université de BORDEAUX	Année Universitaire 2024–2025, Master 1 CSI DS, Théorie de la complexité 15 novembre 2024, 14h–17h	Collège Sciences et Technologies

La rédaction doit être précise et concise. Le barème est indicatif.
Seules, les réponses correctement justifiées apporteront des points.

Exercice 1 – Applications du cours (3 points).

Répondez aux questions suivantes en quelques lignes, en justifiant clairement vos réponses.

1. Le problème suivant est-il décidable ou non? Justifier, soit en donnant un algorithme, soit en faisant une preuve.
   Entrée : Une machine de Turing déterministe M.
   Question : Le calcul de la machine M sur le mot vide à partir de l'état initial q_0 revient-il à nouveau sur q_0?
2. Est-il vrai que tout problème de la classe co-**NP** se réduit au problème de correspondance de Post? Justifier.
3. Est-il vrai que tout sous-ensemble semi-décidable infini a un sous-ensemble décidable infini? Justifier.

Exercice 2 – Complexité (4 points).

Pour chacun de ces problèmes, démontrer soit qu'il est **NP**-complet, soit qu'il est dans **P**.

Remarques

- Les réductions sont simples en choisissant le bon problème de départ.
- Pour les réductions, vous pouvez utiliser tout problème **NP**-complet des feuilles de cours-TD.
- Pour montrer qu'un problème est **NP**-complet, pensez à justifier qu'il est dans **NP**.

On rappelle qu'en logique propositionnelle, un littéral est une variable ou une négation de variable, une 3-clause est une disjonction de trois littéraux, et une formule 3CNF est une conjonction de 3-clauses. Par exemple, la formule $(\neg x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_2 \vee x_3)$ est une formule 3CNF.

1. **SAT par au moins 50% des clauses**
   Entrée : Une formule 3CNF φ.
   Question : Existe-t-il une affectation des variables qui rend **au moins** la moitié des clauses de φ vraies?

2. **SAT par exactement 50% des clauses**
   Entrée : Une formule 3CNF φ.
   Question : Existe-t-il une affectation des variables qui rend **exactement** la moitié des clauses de φ vraies?

On rappelle qu'un *chemin* dans un graphe non orienté est une suite finie de sommets $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ tels qu'il y a une arête entre s_i et s_{i+1} pour tout $i < n$. Deux chemins sont *disjoints* si aucun sommet n'appartient aux deux chemins.

3. **Sélection de chemins**
   Entrée : Un graphe non orienté fini G, un entier p et un ensemble $\mathcal{E} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ de chemins de G.
   Question : Existe-t-il p chemins parmi les chemins de $\mathcal{E}$ qui sont disjoints deux à deux?

4. **Sac à dos**
   Entrée : Deux suites d'entiers $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{N}$ et $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ de même longueur n, et deux entiers $V, P \in \mathbb{N}$.
   Question : Existe-t-il un ensemble $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sum_{i \in I} p_i \leqslant P$ et $\sum_{i \in I} v_i \geqslant V$?

Exercice 3 – Recouvrement de graphes (2 points).

Soit G un graphe non orienté et V son ensemble de sommets. On dit qu'un sous-ensemble de sommets $V' \subseteq V$:

- forme une clique si pour tous sommets $u, v \in V'$ avec $u \neq v$, **il y a** une arête dans G entre u et v.
- forme un stable si pour tous sommets $u, v \in V'$ avec $u \neq v$, **il n'y a pas** d'arête dans G entre u et v.

1. On suppose que chaque sommet de G a une couleur $c \in \{0, 1, 2\}$, de telle façon qu'aucune arête n'ait ses deux extrémités de la même couleur. Soit $c \in \{0, 1, 2\}$. Que peut-on dire de l'ensemble des sommets colorés par c ?
2. Quelle est la complexité du problème suivant ? Justifier précisément la réponse.

   Entrée : Un graphe non orienté dont on note V l'ensemble des sommets, et un entier $p \geqslant 0$.

   Question : Existe-t-il p ensembles de sommets $V_1, \ldots, V_p$ tels que chaque V_i est **un stable** et $V = \bigcup_{k=1}^{p} V_k$?
3. Même question pour le problème suivant ? Justifier précisément la réponse.

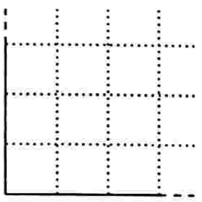
   Entrée : Un graphe non orienté dont on note V l'ensemble des sommets, et un entier $p \geqslant 0$.

   Question : Existe-t-il p ensembles de sommets $V_1, \ldots, V_p$ tels que chaque V_i est **une clique** et $V = \bigcup_{k=1}^{p} V_k$?

