  $\boldsymbol{\epsilon}_i(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j(\mathbf{k}) = \delta_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ), y que se denominan *ramas acústicas* por verificar en ellas que  $\omega_i(\mathbf{k}) \approx c_i(\mathbf{k})k$  para  $ka \ll 1$ . Dado un  $\mathbf{k}$ , los vectores  $\boldsymbol{\epsilon}$  no tienen en general que ser paralelos o perpendiculares a  $\mathbf{k}$ . Por eso sólo se puede hablar aproximadamente de *polarización longitudinal* o *transversal*. A pesar de ello, los tres modos posibles para cada  $\mathbf{k}$  se denominan *acústica longitudinal*

(LA) y *acústicos transversales* (TA). El resto de las propiedades coinciden con las del caso unidimensional.

## 4.2. Vibraciones de cristales con base diatómica

### 4.2.1. La cadena lineal diatómica

El modelo es una cadena unidimensional con base diatómica. Los átomos de la base se distinguirán por tener masa distinta (véase 4.4), aunque sería equivalente distinguirlos por sus acoplamientos. Como antes, este modelo podría representar vibraciones de cristales reales en direcciones particulares. Las ecuaciones del movimiento, admitiendo interacción sólo a vecinos más próximos y una única constante de fuerza  $C$  son

$$\begin{aligned} M_1 \frac{d^2 u_s}{dt^2} &= C(v_s - u_s) + C(v_{s-1} - u_s) \\ M_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} &= C(u_{s+1} - v_s) + C(u_s - v_s) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

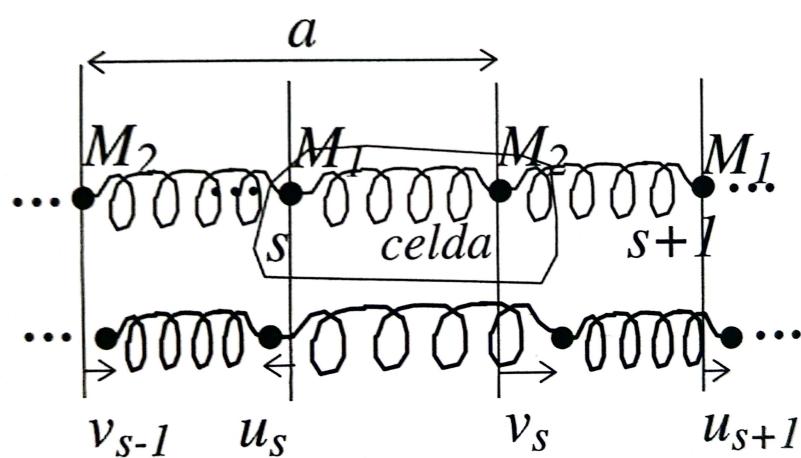


Figura 4.4: Parámetro de red y posiciones de átomos 1 (masa  $M_1$ ) y 2 (masa  $M_2$ ) conectados por una fuerza de constante  $C$  entre planos adyacentes. Los desplazamientos de los átomos 1 se designan por  $u$  y los átomos 2 por  $v$ .

Una solución en modos normales, permitiendo amplitudes distintas para  $M_1$  y para  $M_2$  es

$$u_s = u_k e^{i(ksa - \omega t)} \quad v_s = v_k e^{i(ksa - \omega t)} \quad (4.2.2)$$

Al sustituir (4.2.1) y (4.2.2) se encuentra

$$\begin{aligned} -M_1 \omega^2 u_k &= C(v_k - u_k) + C(v_k e^{-ika} - u_k) \\ -M_2 \omega^2 v_k &= C(u_{k+1} - v_k) + C(u_k - v_k) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Para que exista una solución en  $u_k, v_k$  debe verificarse que

$$\begin{vmatrix} 2C - M_1\omega^2 & -C(1 + e^{-ika}) \\ -C(1 + e^{ika}) & 2C - M_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (4.2.4)$$

$$\omega^2 = \frac{C(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \sin(ka/2)} \right] \quad (4.2.5)$$

El mayor cambio respecto a la cadena lineal monoatómica es que ahora existen *dos modos* ( $\pm$ ) para cada valor de  $k$ , como se ilustra gráficamente en la imagen 4.5. Una de las soluciones tiene las características de una *rama acústica*; la otra, por corresponder, como veremos, a frecuencias próximas a las ópticas, se denomina *rama óptica*.

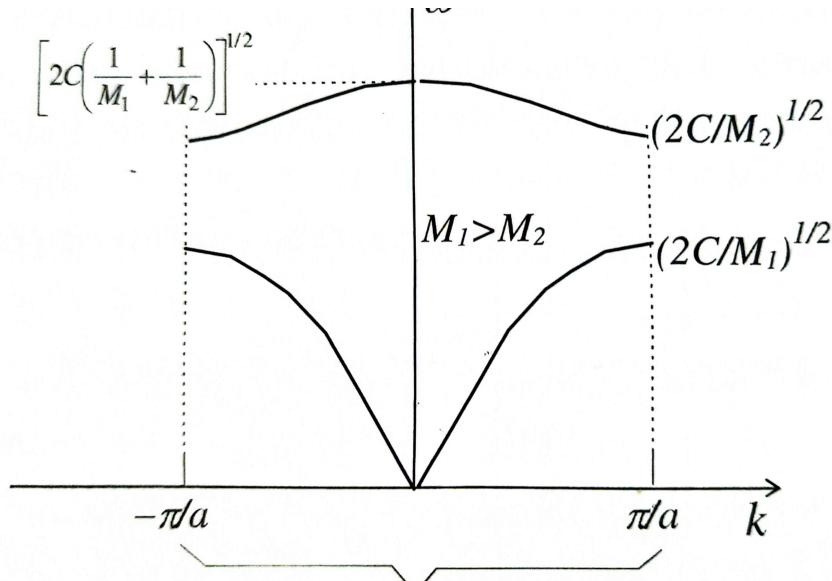


Figura 4.5: Representación de la relación de dispersión de una cadena diatómica de átomos de masas  $M_1$  y  $M_2$  y constante de acoplamiento  $C$ . Observar que para la rama óptica  $\omega \rightarrow \text{cte} \neq 0$  cuando  $k \rightarrow 0$ .

Es interesante excitar el tipo de movimiento atómico asociado a cada una de las ramas. Esto es especialmente sencillo si nos situamos en  $ka \ll 1$ , pues entonces las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) dan  $u_k/v_k = 1$  para la *rama acústica* y  $u_k/v_k = -M_2/M_1$  para la *rama óptica*. Esto quiere decir que el modo acústico los átomos de la celda se mueven en fase, es decir, la celda vibra como un todo y el movimiento es sobre todo *intercelda*. En cambio, en el modo óptico los átomos se mueven en oposición de fase, de modo que el centro de masas está inmóvil y el movimiento es *intracelda*. Estas características además no dependen de la aproximación  $ka \ll 1$ .

La figura 4.6 ilustra la esencia del movimiento de los modos ópticos y acústicos en el caso de un cristal diatómico.

Obsérvese que si los dos átomos fueran iones de signo opuesto, como en un cristal iónico, cabría esperar que los modos ópticos fueran excitados por un campo eléctrico de la frecuencia adecuada. Veremos en la sección 4.4 que, en efecto, existe una fuerte interacción de estos modos con las *ondas e.m. infrarrojas*.

Nótese finalmente, que si la cadena tuviese una base formada por  $z$  átomos habría una *rama acústica* y  $z - 1$  *ramas ópticas*.

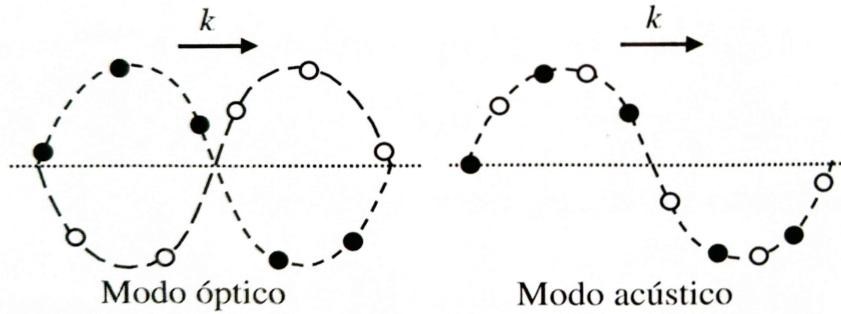


Figura 4.6: Modos óptico y acústica en una cadena diatómica. El desplazamiento atómico respecto a la posición de equilibrio se representa verticalmente.

#### 4.2.2. Cristales tridimensionales poliatómicos

Como generalización (sin demostración) natural de lo que precede, se tiene que en un cristal con base de  $z$  átomos existen, para cada valor de  $k$ ,  $3z$  modos normales. Estos modos se pueden agrupar en  $3z$  ramas, de las que 3 son acústicas y  $3z - 1$  son ópticas. El factor 3 está asociado a las tres polarizaciones posibles y se habla de modos LA, TA, LO, TO. La figura 4.7 muestra espectros de vibración de algunos sólidos simples. El punto importante es que las frecuencias características de vibración son del orden de  $10^{12}$  Hz que corresponden al *infrarrojo*.

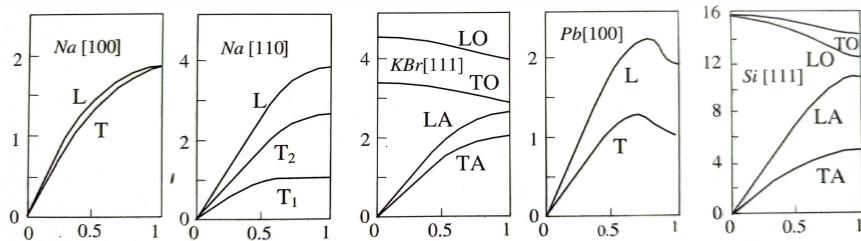


Figura 4.7: Ejemplos de relación de dispersión experimental  $\omega(\mathbf{k})$ . En el eje horizontal se representa  $\mathbf{k}/\mathbf{k}_{\text{máx}}$  para distintas direcciones, y en los ejes verticales la frecuencia  $\omega/2\pi$  en unidades de  $10^{12}$  Hz.

### 4.3. Fonones

#### 4.3.1. Cuantización de las ondas elásticas

Para introducir el concepto de **fonón** vamos a ver una manera más formal de obtener la relación de dispersión dada por la ecuación 4.1.7 haciendo uso de las *variables normales*. En concreto, si se define

$$\xi(k, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^N u_s(t) e^{-iksa} \quad (4.3.1)$$

$$\Pi(k, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^N p_s(t) e^{iksa} \left[ \text{con } p_s(t) = M \frac{\partial u_s(t)}{\partial t} \right] \quad (4.3.2)$$

multiplicando la ecuación del movimiento (4.1.2) por  $e^{iksa}$  y sumando a todos los valores de  $s$ , se encuentra que

$$M \frac{\partial}{\partial t} \xi(k, t) = \Pi(k, t) \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi(k, t) = -M\omega^2(k)\xi(k, t) \quad (4.3.4)$$

c con  $\omega^2(k) = \frac{2}{M} \sum_l C_l \sin^2(ka/2)$ , que a primeros vecinos ( $l = \pm 1$ ) se reduce a la ecuación 4.1.7.

Las funciones  $\xi$  y  $\Pi$  responden a las ecuaciones canónicas de un oscilador de masa  $M$  y frecuencia  $\omega$ . Las soluciones  $(\eta, \Pi)$  se denominan *modos normales* o propios del cristal. Cualquier movimiento de los átomos se pueden describir como suma de *modos normales independientes* según

$$u_s(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in PZB} \xi(k, t) e^{iksa} \approx \frac{L}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \xi(k, t) e^{iksa} dk \quad (4.3.5)$$

Por tanto, un modo normal es una *excitación colectiva* (involucra a todos los átomos) caracterizada por un vector de onda  $\mathbf{k}$  y una frecuencia  $\omega$ .

La energía de cada uno de los modos posibles de vibración de un cristal está discretizada, siendo sus valores posibles los conocidos por el oscilador armónico, es decir,

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \left[ n(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega(\mathbf{k}) \quad (4.3.6)$$

donde  $n(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots$  es el llamado **número de ocupación**. La energía mínima  $\frac{1}{2}\hbar\omega(\mathbf{k})$  es la *energía del punto cero* de cada modo. En el caso más general:

$$\epsilon_p(\mathbf{k}) = \left[ n_p(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega_p(\mathbf{k}) \quad (4.3.7)$$

es decir, cada modo normal está caracterizado, además de por el vector de onda y la frecuencia, por el índice de rama,  $p$ . Recuérdese que para un cristal con base de  $z$  átomos el número de modos por cada  $\mathbf{k}$  es  $3z$ .

El *cuanto* de energía de vibración  $\hbar\omega_p(\mathbf{k})$  se denomina **fonón** y es del orden de 4 meV pues  $\omega/2\pi \approx 10^{12}$  Hz.

El número de ocupación es una medida de *cuantos fonones* de un determinado tipo hay excitados. En la *aproximación semicásica* ( $n \gg 1$ ) se recupera el sentido de la amplitud de oscilación  $u_k$  de un modo de vector de onda  $\mathbf{k}$  (de la rama  $p$ ) y entonces se verifica

$$\frac{1}{2} NM\omega_p^2(\mathbf{k}) u_p^2(\mathbf{k}) = n_p(\mathbf{k}) \hbar\omega_p(\mathbf{k}) \quad (4.3.8)$$

Desde el punto de vista clásico, más o menos energía se traduce en mayor o menor amplitud de oscilación, mientras que el punto de vista cuántico se traduce en mayor o menor número de

ocupación.

No es difícil verificar que *un modo normal no transporta impulso neto* (centro de masas del cristal inmóvil) , por lo que no cabe decir que  $\hbar\mathbf{k}$  es el impulso del fonón, pues entonces el impulso total del modo debería de ser  $n\hbar\mathbf{k}$ . A pesar de esto  $\hbar\mathbf{k}$  del fonón verifica, en su interacción con otras partículas, *leyes de conservación* similares a las del impulso habitual, como vamos a ver.

### 4.3.2. Espectroscopía de fonones

Supóngase un cristal monoatómico sobre le que incide una onda (neutrones, rayos x, etc.) de vector de onda  $\mathbf{K}$  y de frecuencia  $\Omega$ . La amplitud dispersada, en la dirección  $\mathbf{K}'$ , por los átomos en posiciones de equilibrio  $[\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{R}_j]$  es, como sabemos

$$A_{\text{salida}} \propto e^{-i\Omega t} \sum_j e^{-i\Delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_j} \quad (4.3.9)$$

donde  $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}' - \mathbf{K}$ . Supongamos ahora que existe un modo normal establecido en el cristal, de modo que las posiciones atómicas vienen dadas por  $\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{R}_j + \mathbf{u}_j(t)$  donde  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{\pm i[\mathbf{k}\mathbf{R}_j - \omega(\mathbf{k})t]}$  . Al sustituir en (4.3.9) se obtiene, en aproximación armónica ( $u \ll R$ )

$$A_{\text{salida}} \propto e^{-i\Omega t} \sum_j e^{-i\Delta\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}_j} - i\Delta\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_0 \sum_j e^{-i(\Delta\mathbf{K} \pm \mathbf{k})\cdot\mathbf{R}_j} e^{-i[\Omega \pm \omega(\mathbf{k})]t} \quad (4.3.10)$$

de forma que, además de la dispersión en elástica (1<sup>er</sup> término), tendremos *dispersión inelástica* según las condiciones

$$\Omega' = \Omega \pm \omega(\mathbf{k}) \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K} \pm \mathbf{k} + \mathbf{G} \quad (4.3.11)$$

Por estas relaciones de (cuasi)conservación  $\hbar\mathbf{k}$  recibe el nombre de *cuasiimpulso*. Irradiando un cristal y examinando la radiación dispersada inelásticamente, según estas relaciones es posible conocer el espectro fonónico de un cristal  $\omega(\mathbf{k})$ . Entre las radiaciones más utilizadas están:

- Radiación electromagnética en el rango del **infrarrojo**: cubre  $10 \leq k \leq 10^4 \text{ cm}^{-1}$  y  $10^{12} \leq \nu \leq 10^{14} \text{ Hz}$  ( $4 \text{ meV} \leq \epsilon \leq 1 \text{ eV}$ ). Aunque su energía es similar a la de los fonones, no lo es  $\hbar\mathbf{k}$  pues  $k_{PZB} \approx 10^8 \text{ cm}^{-1}$ . Se utiliza por ejemplo en análisis químicos para identificar grupos funcionales dentro de las moléculas (*modos ópticos*).
- Radiación electromagnética en el rango de la **luz visible**: con  $k \approx 10^5 \text{ cm}^{-1}$  ( $2 \leq \epsilon \leq 4 \text{ eV}$ ) se utiliza para la dispersión inelástica (*espectroscopía Raman*). Aunque los cambios de energía de los fotones son muy pequeños, se pueden determinar por técnicas interferométricas. La *espectroscopía Ramen* sirve para estudiar la dinámica de los electrones de conducción en metales, la naturaleza de los cristales, etc.
- **Neutrones**: constituyen la sonda ideal por cuanto los *neutrones térmicos* tienen tanto el vector de onda como la energía comparables a los de los fonones y de hecho la mayoría de las curvas de dispersión de fonones en sólidos se han obtenido empleando neutrones.

El espectro fonónico  $\omega(\mathbf{k})$  permite obtener información muy valiosa sobre las interacciones entre átomos (alcance, intensidad, etc.) en los sólidos. Como ilustración considérese vibraciones

unidimensionales incluyendo interacción de un plano con los  $l$  más próximos. Como ya se ha visto la relación de dispersión es entonces

$$\omega^2(k) = \frac{4}{M} \sum_{l>0} C_l \sin^2 \left( \frac{1}{2} k l a \right) \quad (4.3.12)$$

multiplicando ahora por  $\cos(ksa)$  e integrando (en la  $PZB$ ) se encuentra

$$C_s = \frac{-Ma}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \omega^2(k) \cos(ska) dk \quad (4.3.13)$$

que nos da la constante de fuerza entre cualesquiera planos atómicos a partir de  $\omega(k)$ .

## 4.4. Vibraciones de los cristales iónicos

Las oscilaciones ópticas en cristales iónicos conllevan un campo electromagnético dentro del cristal, y por tanto una interacción de largo alcance (los modos acústicos, por tratarse de movimientos de celdas neutras como un todo, no llevan asociado campo eléctrico). Por esto, *el estudio de los fonones ópticos en los cristales iónicos exige estudiar simultáneamente el movimiento de iones y el campo eléctrico asociado*. Sin embargo, como las ondas electromagnéticas son transversales, el acoplamiento sólo tiene lugar para los modos ópticos transversales, que es para los que se hace este estudio. Para simplificar analizaremos sólo cristales cúbicos diatómicos (tipo CsCl, NaCL, ZnS,...) en el límite  $ka \ll 1$ . En estas condiciones los cristales se pueden tratar isótropicamente y macroscópicamente (medio continuo).

Considérese una celda cualquiera con dos iones de cargas opuestas  $\pm q$ . Representemos por  $u_+$   $u_-$  los desplazamientos locales de sendos iones, y por  $M_+$  y  $M_-$  sus masas. En el límite  $ka \ll 1$  todos los iones del mismo signo en la vecindad de la celda considerada se moverán al unísono de modo que las ecuaciones del movimiento son:

$$M_+ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_+}{\partial t^2} = 2C(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+) + q\mathbf{E} \quad (4.4.1)$$

$$M_- \frac{\partial^2 \mathbf{u}_-}{\partial t^2} = 2C(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) - q\mathbf{E} \quad (4.4.2)$$

donde se ha incluido la *interacción de largo alcance* a través del campo eléctrico.

Introduciendo la coordenada relativa  $\mathbf{w} = \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$  en las ecuaciones (4.4.1) y (4.4.2) dan

$$M^* \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -M^* \omega_0^2 \mathbf{w} + q\mathbf{E} \quad (4.4.3)$$

con  $M^* = M_+ M_- / (M_+ + M_-)$  y  $\omega_0 = (2C/M^*)^{1/2}$ , que sería la frecuencia de los modos ópticos, tanto longitudinales como transversales, para  $ka \ll 1$ , suponiendo fuerzas de corto alcance.

