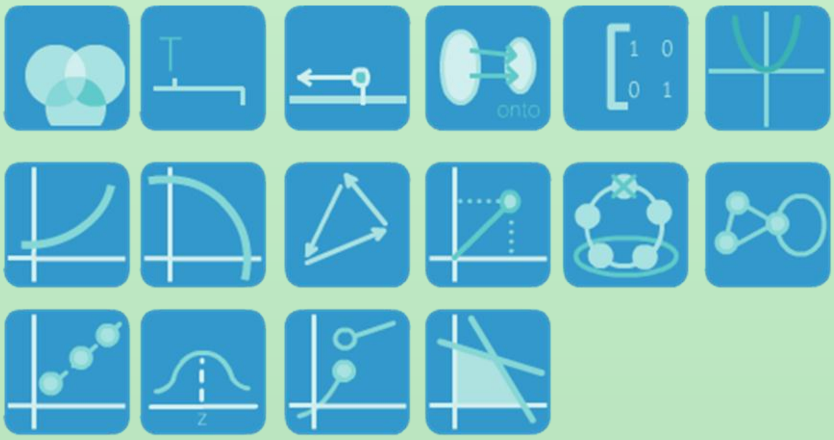
Third Edition

Karmins Books
ความรุ่งโรจน์แห่งปัญญา

สรุปแก่นคณิตศาสตร์ม.ปลาย

Math Kit



- สรุปโครงสร้างของแต่ละบท
- สรุปเนื้อหาละเอียด
- ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลย

นายคณิน อังศุนิตย์

เกี่ยวกับหนังสือ

Karmins Books
ความรุ่งโรจน์แห่งปัญญา

สรุปแก่นคณิตศาสตร์ม.ปลาย

คณิน อังศุนิตย์	เขียน
	ภาพประกอบ
พิมพ์ครั้งแรก	ธันวาคม พ.ศ. 2555
ปรับปรุงครั้งที่ 3	กุมภาพันธ์ พ.ศ.2557
เจ้าของลิขสิทธิ์	ขมิ้นหนังสือ (เครือขมิ้นธุรกิจ)
เผยแพร่โดย	ขมิ้นดอทคอม (ฝ่ายตำรา)
รหัสหนังสือ	KRM-MATH-56-12-B1-6

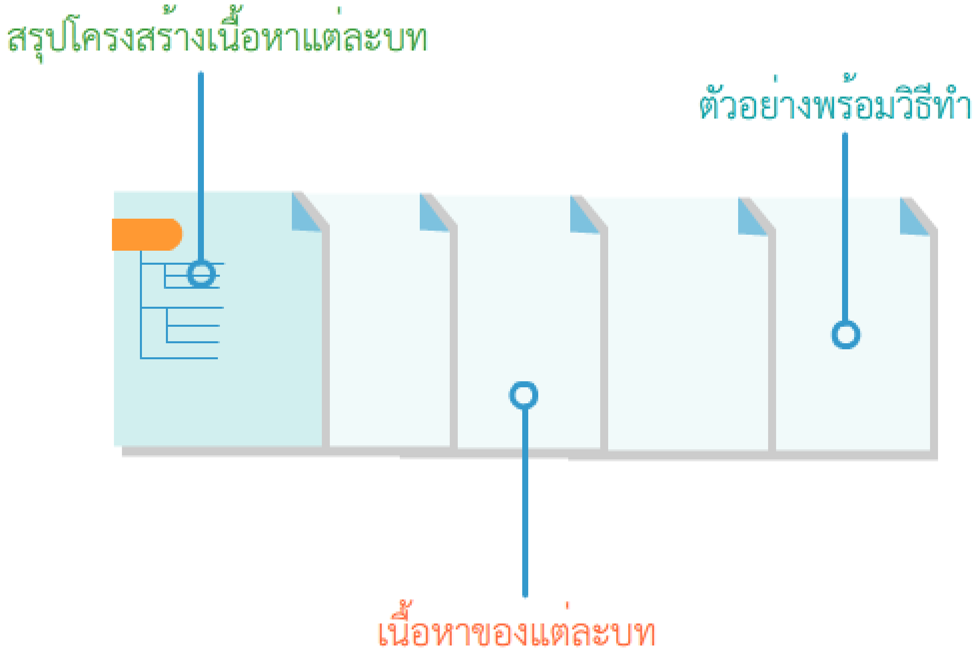
คำนำ ของผู้เขียน

หนังสือประกอบการเรียน ทางคณะผู้จัดทำ ได้จัดทำขึ้นเพื่อ นักเรียนในระดับชั้น ม.ปลายที่ต้องการเตรียมพร้อมสำหรับ สอบแข่งขัน และการสอบเข้ามหาวิทยาลัย และการเพิ่มคะแนนในโรงเรียน ในเอกสารชุดนี้จะประกอบไปด้วยสูตรต่างๆ ที่จำเป็น พร้อมทั้งคำแนะนำ ความรู้เพิ่มเติมที่นักเรียนควรทราบในการเรียน และวิธีใช้งานพร้อมคำอธิบายอย่างละเอียด เนื้อหาในเอกสารชุดนี้ได้รวบรวมเนื้อหาที่ออกสอบ

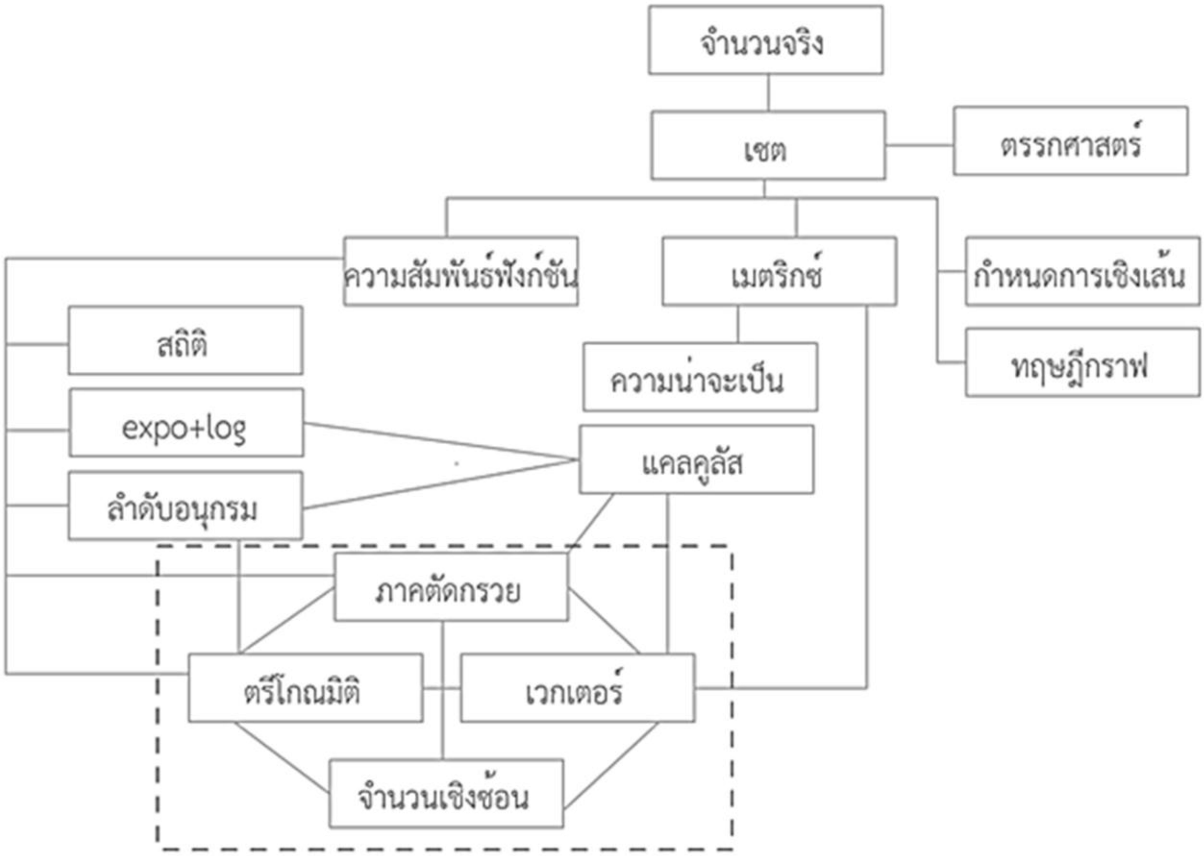
ด้วยปรารถนาดีและจริงใจ

คณิน อังศุนิตย์

การจัดวางเนื้อหา



ความสัมพันธ์ระหว่างบท



ท่านสามารถศึกษาเลขพื้นฐานได้จาก Math Lite Ebook ของผู้เขียน

เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ส่วนใหญ่เป็นเลขเสริม

สารบัญ

เนื้อหาภายในเล่ม

เซต (Set)

- พื้นฐาน Set
  - ประเภทของเซต
    - เซตจำกัด
    - เซตอนันต์
  - การเท่ากันของเซต
  - เอกภพสัมพัทธ์
    - ข้อควรระวัง หากไม่กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ เอกภพสัมพัทธ์ จะเป็นจำนวนจริง
  - สับเซตและเพาเวอร์เซต
- การดำเนินการทาง Set
  - ยูเนียน
  - อินเตอร์เซกชัน
  - ผลต่าง
  - คอมพลีเมนต์
- การหาจำนวนสมาชิก
  - วาดแผนภาพเวนน์ออยเลอร์
  - ใช้สูตร
- การประยุกต์เซต

เราใช้เซตในการศึกษา**กลุ่มสิ่งต่างๆที่เราสนใจ** เช่น เซตชื่อเดือน เซตจำนวนที่ 6 เป็นพหุคูณ เซตจำนวนนับ ฯลฯ เซตถูกใช้งานในการแก้ปัญหาจำนวนสมาชิกในชีวิตประจำวัน

เซต (Set) เป็นอนิยาม แต่เราใช้เซตในการศึกษา**กลุ่มสิ่งต่างๆที่เราสนใจ** สิ่งที่อยู่ในเซต คือ สมาชิก(Element) การเขียนสัญลักษณ์เซตคือ { } โดยการเขียนแจกแจงสมาชิกจะต้องมีจุลภาค (,) คั่นกลางหรืออาจจะกล่าวได้ว่าเซตคือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อใช้แทนกลุ่มสิ่งต่างๆที่เราสนใจซึ่งเขียนภายในเครื่องหมายปีกกา { }

เครื่องหมาย ∈ คือเครื่องหมายเป็นสมาชิก

∉ คือเครื่องหมายไม่เป็นสมาชิก

เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe) คือเซตที่กำหนดขอบเขตของสมาชิกเซตที่เราต้องการศึกษา เราเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{U}$ ถ้าเซตไม่ได้กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ ให้ถือว่า เอกภพสัมพัทธ์ คือเซตของจำนวนจริง

คำแนะนำ ชื่อเซตถ้าเป็นภาษาอังกฤษ ให้ใช้ตัวพิมพ์ใหญ่ แต่ถ้าเป็นสมาชิกให้ใช้ตัวพิมพ์เล็ก

การเขียนเซต

1.การเขียนแจกแจงสมาชิก

2.การเขียนแบบบอกเงื่อนไข

EX เซตของสระในภาษาอังกฤษ

1. {a,e,i,o,u}

2. {x | x เป็นสมาชิกในสระในภาษาอังกฤษ}

หมายเหตุ ลำดับก่อนหลังของสมาชิกไม่มีความสำคัญ และ ในเซตใดๆ มีสมาชิกตัวเดียวกันมากกว่า 1 ครั้ง ให้ถือว่าเป็นสมาชิกตัวเดียวกัน

ประเภทของเซต

1.เซตจำกัด คือ เซตที่เราสามารถบอกจำนวนสมาชิกได้

2.เซตอนันต์ คือเซตที่มีจำนวนมากมายนับไม่ถ้วนและไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้

3.เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย

EX

1.{1,2,3,4} เป็นเซตจำกัด เพราะมีสมาชิก 4 ตัว

2.{x | x เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 3} เป็นเซตอนันต์

3.เซตว่างคือ { } หรือ ∅

ข้อควรระวัง {∅} และ {{ }} ไม่เป็นเซตว่างนะครับ

สัญลักษณ์ควรรู้ I คือจำนวนเต็ม I^+ คือจำนวนเต็มบวก I^- คือจำนวนเต็มลบ

R คือจำนวนจริง

N คือจำนวนนับ

Q คือจำนวนตรรกยะ Q′ คือจำนวนอตรรกยะ

ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

1.การเท่ากันของเซต

เซต A จะเท่ากับ เซต B ก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว และมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

2.สับเซต

เซต A จะเป็นสับเซตของเซต B ได้ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B เราสามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $A \subset B$ แต่ถ้า เซต A และ B ไม่เป็นสับเซตให้เขียนด้วย $A \not\subset B$

Ex กำหนดเซต $A = \{1,2,3\}$ $B = \{x \mid x \in$ จำนวนนับ$\}$

$A \subset B$ เพราะสมาชิกทุกตัวของ A อยู่ใน B

$B \not\subset A$ เพราะสมาชิกทุกตัวของ B ไม่อยู่ใน A มีสมาชิกเพียง 3 ตัวที่อยู่ใน A คือ $\{1,2,3\}$

ข้อควรรู้ ถ้า $A \subset B$ และ $A \neq B$ เรียกว่า A เป็นสับเซตแท้ของ B

ข้อควรระวัง $\emptyset$ เป็นสับเซตของทุกเซต

3.เพาเวอร์เซต คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทุกตัวที่สับเซตทั้งหมดของเซตนั้น เช่น เพาเวอร์เซต A สามารถเขียนด้วยสัญลักษณ์ P(A)

Ex $A = \{1,2,3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า $\emptyset \in P(A)$

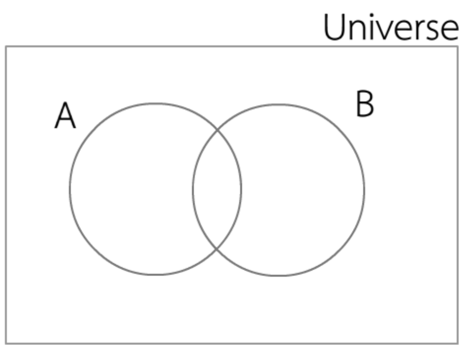
$\{\emptyset\} \subset P(A)$

สับเซตแท้ของ A คือ $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

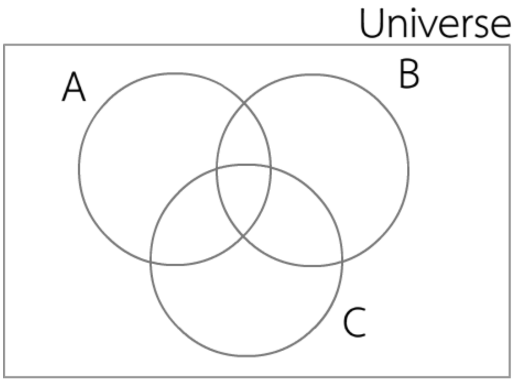
ถ้าเรามีสมาชิก n ตัว แล้ว เพาเวอร์เซต มีจำนวนสมาชิก 2^n ตัว

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เป็นแผนภาพที่ใช้แสดงถึงเซต ซึ่งใช้รูปปิด โดยทั่วไปจะใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ และเขียนเซตอื่นๆเป็นวงกลม

ตัวอย่างการวาด 2 เซต

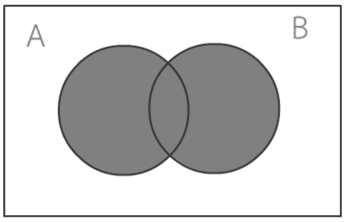


ตัวอย่างการวาด 3 เซต

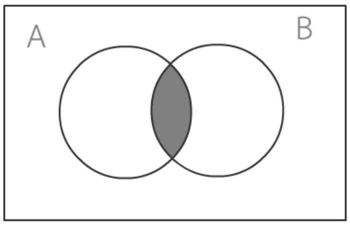


ข้อควรรู้ ตั้งแต่ 4 เซตเป็นต้นไปไม่นิยมวาดแผนภาพ แต่เราใช้สูตรในการช่วยหาจำนวนสมาชิกในเซตได้

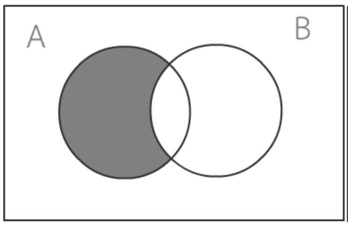
การกระทำทางเซต



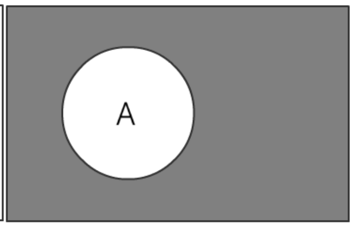
A ∪ B



A ∩ B



A – B



A′

Ex $\mathcal{U}$ = {1,2,3,4,5} A={1,2} B={2,3,4}

1.ยูเนียน

A∪B คือเซตที่ประกอบไปด้วยเซตของ A หรือ B จะได้ {1,2,3,4}

2.อินเตอร์เซกชัน

A∩B คือเซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิก A และ B คือ{2}

3.ผลต่าง

A-B คือสมาชิกทั้งหมดของ A ที่ไม่ได้เป็นสมาชิกของ B จะได้ {1}

4.คอมพลีเมนต์

คือเซตตัวอื่นที่ประกอบอยู่ในเอกภพสัมพัทธ์ แต่ไม่ได้อยู่ในที่เราสนใจ เช่น A′ คือไม่เอาสมาชิกทั้งหมดของ A คือ {3,4,5}

คุณสมบัติการดำเนินการทางเซต

- $A - B = A \cap B' = B' - A'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

สูตรการหาจำนวนสมาชิก

- 2 เซต $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- 3 เซต $n(A \cup B \cup C)$

  $= n(A) + n(B) + n(C)$

  $- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$

  $+ n(A \cap B \cap C)$

สูตรการจัดรูปสับเซตและเพาเวอร์เซต

$\{A\} \subset B \longrightarrow A \in B$

$\{A\} \subset P(B) \longrightarrow A \subset (B)$

$\{A\} \in P(B) \longrightarrow A \in (B)$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ให้เซต A = {1,2,3,{1,2,3}} และเซต B = {1,2,{1,2}} ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง** (Ent)

1. $A \cap B = \{\{1,2\}\}$ 2. $A \cup B = \{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ 3. $A - B = \{\{1,2,3\},3\}$ 4. $B - A = \emptyset$

วิธีทำ พิจารณา

ข้อ 1 $A \cap B = \{\{1,2\}\}$ ผิดเพราะ {{1,2}} ไม่ได้อยู่ใน A

ข้อ 2 $A \cup B = \{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ ผิดเพราะ ขาด {1,2,3}

ข้อ 3 $A - B = \{\{1,2,3\},3\}$ ถูกเพราะจำนวนสมาชิก 2 ตัวของ A ซ้ำกับ B

ข้อ 4 $B - A = \emptyset$ ผิดเพราะ {{1,2}} ไม่ได้อยู่ใน A ดังนั้น $B - A = \{\{1,2\}\}$

<u>ดังนั้น</u>ข้อนี้จึงตอบข้อ 3

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>กำหนดให้ $A \subset B$ ข้อใด**ผิด** (สมาคมคณิตศาสตร์)

1. $B \cap A' \subset B$ 2. $A \cap B' \neq \emptyset$ 3. $A \cap B = A$ 4. $A \cap B = B$

วิธีทำ พิจารณา

ข้อ 1 ถูก มี B บางส่วนไม่ได้อยู่ใน A ส่วนดังกล่าวจึงเป็นสับเซตของ B

ข้อ 2 ผิด เพราะ นอก B เป็นเซตว่าง $A \cap \emptyset = \emptyset$

ข้อ 3 ถูกเพราะ A เป็นส่วนหนึ่งของ B เมื่อนำส่วนที่ใหญ่กว่ามา $\cap$ จึงตอบเซนที่เล็กกว่า

ข้อ 4 ถูกเมื่อ ถ้า A = B แล้ว $A \subset B$ จึงทำให้ $A \cap B = B$

<u>ดังนั้น</u>ข้อนี้จึงตอบข้อ 2

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด A ={Ø,1,2,3, … }

และ B={{1},{2,3},{4,5,6},7,8,9,… }

แล้ว (A-B) ∪ (B-A) จะมีจำนวนสมาชิก

วิธีทำ A − B ={Ø,1,2,3,4,5,6}; n(A − B) = 7

B − A = {{1}, {2, 3}, {4, 5, 6}}; n (B − A) = 3

(A-B) ∪ (B-A) ={Ø,1,2,3,4,5,6,{1},{2,3},{4,5,6}}

n((A-B) ∪ (B-A)) = 10

หรือ n((A-B) ∪ (B-A)) = n(A − B) + n(B − A)

= 7 + 3

= 10

ตอบ จำนวนของสมาชิก (A−B) ∪ (B−A) คือ 10

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ A,B,C,D เป็นเซตใดๆ (A ∩ C) – (B ∪ D)เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.(A−B) ∩ (D−C)

2. (A−B) ∩ (C′ − D′)

3.(A−B) ∪ (D−C)

4. (A−B) ∩ (D′ − C′)

วิธีทำ (A ∩ C) – (B ∪ D) = (A ∩ C) ∩ (B ∪ D)′

= (A ∩ C) ∩ (B′ ∩ D′)

= (A ∩ B′) ∩ (D′ ∩ C)

= (A−B) ∩ (D′ − C′)

ตอบ ข้อ 4

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า A= {x | x = 1 − $\frac{2}{n}$ และ n เป็นจำนวนนับ}

B = {0,1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ }

และ C ={-2,- $\frac{1}{2}$,0,1, $\frac{1}{2}$,{ $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, …}}

แล้ว (A ∩ C) – B มีจำนวนสมาชิกเท่าใด

วิธีทำ พิจารณา A จะได้สมาชิกดังนี้ {-1,-$\frac{1}{2}$,0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, … }

เมื่อเรา นำ A ∩ C จะได้สมาชิกดังนี้ {0, $\frac{1}{2}$}

ซึ่งสมาชิกที่ A ∩ C ซ้ำกับ B คือ {0}

ดังนั้นเราจะได้ว่า (A ∩ C) – B = {$\frac{1}{2}$}

ตอบ ได้จำนวนสมาชิกทั้งหมด 1 ตัว

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ A = {0, 1, {1}} และ B ={0, {1}, {0,1}} จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. A ∈ P{B}

ข {{1}} ∈ P(A) ∩ P(B)

ค. จำนวนสมาชิกของ P(A ∩ B) = 2

1.ถูกทุกข้อ 2.ถูก 2 ข้อ 3.ถูก 1 ข้อ 4.ผิดทุกข้อ

วิธีทำ พิจารณา P(A) และ P(B)

P(A) = {Ø, {0}, {1}, {{1}}, {0,1}, {0,{1}}, {1,{1}}, {0,1,{1}}} .

