147. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$,

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\ (n\text{ 为大于 1 的正奇数}),I_1=1,\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\ (n\text{ 为正偶数}),I_0=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

习题答案与提示

第 一 章

习题 1-1(第 16 页)

1. (1) $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$; (2) $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;
(3) $[-1,0)\cup(0,1]$; (4) $(-2,2)$;
(5) $[0,+\infty)$; (6) $\mathbf{R}\setminus\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1 \,\middle|\, k\in\mathbf{Z}\right\}$;
(7) $[2,4]$; (8) $(-\infty,0)\cup(0,3]$;
(9) $(-1,+\infty)$; (10) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. 略.

3. $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0.$

4—6. 略.

7. (1) 偶函数; (2) 既非奇函数又非偶函数; (3) 偶函数;
(4) 奇函数; (5) 既非奇函数又非偶函数; (6) 偶函数.

8. (1) 是周期函数,周期 $l=2\pi$; (2) 是周期函数,周期 $l=\frac{\pi}{2}$;
(3) 是周期函数,周期 $l=2$; (4) 不是周期函数;
(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

9. (1) $y=x^3-1$; (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$; (3) $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$;
(4) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$; (5) $y=e^{x-1}-2$; (6) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

10. 略.

11. (1) $y=\sin^2 x,y_1=\frac{1}{4},y_2=\frac{3}{4}$;

(2) $y=\sin 2x,y_1=\frac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$, $y_1=\sqrt{2}$, $y_2=\sqrt{5}$;

(4) $y=e^{x^2}$, $y_1=1$, $y_2=e$;

(5) $y=e^{2x}$, $y_1=e^2$, $y_2=e^{-2}$.

12. (1) $[-1,1]$; (2) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}[2n\pi,(2n+1)\pi]$; (3) $[-a,1-a]$;

(4) 若 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, 则 $D=[a,1-a]$; 若 $a>\frac{1}{2}$, 则 $D=\varnothing$.

13. $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0;\end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

14. $L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$, $h\in(0,\sqrt{S_0\tan 40^\circ})$.

15. $S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$

16. $F=1.8C+32$ 或 $C=\frac{5}{9}(F-32)$.

(1) 90 °F = 32.2 ℃, −5 ℃ = 23 °F; (2) −40 °F = −40 ℃.

17. $y=\begin{cases}x^2, & 0<x<10,\\ -\frac{4}{5}x^2+18x, & 10\leqslant x\leqslant 15,\\ -18x+360, & 15<x<20.\end{cases}$

18. 在 2008 年后的第 t 年, 世界人口数为 $P(t)=6\,708.2\cdot 1.011^t$ 百万, 2020 年对应 $t=12$, $P(12)\approx 76$ 亿.

习题 1-2(第 26 页)

1. (1) 收敛, 0; (2) 收敛, 0; (3) 收敛, 2; (4) 收敛, 1; (5) 发散;
(6) 收敛, 0; (7) 发散; (8) 发散.

2. (1) 必要条件; (2) 一定发散;
(3) 不一定收敛, 例如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但发散.

3. (1) 错误, 反例略; (2) 错误, 反例略; (3) 正确, 理由略;
(4) 正确, 理由略.

*4. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1000$.

*5—*8. 略.

习题 1-3(第 33 页)

1. (1) 0; (2) -1; (3) 不存在,因为 $f(0^+)\neq f(0^-)$.

2. (1) 错; (2) 对; (3) 错; (4) 错; (5) 对; (6) 对.

3. (1) 对; (2) 对; (3) 对; (4) 错; (5) 对; (6) 对; (7) 对; (8) 错.

4. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$;

$\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ 不存在.

*5—*6. 略.

*7. $\delta=0.000\ 2$. **提示**:因为 $x\to 2$,所以不妨设 $1<x<3$.

*8. $X\geqslant\sqrt{397}$.

*9—*12. 略.

习题 1-4(第 37 页)

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小,例如:$\alpha=4x$, $\beta=2x$,当 $x\to 0$ 时都是无穷小,但 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 当 $x\to 0$ 时不是无穷小.

*2. 略.

*3. $0<|x|<\dfrac{1}{10^4+2}$.

4. (1) 2,**提示**:应用本节定理 1; (2) 1,**提示**:应用本节定理 1.

5. 略.

6. $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界,但当 $x\to\infty$ 时,此函数不是无穷大.

*7. 略.

8. 水平渐近线 $y=0$,铅直渐近线 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$.

习题 1-5(第 45 页)

1. (1) -9; (2) 0; (3) 0; (4) $\dfrac{1}{2}$; (5) $2x$; (6) 2; (7) $\dfrac{1}{2}$; (8) 0; (9) $\dfrac{2}{3}$; (10) 2; (11) 2; (12) $\dfrac{1}{2}$; (13) $\dfrac{1}{5}$; (14) -1.

2. (1) ∞; (2) ∞; (3) ∞.

3. (1) 0; (2) 0.

4. (1) 错,例如 $a_n=\frac{1}{n},b_n=\frac{n}{n+1},n\in\mathbf{N}_+$;

(2) 错,例如 $b_n=\frac{n}{n+1},c_n=(-1)^n n,n\in\mathbf{N}_+$;

(3) 错,例如 $a_n=\frac{1}{n^2},c_n=n,n\in\mathbf{N}_+$;

(4) 对,因为,假若 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$ 也存在,与已知条件矛盾.

5. (1) 对,因为,假若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也存在,与已知条件矛盾;

(2) 错,例如 $f(x)=\operatorname{sgn}x,g(x)=-\operatorname{sgn}x$ 当 $x\to0$ 时的极限都不存在,但 $f(x)+g(x)\equiv0$ 当 $x\to0$ 时的极限存在;

(3) 错,例如 $f(x)=x,\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,g(x)=\sin\frac{1}{x},\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在,但 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to0}(x\sin\frac{1}{x})=0$.

*6. 略.

习题 1-6(第 52 页)

1. (1) ω; (2) 3; (3) $\frac{2}{5}$; (4) 1; (5) 2; (6) x.

2. (1) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; (2) e^2; (3) e^2; (4) e^{-k}.

*3. 略.

4. (1) **提示**:$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$;

(2) **提示**:$\frac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi}$;

(3) **提示**:$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$,数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有界;

(4) **提示**:当 $x>0$ 时,$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$,

当 $-1<x<0$ 时,$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$;

(5) **提示**:当 $x>0$ 时,$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1$.

习题 1-7(第 55 页)

1. 当 $x\to 0$ 时,x^2-x^3 是比 $2x-x^2$ 高阶的无穷小.
2. 当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)^2$ 是比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小.
3. (1) 同阶,不等价;(2) 等价无穷小.
4. 略.
5. (1) $\frac{3}{2}$; (2) 0 $(m<n)$,1 $(m=n)$,∞ $(m>n)$; (3) $\frac{1}{2}$; (4) -3.
6. 略.

习题 1-8(第 61 页)

1. $x=-1,0,1,2$ 均为 $f(x)$ 的间断点,除 $x=0$ 外它们均为 $f(x)$ 的可去间断点. 补充定义 $f(-1)=f(2)=0$,修改定义,使 $f(1)=2$.
2. (1) $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续;
   (2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 内连续,$x=-1$ 为跳跃间断点.
3. (1) $x=1$ 为可去间断点,$x=2$ 为第二类间断点;
   (2) $x=0$ 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为可去间断点,$x=k\pi$ $(k\neq 0)$ 为第二类间断点;
   (3) $x=0$ 为第二类间断点;
   (4) $x=1$ 为第一类间断点.
4. $f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -x, & |x|>1. \end{cases}$ $x=1$ 和 $x=-1$ 为第一类间断点.
5. (1) 对,因为 $\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$,由此可推出结论;
   (2) 错,例如 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q}, \\ -1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}, \end{cases}$ $\forall\, a\in\mathbf{R}$.

