Teoretická informatika (TIN) – 2020/2021
Úkol 2
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Sestrojte a popište přechodovým diagramem jednopáskový TS, který pracuje tak, že pokud začne s konfigurací pásky $\underline{\Delta}x\Delta^\omega$ pro $x \in \{1\}.\{0,1\}^*$, pak po přechodu do koncového stavu bude obsah pásky $\underline{\Delta}y\Delta^\omega$, kde $y \in \{1\}^+$ a x je zakódování délky řetězce y, tedy $|y|$, v binární soustavě (s nejdůležitějším bitem vlevo). Tedy, pokud TS začne s konfigurací pásky $\underline{\Delta}110\Delta^\omega$, pak po skončení by konfigurace pásky měla vypadat takto: $\underline{\Delta}111111\Delta^\omega$.

   10 bodů

2. Uvažujte jazyk $L_{(M=A)} = \{\langle M\rangle\#\langle A\rangle : M \text{ je TS}, A \text{ je NKA}, L(M) = L(A)\}$ nad abecedou $\{0,1\}$ (předpokládejte, že každý NKA A lze zakódovat do binárního řetězce $\langle A\rangle$ podobným způsobem jako TS). Rozhodněte a dokažte, zda jazyk $L_{(M=A)}$ (a) je rozhodnutelný, (b) je nerozhodnutelný, ale částečně rozhodnutelný, (c) není ani částečně rozhodnutelný. Pro důkaz použijte redukci.

   15 bodů

3. Operátor paralelní kompozice (tzv. *shuffle*) $|| : \Sigma^* \times \Sigma^* \to 2^{\Sigma^*}$ je definován induktivně tak, že

   $$w \,||\, \epsilon = \epsilon \,||\, w = \{w\} \qquad \text{a} \qquad aw_1 \,||\, bw_2 = \{a\} \cdot (w_1 \,||\, bw_2) \cup \{b\} \cdot (aw_1 \,||\, w_2).$$

   Operátor je rozšířen na jazyky následujícím způsobem: $L_1 \,||\, L_2 = \bigcup\{w_1 \,||\, w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$. Například $\{aa\}||\{bb\} = \{aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa\}$. Dokažte, že množina rekurzivně vyčíslitelných jazyků je uzavřena na $||$.