P(B) = {Ø, {0}, {{1}} ,{{0, 1}}, {0, {1}}, {0, {{0,1}}}, {{1}, {0,1}}, {0,{1}, {0,1}}}

จากข้อ ก พบว่า {0, 1} ไม่ได้อยู่ใน P(A) ดังนั้นข้อนี้จึงผิด

จากข้อ ข P(A) ∩ P(B) = {Ø, {0} , {{1}} , {0,{1}}}

{{1}} ∈ P(A) ∩ P(B) ดังนั้นข้อนี้จึงถูก

จากข้อ ค จาก A ∩ B ={0, {1}} เมื่อเราหาสับเซตเราจะได้ทั้งหมด 2^2 ตัว

คือ 4 ตัวไม่ใช่ 2 ตัวดังนั้นข้อนี้จึงผิด

ตอบ ข้อ 3

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ในการสอบถามพนักงานจำนวน 300 คนในบริษัทแห่งหนึ่งพบว่า

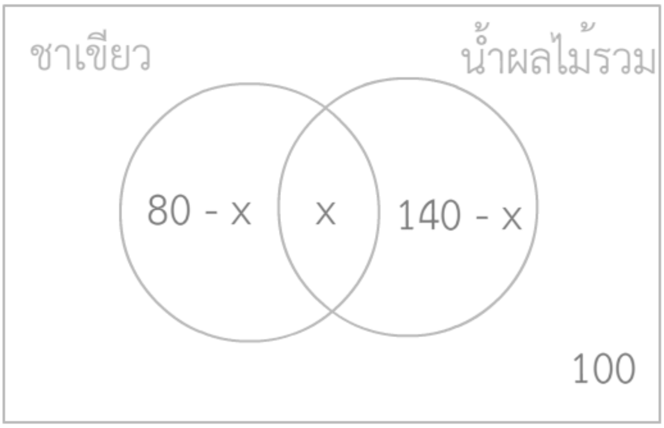
มีพนักงานชอบดื่มชาเขียว จำนวน 80 คน

มีพนักงานชอบดื่มน้ำผลไม้รวมจำนวน 140 คน

มีพนักงานไม่ชอบดื่มทั้ง 2 อย่างจำนวน 100 คน

จงหาค่ามีจำนวนพนักงานที่ชอบดื่มเพียงชนิดเดียว

วิธีทำ



กำหนด x เป็นจำนวนพนักงานชอบดื่มชาและน้ำผลไม้รวม ทั้ง 2 ชนิด

$80 + 140 - x + 100 = 300$

$x = 20$

มีพนักงานชอบดื่มชาเขียวเพียงอย่างเดียว จำนวน 80– 20 = 60 คน

มีพนักงานชอบดื่มน้ำผลไม้รวมจำนวนเพียงอย่างเดียว 140– 20 =120 คน

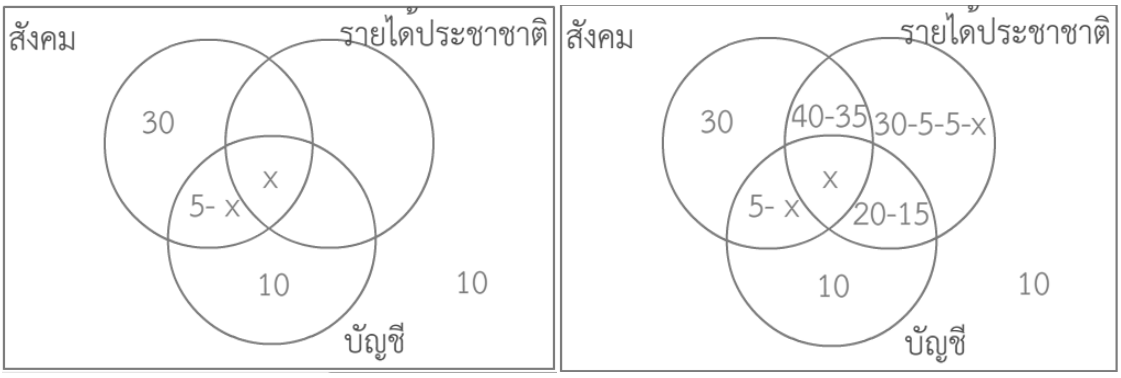
<u>ดังนั้น</u>มีพนักงานที่ดื่มเครื่องดื่มเพียงชนิดเดียวจำนวน 60 + 120 = 180 คน

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จากการสำรวจของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 82 คน พบว่า

มีนักเรียนชอบวิชาสังคมจำนวน	40 คน
มีนักเรียนชอบวิชารายได้ประชาชาติจำนวน	30 คน
มีนักเรียนชอบวิชาบัญชีในชีวิตประจำวันจำนวน	20 คน
มีนักเรียนที่ไม่ชอบทั้ง 3 วิชาจำนวน	10 คน
มีนักเรียนที่ชอบวิชาสังคมเพียงวิชาเดียว	30 คน
มีนักเรียนที่ชอบวิชาสังคมและบัญชี	5 คน
มีนักเรียนที่ชอบบัญชี เพียงอย่างเดียว	10 คน

จงหาจำนวนนักเรียนที่ชอบทั้ง 3 วิชา

วิธีทำ



จากข้อมูลที่โจทย์กำหนด นำข้อมูลโจทย์มาหาส่วนที่เหลือ

กำหนด x คือนักเรียนที่ชอบทั้ง สังคม รายได้ประชาชาติและ บัญชี

$30 + 5 + 5 + 10 + 10 + 5 - x + x + 20 - x = 150$

$85 - x = 150$

$85 - 150 = x$

$x = 3$

<u>ดังนั้น</u>นักเรียนที่ชอบเรียนทั้ง 3 วิชามีจำนวน 3 คน

ตรรกศาสตร์ (Logic)

- ประพจน์และการเชื่อมประพจน์
  - หรือ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ เท็จหรือเท็จ ได้เท็จ ค่าความจริงเป็นจริงง่าย
  - และ เป็นจริงเพียงกรณีเดียวคือ จริงและจริง ได้จริง ค่าความจริงเป็นจริงยาก
  - ถ้า... แล้ว... เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ ถ้า จริง แล้วเท็จ ได้เท็จ
  - ก็ต่อเมื่อ เป็นจริงต่อเมื่อ ตัวหน้าและตัวหลังเหมือนกัน
- สมมูล
  - ประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกัน
- สัจนิรันดร์ / สมเหตุสมผล
  - ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี
  - ตรวจสอบให้ทุกตัวเป็นเท็จ ถ้าเกิดการขัดแย้ง แสดงว่าเป็นสัจนิรันดร์
  - ต้องเป็นสัจนิรันดร์ถึงจะสมเหตุสมผล
- ตัวบ่งปริมาณ
- การให้เหตุผล (เลขพื้นฐาน)
  - อุปนัย
  - นิรนัย

บทตรรกศาสตร์เป็นบทที่ใกล้เคียงกับเซตมากที่สุดบทหนึ่ง การดำเนินทางทางเซต เราสามารถใช้แทนการดำเนินการของตรรกศาสตร์บางตัวได้

ตรรกศาสตร์	**เซต**
ค่าความจริงเป็นจริง	$\mathcal{U}$
ค่าความจริงเป็นเท็จ	$\emptyset$
$\wedge$ (และ)	$\cap$
$\vee$ (หรือ)	$\cup$
$\sim$ (นิเสธ)	$'$ (คอมพลีเมนต์)

ตรรกศาสตร์ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการ วิเคราะห์ค่าความจริง (จริงหรือเท็จ) ของประโยคต่างๆ

ตรรกศาสตร์ **(Logic)** เป็นการศึกษาที่ว่าด้วยการให้เหตุผล โดยมักจะเป็นส่วนสำคัญของวิชาปรัชญา คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ รวมถึงภาษาศาสตร์ ตรรกศาสตร์เป็นการตรวจสอบข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล **(valid argument)**

ประพจน์ (proposition) หมายถึงประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่สามารถบอกได้ ว่าเป็นจริงหรือเท็จเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

เช่น $1+5 = 10$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประโยคเปิด (Open Sentence) หมายถึง ประโยคที่ติดตัวแปรซึ่งไม่สามารถบอกว่าเป็นจริงหรือเท็จได้ แต่เราสามารถทำให้เป็นประพจน์ได้โดยการแทนค่าตัวแปร

เช่น $x + 1 = 5$

ตาราง การเชื่อมประพจน์ (compound proposition)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

สมมูลที่สำคัญ

1. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
2. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
   $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
3. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

ค่าความจริงเป็นจริง (True) ใช้ตัวย่อ T

ค่าความจริงเป็นเท็จ (False) ใช้ตัวย่อ F

ตัวเชื่อมของประพจน์แบ่งได้เป็น 4 ชนิดคือ

1. $\wedge$ และ (and)
2. $\vee$ หรือ (or)
3. $\rightarrow$ ถ้าแล้ว (if… then …)
4. $\leftrightarrow$ ก็ต่อเมื่อ (… if and only if ..)

$\sim$ นิเสธ คือ ค่าความจริงจะตรงข้ามกัน

สัจนิรันดร์ (Tautology) คือประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

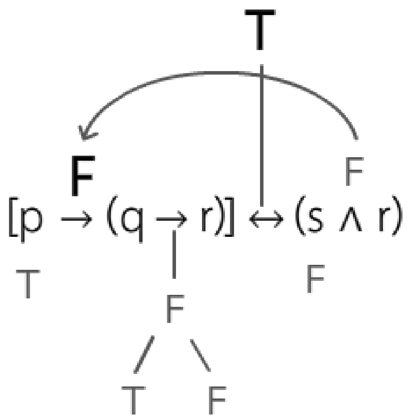
การ***ตรวจสอบ*** ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. เขียนตารางค่าความจริง
2. สมมติให้ประพจน์มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วตรวจสอบว่าขัดแย้งหรือไม่ ถ้าขัดแย้งแสดงว่าเป็นสัจนิรันดร์
3. $a \leftrightarrow b$ เป็นสัจนิรันดร์ก็ต่อเมื่อ $a \equiv b$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ ถ้า $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (s \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นจริงและ $\sim p \vee s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก (Ent 45 มีนาฯ)

1. $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $q \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง
3. $r \rightarrow s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. $s \rightarrow p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

วิธีทำให้พิจารณา $\sim p \vee s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ดังนั้น $\sim p$ เป็นเท็จ p จึงเป็นจริง และ s เป็นเท็จ



p เป็นจริง

q เป็นจริง

r เป็นเท็จ

s เป็นเท็จ

<u>ดังนั้น</u> $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง $T \rightarrow T \equiv T$ ตอบข้อ 1

<u>การอ้างเหตุผล</u>

ให้ $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n$ เป็นเหตุ และ C เป็นผล การอ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ $[P_1 \wedge P \wedge, P_3 \wedge \ldots \wedge P_n] \rightarrow C$ เป็นสัจนิรันดร์

Ex เหตุ

1. $P \rightarrow Q$
2. $\sim Q$

ผล $\sim P$

วิธีทำให้

เหตุ 1. $P \rightarrow Q \equiv T$

2. $\sim Q \equiv T$

ผล $\sim P \equiv F$

จากเหตุ ~Q เป็นเท็จ

ทำให้เหตุอันที่ 1 ขัดแย้ง

ข้อนี้จึงสมเหตุสมผล

ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

เป็นข้อความที่ใช้บ่งบอกจำนวนตัวแปรในประโยคเปิด โดยเกี่ยวข้องกับสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ มีทั้งหมด 2 ชนิดคือ

1. Universal Quantifier เป็นตัวบ่งปริมาณทั้งหมดของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ ใช้ $\forall x[P(x)]$ เป็นสัญลักษณ์ แทนข้อความ สำหรับ x ทุกตัว ค่าความจริง ประพจน์จะเป็นจริงได้ต่อเมื่อ ทุกกรณีต้องเป็นจริง หากเป็นเท็จแม้แต่กรณีเดียวก็เป็นเท็จ

Ex 1 $\forall x[x+1 > 3]$ $\mathcal{U} = \{4,5,6\}$

ประพจน์นี้มีค่าความจริง เป็นจริงเนื่องจากทั้ง 4 ,5 และ 6 นำไปบวก 1 ซึ่งทุกตัวมีค่ามากกว่า 3

Ex 2 $\forall x[3x+1 > 5]$ $\mathcal{U} = I^+$

ประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อถ้า x = 1

2. Existential Quantifier เป็นตัวบ่งปริมาณบางสิ่งของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ ใช้ $\exists x[P(x)]$ เป็นสัญลักษณ์ แทนข้อความ มี x บางตัว ค่าความจริง จะเป็นจริงได้ต่อเมื่อมีกรณีใดก็ตามเป็นจริงเพียงกรณีเดียวก็มีค่าความจริงเป็น<u>จริง</u> ในทางกลับกันถ้าทุกกรณีเป็นเท็จ ค่าความจริงจะมีค่าเป็น<u>เท็จ</u>

<u>การหาค่าความจริงของตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว</u>

∀x∀y มีค่าความจริงเมื่อ x และ y ใน $\mathcal{U}$ แทนค่าแล้วเป็น<u>จริง</u>ทุกกรณี มีโอกาสเกิดจริงยาก

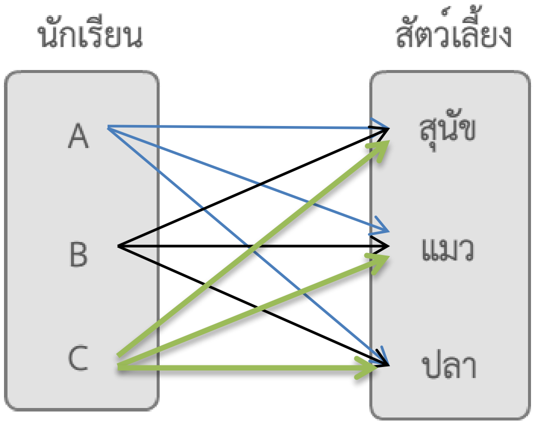
∃x∃y มีค่าความจริงเมื่อ x และ y อย่างน้อย 1 คู่ใน $\mathcal{U}$ แทนค่าแล้วเป็นจริง มีโอกาสเกิดจริงง่าย

∀x∃y มีค่าความจริงเมื่อ x ทุกค่าสามารถหาค่า y บางตัวได้ แล้วจะมีค่าความจริงเป็นจริง

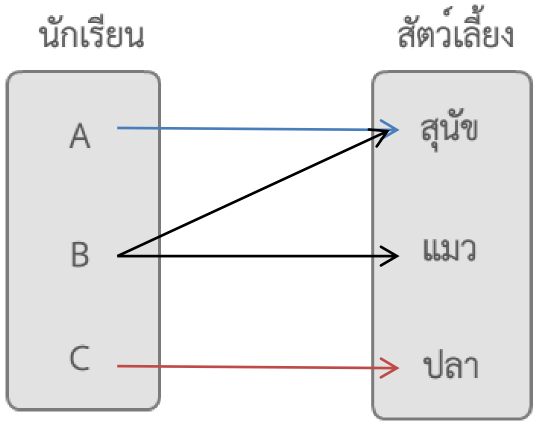
∃x∀y มีค่าความจริงเมื่อ x อย่างน้อย 1 ตัวทำให้ y ทุกตัวใน $\mathcal{U}$ แทนค่าแล้วเป็นจริง

ตัวอย่างวิธีการใช้งาน กำหนดให้ x คือเด็กในห้องเรียนหนึ่ง y คือ สัตว์เลี้ยง

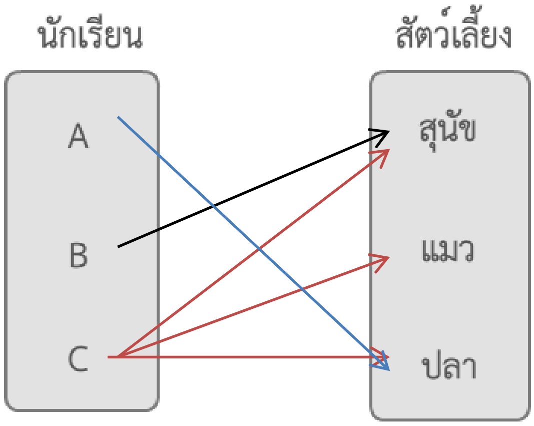
∀x∀y คือ เด็กทุกคนต้องเลี้ยงสัตว์เลี้ยงทุกชนิด



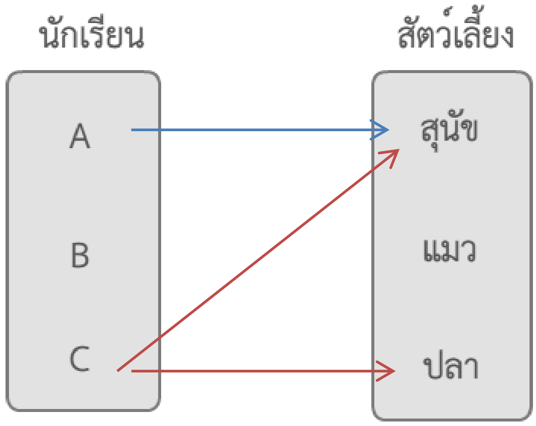
∀x∃y คือเด็กทุกคนเลียงสัตว์เลี้ยงบางชนิด



∃x∀y คือ เด็กบางคนเลี้ยงสัตว์เลี้ยงทุกชนิด



∃x∃y คือ เด็กบางคนเลี้ยงสัตว์เลี้ยงบางชนิด



ตัวอย่างที่ 2 จงหาความจริงต่อไปนี้เมื่อกำหนด $\mathcal{U}$={0,1,2,3}

∀x∀y[x > y] มีค่าความจริงเป็นเท็จเช่นเมื่อ x = 0 y = 1 เป็นเท็จ เมื่อเป็นเท็จกรณีใดกรณีหนึ่งก็มีค่าความความจริงของตัวบ่งปริมาณเป็นเท็จทันที

∃x∃y[x > y] มีค่าความจริงเป็นจริงเช่น เมื่อ x = 2 y =0 เมื่อมีกรณีใดก็ตามเป็นจริงเพียงกรณีเดียว ก็จะทำให้ค่าความความจริงของตัวบ่งปริมาณเป็นจริงทันที

∀x∃y[x > y] มีค่าความจริงเป็นเท็จ

x = 0 ไม่มีค่า y ที่สอดคล้อง
x = 1 ค่า y ที่ใช้ได้คือ 0
x = 2 ค่า y ที่ใช้ได้คือ 0,1
x = 3 ค่า y ที่ใช้ได้คือ 0,1,2

F

∃x∀y[x > y] มีค่าความจริงเป็นเท็จเพราะไม่มี x ที่สามารถทำให้ y ทุกค่าเป็นจริง

นิเสธของตัวบ่งปริมาณ

$\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$

$\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ {-1,1,2} จงหาค่าความจริงของ $\exists x[x^2 - x + 6 = 0]$

วิธีทำ ให้พิจารณาคำตอบของสมการ $x^2 - x + 6 = 0$

เนื่องจากสมการดังกล่าวไม่สามารถแยกตัวประกอบ เราสามารถใช้ตัวเลขที่โจทย์กำหนดแทนลงในสมการเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

$(-1)^2 + 1 + 6 = 7$

$(1)^2 - 1 + 6 = 6$

$(2)^2 - 2 + 6 = 8$

ดังนั้นค่าความจริงจึงเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ p,q,r และ s เป็นประพจน์ที่

ประพจน์ $(p \vee q) \to (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

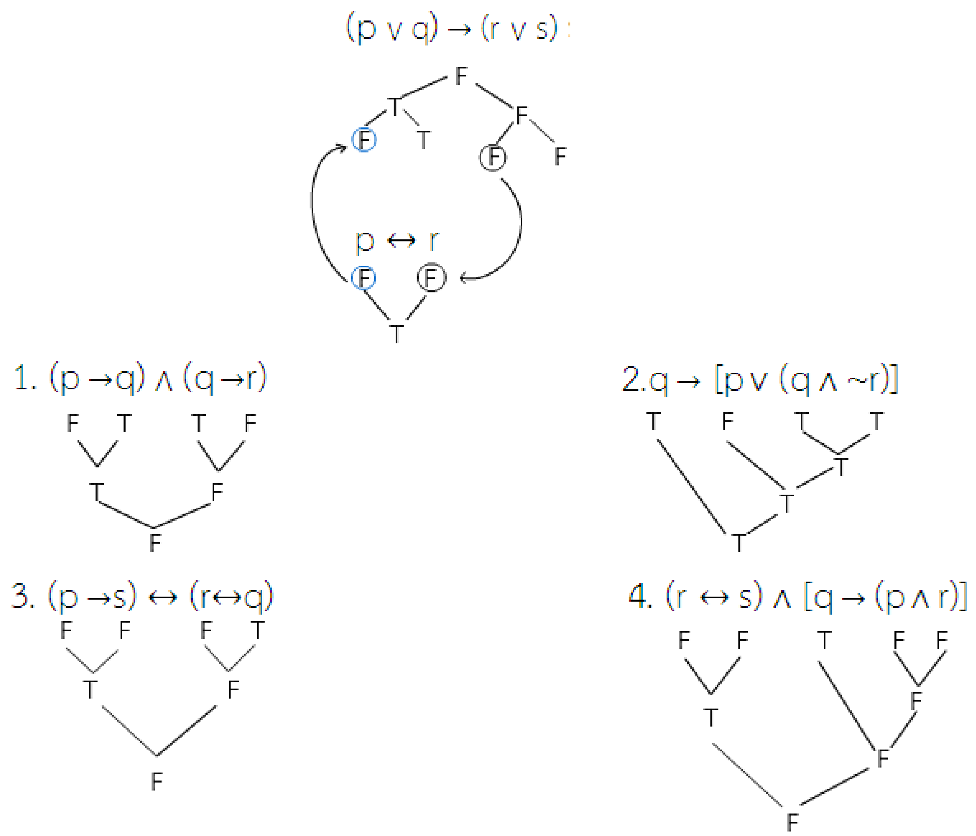
ประพจน์ $p \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ประพจน์ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง (PAT1 ก.ค. 53)

1. $(p \to q) \wedge (q \to r)$
2. $q \to [p \vee (q \wedge \sim r)]$
3. $(p \to s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)$
4. $(r \leftrightarrow s) \wedge [q \to (p \wedge r)]$

วิธีทำ จากโจทย์ $(p \vee q) \to (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จทำให้ทราบว่า r และ s มีค่าความจริงเป็นเท็จเนื่องจาก $T \to F \equiv F$

เมื่อทราบว่า r เป็นเท็จจะทำให้ p มีค่าความจริงเป็นเท็จ เนื่องจาก $p \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง ดังนั้น q จึงมีค่าความจริงเป็นเท็จ



ตอบ ข้อ 2

ตัวอย่างที่ 5 ประพจน์ใดที่สมมูลกับ $\sim[(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \vee r)]$

1.$p \vee (q \wedge \sim r)$ 2.$p \wedge (q \vee \sim r)$ 3.$p \vee (\sim q \wedge r)$ 4.$p \wedge (\sim q \vee r)$

วิธีทำ ขั้นแรกให้กระจายนิเสธจะว่า

$$[\sim (p \rightarrow \sim q) \vee \sim (\sim p \vee r)] \equiv [\sim(\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim r)]$$
$$\equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim r)]$$
$$\equiv [(p \wedge (q \vee \sim r)]$$

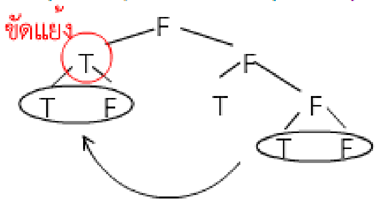
ตอบ ข้อ 2

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ p,q,r เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

1.$(p \rightarrow q) \rightarrow [\sim r \rightarrow (p \rightarrow q)]$ 2.$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

3.$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ 4.$[(p \rightarrow q) \vee r)] \leftrightarrow [(\sim p \vee q) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)]$

