УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

«Моделирование»

Лектор: **АЛИЕВ Тауфик Измайлович,** ***д.т.н., профессор***

tialiev@itmo.ru **комн. 1334**

Национальный исследовательский университет ИТМО
(НИУ ИТМО)

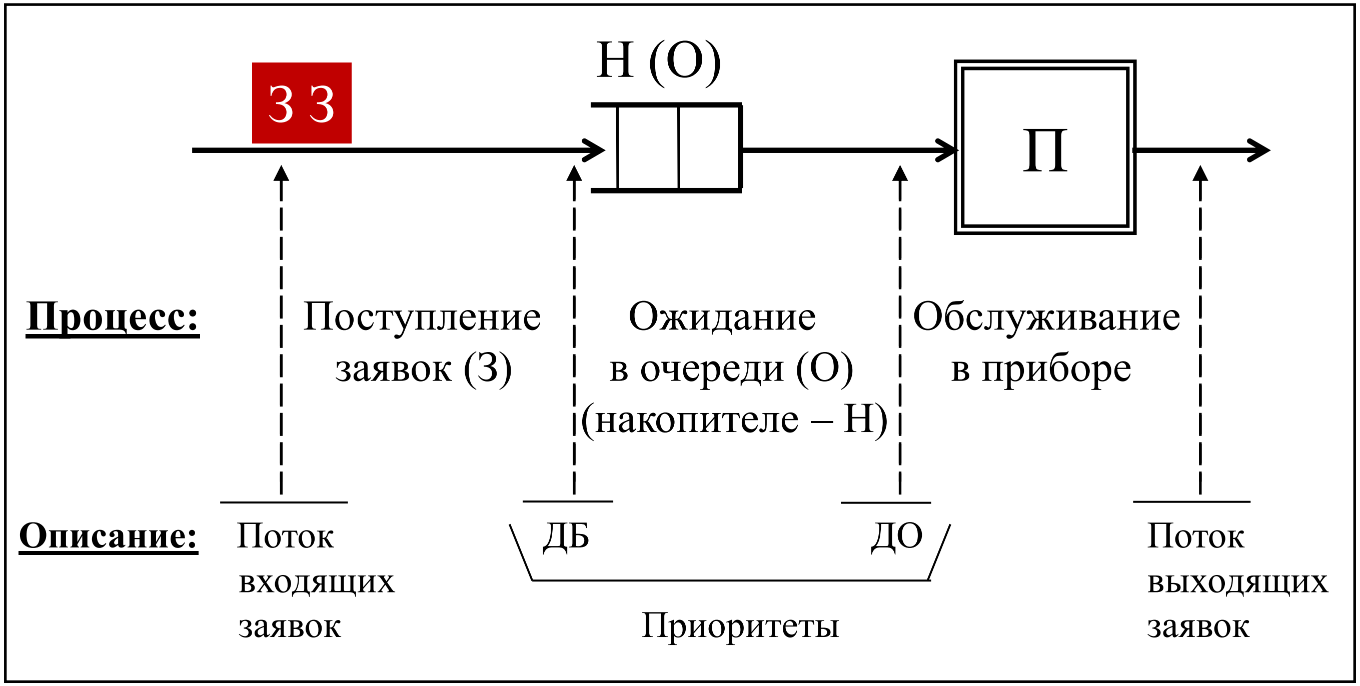
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

2. МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

1. Система массового обслуживания (СМО)
2. Многообразие (классификация) СМО
3. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации
4. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания
5. Сеть массового обслуживания (СеМО)
6. Параметры и характеристики СМО

Раздел 2. Модели дискретных систем

Система массового обслуживания (СМО)



Базовые понятия:

- Поток заявок
- Обслуживание
- Длительность обслуживания
- Ожидание
- Дисциплина буферизации (ДБ)
- Дисциплина обслуживания (ДО)
- Приоритет

Элементы СМО:

П – **прибор** (канал, устройство, линия, …)

Н – **накопитель** (*ёмкость*)

О – **очередь** (*длина*)

З – **заявка** (запрос, клиент, вызов, требование, …)

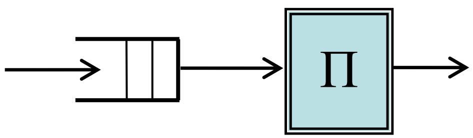
Примеры:

- Обслуживание в магазине
- Автомобильный перекрёсток
- Аэропорт: взлет и посадка самолетов, регистрация пассажиров
- …