Una solución ondulatoria a (4.4.3), es decir, con  $\mathbf{w} \propto e^{-i\omega t}$ , permite, al sustituir, despejar

$$\mathbf{w} = \frac{q\mathbf{E}}{M^*(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.4.4)$$

Por (4.4.4) es obvio que  $\mathbf{w}$  es función del campo eléctrico, pero a su vez el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  tiene su origen en  $\mathbf{w}$ . Esto se puede ver recordando que la *polarización*  $\mathbf{P}$ , está ligada al campo eléctrico a través de la permitividad  $\epsilon(\omega)$  según

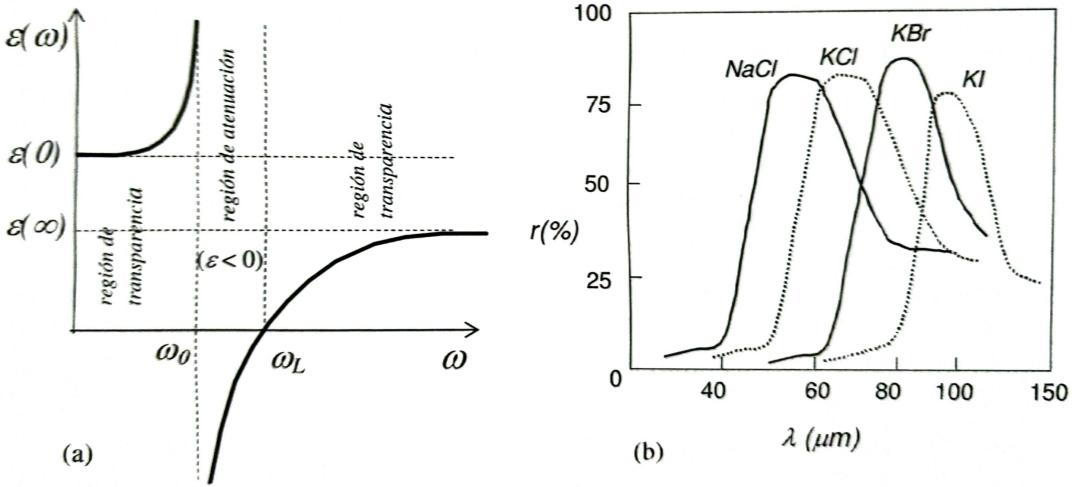


Figura 4.8: (a) Dependencia con la frecuencia de la permitividad eléctrica relativa en cristales iónicos. (b) reflectividad de algunos cristales iónicos para longitudes de onda en el rango infrarrojo.

$$\mathbf{P} = [\epsilon(\omega) - 1] \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.4.5)$$

y observando por otro lado que, la definición de *polarización* como una *densidad de momento dipolar*, se tiene

$$\mathbf{P} = nq(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) + \mathbf{P}_\infty \quad (4.4.6)$$

Aquí  $n$  denota el número de celdas por unidad de volumen y

$$\mathbf{P}_\infty = [\epsilon(\infty) - 1] \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.4.7)$$

es la contribución a  $\mathbf{P}$  de las nubes electrónicas [la notación  $\epsilon(\infty)$  indica que esta contribución se refiere a  $\epsilon(\omega)$  a frecuencias electrónicas muy grandes (comparadas con las de la vibración reticular)]. Combinando (4.4.4) y (4.4.7) se obtiene que

$$\epsilon(0) = \epsilon(\infty) + \frac{nq^2}{\epsilon(0)M^*\omega_0^2} \quad (4.4.8)$$

resulta

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + [\epsilon(0) - \epsilon(\infty)] \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathbf{E} \quad (4.4.9)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 4.8 (a). En ella  $\omega_L$  es la frecuencia para la que  $\omega(\omega_L) = 0$ , que por (4.4.9) verifica  $\omega_L = (\epsilon(0)/\epsilon(\infty))^{1/2}\omega_0 > \omega_0$ .

Los rasgos esenciales del comportamiento de la luz frente a los cristales iónicos se puede deducir de comparar la relación de dispersión (4.4.9) con la general para ondas electromagnéticas trasversales, esto es,

$$\omega = k \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \quad (c = \text{velocidad de la luz}) \quad (4.4.10)$$

Para  $\omega_0 < \omega < \omega_L$ ,  $\epsilon < 0$  y por (4.4.10)  $k$  es complejo puro:  $k \propto i\alpha$ , con lo que la onda con la parte espacial  $E \propto e^{ika} = \epsilon\alpha x$  se amortigua exponencialmente, es decir, hay una fuerte *atenuación*. También  $\epsilon(\omega \rightarrow \omega_0) \rightarrow \infty$  lo que conlleva una reflectividad  $r = (\sqrt{\epsilon(\omega)} - 1)^2 / (\sqrt{\epsilon(\omega)} + 1)^2$  que se acerca a la unidad, de acuerdo con lo que se observara experimentalmente, como se ilustra en la imagen 4.8 (b). Como  $\omega_0 \approx 2\pi \times 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$ , la alta reflectividad tiene lugar en el *infrarrojo*, lo cual se utiliza tanto para determinar experimentalmente  $\omega_0$  como para producir radiación muy monocromática en el infrarrojo mediante sucesivas en cristales iónicos.

# 5

## Propiedades térmicas reticulares

En este Tema se estudia la parte más *física* de las vibraciones atómicas en los sólidos. En concreto, veremos cómo se pueden entender desde la dinámica de red propiedades como *calor específico*, la *conductividad térmica* y la *dilatación térmica* de los sólidos.

### 5.1. Densidad de modos

#### 5.1.1. Condiciones de contorno

Se trata de incluir cuantitativamente el hecho de que todo cristal es finito. Sea un cristal de dimensiones  $N_i \mathbf{a}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) siendo los  $\mathbf{a}_i$  ejes primitivos  $N = N_1 N_2 N_3$  el número de celdas primitivas. Imponiendo sobre las soluciones  $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \epsilon e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t)}$  las llamadas **condiciones de contorno periódicas** o **condiciones de contorno de Born-von Karman**,  $\mathbf{u}(\mathbf{R} + N_i \mathbf{a}_i) = \mathbf{u}(\mathbf{R})$  para cualquier  $i = 1, 2, 3$  se encuentra que los vectores  $\mathbf{k}$  son de la forma

$$\mathbf{k} = \frac{n_1}{N_1} \mathbf{b}_1 + \frac{n_2}{N_2} \mathbf{b}_2 + \frac{n_3}{N_3} \mathbf{b}_3 \text{ con } \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{ij} \quad (5.1.1)$$

donde los  $n_i$  son, en principio, cualquier entero. Hemos visto sin embargo que sólo hay que considerar los vectores de onda dentro de la *PZB*. Es fácil de ver que en cualquier celda primitiva de la red recíproca, por ejemplo en la *PZB*, sólo existen, según (5.1.1),  $N_1 N_2 N_3 = N^3$  valores de  $\mathbf{k}$  posibles. Por lo visto del tema 4, existirán un total de  $3zN$  modos normales. El volumen asociado a cada valor permitido de  $\mathbf{k}$  es  $V_{PZB}/N$ . Como el volumen total del cristal se puede escribir como  $V = V_{\text{celda}} N$  y  $V_{\text{celda}} = 8\pi^3/V_{PZB}$ , resulta que el volumen asociado a cada valor de  $\mathbf{k}$  es  $8\pi^3 V/N$ .

#### 5.1.2. Cálculo de la densidad de modos

Para el estudio de muchas propiedades cristalinas es importante conocer cómo se reparten los modos posibles no en  $\mathbf{k}$  sino en frecuencia  $\omega$ . Se define así la *densidad de modos* o *estados* para la rama  $p$ ,  $D_p(\omega)$ , como el número de modos por unidad de frecuencia con frecuencias en el intervalo  $(\omega, \omega + d\omega)$ .

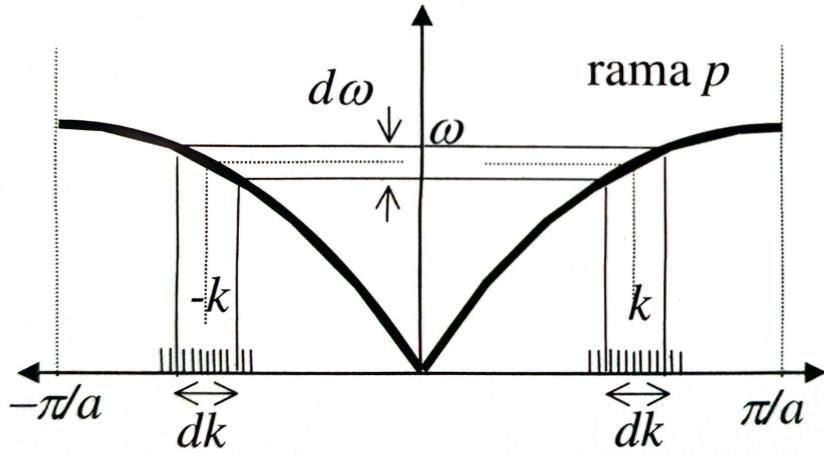


Figura 5.1: Relación de dispersión para una cadena monoatómica. Equivalencia entre la densidad de modos en  $k$  y en  $\omega$ .

En una dimensión, si el cristal es de longitud  $L = Na$ , hay  $N$  valores de  $k$  en la PZB ( $-\pi/a < k \leq \pi/a$ ) de manera que, el intervalo  $\delta k$  asociado a cada modo es  $2\pi/L$ . El número de modos de una rama denotada por  $p$  en el intervalo  $d\omega$  será, según se indica en la figura 5.1:

$$D_p(\omega)d\omega = \frac{2dk}{\delta k} = \frac{L}{\pi} \left| \frac{\partial k}{\partial \omega} \right| d\omega = \frac{L}{\pi} \frac{d\omega}{|\nabla_k \omega(k)|_p} \Rightarrow$$

$$D_p(\omega) = \frac{L}{\pi} \frac{1}{|\nabla_k \omega(k)|_p} \quad (5.1.2)$$

La generalización a dos y tres dimensiones es, respectivamente:

$$2D) D_p(\omega) = \int_{L_p(\omega)} \frac{S}{4\pi^2} \frac{dL}{|\nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})|_p} \quad (5.1.3)$$

$$3D) D_p(\omega) = \int_{S_p(\omega)} \frac{V}{8\pi^2} \frac{dL}{|\nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})|_p} \quad (5.1.4)$$

donde la integral se extiende sobre la línea (en 2D) o superficie (en 3D) del espacio  $\mathbf{k}$  con  $\omega$ . Finalmente,  $D(\omega) = \sum_p D_p(\omega)$ .

### 5.1.3. Aproximación de Debye

Esta aproximación consiste en sustituir todas las ramas de vibración por *tres idénticas e isótropas* con relación de dispersión:

$$\omega = ck \quad (0 < k < k_D) \quad (5.1.5)$$

siendo  $c$  la velocidad del sonido en el cristal (para  $k \rightarrow 0$ ) y  $k_D$  el llamado **vector de onda de Debye**. Este se escoge de tal manera que el número total de modos sea el correcto ( $3zN$ ). La

figura 5.2 ilustra como  $k_D$  debe ser mayor que  $k_{PZB}$  precisamente para que el número total de modos sea el adecuado. Según esta definición

$$3zN = 3 \times \frac{\frac{4}{3}\pi k_D^3}{\frac{8\pi^3}{V}} \Rightarrow k_D^3 = 6\pi^2 n \quad (5.1.6)$$

siendo  $n = zN/V$  la densidad numérica de átomos.

En esta aproximación las superficies de  $\omega$  constante son esferas (la figura 5.3 muestra la sección para  $k_z$  de una superficie  $\omega = \text{cte.}$ ) La densidad de modos viene dada por  $D_D(\omega)d\omega = 3 \times 4\pi k^2 dk / (8\pi^3/V)$ , que al utilizar (5.1.4) permite despejar

$$D_D(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} \quad (0 < \omega < \omega_D) \quad (5.1.7)$$

La frecuencia máxima  $\omega_D = ck_D$  se denomina **frecuencia de Debye**.

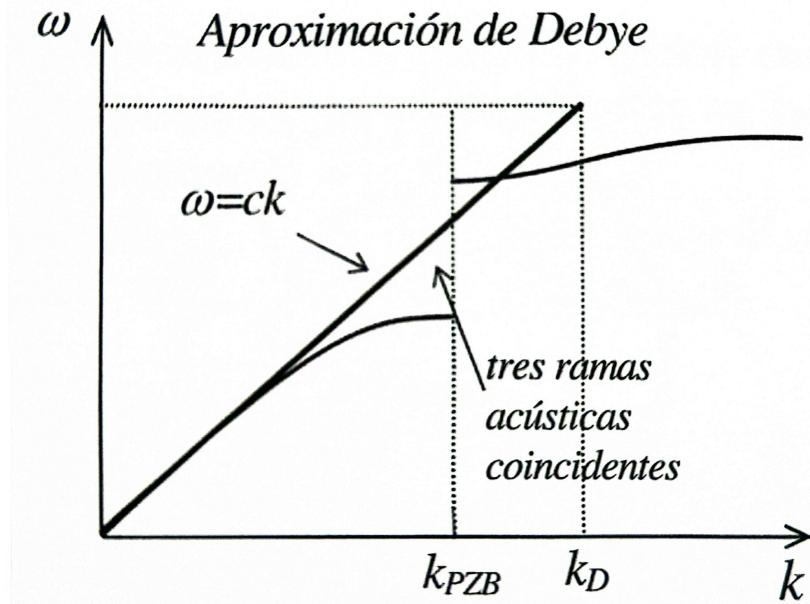


Figura 5.2: Representación de la aproximación de Debye. Todas las ramas se sustituyen por tres acústicas degeneradas.

## 5.2. Capacidad térmica reticular

### 5.2.1. Estadística de fonones

### 5.2.2. Cálculo de la capacidad térmica

## 5.3. Efectos anarmónicos

### 5.3.1. Dilatación térmica

### 5.3.2. Conductividad térmica

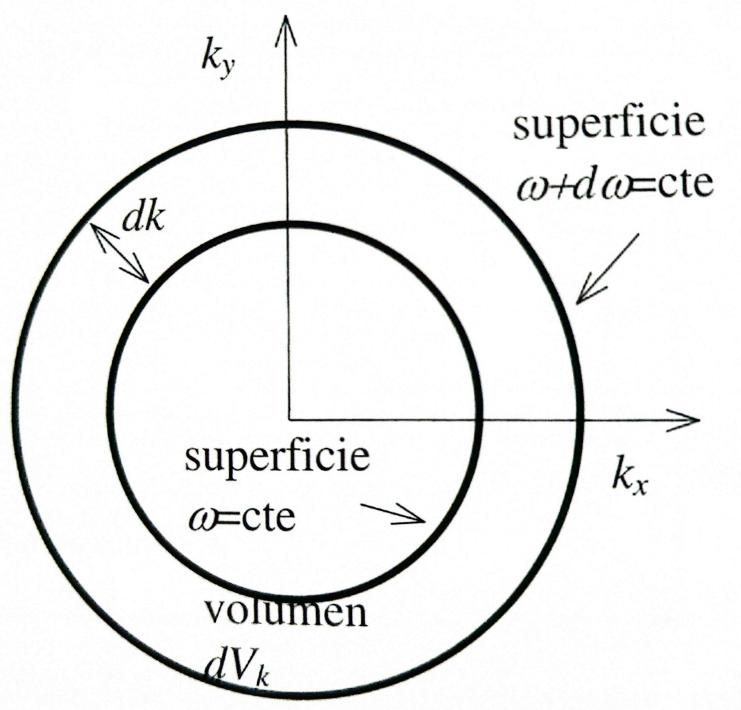


Figura 5.3: Sección de una superficie de frecuencia constante en la aproximación de Debye.

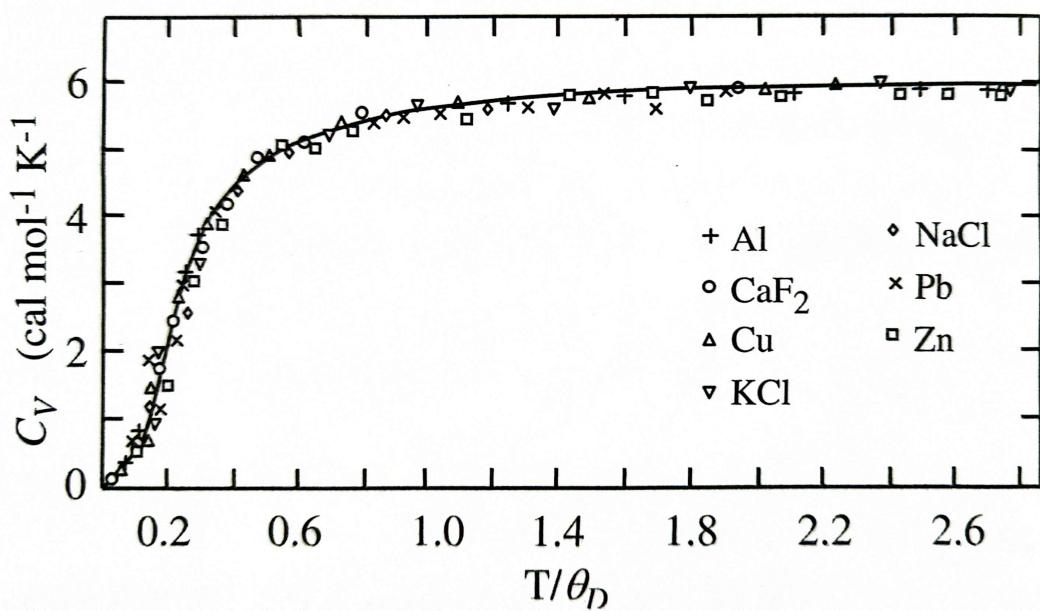


Figura 5.4: Capacidad térmica por mol frente  $T/\theta_D$  para diversos tipos de cristales.

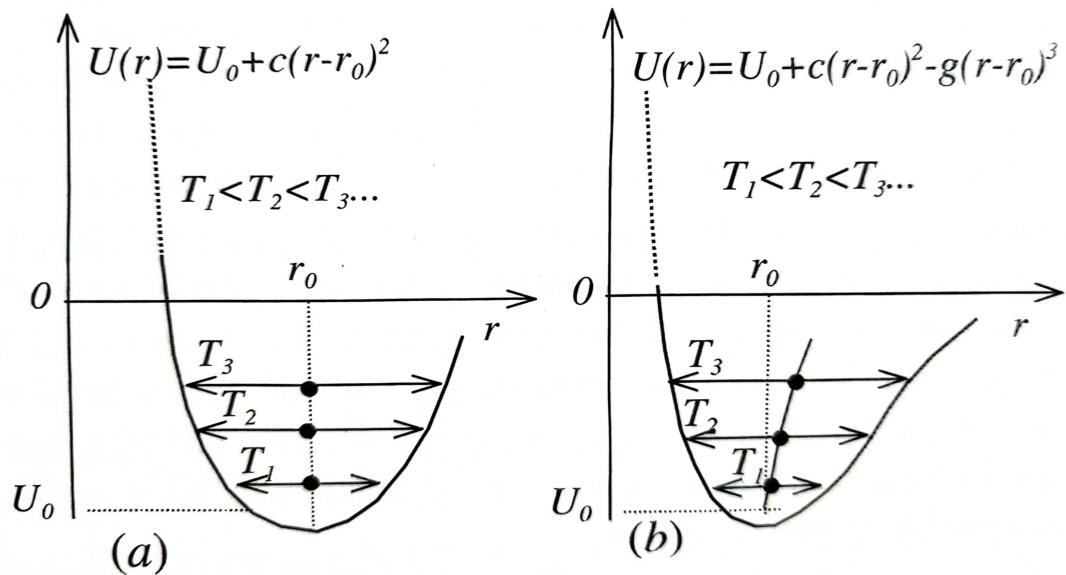


Figura 5.5: Potencial por par de átomos según la aproximación armónica (a) y según la aproximación anarmónica (b) que permite explicar de los cristales cuando se calientan.

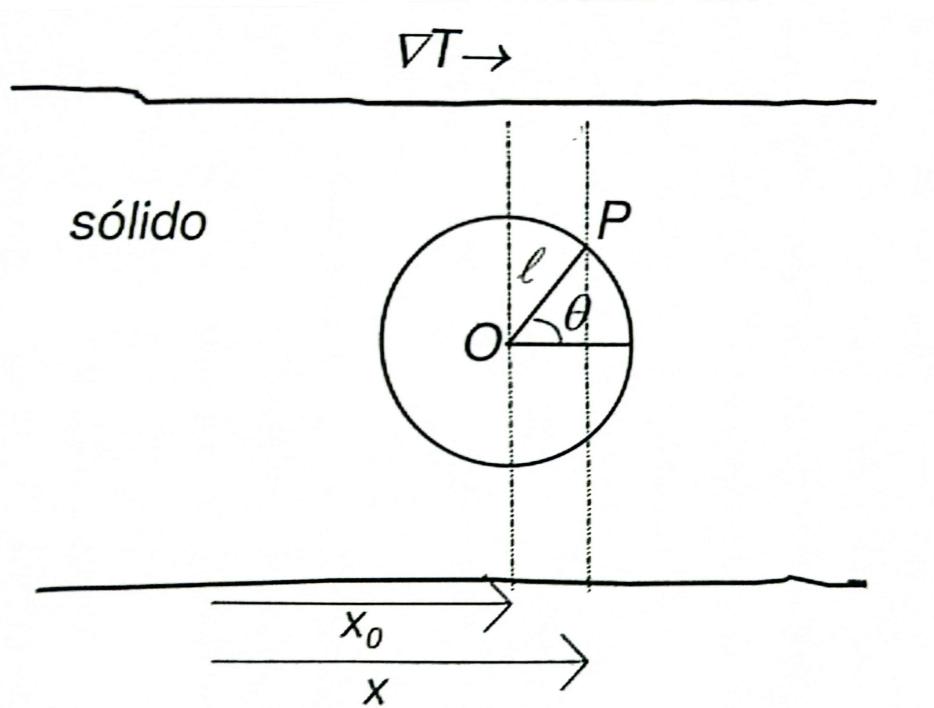


Figura 5.6: Transporte de calor mediante fonones en presencia de un gradiente uniforme de temperatura. La corriente térmica en  $O$  se debe a los fonones que, en media, han sufrido la última colisión en un punto  $P$  a distancia  $l = c\tau$ .

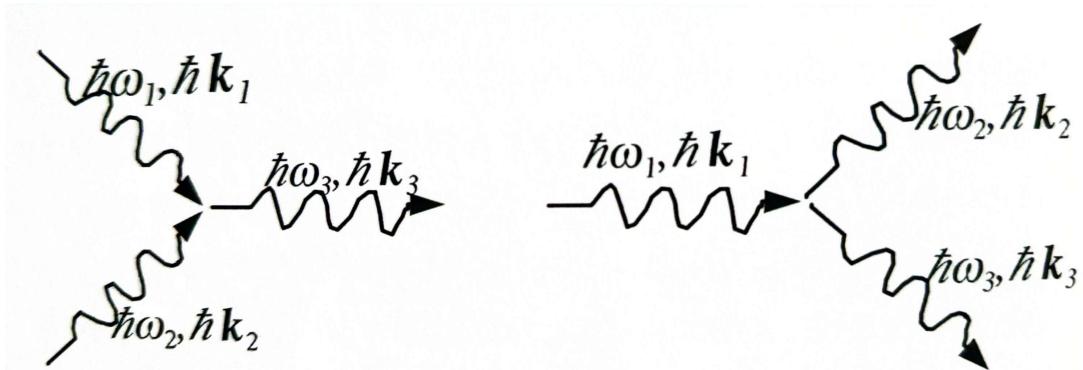


Figura 5.7: Procesos de interacción entre fonones debidos a los términos (*cúbicos*) anarmónicos del potencial de interacción entre átomos. Izquierda: Dos fonones interaccionan dando lugar a un tercer fonón. Derecha: Un fonón *se rompe* en dos.

