# ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

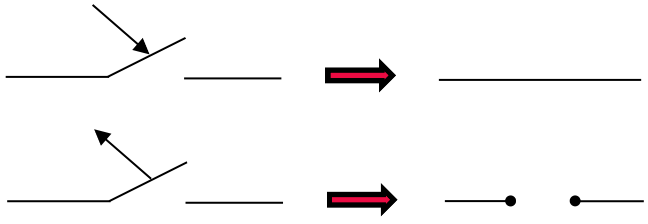
## Расчет переходных процессов в цепях первого порядка


**Никитина Мария Владимировна**
**mvnikitina@itmo.ru**


**Санкт-Петербург, 2025**

# Алгоритм расчета классическим методом

1. Составить цепь, сложившуюся после коммутации. Цепь формируется из исходной путем замены



Используя законы Ома, Кирхгофа, электромагнитной индукции и т.д. составить систему дифференциальных уравнений. Исключением переменных свести систему к ***неоднородному*** дифференциальному уравнению (относительно $i_L$ либо $u_C$) вида

$$B_0\frac{d^n a}{dt^n}+B_1\frac{d^{n-1}a}{dt^{n-1}}+\ldots+B_{n-1}\frac{da}{dt}+B_n a=C$$

# Алгоритм расчета классическим методом

2. Решить ***неоднородное*** дифференциальное уравнение, т.е. определить $i_L$ либо $u_C$

Решение уравнения ищут в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения $a = a_{\text{уст}} + a_{\text{св}}$

Частное решение $a_{\text{уст}}$ определяют, используя методы расчёта цепей в установившемся режиме.

Общее решение уравнения $a_{\text{св}}$ определяется путем решения ***однородного*** уравнения

$$B_0 \frac{d^n a}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} a}{dt^{n-1}} + \ldots + B_{n-1} \frac{da}{dt} + B_n a = 0$$

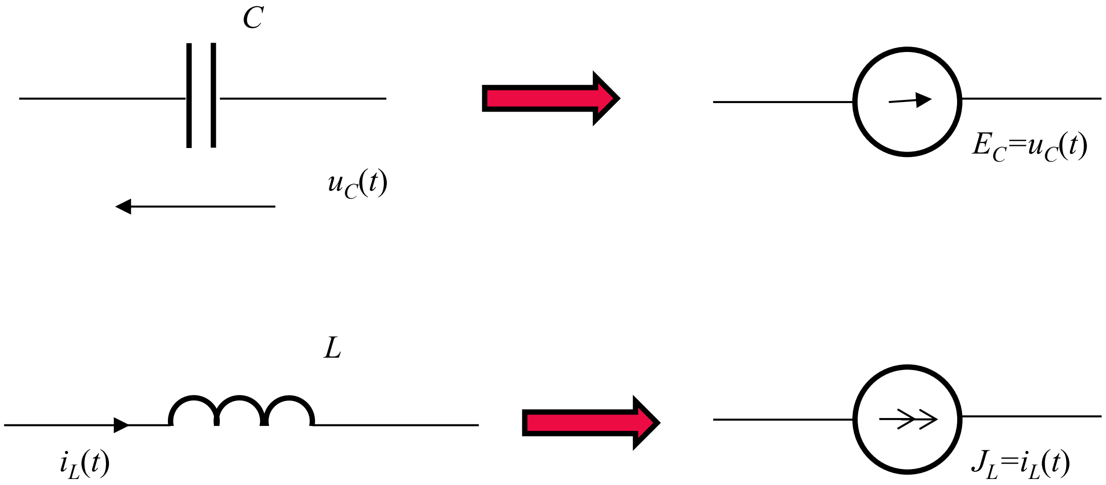
и представляет собой

$$a_{\text{св}} = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}$$

где $p_k$ – $k$-ый корень характеристического уравнения, составленного путем замены в ***однородном*** уравнении производных на $p^k$, $k$ – порядок соответствующей производной.