1.$(p \rightarrow q) \rightarrow [\sim r \rightarrow (p \rightarrow q)]$



ดังนั้นข้อ 1 จึงเป็นสัจนิรันดร์

2.$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

$(\sim p \vee q) \equiv (q \vee \sim p)$

ดังนั้นข้อ 2 จึงเป็นสัจนิรันดร์

3.$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

F F F

ดังนั้นข้อ 3 ไม่เป็นสัจนิรันดร์เพราะเราไม่สามารถหากรณีที่ทำให้เกิดการขัดแย้งได้เลย

4.$[(p \rightarrow q) \vee r)] \leftrightarrow [(\sim p \vee q) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)]$

$$(\sim p \vee q) \vee (r \vee \sim p)$$
$$\equiv [(\sim p \vee \sim p) \vee q] \vee r$$
$$\equiv [\sim p \vee q] \vee r$$
$$\equiv [p \rightarrow q] \vee r$$

ดังนั้นข้อ 4 จึงเป็นสัจนิรันดร์

ตอบ ข้อ 3

<u>การให้เหตุผล</u> (เลขพื้นฐาน)

ส่วนประกอบของการให้เหตุผลแบ่งเป็น 2 แบบดังนี้

1. ข้ออ้างหรือเหตุ มักปรากฏคำว่า เพราะว่า เนื่องจาก ด้วยเหตุที่ว่า ฯลฯ
2. ข้อสรุปหรือผล มักปรากฏคำว่า เพราะฉะนั้น ด้วยเหตุนี้จึง ดังนั้น ฯลฯ

<u>ประเภทของการให้เหตุผล</u>

การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองจากหลาย ๆ ตัวอย่าง มาสรุปเป็นข้อตกลง หรือข้อคาดเดาทั่วไป หรือคำพยากรณ์ ซึ่งจะเห็นว่าการจะนำเอาข้อสังเกต หรือผลการทดลองจากบางหน่วยมาสนับสนุนให้ได้ข้อตกลง หรือ ข้อความทั่วไปซึ่งกินความถึงทุกหน่วย ย่อมไม่สมเหตุสมผล

<u>ข้อสังเกตของการให้เหตุผลแบบอุปนัย</u>

1. ข้อสรุปของอุปนัย ไม่จำเป็นต้องเป็นจริงเสมอไป
2. ข้อสรุปของอุปนัยสามารถเกิดขึ้นได้มากกว่า 1 คำตอบ
3. ข้อสรุปของอุปนัยสามารถเกิดความผิดพลาดได้สูง

ตัวอย่าง เหตุ 1.ห่านตัวนี้สีขาว
2.ห่านตัวนั้นก็สีขาว
3.ห่านตัวโน้นก็สีขาว
ดังนั้น ข้อสรุปคือ ห่านทุกตัวมีสีขาว

ตัวอย่าง เหตุ 1.คอมพิวเตอร์ที่บ้านใช้ไฟฟ้า
2.คอมพิวเตอร์พกพาใช้ไฟฟ้า
3.คอมพิวเตอร์ในสำนักงานใช้ไฟฟ้า
ดังนั้น ข้อสรุปคือ คอมพิวเตอร์ทุกเครื่องใช้ไฟฟ้า

การให้เหตุผลแบบนิรนัย(Deductive reasoning)เป็นการนำความรู้พื้นฐานที่อาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่าเป็นจริง เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

ข้อสังเกตของการให้เหตุผลแบบนิรนัย

1. เหตุเป็นจริง และ ผลเป็นจริง
2. เหตุเป็นเท็จ และ ผลเป็นเท็จ
3. ข้อสรุปของนิรนัยไม่ได้เป็นจริงทุกกรณีเสมอไป

ตัวอย่าง เหตุ 1.นายจรัสเป็นมนุษย์
2.มนุษย์ทุกคนเป็นสิ่งมีชีวิต
3.สิ่งมีชีวิตต้องการอากาศหายใจ
ดังนั้น ข้อสรุป นายจรัสต้องการอากาศหายใจ

ตัวอย่าง เหตุ 1.นางสาวกานดาเกิดจังหวัดเชียงใหม่
2.จังหวัดเชียงใหม่เป็นจังหวัดท่องเที่ยว
3.จังหวัดเชียงใหม่เป็นจังหวัดภาคเหนือของประเทศไทย
ดังนั้น ข้อสรุป นางสาวกานดาเกิดในจังหวัดท่องเที่ยวภาคเหนือของประเทศไทย

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลแบบนิรนัยจะให้ความแน่นอน แต่การให้เหตุผลแบบอุปนัย จะให้ความน่าจะเป็น

วิธีการตรวจสอบว่าข้อสรุปสมเหตุสมผลหรือไม่

ใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ตรวจสอบความสมเหตุสมผล โดยในการวาดถ้าทุกแผนภาพแสดงผลข้อสรุปตามที่กำหนดแสดงว่า ข้อสรุปสมเหตุสมผล แต่ในทางกลับกัน ถ้ามีแผนภาพแม้เพียงกรณีเดียวที่ไม่สมเหตุสมผล แสดงว่าข้อสรุปนั้นไม่สมเหตุสมผล

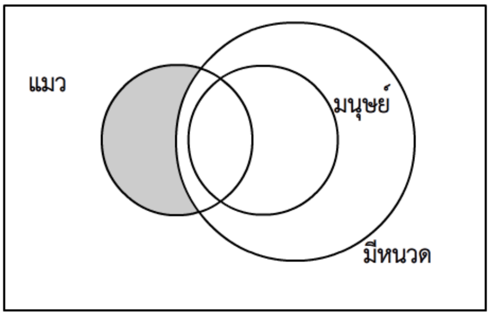
<u>ตัวอย่างที่ 1</u> เหตุ 1.มนุษย์ทุกคนมีหนวด

2.แมวบางตัวมีหนวด

ข้อสรุป แมวทุกตัวเป็นมนุษย์

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

วิธีทำ วาดแผนภาพ



จากแผนภาพพบว่ามีแมวบางตัวที่มีหนวดแต่ไม่ใช้มนุษย์และแมวบางตัวไม่มีหนวด

<u>ดังนั้น</u> ข้อสรุป แมวทุกตัวเป็นมนุษย์ จึงไม่สมเหตุสมผล

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> เหตุ 1.คนไทยทุกคนที่มีอายุตั้งแต่ 7 ปีบริบูรณ์ต้องมีบัตรประชาชน

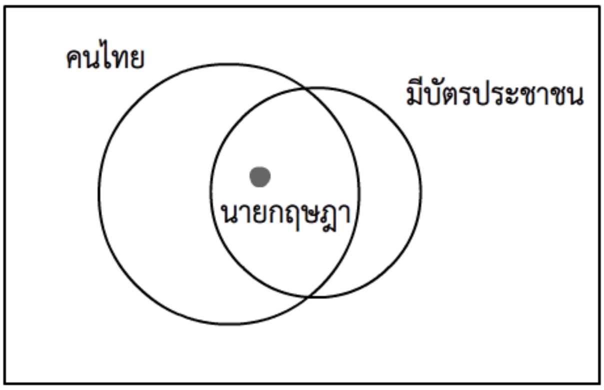
2.นายกฤษฎา เป็นคนไทย

3.นายกฤษฎา อายุ 17 ปี

ข้อสรุป นายกฤษฎา มีบัตรประชาชน

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

วิธีทำ วาดแผนภาพ



จากแผนภาพคนไทยและมีบัตรประชาชนมีนายกฤษฎา

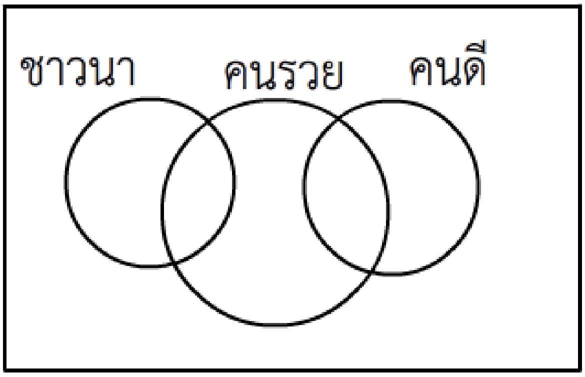
<u>ดังนั้น</u> ข้อสรุป นายกฤษฎา มีบัตรประชาชนจึงสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 3 .จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้แล้วระบุว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ ชาวนาบางคนรวย

คนรวยบางคนเป็นคนดี

ผล คนรวยบางคนไม่เป็นชาวนาและไม่เป็นคนดี



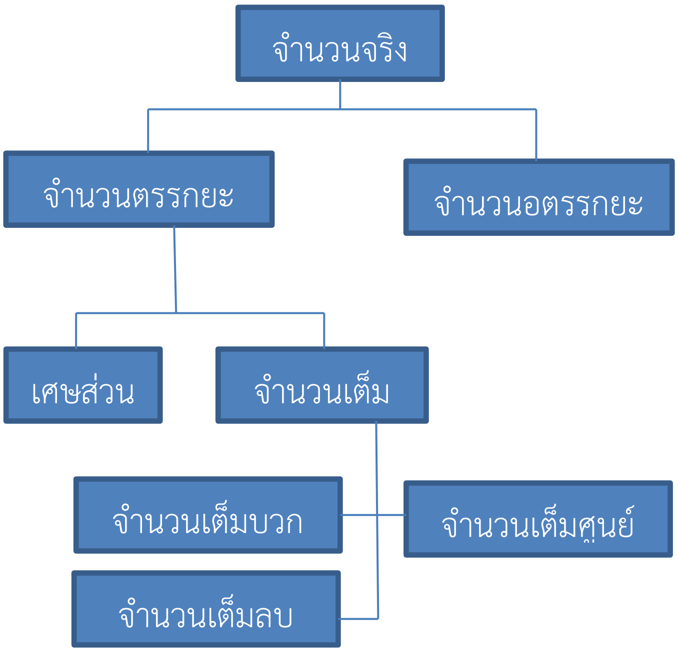
ตอบไม่สมเหตุสมผลเพราะมีกรณีที่เป็นเท็จ

จำนวนจริง (Real Number)

- การแก้สมการ
  - กำลัง 2
    - แยกตัวประกอบ
    - ใช้สูตร $\frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
  - มากกว่ากำลัง 2
    - จับคู่ดึงตัวร่วม
    - หารสังเคราะห์
- การแก้อสมการ
  - แยกตัวประกอบ
  - เขียนเส้นจำนวน ระวังเรื่องการใส่เครื่องหมาย
- ค่าสัมบูรณ์
  - $|x| \le a \rightarrow -a \le x \le a$
  - $|x| \ge a \rightarrow x \ge a$ หรือ $x \le -a$
  - $|x| \ge |y| \rightarrow (x)^2 \ge (y)^2$
  - รูปแบบอื่นๆแยกช่วงคิด
- ทฤษฎีจำนวน
  - หารลงตัว a|b อ่านว่า a หาร b ลงตัว
  - ห.ร.ม. ใช้วิธีของยูคลิด
  - ค.ร.น. ใช้หารสั้น

จำนวนจริง เป็นจำนวนที่ใช้อยู่ในชีวิตประจำวันของเราซึ่งมีทั้งจำนวนบวก จำนวนลบ หรือแม้แต่จำนวนเต็มศูนย์

จำนวนจริง(Real Number) คือจำนวนที่สามารถเขียนบนเส้นตรงที่มีความยาวไม่สิ้นสุด (เส้นจำนวน) ได้ คำว่า จำนวนจริง ซึ่งประกอบด้วยจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตกรรกยะ



จำนวนเต็ม ประกอบไปด้วยจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มศูนย์ จำนวนเต็มลบ

จำนวนนับ หรือจำนวนเต็มบวก ได้แก่ 1,2,3,...

จำนวนเต็มลบ ได้แก่ -1,-2,-3, ... โดยมี -1 มีค่ามากที่สุด

จำนวนคู่ คือจำนวนที่ 2 หารลงตัว
จำนวนคี่ คือจำนวนที่ 2 หารไม่ลงตัว

จำนวนตรรกยะ คือจำนวนที่สามารถเขียนรูปเศษส่วนได้ เช่น 4 , 3.67 3.4848.. $\frac{2}{3}$

จำนวนอตรรกยะคือจำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้ เช่น 6.5123...,e,$\sqrt{2}$

สมบัติของจำนวนจริง

สมบัติ	การบวก	การคูณ
ปิด	ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a + b \in R$	ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a \times b \in R$
สลับที่	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
เปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
เอกลักษณ์	0	1
อินเวอร์ส	-a	$\frac{1}{a}$
แจกแจง	$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$	

ความรู้เสริม

เอกลักษณ์ คือ จำนวนซึ่งนำไปดำเนินการกับจำนวนใดแล้วได้จำนวนนั้นแล้วได้ตัวเดิม

อินเวอร์ส (a^{-1}) คือจำนวนก็ตามซึ่งนำไปดำเนินการกับจำนวนใดแล้วจะได้ เอกลักษณ์

การดำเนินการด้วย Operation

เครื่องหมายดำเนินการ (Operators) หรือ ตัวดำเนินการ นั้นกำหนดการการกระทำที่เกิดขึ้นกับตัวแปรและค่าคงที่ โดยที่นิพจน์ประกอบด้วยตัวแปร และค่าคงที่ และใช้ตัว ดำเนินการคำนวณเพื่อให้ได้ค่า

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด * เป็นตัวดำเนินการในระบบจำนวนจริง ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกทุก

$$a * b = 2a + b$$
$$a * a = 1$$
$$b * b = 0$$

จงหาค่า $5 * (10 * 5)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 5 * (10 * 5) &= 5 * (2(10)+5) \\ &= 5 * 25 \\ &= 2(5) + 25 \\ &= 35 \end{aligned}$$

ตอบ 35

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด * เป็นตัวดำเนินการในระบบจำนวนจริง ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกโดยนิยามของ * คือ $a * b = 4a + 2b - 1$ จงหาเอกลักษณ์ของการดำเนินการต่อไปนี้

วิธีทำ กำหนดให้ e เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ ดังนั้น $a * e = a$

จาก $a * e = 4a + 2e - 1$

$$\begin{aligned} 4a + 2e - 1 &= a \\ 2e &= 1 - 3a \\ e &= \frac{1 - 3a}{2} \end{aligned}$$

ตอบ $\frac{1 - 3a}{2}$

การแก้สมการพหุนามดีกรี 2 (Quadratic equation)

สมการกำลังสองมีรูปทั่วไป คือ

$ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ x เป็นตัวแปร และ a,b,c เป็นค่าคงที่และ a ไม่เป็น 0

การแก้สมการกำลังสอง

1. การสมการโดยการแยกตัวประกอบ
2. ใช้สูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ข้อสังเกต

- ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ สมการจะมี 2 คำตอบ
- ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ สมการจะมี 2 คำตอบที่เหมือนกัน
- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ สมการไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

คำตอบของสมการจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน

การแก้สมการพหุนามดีกรีตั้งแต่กำลัง 3 ขึ้นไป

วิธีที่ 1 จับคู่ดึงตัวร่วม

Ex $x^3 - 2x^2 - 6x + 12 = 0$

$x^2(x - 2) - 6(x - 2) = 0$

$(x^2 - 6)(x - 2) = 0$

$(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(x - 2) = 0$

$x = -\sqrt{6}\ ,\ 2\ ,\ \sqrt{6}$

ความรู้เสริม

สมการพหุนามดีกรี 3 ในรูป $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ เรียกว่า Cubic equation

สมการพหุนามดีกรี 4 ในรูป $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ เรียกว่า Quartic equation

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีเศษเหลือและหารสังเคราะห์

Ex $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0$

ลองแทนเลขพบว่า แทน 2 แล้วสมการเป็นจริง

2	1	4	-7	-10	
	0				+
	1				

2	1	4	-7	-10	
	0	2			+
	1	6			

2	1	4	-7	-10	
	0	2	12		+
	1	6	5		

2	1	4	-7	-10	
	0	2	12	10	+
	1	6	5	0	

$(x - 2)(x^2 + 6x + 5) = 0$

$(x - 2)(x + 5)(x + 1)=0$

$x = 2 , -5 , -1$

หลักการแก้โจทย์คือ

นำสุ่มตัวเลขไปแทนแล้วทำให้สมการเป็นจริง แล้วนำตัวเลขนั้นไปหารสังเคราะห์

ตัวเลขที่สุมไปแทนต้องหารตัวเลข ตัวสุดท้ายของโจทย์ลงตัว การสุ่มเราต้องสุ่มทั้งค่าบวกและลบ

เมื่อทราบว่าใดหารลงตัว แล้วนำสัมประสิทธิ์จากโจทย์มาเป็นตัวตั้งแล้วหารด้วยจำนวนนั้น

ช่วงและการแก้อสมการ

<u>ช่วง</u> (Interval) เมื่อกำหนด a และ b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a < b$

ช่วงเปิด (Opened Interval) จาก a ถึง b คือ $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$

ช่วงปิด (Closed Interval) จาก a ถึง b คือ $[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$

ช่วงครึ่งเปิดทางขวา (Interval half open on the right)

จาก a ถึง b คือ $[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$

ช่วงครึ่งเปิดทางซ้าย (Interval half open on the left)

จาก a ถึง b คือ $(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$

หลักการแก้อสมการ

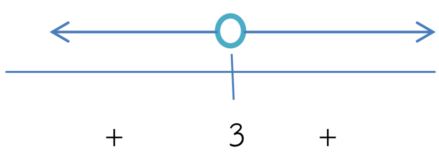
1. ย้ายข้างเหมือนสมการทุกอย่าง ยกเว้น ถ้าเอาจำนวนลบไปคูณหรือการให้กลับเครื่องหมาย
2. ย้ายข้างจนกว่าด้านหนึ่งจะกลายเป็น 0 และแยกตัวประกอบ
3. เขียนเส้นจำนวน หาค่าวิกฤติ (คือเลขที่ทำให้ค่าเป็น 0)
4. ใส่เครื่องหมายเป็นเส้นจำนวน

Ex จงแก้อสมการต่อไปนี้ $x^2 - 6x + 2 > -7$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

$$(x - 3)(x - 3) > 0$$

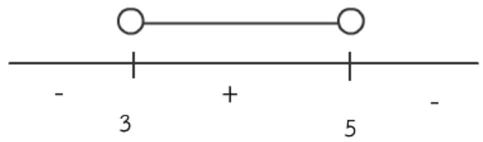
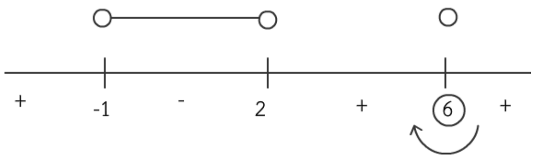
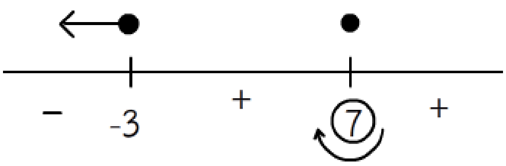
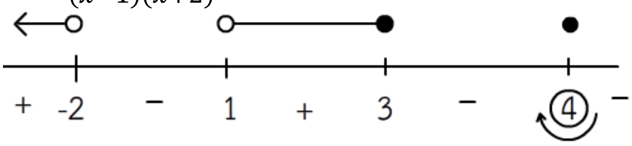
เราจึงสามารถเขียนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ค่า + เกิดจากการแทนเลขที่มากกว่า 3 แล้วพบว่าทุกตัวมีค่าเป็นบวก เพราะฉะนั้นเราต้องแทนเลขลงไปจึงจะทราบ ช่วงจะเป็นบวกหรือลบ

เซตคำตอบ คือ $R - \{3\}$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงเขียนเส้นจำนวนของอสมการต่อไปนี้

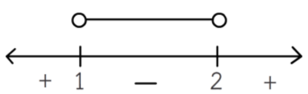
1.$(x-3)(5-x) > 0$  คำตอบ (3,5) คำอธิบาย หากเรานำตัวเลขที่อยู่ระหว่าง 3 ถึง 5 มาแทนลงในสมการ มีผลให้คำตอบได้เป็นจำนวนบวกเสมอ แต่ในทางกลับกัน ถ้านำช่วงที่น้อยกว่า 3 หรือมากกว่า 5 ไปแทนลงในสมการจะทำให้สมการได้คำตอบเป็นจำนวนลบเสมอ	2.$(x-6)^2(x-2)(x+1) < 0$  คำตอบ (-1,2) คำอธิบาย หากเรานำตัวเลขที่อยู่ระหว่าง 3 ถึง 5 มาแทนลงในสมการ มีผลให้คำตอบได้เป็นจำนวนบวกเสมอ
3.$(7-x)^2(x+3) \leq 0$  ตอบ $(\infty,-3] \cup \{7\}$	4.$\frac{(x-3)(1-x)(4-x)^2}{(x-1)(x+2)} \geq 0$  ตอบ $(-\infty,-2) \cup (1,3] \cup \{2\}$ คำอธิบาย ที่เราไม่รวม -2 กับ 1 มาเป็นคำตอบเพราะถ้า ถ้านำมารวมเป็นคำตอบจะทำให้ส่วนเป็น 0 แล้วหาค่าไม่ได้

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาเซตคำตอบของ $\frac{1}{x-2} < -1$

วิธีทำ $\frac{1}{x-2} + 1 < 0$ คำแนะนำถ้าเป็นเศษส่วนแล้วมีตัวแปรซึ่งไม่ทราบว่าจะเป็นบวกหรือลบห้ามคูณไขว้

$$\frac{1+1(x-2)}{x-2} < 0$$

$$\frac{(x-1)}{x-2} < 0$$



เซตของช่วงคำตอบคือ (1,2)

ค่าสัมบูรณ์

นิยาม สำหรับจำนวนจริงใดๆ a, ค่าสัมบูรณ์ของ a เขียนแทนด้วย $|a|$ เท่ากับ a ถ้า $a \geq 0$ และเท่ากับ $-a$ ถ้า $a < 0$ $|a|$ จะไม่เป็นจำนวนลบ

ค่าสัมบูรณ์จะเป็นจำนวนบวกหรือศูนย์เสมอ นั่นคือจะไม่มีค่า a ที่ $|a| < 0$

$|x| = |-x|$ $\quad |x-y| = |y-x|$ $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$ $\quad |x-y| \geq |x| - |y|$

$|x \cdot y| = |x||y|$ $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$ $\quad |x^n| = |x|^n$ $\quad |x^2| = x^2$

การแก้อสมการค่าสมบูรณ์ตัวเดียว

$|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

ตัวอย่าง

$|x - 3| < 5$

$-5 < x - 3 < 5$

$-2 < x < 8$

$|x| \geq a \leftrightarrow x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

ตัวอย่าง

$|x - 2| > 7$

$x - 2 > 7$ หรือ $x - 2 < -7$

$x > 9$ หรือ $x < -5$

การแก้อสมการค่าสมบูรณ์สองตัว

$|x|$ เครื่องหมายอสมการ $|a|$ ให้ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

ตัวอย่าง

$|4x + 3| > |3x - 1|$

$(4x + 3)^2 > (3x - 1)^2$

$(4x + 3)^2 - (3x - 1)^2 > 0$

$(4x+3-3x+1)(4x+3+3x-1) > 0$

$(x + 4)(7x + 2) > 0$

การแก้อสมการค่าสมบูรณ์รูปแบบอื่นๆ

ตัวอย่าง $|x - 3| + |x - 1| \leq 2$

นำคำตอบที่ได้มาอินเตอร์เซกชันกับช่วง

$x \leq 1$	$1 \leq x \leq 3$	$x \geq 3$
$-(x-3) - (x-1) \leq 2$ $-2x+4 \leq 2$ $-2x \leq -2$ $x \geq 4$ ช่วงนี้ไม่มีคำตอบ	$-(x-3) + (x-1) \leq 2$ $2 \leq 2$ จริง ได้ $1 \leq x \leq 3$	$(x-3)+(x-1) \leq 2$ $2x - 4 \leq 2$ $2x \leq 6$ $x \leq 3$ ช่วงนี้ไม่มีคำตอบ

นำตอบทุกช่วงมายูเนียนกัน เซตคำตอบคือช่วง [1,3]

ทฤษฎีจำนวน

การหารลงตัว

n|m คือ n หาร m ลงตัว หรือกล่าวว่า m ถูก n หารลงตัว

n คือตัวหาร m คือพหุคูณของ n

ขั้นตอนการหาร

$m = n(q) + r$

m คือตัวตั้ง n คือตัวหาร q คือผลหาร r คือเศษ

Ex จงแสดงว่า 4|20

วิธีทำ $20 = 4 \times 5 + 0$

เศษเป็น 0 แสดงว่า 4 หาร 20 ลงตัว

ห.ร.ม. (a,b) แทน ห.ร.ม. ของ a และ b คือจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่หาร a และ b ลงตัว

(15,25) = 5 เพราะ 5 คือจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ที่หารทั้ง 15 และ 25 ลงตัว

ขั้นตอนของยุคลิด

1) ต้องการหา ห.ร.ม. ของ a,b ให้ใช้วิธีการหาร
2) (a,b) = (ตัวหาร , เศษเหลือ)
3) ทำขั้นตอน 2 ไปเรื่อยๆ จนกว่าเศษจะเป็น 0
4) เศษเหลือตัวสุดท้ายของการหารก่อนเศษเป็น 0 คือ ห.ร.ม.