   15 bodů

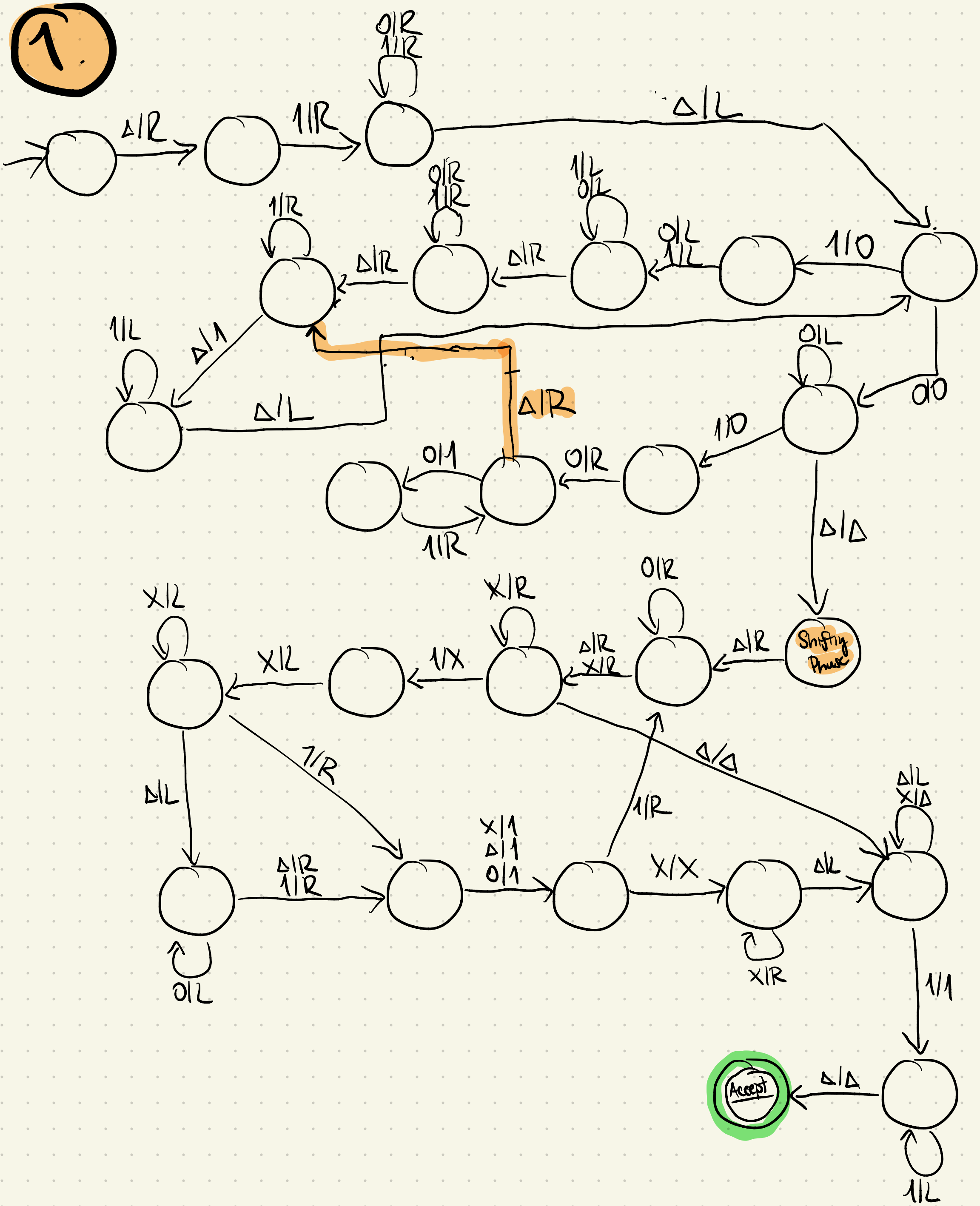
4. Uvažujte množinu *Expr* všech výrazů reprezentovaných větami generovanými z neterminálu E gramatikou s následujícími pravidly:

   $$E \to 1 \mid 1 + F$$
   $$F \to 0 \mid 1 \mid F + F$$

   Dokažte pomocí diagonalizace, že množina všech podmnožin *Expr* je nespočetná.

   10 bodů

1.



Δ|R
1|R
0|R
1|R
Δ|L
1|0
0|L
1|L
1|L
0|L
Δ|R
0|R
1|R
Δ|R
1|R
Δ|1
1|L
Δ|L
0|L
0|0
1|0
0|R
0|1
1|R
Δ|R
Δ|Δ
Shifting Phase
Δ|R
0|R
Δ|R
X|R
X|R
1|X
X|L
X|L
Δ|Δ
1|R
Δ|L
Δ|R
1|R
X|1
Δ|1
0|1
1|R
X|X
Δ|L
Δ|L
X|Δ
0|L
X|R
1|1
Δ|Δ
Accept
1|L

2.

$L_{(M=A)} = \{\langle M\rangle\#\langle A\rangle : M \text{ je TS}, A \text{ je NKA}, L(M) = L(A)\}$

- jazyk $L_{(M=A)}$ nie je ani čiastočne rozhodnuteľný a teda $L_{(M=A)} \notin RE$
- dokážeme to pomocou redukcie na problém co-HP

Dôkaz idea:

- co-HP budeme reprezentovať jazykom
  co-HP = { <M>#<w> | M je TS, ktorý na w nezastaví }
- navrhneme redukciu z co-HP, teda
  $G: \{0,1,\#\}^* \longrightarrow \{0,1,\#\}^*$
- G priradí vstupu $x \in \{0,1\#\}^*$ kód $\langle M_x\rangle\#\langle A_x\rangle$

kde M_x je TS a A_x je predpripravený NKA ktorý akceptuje nejaký regulárny jazyk napr.: Σ^* a M_x na vstupe $z \in \{0,1,\#\}^*$ pracuje nasledovne:

1. zmaže vstup a zapíše tam x
2. overí, či x má správnu štruktúru
   pokiaľ nie, odmietame.
3. Inak bude $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ a M_x odsimuluje beh M na w. Pokiaľ cyklí, tak cyklí.
4. Pokiaľ simulácia dobehne, odmietne