# Алгоритм расчета классическим методом

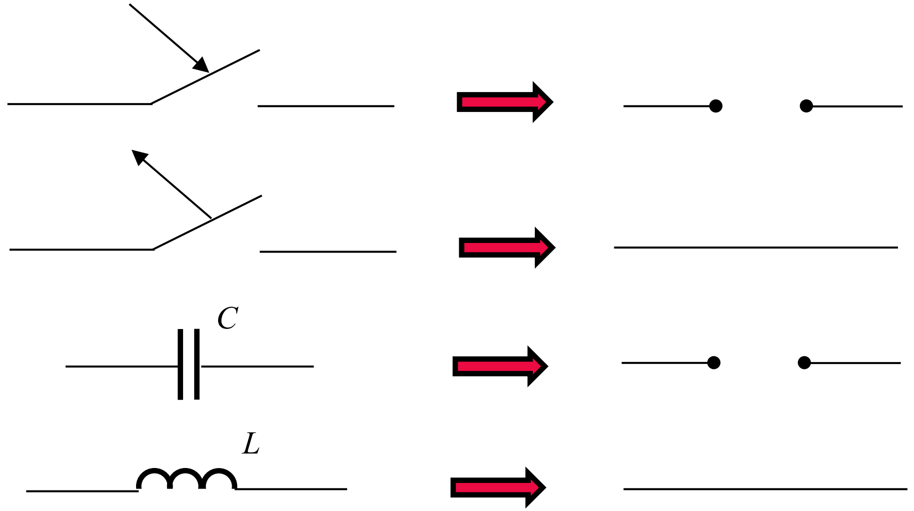
3. Для отыскания иных (кроме найденной) величин в цепи, сложившейся после коммутации, заменяют




и используя законы Ома, Кирхгофа, электромагнитной индукции и т.д. определяют требуемые токи и напряжения.

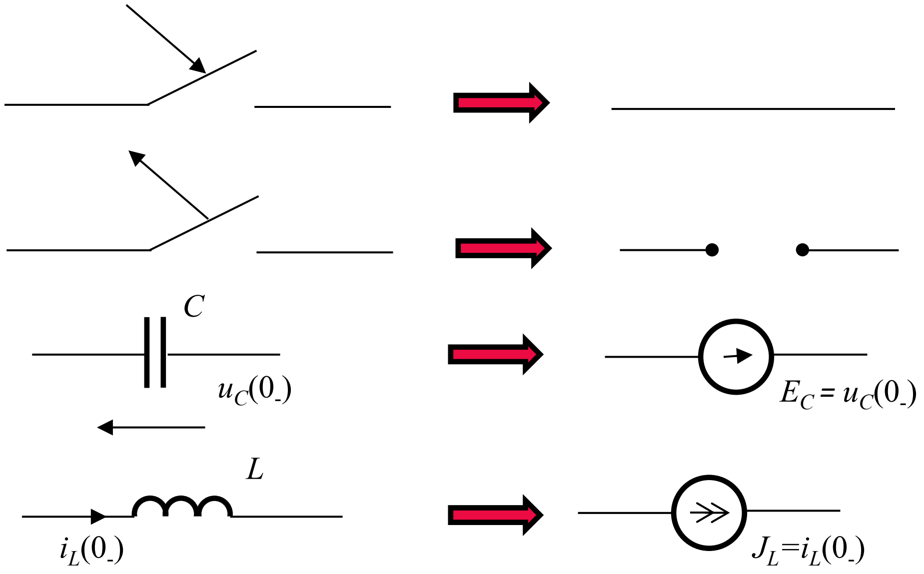
# Алгоритм расчета *упрощенным* классическим методом

1. Составить цепь, сложившуюся **ДО** коммутации и определить значения токов через индуктивные элементы $i_L(0_-)$ и значения напряжений на емкостных элементах $u_C(0_-)$. Цепь формируется из исходной путем замены



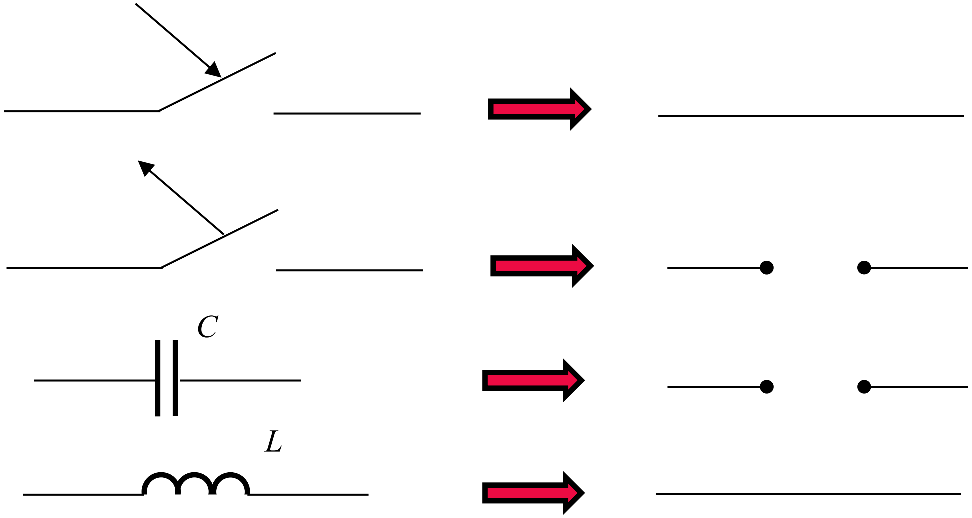
# Алгоритм расчета *упрощенным* классическим методом