Ex จงหา ห.ร.ม. ของ 14 และ 58

$58 = 14(4) + 2$

$14 = 2(7) + 0$

ห.ร.ม.

ดังนั้น (14,58) = 2

ค.ร.น. [a,b] แทน ค.ร.น. ของ a และ b คือจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่หารด้วย a และ b ลงตัว

Ex จงหาค.ร.น. ของ 4 กับ 6

4 • 6 = ห.ร.ม. • ค.ร.น.

24 = 2 • ค.ร.น.

ดังนั้น ค.ร.น. = 12

ทฤษฎีบท a และ b คือจำนวนเต็มบวก แล้ว

a•b = (a,b) • [a,b]

จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

a,b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เมื่อ (a,b) = 1

หารร่วมมากและคูณร่วมน้อย

หารร่วมมากคือจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดซึ่งหารจำนวนที่เราสนใจอย่างน้อย 2 ตัวลงตัว หรือจะกล่าวตามนิยามว่า เมื่อกำหนด d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b ซึ่ง a หรือ b ห้ามเป็น 0ก็ต่อเมื่อ d | a และ d | b และเราแทนห.ร.ม.ที่บวกบวกของ a,b ด้วย (m,n)

อย่าสับสนกับเรื่องช่วงของอสมการนะครับ

Ex จงหาห.ร.ม. ของ 146 และ 192

วิธีทำให้ใช้ขั้นตอนวิธีการหารดังนี้ $192 = 146(1) + 48$

$146 = 48(3) + 2$

$48 = 2(24) + 0$

ห.ร.ม.ของ 146 และ 192 คือ 2 เพราะ 2 คือจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หารทั้ง 146 และ 192 ลงตัว

คูณร่วมน้อยคือจำนวนเต็มบวกซึ่งมีค่าน้อยที่สุดถูกหารด้วยที่จำนวนที่เราสนใจอย่างน้อย 2 ตัวลงตัวหรือจะกล่าวตามนิยามว่า เมื่อกำหนด d เป็นคูณร่วมน้อยของ a และ b ซึ่ง a หรือ b ห้ามเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ $a \mid d$ และ $b \mid d$ และเราแทนค.ร.น.ที่บวกบวกของ a,b ด้วย [m,n]

อย่าสับสนกับเรื่องช่วงของอสมการนะครับ

Ex จงหาค.ร.น.ของ 34 และ 112

วิธีทำ เราสามารถทำได้หลายวิธีเช่นใช้ทฤษฎีบท $a \bullet b = (a,b) \bullet [a,b]$ การหารสั้น การแยกตัวประกอบ สำหรับวิธีที่ง่ายที่สุดและรวดเร็วคือการตั้งหารสั้น

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 34 & 112 \\ \hline & 17 & 56 \end{array}$$

$2 \times 17 \times 56 = 1904$

ดังนั้น ค.ร.น.ของ34 และ 112 คือ 1,904 เพราะ 1,904 คือจำนวนเป็นบวกที่น้อยที่สุดที่ $34 \mid 1{,}904$ และ $112 \mid 1{,}904$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u>

กำหนดให้ S = $\left\{x \,\middle|\, \frac{x}{x^2-3x+2} \geq \frac{x+2}{x^2-1}\right\}$ ช่วงใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ S (PAT1)

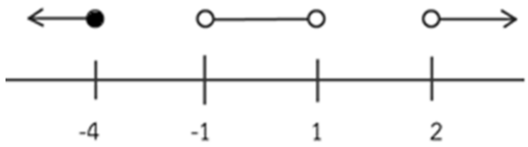
1.(-∞,-3) 2.(-1,0.5) 3.(-0.5,2) 4.(1,∞)

วิธีทำ $\frac{x}{(x-1)(x-2)} \geq \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{x(x+1)-(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2+x-(x^2-4)}{(x-1)(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{x+4}{(x-1)(x-2)(x+1)} \geq 0$$



(-∞,-4) ∪ (-1,1) ∪ (2, ∞)

ตอบ *ข้อ 2 สังเกตได้ว่า* (-1,0.5)*เป็นสับเซตของเซต* S

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนด S ={x | $|x|^3$ =1} เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S (PAT1)

1. {x| x^3=1} 2.{x|x^2=1} 3.{x|x^3=-1} 4.{x^4=x}

วิธีทำ จากเซต S เราสามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้ {1,-1}

พิจารณาคำตอบ 1.{x| x^3=1} สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้ {1}

2.{x|x^2=1} สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้ {1,-1} เนื่องจากทั้งคู่เมื่อนำไปยกกำลังสองแล้วจะมีค่าเท่ากับ 1

3.{x|x^3=-1} สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้ {-1}

4.{x^4=x} สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้ {0,1} เนื่องจากค่า x = x^4 ซึ่ง x^4เป็นได้เพียงจำนวนเต็มบวกเท่านั้น ดังนั้นจึงทำให้ x ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกไปด้วย

<u>ตอบ</u> ข้อ 2

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ถ้าเซตคำตอบของอสมการ $|x^2 + x - 2| < (x + 2)$ คือช่วง (a,b) แล้ว a+b มีค่าเท่ากับเท่าใด (A-NET มีนาคม 50)

วิธีทำ จากนิยามของค่าสัมบูรณ์จะได้ $-(x + 2) < x^2 + x - 2 < x + 2$

$-(x + 2) < x^2 + x - 2$

$0 < x^2 + 2x$

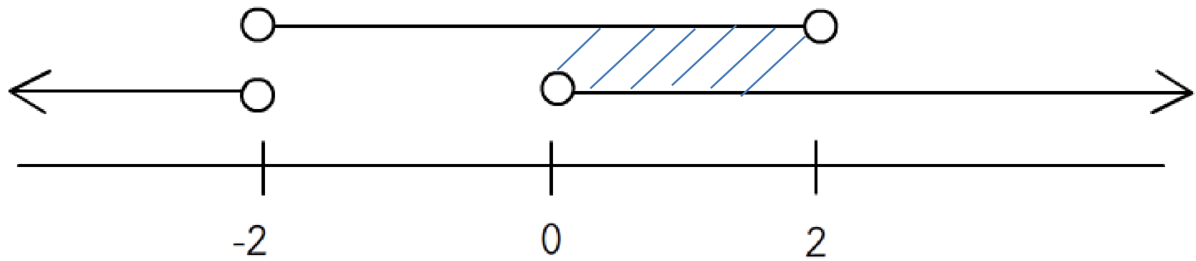
$0 < x(x + 2)$

$x^2 + x - 2 < x + 2$

$x^2 < 4$

$x < -2,2$

นำทั้งสองช่วงมาอินเตอร์เซกชันกัน



จากรูปช่วงที่ซ้ำกันคือ (0,2) ดังนั้น 0 + 2 = 2

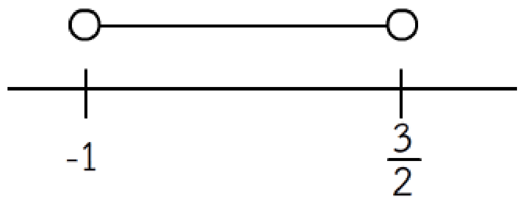
<u>ดังนั้น</u>ตอบ 2

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดให้ $A = \{x \mid (2x+1)(x-1) < 2\}$ $B = \{x \mid |2x-10| < 2\}$ C เป็นเซตของ $A \cap B$ จงหาเซตคำตอบของ $(A \cup B) \cap C'$

วิธีทำ พิจารณา $A = (2x+1)(x-1) < 2$ ให้จัดรูปให้ฝั่งหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์

$2x^2 - x - 3 < 0$

$(2x-3)(x+1) < 0$



พิจารณา $B = -2 < 2x - 10 < 2$

$8 < 2x < 12$

$4 < x < 6$

พิจารณา C คือ $A \cap B = \emptyset$

$(A \cup B) \cap C' = (A \cup B)$

<u>ดังนั้น</u> ตอบ $A \cup B = (-1,1.5) \cup (4,6$

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Funtion)

- ความสัมพันธ์
  - ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A\ y \in B\}$
  - โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
    - โดเมนคือ ค่า x ในคู่อันดับ (x,y)
    - เรนจ์คือ ค่า y ในคู่อันดับ (x,y)
  - อินเวอร์สของความสัมพันธ์
    - สลับที่ x กับ y
- ฟังก์ชัน $y = f(x)$
  - ประเภทของฟังกัน
    - ฟังก์ชัน A ไป B (into function)
    - ฟังก์ชัน A ไปทั่วถึง B (onto function)
    - ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง(1-1 function)
  - อินเวอร์สของฟังก์ชัน
    - สลับที่ x กับ y
    - ตรวจสอบว่าฟังก์ชันหรือไม่
  - ฟังก์ชันประกอบ
    - $gof(x) = g(f(x))$ แทนค่า f(x) ลงใน g(x)
    - ฟังก์ชันเอกลักษณ์ $fof^{-1}(x) = x$
  - การดำเนินการของฟังก์ชัน
    - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
    - $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$; $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
    - $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$; $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
    - $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$ และ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$
  - โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์และฟังก์ชันเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรและเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงต่อไป

คู่อันดับ (Order Pair) เป็นการจับคู่สิ่งของโดยถือลำดับเป็นสำคัญ เช่น คู่อันดับ a, b จะเขียนแทนด้วย (a, b) เรียก a ว่าเป็นสมาชิกตัวหน้า และเรียก b ว่าเป็นสมาชิกตัวหลัง (การเท่ากับของคู่อันดับ) (a, b) = (c, d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

สัญลักษณ์ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต *A* และเซต B เขียนแทนด้วย A x B หรือ เขียนในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขจะได้ว่า

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A\ y \in B\}$$

ตัวอย่าง A ={1,2,3} B = {a,b}

A x B = {(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)}

ดังนั้นจำนวนสมาชิกทั้งหมดคือ n(A) x n(B) = 3 x 2 = 6

ความสัมพันธ์ (Relation) คือเซตของคู่อันดับซึ่งเป็นสับเซตของ A x B

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ A x B

ข้อควรรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์

1. เซตว่างเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เพราะ เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต
2. ถ้าความสัมพันธ์ $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว ความสัมพันธ์ $A \subset C$
3. จำนวนความสัมพันธ์ของ A ไป B คือ $2^{n(A \times B)}$
4. ถ้าไม่มีกำหนดขอบเขตของความสัมพันธ์ ให้ถือว่าขอบเขตของความสัมพันธ์คือ จำนวนจริง เมื่อ A และ B เป็นจำนวนจริง แล้ว $A \times B \subset R \times R$
5. x r y คือ x มีความสัมพันธ์ r กับ y สามารถเขียนอยู่ในรูป $(x,y) \in r$
6. $x \not{r}\, y$ คือ x ไม่มีความสัมพันธ์ r กับ y สามารถเขียนอยู่ในรูป $(x,y) \notin r$

ตัวอย่าง $(9,3) \in r$ คือ 9 r 3 อ่านว่า 9 มีความสัมพันธ์กับ 3 “เป็น 3 เท่า”

โดเมน (Domain) และ เรนจ์ (Range)

1. โดเมน (Domain) ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่มีสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย D_r ดังนั้น $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$
2. เรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่มีสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับในความสัมพันธ์ r ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย R_r ดังนั้น $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

<u>การตรวจสอบข้อจำกัดของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์</u>

ตรวจสอบโดเมน จัด y ในเทอม x
ตรวจสอบเรนจ์ จัด x ในเทอม y

1.ในรูปแบบเศษส่วน

แนวคิด ส่วนห้ามเป็น 0 เนื่องจากส่วนเป็น 0 แล้วหาค่าไม่ได้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> r = $\left\{(x,y) \mid y = \frac{3}{x+2}\right\}$ จงพิจารณาหาโดเมนและเรนจ์

ตรวจสอบโดเมน จากความสัมพันธ์ ส่วนห้ามเป็นศูนย์ คือ

$x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$

ตรวจสอบเรนจ์ ให้จัด x ในเทอม y คือ

r = $\left\{(x,y) \mid x + 2 = \frac{3}{y}\right\}$

r = $\left\{(x,y) \mid x = \frac{3}{y} - 2\right\}$

r = $\left\{(x,y) \mid x = \frac{3-2y}{y}\right\}$

จากความสัมพันธ์ ส่วนห้ามเป็นศูนย์ คือ

$y \neq 0$

ตอบ โดเมนคือ $(-\infty,-2) \cup (-2, \infty)$ หรือ $R - \{-2\}$

เรจน์คือ $(-\infty,0) \cup (0, \infty)$ หรือ $R - \{0\}$

2.ในรูปของยกกำลัง 2

แนวคิด **(จำนวนจริงใดๆ)^2 ≥ 0**

ตัวอย่างที่ 2 r = {(x,y)| y = $(x-3)^2$ } จงพิจารณาหาโดเมนและเรนจ์

ตอบ โดเมน คือจำนวนจริง {x | x ⊂ R}

เรนจ์ คือจำนวนจริงซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 {y | y ≥ 0 }

3.ในรูปในเครื่องหมายกรณฑ์

แนวคิด $\sqrt{A}$ จะพบว่า A ≥0 เนื่องจากในเรื่องความสัมพนธ์จะมีจำนวนจริงเป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะทำให้ ค่าของ A ติดลบไม่ได้ในเรื่องของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 3 r = {(x,y)| y = $\sqrt{2x-8}$ } จงพิจารณาหาโดเมนและเรนจ์

$$2x - 8 \geq 0$$
$$2x \geq 8$$
$$x \geq 4$$

ตอบ โดเมน คือจำนวนจริง {x | x ≥ 4}

เรนจ์ คือจำนวนจริงซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 {y | y ≥ 0 }

4.ในรูปเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

แนวคิด **|จำนวนจริงใดๆ| ≥ 0**

ตัวอย่างที่ 4 r = {(x,y)| y = |5 – 2x|} จงพิจารณาหาโดเมนและเรนจ์

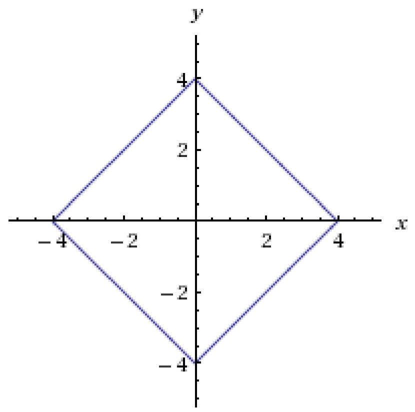
ตอบ โดเมน คือจำนวนจริง {x | x ⊂ R}

เรนจ์ คือจำนวนจริงซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 {y | y ≥ 0 }

5.ประยุกต์โดยใช้กราฟ แล้วพิจารณาจากกราฟ ค่า x คือโดเมน ค่า y คือเรนจ์

ตัวอย่างที่ 5 $r = \{(x,y) \mid |x|+|y| = 4\}$ จงพิจารณาหาโดเมนและเรนจ์

สามารถวาดกราฟได้



ตอบ โดเมน คือ $\{x \mid -4 \le x \le 4\}$

เรนจ์ คือ $\{y \mid -4 \le y \le 4\}$

กราฟ วงกลม วงรี พาราโบลา ไฮเปอร์โบลา สามารถศึกษาได้จากบทเรขาคณิตวิเคราะห์

ฟังก์ชัน (Function) คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่แตกต่างกัน

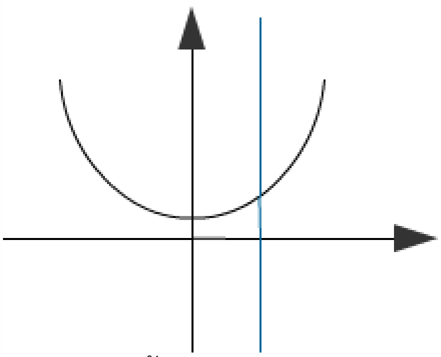
ฟังก์ชัน A ไป B (into function) คือฟังก์ชันที่ใช้สมาชิกตัวหน้าครบทุกตัว
$D_f = A$ $R_f \subset B$ เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $f: A \rightarrow B$

ฟังก์ชัน A ไปทั่วถึง B (onto function) คือฟังก์ชันที่ใช้สมาชิกตัวหน้าและตัวหลังครบทุกตัว
$D_f = A$ $R_f = B$ เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

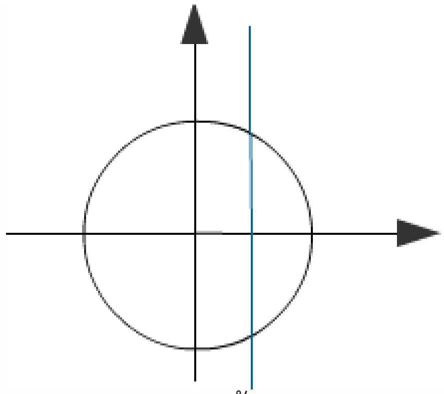
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 function) คือ ฟังก์ชันที่ตัวหลัง (y) สามารถจับคู่กับสมาชิกตัวหน้า x เพียง 1 ตัวเท่านั้น เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B$

<u>การตรวจสอบความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชัน</u>

เราสามารถทดสอบว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่โดยการลากเส้นแนวขนานแนวแกน y หาก ตัดกราฟมากกว่า 1 จุดแสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

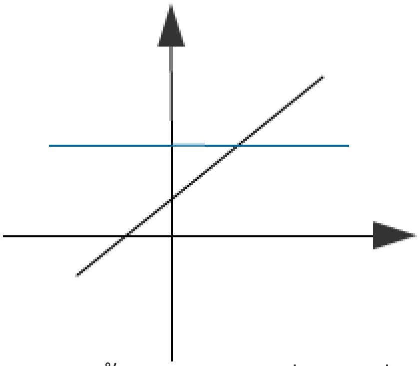


กราฟนี้เป็นฟังก์ชัน

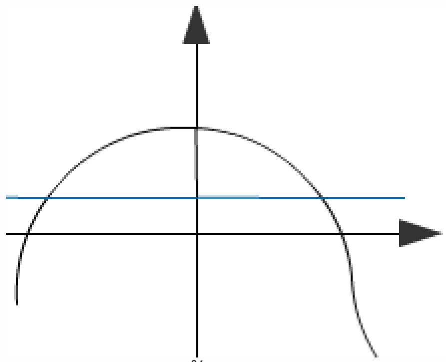


กราฟนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

สำหรับการพิจารณาว่าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เราลากแนวเส้นขนานแกน x ถ้าเส้นตัดกราฟมากกว่า 1 จุดแสดงว่าฟังก์ชันไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



กราฟนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



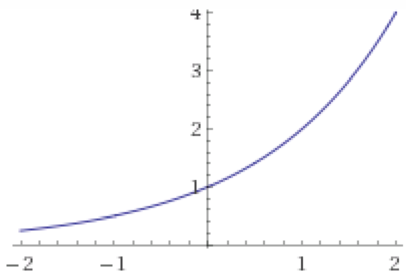
กราฟนี้ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>ประเภทของฟังก์ชัน</u>

ฟังก์ชันเพิ่ม

เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า $x_1 < x_2$

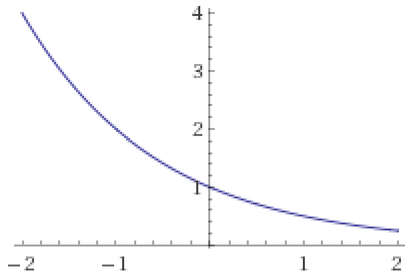
แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$



ฟังก์ชันลด

เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า $x_1 < x_2$

แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



<u>สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน</u>

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเราจะเรียน $y = f(x)$ โดย $(x,y) \in f$

ตัวอย่างที่ 1 f={(1,2),(3,4),(5,6)}

f(1) = 2

f(5) = 6

ตัวอย่างที่ 2 $f(x) = x^2+3x-1$ จงหา f(2)

$f(2) = (2)^2+3(2)-1$

f(2) = 9

ตัวอย่างที่ 3 f(2x+6) = 3x-4จงหา f(2)

f(2) = 3(−2) − 4

= −10

วิธีคิด จับก้อนข้างใน f( ) =

จำนวนที่โจทย์ต้องการ

2x+6 = 2

2x = -4

x =-2

ตัวอย่างที่ 4 f(2x-1) = 4x + 5 จงหา f(x)

$f(x) = 4[\frac{x+1}{2}]+5$

= 2(x+1)+5

= 2x+7

ระวัง

$2x_1 - 1 = x_2$

$2x_1 = x_2 + 1$

$x_1 = \frac{x_2+1}{2}$

ฟังก์ชันผกผัน

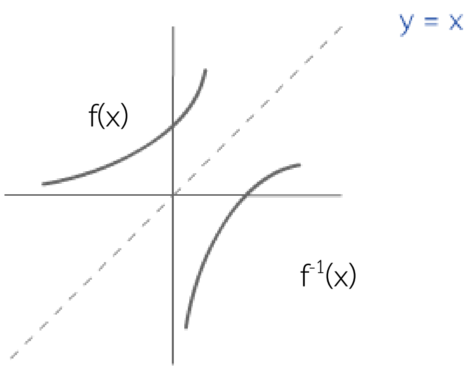
อินเวอร์สของความสัมพันธ์ (r^{-1}) คือ ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลัง

Ex

r = {(1,2),(3,4),(5,6)}

r^{-1}={(2,1),(4,3),(6,5)}

กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์



อินเวอร์สของฟังก์ชัน คือฟังก์ชันที่เกิดจากการสลับสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลัง