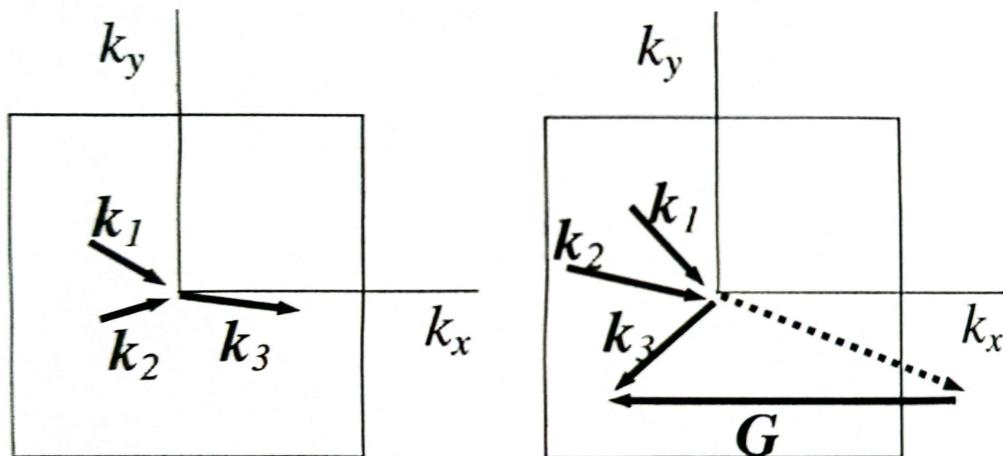


Figura 5.8: Izquierdo: Proceso *N* que no degrada el transporte de energía térmica. Derecho: Proceso *U* que degrada fuertemente el transporte de calor.

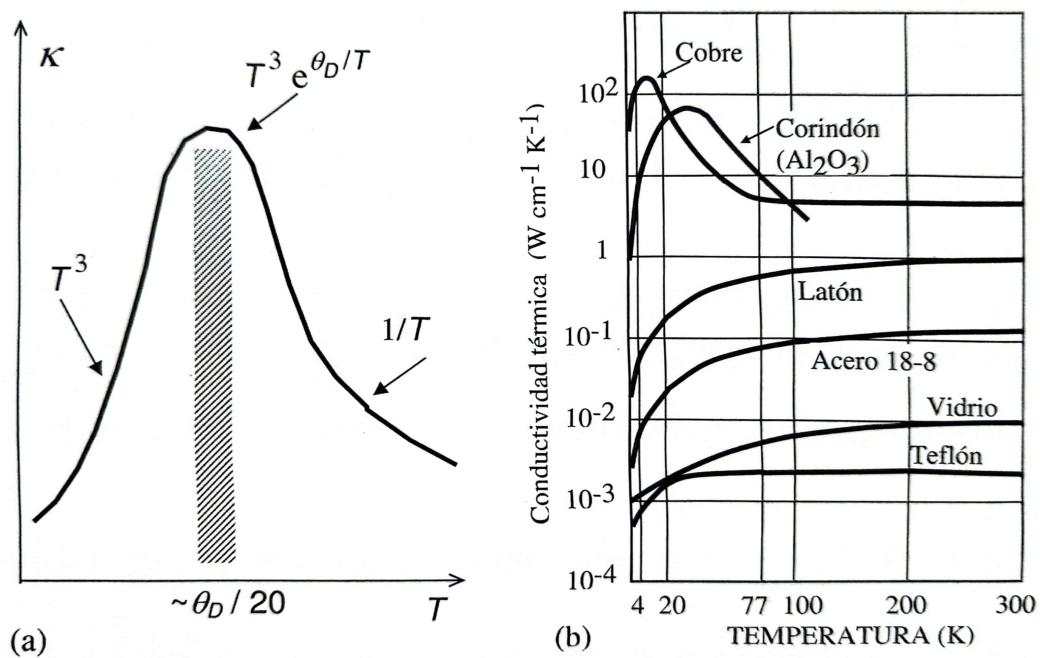


Figura 5.9: (a) Dependencia genérica de la conductividad térmica de los cristales con la temperatura. (b) Conductividad térmica frente a la temperatura para diversos tipos de sólidos.



# 6

## Gas de fermi de electrones libres

En este capítulo se comienza el estudio de los metales con un primer modelo en el que los electrones de valencia de los átomos del metal se *independizan* constituyéndose en electrones de conducción que se mueven de una forma casi completamente libre a través del metal. De manera más precisa se supone que la red de iones positivos en el metal está inmóvil (red *fría*) y además se sustituye por un fondo positivo de carga (a veces llamado *modelo jalea*) de modo que el potencial eléctrico a que están sometidos los electrones de conducción es una constante que puede tomarse como cero. Se admite además que los electrones no interaccionan entre sí, pero debido a su carácter fermiónico les aplicaremos el Principio de Exclusión de Pauli. Hablaremos entonces de *Gas de Fermi de electrones libres*.

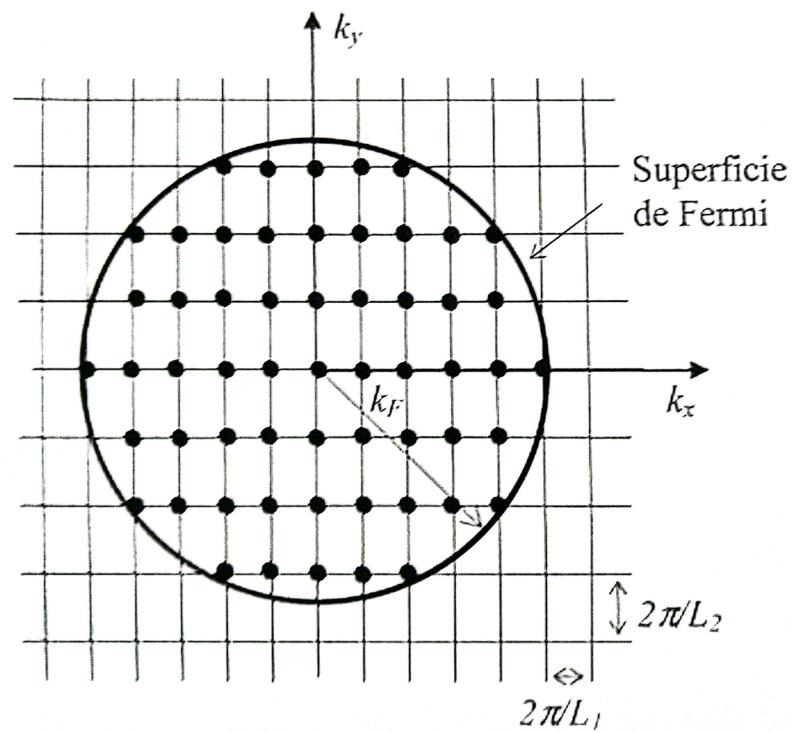


Figura 6.1: Distribución de estados electrónicos ocupados en el espacio de fases.

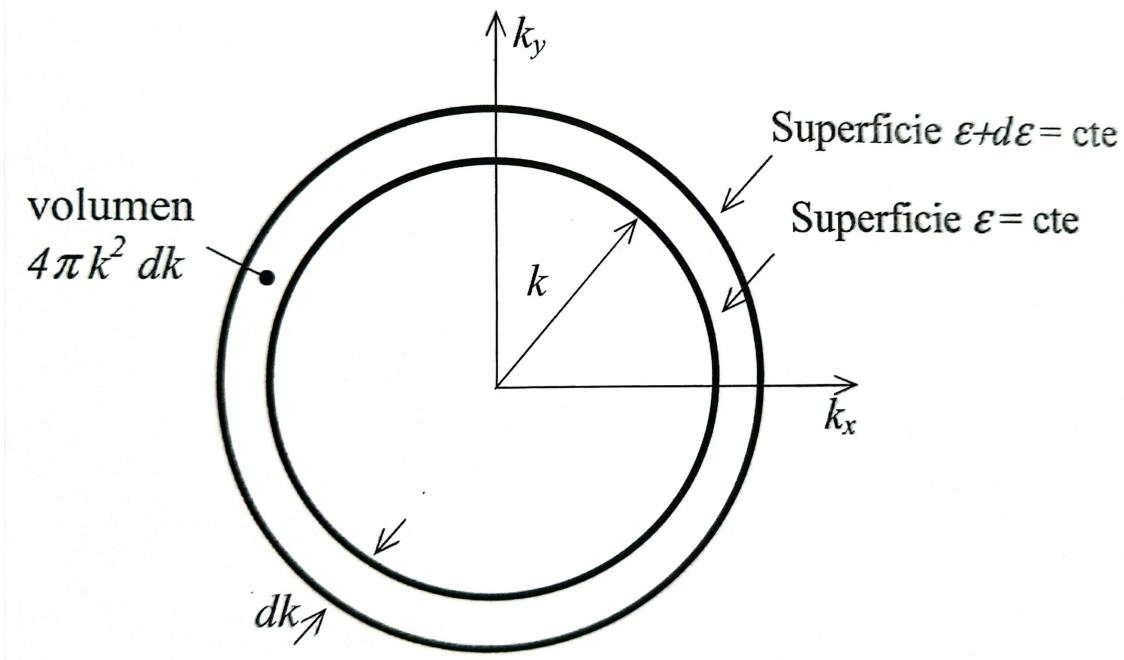


Figura 6.2: Cálculo de la densidad de estados electrónicos.

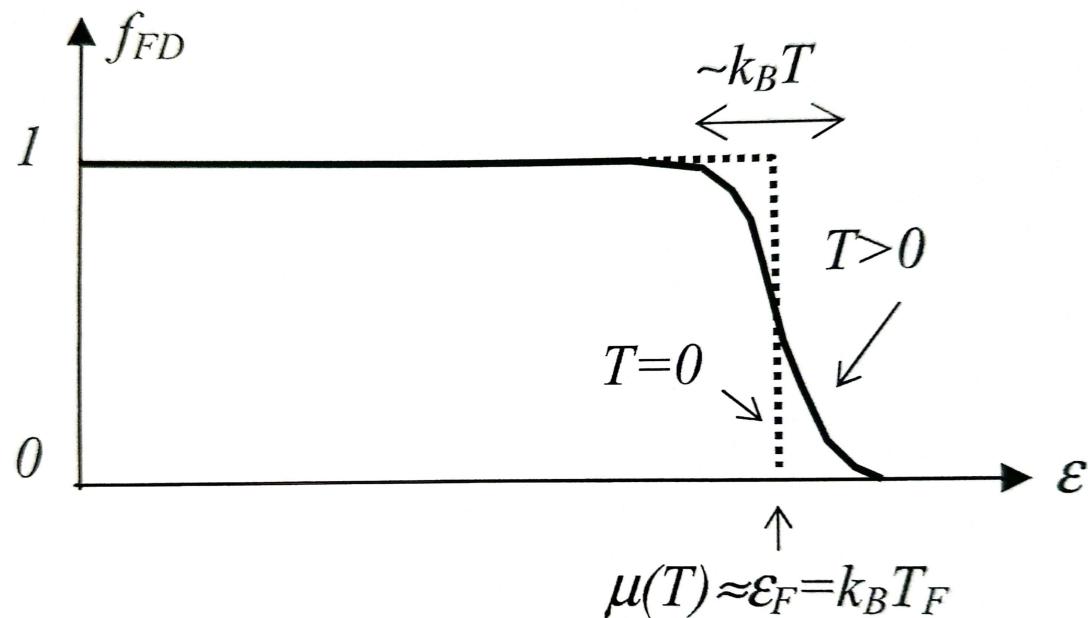


Figura 6.3: Distribución de Fermi-Dirac.

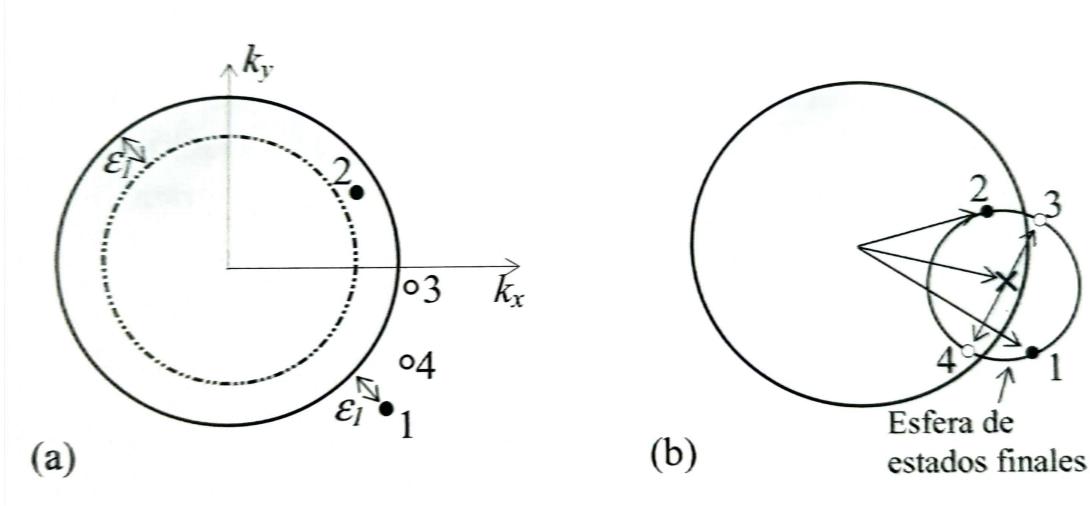


Figura 6.4: Restricción a los procesos de colisión  $e^- - e^-$  debido a las leyes de conservación de la energía (a) y del momento (b).

## 6.1. Estados fundamentales del gas de Fermi

### 6.1.1. Niveles de energía

### 6.1.2. Ocupación de estados a $T > 0$

---

### 6.1.3. Interacción electrón-electrón<sup>71/113</sup>

## 6.2. Capacidad térmica electrónica

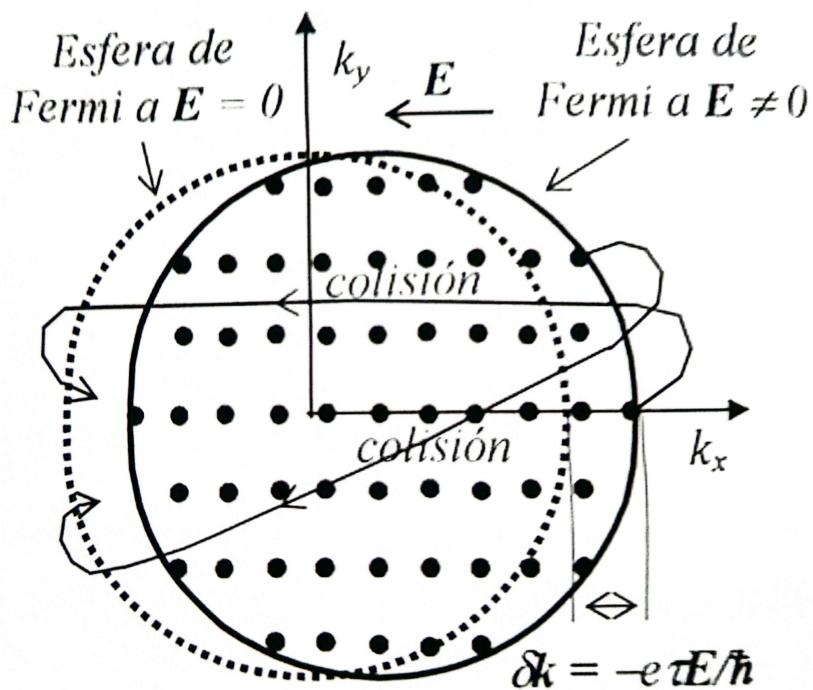


Figura 6.5: Desplazamiento de la “esfera de Fermi” bajo la aplicación de un campo eléctrico. Las líneas indican algunos procesos de colisión permitidos.

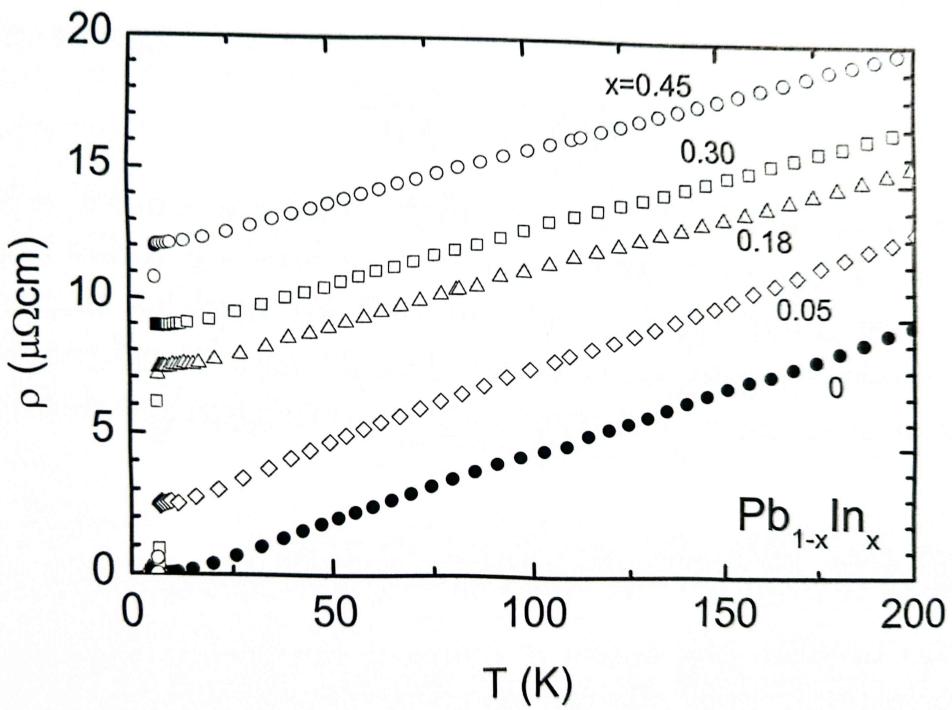


Figura 6.6: Comprobación de la regla de Mathiessen con la resistividad de aleaciones de Pb-In. Al aumentar  $x$  el desorden de la aleación y por tanto la contribución constante  $\rho_{\text{def}}$  frente a  $\rho_{\text{fon}}(T)$  que casi no cambia (nótese que la pendiente no varía). Es interesante que estas aleaciones son superconductores por debajo de  $\sim 7$  K (veáse Capítulo 11).

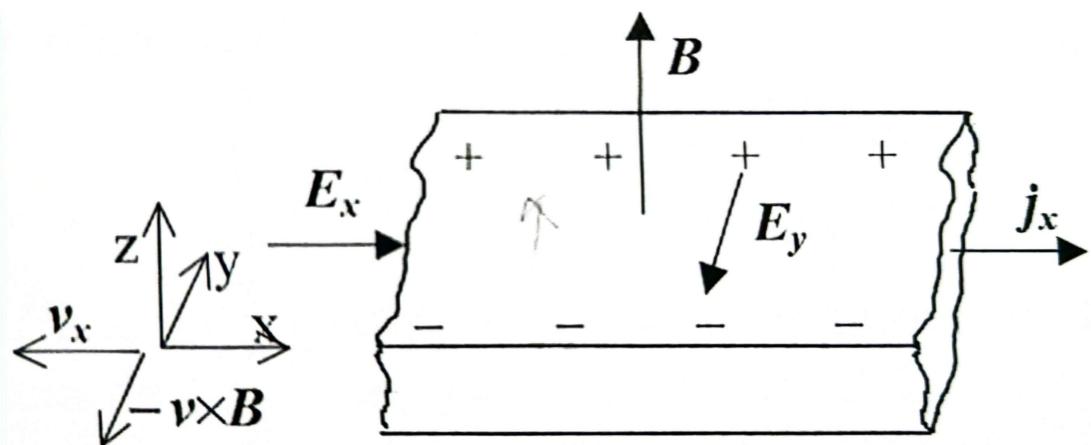


Figura 6.7: Configuración experimental para comprobar el efecto Hall.



# 7

## Electrones en un potencial periódico. Teoría de bandas.

Para mejorar algunas de las predicciones del modelo del gas de electrones libres se introduce ahora la interacción de los electrones con la red cristalina a través de un potencial periódico. Se sigue despreciando, sin embargo, la posible interacción de los electrones entre sí.

### 7.1. Teorema de Bloch

### 7.2. Aproximación de red vacía

### 7.3. Ecuación de onda del electrón en un potencial periódico

### 7.4. Electrones cuasilibres

#### 7.4.1. Gap de energía en los bordes de zona

### 7.5. Electrones fuertemente ligados

### 7.6. Superficie de Fermi y zonas de Briollouin

### 7.7. Metales, aislantes y semiconductores

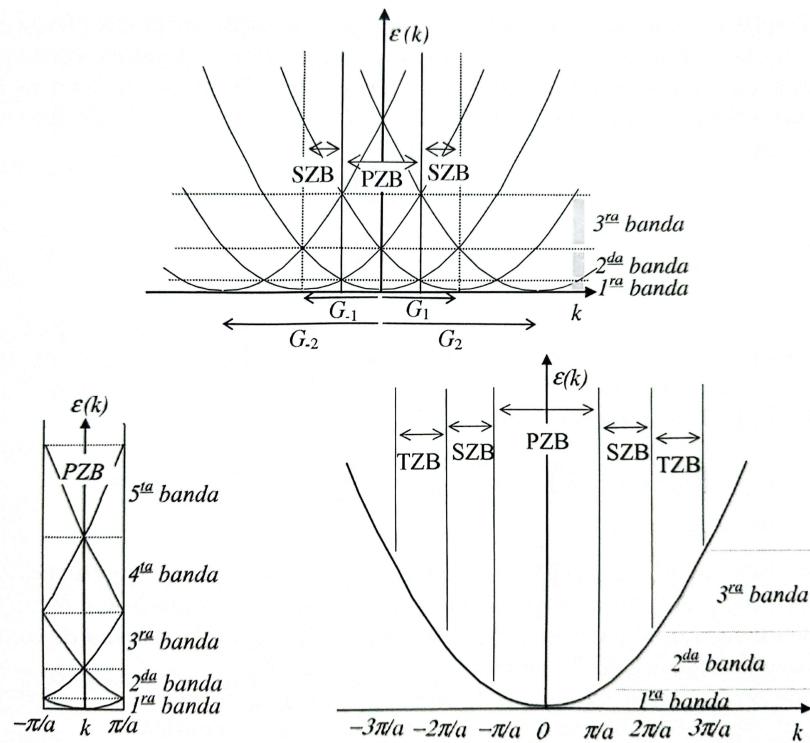


Figura 7.1: Arriba: Esquema en zona periódica. Abajo: Esquemas en zona reducida (izquierda) y en zona extendida (derecha).