2. Составить цепь, сложившуюся **В МОМЕНТ** коммутации и определить значения требуемых величин $x(0)$. Цепь формируется из исходной путем замены



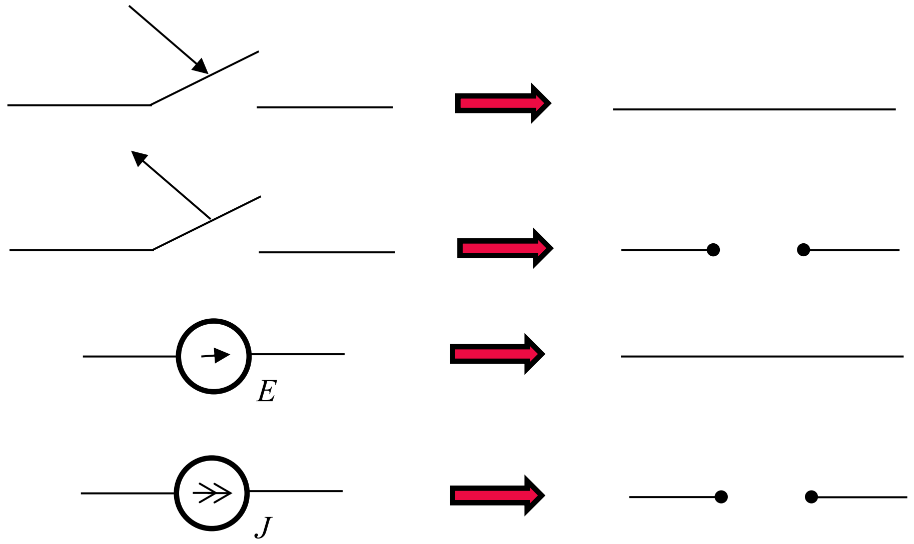
# Алгоритм расчета *упрощенным* классическим методом

3. Составить цепь, сложившуюся **ПОСЛЕ** коммутации и определить значения требуемых величин $x(\infty)$. Цепь формируется из исходной путем замены



# Алгоритм расчета *упрощенным* классическим методом

4. Составить пассивную цепь и определить постоянную времени цепи ($\tau$) как $\tau = L/R_э$ или $\tau = CR_э$, где $R_э$ – эквивалентное сопротивление относительно $L$ или $C$. Цепь формируется из исходной путем замены



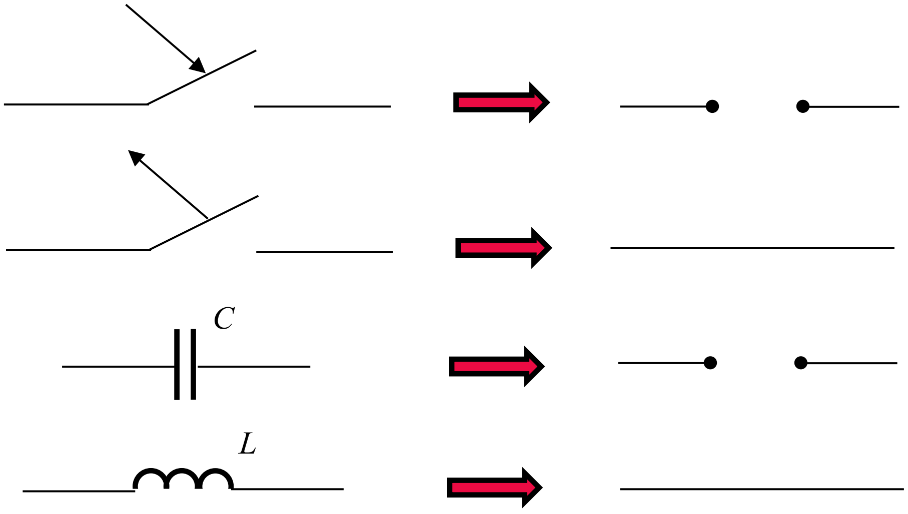
# Алгоритм расчета *упрощенным* классическим методом

5. Определить мгновенные значения требуемых величин.