Ex

$f=\{(x,y) \in I^+ \times I \mid y = 2x+1\}$

$f^{-1}=\{(y,x) \in I \times I^+ \mid y = 2x+1\}$

หรือ $f^{-1}=\{(x,y) \in I \times I^+ \mid x = 2y+1\}$

ซึ่งสามารถจัดรูปได้ดังนี้

$f^{-1}=\{(x,y) \in I \times I^+ \mid y = \frac{x-1}{2}\}$

<u>ความสัมพันธ์ระหว่าง f(x) และ $f^{-1}(x)$</u>

1. $f^{-1}(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
2. $D_{f^{-1}} = R_f$
3. $R_{f^{-1}} = D_f$

<u>รูปแบบการแก้ปัญหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน</u>

อินเวอร์สในรูปคู่อันดับ

Ex $f = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ จงหา $f^{-1}(4)$

$f^{-1}=\{(2,1),(4,3),(6,5)\}$

$f^{-1}(4) = 3$

อินเวอร์สในรูปสมการปกติ

Ex f(x) = 3x +1 จงหา f^{-1} (2)

y = 3x +1

สลับที่ x และ y x = 3y +1

y = $\frac{x-1}{3}$

f^{-1} (x) = $\frac{x-1}{3}$

f^{-1} (2) = $\frac{1}{3}$

Ex f(x) = $\frac{4x-1}{6x+5}$ จงหา f^{-1} (2)

y = $\frac{4x-1}{6x+5}$

สลับที่ x และ y x = $\frac{4y-1}{6y+5}$

x(6y+5) = 4y − 1

x(6y+5) +1 = 4y

6xy − 4y + 5x +1 = 0

y(6x-4) = - 5x − 1

y = $\frac{-5x-1}{6x-4}$

f^{-1} (x) = $\frac{-5x-1}{6x-4}$

f^{-1} (2) = $\frac{-11}{8}$

Ex f(x) = $\frac{ax \pm b}{cx \pm d}$

f^{-1}(x) = $\frac{(-d)x \pm b}{cx \pm (-a)}$

อินเวอร์สในรูปไม่สมการปกติ

แนวคิดให้สลับก้อนข้างใน f($\square$) = $\triangle$ เป็น f^{-1} ($\triangle$) = $\square$

Ex f(4x+1) = 2x − 2 จงหา f^{-1}(-2)

f^{-1}(2x − 2) = 4x +1

f^{-1}(x) = 4[$\frac{x+2}{2}$] +1

f^{-1}(x) = 2(x+2) +1

f^{-1}(x) = 4x+5

f^{-1}(-2) = 4(-2) +5

= −3

กำหนด A แทน x_2

2x − 2 = A

x = $\frac{A+2}{2}$

ฟังก์ชันประกอบ (Composite Function)

$gof(x) = g(f(x))$ ทุก $x \in D_{gof}$ และจะหาค่าได้เมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

Ex $f(x) = x^2+3$ $g(x) = -x+5$

จงหา $gof(1)$

วิธีทำ $g(f(1)) = g(1^2+3)$

$= g(4)$

$= -4 + 5$

$= 1$

ฟังก์ชันเอกลักษณ์

$(fof^{-1})(x) = x$ และ $(f^{-1}of)(x) = x$ แต่ $(f^{-1}ogof)(x) \neq x$

ตัวอย่าง $f(x) = 3x+7$ จงหา $(fof^{-1})(5)$

ตอบ 5 เพราะเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

ฟังก์ชันประกอบอินเวอร์ส

$(fog)^{-1}(x) = g^{-1}of^{-1}(x)$

การดำเนินการของฟังก์ชัน

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$; $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$(f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$; $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$ และ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$

Ex 1

$f = \{(1,-1),(3,2)\}$ $g(x)=\{(1,2),(7,3)\}$

$(f+g)(x) = \{(1,1)\}$

$(f-g)(x) = \{(1,-3)\}$

$(f\cdot g)(x) = \{(1,-2)\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \{(1,-\frac{1}{2})\}$

Ex2 กำหนด $f(x)= -x+5$ และ $g(x) = 2x+6$

$(f+g)(x) = (-x+5) + (2x+6) = x+11$

$(f-g)(x) = (-x+5) - (2x+6) = -3x-1$

$(f\cdot g)(x) = (-x+5)(2x+6) = -2x^2+x+30$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{(-x+5)}{(2x+6)}$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กำหนดให้ f ={(1,2),(2,7),(3,4),(4,1),(5,6)}

ก. จงหา f(f(1))

วิธีทำ $f(f(1)) = f(2)$

$f(2) = 7$

<u>ตอบ</u> 7

ข. จงหา $f^{-1}(f(3))$

$f^{-1} = \{(2,1),(7,2),(4,3),(1,4),(6,5)\}$

$f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(4)$

$f^{-1}(4) = 3$

<u>ตอบ</u> 3

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดให้ f(0) = 10 และ f(x+1) = f(x) + 5 จงหา f(20)

วิธีทำ พิจารณา f(1) คือ (f(0)) +5 = 15 (เกิดจาก 15 + 0(5))

พิจารณา f(2) คือ (f(1)) +5 = 20 (เกิดจาก 15 + 1(5))

พิจารณา f(3) คือ (f(2)) +5 = 25 (เกิดจาก 15 + 2(5))

f(20) เกิดจาก 15 + 19(5) = 110

<u>ตอบ</u> 110

ภาคตัดกรวย (Conic section)

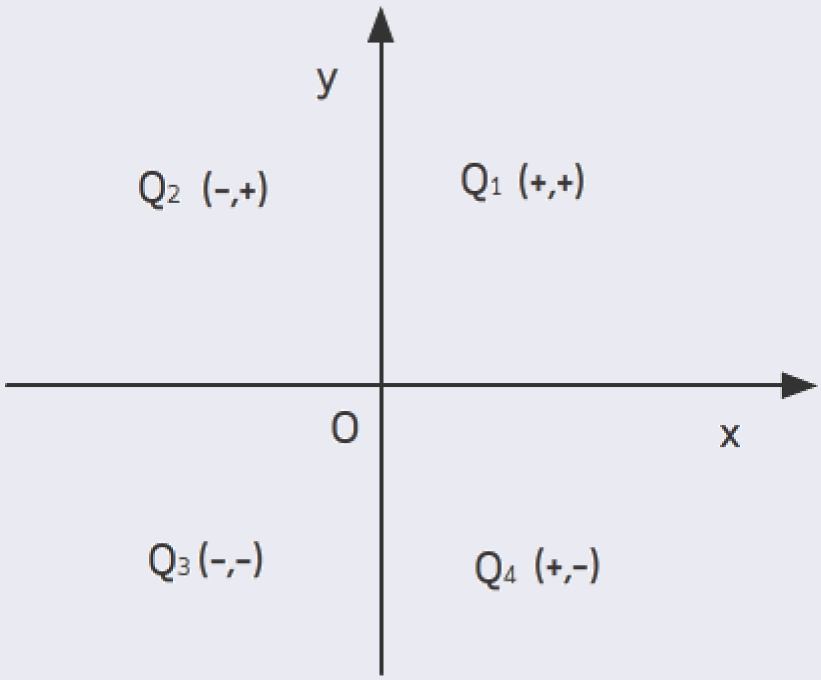
- จุด
  - ระยะห่างระหว่างจุด
  - จุดแบ่งเส้นตรง
  - จุดตัดเส้นมัธยฐาน
  - พื้นที่ n เหลี่ยม
- เส้นตรง
  - สมการเส้นตรง
  - ความชันเส้นตรง
  - ระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง
  - ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรง
- การเลื่อนแกนขนาน
- วงกลม
- วงรี
- พาราโบลา
- ไฮเพอร์โบลา

เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย เป็นการคำนวณเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต ซึ่งเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (Fundamental of Geometry)

ระบบแกนมุมฉาก (Coordinate System)

คือระบบแกนที่มีแกนราบ (แกน x) และแกนดิ่ง (แกน y) ตั้งฉากกันที่จุด O (Origin) หรือจุดกำเนิด หรือ จุด (0,0)



ดังนั้น เราสามารถแทนคู่อันดับใดๆ ลงในระบบระบบแกนมุมฉาก เช่นคู่อันดับ (x,y) เป็นจุด

ห่างจากแกน y เป็นระยะทาง |x| หน่วยไป ทางขวา เมื่อ x เป็นบวก

ห่างจากแกน y เป็นระยะทาง |x| หน่วยไป ทางซ้าย เมื่อ x เป็นลบ

ห่างจากแกน x เป็นระยะทาง |y| หน่วยไป ทางบน เมื่อ y เป็นบวก

ห่างจากแกน x เป็นระยะทาง |y| หน่วยไป ทางล่าง เมื่อ y เป็นลบ

จุด 2 จุด

ความยาว

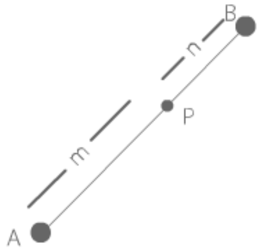
$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ความชัน

$m_{ab} = \tan(\theta) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

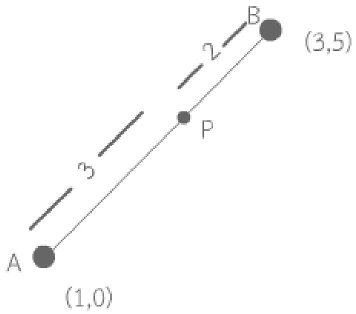
จุดแบ่งเส้นตรง

$P = \left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$



ถ้าจุดแบ่งครึ่ง AB คือ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Ex



$|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (0-5)^2}$

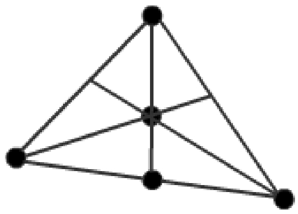
$= \sqrt{29}$

$m_{ab} = \dfrac{5-0}{3-1} = \dfrac{5}{2}$

$P\left(\dfrac{3(3)+2(1)}{3+2}, \dfrac{3(5)+2(0)}{3+2}\right)$

$= P\left(\frac{11}{5}, 3\right)$

จุดตั้งแต่ 3 จุดขึ้นไป



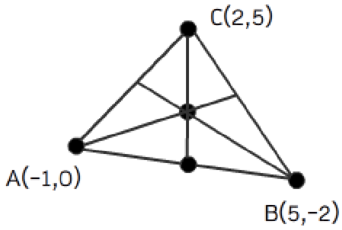
1.จุดตัดเส้นมัธยฐาน (Centroid)

$\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

2.พื้นที่รูป n เหลี่ยม

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

Ex



1.จุดตัดเส้นมัธยฐาน

$\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{0-2+5}{3}\right) = (2,1)$

2.พื้นที่รูป n เหลี่ยม

$$\begin{array}{c} \quad 0 \quad 4 \quad 5 \\ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \quad 2 \quad 25 \quad 0 \end{array}$$

$\frac{1}{2}|2+25+0+0+4+5| = 18$ ตารางหน่วย

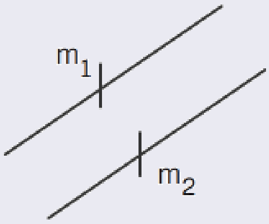
เส้นตรง ผ่านจุด (x_1, y_1) , มีความชัน m

1.สร้างสมการเส้นตรงจาก $y - y_1 = m(x - x_1)$

2.สมการใช้หาความชัน $y = mx + c$

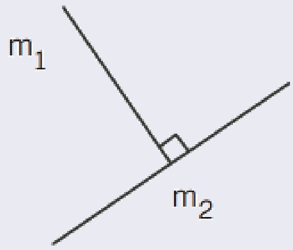
เส้นตรงสองเส้น

1



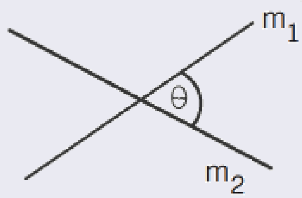
ขนานกัน $m_1 = m_2$

2



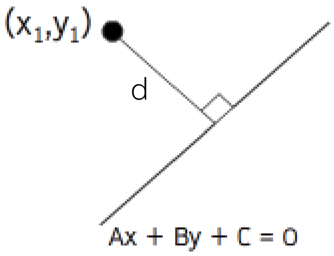
ตั้งฉาก $m_1 \times m_2 = -1$

3



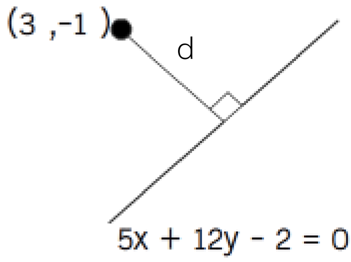
ทำมุม θ $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$

<u>ระยะจากจุดถึงเส้นตรง</u>



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

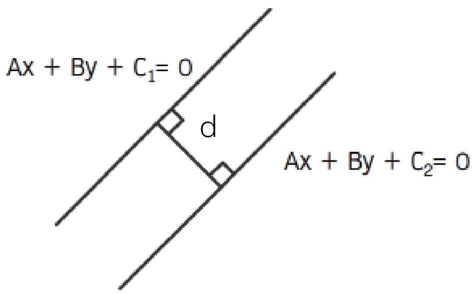
Ex



$$d = \frac{|5(3) + 12(-1) - 2|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

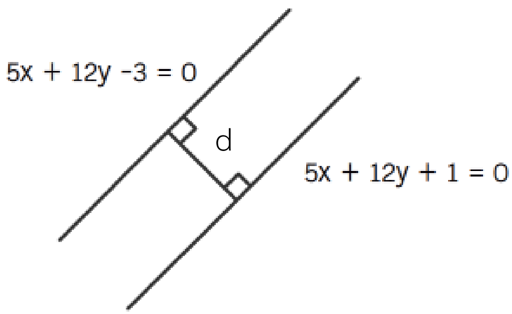
$$= \frac{1}{13}$$

<u>ระยะทางเส้นตรงถึงเส้นตรง</u>



$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ex



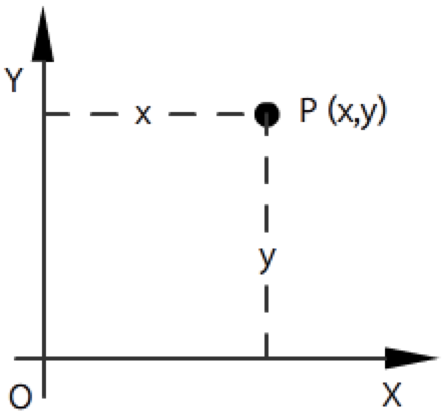
$$d = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$= d = \frac{4}{13}$$

การเลื่อนแกน (Translation of Axes)

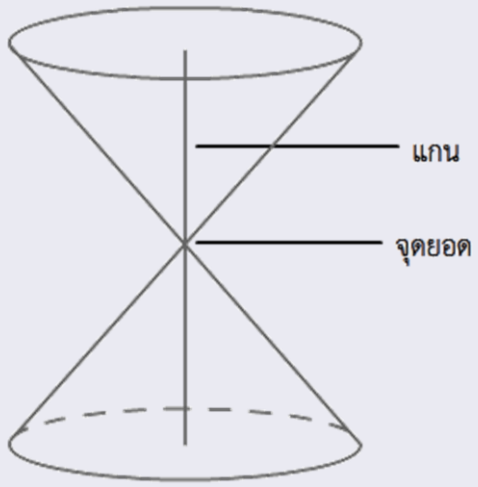
การเลื่อนแกนทางขนาน หมายถึง หมายถึงการเปลี่ยนแปลงแกนพิกัดเดิมอย่างน้อยหนึ่งแกน (แกน X หรือแกน Y) โดยให้แกนพิกัดใหม่ขนานกับแกนพิกัดเดิม

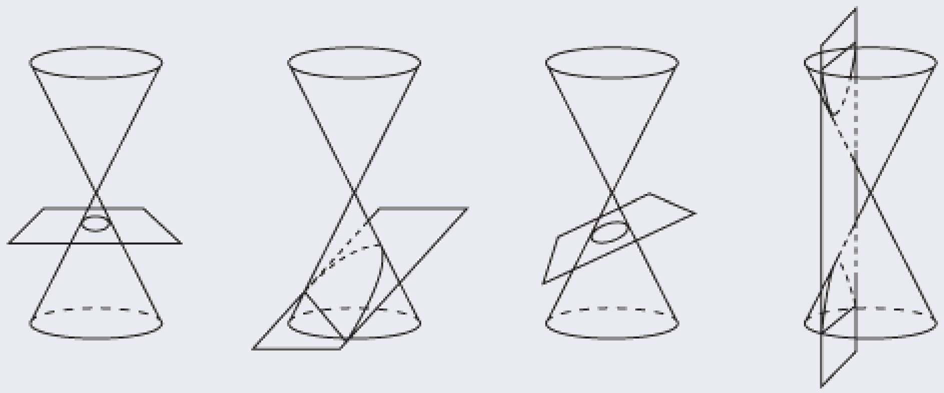
การเลื่อนแกนทางขนานนับเป็นพื้นฐานที่สำคัญที่จะช่วยในการศึกษาเกี่ยวกับภาคตัดกรวยได้ สะดวกยิ่งขึ้นในระบบแกนมุมฉาก เราใช้แกน X และ Y สำหรับอ้างอิงพิกัดหรือตำแหน่งของจุดในระนาบจุด P(x, y) เป็นจุดที่อยู่ห่างจากแกน Y ไปทางขวามือเป็นระยะ x หน่วย และอยู่ห่างจากแกน X ซึ่งอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ y หน่วย ดังรูป



ภาคตัดกรวย (conic section หรือ conic) ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เส้นโค้งที่ได้จากการตัดพื้นผิวกรวยกลม ด้วยระนาบแบน ภาคตัดกรวยนี้ถูกตั้งเป็นหัวข้อศึกษาตั้งแต่สมัย 200 ปี ก่อนคริสต์ศักราชโดย อพอลโลเนียส แห่ง เพอร์กา ผู้ซึ่งศึกษาภาคตัดกรวยและค้นพบสมบัติหลายประการของภาคตัดกรวย ต่อมากรณีการศึกษาภาคตัดกรวยถูกนำไปใช้ประโยชน์หลายแบบ

กรวยกลมตรงมีลักษณะดังนี้





วงกลม เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบ ที่ตั้งฉากแกนของกรวย

พาราโบลา เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ขนานกับเส้นขอบกรวย

วงรี เกิดจาดการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบเพียงส่วนเดียว โดยที่ระนาบนั้นไม่ขนานกับเส้นของกรวยและไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย

ไฮเปอร์โบลา เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตัดทั้งสองส่วนของกรวย

วงกลม(Circle)

วงกลมคือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลม(center)เป็นระยะคงตัว และมีระยะทางคงตัว คือรัศมี(radius) ของวงกลม

สมการรูปมาตรฐาน วงกลมคือ $(x - h)^2+(y - k)^2=r^2$

ส่วนประกอบของวงกลม จุดยอด (h,k)

รัศมี r

สมการรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ถ้าสมการของวงกลมในรูปแบบทั่วไป สามารถเขียนสมการใหม่ในรูปแบบสมการมาตรฐานได้โดยใช้วิธีการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

Ex จงหารัศมีของวงกลมและจุดศูนย์กลางของสมการวงกลมต่อไปนี้ $x^2 +y^2– 4x + 6y - 12 = 0$

วิธีทำ $x^2 +y^2– 4x + 6y = 12$

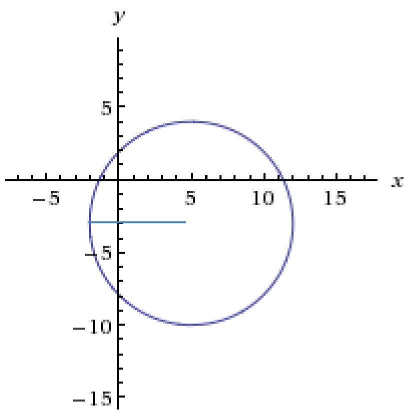
$x^2 – 4x +4 + y^2 +6y + 9 = 12 + 4 + 9$

$(x^2–2(2)x+2^2) + (y^2+2(3)y+3^2) = 12+2^2+3^2$

$(x–2)^2 + (y+3)^2 = 25$ หรือ $(x–2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

∴ วงกลมจุดศูนย์กลาง (2,-3) รัศมี 5

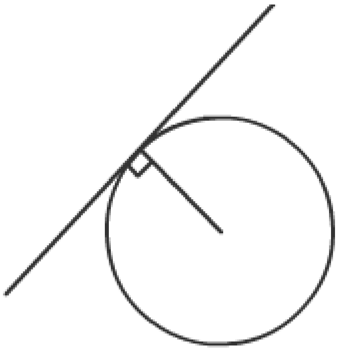
Ex จงวาดกราฟของสมาการต่อไปนี้ $(x-5)^2+(y+3)^2=49$



จุดยอด (5,-3)

รัศมี 7 หน่วย

<u>ข้อควรระวังเรื่องวงกลม</u>



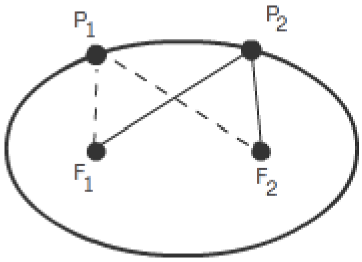
1.เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส

($m_{\text{เส้นสัมผัส}} \times m_{\text{รัศมี}} = -1$)

2.ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดสัมผัสคือ รัศมี

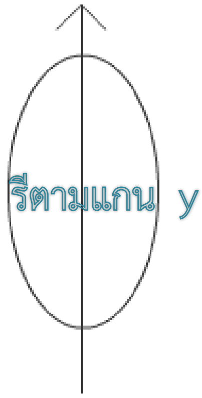
วงรี (ellipse)

วงรี คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุดโฟกัส (focus) ทั้ง 2 มีค่าคงตัว



$$|F_1P_1| + |F_2P_1| = |F_1P_2| + |F_2P_2|$$
$$= 2a$$

สมการวงรีรูปมาตรฐาน

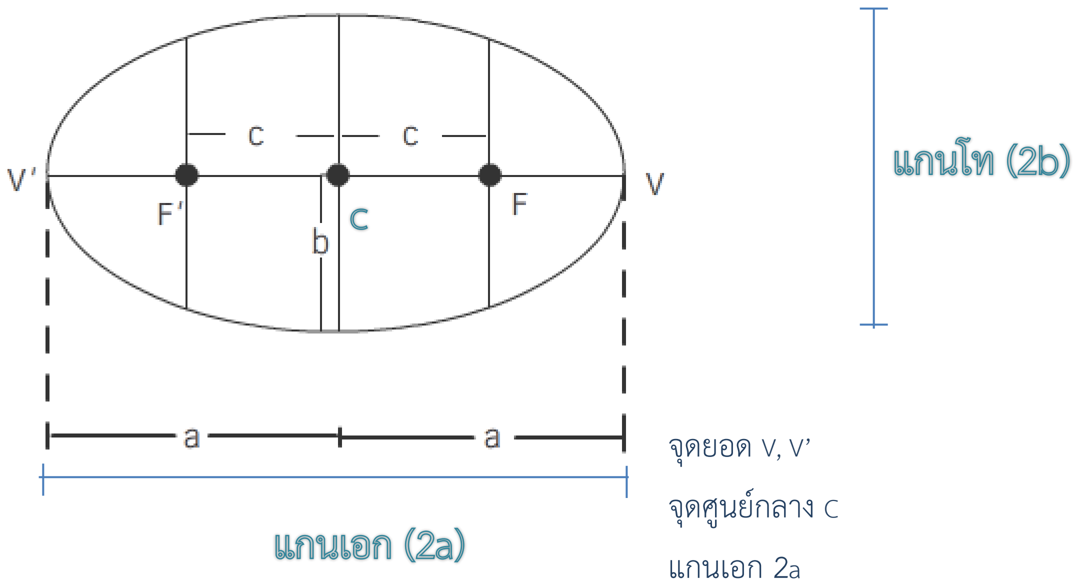


$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

<u>คำแนะนำ</u> ค่า a จะมีค่ามากกว่าค่า b <u>เสมอ</u>

ความสัมพันธ์ของวงรี $c^2 = a^2 - b^2$

ส่วนประกอบของวงรี



จุดยอด V, V'