*6—*7. 略.

*8. $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\frac{\pi}{x}$.

习题 1-9(第 65 页)

1. 连续区间:$(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$;

   $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=-\frac{8}{5}$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.
2. 略.

3. (1) $\sqrt{5}$; (2) 1; (3) 0; (4) $\frac{1}{2}$; (5) 2; (6) $\cos\alpha$; (7) 1; (8) $-\frac{1}{3}$.

4. (1) 1; (2) 0; (3) $\sqrt{e}$; (4) e^3; (5) $e^{-\frac{3}{2}}$; (6) $\frac{1}{2}$; (7) $\frac{1}{e}$; (8) -6.

5. (1) 错,例如 $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x, f(x)=e^x, \varphi[f(x)]\equiv 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(2) 错,例如 $\varphi(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ -1, x\in\mathbf{Q}^C,\end{cases}$ $[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(3) 对,例如 $\varphi(x)$ 同(2), $f(x)=|x|+1, f[\varphi(x)]\equiv 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(4) 对,若 $F(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,则 $\varphi(x)=F(x)f(x)$ 也在 $\mathbf{R}$ 上连续,与已知条件矛盾.

6. $a=1$.

习题 1-10(第 70 页)

1—4. 略.

5. **提示**: $m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$,其中 m、M 分别为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上的最小值及最大值.

*6. **提示**:证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

*7. 略.

*8. 若 $f(a^+)$ 及 $f(b^-)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

总习题一(第 70 页)

1. (1) 必要,充分; (2) 必要,充分; (3) 必要,充分; (4) 充分必要.

2. 1.

3. (1) (B); (2) (B).

4. (1) $(-\infty,0]$; (2) $[1,e]$; (3) $[0,\tan 1]$; (4) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$.

5. $f[f(x)]=f(x), g[g(x)]=0, f[g(x)]=0, g[f(x)]=g(x)$.

6. 略.

7. $V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$ $(0<\alpha<2\pi)$.

*8. 略.

9. (1) ∞; (2) $\frac{1}{2}$; (3) e; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $\sqrt[3]{abc}$; (6) 1; (7) $\frac{1}{a}$; (8) -2.

10. $a=0$.

11. $x=1$ 是第一类间断点.

12—13. 略.

14. (1) 略; (2) $y=2x+1$.

第 二 章

习题 2-1(第 83 页)

1. $\left.\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$.

3. (1) $C'(100)=80$(元/件);

(2) $C(101)-C(100)=79.9$(元)≈ 80(元),边际成本 $C'(x)$ 近似于产量达到 x 单位时再增加 1 个单位产品所需的成本.

4. -20.

5. 略.

6. (1) $-f'(x_0)$; (2) $f'(0)$; (3) $2f'(x_0)$.

7. (B).

8. (A).

9. (1) $4x^3$; (2) $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; (3) $1.6x^{0.6}$; (4) $-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

(5) $-\dfrac{2}{x^3}$; (6) $\dfrac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$; (7) $\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.

10. 12 m/s.

11. 略.

12. $k_1=y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\dfrac{1}{2}$, $k_2=y'|_{x=\pi}=-1$.

13. 切线方程为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+y-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0$;

法线方程为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.

14. $x-y+1=0$.

15. $(2,4)$.

16. (1) 在 $x=0$ 处连续,不可导; (2) 在 $x=0$ 处连续且可导.

17. $a=2, b=-1$.

18. $f'_+(0)=0, f'_-(0)=-1, f'(0)$ 不存在.

19. $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

20. 略.

习题 2-2(第 94 页)

1. 略.

2. (1) $3x^2-\frac{28}{x^5}+\frac{2}{x^2}$; (2) $15x^2-2^x\ln 2+3e^x$; (3) $\sec x(2\sec x+\tan x)$;

(4) $\cos 2x$; (5) $x(2\ln x+1)$; (6) $3e^x(\cos x-\sin x)$;

(7) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; (8) $\frac{e^x(x-2)}{x^3}$;

(9) $2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x$; (10) $\frac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}$.

3. (1) $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}, y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $f'(0)=\frac{3}{25}, f'(2)=\frac{17}{15}$.

4. (1) $v(t)=v_0-gt$; (2) $t=\frac{v_0}{g}$.

5. 切线方程为 $2x-y=0$,法线方程为 $x+2y=0$.

6. (1) $8(2x+5)^3$; (2) $3\sin(4-3x)$; (3) $-6xe^{-3x^2}$; (4) $\frac{2x}{1+x^2}$;

(5) $\sin 2x$; (6) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; (7) $2x\sec^2(x^2)$; (8) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$;

(9) $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; (10) $-\tan x$.

7. (1) $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; (2) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

(3) $-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$; (4) $\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

(5) $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$; (6) $\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$;

(7) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;　(8) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

(9) $\sec x$;　(10) $\csc x$.

8. (1) $\dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$;　(2) $\csc x$;

(3) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;　(4) $\dfrac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$;

(5) $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$;　(6) $-\dfrac{1}{1+x^2}$;

(7) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$;　(8) $\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$;

(9) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$;　(10) $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

9. $\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.

10. (1) $2xf'(x^2)$;　(2) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.

11. (1) $e^{-x}(-x^2+4x-5)$;　(2) $\sin 2x\sin(x^2)+2x\sin^2 x\cos(x^2)$;

(3) $\dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}$;　(4) $\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$;

(5) $\dfrac{4}{e^{2t}+e^{-2t}+2}$ 或 $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}$;　(6) $\dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$;

(7) $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cdot e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;　(8) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(9) $\arcsin\dfrac{x}{2}$;　(10) $y'=\begin{cases}\dfrac{2}{1+t^2}, & t^2<1,\\ -\dfrac{2}{1+t^2}, & t^2>1.\end{cases}$

*12. (1) $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\,x)\cdot\mathrm{ch}\,x$;　(2) $e^{\mathrm{ch}\,x}(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}^2 x)$;

(3) $\dfrac{1}{x\mathrm{ch}^2(\ln x)}$;　(4) $(3\mathrm{sh}\,x+2)\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,x$;

(5) $-\dfrac{2x}{\mathrm{ch}^2(1-x^2)}$;　(6) $\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$;

(7) $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$;　(8) $\dfrac{1}{1+2\mathrm{sh}^2 x}$;

(9) $\text{th}^3 x$;　　(10) $\frac{2}{(x+1)^2}\text{sh}\left(2\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)$.

13. $f(x)g(x)$在x_0处可导,其导数为$f'(x_0)g(x_0)$.

14. 略.

习题 2-3(第 100 页)

1. (1) $4-\frac{1}{x^2}$;　　(2) $4e^{2x-1}$;

(3) $-2\sin x-x\cos x$;　　(4) $-2e^{-t}\cos t$;

(5) $-\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;　　(6) $-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$;

(7) $2\sec^2 x\tan x$;　　(8) $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$;

(9) $2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$;　　(10) $\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$;

(11) $2xe^{x^2}(3+2x^2)$;　　(12) $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

2. $f'''(2)=207\ 360$.

3. (1) $2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$;　　(2) $\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$.

4. 略.

5. $\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin\omega t$.

6. 略.

7. $\frac{d^2x}{dt^2}=f(x)f'(x)$.

8—9. 略.

10. (1) $-4e^x\cos x$;　　(2) $2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1\ 225}{2}\sin 2x\right)$.