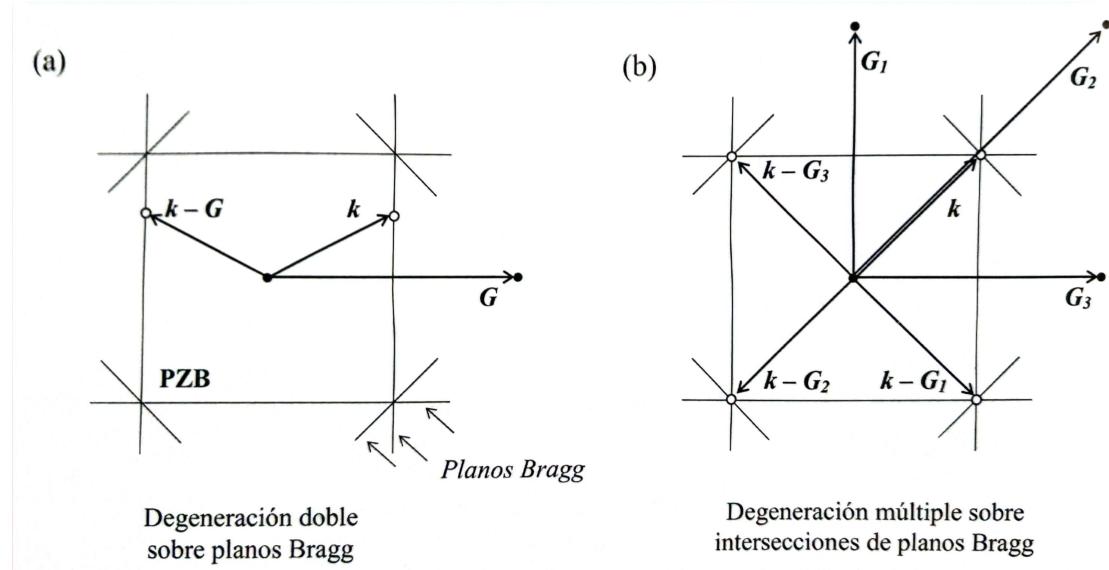


Figura 7.2: (a) Ejemplo de estados doblemente degenerados sobre planos Bragg de una red cuadrada. (b) Estados cuádruplemente degenerados sobre las esquinas de la PZB de una red cuadrada.

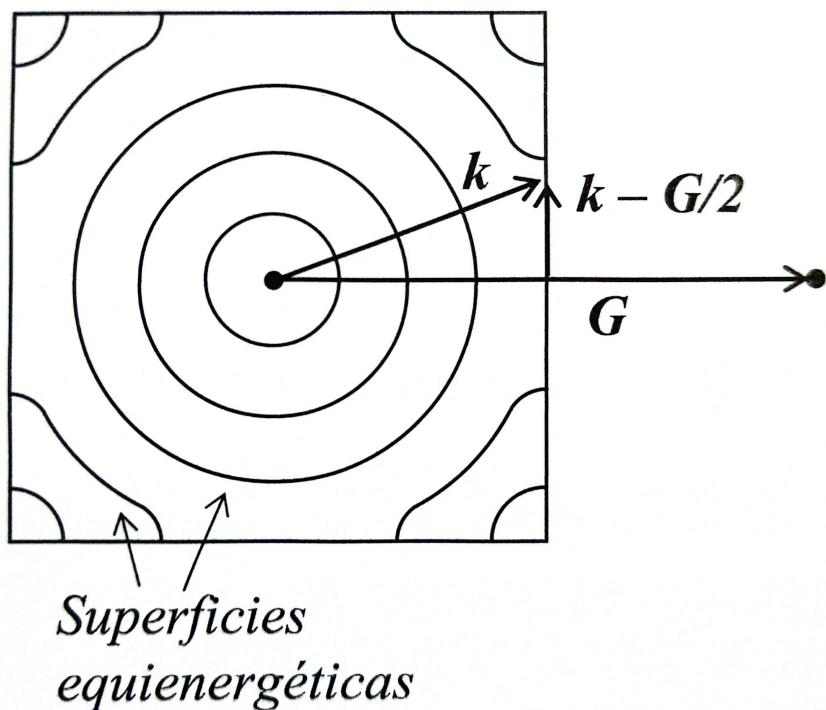


Figura 7.3: Ejemplo de contornos equienérgéticos en la PZB de una redcuadrada en la aproximación de electrones cuasilibres. Lejos de los planos de Bragg la aproximación de electrones libres es buena y los contornos son circulares. En los planos de Bragg, según se abre un gap de amplitud  $2|U_G|$ . Según los contornos son perpendiculares a los planos de Bragg.

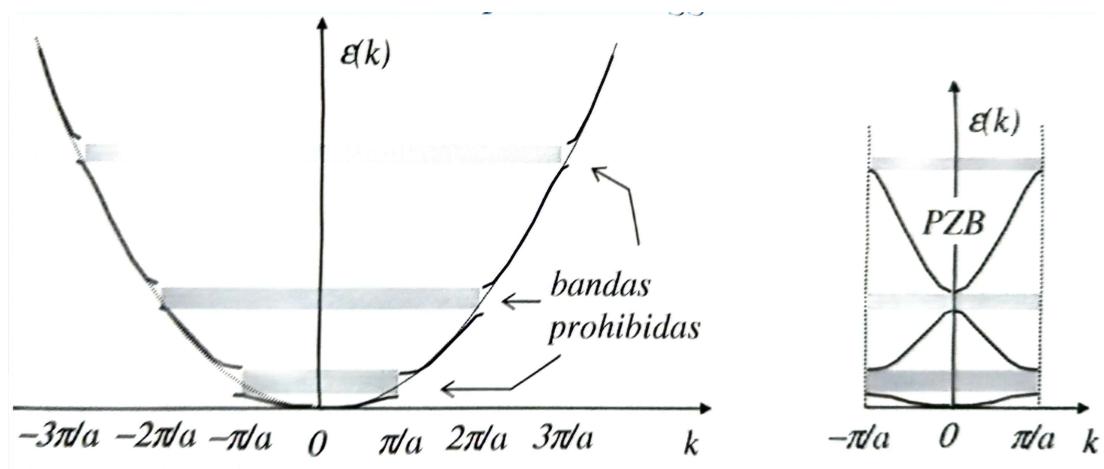


Figura 7.4: Bandas prohibidas en los esquemas en zona extendida (izquierda) y reducida (derecha).

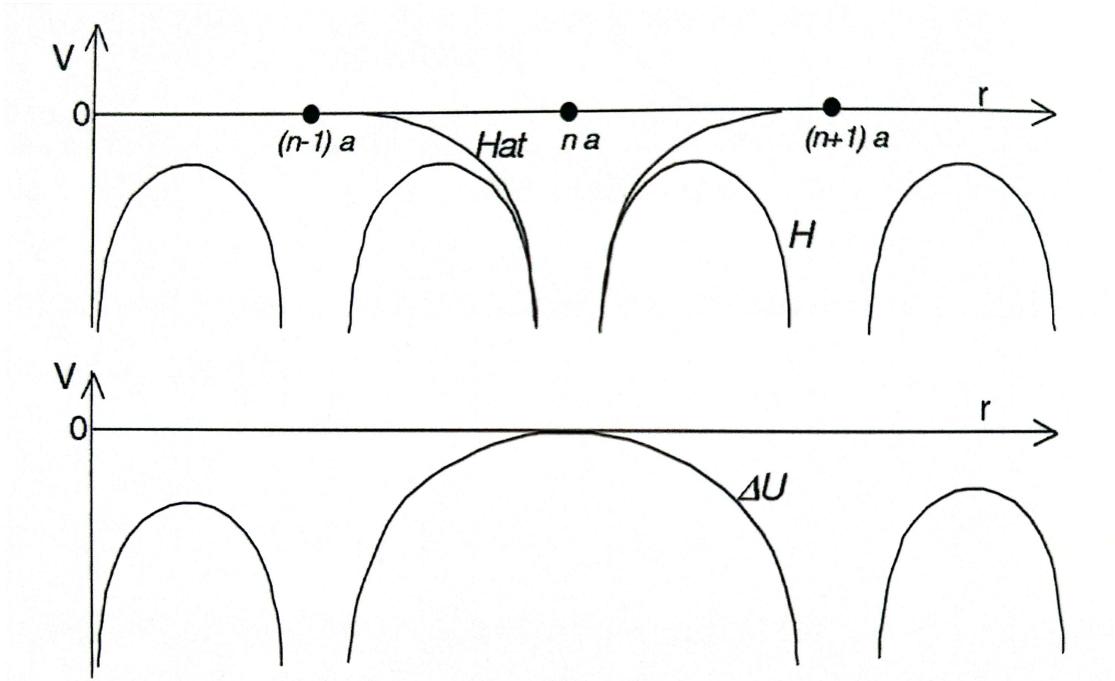


Figura 7.5: Potencial periódico expresado como suma de un potencial atómico más una perturbación.

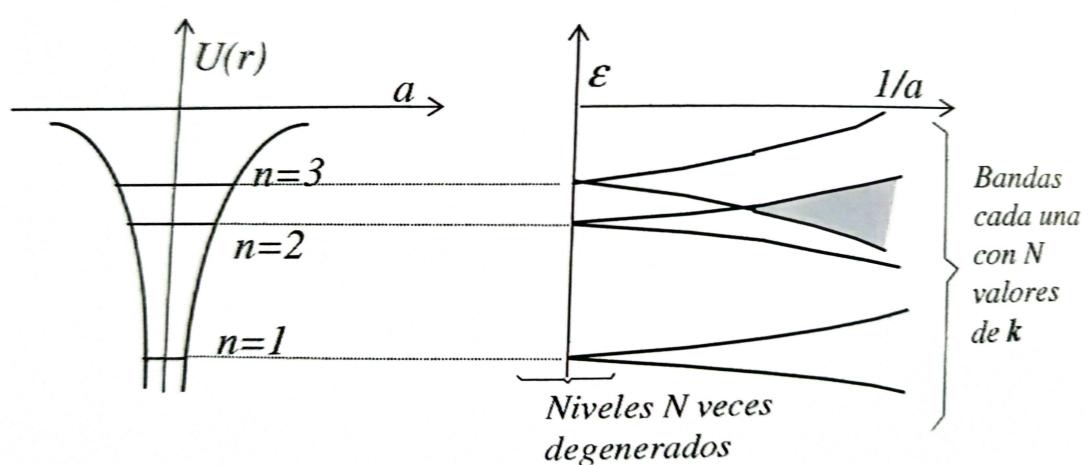


Figura 7.6: Bandas de energía a partir de la aproximación de electrones fuertemente ligados. La zona sombreada representa el solapamiento entre la 1<sup>a</sup> y 2<sup>a</sup> bandas.

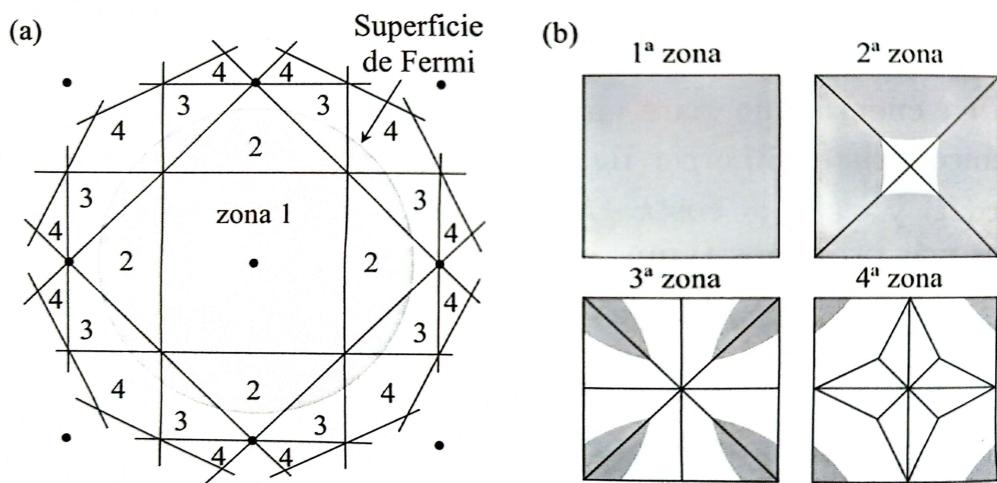


Figura 7.7: 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup> zonas de Brillouin para una red cuadrada 2D, según los esquemas en zona extendida (a) y reducida (b). En gris se representan los estados ocupados.

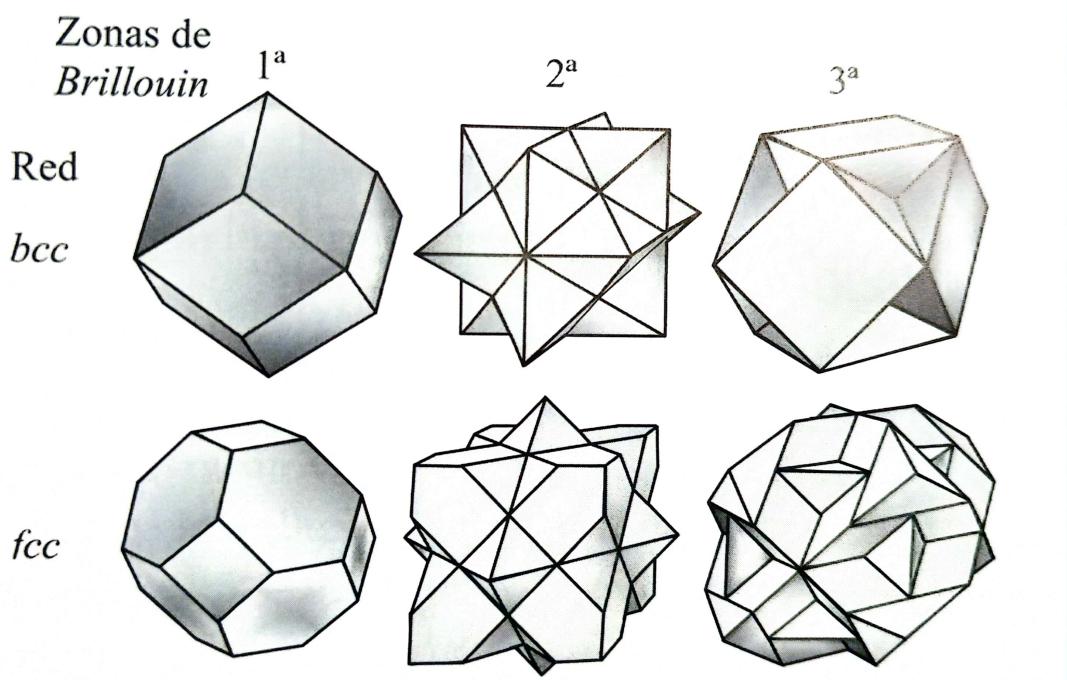


Figura 7.8: Primeras zonas de Brillouin para las estructuras *bcc* y *fcc*, según el esquema en zona reducida.

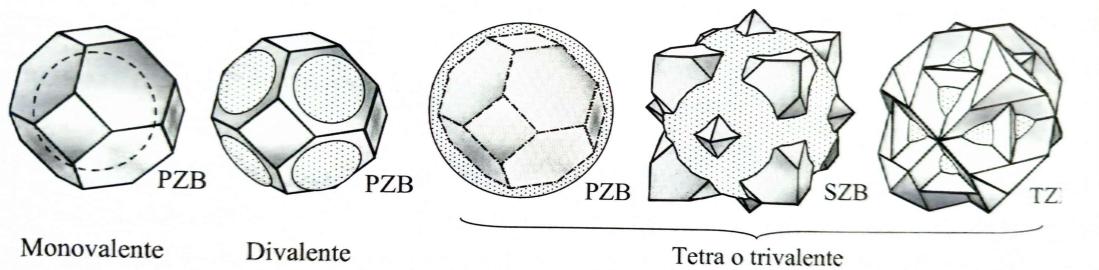


Figura 7.9: Relación entre las primeras zonas de Brillouin de la estructura *fcc* y la superficie de Fermi de electrones libres (esférica), según la valencia atómica.

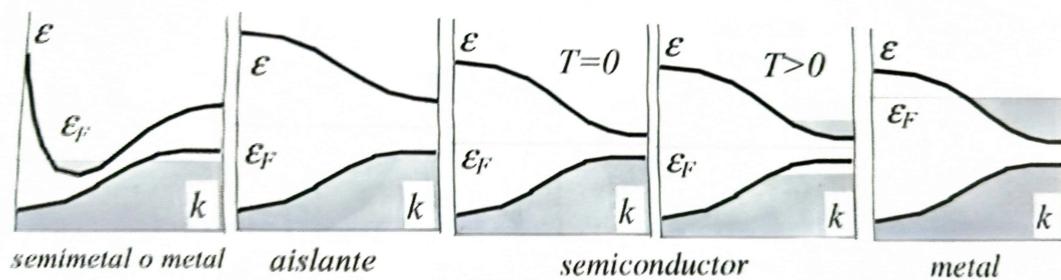


Figura 7.10: Clasificación de los sólidos según la relación que hay entre el nivel de Fermi y la estructura de bandas.

# 8

## Dinámica semiclásica de electrones de Boch

- 8.1. Ecuaciones del movimiento**
- 8.2. Masa efectiva**
- 8.3. Movimiento en campos electricos. Concepto de hueco.**
- 8.4. Movimiento en campos magnéticos.**