จุดศูนย์กลาง C

แกนเอก 2a

แกนโท 2b

ลาตัสเล็กตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$

ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$

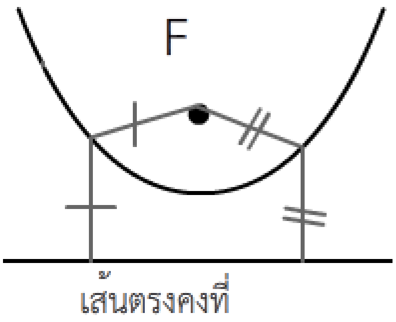
โดยที่ $0 < e < 1$

e เข้าใกล้เลข 0 จะเป็นรูปใกล้เคียงวงกลม

e เข้าใกล้เลข 1 จะเป็นรูปวงรีที่รีมาก

พาราโบลา(Parabola)

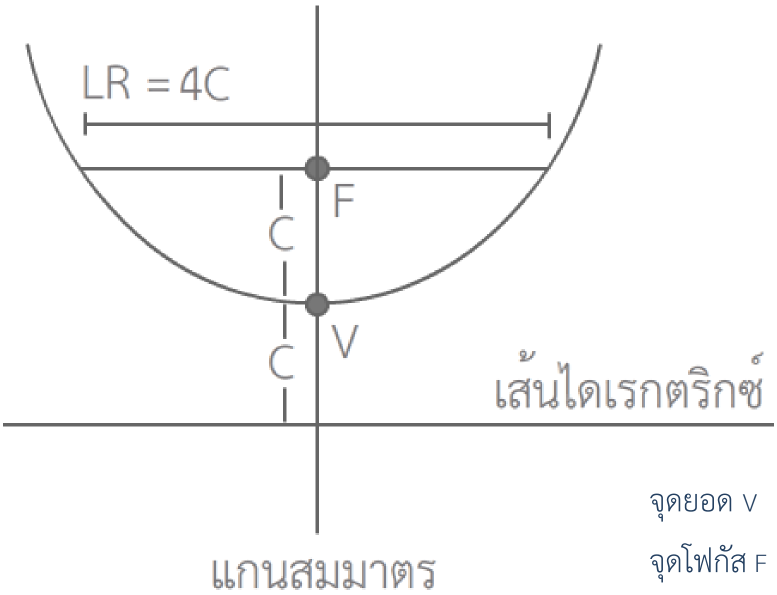
พาราโบลาคือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง(เส้นไดเรกติก) ที่เส้นหนึ่งบนระนาบและจุดคงที่(จุดโฟกัส)จุดหนึ่งบนระนาบนอกเส้นตรงคงที่นั้น เป็นระยะทางเท่ากันเสมอ



สมการมาตรฐาน

$(x - h)^2 = 4c(y-k)$

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$



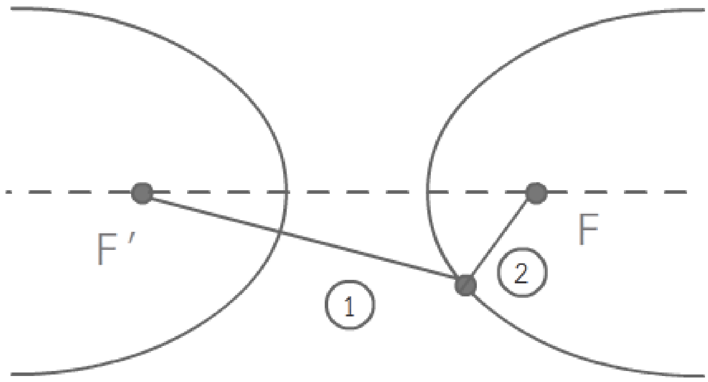
จุดยอด V

จุดโฟกัส F

ลาตัสเรกตรัม (LR) = 4C

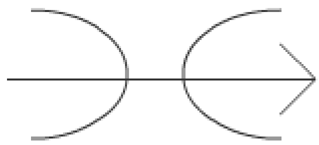
ไฮเปอร์โบลา(Hyperbola)

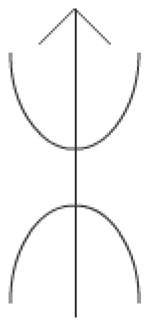
ไฮเปอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวซึ่งมากกว่าศูนย์แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง โดยที่จุดคงที่นี้เรียกว่าจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา



1 − 2 = 2a

สมการมาตรฐาน

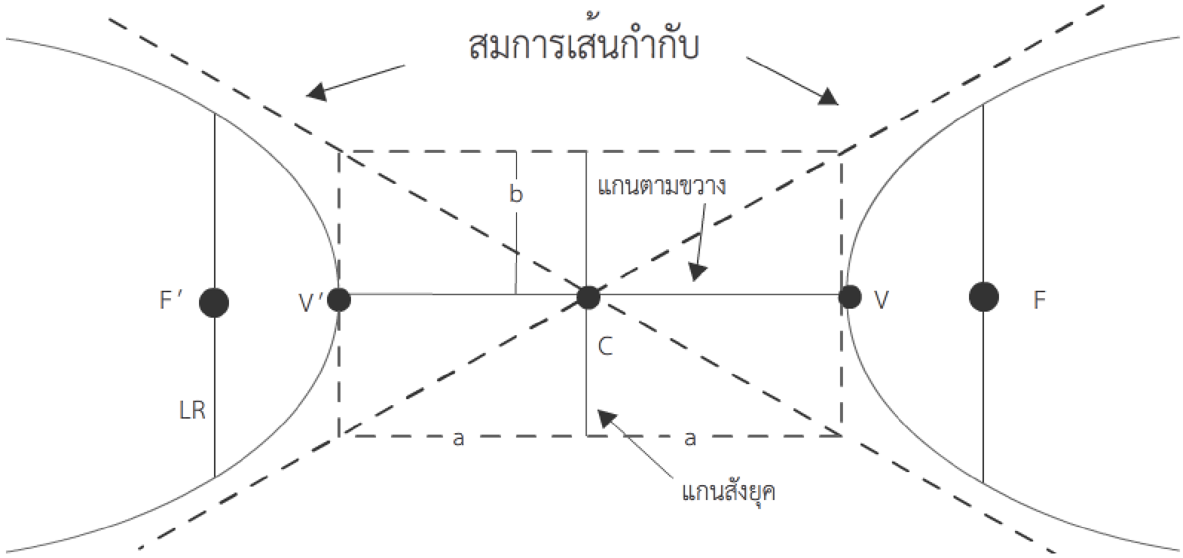




$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

<u>ส่วนประกอบไฮเปอร์โบลา</u>



จุดศูนย์กลาง C

จุดยอด V, V′

จุดโฟกัส F, F′

แกนตามขวาง 2a

แกนสังยุค 2b

ลาตัสเรกตัม (LR) = $\frac{2b^2}{a}$

ผลต่างคงที่ = 2a

สมการเส้นกำกับไฮเปอร์โบลา

1. $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ หรือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
2. $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$ หรือ $x - h = \pm \frac{a}{b}(y - k)$

<u>หมายเหตุ</u> ไฮเปอร์โบลามุมฉาก คือไฮเปอร์โบลาคือ a = b

<u>คำแนะนำ</u> สำหรับโจทย์บางประเภทไม่เป็นไป ตามสมการมาตรฐาน เช่น วงรีเอียง ซึ่งไม่ตรงกับวงรีรีตาม แกน x และแกน y เราจะต้องสร้างสมการเองโดยอิงจากส่วนประกอบที่โจทย์กำหนดมาให้ โดยเราต้องพิจารณาตามนิยามของแต่ละรูป

ตัวอย่างที่ 1 จุด A(-3,1) B(8,3) C(8,3) D(2,-3) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ข้อใดต่อไปนี้ **ผิด** (PAT 1 มี.ค. 53)

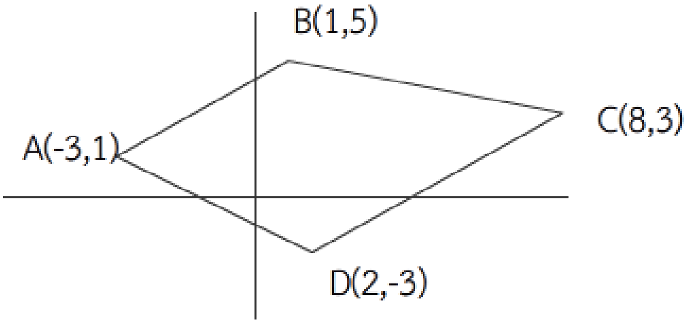
1.ด้าน AB ขนาดกับ BC

2.ผลบวกความยาวของด้าน AB กับ DC เท่ากับ 10√2 หน่วย

3.ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D เท่ากับ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ หน่วย

4.ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D เท่ากับ $\frac{9}{2}$ หน่วย

วิธีทำ ร่างกราฟโดยคร่าวๆจะได้ประมาณนี้



m_{AB} = $\frac{5-1}{1-(-3)}$ = 1

m_{DC} = $\frac{3-(-3)}{8-2}$ = 1

ดังนั้นข้อ 1 จึงถูก AB // DC

|AB| = $\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2}$ = $\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}$ = $4\sqrt{2}$

|DC| = $\sqrt{(8-2)^2+(3-(-3))^2}$ = $6\sqrt{2}$

|AB| +|DC| = $4\sqrt{2}$ + $6\sqrt{2}$ =$10\sqrt{2}$

ดังนั้นข้อ2 ถูก

เส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D หาโดยใช้จุด C และความชัน CDจะได้ y – 3 =1(x – 8)

x – y – 5 = 0

∴ ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่าน CD

$\frac{|(-3)1-1(-1)-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ = $\frac{|(-3)1-1(-1)-5|}{\sqrt{2}}$

= $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้นข้อ3 ถูก

∴ ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่าน CD

$\frac{|(1)1-5(-1)-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ = $\frac{|-9|}{\sqrt{2}}$

=$\frac{9}{\sqrt{2}}$

ดังนั้นข้อ4 ผิด

ตอบข้อ 4

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 เส้นตรงที่ผ่านจุด (1,-3) จะตั้งฉากและตัดกับเส้นตรง x + 2y = 5

1. (3,1) 2. (-1,3) 3. (1,2) 4.(5,0)

วิธีทำ สร้างสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1,-3) ซึ่งมีความชันคือ 2 เพราะตั้งฉากกับสมการที่โจทย์กำหนด ($-\frac{1}{2}$)

y + 3 = 2(x - 1)

2x – y – 5 =0

แล้วแก้สมการ 2 ตัวแปร 2 สมการ

x + 2y = 5 ------------------- (1)

2x – y = 5 ----------------- (2)

(1)+ 2x(2) 5x = 15 x = 3

ดังนั้น y = 1

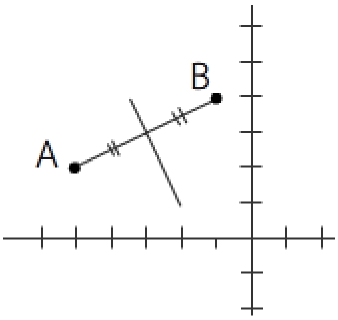
ดังนั้นจุดตัดคือ (3,1)

<u>ตอบ</u>ข้อ 1

ตัวอย่างที่ 3 สมการของเส้นตรงที่อยู่ห่างจากจุด A(-5,2), B(-1,4) เท่ากัน

1. y + 2x = -3 2.2y – x = 9 3.2x+3y =6 4.2x + y = 3

วิธีทำ วาดกราฟโดยคร่าวๆ



จุดกึ่งกลาง A กับ B

$= \left(\frac{-5+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$ = (-3,3)

ความชันของAB = $\frac{4-2}{-1-5} = \frac{1}{2}$

ดังนั้นความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากคือ -2

เราสามรถสร้างสมการที่แบ่งครึ่งเส้นตรงได้ดังนี้

(y+3)=-2(x-3)

2x + y = -3

<u>ตอบ</u>ข้อ 1

เมตริกซ์ (Matrix)

- พื้นฐานเมตริกซ์
  - A + B และ A - B
  - kA เมตริกซ์คูณด้วยค่าคงที่ (k)
  - A × B เมตริกซ์ คูณด้วยเมตริกซ์
  - A^t การทรานสโพสเมตริกซ์
- det
  - det = 0 คือเมตริกซ์เอกฐาน
  - det ≠ 0 คือเมตริกซ์ไม่เอกฐาน
  - วิธีการหา det
    - แบบ 1 x 1

      A = [a] detA =a
    - แบบ 2 x 2

      $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ detA = ad - bc
    - แบบ 3 x 3

      $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

      $\det A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ aei + bfg + cdh − gec − hfa - idb
- อินเวอร์สเมตริกซ์
  - $A^{-1} = \frac{1}{\det A}[C_{ij}]^t$
  - $AA^{-1} = I$ โดยที่ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์
- ประยุกต์เมตริกซ์
  - เมตริกซ์ขั้นบันได
  - เมตริกซ์กับสมการเชิงเส้น
  - เมตริกซ์ประยุกต์เวกเตอร์

เมตริกซ์ คือกลุ่มของจำนวนหรือสมาชิกของจริงใดๆ เขียนเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือจัตุรัส

เมตริกซ์ คือกลุ่มของจำนวนหรือสมาชิกของจริงใดๆ เขียนเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือจัตุรัส กล่าวคือเรียงเป็นแถวในแนวนอน และเรียงเป็นแถวในแนวตั้ง เรามักเขียนเมตริกซ์เป็นตารางที่ไม่มีเส้นแบ่งและเขียนวงเล็บคร่อมตารางไว้ (ไม่ว่าจะเป็นวงเล็บโค้งหรือวงเล็บเหลี่ยม) เราเรียก m×nมิติ

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

การบวกลบ เมตริกซ์

การดำเนินการบวก หรือ ลบ เมตริกซ์ ต้องมีมิติเท่ากัน

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 6 \\ 14 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

การทรานสโพส

คือเมตริกซ์ที่ได้จากการสลับสมาชิก จากแถวเป็นหลัก และจากหลักเป็นแถว ของเมตริกซ์ต้นแบบ เมตริกซ์สลับเปลี่ยนของของเมตริกซ์ A ขนาด m×n คือ A^t ขนาด n×m

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \; A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>การคูณเมตริกซ์ด้วยค่าคงที่</u>

ให้ $A=[a]_{m \times n}$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า $KA=[ka]_{m \times n}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $5A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 25 \\ 35 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

<u>การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์</u>

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ใด ๆ การนำเมตริกซ์ A มาคูณกับเมตริกซ์ B จะเกิดผลขึ้นอย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 อย่างต่อไปนี้

1. ไม่สามารถหาผลคูณได้ เนื่องจากปัญหาเรื่องมิติ
2. สามารถหาผลคูณได้

ปัญหาที่เราจะต้องทราบก็คือ ถ้าหาผลคูณได้ต้องมีเงื่อนไขอย่างไร และสมาชิกของเมตริกซ์ที่เป็นผลคูณจะหามาได้อย่างไร ให้ดูหลักการต่อไปนี้

1. มิติของเมตริกซ์ที่นำมาหาผลคูณ

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ $m \times p$

B เป็นเมตริกซ์ $q \times n$

เราจะคูณเมตริกซ์ได้เมื่อ $p = q$ และ AB จะมีมิติ $m \times n$

2. ลักษณะสมาชิกของเมตริกซ์ที่เป็นผลคูณ (ถ้าหาผลคูณได้)

หลักการหาสมาชิกโดยทั่ว ๆ ไป สามารถหาได้ดังนี้

"สมาชิกของผลคูณของเมตริกซ์ในแถวที่ i หลักที่ j จะเกิดสมาชิกในแถวที่ i ของเมตริกซ์ที่อยู่หน้า คูณกับ สมาชิกในหลักที่ j ของเมตริกซ์หลักเป็นคู่ ๆ แล้วนำมาบวกกัน"

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (2 \times 1) & (1 \times 0) + (2 \times -1) \\ (3 \times 2) + (4 \times 1) & (3 \times 0) + (4 \times -1) \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$

☺ ข้อระวัง AB ไม่จำเป็นที่ต้องเท่ากับ BA เพราะการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ ☺

ดีเทอร์มิแนนต์

คือฟังก์ชันหนึ่งที่ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ n ในมิติ n×n ของเมตริกซ์จัตุรัส

แบบ 1 x 1

A = [a] detA =a

แบบ 2 x 2

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ detA = ad - bc

แบบ 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$\det A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \qquad aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

ตั้งแต่ 3 x 3

ใช้แถว i

$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots a_{in}C_{in}$

หรือ ใช้หลัก j

$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots a_{nj}C_{nj}$

ไมเนอร์

คือดิเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i หลัก ที่ j

โคแฟกเตอร์

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \bullet M_{ij}(A)$

ตัวอย่าง

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา C_{23}

$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(2)$

$= -2$

<u>ประเภทของเมตริกซ์</u>

1. เมตริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) คือ เมตริซ์ที่มี det = 0
   ซึ่งหาอินเวอร์สไม่ได้
2. เมตริกซ์ไม่เอกฐาน (Non Singular Matrix) คือเมตริซ์ที่มี det ไม่เท่ากับ 0 ซึ่งหาอินเวอร์สได้

<u>การดำเนินการทางแถว</u>

1. สลับแถว ทำให้ det กลับเครื่องหมาย
2. นำค่าคงที่คูณทั้งแถว ทำให้ค่า det ถูกคูณด้วยค่าคงที่
3. นำค่าคงที่คูณทั้งแถวไปดำเนินการบวกหรือลบกับอีกแถวหนึ่ง det มีค่าเท่าเดิม

<u>คุณสมบัติดีเทอร์มิแนนต์</u>

$\det AB = \det A \times \det B$

$\det A^m = (\det A)^m$

$\det A^t = \det A$

$\det kA = k^n \times \det A$ n × n มิติ

Ex A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det $3A^t$

เราสามารถใช้คุณสมบัติของ ดีเทอร์มิแนนต์ช่วย

จะได้ว่า 3^2 det A

detA = 2

จึงได้ว่า 9 x 2 = 18

<u>อินเวอร์สการคูณ</u>

อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ A ก็คือ เมตริกซ์ ซึ่งเมื่อนำมาคูณกับเมตริกซ์ A แล้วจะได้ผลลัพธ์เท่ากับเมตริกซ์เอกลักษณ์ I และเราใช้สัญลักษณ์ A-1 แทน อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ นั่นคือ

$AA^{-1} = I$

เราสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ได้เมื่อเมตริกซ์เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน (Non – Singular Matrix) หรือค่า det ไม่เป็น 0

การหาอินเวอร์สจากการดำเนินการทางแถว

$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$

Ex A= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2-R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_1 \div 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>การหาอินเวอร์สการคูณ</u>

1 × 1 มิติ

A = [a] A^{-1} =[$\frac{1}{a}$]

2 × 2 มิติ

A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ A^{-1} =$\frac{1}{detA}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ตั้งแต่3 × 3 มิติ

A^{-1} = $\frac{1}{detA}$ [adjA] ; adjA { adjoint (เมตริกซ์ผูกพัน)} คือโคแฟเตอร์ทั้งหมดทรานสโพส

adjA = $[C_{ij}]^t$

Ex

A = [3] A^{-1} =[$\frac{1}{3}$]

B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ B^{-1}=$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

C = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ detC = 7

$$C^{-1}= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

<u>คุณสมบัติทรานสโพสและอินเวอร์ส</u>

คุณสมบัติทรานสโพส	คุณสมบัติอินเวอร์ส
$(A^t)^t = A$	$(A^{-1})^{-1} = A$
$(A\times B)^t = B^t \times A^t$	$(A\times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
$(A\pm B)^t = A^t \pm B^t$	$(A\pm B)^{-1}$ กระจายอินเวอร์สไม่ได้
$(kA)^t = kA^t$	$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
$(A^n)^t = (A^t)^n$	$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

.