*11. (1) $n!$;　　(2) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$;

(3) $(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$;　　(4) $e^x(x+n)$.

*12. $(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2}$ $(n\geqslant 3)$.

习题 2-4(第 108 页)

1. (1) $\frac{y}{y-x}$; (2) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; (3) $\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$; (4) $-\frac{e^y}{1+xe^y}$.

2. 切线方程为 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$,法线方程为 $x-y=0$.

3. (1) $-\frac{1}{y^3}$; (2) $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; (3) $-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$;

(4) $\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$.

4. (1) $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)$;

(2) $\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)}\right]$;

(3) $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$;

(4) $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left[\frac{1}{x}+\cot x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right]$.

5. (1) $\frac{3b}{2a}t$; (2) $\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

6. $\sqrt{3}-2$.

7. (1) 切线方程为 $2\sqrt{2}x+y-2=0$,法线方程为 $\sqrt{2}x-4y-1=0$;

(2) 切线方程为 $4x+3y-12a=0$,法线方程为 $3x-4y+6a=0$.

8. (1) $\frac{1}{t^3}$; (2) $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$; (3) $\frac{4}{9}e^{3t}$; (4) $\frac{1}{f''(t)}$.

*9. (1) $-\frac{3}{8t^5}(1+t^2)$; (2) $\frac{t^4-1}{8t^3}$.

10. $144\pi\ \mathrm{m^2/s}$.

11. $\frac{16}{25\pi}\approx 0.204\ \mathrm{m/min}$.

12. $0.64\ \mathrm{cm/min}$.

习题 2-5(第 120 页)

1. 当 $\Delta x=1$ 时,$\Delta y=18$,$dy=11$;当 $\Delta x=0.1$ 时,$\Delta y=1.161$,$dy=1.1$;当 $\Delta x=0.01$ 时,$\Delta y=0.110\ 601$,$dy=0.11$.

2. (a) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy>0$;

(b) $\Delta y>0, dy>0, \Delta y-dy<0$;

(c) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy<0$;

(d) $\Delta y<0, dy<0, \Delta y-dy>0$.

3. (1) $\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$; (2) $(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$;

(3) $(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx$; (4) $\frac{2\ln(1-x)}{x-1}dx$;

(5) $2x(1+x)e^{2x}dx$; (6) $e^{-x}[\sin(3-x)-\cos(3-x)]dx$;

(7) $dy=\begin{cases}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, -1<x<0,\\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, 0<x<1;\end{cases}$

(8) $8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx$;

(9) $-\frac{2x}{1+x^4}dx$; (10) $A\omega\cos(\omega t+\varphi)dt$.

4. (1) $2x+C$; (2) $\frac{3}{2}x^2+C$; (3) $\sin t+C$; (4) $-\frac{1}{\omega}\cos \omega x+C$;

(5) $\ln(1+x)+C$; (6) $-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$; (7) $2\sqrt{x}+C$; (8) $\frac{1}{3}\tan 3x+C$.

5. 约为$\frac{8f}{3l}\Delta f$.

6. 约减少 43.63 cm^2,约增加 104.72 cm^2.

7. (1) 0.874 75; (2) −0.965 09.

8. (1) 30°47″; (2) 60°2′.

9. $\tan 45'\approx 0.013\ 09, \ln 1.002\approx 0.002$.

10. (1) 9.986 7; (2) 2.005 2.

*11. 0.667%.

*12. $\delta_\alpha=0.000\ 56\ rad=1'55''$.

提示:先求出圆心角 α 与弦长 l 的函数关系式.

总习题二(第 122 页)

1. (1) 充分,必要; (2) 充分必要; (3) 充分必要.

2. $n!$.

3. (D).

4. $\left.\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

5. $-\dfrac{1}{x^2}$.

6. (1) $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=1$;

(2) $f'_-(0)=1, f'_+(0)=0, f'(0)$不存在.

7. 在$x=0$处连续,不可导.

8. (1) $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$; (2) $\dfrac{1}{1+x^2}$; (3) $\sin x\cdot\ln\tan x$; (4) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$;

(5) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

9. (1) $-2\cos 2x\cdot\ln x-\dfrac{2\sin 2x}{x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}$; (2) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$.

*10. (1) $\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}$; (2) $(-1)^n\dfrac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

11. $y''(0)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

12. (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1+t^2}{t^3}$.

13. 切线方程为$x+2y-4=0$,法线方程为$2x-y-3=0$.

14. 切线方程为$y=2x-12$.

提示:先求$f(1)$,$f'(1)$,再利用周期性,求$f(6)$,$f'(6)$.

15. $y=H\left[2\left(\dfrac{x}{L}\right)^3+3\left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right]$.

16. -2.8 km/h.

17. 1.007.

18. 约需加长 2.23 cm.

第 三 章

习题 3-1(第 132 页)

1—4. 略.

5. 有分别位于区间(1,2),(2,3)及(3,4)内的三个根.

6—*13. 略.

14. **提示**:令 $\varphi(x)=f(x)e^{-x}$,先证明 $\varphi(x)$ 为常数.

*15. 略.

习题 3-2(第 137 页)

1. (1) 1; (2) 2; (3) 2; (4) $-\frac{3}{5}$; (5) $-\frac{1}{8}$; (6) $\frac{m}{n}a^{m-n}$;

(7) 1; (8) 3; (9) 1; (10) 1; (11) $\frac{1}{2}$; (12) ∞;

(13) $-\frac{1}{2}$; (14) e^{a}; (15) 1; (16) 1.

2—3. 略.

*4. 连续.

习题 3-3(第 143 页)

1. $f(x)=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

2. $f(x)=x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$.

3. $\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-$

$$\frac{15(x-4)^4}{4!\ 16[4+\theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}}\ (0<\theta<1).$$

4. $\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots+$

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n).$$

5. $\frac{1}{x}=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+$

$$(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}\ (0<\theta<1).$$

6. $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

7. $xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)\ (0<\theta<1)$.

8. $\sqrt{e}\approx 1.645$.

9. (1) $\sqrt[3]{30}\approx 3.107\ 24$, $|R_3|<1.88\times 10^{-5}$;

(2) $\sin 18^\circ \approx 0.309\ 0$, $|R_3| < 1.3\times10^{-4}$.

*10. (1) $\frac{3}{2}$; (2) $\frac{1}{6}$; (3) $-\frac{1}{12}$; (4) $\frac{1}{2}$.

习题 3-4(第 150 页)

1. 单调减少.

2. 单调增加.

3. (1) 在$(-\infty,-1]$、$[3,+\infty)$内单调增加,在$[-1,3]$上单调减少;

(2) 在$(0,2]$内单调减少,在$[2,+\infty)$内单调增加;

(3) 在$(-\infty,0)$,$\left(0,\frac{1}{2}\right]$,$[1,+\infty)$内单调减少,在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调增加;

(4) 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加;

(5) 在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$内单调减少,在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$内单调增加;

(6) 在$\left(-\infty,\frac{2}{3}a\right]$,$[a,+\infty)$内单调增加,在$\left[\frac{2}{3}a,a\right]$上单调减少;

(7) 在$[0,n]$上单调增加,在$[n,+\infty)$内单调减少;

(8) 在$\left[\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right]$上单调增加,在$\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$.

4. (D).

5. 略.

6. 当$a>\frac{1}{e}$时没有实根,当$0<a<\frac{1}{e}$时有两个实根,当$a=\frac{1}{e}$时只有$x=e$一个实根.

7. 不一定.$f(x)=x+\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内单调,但$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内不单调.

8. 略.

