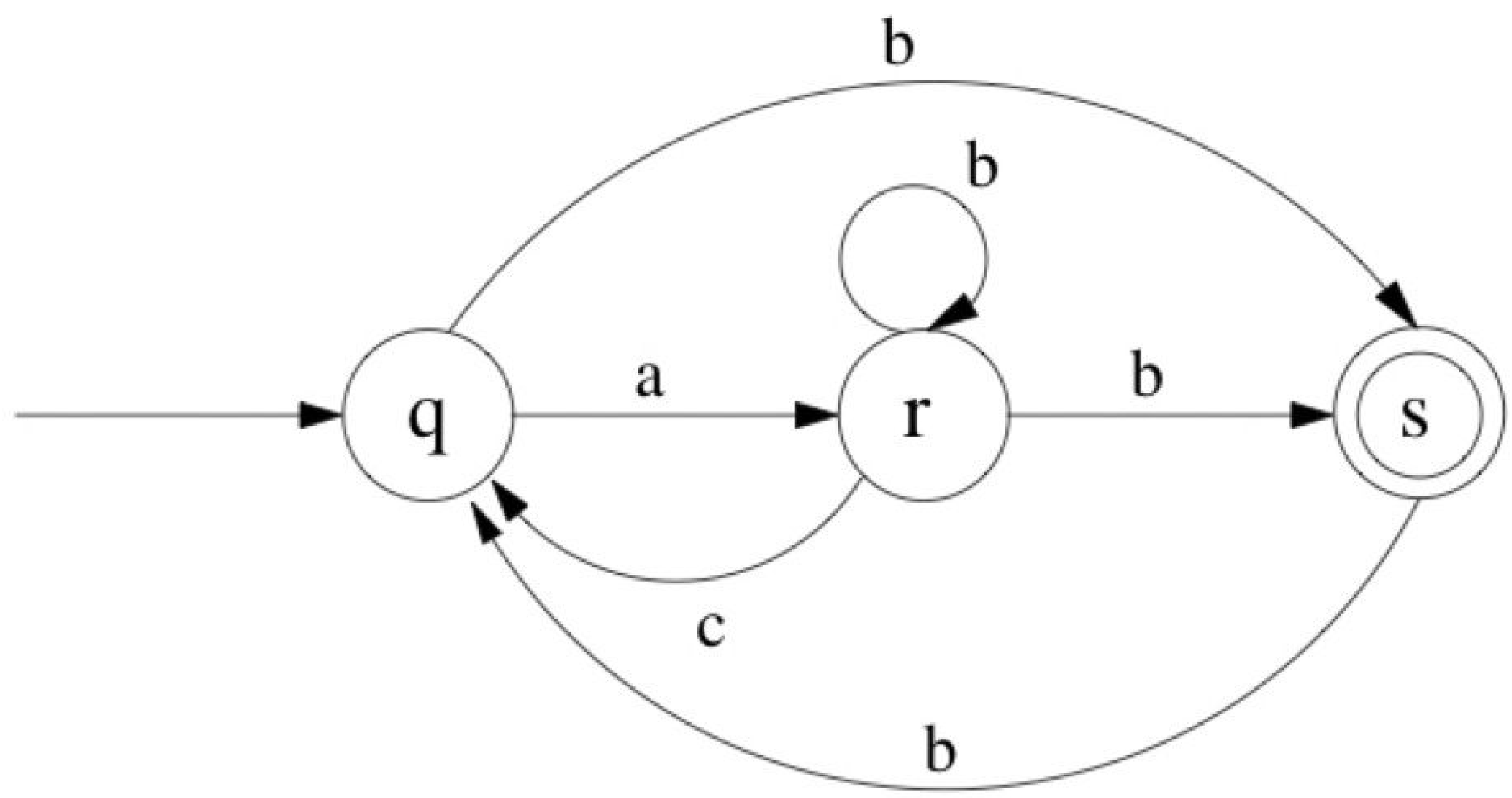
1. Uvažte NKA M_3 nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ z obrázku 1:



Obrázek 1: NKA M_3

Řešením rovnic nad regulárními výrazy sestavte k tomuto automatu ekvivalentní regulární výraz.