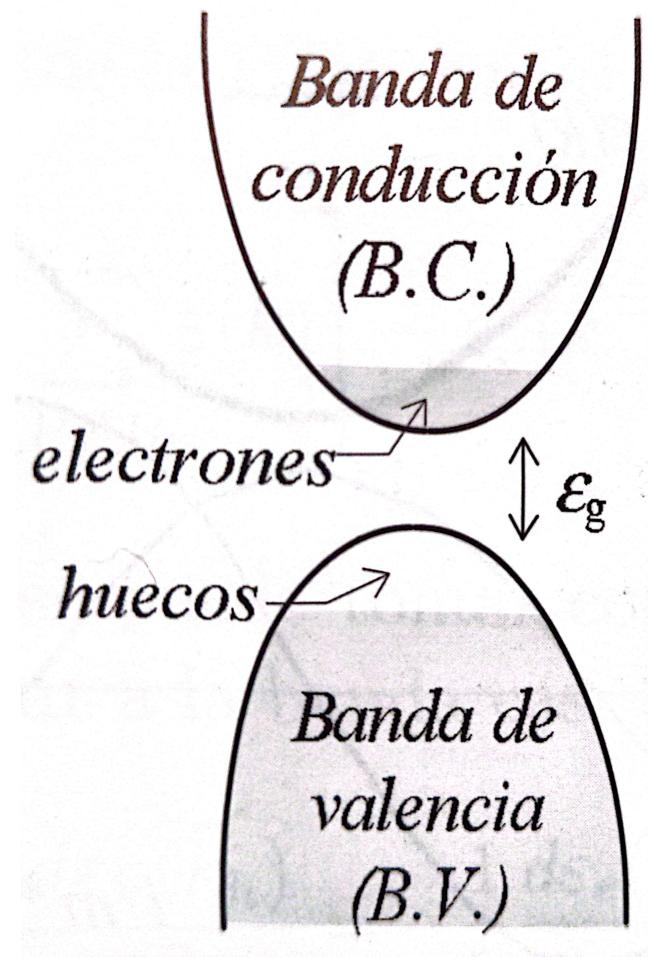


Figura 8.1

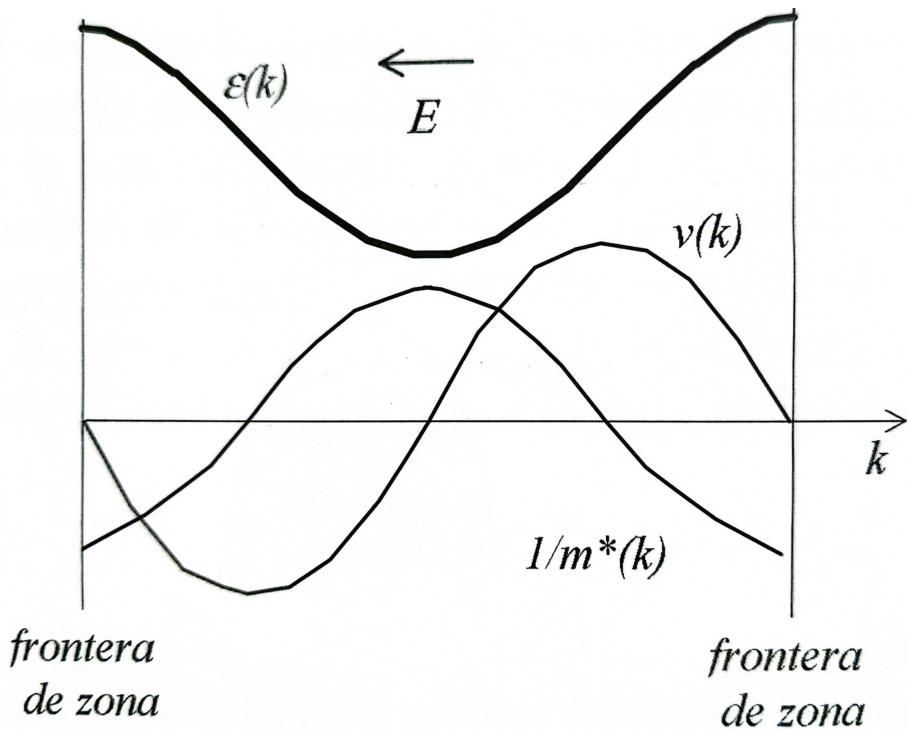


Figura 8.2

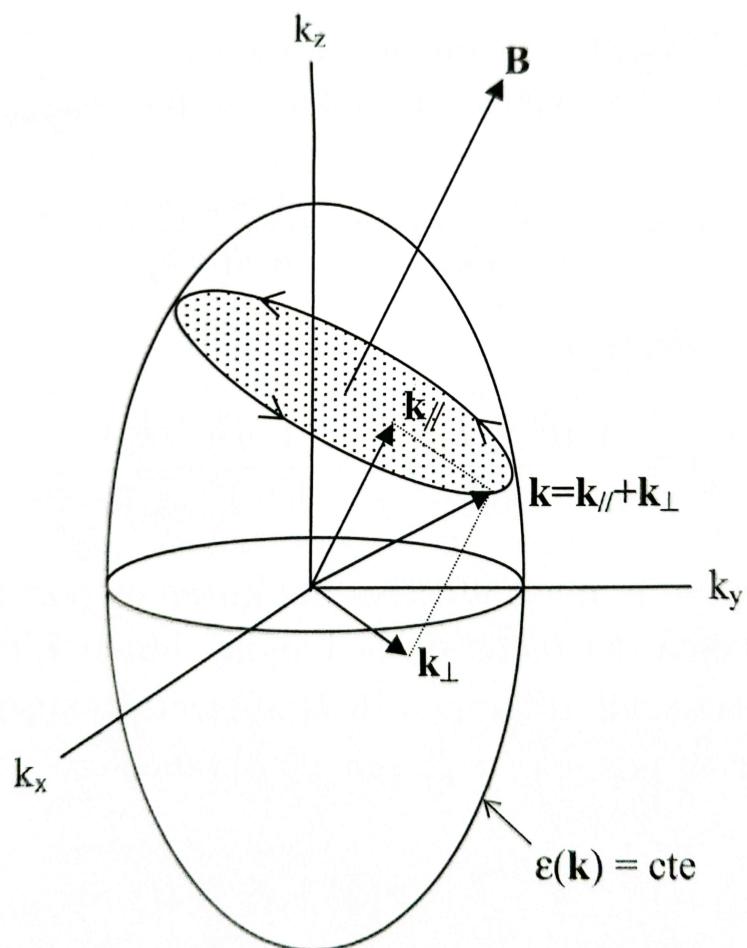
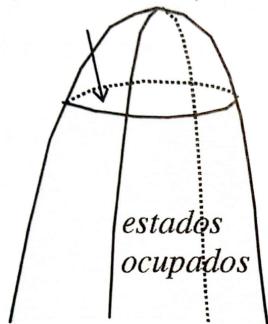
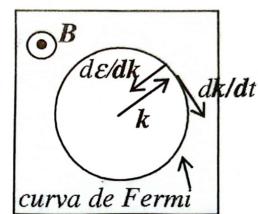


Figura 8.3

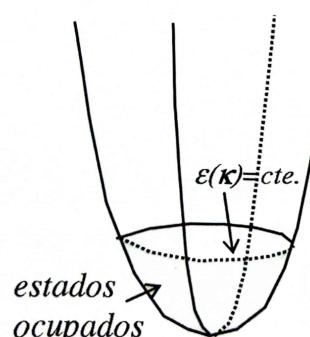
*curva  $\epsilon(\mathbf{k})=cte.$   
(curva de Fermi)*



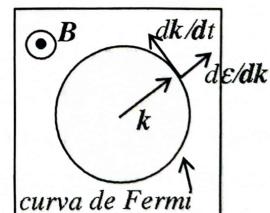
*banda casi llena*



*órbita tipo hueco*



*banda casi vacía*



*órbita tipo electrón*

Figura 8.4

# 9

## Cristales semiconductores

- 9.1. Concentración de portadores en equilibrio térmico
- 9.2. Semiconductores dopados
- 9.3. Concentración de portadores en Semiconductores dopados
- 9.4. Conductividad y movilidad
- 9.5. Semiconductores inhomogéneos: la unión p-n.

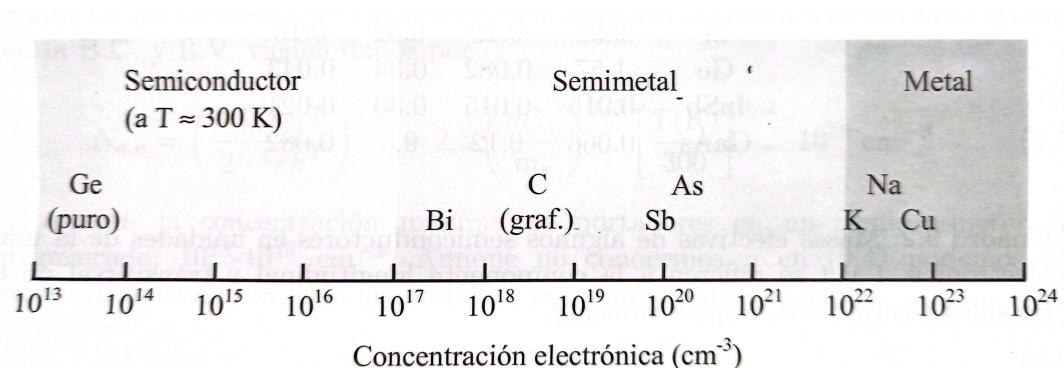


Figura 9.1

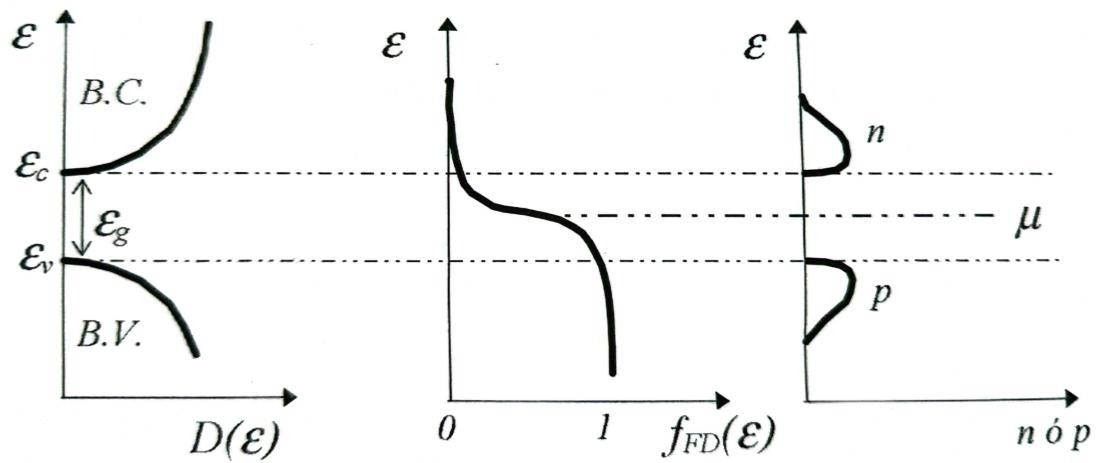


Figura 9.2

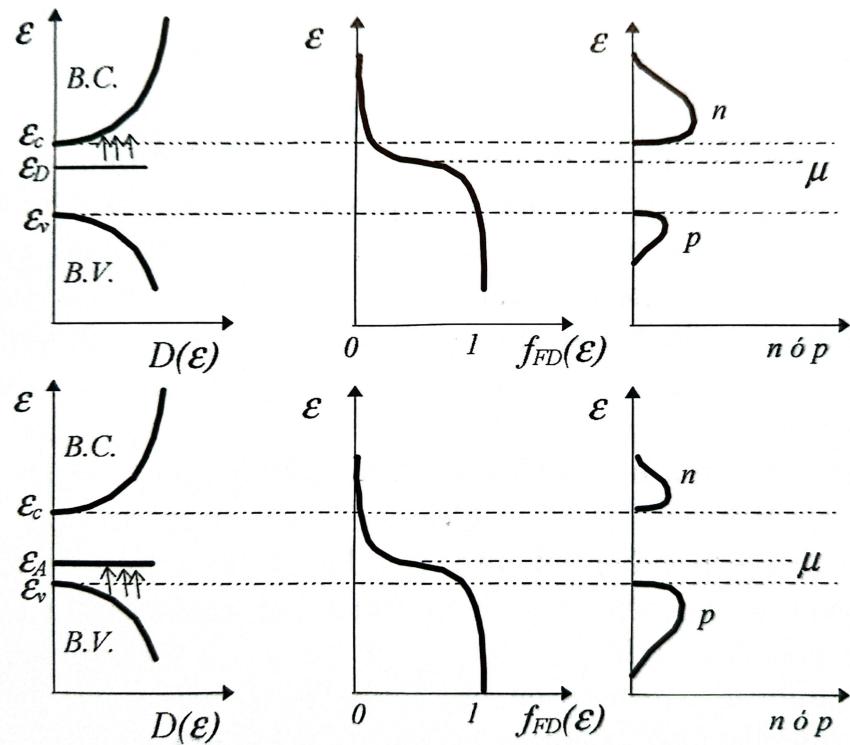


Figura 9.3

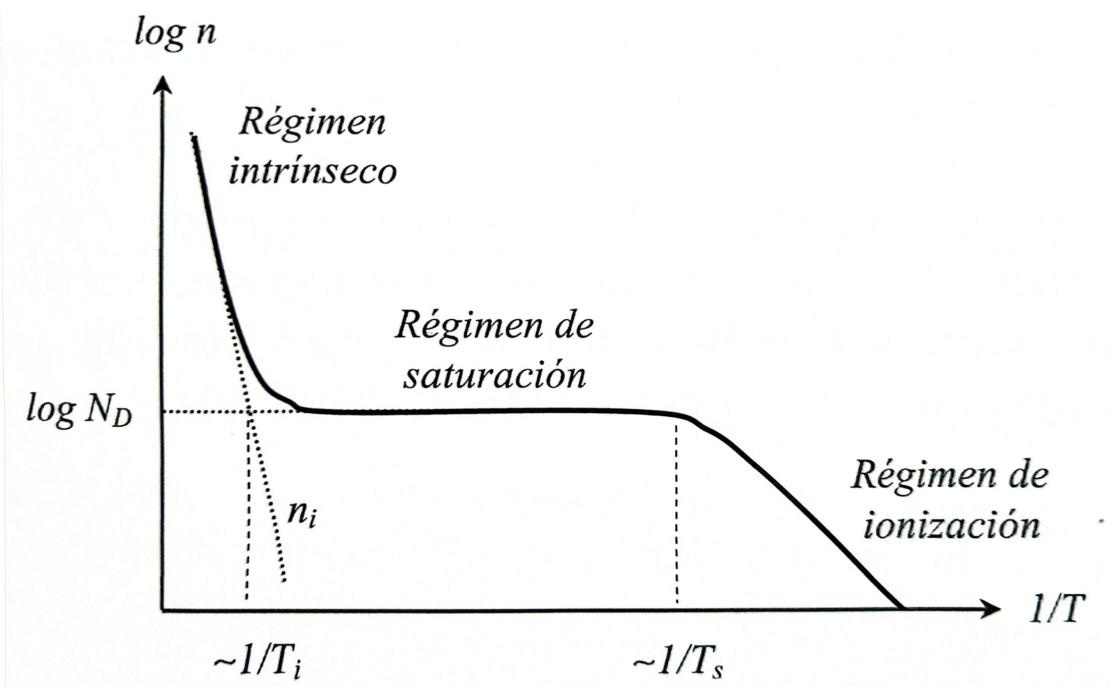


Figura 9.4

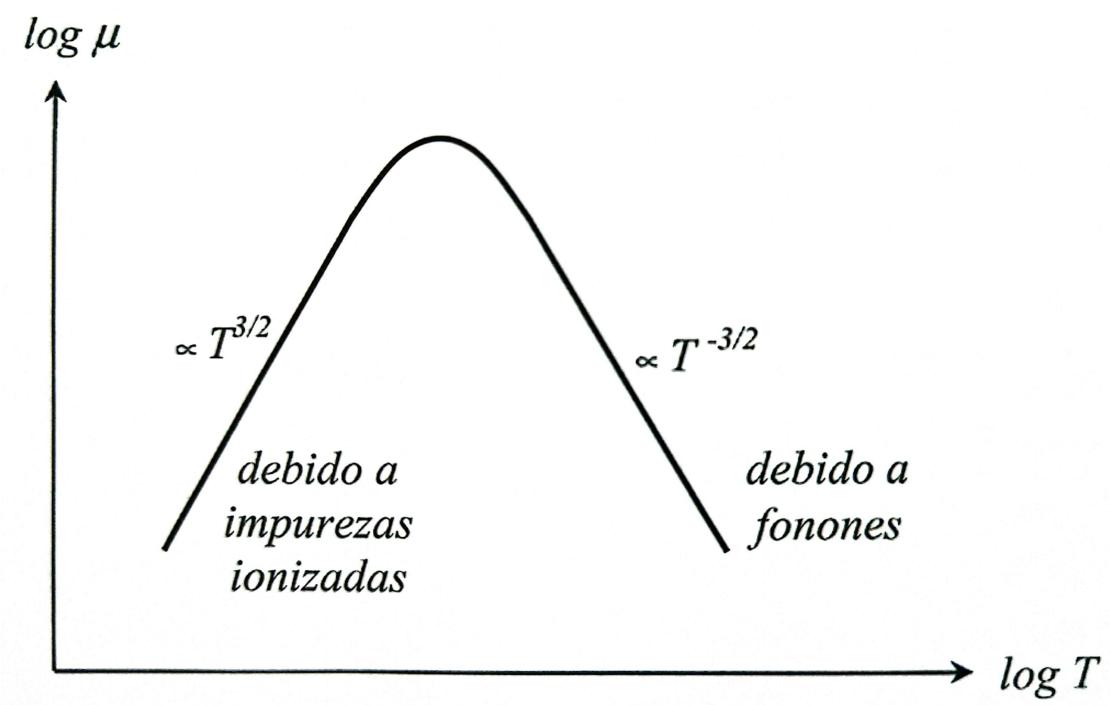


Figura 9.5

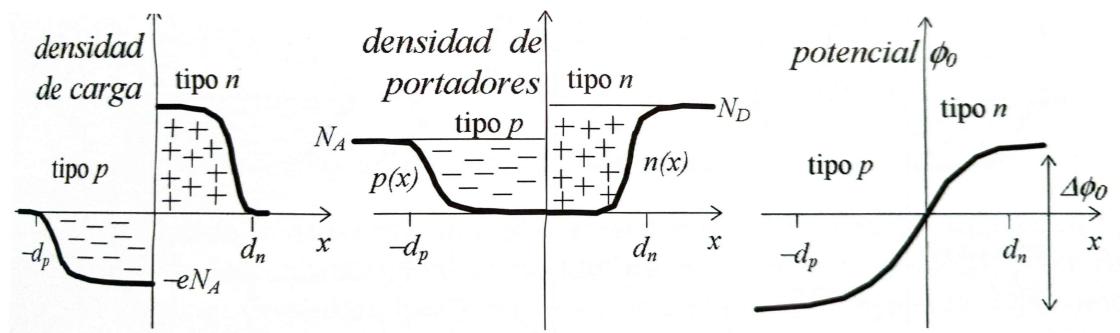


Figura 9.6

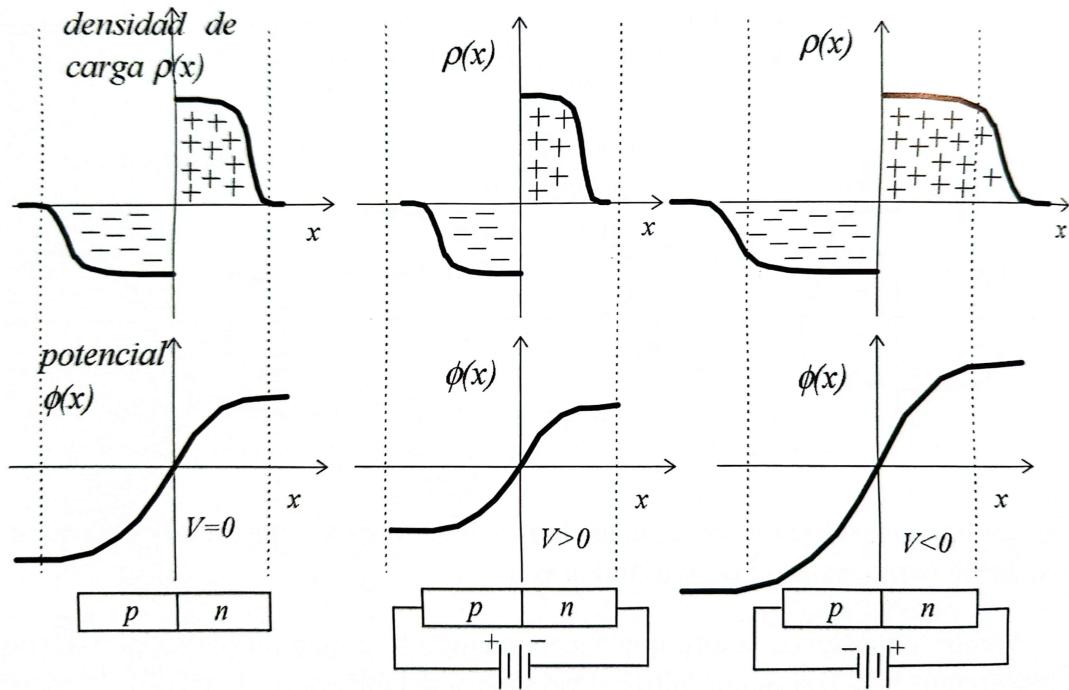


Figura 9.7

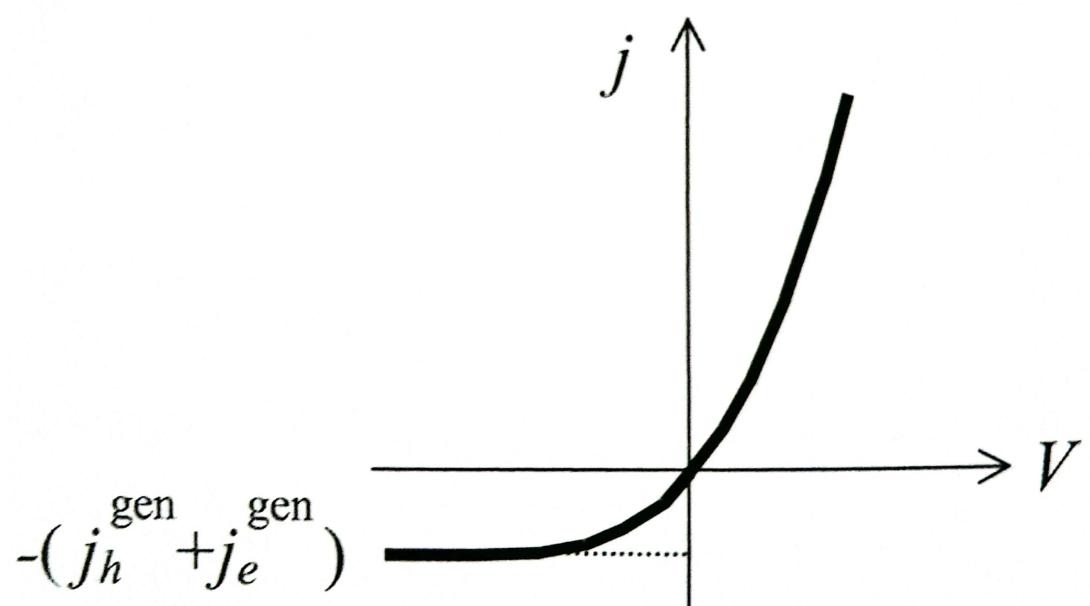


Figura 9.8



# 10

## Magnetismo de sólidos

- 10.1. Relaciones básicas**
- 10.2. Diamagnetismo atómico**
- 10.3. Paramagnetismo atómico**
- 10.4. Paramagnetismo de los electrones de conducción**
- 10.5. La interacción de intercambio**
- 10.6. Ferromagnetismo**
- 10.7. Dominios ferromagnéticos**
- 10.8. Orden ferrimangético**