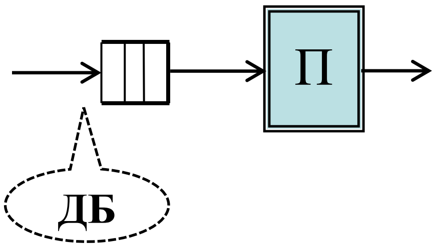
Раздел 2. Модели дискретных систем

Многообразие (классификация) СМО

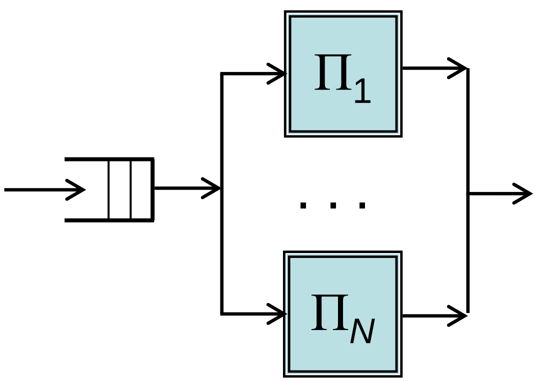
1) Одноканальная СМО с накопителем *неограниченной* ёмкости



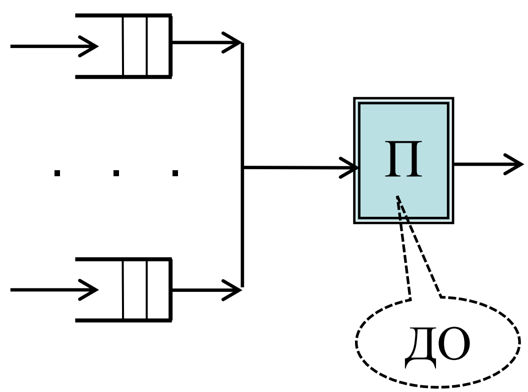
2) СМО с накопителем *ограниченной* ёмкости



3) Многоканальная СМО



4) СМО с *неоднородным потоком* заявок



Предположения:

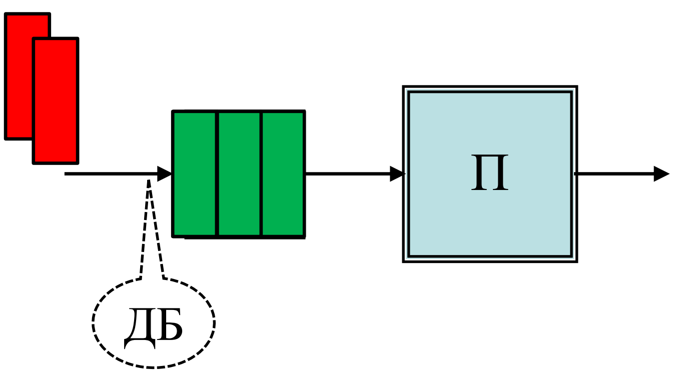
- заявка, поступившая в систему, *мгновенно* попадает на обслуживание, если прибор свободен;
- в приборе на обслуживании в каждый момент времени может находиться только *одна* заявка;
- прибор *не простаивает*, если в очереди есть хотя бы одна заявка;
- поступление заявок в СМО и длительности их обслуживания *не зависят* от того, сколько заявок уже находится в системе, или других факторов;
- *длительность* обслуживания заявок *не зависит от скорости (интенсивности)* поступления заявок в систему.

Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации

Дисциплины буферизации (ДБ)

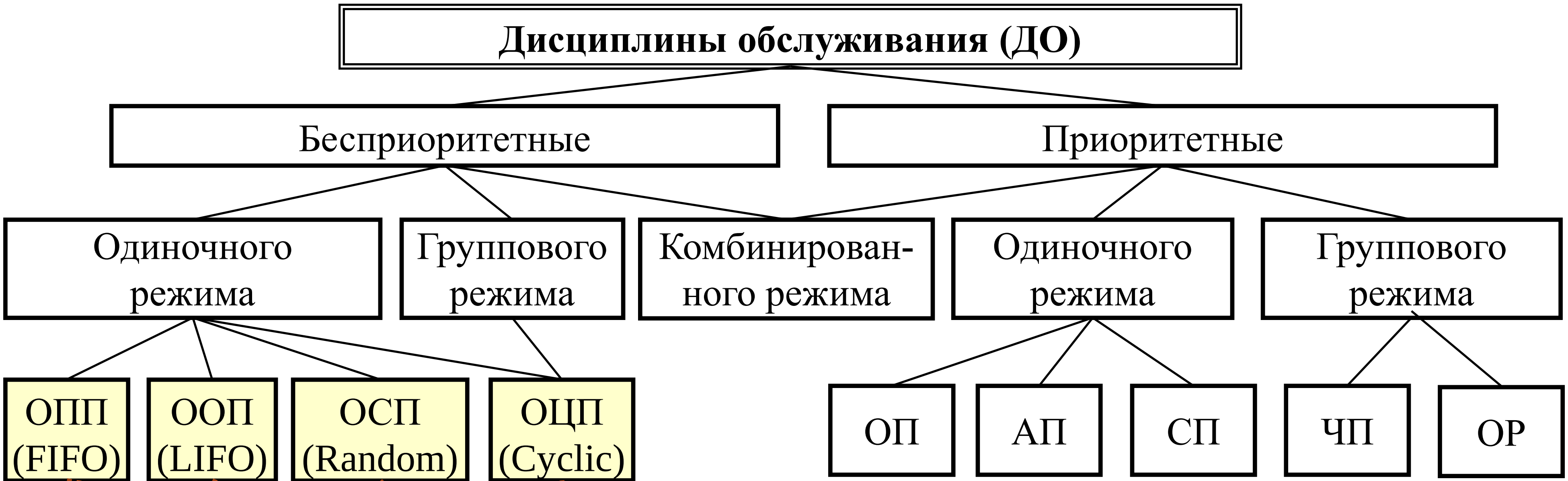
- Бесприоритетные
  - *без вытеснения заявки* ***(с отказами)***
  - *с вытеснением заявки* ***(с потерями)***…
    - данного класса
- Приоритетные
  - *с вытеснением заявки* ***(с потерями)***…
    - низкоприоритетного класса
    - из группы низкоприоритетного класса