Stavy si označím veľkým písmenom $q = Q$; $r = R$; $s = S$

1. Vyjadrenie reg. rovníc

$$Q = aR + bS$$
$$R = bR + bS + cQ$$
$$S = bQ + \varepsilon$$

2. S dosadím do R

$$R = bR + b(bQ + \varepsilon) + cQ$$
$$R = bR + bbQ + b + cQ$$
$$R = b^*(bbQ + b + cQ)$$

3. R dosadím do Q

$$Q = a(b^*(bbQ + b + cQ)) + bS$$
$$Q = a(b^*bbQ + b^+ + b^*cQ) + bS$$
$$Q = ab^*bbQ + ab^+ + ab^*cQ + bS$$

$$Q = ab^*bbQ + ab^+ + ab^*cQ + b(bQ + \varepsilon)$$
$$Q = ab^*bbQ + ab^+ + ab^*cQ + bbQ + b$$
$$Q = (ab^*bb + ab^*c + bb)Q + ab^+ + b$$
$$Q = (ab^*bb + ab^*c + bb)^*(ab^+ + b)$$

Regulárny výraz je:

$$(ab^*bb + ab^*c + bb)^*(ab^+ + b)$$

2. Mějme jazyk L_1 nad abecedou $\{a, b\}$ definovaný následovně: $L_1 = \{a^i b^j a^k b^k \mid k = i + j\}$
Dokažte, že jazyk L_1 není bezkontextový.

Dôkaz sporom: predpokladajme, že $L \in \mathcal{L}_2$

- podľa P.L.: $\exists p, p > 0 : \forall z \in L : |z| \geq p \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \in \{a, b\}^*$:
$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq p \wedge \forall r \geq 0 : uv^r w x^r y \in L$

1. Uvážme ľubovoľné p, pre ktoré platí vyššie uvedené a zvoľme $z = a^p b^p a^{2p} b^{2p}$. Z čoho je jasné, že $|z| = 6p \Rightarrow |z| \geq p$
Musí teda platiť že, $\exists u, v, w, x, y \in \{a, b\}^* : z = a^p b^p a^{2p} b^{2p} = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq p \wedge \forall r \geq 0 : uv^r w x^r y \in L$

2. Uvážme všetky možné voľby $u, v, w, x, y \in \{a, b\}^*$, pre ktoré platí vyššie uvedené. Zároveň pri voľbe v a x vychádzame z def. $vx \neq \varepsilon$. Následne budeme dosadzovať $r = 2$ do $uv^r w x^r y \in L$.

a) $vwx \in a^+ \longrightarrow$ ilustrácia aabbaaaabbbb

- buď za v alebo x zvolíme a^+.
- dosadíme $r = 2$, čím porušíme vzťah buď $a^l b^p a^{2p} b^{2p}$ kde $l + p > 2p$. Dôjde ku nadmernému napumpovaniu a. Teda výsledné slovo $a^p b^p a^l b^{2p}$ kde $l > 2p$.

b) $vwx \in b^+ \longrightarrow$ ilustrácia aabbaaaabbbb

- buď za v alebo x zvolíme b^+.
- dosadíme $r = 2$, čím porušíme vzťah buď $a^p b^l a^{2p} b^{2p}$ kde $l + p > 2p$. Dôjde ku nadmernému napumpovaniu b. Teda výsledné slovo $a^p b^p a^{2p} b^l$ kde $l > 2p$.

c) $vwx \in a^+b^+$ aabbaaaabbbb

- nech reťazec a^+b^+ rozdelíme do častí vwx, akokoľvek pri dosadení $r=2$ nám výsledné slovo bude porušovať podmienku usporiadania $a^N b^N a^{2N} b^{2N}$ teda napríklad: $v=a^+b^+$, $w=\varepsilon$, $x=\varepsilon$, $r=2$ bude výsledné slovo vyzerať $a^{N-l}a^l b^k a^l b^k b^{N-k} a^{2N} b^{2N}$ kde pumpovanie prebieha $v=a^l b^k$. Obdobne by došlo k porušeniu pri druhej situácii. (aabbaaaabbbb)

d) $vwx \in b^+a^+$ aabbaaaabbbb

- nech reťazec b^+a^+ rozdelíme do častí vwx, akokoľvek pri dosadení $r=2$ nám výsledné slovo bude porušovať podmienku usporiadania $a^N b^N a^{2N} b^{2N}$ teda napríklad: $v=b^+a^+$, $w=\varepsilon$, $x=\varepsilon$, $r=2$ bude výsledné slovo vyzerať $a^N b^{N-l} b^l a^k b^l a^k a^{2N-k} b^{2N}$ kde pumpovanie prebieha v $v=b^l a^k$.