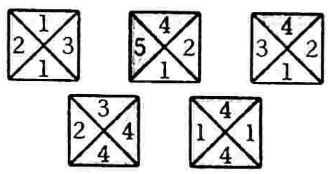
Exercice 4 – Pavage (7 points).

On dispose d'une grille infinie couvrant le quart du plan. Chaque « carré » de la grille est une case dans laquelle on peut placer une tuile de Wang. Une telle tuile est un carré dont chaque côté (Sud, Ouest, Nord et Est) est coloré. Dans l'exemple sur la figure ci-dessous, les couleurs sont aussi indiquées par des entiers.

Attention, les tuiles sont orientées : on ne peut pas les tourner.



La grille infinie



Un ensemble de 5 tuiles de Wang

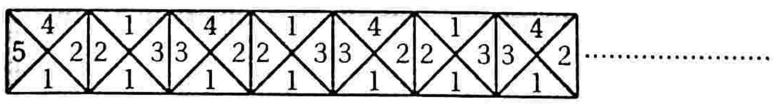
Considérons maintenant une paire (D, d_0) où D est un ensemble fini de tuiles et $d_0 \in D$ est une tuile particulière, appelée *tuile de départ*. On dispose d'un nombre infini de copies de chaque tuile de D.

Soit également E un ensemble de cases de la grille infinie, contenant la première case (celle en bas à gauche). Dans la suite, E sera soit égal à tout le quart de plan, soit égal à la première ligne (celle en bas du quart de plan).

On dit qu'on peut **paver E avec (D, d_0)** si on peut remplir chaque case de E avec des tuiles de D, tout en satisfaisant les deux conditions suivantes :

- Une copie de d_0 doit être placée dans la première case (celle en bas à gauche).
- Si deux tuiles sont adjacentes, le côté qu'elles ont en commun doit avoir la même couleur.

Par exemple, si D est le jeu de tuiles dessiné ci-dessus et d_0 est la seconde tuile (la seule contenant la couleur 5), on peut paver la première ligne en commençant par d_0, puis en alternant, sur les cases suivantes de cette ligne, la tuile dessinée à la gauche de d_0 et celle dessinée à sa droite. On obtient le pavage suivant de la première ligne de la grille :



Par contre, on ne peut pas paver la première ligne en choisissant comme tuile d_0 la quatrième du jeu de tuiles de Wang ci-dessus (la seule qui ne contient pas la couleur 1).

1. Montrez que le problème suivant **Pavage-Ligne** est décidable :

Entrée :	Une paire (D, d_0) où D est un ensemble fini de tuiles et $d_0 \in D$.
Question :	Peut-on paver la **première ligne** du quart de plan avec (D, d_0)?

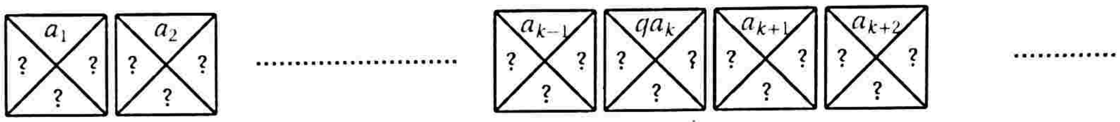
On veut maintenant montrer que le problème suivant **Pavage-1/4-Plan** est indécidable, par réduction depuis le complémentaire du problème de l'arrêt sur mot vide.

Entrée :	Une paire (D, d_0) où D est un ensemble fini de tuiles et $d_0 \in D$.
Question :	Peut-on paver le quart de plan avec (D, d_0)?

2. Décrivez ce qu'est une telle réduction, et en particulier les propriétés qu'elle doit satisfaire.

   On veut maintenant construire la réduction. Soit M une machine de Turing **déterministe**. L'idée est de forcer l'ensemble D de tuiles construit à partir de M à représenter la suite $C_0, C_1, \ldots$ de configurations de M lancée sur le mot vide. Pour cela, on utilise une ligne de la grille pour représenter chaque configuration : la configuration C_0 sera représentée dans la ligne 0 (la plus basse), la configuration C_1 (si elle existe) sera représentée sur la ligne 1, etc.

   Supposons que la machine M est dans une configuration C, avec $a_1a_2a_3\cdots$ comme contenu (infini) de la bande, q comme état courant, et k comme position de la tête (elle lit donc a_k). On dit qu'une ligne infinie de tuiles sur la grille **code** C si elle est de la forme suivante :



(où deux tuiles adjacentes respectent toujours la condition que leur côté commun a la même couleur). Notez qu'on utilise des mots comme couleurs. Ces mots ont une ou deux lettres pour l'instant (a_1 a une lettre, qa_k en a deux). Vous pourrez utiliser plus de couleurs si nécessaire dans la suite, l'important étant d'en avoir un **nombre fini**.