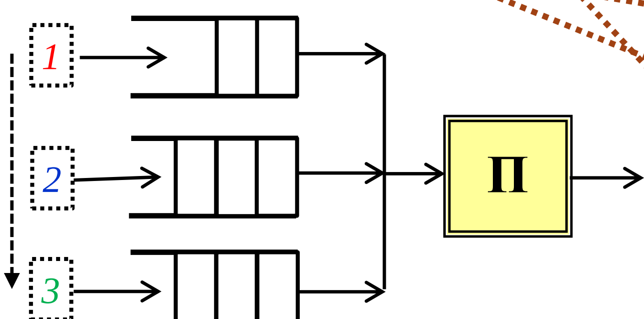
с вытеснением заявки ***(с потерями)***…:
- случайное
- последней заявки
- «долгой» заявки



2. Модели дискретных систем

Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания





12345678 (4+2,7+4)/3=3,57
87654321 (3; 4,3; 3)/3=3,43
32754186 (5,5; 2,3; 3,3)/3=3,7
41263578 (1,5; 3,7; 2,7)/3=**2,63**
46132578 (0,5; 3,7; 5,3)/3=3,17

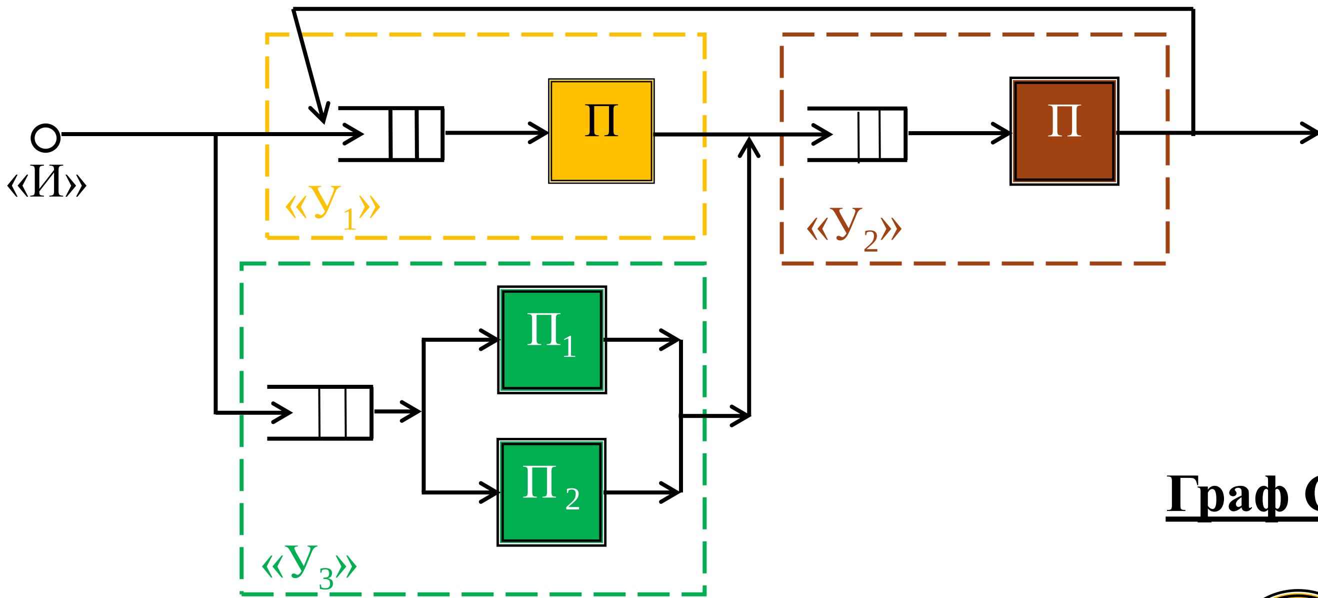
ОП: **2**4613758
АП: ~~2~~4613725 8
ЧП: 46132578