คุณสมบัติพิเศษของ adjoint (เมตริกซ์ผูกพัน)

- adj(AB) = adj(A) × adj(B)
- adj(kA) = k^{n-1} × adj(A) ; A มีมิติ n×n ; k คือค่าคงที่ซึ่งเป็นจำนวนจริง
- A adj(A) = (adjA)A = (detA)I
- det(adjA) = $(\det A)^{n-1}$ *** ออกข้อสอบบ่อย ***
- adj(A^t) = $(\text{adj}A)^t$
- adj(adjA) = $(\det A)^{n-2}$ A

ระบบสมการเชิงเส้น

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}}_{B}$$

Ex x + y = 4

x - y = 8

การแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นโดยเมตริกซ์ซึ่งเป็นเมตริกซ์จัตุรัส

1.แก้โดยใช้กฎคราเมอร์

X_1, = $\dfrac{\mathbf{detA_1}}{\mathbf{detA}}$ X_2 = $\dfrac{\mathbf{detA_2}}{\mathbf{detA}}$, … ,X_n = $\dfrac{\mathbf{detA_n}}{\mathbf{detA}}$

วิธีคิด

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

เราสามารถหา ค่า x , y ,z ได้จาก

$$x = \frac{\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\d_2 & b_2 & c_2\\d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}\quad y= \frac{\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\a_2 & d_2 & c_2\\a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}\quad z= \frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\a_2 & b_2 & d_2\\a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}$$

2.แก้โดยใช้อินเวอร์สของเมตริกซ์

X= A^{-1}B

3.แก้โดยใช้ การดำเนินการทางแถว

[A | B] ~ [I | X]

เมตริกซ์รูปแบบขั้นบันได (Row echelon form matrix)

ทุกแถวที่ประกอบด้วย 0 ทั้งหมดจะอยู่แถวล่างของเมตริกซ์
โดยการพิจารณาจากซ้ายไปขวา สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์จะต้องมีค่าเป็น 1
ตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ประโยชน์ของเมตริกซ์ขั้นบันได

คือ เอานำไปแก้สมการเชิงเส้น ซึ่งเมื่อจากรูปสมการเป็นเมตริซ์แล้วไม่เป็นเมตริซ์จัตุรัส ซึ่งส่วนใหญ่จะสามารถหาค่าตัวแปรได้บางตัว หรือหาค่าไม่ได้เลย

[A | B] ~ [เมตริซ์ขั้นบันได | X]

Exponantial&Logarithm Funtion

- เลขยกกำลัง
  - x^n คุณสมบัติของเลขยกกำลัง
  - เครื่องหมายกรณฑ์ $\sqrt{}$
- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
  - นิยาม Expo = $\{(x,y) \in R \times R^+ \mid y = a^x, a > 0 , a \neq 1\}$
  - สมการฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
  - อสมการฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
- ฟังก์ชันลอการิทึม
  - นิยาม Log $=\{(x,y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x$ โดยที่ $a > 0 , a \neq 1\}$
  - สมการฟังก์ชันลอการิทึม
  - อสมการฟังก์ชันลอการิทึม

การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของสิ่งต่างๆ โดยทั่วไปจะเป็นในรูปแบบที่เป็นแบบทวีคูณ ดังนั้นฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องคือเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึมจึงถูกนำไปใช้ประโยชน์ในหลายๆด้าน

เลขยกกำลัง $a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$ (ทั้งหมด n ตัว)

สูตรเลขยกกำลัง

1.$\frac{a^m \times a^n}{a^p}$ = a^{m+n-p} a ไม่เป็น 0

2.$(a^m)^n = a^{mn}$

3.$\left\{\frac{a \cdot b}{c}\right\}^n = \frac{a^n \cdot b^n}{c^n}$

4.$a^0=1$

5.$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

6.$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

คำเตือน 0^0 ไม่นิยาม

สมบัติของเครื่องหมายกรณฑ์

$(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ |a| \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \times n]{a^m b^n}$

การหาค่ารากที่ 2 ของจำนวนติด a+b±2√ab

$(a+b)+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$= (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

รากที่สองคือ $\pm(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

แต่ $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

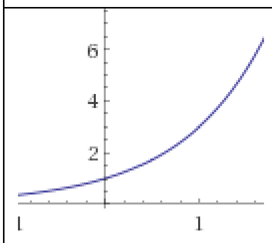
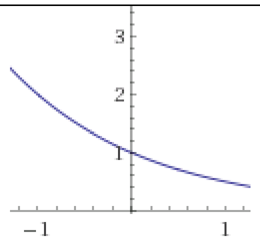
ดังนั้นรากที่ 2 คือ $\pm|\sqrt{a}+\sqrt{b}|$

ข้อควรระวัง เครื่องหมาย $\sqrt{a}$ คือกรณฑ์ที่ 2 ของ a ไม่ใช่ รากที่ 2 ของ a เพราะ รากที่ 2 ของ a จะมีทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่ภายในเครื่องหมายกรณฑ์ เมื่อถอดกรณฑ์ที่ 2 แล้วจะได้ค่าบวกเสมอ

จงหาค่ากรณฑ์ที่ 2 ของ 4	จงหาค่ารากที่ 2 ของ 4
$\sqrt{4} = 2$	รากที่ 2 ของ 4 คือ 2 กับ – 2 เพราะ เมื่อนำทั้งสองค่าไปยกกำลัง 2 แล้วจะมีค่าเท่ากับ 4 ทั้งคู่

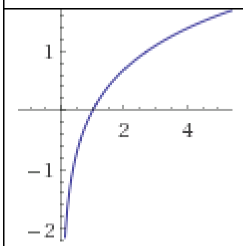
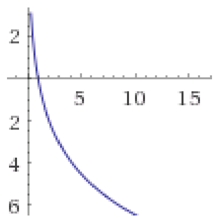
Expo = {(x,y) ∈ R x R^+ | y =a^x, a > 0 , a ≠ 1}

โดเมนเป็นจำนวนจริง เรนจ์เป็นจำนวนจริงบวก

a > 1	0 < a < 1
 ฟังก์ชันเพิ่ม	 ฟังก์ชันลด

Log = {(x,y) ∈ R^+ x R | y =$\log_a x$, a > 0 , a ≠ 1}

โดเมนเป็นจำนวนจริงบวก เรนจ์เป็นจำนวนจริง

a > 1	0 < a < 1
 ฟังก์ชันเพิ่ม	 ฟังก์ชันลด

<u>สูตร log พื้นฐาน</u>

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a \mathrm{M} + \log_a \mathrm{N} = \log_a \mathrm{MN}$

$\log_a \mathrm{M} - \log_a \mathrm{N} = \log_a \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$

$\log_{\mathrm{N}^a} \mathrm{M}^b = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \log_{\mathrm{N}} \mathrm{M}$

$\log_{\mathrm{N}} \mathrm{M} = \frac{\log_a \mathrm{M}}{\log_a \mathrm{N}}$

$a^{\log_a x} = x$

<u>สูตร log เพิ่มเติมควรรู้</u>

$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$

หลักการแก้โจทย์เลขยกกำลัง

1.จัดฐานเท่า

Ex จงหาค่า y ของ $2^{3y} \bullet 4 = 16^{y-3}$

วิธีทำ $2^{3y+2} = 2^{4(y-3)}$

$3y+2 = 4y-12$

$y = 14$

2.จัดเลขชี้เท่า

Ex จงหาค่า x ที่ทำให้ $21^{x-3} = 6^{3x-9}$

วิธีทำ $3^{3x-9} = 6^{3x-9}$

$3x-9 = 0$

$3x = 9$

$x = 3$

3.หากไม่สามารถใช้วิธีทั้ง 2ได้ ให้ take log ทั้ง 2 ข้าง

Ex จงแก้ $2^x = 3^{x+1}$

วิธีทำ $x \log 2 = (x+1) \log 3$

$X \log 2 = x \log 3 + \log 3$

$x (\log 2 - \log 3) = \log 3$

$x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3}$

Ex จงหา $\frac{x}{y}$ ซึ่งเกี่ยวข้องกับ

$6 \log (x - 2y) = \log x^3 + \log y^3$

วิธีทำ $(x - 2y)^6 = x^3 y^3$

$(x - 2y)^2 = xy$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

$(x - 4y)(x - y) = 0$

$\frac{x}{y} = 4$ หรือ 1

$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$

พิสูจน์ take log ฐาน x ทั้ง 2 ข้าง

จะได้ว่า $\log_x a^{\log_x b} = \log_a b^{\log_x a}$

จากกฎของ log จะกล่าวได้ว่า

$(\log_x b)(\log_x a) = (\log_x a)(\log_x b)$

เนื่องจากการคูณกันของจำนวนจริง มีสมบัติการสลับที่การคูณ

<u>ลอการิทึมสามัญ</u>

ลอการริทึมสามัญ คือลอการริทึมฐาน 10 ซึ่งเราสามารถไม่ต้องเขียนตัวเลขฐานกำกับได้ เช่น log 2 = $\log_{10} 2$

กำหนด A เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ สามารถเขียน A ในรูปมาตรฐานคือ

$A = N \times 10^n \; ; 1 \le N < 10$

ดังนั้น $\log A = \log N + \log 10^n$

หรือเราสามารถเขียนในรูป $\log A = \log N + n$

N คือค่าแคแรกเทอริสติก (Characteristic) ของ log A แคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น

log N คือค่าแมนทิสซา (Mantissa) ของ log A ซึ่งค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แต่จะน้อยกว่า 1 เสมอ

<u>ลอการิทึมธรรมชาติ</u>

ลอการิทึมธรรมชาติ คือลอการริทึมฐาน e (e มีค่าประมาณ 2.71828) เรานิยมเขียนในรูป

$\ln x = \log_e x$

<u>แอนติลอการิทึม</u>

แอนติลอการิทึมคือการดำเนินการที่ตรงข้ามกับการหาค่าลอการิทึม โดยที่ log x = A ก็ต่อเมื่อ antilog A = x

เช่น log 5 = 0.699

$5 = 10^{0.699}$ ซึ่งเราสามารถสรุปได้ ว่า 5 เป็น antilog 0.699

การแก้โจทย์เกี่ยวกับ log และเลขยกกำลัง

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $6^x+3(2)^x-4(3)^x-12=0$

วิธีทำ ให้ เรานำเลขยกกำลังเปลี่ยนเป็นตัวแปร $A=2^x$ และ $B=3^x$

$$AB+3A-4B-12=0$$

$$A(B+3)-4(B+3)=0$$

$$(A-4)(B+3)=0$$

$$A=4 \quad B=-3$$

$2^x=4$ หรือ $3^x=-3$ ใช้ไม่ได้

$x=2$

ตัวอย่างที่ 2 ผลบวกของสมการทั้งหมดของสมการ $3^x+3^{2-x}=4\sqrt{3}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร (สามัญ 7 วิชา)

วิธีทำ กำหนดให้ 3^x เป็น A

จะได้ว่า $A+\frac{9}{A}=4\sqrt{3}$

นำ A คูณตลอด $A^2+9=4\sqrt{3}A$

$$A^2-4\sqrt{3}A+9=0$$

$$(A-3\sqrt{3})(A-\sqrt{3})=0$$

$$A=3\sqrt{3}\,,\ \sqrt{3}$$

ดังนั้น $3^x=3\sqrt{3}$ และ $3^x=\sqrt{3}$

$$x=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$$

ตอบ ผลบวกของคำตอบคือ 2

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ A และ B เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $A\log_{50}5+B\log_{50}2=1$ และ A + B มีค่าเท่ากับเท่าไรต่อไปนี้ (B - PAT)

1.2 2.3 3.4 4.5

วิธีทำ

$$\log_{50}5^A+\log_{50}2^B=1$$

$$\log_{50}(5^A2^B)=1$$

$$5^A2^B=50$$

$$5^A2^B=5^2 2^1$$

$A=2 \quad B=1$

ตอบ A + B = 3 ตอบข้อ 2

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดให้คำตอบ $\log_2 \log_3 \log_5 (2x + 3) = 0$ คือ A

กำหนดให้ $\log_2 256 - A$ เป็น B

จงหา 2A – 3B

วิธีทำ พิจารณา $\log_2 \log_3 \log_5 (2x + 3) = 0$

จะได้ว่า $\log_3 \log_5 (2x + 3) = 2^0$

$\log_5 (2x + 3) = 3^1$

$2x + 3 = 125$

$x = 61$

พิจารณา $\log_2 256 - A = \log_2 256 - 61$

$= \log_2 2^8 - 61$

$= 8 - 61$

$= -53$

$2A - 3B = 122 + 159$

$= 281$

<u>ตอบ</u> 281

การแก้อสมการ Expo, log

วิธีทำ จัดฐานทั้ง 2 ข้างให้เท่ากัน

- ฐาน > 1 ให้ใช้เครื่องหมายเดิม
- 0 < ฐาน <1 ให้เปลี่ยนโดยการกลับเครื่องหมาย

Ex $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{16}\right)$

วิธีทำ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^4$

ปลดฐาน

$x^2 < 4$

$|x| < 2$

$-2 < x < 2$

Ex log (5x-3) > log (4x+6)

วิธีทำ ปลด log ฐานมากกว่า 1 เครื่องหมายเดิม

5x-3 > 4x+6

x > 9

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometry)

ตรีโกณมิติเป็นการศึกษาเกี่ยวกับมุมและสามเหลี่ยมโดยเฉพาะ

- มุมพื้นฐาน 30° 45° 60°
- วงกลมหนึ่งหน่วย
- สูตรพื้นฐาน $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- สูตรมุม 2 เท่า

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

- สูตรมุม 3 เท่า

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

- สูตรมุมครึ่งเท่า

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ $\quad\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ $\quad\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

- สูตรผลบวกลบ

$\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

$\cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

$\tan(A\pm B) = \dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$

- สูตรแปลงผลบวกลบเป็นผลคูณ แปลงผลคูณเป็นผลบวกลบ

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{(A+B)}{2}\cos\dfrac{(A-B)}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{(A+B)}{2}\sin\dfrac{(A-B)}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{(A+B)}{2}\cos\dfrac{(A-B)}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{(A+B)}{2}\sin\dfrac{(A-B)}{2}$

$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$

$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$

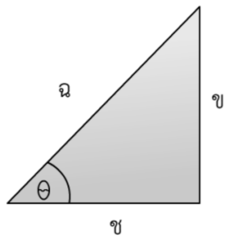
$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$

- สามเหลี่ยมประยุกต์

ตรีโกณมิติ (จากภาษากรีก trigonon มุม 3 มุม และ metro การวัด) เป็นสาขาของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับมุม, รูปสามเหลี่ยม และฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น ไซน์ และ โคไซน์ มีความเกี่ยวข้องกับเรขาคณิต แม้ว่าจะสรุปไม่ได้อย่างแน่ชัดว่า ตรีโกณมิติเป็นหัวข้อย่อยของเรขาคณิต

ความรู้พื้นฐานสามเหลี่ยมมุมฉาก



$\sin\theta = \frac{ข}{ฉ}$ $\quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{ฉ}{ข}$

$\cos\theta = \frac{ช}{ฉ}$ $\quad \sec\theta = \frac{ฉ}{ช}$

$\tan\theta = \frac{ข}{ช}$ $\quad \cot\theta = \frac{ช}{ข}$

ค่ามุมตรีโกณมิติ

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

โคฟังก์ชันของตรีโกณมิติ

cos เป็นโคฟังก์ชันของ sin

cosec เป็นโคฟังก์ชันของ sec

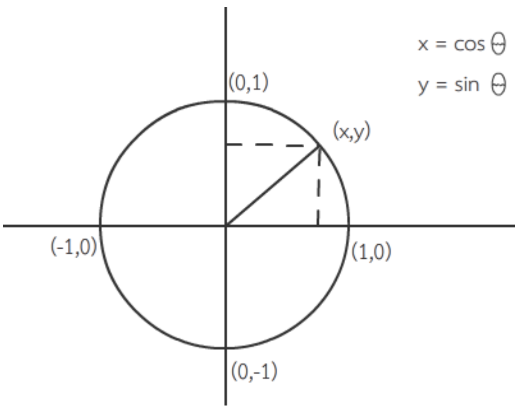
cot เป็นโคฟังก์ชันของ tan

คุณสมบัติโคฟังก์ชัน

$\sin(90° - A) = \cos A$

$\sec(90° - A) = \mathrm{cosec}\,A$

$\tan(90° - A) = \cot A$



วงกลมหนึ่งหน่วย มีสมการ $x^2+y^2=1$

ขนาดของมุมมี 2ประเภท

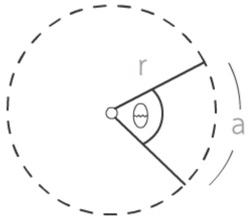
1. หน่วยองศา Ex 360°

มุมขนาด 1 องศา คือ 1 ใน 360 ส่วนของมุมรอบจุด

มุมขนาด 1 ลิปดา (1′) คือ 1 ใน 60 ส่วนของมุม 1 องศา

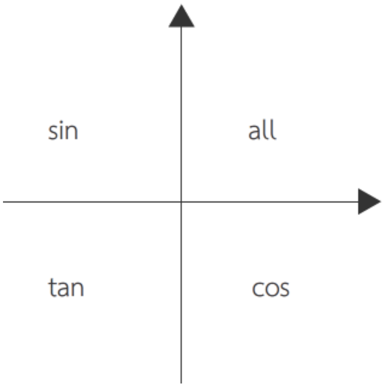
มุมขนาด 1 ฟิลิปดา (1″) คือ 1 ใน 60 ส่วนของมุม 1 ลิปดา

2. หน่วยเรเดียน Ex 2π



ขนาดของ θ (หน่วยเรเดียน) = $\frac{a}{r}$

เครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณในแต่ละจตุภาค



การหาค่ามุมตามแกน ในวงกลมหนึ่งหน่วย

f^n (แกนแนวราบ ± A) = f^n (A)

f^n (แกนแนวดิ่ง ± A) = co f^n (A)

f^n คือฟังก์ชัน เครื่องหมายดูตามจตุภาค(ควอดรันต์)

คำอธิบาย

จตุภาค1 ทุกฟังก์ชันมีค่าเป็นบวก

จตุภาค2 มีเฉพาะฟังก์ชัน sin และส่วนกับเท่านั้นที่เป็นบวก

จตุภาค3 มีเฉพาะฟังก์ชัน tan และส่วนกับเท่านั้นที่เป็นบวก

จตุภาค4 มีเฉพาะฟังก์ชัน cos และส่วนกับเท่านั้นที่เป็นบวก

Ex

$\sin(120°) = \sin(180° - 60°)$

$= \sin(60°)$ อยู่ควอดรันต์ 2

$\sec(280°) = \sec(270°+10°)$

$= \sec(10°)$

รูปสามเหลี่ยม ที่ชอบออกบ่อย

มุมพื้นฐาน (ต้องทราบ)

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

มุมจาก วงกลม 1 หน่วย (ต้องทราบ)

$\sin(0° + n(360°)) = 0$

$\cos(0° + n(360°)) = 1$

$\sin(180° + n(360°)) = 0$

$\cos(180° + n(360°)) = -1$

$\sin(90° + n(360°)) = 1$

$\cos(90° + n(360°)) = 0$

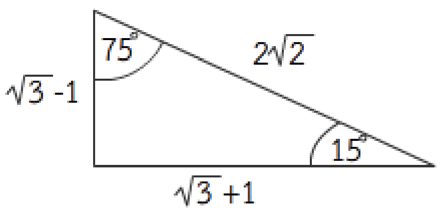
$\sin(270° + n(360°)) = -1$

$\cos(270° + n(360°)) = 0$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

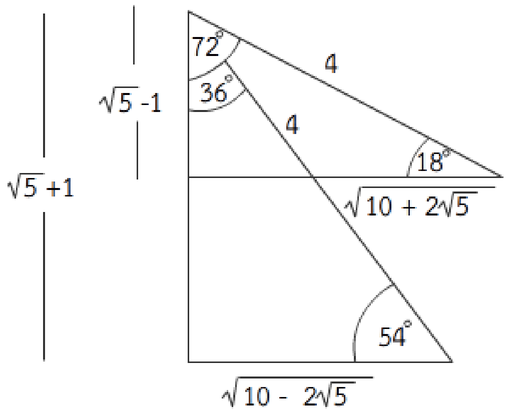
มุม 15° และมุม 75° (ควรทราบ)

	15°	75°
sin	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
cos	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
tan	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$



มุม 72° , 18° และมุม 36° , 54° (ควรทราบ)

	18°	72°
sin	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
tan	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
	54°	**36°**
sin	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
tan	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$



ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า sin60° – cos30° + tan45°

วิธีทำ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$= 1$

ตอบ 1

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า A เมื่อ 0°< A < 90° และ 2 – 2sinA = 1

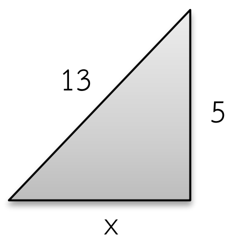
วิธีทำ $2 - 2\sin A = 1$

$2 - 1 = 2\sin A$

$\frac{1}{2} = \sin A$

ตอบ A = 30°

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด sin A = $\frac{5}{13}$ จงหา 12sin30°(tanA)



วิธีทำ จากค่า sin จะได้ $13^2 = 5^2 + x^2$

$x = 12$

$\tan A = \frac{5}{12}$

$6\sin 30°(\tan A) = 6\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{12}\right)$

$= \frac{5}{4}$

ตอบ $\frac{5}{4}$

ข้อควรรู้ มุมหน่วยเรเดียน $\pi = 180°$ $\frac{\pi}{2} = 90°$

$\frac{\pi}{3} = 60°$ $\frac{\pi}{4} = 45°$

$\frac{\pi}{6} = 30°$

สูตรตรีโกณมิติพื้นฐาน

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

สูตรมุม 2 เท่า

$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

สูตรมุมครึ่งเท่า

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

สูตรแปลงผลบวกผลต่างเป็นผลคูณ

$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

สูตรผลบวกและผลต่างตรีโกณมิติ

$\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

$\cos(A\pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

$\tan(A\pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$

สูตรมุม 3 เท่า

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

$\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

สูตรแปลงผลคูณเป็นผลบวกผลต่าง

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

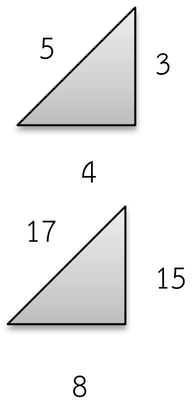
<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดให้ A และ B เป็นมุมแหลมถ้า sec A = $\frac{5}{4}$ และ sec B = $\frac{17}{8}$ จงหา cos(A+B)

วิธีทำ sec คือส่วนกลับของ cos จะได้ cosA = $\frac{4}{5}$ cosB = $\frac{8}{17}$

จะได้ cosAcosB – sinAsinB $= (\frac{4}{5})(\frac{8}{17}) - (\frac{3}{5})(\frac{15}{17})$

$= \frac{32-45}{85}$

$= \frac{-13}{85}$



<u>ตอบ</u> $\frac{-13}{85}$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาค่า cosec(75°) × tan(75°)

วิธีทำ cosec(75°) × tan(75°) = $\frac{1}{\sin 75°} \times \frac{\sin 75°}{\cos 75°}$

$= \frac{1}{\cos 75°}$

cos 75° = cos(30° + 45°)

= cos30°cos45° – sin30°sin45°

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\cos 75°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

<u>ตอบ</u> $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

<u>สูตรอินเวอร์ส</u>

arcsin (-x) = −arcsin (x)

arctan(-x) = −arctan(x)

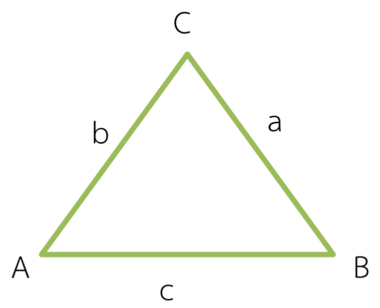
arcos (-x) = π − arcos(x)

arctan x + arctan y = arctan$\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$; xy < 1

arctan x + arctan y = arctan$\left(\frac{x+y}{xy-1}\right)$; xy > 1

arctan x - arctan y = arctan$\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

<u>การประยุกต์สามเหลี่ยม</u>



เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

กฎของไซต์

$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$ = 2R, R คือ รัศมีของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม

กฎของโคไซน์

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

และ cos A = $\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2bc}$

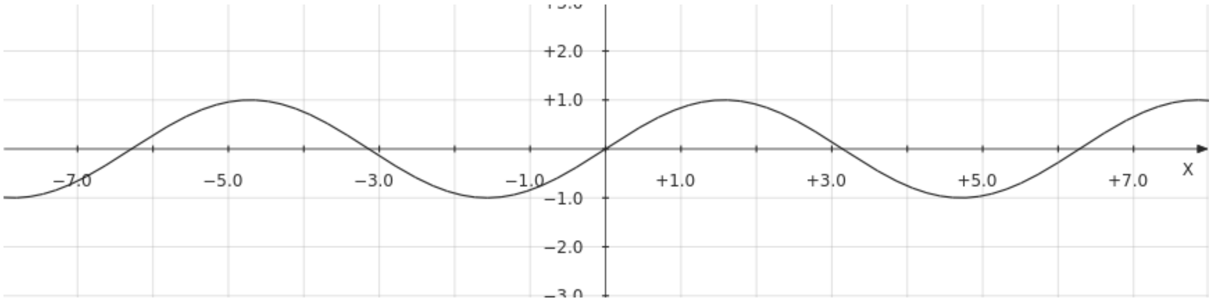
การหาพื้นที่สามเหลี่ยม

$\frac{1}{2}$ ab sinC = $\frac{1}{2}$ bc sinA = $\frac{1}{2}$ ac sinB

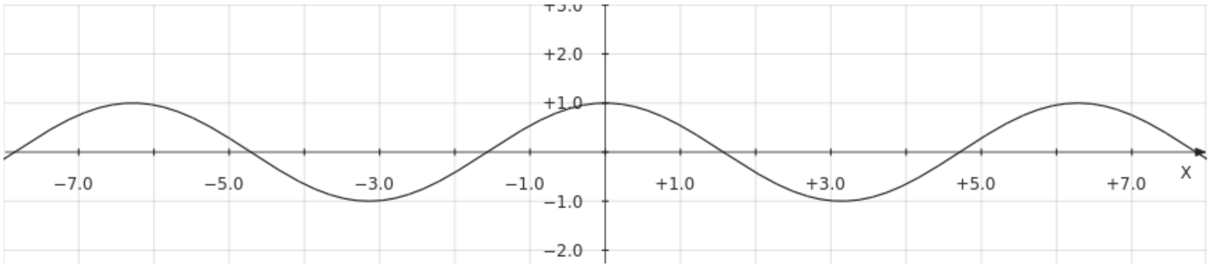
ข้อควรรู้ กราฟฟังก์ชันตรีโกณ

ฟังก์ชันตรีโกณ	แอมพลิจูด(Amplitude)	คาบ
y = A sin Bx	|A|	$\left\lvert\frac{2\pi}{B}\right\rvert$
y = A cos Bx	ไม่มี	$\left\lvert\frac{2\pi}{B}\right\rvert$
y = A tan Bx	ไม่มี	$\left\lvert\frac{\pi}{B}\right\rvert$