- je jasné, že vieme navrhnúť TS M_G implementujúci G

co-HP		$L(M=A)$
ANO (M na w nezastaví)	$\rightarrow$	ANO ($L(M) = \Sigma^* == L(A) = \Sigma^*$)
NE (M na w zastaví)		Ne ($L(M) = \emptyset \; != L(A) = \Sigma^*$)

- **redukcie členstva:**

a) $L(M_x) = \emptyset \iff x$ nemá štruktúru $\langle M\rangle\#\langle w\rangle$, alebo M na w zastaví

b) $L(M_x) = \Sigma^* \iff x = \langle M\rangle\#\langle w\rangle$, kde TS M na w nezastaví/cyklí.

- teda $\forall x \in \{0,1,\#\}^* : G(x) = \langle M_x\rangle\#\langle A_x\rangle$ kde $L(M)=\Sigma^* \wedge L(A)=\Sigma^* \iff x = \langle M\rangle\#\langle w\rangle$, kde TS M na w nezastaví/cyklí $\iff$ $x \in$ co-HP

$\square$

3.

Dôkaz:

- využijeme uzáverových vlastností
- keďže vieme, že shuffle pozostáva z operácií zjednotenia (∪) a konkatenácie (·) tak na to môžeme aplikovať uzáverové vlastnosti
- zároveň vieme ak chceme dokázať že množina RE jazykov je uzavretá voči operácii shuffle (||) platí že:

  $\forall L_1, L_2 \in \Sigma^*; \exists TS\ M; L_1 \| L_2 = L(M)$
- z uzáverových vlastností vieme podľa vety 5.6.1, že trieda RE jazykov je uzavretá voči operáciám ∪, ·.
- zároveň podľa 5.6.1 vieme, že vieme skonštruovať TS M pre ∪, · operácie
- čím som dokázal, že RE jazyky sú voči operácii || uzavreté.

4.

4. Uvažujte množinu $Expr$ všech výrazů reprezentovaných větami generovanými z neterminálu E gramatiko s následujícími pravidly:

$$E \to 1 \mid 1 + F$$
$$F \to 0 \mid 1 \mid F + F$$

Dokažte pomocí diagonalizace, že množina všech podmnožin $Expr$ je nespočetná.

10 bod

- $Expr = \{1; 1+0; 1+1; 1+1+0; 1+0+1 \ldots\}$
- $2^{Expr} = \{\{1\}; \{1+0\}; \{1+1\}; \{1+1+0\}; \{1+0+1\}, \{1, 1+0\}; \{1, 1+1\} \ldots\}$

• Důkaz pomocou diagonalizácie:

1. Predpokladajme, že 2^{Expr} je spočetná. Potom podľa definície existuje bijekcia $f: \mathbb{N} \to 2^{Expr}$

2. Usporiadame Expr do nejakej postupnosti $w_1, w_2, w_3 \ldots$ napríklad: $1, 1+0, 1+1, 1+0+0, 1+0+1 \ldots$ pre $\Sigma = \{1, 0, +\}$. Teda môžme f zobraziť pomocou nekonečnej matice

	w_0	w_1	w_2	$\ldots$	w_i	$\ldots$
$L_{G0} = f(0)$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\ldots$	a_{0i}	$\ldots$
$L_{G1} = f(1)$	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1i}	$\ldots$
$L_{G2} = f(2)$	a_{20}	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2i}	$\ldots$

$\ldots$

• kde $a_{ij} = \begin{cases} 0; \text{ ak } w_j \notin L_{Gi} \\ 1; \text{ ak } w_j \in L_{Gi} \end{cases}$

3. Určíme jazyk $\overline{L}_G = \{ w_i \mid a_{ii} = 0 \}$. $\overline{L}$ sa líši od každého jazyka $L_{Gi} = f(i); i \in \mathbb{N}$:

   - ak je $a_{ii} = 0$, potom $w_i \in L_{Gi}$
   - ak je $a_{ii} = 1$, potom $w_i \notin L_{Gi}$

4. Zároveň však $\overline{L}_G \in 2^{Expr}$, f je teda surjektívne, čo je **SPOR** $\square$