Расписание: (1,2,1,3,1,2)

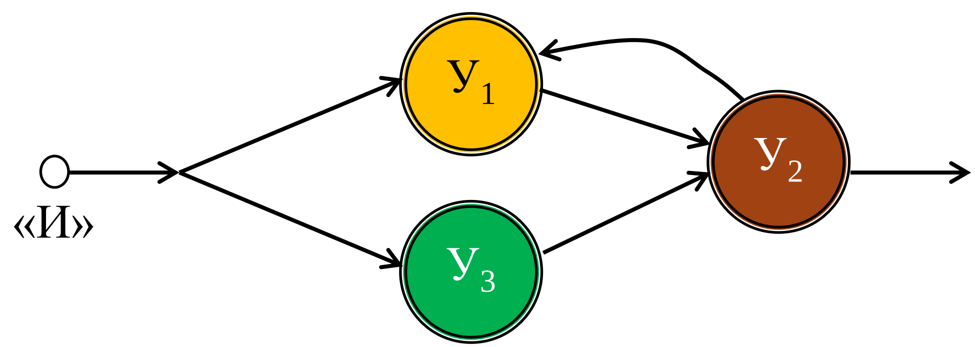
ОР: 41623578

Раздел 2. Модели дискретных систем

Сеть массового обслуживания (СеМО)



Граф СеМО

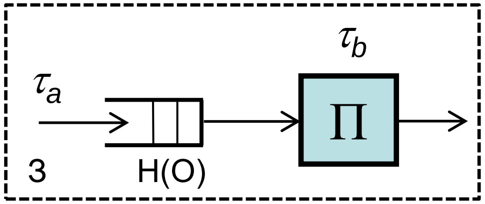


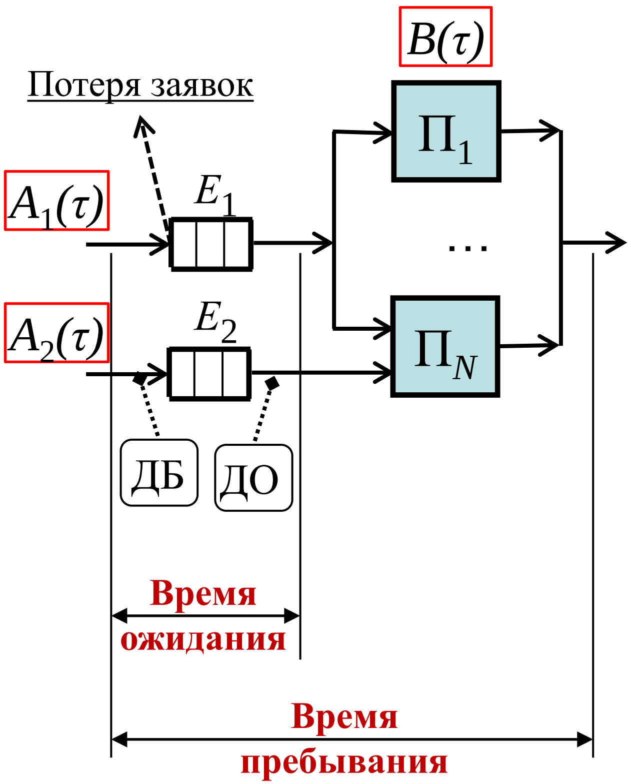
Базовые понятия:

- Источник (И)
- Узел (У)
- Маршрут
- Граф СеМО

2. Модели дискретных систем

Параметры и характеристики СМО





Параметры

1) структурные:

- количество приборов – ***N***;
- количество и ёмкости накопителей ***E***;
- взаимосвязь накопителей с приборами.

2) *функциональные:* ДБ; ДО

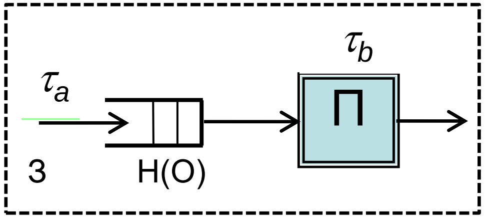
3) *нагрузочные*:

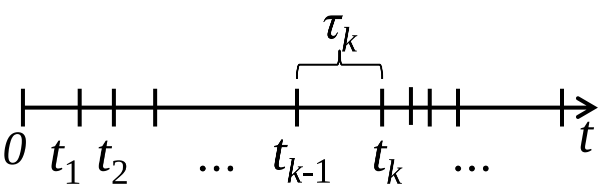
- поток заявок: $A(\tau)$
- длительность обслуживания: $B(\tau)$