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$

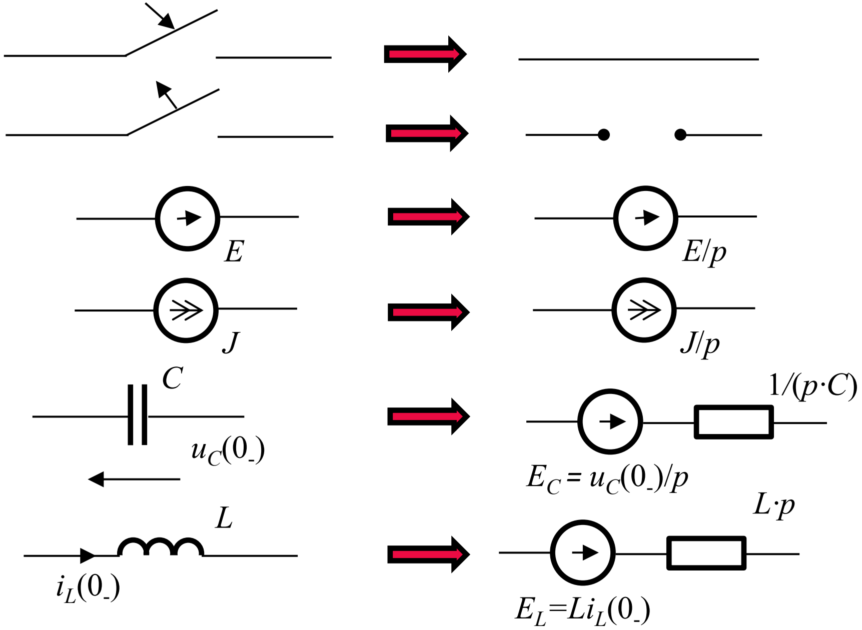
# Алгоритм расчета операторным методом

1. Составить цепь, сложившуюся **ДО** коммутации и определить значения токов через индуктивные элементы $i_L(0_-)$ и значения напряжений на емкостных элементах $u_C(0_-)$. Цепь формируется из исходной путем замены



# Алгоритм расчета операторным методом

2. Составить операторную схему замещения и определить операторные изображения $X(p)$ требуемых токов и напряжений. Цепь формируется из исходной путем замены



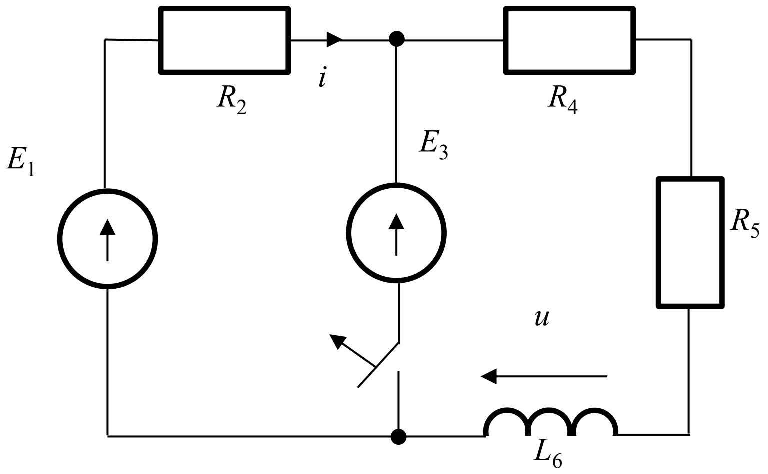
# Алгоритм расчета операторным методом

3. Перейти от операторных изображений к мгновенным значениям величин, т.е. $X(p) \rightarrow x(t)$.

$$x(t) = X(p) \cdot (p - p_1) \cdot e^{p_1 t}|_{p=p_1} +$$
$$+ X(p) \cdot (p - p_2) \cdot e^{p_2 t}|_{p=p_2} + \ldots + X(p) \cdot (p - p_n) \cdot e^{p_n t}|_{p=p_n}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ корни знаменателя $X(p)$.