9. (1) 是凸的;

(2) 在$(-\infty,0]$内是凸的,在$[0,+\infty)$内是凹的;

(3) 是凹的; (4) 是凹的.

10. (1) 拐点$\left(\frac{5}{3},\frac{20}{27}\right)$,在$\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$内是凸的,在$\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$内是凹的;

(2) 拐点$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$,在$(-\infty,2]$内是凸的,在$[2,+\infty)$内是凹的;

(3) 没有拐点,处处是凹的;

(4) 拐点(-1,ln 2),(1,ln 2),在(-∞,-1],[1,+∞)内是凸的,在[-1,1]上是凹的;

(5) 拐点$\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$,在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$内是凹的,在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$内是凸的;

(6) 拐点(1,-7),在(0,1]内是凸的,在[1,+∞)内是凹的.

11. 略.

*12. 拐点:(-1,-1),$\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$,$\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

13. $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$.

14. $a=1,b=-3,c=-24,d=16$.

15. $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

*16. $(x_0,f(x_0))$为拐点.

习题 3-5(第 161 页)

1. (1) 极大值$f(-1)=17$,极小值$f(3)=-47$;

(2) 极小值$f(0)=0$;

(3) 极大值$f(\pm1)=1$,极小值$f(0)=0$;

(4) 极大值$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$;

(5) 极大值$f\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{1}{10}\sqrt{205}$;

(6) 极大值$f(0)=4$,极小值$f(-2)=\frac{8}{3}$;

(7) 极大值$f\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$,极小值$f\left(\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi}(k\in\mathbf{Z})$;

(8) 极大值$f(e)=e^{\frac{1}{e}}$; (9) 没有极值; (10) 没有极值.

2. 略.

3. $a=2,f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$为极大值.

4. 略.

5. 极小值$f(0)=4$.

6. (1) 最大值 $f(4)=80$,最小值 $f(-1)=-5$;

(2) 最大值 $f(3)=11$,最小值 $f(2)=-14$;

(3) 最大值 $f\left(\frac{3}{4}\right)=1.25$,最小值 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$.

7. 当 $x=1$ 时函数有最大值 -29.

8. 当 $x=-3$ 时函数有最小值 27.

9. 当 $x=1$ 时函数有最大值 $\frac{1}{2}$.

10. 长为 10 m,宽为 5 m.

11. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$,$h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$;$d:h=1:1$.

12. 底宽为 $\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}=2.367(\text{m})$.

13. 当 $\alpha=\arctan\mu=\arctan 0.25\approx 14°2'$ 时,可使力 F 最小.

14. 杆长为 1.4 m.

15. $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

16. 当 $\varphi=54°13'$ 时,屋架可吊到最大高度 7.506 m,而柱子高只有 6 m,所以能吊得上去.

提示:设吊臂对地面的倾角为 φ 时,屋架吊起的高度为 h,建立 h 与 φ 间的函数关系式,然后求出 h 的最大值.

17. 7 200 元.

18. 60 元.

习题 3-6(第 167 页)

1. 在 $(-\infty,-2]$ 内单调减少,在 $[-2,+\infty)$ 内单调增加;在 $(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$ 内是凹的,在 $[-1,1]$ 上是凸的;拐点 $\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$,$(1,2)$.

2. 对称于原点;在 $(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$ 内单调减少,在 $[-1,1]$ 上单调增加;在 $(-\infty,-\sqrt{3}]$,$[0,\sqrt{3}]$ 上是凸的,在 $[-\sqrt{3},0]$,$[\sqrt{3},+\infty)$ 内是凹的;拐点 $\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,$(0,0)$,$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$;水平渐近线 $y=0$.

3. 在 $(-\infty,1]$ 内单调增加,在 $[1,+\infty)$ 内单调减少;在 $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,

$\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 内是凹的，在 $\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上是凸的；拐点 $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$；水平渐近线 $y=0$.

4. 在 $(-\infty,0)$，$\left(0,\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$ 内单调减少，在 $\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2},+\infty\right)$ 内单调增加；在 $(-\infty,-1]$，$(0,+\infty)$ 内是凹的，在 $[-1,0)$ 内是凸的；拐点 $(-1,0)$；铅直渐近线 $x=0$.

5. 定义域为 $x\neq\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$；周期为 2π；图形对称于 y 轴；在 $[0,\pi]$ 部分：在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 内单调增加；在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内是凹的，在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 内是凸的，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 内是凹的，在 $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 内是凸的；拐点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$；铅直渐近线 $x=\frac{\pi}{4}$，$x=\frac{3\pi}{4}$.

习题 3-7（第 176 页）

1. $K=2$.

2. $K=|\cos x|$，$\rho=|\sec x|$.

3. $K=2$，$\rho=\frac{1}{2}$.

4. $K=\left|\frac{2}{3a\sin 2t_0}\right|$.

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\ln 2}{2}\right)$ 处曲率半径有最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

*6. 略.

7. 约 1 246 N.

提示：沿曲线运动的物体所受的向心力为 $F=\frac{mv^2}{\rho}$，这里 m 为物体的质量，v 为它的速率，ρ 为运动轨迹的曲率半径.

8. 约 45 400 N.

参看上题提示.

*9. $(\xi-3)^2+(\eta+2)^2=8$.

*10. $\left(\xi-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

*11. $\begin{cases}\alpha=\dfrac{3y^2}{2p}+p,\\ \beta=-\dfrac{y^3}{p^2}\end{cases}$ 或 $27p\beta^2=8(\alpha-p)^3$.

习题 3-8(第 181 页)

1. $0.18<\xi<0.19$.
2. $-0.20<\xi<-0.19$.
3. $0.32<\xi<0.33$.
4. $2.50<\xi<2.51$.

总习题三(第 181 页)

1. 2.
2. (1) (B); (2) (D).
3. $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$.
4. ka.

5—9. 略.

10. (1) 2; (2) $\dfrac{1}{2}$; (3) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; (4) $a_1a_2\cdots a_n$.

11. (1) $x^3\ln x=(x-1)+\dfrac{5}{2!}(x-1)^2+\dfrac{11}{3!}(x-1)^3+\dfrac{6}{4!}(x-1)^4-\dfrac{6}{5!\xi^2}(x-1)^5$, 其中 ξ 介于 1 与 x 之间;

(2) $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$;

(3) $e^{\sin x}=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$;

(4) $\ln\cos x=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{45}x^6+o(x^6)$.

12. 略.

13. $a=e^e$, 最小值 $1-\dfrac{1}{e}$.

14. (1,2) 和 (-1,-2).

15. $\sqrt[3]{3}$.

16. $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 处曲率半径有最小值 1.

17. $2.414<x_0<2.415$.

*18. **提示**：可以先用一次洛必达法则.

19. **提示**：记 $x_0=(1-t)x_1+tx_2$，先证

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

然后在上式中分别令 $x=x_1$ 及 $x=x_2$，可得两个不等式，由此推出结论.

20. $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$.

第 四 章

习题 4-1（第 192 页）

1. 略.

2. (1) $-\frac{1}{x}+C$；(2) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$；

(3) $2\sqrt{x}+C$；(4) $\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C$；

(5) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$；(6) $\frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}}+C$；

(7) $\frac{5}{4}x^4+C$；(8) $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+C$；

(9) $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$；(10) $\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C$；

(11) $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$；(12) $2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$；

(13) $2e^x+3\ln|x|+C$；(14) $3\arctan x-2\arcsin x+C$；

(15) $e^x-2\sqrt{x}+C$；(16) $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$；

(17) $2x-\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2-\ln 3}+C$；(18) $\tan x-\sec x+C$；

(19) $\frac{x+\sin x}{2}+C$；(20) $\frac{1}{2}\tan x+C$；

(21) $\sin x-\cos x+C$；(22) $-(\cot x+\tan x)+C$；

(23) $-\cot x-x+C$；(24) $-\cos\theta+\theta+C$；

(25) $x-\arctan x+C$；(26) $x^3-x+\arctan x+C$.