Nie sme schopný vybrať u, v, w, x, y tak aby $uv^rwx^ry \in L$.

SPOR

3. Mějme jazyk L_2 nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L_2 = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + j = k + l\}$.

a) • Sestrojte bezkontextovou gramatiku G_2 takovou, že $L(G_2) = L_2$.

b) • Ke gramatice G_2 sestrojte RZA P_2 takový, že P_2 provádí syntaktickou analýzu L_2 zdola nahoru.

$\Sigma = \{a, b, \#\}$

$L_2 = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i+j = k+l\}$

a) $G_2 = (N, T, P, S)$ kde:

$N = \{S\}$

$T = \{a, b, \#\}$

$P = \{S \to aSb; S \to A; S \to B; A \to aAa; A \to L; B \to bBb;$
$B \to L; L \to bLa; L \to \#\}$

$S = \{S\}$

b) δ: SHIFT: $\delta(q_0, a, \varepsilon) = \{(q_0, a)\}$

$\delta(q_0, b, \varepsilon) = \{(q_0, b)\}$

$\delta(q_0, \#, \varepsilon) = \{(q_0, \#)\}$

REDUCE:

$\delta(q_0, \varepsilon, \#) = \{(q_0, L)\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, bLa) = \{(q_0, L)\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, L) = \{(q_0, B), (q_0, A)\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, bBb) = \{(q_0, B)\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, aAa) = \{(q_0, A)\}$

$\delta(q_0, \varepsilon, B) = \{(q_0, S)\}$

$$\delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(q_0, S)\}$$

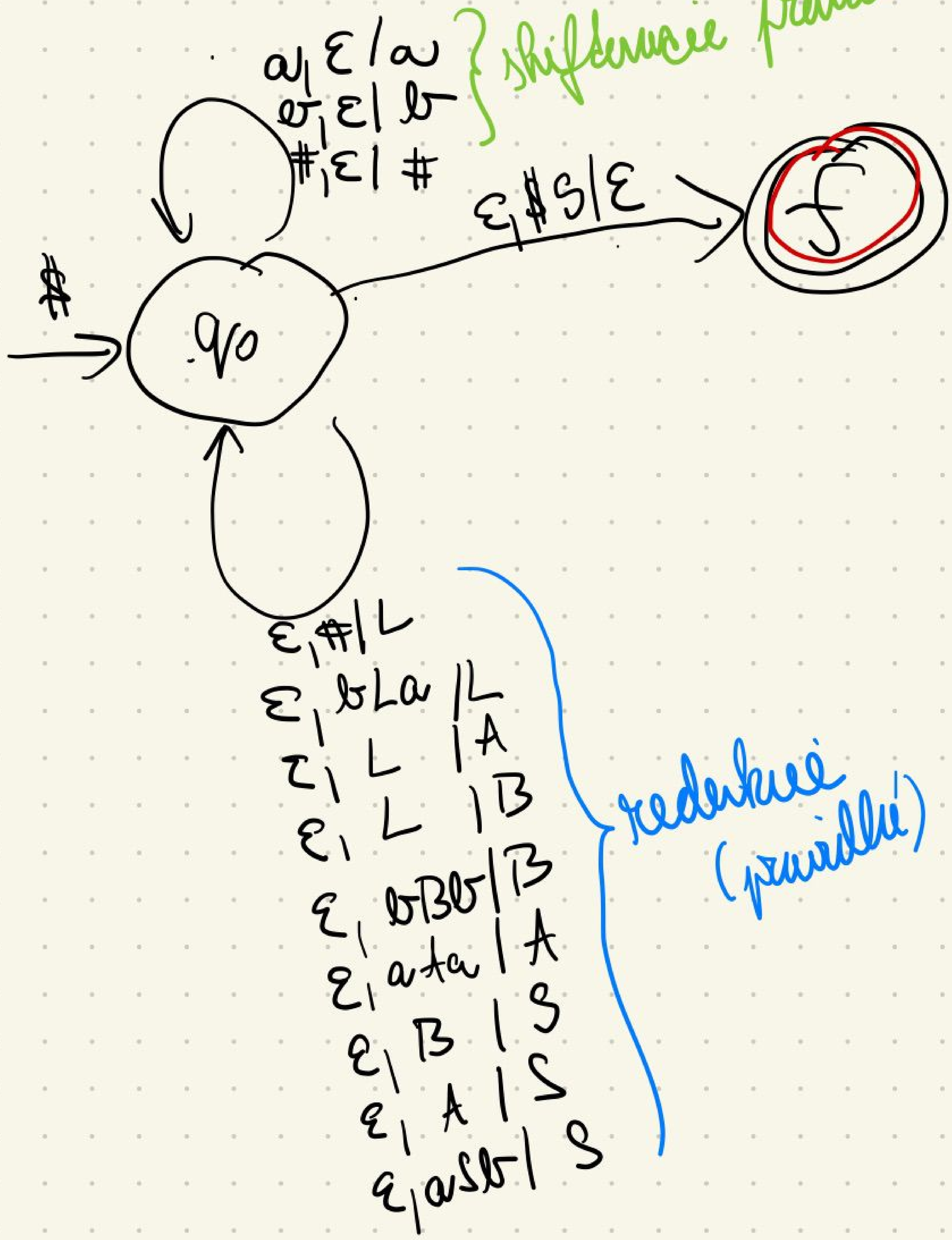
$$\delta(q_0, \varepsilon, aSb) = \{(q_0, S)\}$$