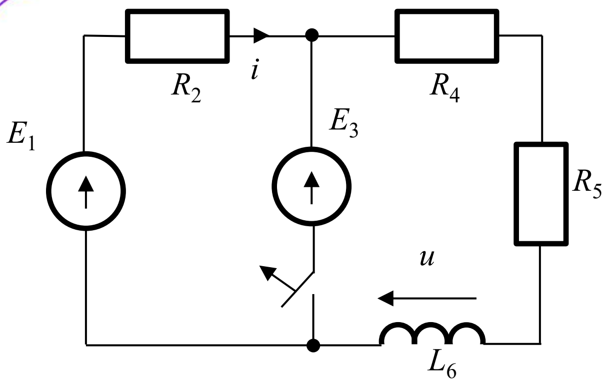
# Пример

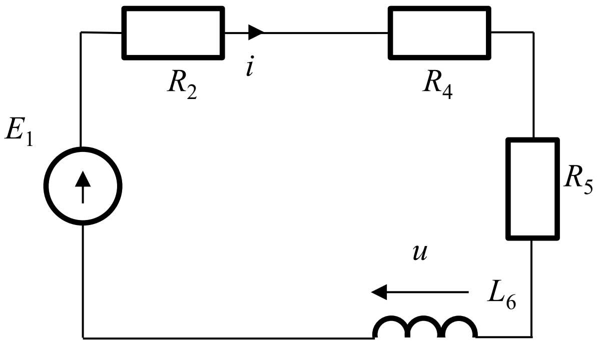



**Дано**: $E=E_1=E_3=90$ [В],
$R=R_2=R_4=R_5=30$ [Ом],
$L=L_6=15$ [мГн].

**Найти**: $i$, $u$ классическим и операторным методами расчета; построить найденные величины на интервале времени [-τ;4τ].

# Пример




**Решение:**

**I.1 Классический метод**

1) Составление диф. ур-ния

По ЗКII: $u_{R2}+u_{R4}+u_{R5}+u=E_1$ или

$$R_2\cdot i+R_4\cdot i+R_5\cdot i+L_6(di/dt)=E_1$$

$$(R_2+R_4+R_5)\cdot i+L_6(di/dt)=E_1$$

$$3\cdot R\cdot i+L(di/dt)=E$$

2) Решение диф. ур-ния ищем как

$$i=i_{уст}+i_{св}$$

$i_{уст}$: $\quad 3\cdot R\cdot i_{уст}+L(di_{уст}/dt)=E$

$$3\cdot R\cdot i_{уст}+L\cdot 0=E$$

$$i_{уст}=E/(3\cdot R)=90/(3\cdot 30)=1\ [А]$$

# Пример

$i_{св}$: $3\cdot R\cdot i_{св} + L(di_{св}/dt)=0$ – однородное диф.ур-ние

$3\cdot R + L\cdot p=0$ – характеристическое уравнение

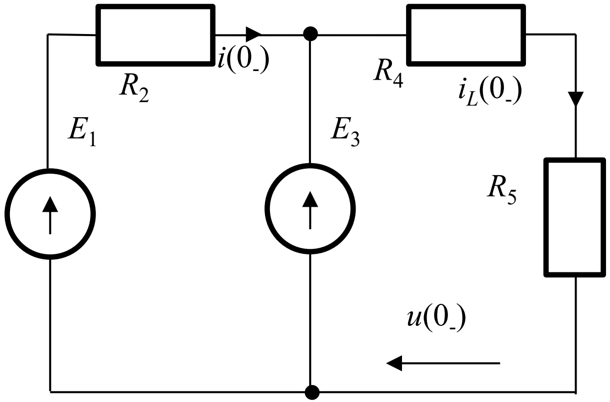
$p = -3\cdot R/L = -3\cdot 30/(15\cdot 10^{-3}) = -6000$ [1/с] – корень хар-го ур-я

$$i_{св} = A\cdot e^{pt} = A\cdot e^{-3\cdot R\cdot t/L} = A\cdot e^{-6000t}$$

$i(0)=i_L(0)=i_L(0_-)$:

По ЗКII для правого контура $(R_4+R_5)\cdot i_L(0_-)=E_3$

$i_L(0_-)=E_3/(R_4+R_5)=E/(2\cdot R)=90/(2\cdot 30)=1{,}5$ [A].



# Пример

$A$: $i = i_{уст} + i_{св} = E/(3 \cdot R) + A \cdot e^{-3 \cdot R \cdot t/L}$ и $i(0) = i_L(0) = i_L(0_-) = E/(2 \cdot R)$

тогда $i(0) = E/(3 \cdot R) + A \cdot e^{-3 \cdot R \cdot \mathbf{0}/L} \quad \rightarrow \quad E/(2 \cdot R) = E/(3 \cdot R) + A$ или

$$A = E/(2 \cdot R) - E/(3 \cdot R) = E/(6 \cdot R) = 90/(6 \cdot 30) = 0{,}5 \text{ [A]}$$

Окончательно $i = i_{уст} + i_{св} = E/(3 \cdot R) + E/(6 \cdot R) \cdot e^{-3 \cdot R \cdot t/L} =$

$$= 90/(3 \cdot 30) + 90/(6 \cdot 30) \cdot e^{-3 \cdot 30 \cdot t/0{,}015} = 1 + 0{,}5 \cdot e^{-6000 \cdot t} \text{ [A]}$$