3. (1) $y=\frac{1}{3}(x^3-6x^2+12x-8)$; (2) $x=\frac{1}{t}+2t-2$.

4. (1) $s=20t-\frac{1}{2}kt^2$; (2) $t=\frac{20}{k}, s=\frac{200}{k}$; (3) $k=4$.

答:刹车加速度为$-4\ \mathrm{m/s^2}$.

5. $y=\ln x+1$.

6. (1) 27 m; (2) $\sqrt[3]{360}\approx 7.11(\mathrm{s})$.

7. 略.

习题 4-2(第 207 页)

1. (1) $\frac{1}{a}$; (2) $\frac{1}{7}$; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{1}{10}$; (5) $-\frac{1}{2}$; (6) $\frac{1}{12}$; (7) $\frac{1}{2}$; (8) -2; (9) $-\frac{2}{3}$; (10) $\frac{1}{5}$; (11) $-\frac{1}{5}$; (12) $\frac{1}{3}$; (13) -1; (14) -1.

2. (1) $\frac{1}{5}e^{5t}+C$;
(2) $-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$;
(3) $-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$;
(4) $-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}+C$;
(5) $-\frac{1}{a}\cos ax-be^{\frac{x}{b}}+C$;
(6) $-2\cos\sqrt{t}+C$;
(7) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;
(8) $\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$;
(9) $-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C$;
(10) $-\frac{3}{4}\ln|1-x^4|+C$;
(11) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$;
(12) $-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C$;
(13) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$;
(14) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C$;
(15) $\frac{1}{11}\tan^{11}x+C$;
(16) $\ln|\ln\ln x|+C$;
(17) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$;
(18) $-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C$;
(19) $-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}|+C$;
(20) $(\arctan\sqrt{x})^2+C$;
(21) $-\frac{1}{x\ln x}+C$;
(22) $\ln|\tan x|+C$;

(23) $\frac{1}{2}(\ln \tan x)^2+C$;　　(24) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$;

(25) $\frac{t}{2}+\frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t+\varphi)+C$;　　(26) $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x+C$;

(27) $\frac{1}{3}\sin \frac{3x}{2}+\sin \frac{x}{2}+C$;　　(28) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C$;

(29) $\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$;　　(30) $\arctan e^x+C$;

(31) $\frac{1}{2}\arcsin \frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$;

(32) $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+C$;　　(33) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right|+C$;

(34) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$;　　(35) $\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$;

(36) $\frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$;

(37) $\arccos \frac{1}{|x|}+C$;　　(38) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$;

(39) $\sqrt{x^2-9}-3\arccos \frac{3}{|x|}+C$;　　(40) $\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$;

(41) $\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$;

(42) $\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C$;

(43) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$;

(44) $\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\ln(x^2+1)+\arctan x\right)+C$.

习题 4-3(第 212 页)

1. $-x\cos x+\sin x+C$.
2. $x(\ln x-1)+C$.
3. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.
4. $-e^{-x}(x+1)+C$.
5. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$.

6. $\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

7. $-\frac{2}{17}e^{-2x}\left(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\right)+C$.

8. $2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$.

9. $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$.

10. $-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

11. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$.

12. $-\frac{e^{-2t}}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)+C$.

13. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

14. $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

15. $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C$.

16. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C$.

17. $-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+C$.

18. $-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C$.

19. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$.

20. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

21. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

22. $\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{5}e^x\sin 2x-\frac{1}{10}e^x\cos 2x+C$.

23. $\frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$.

24. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x+9}-1\right)e^{\sqrt{3x+9}}+C$.

习题 4-4（第 218 页）

1. $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$.

2. $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.

3. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C$.

4. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

5. $\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

6. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$.

7. $2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$.

8. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C$.

9. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

10. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

11. $-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

12. $\arctan x-\frac{1}{x^2+1}+C$.

13. $-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

14. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$.

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$.

16. $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$.

17. $\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

18. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$.

19. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{1+x}\right|+C.$

20. $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x-4\sqrt{x}+4\ln(\sqrt{x}+1)+C.$

21. $x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}+1)+C.$

22. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$

23. $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$ 或 $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\arcsin x+C.$

24. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$

习题 4-5（第 221 页）

1. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C.$

2. $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$

3. $\ln\left[(x-2)+\sqrt{5-4x+x^2}\right]+C.$

4. $\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9})+C.$

5. $\frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C.$

6. $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$

7. $\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C.$

8. $\frac{x}{18(9+x^2)}+\frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3}+C.$

9. $-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

10. $-\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x+3\cos 3x)+C.$

11. $-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$

12. $x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x-6x+C.$

13. $-\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.$

14. $2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C$.

15. $\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\arctan x+C$.

16. $\arccos\dfrac{1}{|x|}+C$.

17. $\dfrac{1}{9}\left(\ln|2+3x|+\dfrac{2}{2+3x}\right)+C$.

18. $\dfrac{\cos^5 x\sin x}{6}+\dfrac{5\cos^3 x\sin x}{24}+\dfrac{5}{32}(2x+\sin 2x)+C$.

19. $\dfrac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4}-\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C$.

20. $\dfrac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}\tan\dfrac{x}{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}\tan\dfrac{x}{2}-\sqrt{7}}\right|+C$.

21. $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+2\arctan\sqrt{2x-1}+C$.

22. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

23. $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-2x-1|+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}\right|+C$.

24. $-\sqrt{1+x-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

25. $\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{25}{16}x+\dfrac{125}{32}\arctan\dfrac{2x}{5}+C$.

总习题四(第 222 页)

1. (1) $\dfrac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$; (2) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\dfrac{x-3}{2}+C$.

2. (1) (B); (2) (C).

3. $x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$.

4. (1) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|e^x-1|}{e^x+1}+C$;

(2) $\dfrac{1}{2(1-x)^2}-\dfrac{1}{1-x}+C$;

(3) $\dfrac{1}{6a^3}\ln\left|\dfrac{a^3+x^3}{a^3-x^3}\right|+C$;

(4) $\ln|x+\sin x|+C$;

(5) $\ln x(\ln\ln x-1)+C$;

(6) $\frac{1}{2}\arctan\sin^2 x+C$;

(7) $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$;

(8) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 4x-\cos 2x\right)+C$;

(9) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$;

(10) $a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$;

(11) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(x+1)}\right|+C$;

(12) $\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$;

(13) $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C$;

(14) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;

(15) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

(16) $\frac{1}{3a^4}\left[\frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right]+C$;

(17) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$;

(18) $(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C$;

(19) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$;

(20) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$;

(21) $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$;

(22) $\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C$;

(23) $\frac{x^4}{8(1+x^8)}+\frac{1}{8}\arctan x^4+C$;

(24) $\frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2}+C$;

(25) $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+C$;

(26) $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+x+C$ 或 $\sec x+x-\tan x+C$;

(27) $x\tan\frac{x}{2}+C$;

(28) $e^{\sin x}(x-\sec x)+C$;

(29) $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$;

(30) $\frac{1}{1+e^x}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$;

(31) $\arctan(e^x-e^{-x})+C$;

(32) $\frac{xe^x}{e^x+1}-\ln(1+e^x)+C$;

(33) $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C$;

(34) $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$;

(35) $\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+C$;

(36) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)\arccos x-\frac{1}{9}x(x^2+6)+C$;

(37) $-\ln|\csc x+1|+C$;

(38) $\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$;

(39) $\frac{1}{3}\ln(2+\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+C$;

(40) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(x/2)-1+\sqrt{2}}{\tan(x/2)-1-\sqrt{2}}\right|+C$.