Характеристики

1. Нагрузка
2. Загрузка (и коэффициент простоя) системы
3. Вероятность потери заявки из-за ограниченной емкости накопителя
4. **Время ожидания** заявок в очереди
5. **Время пребывания** заявок в системе (*в очереди и на обслуживании в приборе*)
6. **Длина очереди** заявок
7. **Число заявок** находящихся одновременно **в системе** (*в очереди и на обслуживании*)

Поток заявок





$\tau_k = t_k - t_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots)$

Случайный поток:

$A_k(\tau)$; $a_k(\tau)=A_k'(\tau)$

Рекуррентный поток:

$A_k(\tau)=A(\tau)$ $(k=1, 2, \ldots)$

$\lambda = 1/a$ [c^{-1}] – интенсивность потока;

Классификация потоков

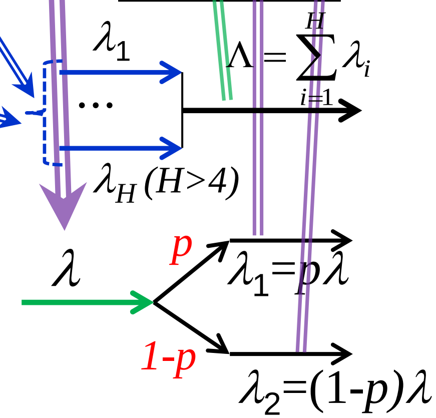
- Детерминированный (регулярный)
- Случайный (стохастический)
- Нестационарный
- *Стационарный*
- Неординарный (групповой)
- *Ординарный*
- С последействием
- С ограниченным последействием
- *Без последействия*

Простейший поток (Пуассоновский)

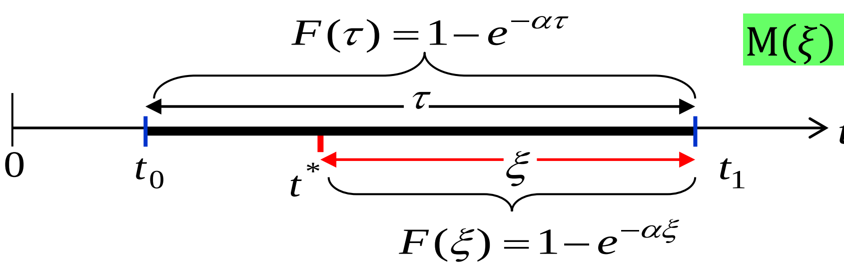
$A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$

$$P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

Свойства:

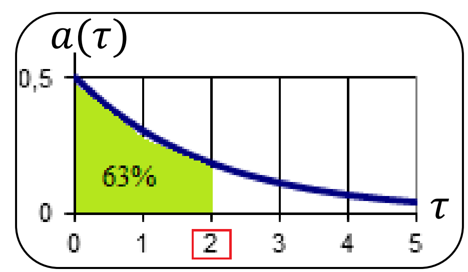


Свойство отсутствия последействия:



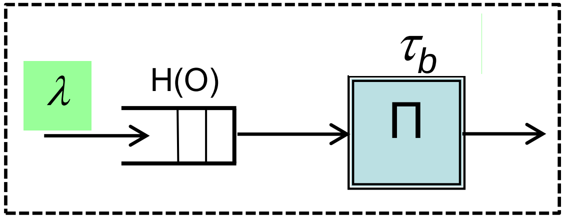
$M(\xi) = M(\tau) = 1/\alpha$

$F(\xi) = F(\tau)$



2. Модели дискретных систем

Поток заявок



Простейший (пуассоновский) поток

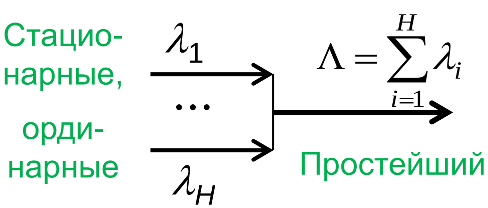
Стационарный | *Ординарный* | *Без последействия*

$A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$ λ [с$^{-1}$] – интенсивность потока ($a = 1/\lambda$);

$$P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$ – вероятность того, что за время t поступит k заявок (k= 0, 1, 2, …)

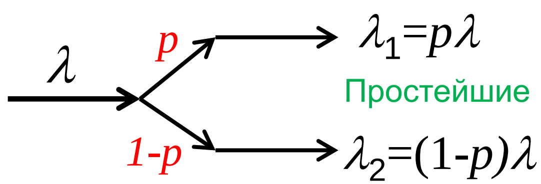
Замечательные свойства *простейшего потока*:

1) Суммирование потоков

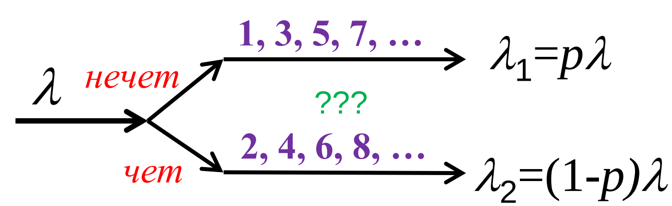


2) Разрежение простейшего потока:

*а) случайное (**вероятностное**)*



*б) неслучайное (**детерминированное**)*

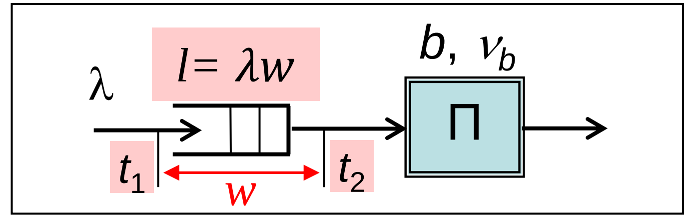


Длительность обслуживания

$B(\tau)$; $b(\tau) = B'(\tau)$ $\Longrightarrow$ b, v_b

μ - интенсивность обслуживания: $\mu = 1/b$ [1/с=с$^{-1}$]

Основные характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости



1) нагрузка $\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b}$ **($y > 0$)**

2) загрузка $\rho = \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{T_p}{T} \Longrightarrow T_\text{р} = \lambda T b \Longrightarrow \rho = \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{\lambda T b}{T} = \lambda b = y$

$\boxed{\rho = \min(y / N; 1)}$ **($0 \le \rho \le 1$)**

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

4) среднее время ожидания w = **?**

5) среднее время пребывания $\boxed{u = w + b}$

6) средняя длина очереди $\boxed{l = \lambda w}$

7) среднее число заявок в системе $\boxed{m = \lambda u} = l + \cancel{1?}$ $m = \lambda(w+b) = \lambda w + \lambda b = l + y$

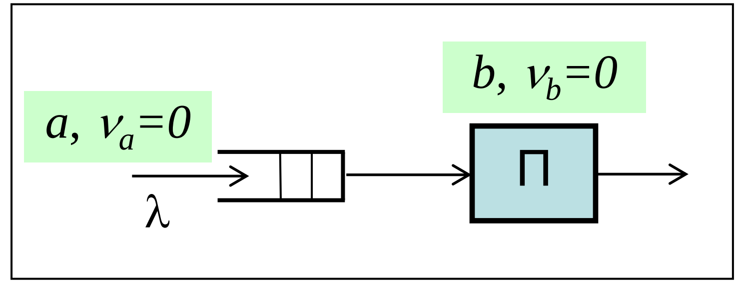
Условие отсутствия перегрузок:

$$\rho < 1$$

При $N = 1$: $\rho = \lambda/\mu \Longrightarrow \lambda < \mu$

Пример расчета модели с *детерминированным потоком заявок* и *детерминированным обслуживанием*

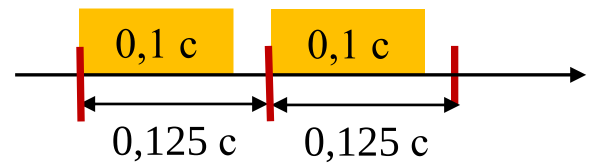
Дано: $\lambda=8\ с^{-1}$; $\mu=10\ с^{-1}$ ⟹ $a = 0{,}125$ с; $b = 0{,}1$ с



Расчет характеристик:

1) нагрузка $\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b} = \mathbf{0{,}8}$

2) загрузка $\rho = \lambda b = y = \mathbf{0{,}8}$ (80%) ⟹ $\rho < 1$



3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho = \mathbf{0{,}2}$ (20%)

4) среднее время ожидания $w = \mathbf{0}$

5) среднее время пребывания $u = w + b = \mathbf{0{,}1\ с}$

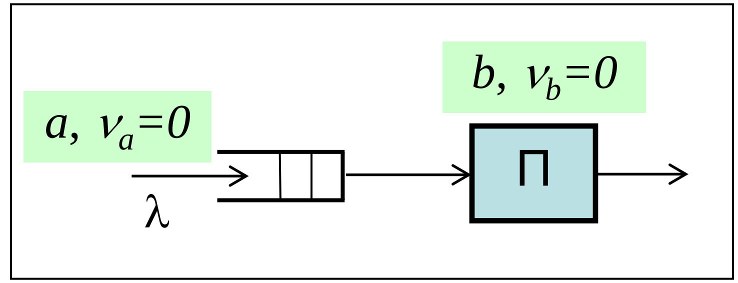
6) средняя длина очереди $l = \lambda w = \mathbf{0}$

7) среднее число заявок в системе $m = \lambda u = \mathbf{0{,}8}$

Очереди не возникают, если система *не перегружена* и процессы поступления и обслуживания заявок *неслучайные (детерминированные)*.