3. Определение $u$

По ЗКН: $u + (R_2 + R_4 + R_5)i = E_1$

$u = E_1 - (R_2 + R_4 + R_5)i = E - 3 \cdot R \cdot i = E - 3 \cdot R \cdot [E/(3 \cdot R) + E/(6 \cdot R) \cdot e^{-3 \cdot R \cdot t/L}] =$

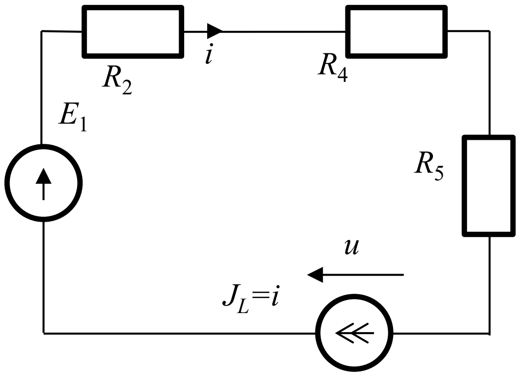
$= E - E - E/2 \cdot e^{-3 \cdot R \cdot t/L} = -E/2 \cdot e^{-3 \cdot R \cdot t/L} = -90/2 \cdot e^{-3 \cdot 30 \cdot t/0{,}015} =$

$= -45 \cdot e^{-6000 \cdot t}$ [В]

Величина $u$ так же может быть определена как

$u = L(di/dt) = L \cdot E/(6 \cdot R) \cdot e^{-3 \cdot R \cdot t/L} \cdot (-3 \cdot R/L) = -E/2 \cdot e^{-3 \cdot R \cdot t/L} =$

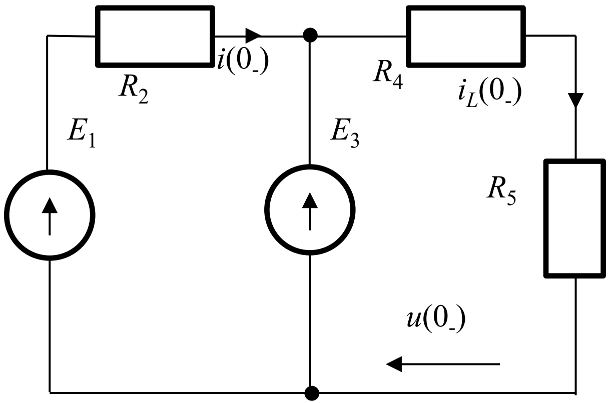
$= -90/2 \cdot e^{-3 \cdot 30 \cdot t/0{,}015} = -45 \cdot e^{-6000 \cdot t}$ [В].



# Пример

## I.2 Классический (упрощенный) метод

1. $t$<0




По ЗКII для левого контура

$R_2 i(0_-)=E_1-E_3$

$Ri(0_-)=E-E \rightarrow i(0_-)=0$ [А]

По ЗКII для правого контура

$(R_4+R_5)i_L(0_-)=E_3$

$2Ri_L(0_-)=E \rightarrow i_L(0_-)=E/(2R)=$

$=90/(2\cdot 30)=1{,}5$ [А]

Поскольку индуктивный элемент заменяется проводником, то $u(0\text{-})=0$ [В].

# Пример

2. $t$=0

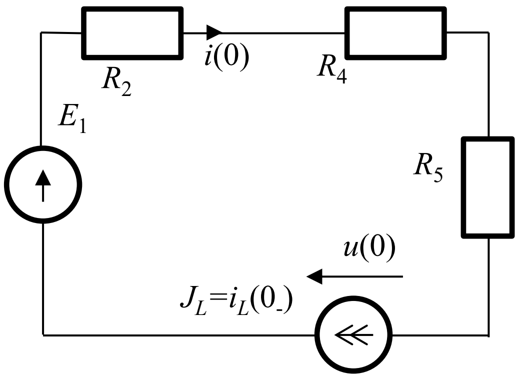
$i(0_-)=J_L= E/(2R)=90/(2\cdot30)=1{,}5$ [А]

По ЗКII:

$u(0) + (R_2+R_4+R_5)i(0) = E_1$

$u(0)=E_1 - (R_2+R_4+R_5)i(0)= E-3\cdot R\cdot i(0)=E-3\cdot R\cdot E/(2R)= -E/2=$

$= -90/2= -45$ [В]



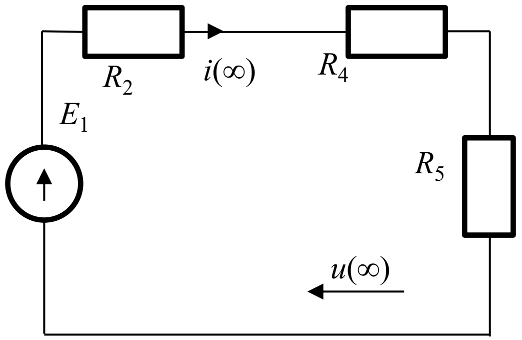

3. $t$>0

Поскольку индуктивный элемент заменяется проводником,

то $u(\infty)=0$ [В].