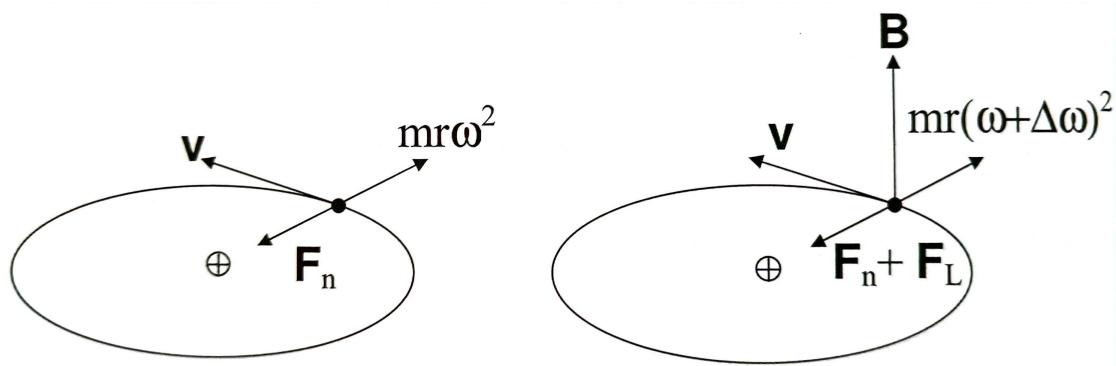


Figura 10.1

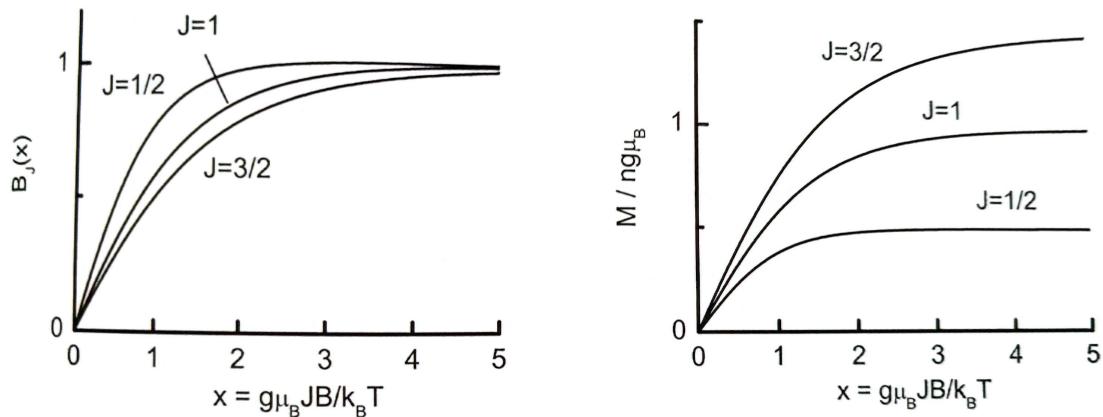


Figura 10.2

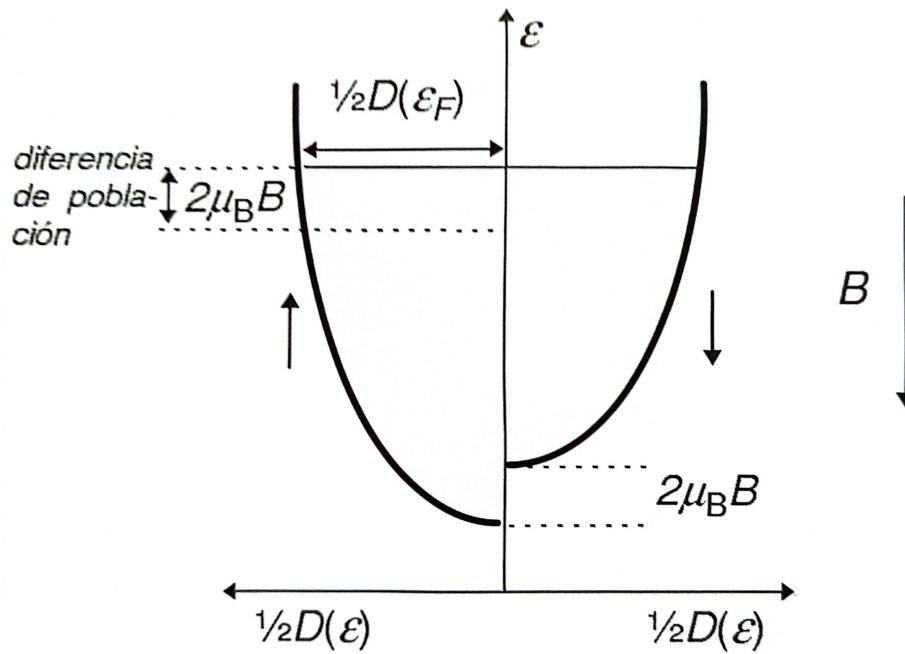


Figura 10.3

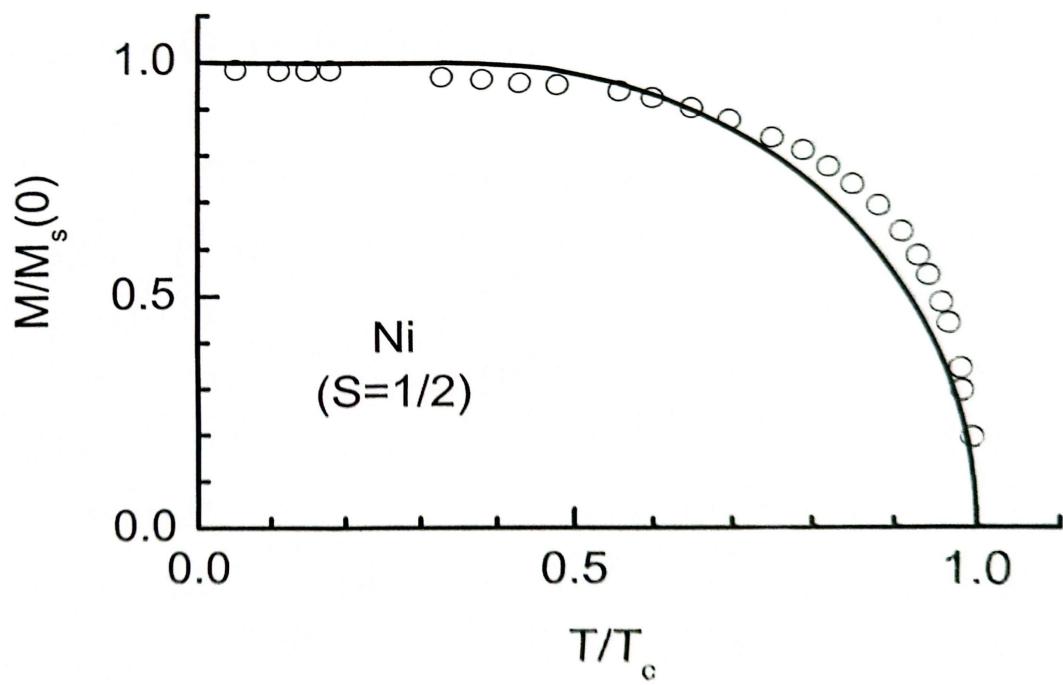


Figura 10.4

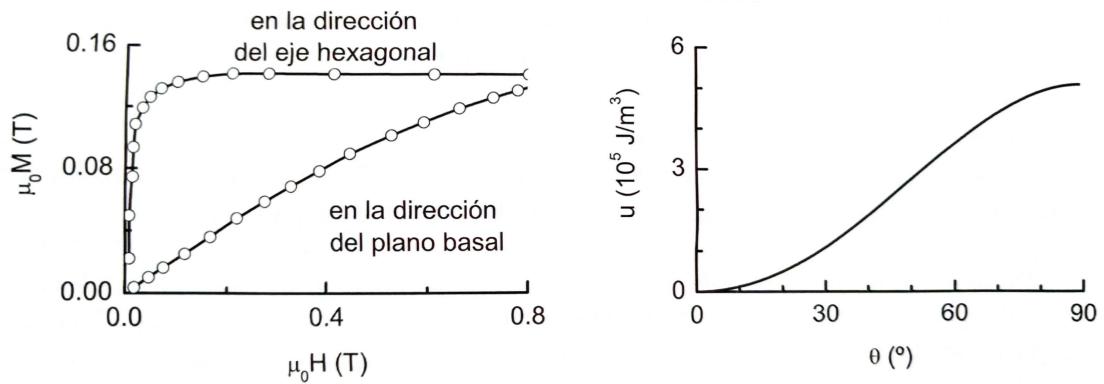


Figura 10.5

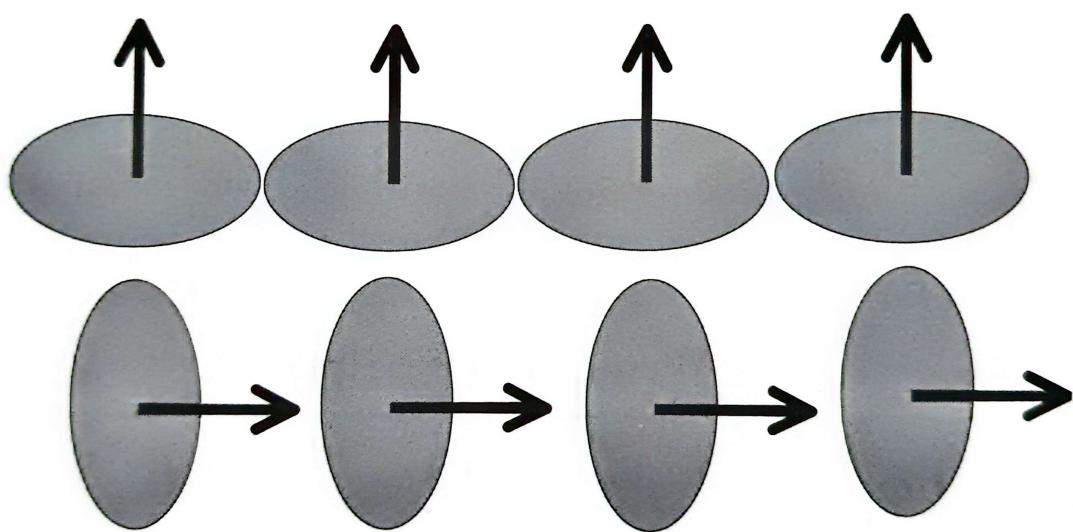


Figura 10.6

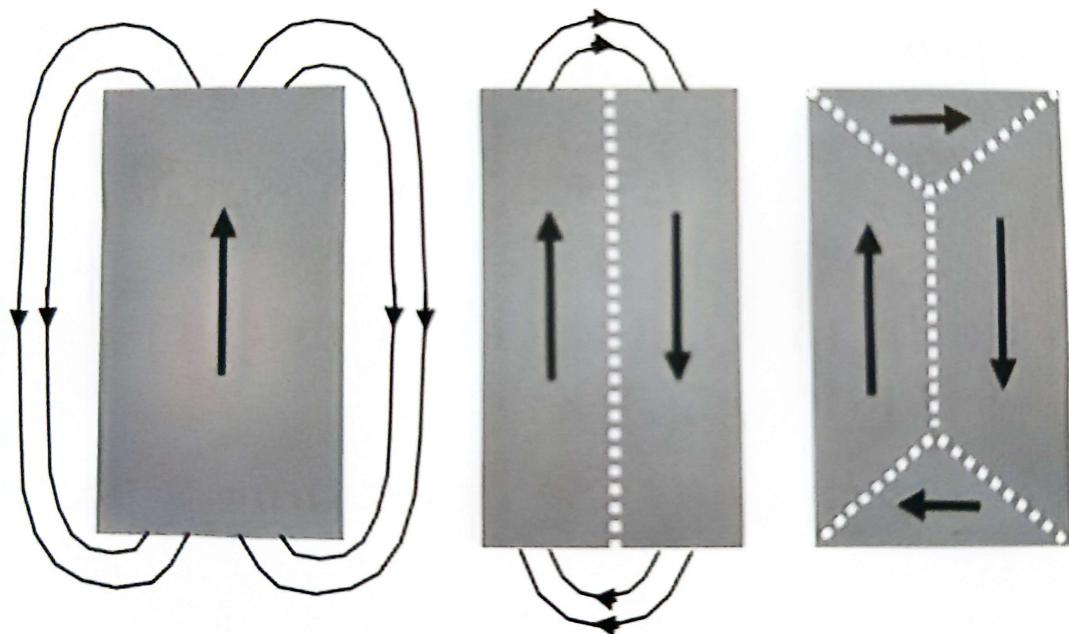


Figura 10.7

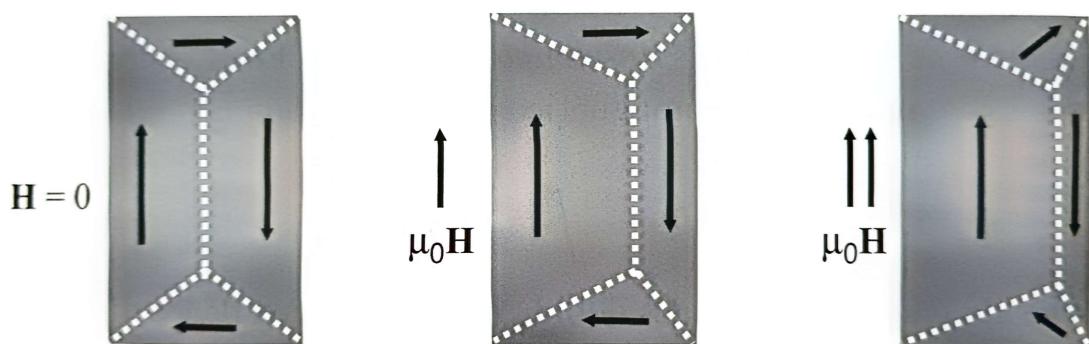


Figura 10.8

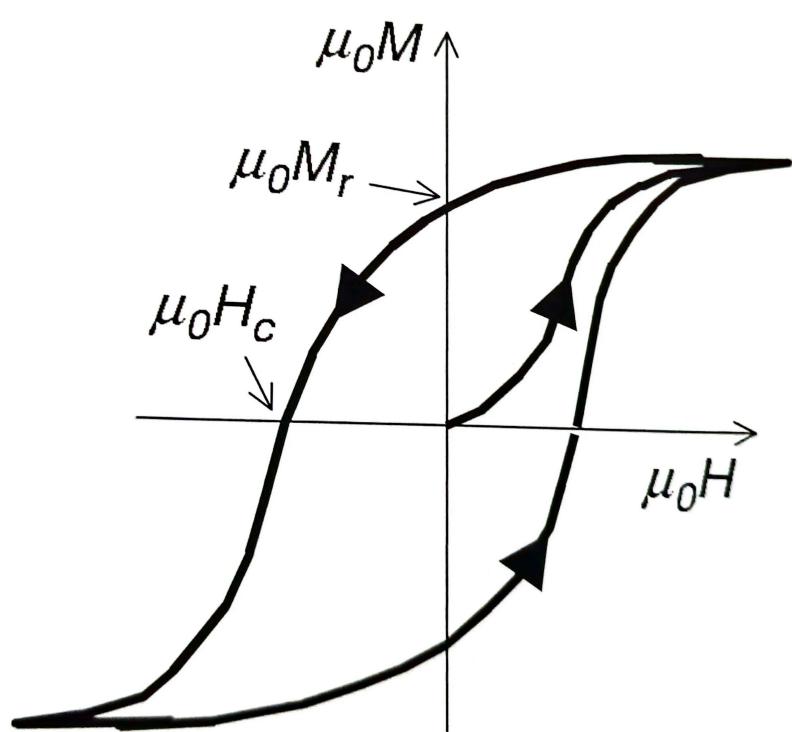


Figura 10.9



# 11

## Superconductividad

- 11.1. Fenomenología básica
- 11.2. Aspectos termodinámicos de los superconductores
- 11.3. Ecuaciones de London
- 11.4. La teoría de Ginzburg-Landau (GL)
- 11.5. Propiedades magnéticas de los superconductores de tipo II
- 11.6. Introducción a la teoría BCS
- 11.7. Compuestos superconductores

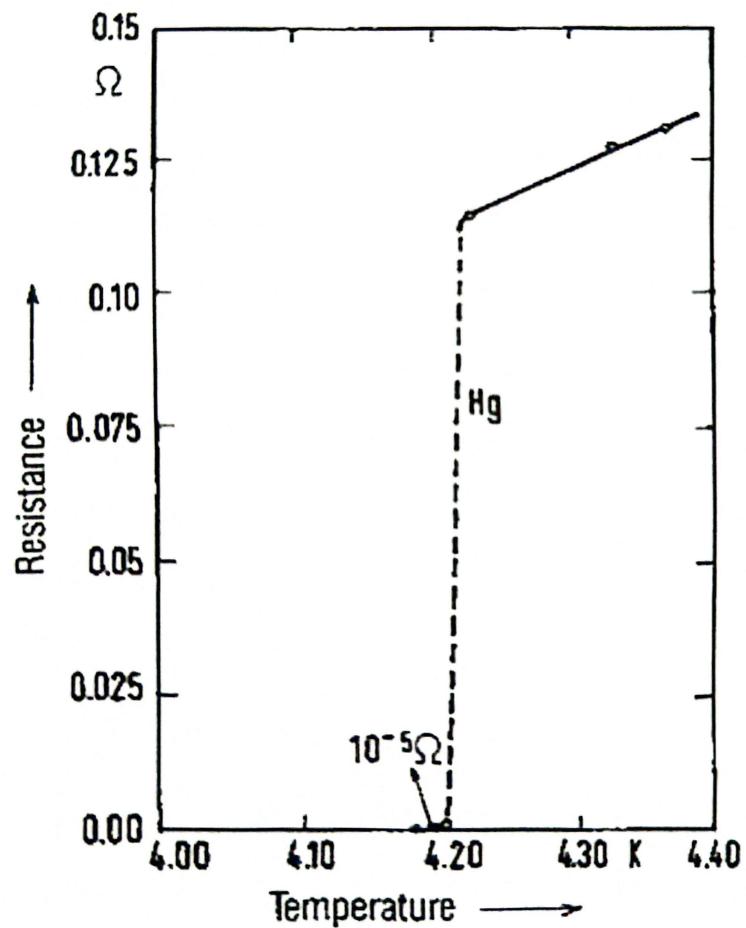


Figura 11.1

Li f	Be 0.03			Elemento		Tc 7.80	Tc (K)	f: en forma de film						
				141		$\mu_0 H_c$ (mT)		p: bajo alta presión						
		Sc 0.01 5.6	Ti 0.40 5.6	V 5.40 141						Zn 0.85 5.4	Ga 1.08 5.92	Ge f-p p	As p	Se p
		Y P	Zr 0.61 4.7	Nb 9.25 206	Mo 0.92 9.6	Tc 7.80 141	Ru 0.49 6.9	Rh 0.003		Cd 0.52 2.8	In 3.41 28.1	Sn 3.72 30.5	Sb p	Te p
Cs f-p	Ba p	La $\beta$ 6.00 110	Hf 0.13	Ta 4.48 82.9	W 0.01 0.1	Re 1.70 20.0	Os 0.66 7.0	Ir 0.11 1.6		Hg $\alpha$ 4.15 41.1	Tl 2.38 17.8	Pb 7.20 80.3	Bi f-p	
		Ce P						Eu f					Lu 0.1 <40	
		Th 1.38 16.0	Pa 1.4	U p				Am 1.0						