Расчет характеристик *перегруженной системы с детерминированным потоком* и *обслуживанием*

Дано: $\lambda=10\ c^{-1}$; $\mu=8\ c^{-1}$ ⇒ $a = 0{,}1$ с; $b = 0{,}125$ с



Расчет характеристик:

1) нагрузка $\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b}$ **= 1,25**

2) загрузка ρ **= 1** (100%) ⇒ **Система перегружена!!!**

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$ **= 0**

4) среднее время ожидания $w \longrightarrow \infty$

5) среднее время пребывания $u = w + b \longrightarrow \infty$

6) средняя длина очереди $l = \lambda w \longrightarrow \infty$

7) среднее число заявок в системе $m = \lambda u \longrightarrow \infty$

В ***перегруженной*** системе *основные характеристики с течением времени растут до бесконечности, не зависимо* от характера процессов поступления и обслуживания заявок (случайные или *неслучайные, т.е. детерминированные).*

Обозначения СМО (символика Кендалла)

A/B/N/E

A и **B** – законы распределений:

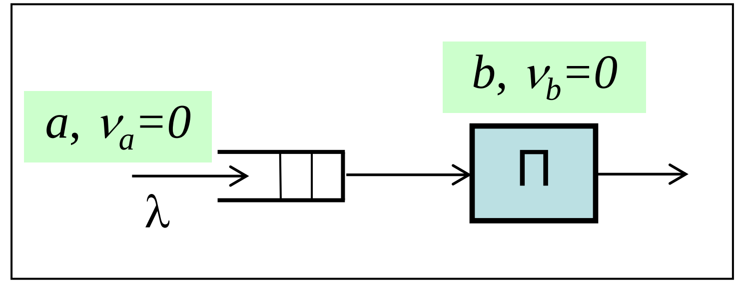
G (General) – *произвольное распределение общего вида*;
M (Markovian) – *экспоненциальное (показательное) распределение*;
D (Deterministik) – *детерминированное распределение*;
U (Uniform) – *равномерное распределение*;
$\mathbf{E_k}$ (Erlangian) – *распределение Эрланга k-го порядка* (с *k* последовательными *одинаковыми* экспоненциальными фазами);
$\mathbf{h_k}$ (hypoexponential) – гипоэкспоненциальное распределение *k*-го порядка (с *k* последовательными *разными* экспоненциальными фазами);
$\mathbf{H_r}$ (Hyperexponential) – *гиперэкпоненциальное распределение порядка r* (с *r* параллельными экспоненциальными фазами);
g (gamma) – гамма-распределение;
P (Pareto) – распределение Парето и т.д.

N = **1, 2, 3, …, ∞** – количество приборов
E = **0, 1, 2, …** – емкость накопителя (*по умолчанию: ∞*)

Примеры: M/M/1 M/G/4 E_3/U/2/10 G/H_2/1/20 M/D/∞

Расчет характеристик *перегруженной системы* с *детерминированным потоком* и *обслуживанием*

Дано: λ=10 с$^{-1}$; μ =8 с$^{-1}$ ⟹ a = 0,1 с; b = 0,125 с



Расчет характеристик:

1) нагрузка $\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b} = \mathbf{1{,}25}$

2) загрузка $\rho = \mathbf{1}$ (100%) ⟹ **Система перегружена!!!**

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho = \mathbf{0}$

4) среднее время ожидания $w \rightarrow \infty$

5) среднее время пребывания $u = w + b \rightarrow \infty$

6) средняя длина очереди $l = \lambda w \rightarrow \infty$

7) среднее число заявок в системе $m = \lambda u \rightarrow \infty$

В ***перегруженной*** системе *основные характеристики с течением времени растут до бесконечности*, *не зависимо* от характера процессов поступления и обслуживания заявок (случайные или *неслучайные, т.е. детерминированные).*

Обозначения СМО (символика Кендалла)

A/B/N/E

A и **B** – законы распределений:

G (General) – *произвольное распределение общего вида*;

M (Markovian) – *экспоненциальное (показательное) распределение:* $A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$;

D (Deterministik) – *детерминированное распределение*;

U (Uniform) – *равномерное распределение*;

$\mathbf{E_k}$ (Erlangian) – *распределение Эрланга k-го порядка* (с k последовательными *одинаковыми* экспоненциальными фазами);

$\mathbf{h_k}$ (hypoexponential) – гипоэкспоненциальное распределение k-го порядка (с k последовательными *разными* экспоненциальными фазами);

$\mathbf{H_r}$ (Hyperexponential) – *гиперэкпоненциальное распределение порядка r* (с r параллельными экспоненциальными фазами);

g (gamma) – гамма-распределение;

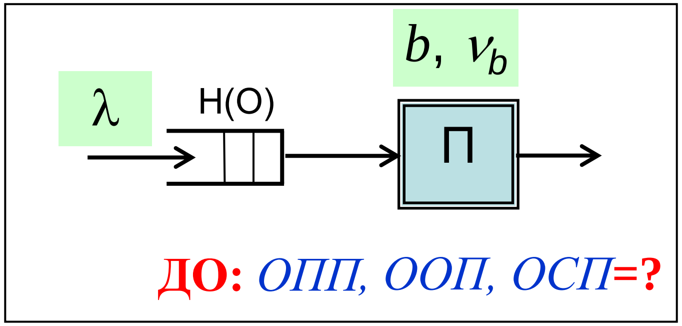
P (Pareto) – распределение Парето и т.д.