По ЗКII: $(R_2+R_4+R_5)i(\infty) = E_1$

$i(\infty)=E_1/(R_2+R_4+R_5)= E/(3R) = 90/(3\cdot30)=1$ [А]



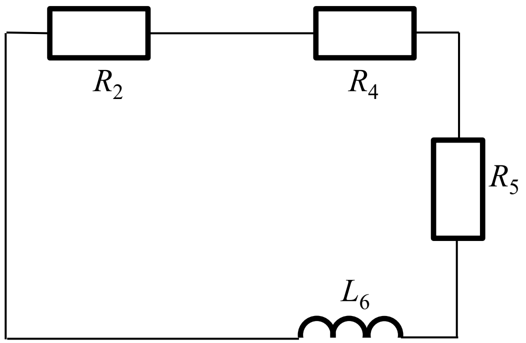
# Пример

4. τ - ?

$R_{экв}=R_2+R_4+R_5=3R=3\cdot30= 90$ [Ом]

Тогда $\tau = L_6/R_{экв} = L/(3R) = 15\cdot10^{-3}/(3\cdot30) = 10^{-3}/6$ [с]

$d = 1/\tau = 1/(10^{-3}/6) = 6000$ [1/с]




5. $x(t)$ - ?

$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]\cdot e^{-t/\tau}$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]\cdot e^{-t/\tau} = E/(3R) + [E/(2R) - E/(3R)]\cdot e^{-d\cdot t} = E/(3R) + E/(6R)\cdot e^{-d\cdot t} =$$
$$= 90/(3\cdot30)+90/(6\cdot30)\cdot e^{-6000\cdot t} = 1+0{,}5\cdot e^{-6000\cdot t} \text{ [A]}$$

$$u(t) = u(\infty) + [u(0) - u(\infty)]\cdot e^{-t/\tau} = 0 + [-E/2 - 0]\cdot e^{-d\cdot t} = -E/2 \cdot e^{-d\cdot t} = -90/2\cdot e^{-6000\cdot t} = -45\cdot e^{-6000\cdot t} \text{ [B]}$$

# Пример

## II. Операторный метод

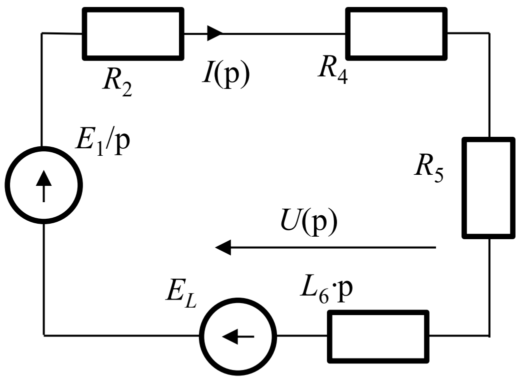
1. $i_L(0_-)=E/(2R)=90/(2\cdot 30)=1{,}5$ [A] (см. классический метод)

2. $E_L=L_6\cdot i_L(0_-)=E\cdot L/(2R)$

По ЗКII: $(R_2+R_4+R_5+L_6\cdot \mathrm{p})\cdot I(\mathrm{p})=E_1/\mathrm{p}+E_L$

$I(\mathrm{p})=(E_1/\mathrm{p}+E_L)/(R_2+R_4+R_5+L_6\cdot \mathrm{p})$

$I(\mathrm{p})=(E/\mathrm{p}+E\cdot L/(2R))/(3R+L\mathrm{p})=\dfrac{E(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}$




По обобщённому ЗО: $U(\mathrm{p})=L_6\mathrm{p}I(\mathrm{p})-E_L=$

$$=\frac{LpE(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}-\frac{EL}{2R}=\frac{-ERL}{2R(3R+Lp)}=\frac{-EL}{2(3R+Lp)}$$

# Пример

3. $x(t)$ - ?