ACCEPT:

$$\delta(q_0, \varepsilon, \$S) = \{(f, \varepsilon)\}$$

$$P_2 = (\{q_0, f\}, \{a, b, \#\}, \{a, b, \#, \$\}, \delta, \$, \{f\})$$

Konštrukcia RZA



Verifikování RZA a BKG

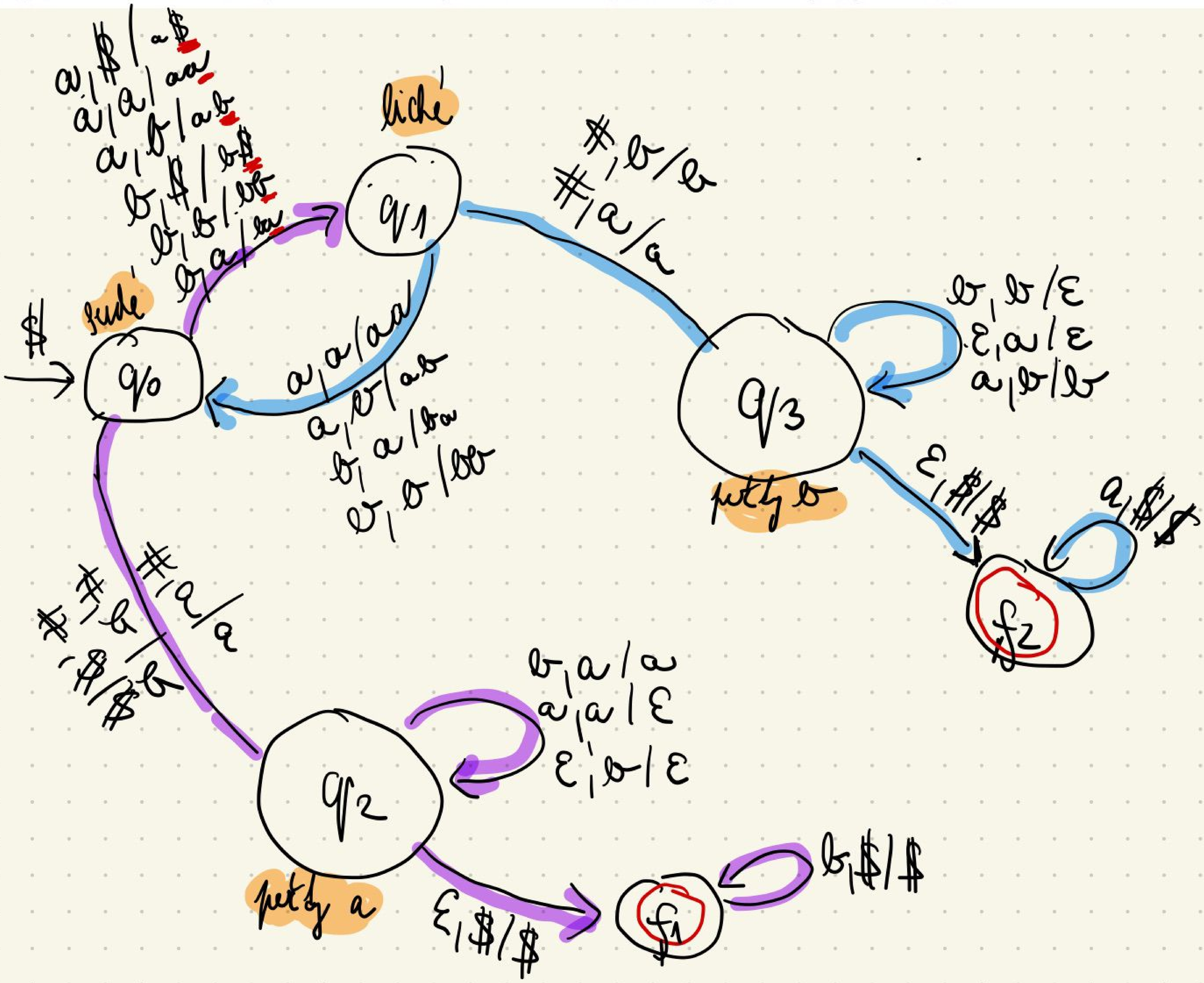
- generované / přijaté slová : $\#$; $a\#a$; $a\#b$; $bb\#ab$; $bb\#aa$; $aa\#ab$; $a^5\#b^5$; $a^2b^3\#a^5$; $a^5\#ab^4$; $a^2b^2\#a^3b$

- ne-generované / nepřijaté slová : ε ; $a\#$; $b\#$; $\$$; $\#a$; $a^2\#a$; $ba\#ab$; $ab\#\#ab$; $abab$

- všetko dopadlo s 100% úspešnosťou!

4. Mějme jazyk L_3 nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L_2 = \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b\}^* \wedge (|w_1| \bmod 2 = 0 \Rightarrow \#_a(w_2) = \#_a(w_1)) \wedge (|w_1| \bmod 2 = 1 \Rightarrow \#_b(w_2) = \#_b(w_1))\}$

Sestrojte deterministický zásobníkový automat P_3 takový, že $L(P_3) = L_3$. 10



δ:

$\delta(q_0, a, \$) = \{(q_1, a\$)\}$

$\delta(q_0, a, a) = \{(q_1, aa)\}$

$\delta(q_0, a, b) = \{(q_1, ab)\}$

$\delta(q_0, b, \$) = \{(q_1, b\$)\}$

$\delta(q_0, b, a) = \{(q_1, ba)\}$

$\delta(q_0, b, b) = \{(q_1, bb)\}$

$\delta(q_0, \#, \$) = \{q_2, \$)\}$

$\delta(q_0, \#, a) = \{(q_2, a)\}$

$\delta(q_0, \#, b) = \{(q_2, b)\}$

$\delta(q_1, a, a) = \{(q_0, aa)\}$

$\delta(q_1, a, b) = \{(q_0, ab)\}$

$\delta(q_1, b, a) = \{(q_0, ba)\}$

$\delta(q_1, b, b) = \{(q_0, bb)\}$

$\delta(q_1, \#, a) = \{(q_3, a)\}$

$\delta(q_1, \#, b) = \{(q_3, b)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, b) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, a, a) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, b, a) = \{(q_2, a)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, \$) = \{(f_1, \$)\}$ $\delta(f_1, b, \$) = \{(f_1, \$)\}$