N = **1, 2, 3, …, ∞** – количество приборов

E = **0, 1, 2, …** – емкость накопителя (*по умолчанию: ∞*)

Примеры: M/M/1 M/G/4 E_3/U/2/10 G/H_2/1/20 M/D/∞

Характеристики систем с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (M/M/1 и M/G/1)



1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b < \mathbf{1}$ $(N=1)$

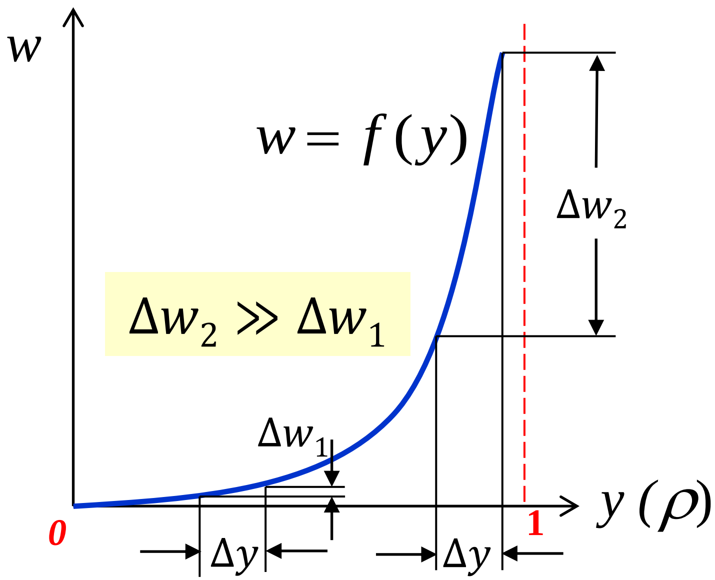
2) загрузка $\boxed{\rho = \min(y/N; 1) < \mathbf{1}}$

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

4) среднее время ожидания

$$w = \frac{\rho b}{1-\rho} \quad \textbf{(M/M/1);} \qquad w = \frac{\lambda b^2 (1 + v_b{}^2)}{2(1-\rho)} \quad \textbf{(M/G/1)}$$

Анализ свойств системы



5) среднее время пребывания $u = w + b = \frac{b}{1-\rho}$

6) средняя длина очереди $l = \lambda w = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

7) среднее число заявок в системе $m = \lambda u = \frac{\rho}{1-\rho}$

Характеристики систем с однородным потоком заявок и накопителем ограниченной емкости (M/M/1/E)

1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b$

2) *вероятность потери* (***обслуживания***) *заявок* $\pi_n = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{N_n(T)}{N(T)}$ $\left(\pi_0 = (1-\pi_n) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{N_0(T)}{N(T)}\right)$

3) *производительность системы* $\lambda' = \pi_0 \lambda = (1-\pi_n)\lambda$

4) *интенсивность потока потерянных заявок* $\lambda'' = \pi_n \lambda = (1-\pi_0)\lambda$

5) загрузка $\rho = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{T_p}{T}$ $\Longrightarrow$ $\rho = \frac{(1-\pi_n)y}{K}$

6) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

7) среднее время ожидания w = ?

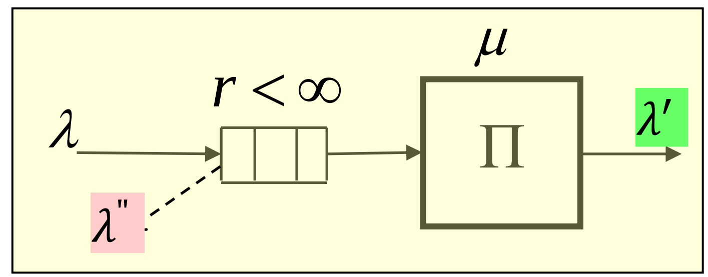
8) среднее время пребывания $u = w + b$

9) средняя длина очереди $l = \lambda w$

10) среднее число заявок в системе $m = \lambda u$

Условие отсутствия перегрузок ?

M/M/1/r



$$p_k = \begin{cases} \frac{y^k(1-y)}{1-y^{r+2}}, & y \neq 1 \\ \frac{y^k}{r+2}, & y = 1 \end{cases}$$

$(k=0,1,\ldots,r+1)$

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

«Моделирование»

Лектор: АЛИЕВ Тауфик Измайлович, ***д.т.н., профессор***

tialiev@itmo.ru

Национальный исследовательский университет ИТМО (НИУ ИТМО)

Факультет программной инженерии и компьютерной техники