$$x(t) = X(p)\cdot(p-p_1)\cdot e^{p_1 t}\big|_{p=p_1} +$$
$$+ X(p)\cdot(p-p_2)\cdot e^{p_2 t}\big|_{p=p_2} + \ldots + X(p)\cdot(p-p_n)\cdot e^{p_n t}\big|_{p=p_n}$$

$$i(t) = \frac{E(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}(p-0)\cdot e^{p_1 t}\big|_{p=0} + \frac{E(2R+Lp)}{2Rp(3R+Lp)}\left(p-\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)\cdot e^{p_2 t}\big|_{p=-\frac{3R}{L}} =$$

$$= \frac{E(2R+L\cdot 0)}{2Rp(3R+L\cdot 0)}(p-0)\cdot e^{0\cdot t} + \frac{E\left(2R+L\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)}{2R\left(-\frac{3R}{L}\right)(3R+Lp)}\left(p+\frac{3R}{L}\right)\cdot e^{-\frac{3R}{L}\cdot t} = \frac{E}{3R} + \frac{E}{6R}\cdot e^{-\frac{3R}{L}\cdot t} =$$

$$= 90/(3\cdot 30) + 90/(6\cdot 30)\cdot e^{-3\cdot 30\cdot t/0{,}015} = 1 + 0{,}5\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{A}]$$

$$u(t) = \frac{-EL}{2(3R+Lp)}\left(p-\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)\cdot e^{p_1 t}\big|_{p=-\frac{3R}{L}} = \frac{-EL}{2\left(3R+L\left(-\frac{3R}{L}\right)\right)}\left(p+\frac{3R}{L}\right)\cdot e^{-\frac{3R}{L}\cdot t} = \frac{-E}{2}e^{-\frac{3R}{L}\cdot t} =$$

$$= -90/2\cdot e^{-3\cdot 30\cdot t/0{,}015} = -45\cdot e^{-6000\cdot t}\ [\text{B}]$$

# Пример

## III. Графики

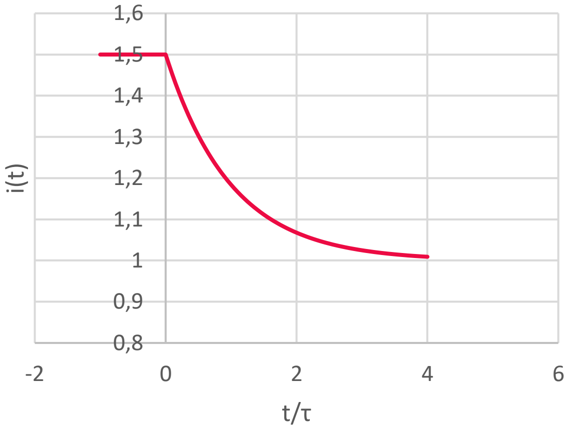
$$x(t)=\begin{cases} x(0_-) \text{ если } t < 0 \\ x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ если } t \geq 0 \end{cases}$$

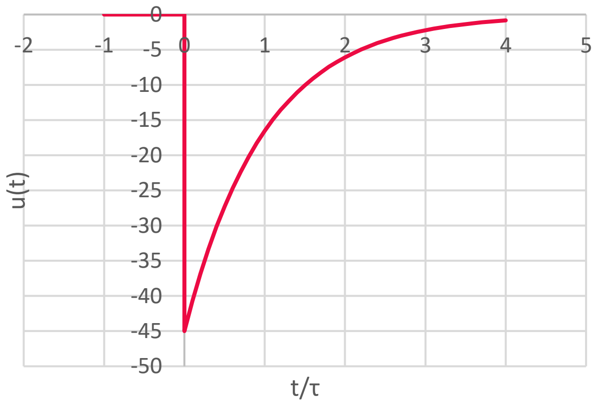
$$i(t)=\begin{cases} 1{,}5 \ \text{ если } t < 0 \\ 1 + 0{,}5 \cdot e^{-6000t} \ \text{ если } t \geq 0 \end{cases}, [A]$$

$$u(t)=\begin{cases} 0 \ \text{ если } t < 0 \\ -45 \cdot e^{-6000t} \ \text{ если } t \geq 0 \end{cases}, [B]$$

# Пример

| $t/\tau$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i(t)$ | 1,5 | 1,5 | 1,184 | 1,066 | 1,025 | 1,009 |
| $u(t)$ | 0 | -45 | -16,555 | -6,09 | -2,24 | -0,824 |



# Пример

**Ответ:**

$$i(t)=\begin{cases} 1{,}5 \text{ если } t<0 \\ 1+0{,}5\cdot e^{-6000t} \text{ если } t\geq 0 \end{cases}, \text{[A]}$$

$$u(t)=\begin{cases} 0 \text{ если } t<0 \\ -45\cdot e^{-6000t} \text{ если } t\geq 0 \end{cases}, \text{[B]}$$

# Спасибо
# за внимание!

ITsMOre than a UNIVERSITY

Никитина Мария Владимировна,
mvnikitina@itmo.ru