$\delta(q_3, \varepsilon, a) = \{(q_3, \varepsilon)\}$ $\delta(f_2, a, \$) = \{(f_2, \$)\}$

$\delta(q_3, b, b) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

$\delta(q_3, a, b) = \{(q_3, b)\}$

$\delta(q_3, \varepsilon, \$) = \{(f_2, \$)\}$

$P_3 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, f_1, f_2\}, \{a, b, \#\}, \{a, b, \$\}, \delta, \$, \{f_1, f_2\})$

Verifikácia DZA

- vstupy: #, a#, aa#aa, ba#aa, #bbbb, aa#bbbabbba
- Rozumný vstup: $aa\#bbaab^{10}a$; $bbb\#bbba^{10}b$

kvôli týmto vstupom bolo nutné rozšíriť automat z 5 stavov na 6

⋮

(ďalších x vstupov bolo vyhodnotených na SW)

5. Uvažujme operaci $\circ$ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$. S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvraťte, následující vztahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

(b) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

(c) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

Všetky citácie sú z OPORY TIN 2020.

$\mathcal{L}_2^D$ značí třídu deterministických bezkontextových jazyků, $\mathcal{L}_2$ třídu bezkontextových jazyků a $\mathcal{L}_3$ třídu regulárních jazyků.

a)

Za $L_1 \circ L_2$ si dosadíme $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$. Výrok bude vyzerať nasledovne

$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$

Podľa Vety 3.23 z opory TIN (str. č. 50) sú regulárne jazyky uzavreté voči doplnku. Čiže $\overline{L_1}$ a rovnako $\overline{L_2}$ budú v $\mathcal{L}_3$.

Ďalej však podľa Vety 3.22 vieme, že operácia zjednotenia je uzavretá voči regulárnym jazykom. Čiže $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ bude v $\underline{\mathcal{L}_3}$.

Taktiež keďže platí podľa Vety 2.4, že každý regulárny jazyk alebo jazyk typu 3 je rovnako jazykom typu 2.

Využitím spomenutých viet a vzťahov môžeme tvrdiť, že nasledujúci vzťah je platný: (a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

(b) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

Za $L_1 \circ L_2$ si dosadíme $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$. Po dosadení bude výraz vyzerať nasledovne:

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$$

Podľa Vety 4.27 sú $\mathcal{L}_2^D$ uzavreté voči doplnku/komplementu. Čiže $\overline{L_1}$ a $\overline{L_2}$ jazyky budú v $\mathcal{L}_2^D$.

Zároveň operácia zjednotenia je voči $\mathcal{L}_2^D$ neuzavretá podľa vety 4.28.

Ale operácia zjednotenia je voči $\mathcal{L}_2$ uzavretá podľa vety 4.21 a týmto pádom zjednotením jazykov $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \underline{\mathcal{L}_2}$ dostaneme do $\underline{\mathcal{L}_2}$ triedy.

Využitím spomenutých viet a vzťahov môžeme tvrdiť, že nasledujúci vzťah je platný: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

(c) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

Za $L_1 \circ L_2$ si dosadíme $\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2$. Po dosadení bude výrok vyzerať nasledovne:

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L}_1 \cup \overline{L}_2 \in \mathcal{L}_2$$

Predpokladajme, že výrok je pravdivý.

Ak zoberieme v úvahu že L_1 a L_2 sú bezkontextové jazyky tak následne musí platiť $\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2 \in \mathcal{L}_2$.
Z vety 4.24 plynie, že doplnok ku jazykom typu 2 je neuzavretý. Nech napríklad $L_1 = \{a^k b^k c^l \mid k, l \geq 1\}$ a $L_2 = \{a^l b^k c^k \mid k, l \geq 1\}$ príklad použitý z vety 4.24.
Ak urobíme prienik týchto jazykov dostaneme jazyk $L_3 = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 1\}$ čo v žiadnom prípade nie je bezkontextový. Z De Morganových zákonov potom dostaneme neuzavretosť voči doplnku presne ako nám to hovorí veta 4.24. Z čoho nemôže platiť, že jazyky $\overline{L}_1$ a $\overline{L}_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow$ **SPOR**

Teda $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$ nie je pravdivé.