第 五 章

习题 5-1(第 236 页)

*1. $\frac{1}{3}(b^3-a^3)+b-a$.

*2. (1) $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$; (2) e-1.

3. 略.

4. (1) $\frac{1}{2}t^2$; (2) 21; (3) $\frac{5}{2}$; (4) $\frac{9\pi}{2}$.

5. $a=0, b=1$.

6. $\ln 2 \approx 0.693\ 1$.

7. (1) 6; (2) -2; (3) -3; (4) 5.

8. 88.2 kN.

9. 略.

10. (1) $6 \leqslant \int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x \leqslant 51$; (2) $\pi \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x \leqslant 2\pi$;

(3) $\frac{\pi}{9} \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\pi$; (4) $-2\mathrm{e}^2 \leqslant \int_2^0 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

11. **提示**:设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = a$,有 $\int_0^1 [f(x)-a]^2\mathrm{d}x \geqslant 0$.

12. 略.

13. (1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 较大; (2) $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 较大; (3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 较大;

(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 较大; (5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 较大.

习题 5-2(第 244 页)

1. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\cot t$.

3. $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$.

4. 当 $x=0$ 时.

5. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$;

(3) $(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$.

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. (C).

8. (1) $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$; (2) $\frac{21}{8}$; (3) $\frac{271}{6}$; (4) $\frac{\pi}{6}$; (5) $\frac{\pi}{3}$;

(6) $\frac{\pi}{3a}$; (7) $\frac{\pi}{6}$; (8) $\frac{\pi}{4}+1$; (9) -1; (10) $1-\frac{\pi}{4}$; (11) 4;

(12) $\frac{8}{3}$.

9. 略.

10. **提示**:应用三角学中的积化和差公式.

11. (1) 1; (2) 2.

12. $\Phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & x\in[0,1),\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}, & x\in[1,2],\end{cases}$ $\Phi(x)$在(0,2)内连续.

13. $\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

14. 略.

15. 1.

16. 1.

习题 5-3(第 254 页)

1. (1) 0; (2) $\frac{51}{512}$; (3) $\frac{1}{4}$; (4) $\pi-\frac{4}{3}$;

(5) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) $\sqrt{2}(\pi+2)$; (8) $1-\frac{\pi}{4}$;

(9) $\frac{\pi}{16}a^4$; (10) $\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; (11) $\frac{1}{6}$; (12) $2+2\ln\frac{2}{3}$;

(13) $1-2\ln 2$; (14) $(\sqrt{3}-1)a$; (15) $1-e^{-\frac{1}{2}}$; (16) $2(\sqrt{3}-1)$;

(17) $\frac{\pi}{2}$; (18) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$; (19) 0; (20) $\frac{3}{2}\pi$; (21) $\frac{\pi^3}{324}$;

(22) 0; (23) $\frac{2}{3}$; (24) $\frac{4}{3}$; (25) $2\sqrt{2}$; (26) 4.

2—6. 略.

7. (1) $1-\frac{2}{e}$; (2) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; (3) $-\frac{2\pi}{\omega^2}$; (4) $\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;

(5) $4(2\ln 2-1)$; (6) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; (7) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$; (8) $2-\frac{3}{4\ln 2}$;

(9) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$; (10) $\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$; (11) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$;

(12) $\begin{cases}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数},\\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m+1)}, & m\text{ 为偶数};\end{cases}$

(13) $J_m=\begin{cases}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, & m\text{ 为偶数},\\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}\pi, & m\text{ 为大于 1 的奇数},\end{cases}$

$J_1=\pi$.

习题 5-4(第 262 页)

1. (1) $\frac{1}{3}$; (2) 发散; (3) $\frac{1}{a}$; (4) $\frac{\pi}{4}$; (5) $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

(6) π; (7) 1; (8) 发散; (9) $\frac{8}{3}$; (10) $\frac{\pi}{2}$.

2. 当 $k>1$ 时收敛于$\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$;当 $k\leqslant 1$ 时发散;当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$时取得最小值.

3. $n!$.

4. -1.

*** 习题 5-5(第 270 页)**

1. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 发散;
(5) 收敛; (6) 发散; (7) 收敛; (8) 收敛.

2. 略.

3. (1) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $n>0$; (2) $\Gamma(p+1)$, $p>-1$;

(3) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$, $\frac{m+1}{n}>0$.

4—5. 略.

总习题五(第 270 页)

1. (1) 必要,充分; (2) 充分必要; *(3) 收敛; (4) 不一定;
(5) $xf(-x^2)$.

2. (1) (B); (2) (A).

3. (1) 表示曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 和直线 $x=a$、$x=b$ 所围图形的面积;
(2) 表示曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=0$、$x=a$、$x=b$ 所围曲边梯形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积;
(3) 表示 $[t_1,t_2]$ 这段时间内流入水池的水量;
(4) 表示 $[T_1,T_2]$ 这段时期内该国人口增加的数量;
(5) 表示该公司经营该种产品自第 1001 件至第 2000 件所得利润.

*4. (1) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; (2) $\frac{1}{p+1}$.

5. (1) $af(a)$; (2) $\frac{\pi^2}{4}$.

6—7. 略.

8. **提示**: $1-x^p<\frac{1}{1+x^p}<1$.

9. **提示**: (1) 对任意实数 t,

$$\int_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + t^2\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant 0;$$

(2) 利用柯西-施瓦茨不等式.

10. **提示**: 利用柯西-施瓦茨不等式.

11. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{\pi}{8}\ln 2$, **提示**: 令 $x=\frac{\pi}{4}-u$; (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $2(\sqrt{2}-1)$;

(5) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) $\frac{\pi^2}{2}+2\pi-4$; (8) $e^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan e^{-1}\right)$;

(9) $\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$; (10) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}, & \text{当 } x<-1,\\ x, & \text{当 } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}, & \text{当 } x>1.\end{cases}$

12—13. 略.

14. $1+\ln(1+e^{-1})$.

15—*16. 略.

*17. (1) 收敛; *(2) 收敛; (3) 收敛,**提示**:先分部积分,再判别;
(4) 收敛.

*18. (1) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$,**提示**:$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$;

(2) $\frac{\pi}{4}$,**提示**:令 $x=\frac{1}{t}$.

第 六 章

习题 6-2(第 286 页)

1. (1) $\frac{1}{6}$; (2) 1; (3) $\frac{32}{3}$; (4) $\frac{32}{3}$.

2. (1) $2\pi+\frac{4}{3}$,$6\pi-\frac{4}{3}$; (2) $\frac{3}{2}-\ln 2$; (3) $e+\frac{1}{e}-2$; (4) $b-a$.

3. $\frac{9}{4}$.

4. $\frac{16}{3}p^2$.

5. (1) πa^2; (2) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (3) $18\pi a^2$.

6. $3\pi a^2$.

7. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$.

8. (1) $\frac{5}{4}\pi$; (2) $\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{e}{2}$.

10. $\frac{8}{3}a^2$.

11. 当 $p=-\frac{4}{5}$、$q=3$ 时，A 达到最大值 $\frac{225}{32}$.

12. $\frac{128}{7}\pi$，$\frac{64}{5}\pi$.

13. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

14. 略.

15. （1）$\frac{3}{10}\pi$；（2）$\frac{\pi^3}{4}-2\pi$；（3）$160\pi^2$；（4）$7\pi^2a^3$.

