	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024/2025 **4TMA701U Calcul Formel** **Devoir Surveillé** **Date : 06/11/2024 Heure : 15h30 Durée : 1h30** Documents autorisés.	**Collège Sciences et Technologies**

Vous rendrez à la fin de l'examen une copie papier ainsi qu'un fichier sage contenant vos programmes (lisible, commenté et nettoyé si possible..) au format DS-Nom-Prenom.ipynb (feuille Jupyter) ou DS-Nom-Prenom.sage (fichier texte). Le fichier est à envoyer par e-mail à votre enseignant.e de TD (christine.bachoc@u-bordeaux.fr ou leo.poyeton@u-bordeaux.fr).

Soit K un corps, et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans K. Soit $u \in K$, l'objectif de ce sujet est d'étudier quelques algorithmes pour calculer les coefficients du polynôme $P(X+u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+u)^k$.

1. On étudie d'abord l'algorithme suivant :

   Algorithme 1 [NAIF]
   Entrées : $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$, $u \in K$.
   Sortie : $P(X+u)$
   1. Initialisation : $S = a_0$, $Q = 1$
   2. Pour $k = 1, \ldots, n-1$ *:*
   2.1. $Q = Q \cdot (X+u)$ *(où $\cdot$ désigne la multiplication des polynômes)*
   2.2. $S = S + a_k Q$
   3. Sortir $S(X)$.

   1) Expliquez pourquoi NAIF fait bien le job (on pourra expliciter le contenu des variables S et Q à chaque tour de boucle).
   2) Montrez que sa complexité est $O(n^2)$.
   3) Ecrire une fonction Sage qui prend en entrées un polynôme et un $u \in K$ et qui exécute NAIF (vous choisissez K à votre convenance) et testez-la.

2. Maintenant on cherche un algorithme de meilleure complexité. On supposera pour simplifier que n est une puissance de 2. Soit donc $k \geq 1$ tel que $n = 2^k$. On se fixe un algorithme pour la multiplication de deux polynômes de degré inférieur à n, dont on note la complexité $M(n)$, et on suppose que $M(n)$ vérifie l'inégalité $2M(n/2) \leq M(n)$ (c'est le cas pour les algorithmes que vous connaissez).
   On écrit $P = P_0 + X^{n/2} P_1$ avec $\deg(P_0) < n/2$ et $\deg(P_1) < n/2$. Alors, on a

   $$P(X+u) = P_0(X+u) + (X+u)^{n/2} P_1(X+u). \qquad \text{(E)}$$

   a) Proposez un algorithme récursif utilisant (E) qui prend en entrées n, P, et u, et sort $P(X+u)$ et $(X+u)^n$.
   b) Montrez que la complexité $T(n)$ de votre algorithme vérifie

   $$T(n) = 2T(n/2) + 2M(n/2) + O(n)$$

c) Montrez que $T(n) = O((M(n) + n)\log(n))$ (indication : inspirez-vous de la preuve du Lemme Maitre).

d) Implémentez votre algorithme dans Sage et testez-le.