Figura 11.2

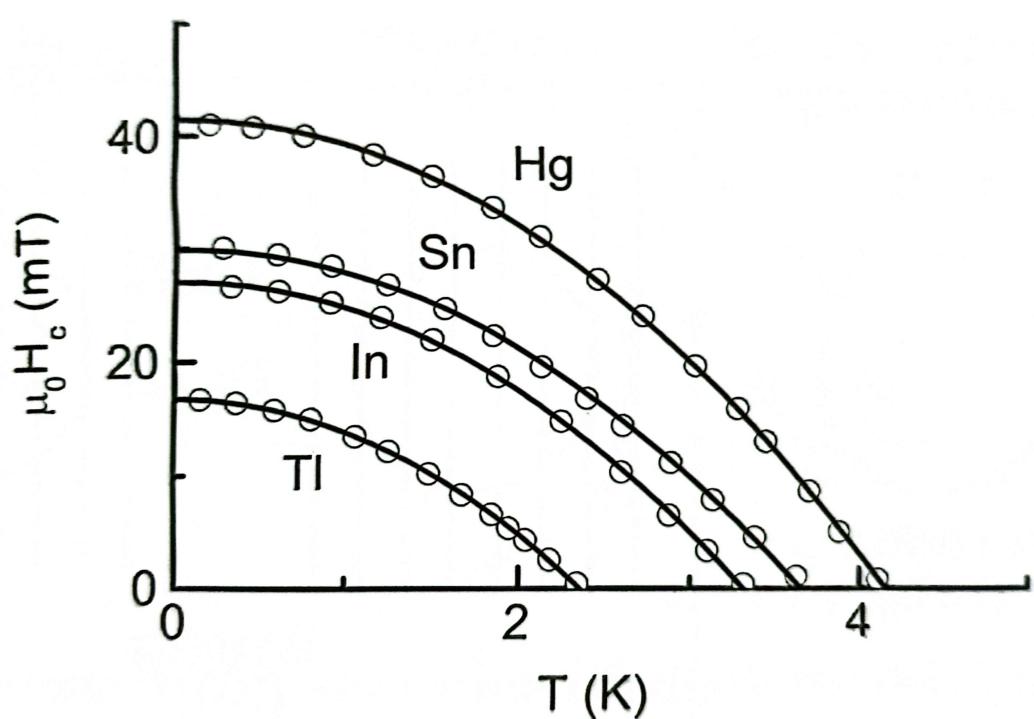


Figura 11.3

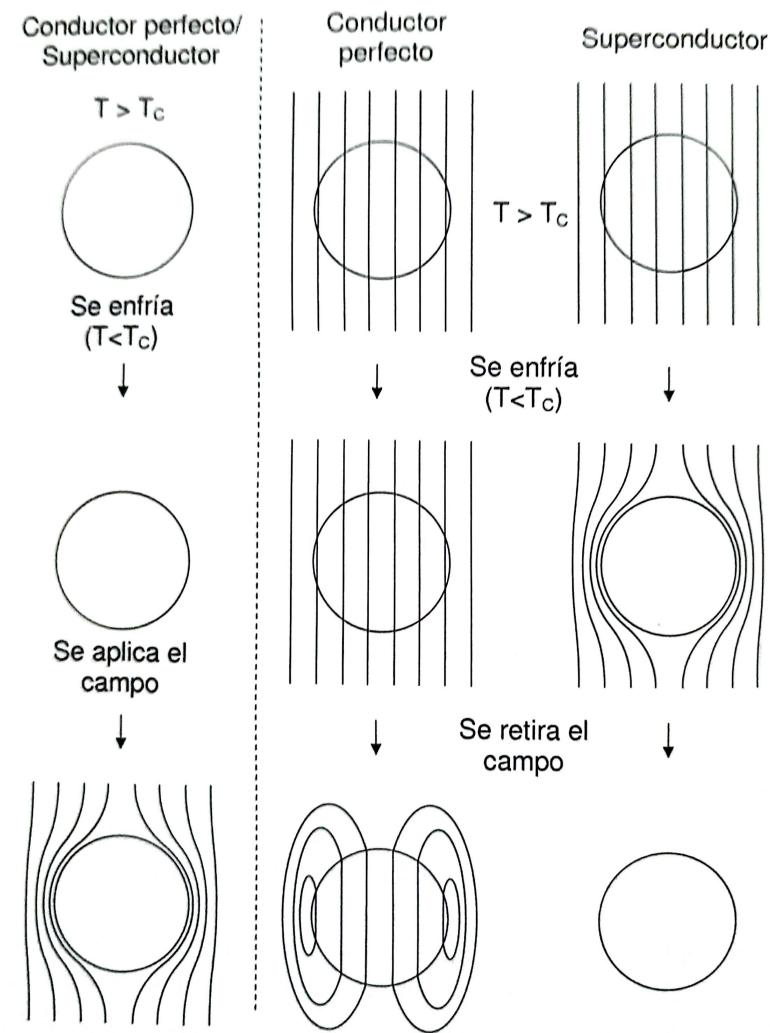


Figura 11.4

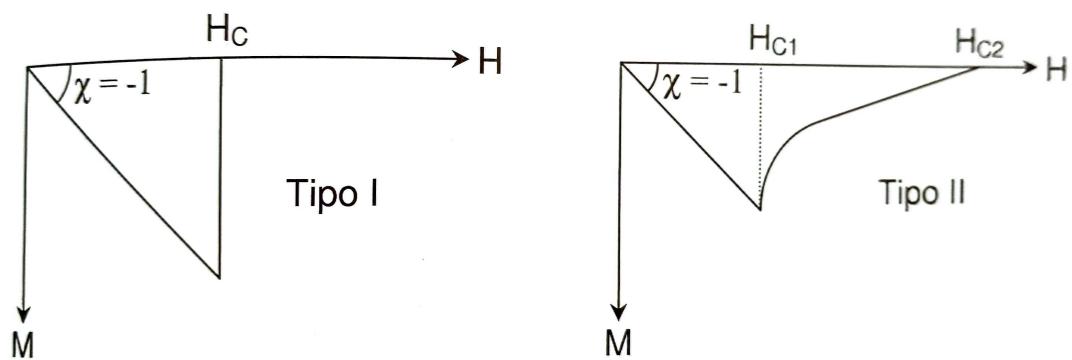


Figura 11.5

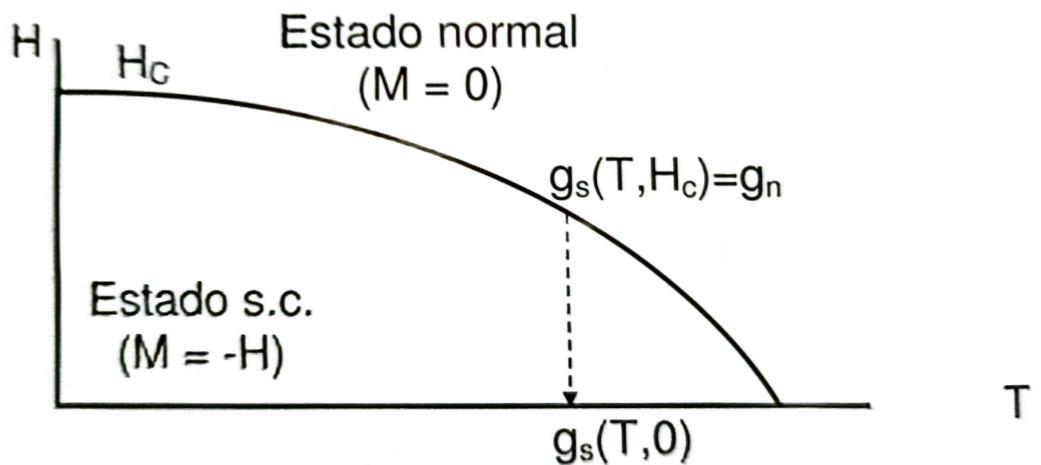


Figura 11.6

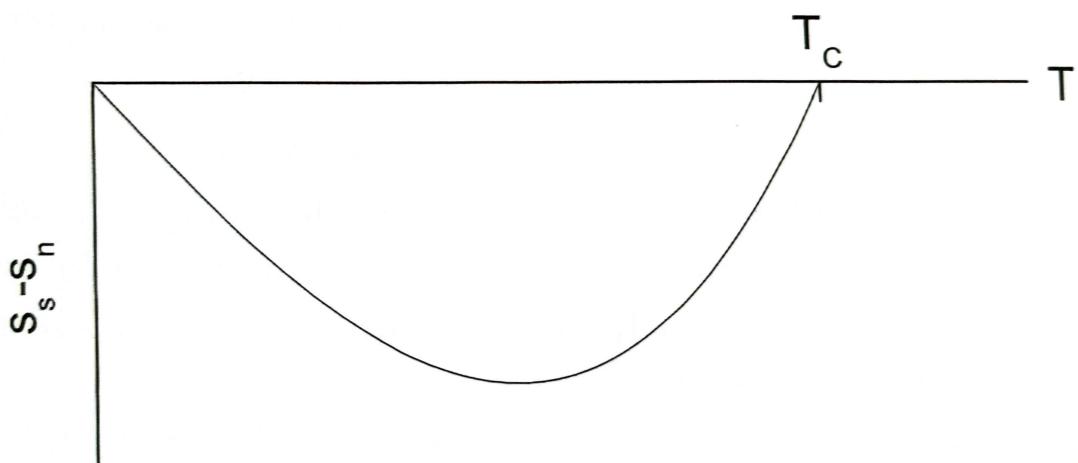


Figura 11.7

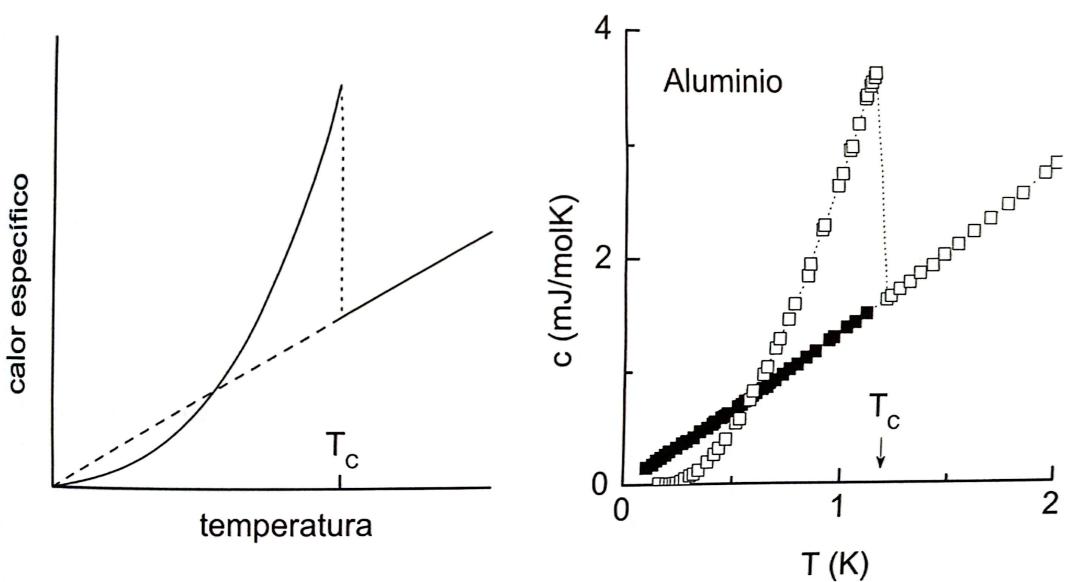


Figura 11.8

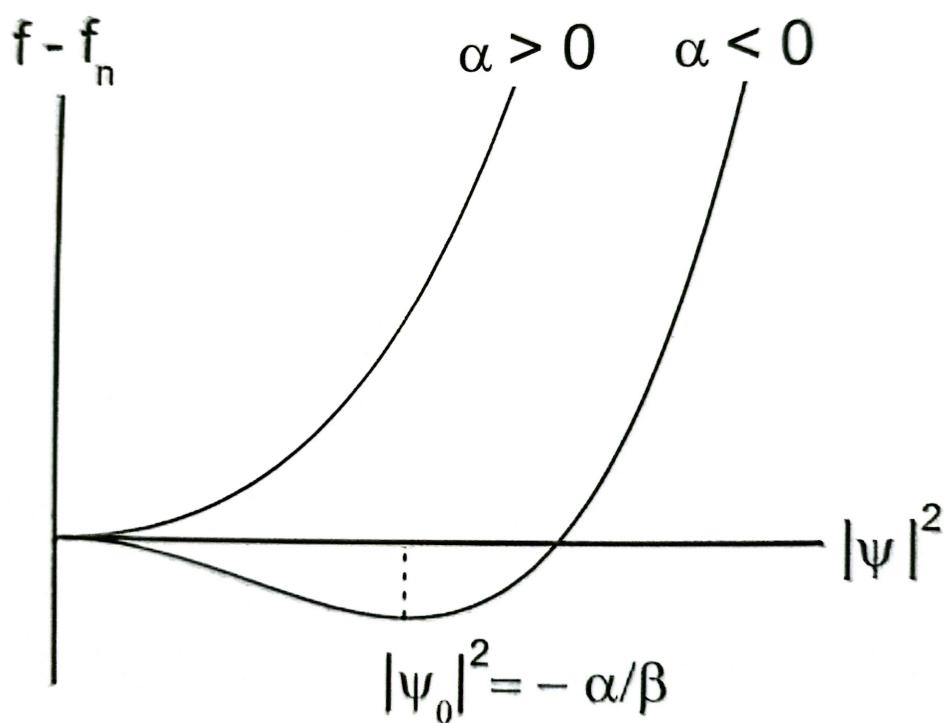


Figura 11.9

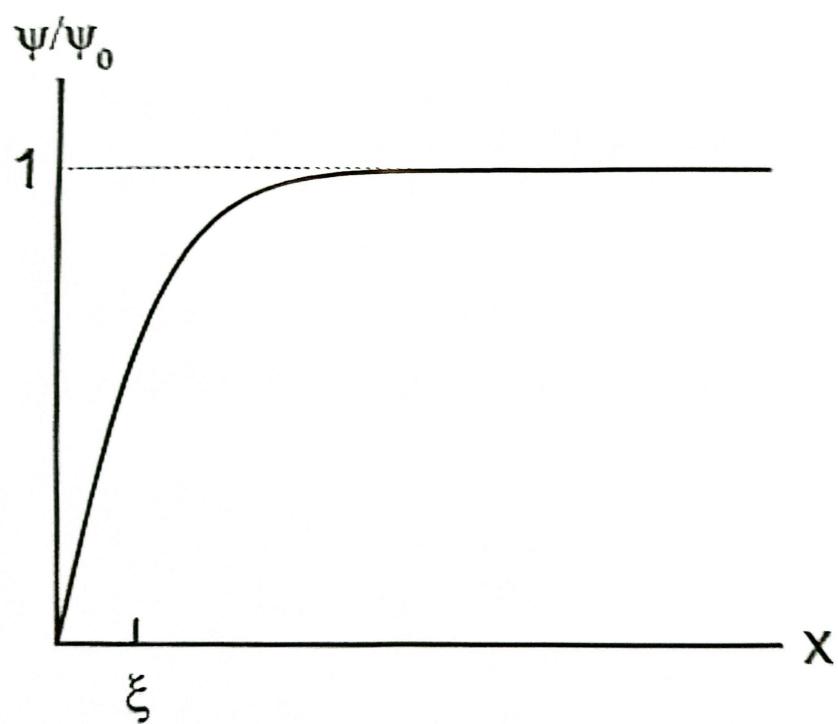


Figura 11.10

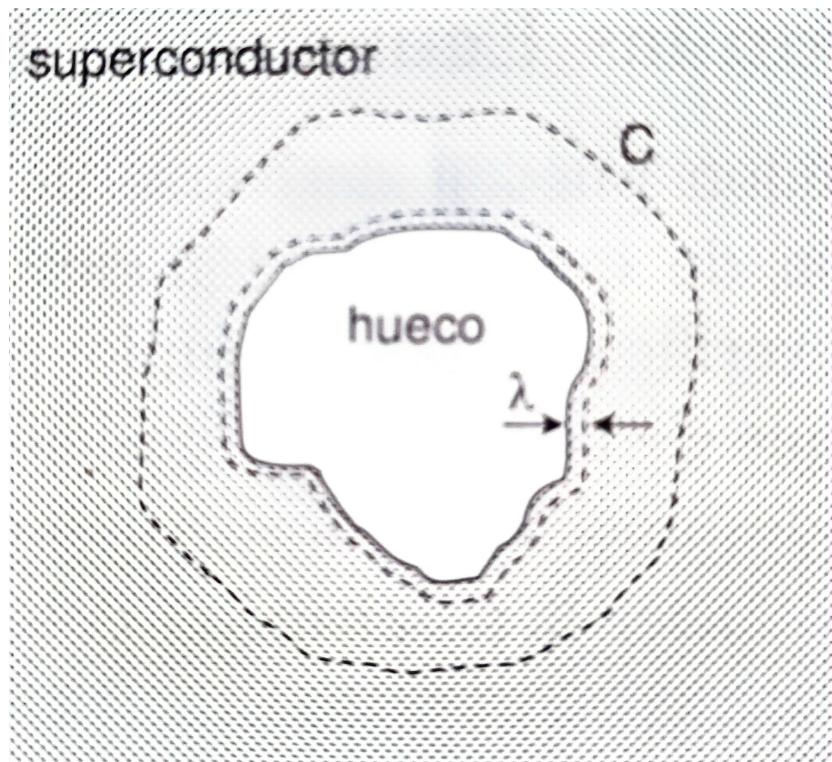


Figura 11.11

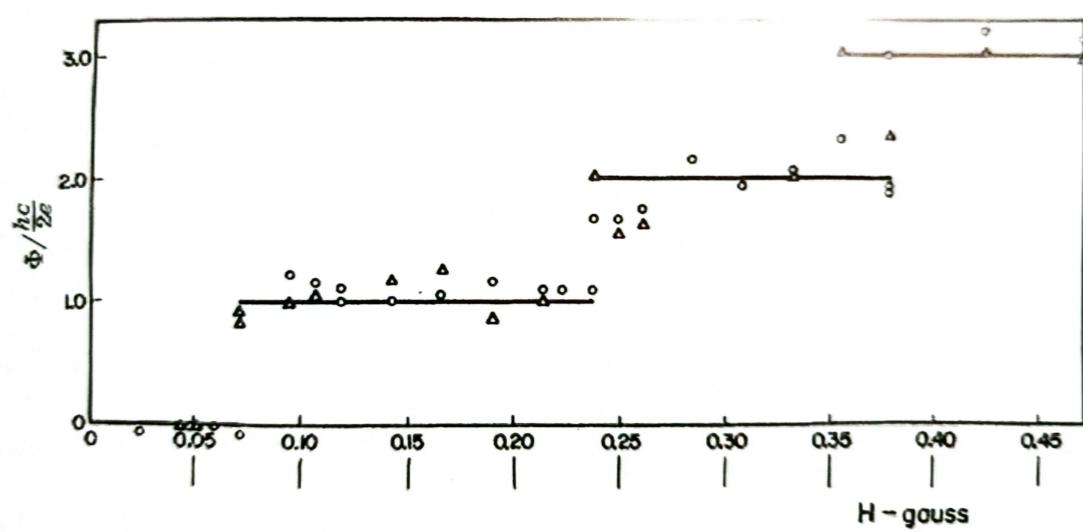


Figura 11.12

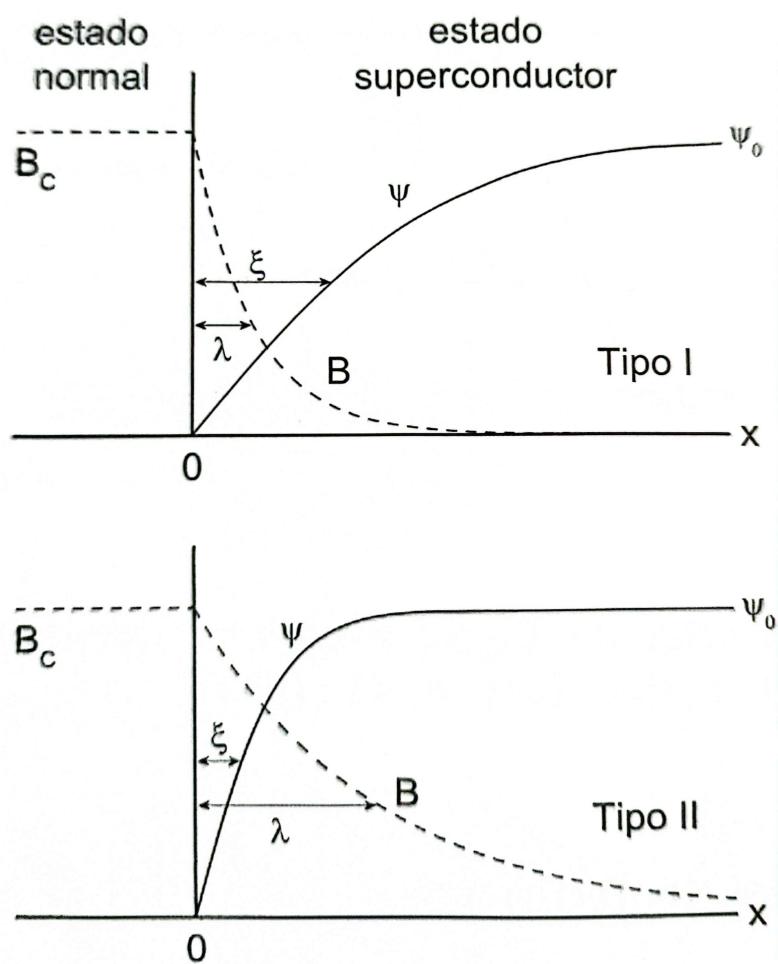


Figura 11.13

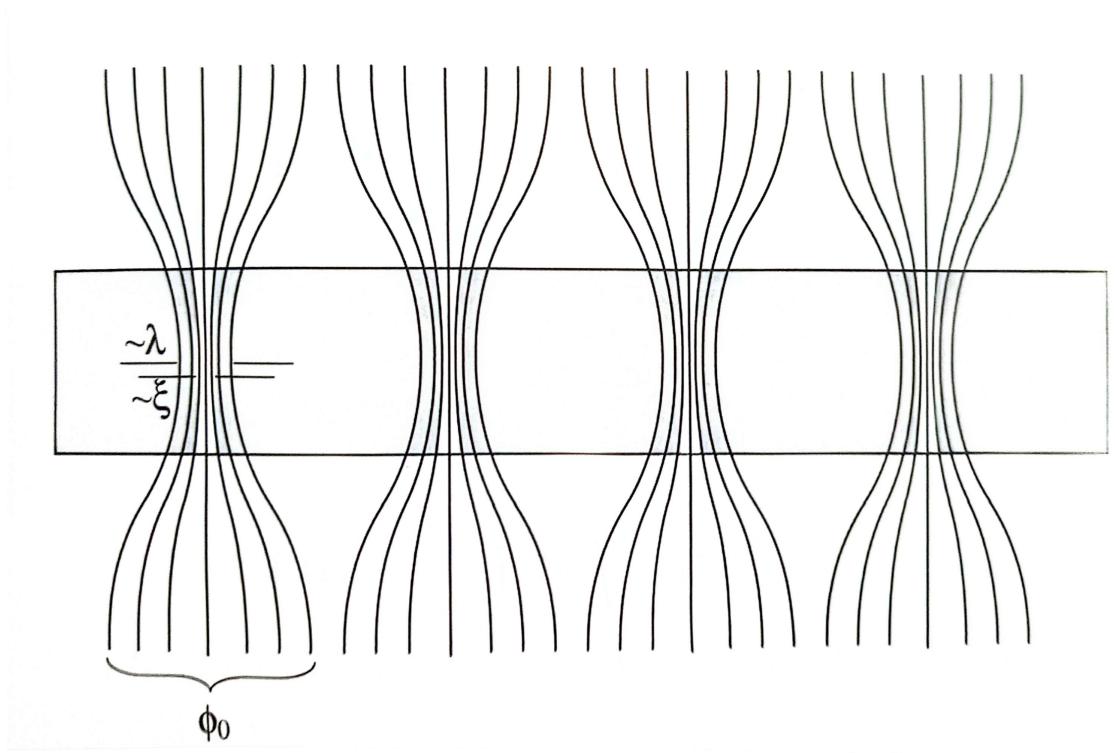


Figura 11.14

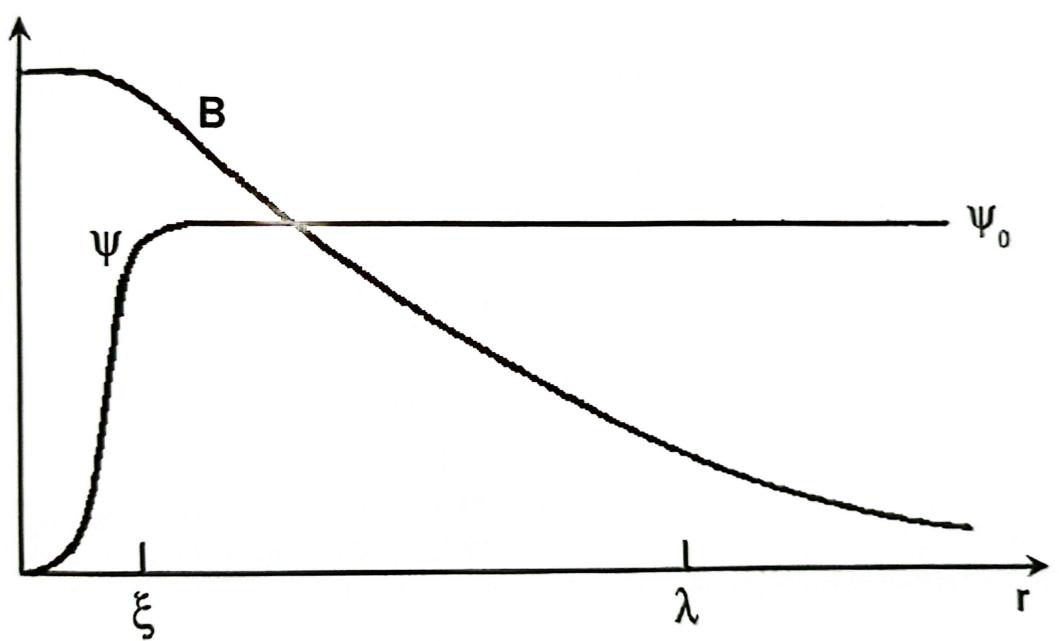


Figura 11.15

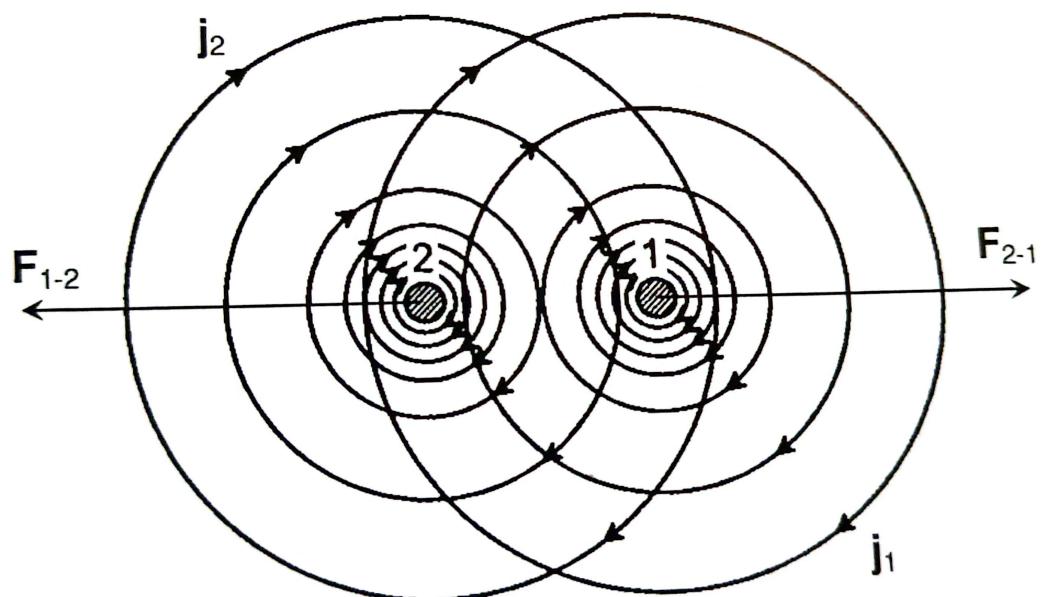


Figura 11.16