Remarque

L'intuition sur la réduction est visuelle. Pour *chaque* question, il peut être utile de faire un dessin de la situation, au moins au brouillon, pour la comprendre.

3. Soit C' la configuration obtenue en appliquant une transition de M depuis C. Construisez un ensemble fini de tuiles forçant la ligne au dessus d'une ligne qui code C à coder C'. Vous pouvez distinguer plusieurs cas selon le type de transition effectué.
4. Complétez cet ensemble de tuiles pour qu'en fixant la tuile en bas à gauche, la ligne 0 code la configuration initiale de M sur le mot vide.
5. Récapitulez la réduction et justifiez qu'elle fonctionne.
6. On s'intéresse maintenant au pavage d'un carré **fini** du plan. À nouveau, on dispose d'une infinité de copies de chaque tuile. Montrer que le problème suivant est **NP**-complet.

Entrée :	Une paire (D, d_0) où D est un ensemble fini de tuiles et $d_0 \in D$, et un entier k codé **en unaire** (c'est-à-dire en base 1).
Question :	Peut-on paver le carré $k \times k$ avec D et d_0 dans le coin en bas à gauche?

Rappel

La définition d'un problème **NP**-complet comprend *deux* propriétés. Pour l'une d'entre elles, on pourra s'inspirer de la réduction ci-dessus pour le pavage infini.

7. Que pensez-vous de la complexité du problème lorsque k est donné en binaire? Expliquez en particulier si le problème est encore dans **NP**, en justifiant.

Exercice 5 – Grammaires étendues (5 points).
On considère des grammaires qui peuvent utiliser des règles plus puissantes que les grammaires hors-contexte. On fixe un alphabet $A = \{a, b, c\}$ pour l'exercice.

Une *grammaire étendue* est un tuple $G = (\mathcal{V}, S, \mathcal{R})$ qui définit un langage de mots $\mathcal{L}(G) \subseteq A^*$:

- $\mathcal{V} = \{X, Y, Z, \ldots,\}$ est un ensemble fini de variables.
- $S \in \mathcal{V}$ est une variable de départ.
- $\mathcal{R}$ est un ensemble de règles de réécriture. Ici on a droit à deux types de règles :
  - Les règles classiques (déjà autorisées dans les grammaires hors-contexte) de la forme :

$$X \to w \qquad \text{avec } X \in \mathcal{V} \text{ et } w \in (\mathcal{V} \cup A)^*.$$

  - Les règles ayant pour forme :

$$UX \to YZ \qquad \text{avec } U, X, Y, Z \in \mathcal{V}.$$

Le langage $\mathcal{L}(G) \subseteq A^*$ défini par G est le langage de tous les mots dans A^* qui peuvent être générés depuis la variable S de départ en appliquant des règles de $\mathcal{R}$. Par exemple, considérons la grammaire $G = (\mathcal{V}, S, \mathcal{R})$ avec $\mathcal{V} = \{S, T, X, B, C_1, C_2\}$ et :

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & TX \\ T & \to & aTBC_1 \\ T & \to & \varepsilon \\ C_1B & \to & BC_1 \\ C_1X & \to & XC_2 \\ X & \to & \varepsilon \\ B & \to & b \\ C_2 & \to & c \end{array} \right\}.$$

Il est simple vérifier que $abc \in \mathcal{L}(G)$, comme attesté par la séquence suivante de réécritures :

$$S \to TX \to aTBC_1X \to aTBXC_2 \to aBXC_2 \to aBC_2 \to abC_2 \to abc.$$

1. Quel est le langage $\mathcal{L}(G)$ accepté par la grammaire G donnée en exemple ci-dessus ? Justifiez la réponse.
2. Montrer que le problème suivant est indécidable :

Entrée :	Une grammaire étendue $G = (\mathcal{V}, S, \mathcal{R})$.
Question :	Est-ce que $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$?

Indication

À partir d'une machine de Turing à une bande M, commencer par construire une grammaire qui permet d'atteindre les mots de la forme $A_1 \cdots A_k Q_i B_1 \cdots B_\ell \in \mathcal{V}^*$, où le mot $a_1 \cdots a_k q_i b_1 \cdots b_\ell$ code une configuration de M (c'est-à-dire la configuration où $a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_\ell$ est écrit sur la bande, la machine M est dans l'état q_i et la tête de lecture/écriture est sur la lettre b_1).

3. Le langage $\{uu \mid u \in A^*\}$ est-il engendré par une grammaire étendue ? Justifier.