Bonusuppgift 2 till MM5010

John Möller

Contents

1 Uppgifter

Uppgift 1.1 (Uppgift 1)**.** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$a)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-x^2y^2+y^2}{x^2+x^2y^2+y^2},\quad b)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6-x^2y^2+y^6}{x^6+x^2y^2+y^6}.$$

Lösning 1.1.1 (Uppgift 1)**. a)** Låt oss göra variabelbytet $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ och så kan vi betrakta det nya gränsvädet:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2-x^2y^2}{x^2+y^2+x^2y^2} &= \lim_{r\to 0}\frac{r^2-r^2\cos^2(\theta)r^2\sin^2(\theta)}{r^2-r^2\cos^2(\theta)r^2\sin^2(\theta)}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1-r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{1+r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Alltså existerar gränsvärdet i uppgift a), och är likamed 1.
b) Låt oss betrakta gränsvärdet från horisontella hållet, d.v.s. $x \to 0$ då $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6-x^2y^2+y^6}{x^6+x^2y^2+y^6} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^6} = 1.$$

Men om vi istället kollar på det diagonala gränsvärdet som fås vid variabelbytet $x = t$, $y = t$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^6-t^4+t^6}{t^6+t^4+t^6} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2-1+t^2}{t^2+1+t^2} = -1.$$

Alltså så finns det olika gränsvärden från olika håll och **därmed existerar inte gränsvärdet i uppgift b).**

Uppgift 1.2 (Uppgift 2)**.** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$a)\lim_{x^2+y^2\to\infty}\frac{x^2-x^2y^2+y^2}{x^2+x^2y^2+y^2},\quad b)\lim_{(x,y)\to\infty}\frac{x^6-x^2y^2+y^6}{x^6+x^2y^2+y^6}.$$

Lösning 1.2.1 (Uppgift 2)**. a)** Låt oss betrakta gränsvärdet då vi fixerar $y = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2y^2+y^2}{x^2+x^2y^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Men om vi betraktar gränsvärdet från diagonalen $x = y = t$ så får vi:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-t^4+t^2}{t^2+t^4t^2} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t^2}-1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+1+\frac{1}{t^2}} = -1.$$

Gränsvärdet i uppgift a), existerar därmed inte.
b) Låt oss gå över till polära koordinater (alla vinklar till de trigonmetriska funktionerna är lika, så vi skriver inte ut dem):

.

$\cos^6 + \sin^6$ är alltid större än noll eftersom cos och sin är aldrig båda noll för samma vinkel, och upphöjt till 6 är samma sak som beloppet upphöjt till 6.
Gränsvärdet i uppgift b) existerar därmed, och är likamed 1.

Uppgift 1.3 (Uppgift 3). Avgör om den funktion som definieras genom $f(x, y) = \dfrac{x^2y + 2y^3}{x^2 + y^2}$, för $(x, y) \neq (0, 0)$, och är 0 i origo, är a) kontinuerlig i origo, b) har partiella förstaderivator i origo, c) är differentierbar i origo, d) är av klass C^1 i någon omgivning till origo.

Lösning 1.3.1 (Uppgift 3). Låt oss gå över till polära koordinater (om en trigonometrisk funktion inte skrivs med argument så är det automatiskt θ):

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) &= \lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\sin^2 + 2\sin^3}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r\cos^2\sin^2 + \frac{2\sin^3}{r^2}\end{aligned}$$

.

Om vi väljer vinkeln så att cos, sin > 0 då kommer gränsvärdet gå mot oändligheten, men om vi väljer så att $\sin(\theta) = 0$ då kommer gränsvärdet vara noll. Så gränsvärdet saknas vid $(0, 0)$, men har ett definerat värde där, **så svaret till a) är att funktionen inte är kontinuerlig i origo.**
b) Funktionen längs y-axeln är ju envariabel funktionen som fås när vi låter $x = 0$:

$$f(0, y) = \frac{2y^3}{y^2}.$$

Om vi kontinuerligt förlänger funktionen så får vi att

$$f(0, y) = 2y.$$

Som har definerad derivata.
Om vi gör samma sak för x-axeln så får vi:

$$f(x, 0) = 0.$$

Som också har definerad derivata.
Därmed så är svaret till b), att ja, funktionen har partiella förstaderivator i origo.
c) För att f ska vara differentierbar i $(0, 0)$, så måste den också vara kontinuerlig där, som den inte är.
Därmed är svaret till c) att nej, den är inte differentierbar i origo.

Uppgift 1.4 (Uppgift 4)**.** Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen

$$2y\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - f = 0,$$

som uppfyller bivillkoret $f(x,0) = x^4$, t ex genom att införa de nya variablerna $u = x + y^2, v = y$.

Lösning 1.4.1 (Uppgift 4)**.** Låt oss utföra det rekommenderade variabelbytet och om vi använder kedjeregeln så får vi följande partiella derivator:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Om vi substituerar dessa i den ursprungliga ekvationen så får vi som följande:

$$\begin{aligned} & f + \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ \implies & e^v f + e^v \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ \implies & \frac{\partial}{\partial v}[e^v f] = 0 \\ \implies & e^v f = C(u) \\ \implies & f = \frac{C(u)}{e^v} \\ \implies & f(x,y) = \frac{C(x+y^2)}{e^y}, \end{aligned}$$

där $C(u)$ är en funktionen av enbart u. Om vi sätter in bivilkoret då får vi:

$$\begin{aligned} x^4 &= \frac{C(x+0)}{e^0} \\ \implies C(x) &= -x^4. \end{aligned}$$

Alltså är den sökta funktionen:

$$f(x,y) = \frac{-x^4}{e^y}.$$

Uppgift 1.5 (Uppgift 5)**.** Bestäm den allmänna lösningen till den partiella differentialekvationen

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial f}{\partial x} - 8f = 0,$$

i området $x, y > 0$, t ex genom att införa de nya variablerna $u = x^2 y, v = \ln y$.

Lösning 1.5.1 (Uppgift 5)**.** Låt oss utföra det rekomenderade variabelbytet och använda kedjeregeln för att få de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} 2xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} x^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{1}{y}.$$

För andraderivatorna så får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} 2xy + \frac{\partial f}{\partial u} 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x} \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 0.$$