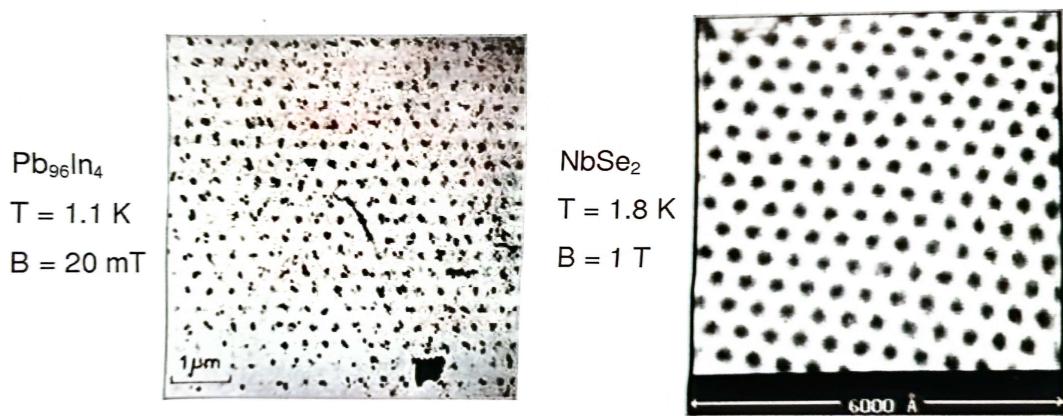


Figura 11.17

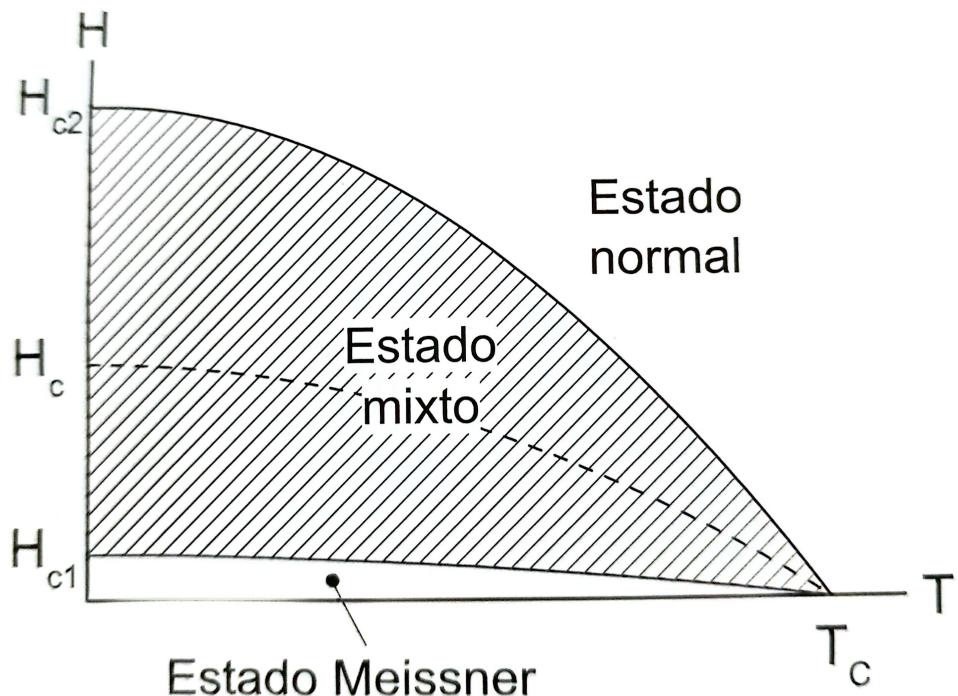


Figura 11.18

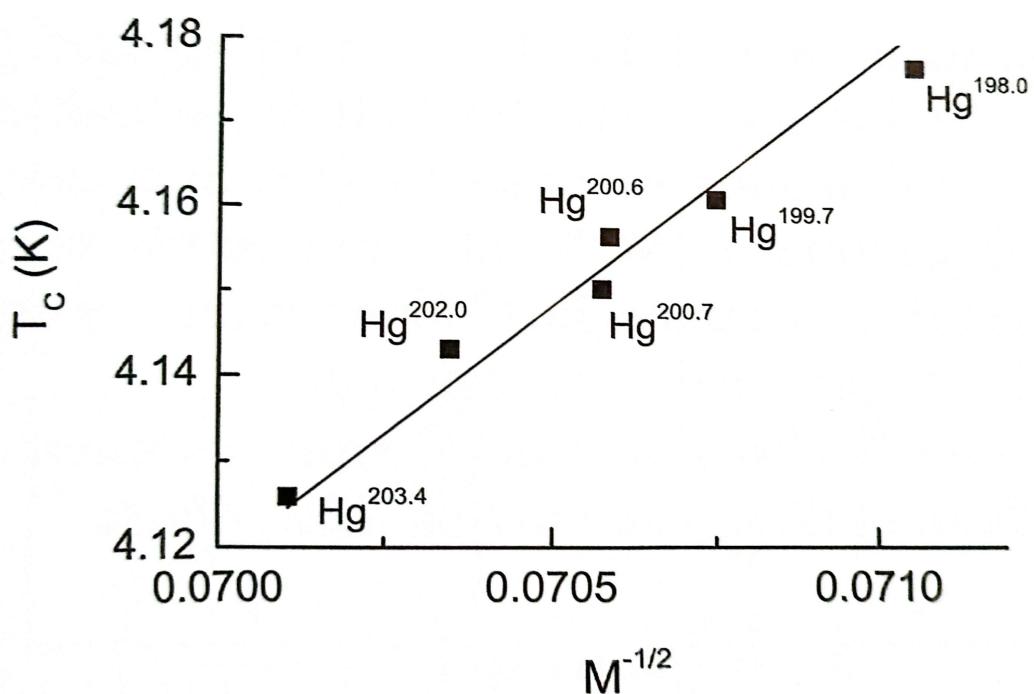


Figura 11.19

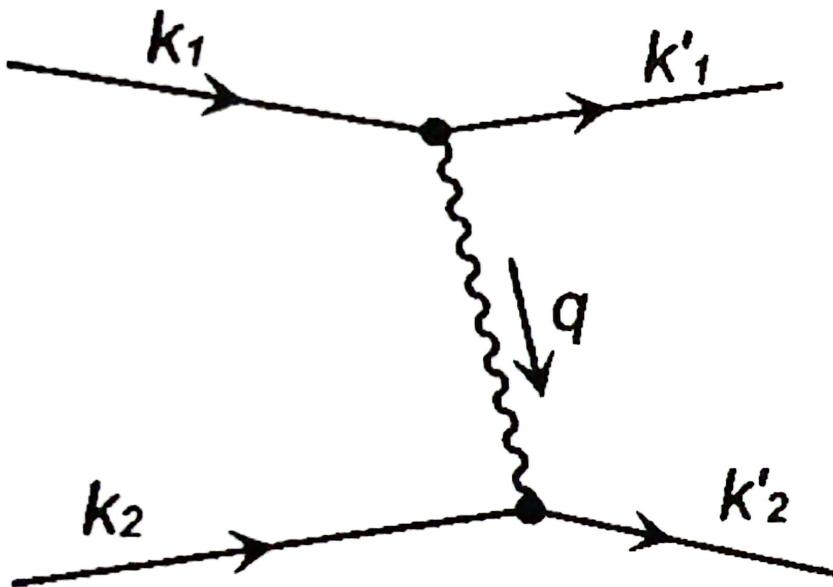


Figura 11.20

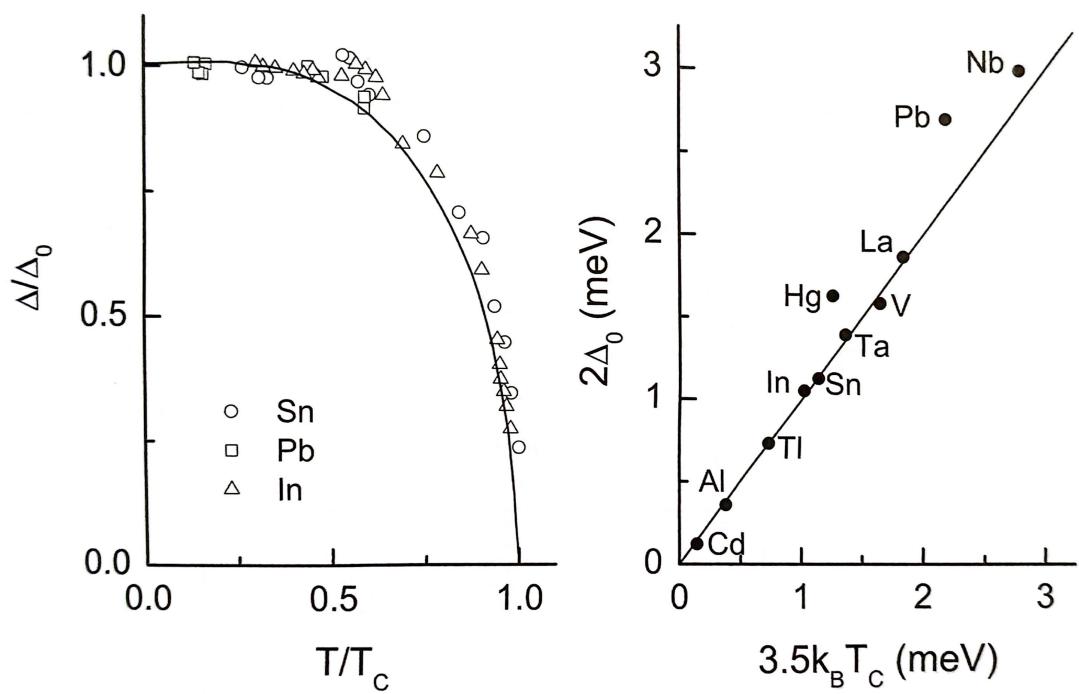


Figura 11.21

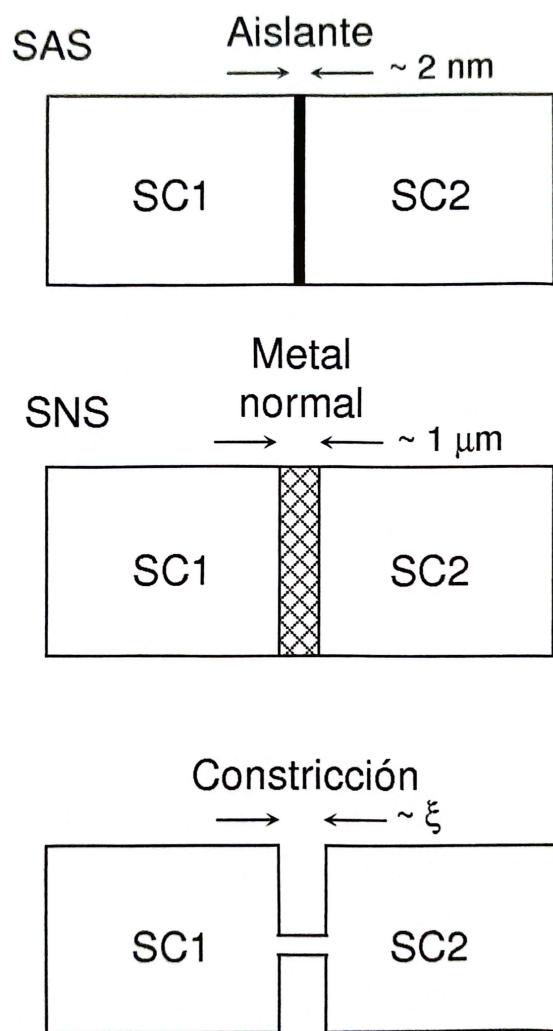


Figura 11.22

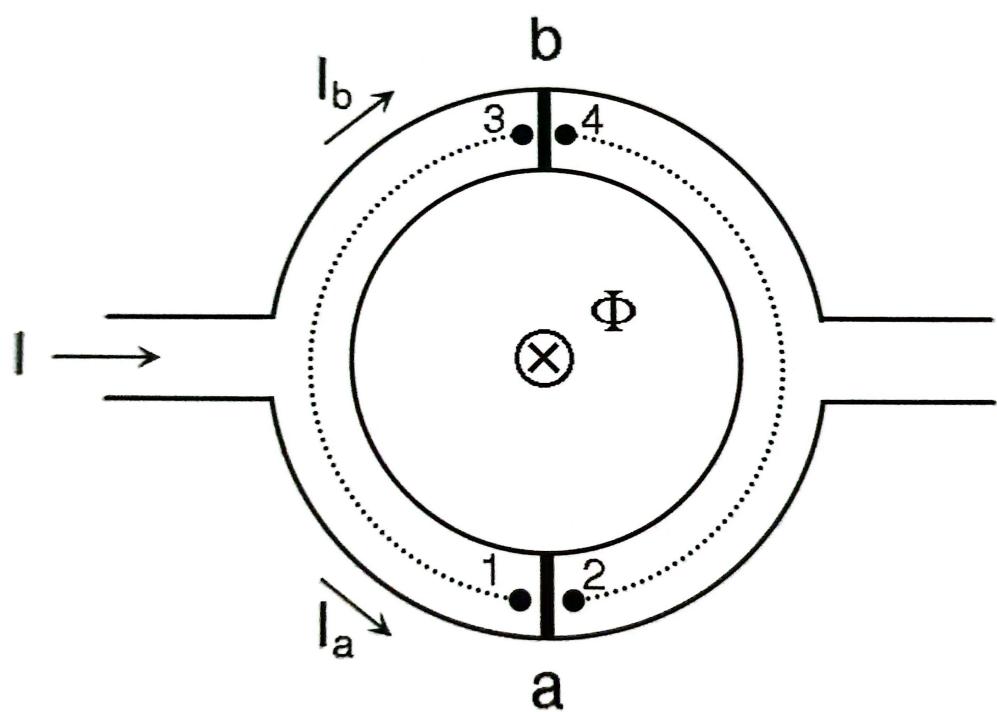


Figura 11.23

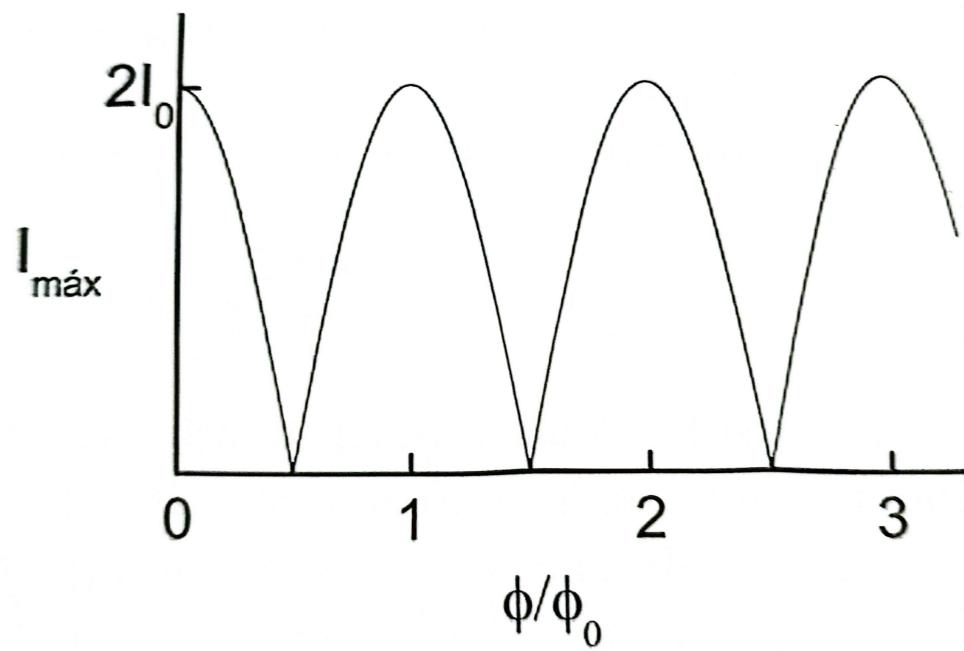


Figura 11.24

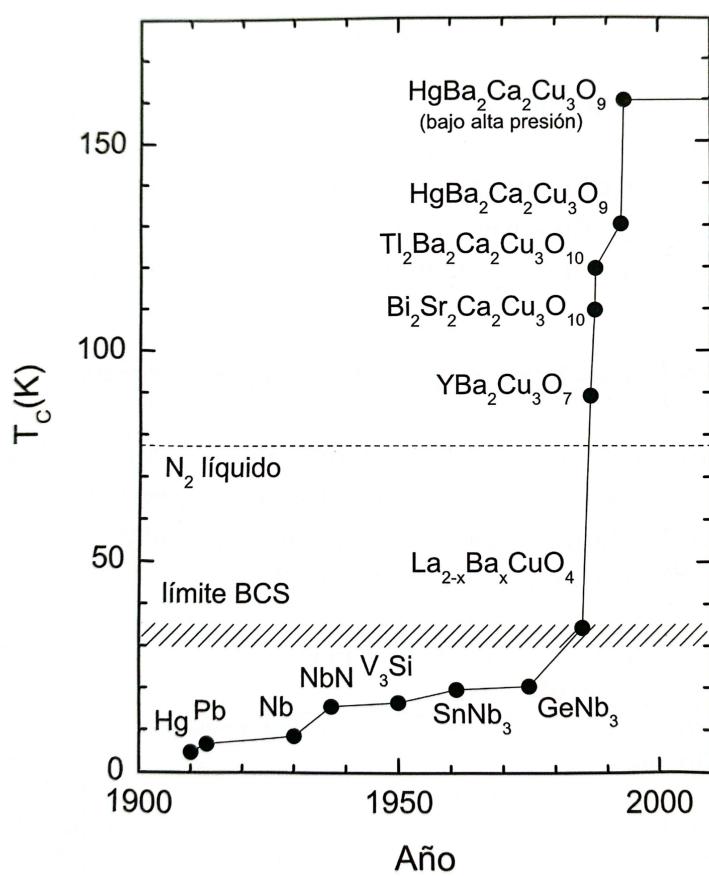


Figura 11.25



## Bibliografía

- [1] José Antonio Veira Jesús Maza, Jesús Mosqueria. *Física del Estado Sólido*.
- [2] Charles Kittel. *Física del Estado Sólido*.
- [3] Steve H. Simon. *The Oxford Solid State Basics*.
- [4] José Antonio Veira Jesús Maza, Jesús Mosqueria. *Física del Estado Sólido: ejercicios resueltos*.