16. $2\pi^2a^2b$.

17. $\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA]$.

18. $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$.

19. 略.

20. $2\pi^2$.

21. （1）$V_1=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$，$V_2=\pi a^4$；

（2）当 $a=1$ 时，V_1+V_2 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

23. $\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

24. $\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

25. $6a$.

26. $\frac{a}{2}\pi^2$.

27. $\left(\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\frac{3}{2}a\right)$.

28. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1)$.

29. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

30. $8a$.

习题 6-3(第 293 页)

1. $0.18k$ J.

2. $800\pi\ln 2$ J.

3. (1) 略; (2) 9.72×10^5 kJ.

4. $\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$ (其中 k 为比例常数).

5. $(\sqrt{2}-1)$ cm.

6. 57 697.5 kJ.

7. 205.8 kN.

8. 17.3 kN.

9. 14 373 kN.

10. 1.65 N.

11. 取 y 轴通过细直棒,则

$$F_y=Gm\mu\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right),F_z=-\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}}.$$

12. 引力的大小为$\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$,方向为 M 指向圆弧的中点.

总习题六(第 294 页)

1. (1) $\frac{37}{12}$; (2) $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$.

2. (1) (A); (2) (D).

3. $\frac{5}{4}$ m.

4. $\frac{\pi-1}{4}a^2$.

5. $x=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{2}}$ 或 $y=\frac{32}{9}x^2$ $(x\geqslant0)$.

6. $a=-\frac{5}{3},b=2,c=0$.

7. (1) $\frac{1}{2}e-1$; (2) $\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$.

8. $\frac{512}{7}\pi$.

9. $4\pi^2$.

10. $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

11. $\frac{4}{3}\pi r^4 g$.

12. $\frac{1}{2}\rho gab(2h+b\sin\alpha)$.

13. $F_x=\frac{3}{5}Ga^2, F_y=\frac{3}{5}Ga^2$.

14. (1) $\sqrt{1+r+r^2}\,a$ m; (2) $\frac{1}{\sqrt{1-r}}\,a$ m.

第 七 章

习题 7-1(第 301 页)

1. (1) 一阶; (2) 二阶; (3) 三阶; (4) 一阶; (5) 二阶; (6) 一阶.
2. (1) 是; (2) 是; (3) 不是; (4) 是.
3. 略.
4. (1) $y^2-x^2=25$; (2) $y=xe^{2x}$; (3) $y=-\cos x$.
5. (1) $y'=x^2$; (2) $yy'+2x=0$.
6. $\frac{dp}{dT}=k\frac{p}{T^2}$, k 为比例系数.
7. 6 小时.

习题 7-2(第308页)

1. (1) $y=e^{Cx}$; (2) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x^3+C$;

(3) $\arcsin y=\arcsin x+C$; (4) $\frac{1}{y}=a\ln|x+a-1|+C$;

(5) $\tan x\tan y=C$; (6) $10^{-y}+10^x=C$;

(7) $(e^x+1)(e^y-1)=C$; (8) $\sin x\sin y=C$;

(9) $3x^4+4(y+1)^3=C$; (10) $(x-4)y^4=Cx$.

2. (1) $e^{y}=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)$; (2) $\cos x-\sqrt{2}\cos y=0$;

(3) $\ln y=\tan\frac{x}{2}$; (4) $(1+e^{x})\sec y=2\sqrt{2}$; (5) $x^{2}y=4$.

3. $t=-0.030\ 5\ h^{\frac{5}{2}}+9.64$,水流完所需的时间约为 10 s.

4. $v=\sqrt{72\ 500}\approx 269.3$ (cm/s).

5. $R=R_{0}e^{-0.000\ 433\ t}$,时间以年为单位.

6. $xy=6$.

7. 取 O 为原点,河岸朝顺水方向为 x 轴,y 轴指向对岸,则所求航线为

$$x=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^{2}-\frac{1}{3}y^{3}\right).$$

习题 7-3(第314页)

1. (1) $y+\sqrt{y^{2}-x^{2}}=Cx^{2}$ $(x>0)$, $y-\sqrt{y^{2}-x^{2}}=C$ $(x<0)$;

(2) $\ln\frac{y}{x}=Cx+1$;

(3) $y^{2}=x^{2}(2\ln|x|+C)$; (4) $x^{3}-2y^{3}=Cx$;

(5) $x^{2}=C\sin^{3}\frac{y}{x}$; (6) $x+2ye^{\frac{x}{y}}=C$.

2. (1) $y^{3}=y^{2}-x^{2}$; (2) $y^{2}=2x^{2}(\ln x+2)$; (3) $\frac{x+y}{x^{2}+y^{2}}=1$.

3. $y=x(1-4\ln x)$.

*4. (1) $(4y-x-3)(y+2x-3)^{2}=C$;

(2) $\ln[4y^{2}+(x-1)^{2}]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C$;

(3) $(y-x+1)^{2}(y+x-1)^{5}=C$;

(4) $x+3y+2\ln|x+y-2|=C$.

习题 7-4(第320页)

1. (1) $y=e^{-x}(x+C)$; (2) $y=\frac{1}{3}x^{2}+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$;

(3) $y=(x+C)e^{-\sin x}$; (4) $y=C\cos x-2\cos^{2}x$;

(5) $y=\frac{\sin x+C}{x^{2}-1}$; (6) $3\rho=2+Ce^{-3\theta}$;

(7) $y=2+Ce^{-x^{2}}$; (8) $2x\ln y=\ln^{2}y+C$;

(9) $y=(x-2)^{3}+C(x-2)$; (10) $x=Cy^{3}+\frac{1}{2}y^{2}$.

2. (1) $y=\dfrac{x}{\cos x}$;　　(2) $y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$;

(3) $y\sin x+5e^{\cos x}=1$;　　(4) $y=\dfrac{2}{3}(4-e^{-3x})$;

(5) $2y=x^3-x^3e^{x^{-2}-1}$.

3. $y=2(e^x-x-1)$.

4. $v=\dfrac{k_1}{k_2}t-\dfrac{k_1m}{k_2^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t})$.

5. $i=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin\left(5t-\dfrac{\pi}{4}\right)$ A.

6. $\ln|x|+\int\dfrac{g(v)\,dv}{v[f(v)-g(v)]}=C$,求出后将 $v=xy$ 代回,得通解.

7. (1) $y=-x+\tan(x+C)$;　　(2) $(x-y)^2=-2x+C$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}e^{Cx}$;　　(4) $y=1-\sin x-\dfrac{1}{x+C}$;

(5) $2x^2y^2\ln|y|-2xy-1=Cx^2y^2$.

*8. (1) $\dfrac{1}{y}=-\sin x+Ce^x$;　　(2) $\dfrac{3}{2}x^2+\ln\left|1+\dfrac{3}{y}\right|=C$;

(3) $\dfrac{1}{y^3}=Ce^x-1-2x$;　　(4) $\dfrac{1}{y^4}=-x+\dfrac{1}{4}+Ce^{-4x}$;

(5) $\dfrac{x^2}{y^2}=-\dfrac{2}{3}x^3\left(\dfrac{2}{3}+\ln x\right)+C$.

习题 7-5(第328页)

1. (1) $y=\dfrac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$;

(2) $y=(x-3)e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$;

(3) $y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;

(4) $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$;

(5) $y=C_1e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x+C_2$;

(6) $y=C_1\ln|x|+C_2$;

(7) $y^3=C_1x+C_2$;

(8) $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$;

(9) $x+C_2=\pm\left[\dfrac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\right]$;

(10) $y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$.

2. (1) $y=\sqrt{2x-x^2}$; (2) $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$;

(3) $y=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{e^a}{a^2}(a-1)x+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$;

(4) $y=\ln\sec x$; (5) $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$; (6) $y=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2$.

3. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1$.

4. $s=\frac{mg}{c}\left(t+\frac{m}{c}e^{-\frac{c}{m}t}-\frac{m}{c}\right)$.

习题 7-6(第337页)

1. (1) 线性无关; (2) 线性相关; (3) 线性相关;
(4) 线性无关; (5) 线性无关; (6) 线性无关;
(7) 线性相关; (8) 线性无关; (9) 线性无关;
(10) 线性无关.

2. $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$.

3. $y=(C_1+C_2x)e^{x^2}$.

4. 略.

*5. $y=C_1e^x+C_2(2x+1)$.

*6. $y=C_1x+C_2x^2+x^3$.

*7. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$.

*8. $y=C_1x+C_2x\ln|x|+\frac{1}{2}x\ln^2|x|$.

习题 7-7(第346页)

1. (1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$; (2) $y=C_1+C_2e^{4x}$;
(3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; (4) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;
(5) $x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$; (6) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$;
(7) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$;
(8) $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$;
(9) $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$;
(10) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$.

2. (1) $y=4e^x+2e^{3x}$; (2) $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$; (3) $y=e^{-x}-e^{4x}$;
(4) $y=3e^{-2x}\sin 5x$; (5) $y=2\cos 5x+\sin 5x$; (6) $y=e^{2x}\sin 3x$.

3. $x=\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{k_2^2+4k_1}\,t})\,\mathrm{e}^{(-\frac{k_2}{2}+\frac{\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2})t}$.

4. $u_C(t)=\dfrac{10}{9}(19\mathrm{e}^{-10^3t}-\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t})$ V；$i(t)=\dfrac{19}{18}\times10^{-2}(-\mathrm{e}^{-10^3t}+\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t})$ A.

5. $M=195$ kg.

习题 7-8（第 354 页）

1. （1）$y=C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C_2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$；

（2）$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+a^2}$；

（3）$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{7}{25}x$；

（4）$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\left(\dfrac{3}{2}x^2-3x\right)\mathrm{e}^{-x}$；

（5）$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^x\cos 2x$；

（6）$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)\mathrm{e}^{3x}$；

（7）$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{11}{8}-\dfrac{1}{2}x$；

（8）$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$；

（9）$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}+\dfrac{x}{2}\sin x$；

（10）$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$，提示：$\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

2. （1）$y=-\cos x-\dfrac{1}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 2x$；

（2）$y=-5\mathrm{e}^x+\dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{5}{2}$；

（3）$y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{9x}+\mathrm{e}^x)-\dfrac{1}{7}\mathrm{e}^{2x}$；

（4）$y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x(x^2-x)$；

（5）$y=\dfrac{11}{16}+\dfrac{5}{16}\mathrm{e}^{4x}-\dfrac{5}{4}x$.

3. 取炮口为原点，炮弹前进的水平方向为 x 轴，铅直向上为 y 轴建立直角坐标系，弹道曲线为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

4. $u_C(t) = 20 - 20e^{-5\times10^3 t}[\cos(5\times10^3 t) + \sin(5\times10^3 t)]$ V;

$i(t) = 4\times10^{-2} e^{-5\times10^3 t} \sin(5\times10^3 t)$ A,

提示:电路方程参见第六节例 2.

5. (1) $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}} \ln(5+2\sqrt{6})$ s; (2) $t = \sqrt{\dfrac{10}{g}} \ln\left(\dfrac{19+4\sqrt{22}}{3}\right)$ s.

6. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$.

* 习题 7-9(第356页)

1. $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$.

2. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + x\ln^2|x|$.

3. $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x^{-2}$.

4. $y = C_1 x + C_2 x^2 + \dfrac{1}{2}(\ln^2 x + \ln x) + \dfrac{1}{4}$.

5. $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + \dfrac{1}{5} x^3$.

6. $y = x[C_1 \cos(\sqrt{3}\ln x) + C_2 \sin(\sqrt{3}\ln x)] + \dfrac{1}{2} x \sin(\ln x)$.

7. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + x + \dfrac{1}{6} x^2 \ln^3 x$.

8. $y = C_1 x + x[C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)] + \dfrac{1}{2} x^2 (\ln x - 2) + 3x\ln x$.

* 习题 7-10(第359页)

1. (1) $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 3 + C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=C_1e^{(-1+\sqrt{15})t}+C_2e^{(-1-\sqrt{15})t}+\dfrac{2}{11}e^{t}+\dfrac{1}{6}e^{2t}, \\ y=(-4-\sqrt{15})C_1e^{(-1+\sqrt{15})t}-(4-\sqrt{15})C_2e^{(-1-\sqrt{15})t}-\dfrac{e^{t}}{11}-\dfrac{7}{6}e^{2t}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\dfrac{C_1-3C_2}{5}\sin t-\dfrac{3C_1+C_2}{5}\cos t-t^2+t+3, \\ y=C_1\cos t+C_2\sin t+2t^2-3t-4; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{t}{3}}+\dfrac{8\sin t+\cos t}{65}, \\ y=-\dfrac{4}{3}C_1e^{-5t}+C_2e^{-\frac{t}{3}}+\dfrac{61\sin t-33\cos t}{130}. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=e^{t}, \\ y=4e^{t}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=2\cos t-4\sin t-\dfrac{1}{2}e^{t}, \\ y=14\sin t-2\cos t+2e^{t}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=4\cos t+3\sin t-2e^{-2t}-2e^{-t}\sin t, \\ y=\sin t-2\cos t+2e^{-t}\cos t; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=\dfrac{12}{17}e^{-\frac{7}{5}t}+\dfrac{5}{17}e^{2t}+\dfrac{3}{7}t-\dfrac{1}{49}, \\ y=\dfrac{18}{17}e^{-\frac{7}{5}t}-\dfrac{1}{17}e^{2t}+\dfrac{1}{2}e^{-t}+\dfrac{1}{7}t-\dfrac{26}{49}. \end{cases}$

总习题七(第 360 页)

1. (1) 3; (2) $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$;

(3) $y'=f(x,y)$, $y\Big|_{x=x_0}=0$; (4) $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$.

2. (1) (B); (2) (B).

3. (1) $y^2(y'^2+1)=1$; (2) $y''-3y'+2y=0$.

4. (1) $x-\sqrt{xy}=C$; (2) $y=ax+\dfrac{C}{\ln x}$;

(3) $x=Cy^{-2}+\ln y-\dfrac{1}{2}$; (4) $y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1$;

(5) $y=\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$; (6) $y=\dfrac{1}{2C_1}(e^{C_1x+C_2}+e^{-C_1x-C_2})$;

(7) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x$;

(8) $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x\right)e^{x}-x^2-x$;

*(9) $x^2=Cy^6+y^4$;　　(10) $\sqrt{(x^2+y)^3}=x^3+\frac{3}{2}xy+C$.

*5. (1) $x(1+2\ln y)-y^2=0$;　　(2) $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$;

(3) $y=2\arctan e^{x}$;　　(4) $y=xe^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$.

6. $y=x-x\ln x$.

7. 约 250 m^3.

8. $\varphi(x)=\cos x+\sin x$.

9. $\varphi(x)=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}$.

10. 略.

*11. (1) $y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln|x|)$;　　(2) $y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$.

*12. (1)
$$\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{-t}+\frac{1}{2}t, \\ y=-(C_1+C_2+C_2t)e^{-t}-\frac{1}{2}; \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{t}, \\ y=C_4e^{-t}-C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}. \end{cases}$$