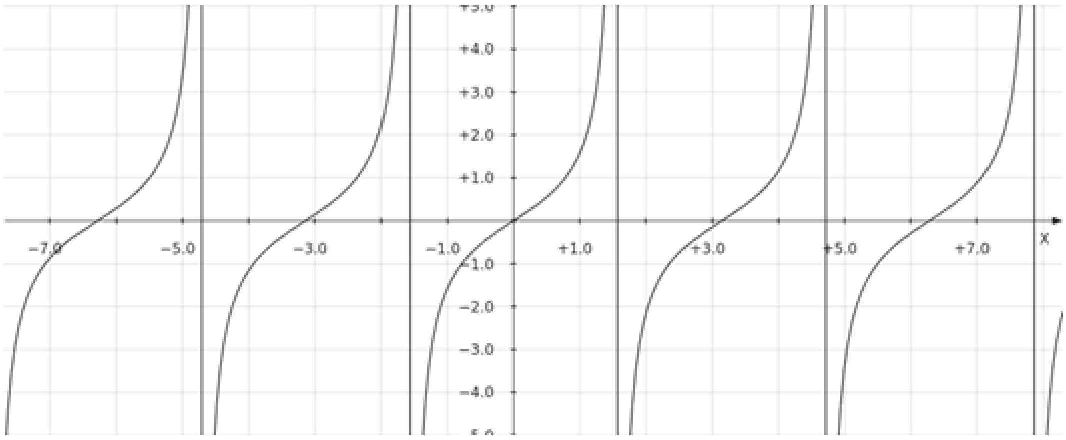
กราฟ sin



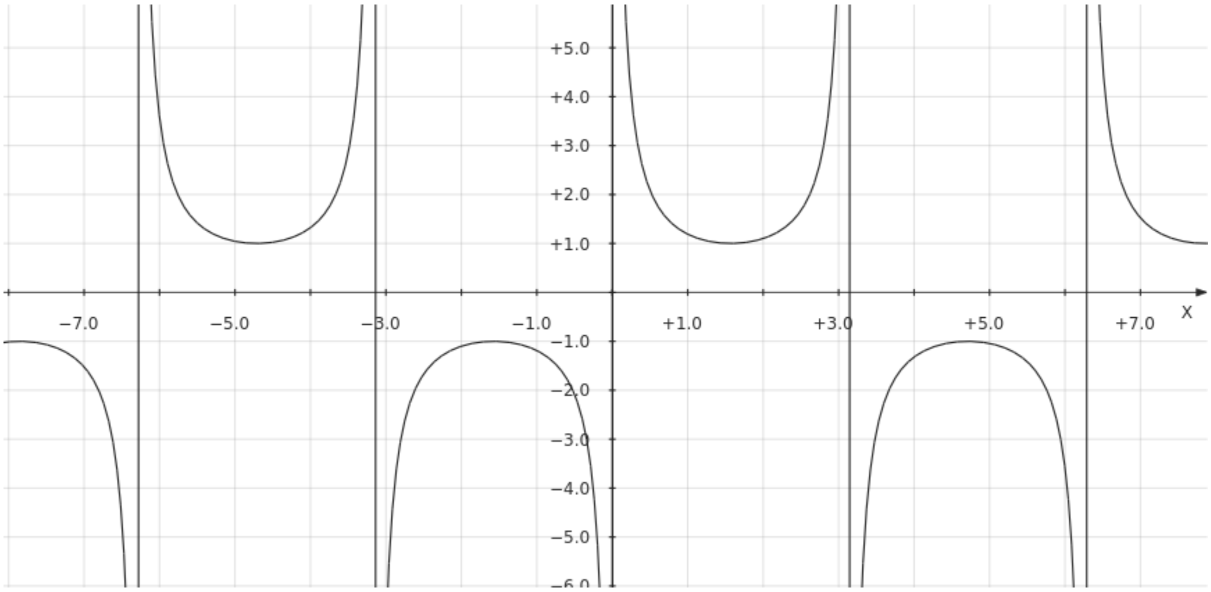
กราฟ cos



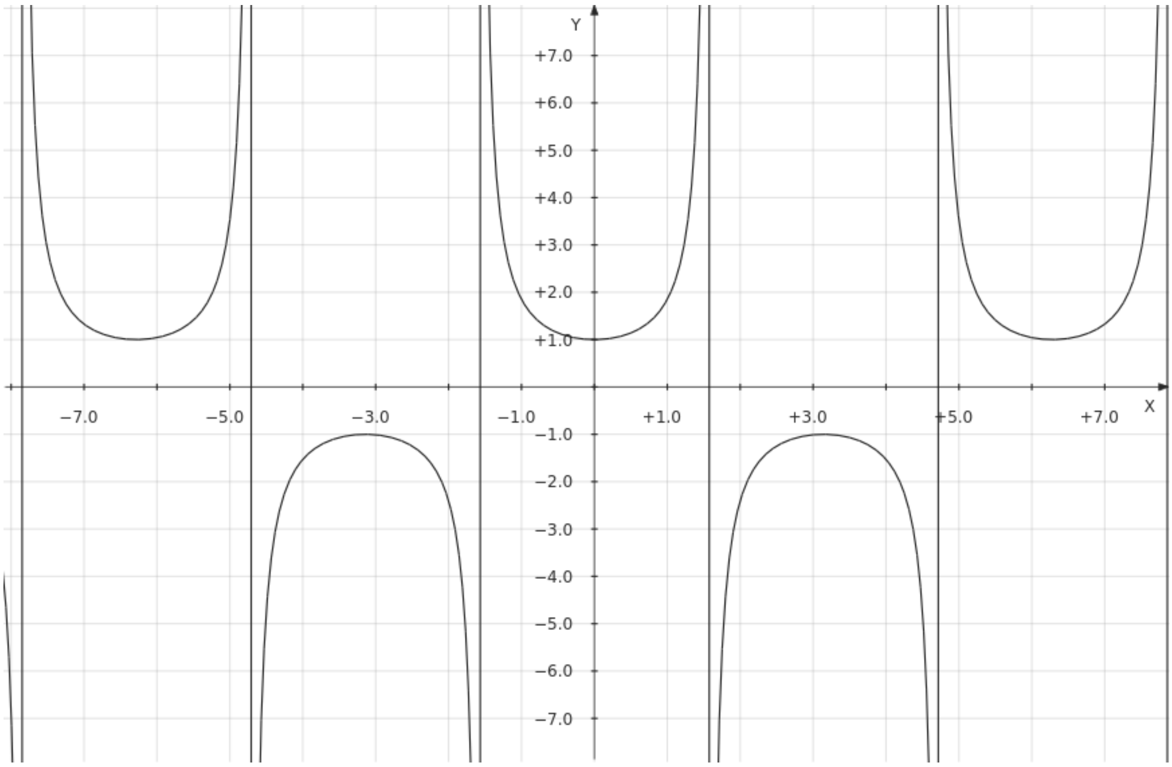
กราฟ tan



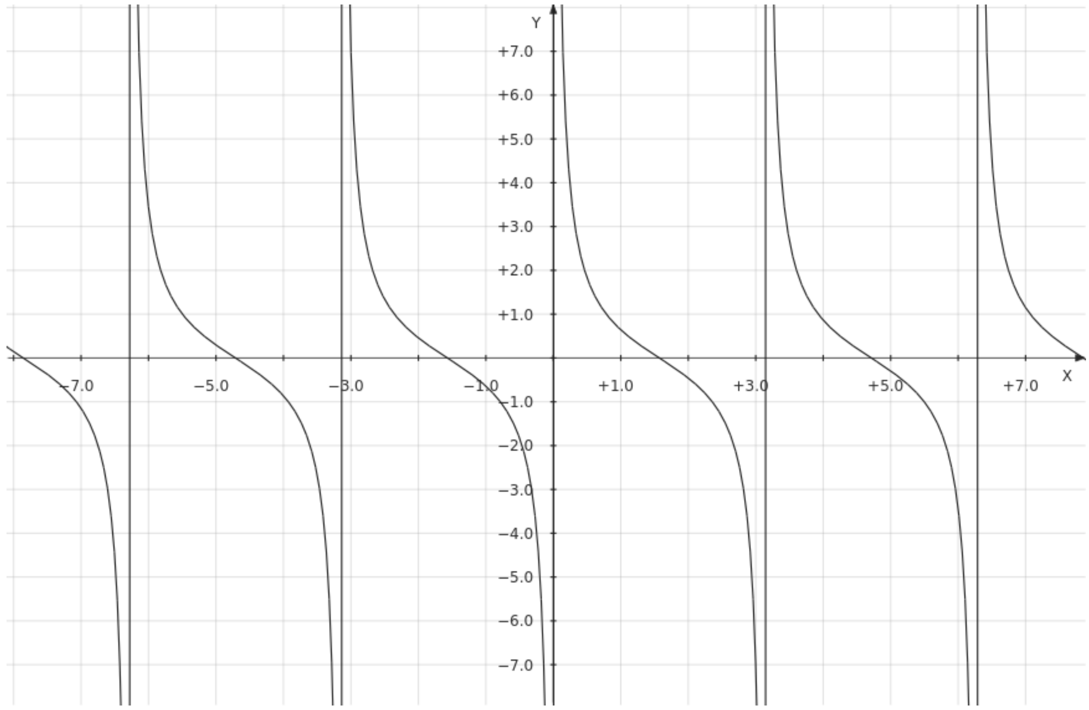
กราฟ cosec



กราฟ sec



กราฟ cot

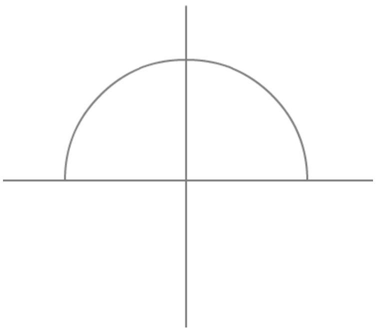


กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในวงกลม 1 หน่วย

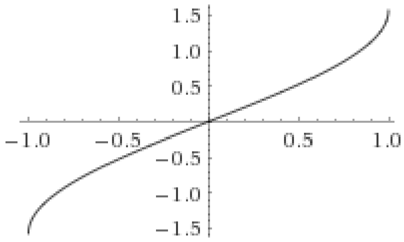
กราฟ sin

โดเมนของฟังก์ชัน $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

เรนจ์ของฟังก์ชัน [-1,1]



กราฟ arcsin



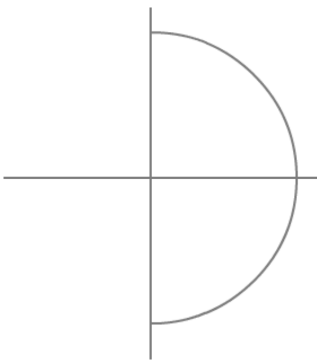
โดเมนของฟังก์ชัน[− 1 ,1]

เรนจ์ของฟังก์ชัน$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

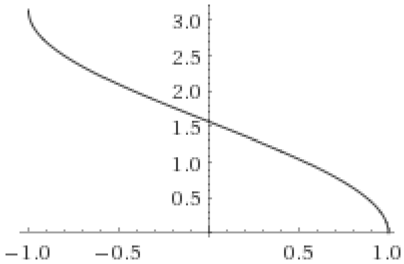
กราฟ cos

โดเมนของฟังก์ชัน $[0, \pi]$

เรนจ์ของฟังก์ชัน [-1,-1]



กราฟ arccos



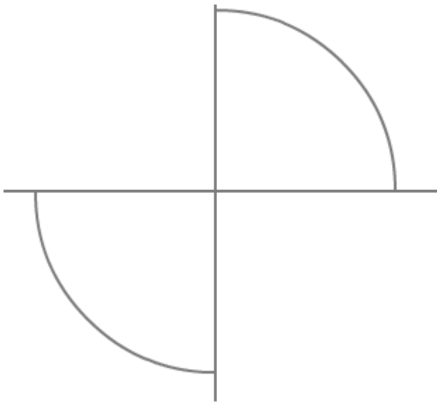
โดเมนของฟังก์ชัน[-1,-1]

เรนจ์ของฟังก์ชัน $[0, \pi]$

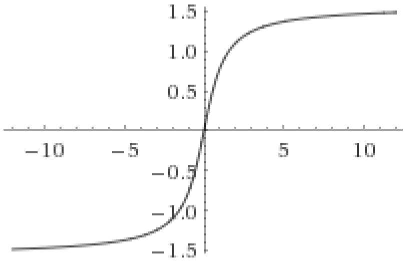
กราฟ tan

โดเมนของฟังก์ชัน $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

เรนจ์ของฟังก์ชัน R



กราฟ arctan



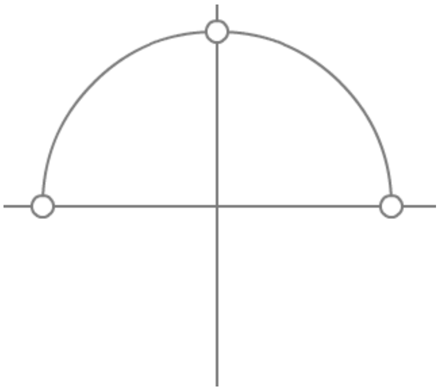
โดเมนของฟังก์ชัน R

เรนจ์ของฟังก์ชัน $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

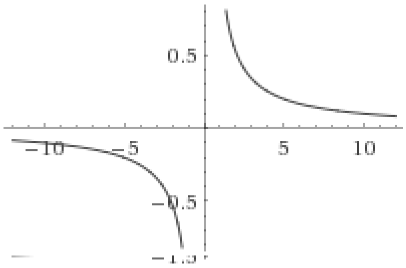
กราฟ cosec

โดเมนของฟังก์ชัน $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน R – {-1,1}



กราฟ arccosec



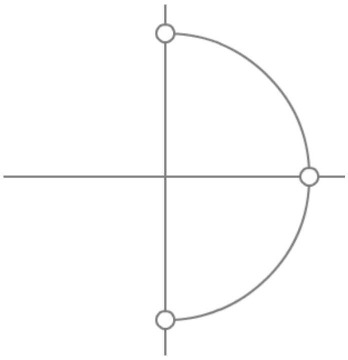
โดเมนของฟังก์ชัน R – {-1,1}

เรนจ์ของฟังก์ชัน $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$

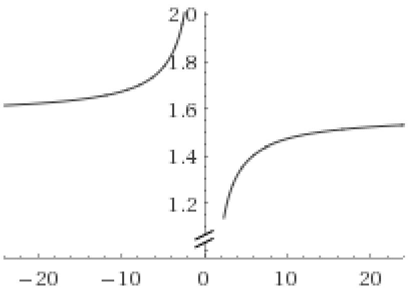
กราฟ sec

โดเมนของฟังก์ชัน $[0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน R – {-1,1}



กราฟ arcsec



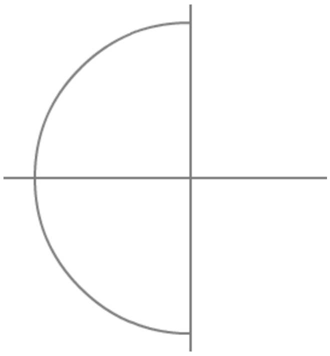
โดเมนของฟังก์ชัน R – {-1,1}

เรนจ์ของฟังก์ชัน $[0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

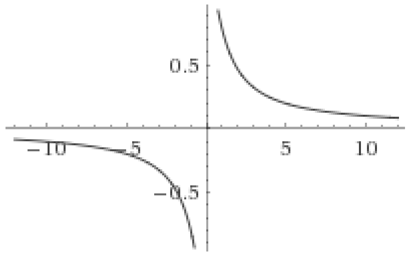
กราฟ cot

โดเมนของฟังก์ชัน $(0,\pi)$

เรนจ์ของฟังก์ชัน R



กราฟ arccot



โดเมนของฟังก์ชัน R

เรนจ์ของฟังก์ชัน $(0,\pi)$

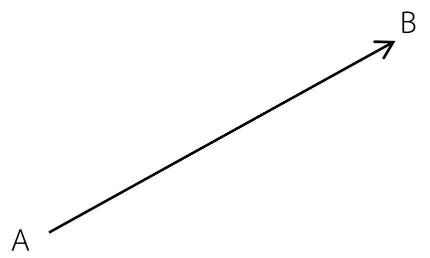
เวกเตอร์ (Vector)

- เวกเตอร์รูปภาพ
  - การเท่ากันของเวกเตอร์
  - การขนานกันของเวกเตอร์
  - นิเสธของเวกเตอร์
  - การบวกลบเวกเตอร์
  - การคูณเวกเตอร์
- เวกเตอร์ในพิกัดฉาก
  - ขนาดของเวกเตอร์
  - เวกเตอร์ในระบบสองมิติ
  - เวกเตอร์ในระบบสามมิติ
- การคูณเวกเตอร์
  - ผลคูณเชิงสเกลาร์
  - ผลคูณเชิงเวกเตอร์
- ประยุกต์เวกเตอร์
  - พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน $|\vec{u} \times \vec{v}|$
  - ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})|$

เวกเตอร์เป็นจำนวนที่มีทั้งขนาด และ ทิศทาง เวกเตอร์มีการใช้กันในหลายสาขาทั้งฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์

เวกเตอร์ (vector) ในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีลักษณะแตกต่างกับ สเกลาร์(scalar) ซึ่ง เวกเตอร์เป็นจำนวนที่มีทั้งขนาด และ ทิศทาง เวกเตอร์มีการใช้กันในหลายสาขา นอกเหนือจากทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในทางวิทยาศาสตร์ฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์

เวกเตอร์ในเรขาคณิต เราใช้เส้นตรงที่ระบุทิศทาง แทนเวกเตอร์ โดยความยาวของ เส้นตรง แทนขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์ แทนขนาดของ เวกเตอร์และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์



จากรูป A เป็นจุดเริ่มต้น (initial point)

B เป็นจุดสิ้นสุด (terminal point)

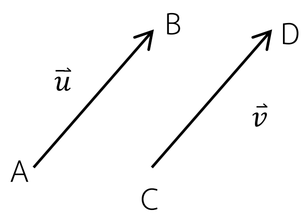
แสดงเวกเตอร์ AB เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$

ความยาวของเส้นตรง AB เป็นขนาดของ เวกเตอร์ เขียนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$

ในบางครั้งเราสามารถกล่าวถึงเวกเตอร์โดยไม่ จำเป็นต้องระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด เช่น

<u>การขนานกันของเวกเตอร์</u>

$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะขนานกันก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกัน หรือมีทิศทางตรงข้ามกัน



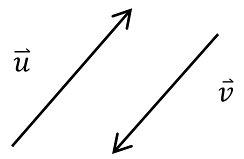
จากตัวอย่าง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน

<u>การเท่ากันของเวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์</u>

$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางและขนาดเดียวกันเขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$

<u>นิเสธของเวกเตอร์</u>

นิเสธ ของ $\vec{u}$ (negative of $\vec{u}$) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$



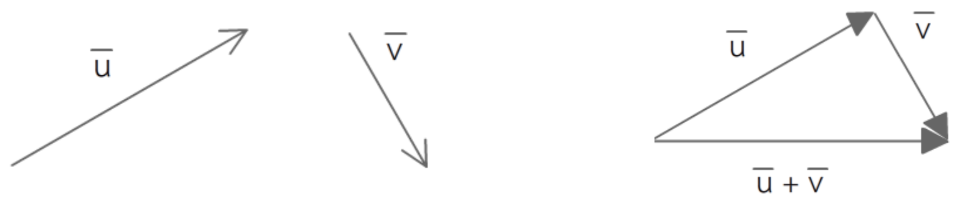
จากตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ มีขนาดเท่ากันกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามดังนี้ $\vec{v}$ เป็นนิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$

<u>การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ในระบบ 3 ตัว</u>

ในการกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ สามารถกำหนดโดยใช้ทิศเหนือเป็นหลัก และกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ เป็นมุม θ ที่วัดจากทางทิศเหนือ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา โดย ขนาด มุมจะอยู่ระหว่าง 0° ถึง 360°

<u>การบวกลบเวกเตอร์</u>

เมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ เลื่อน $\vec{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย "$\vec{u}+\vec{v}$" คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$



<u>เวกเตอร์ศูนย์</u> (zero vector) เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

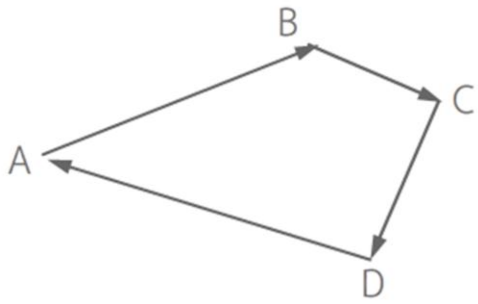
ข้อสังเกต

1.กรณีของเวกเตอร์ศูนย์ ไม่จำเป็นต้องกล่าวถึงทิศทางของเวกเตอร์ แต่ถ้าต้องการกล่าวถึงมีข้อตกลงว่าจะระบุทิศทางของเวกเตอร์ศูนย์เป็นเช่นใดก็ได้

2.เมื่อเขียนรูปเรขาคณิตแทนเวกเตอร์ศูนย์ จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์เป็นจุดเดียวกัน

$\overrightarrow{PP} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



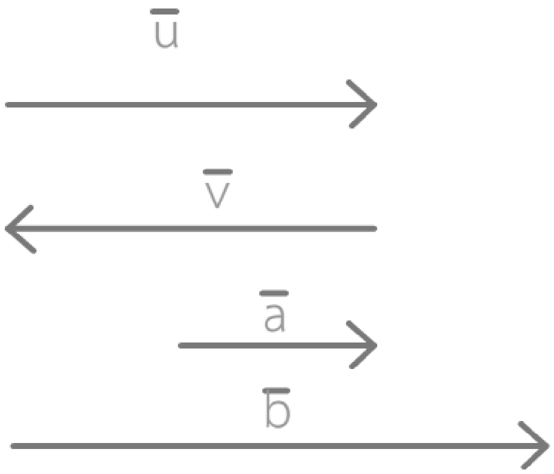
เมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ผลลบของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}$ - $\vec{v}$ หมายถึงผลบวก $\vec{u}$ และนิเสธของ $\vec{v}$ คือ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

<u>การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์</u>

นิยามเมื่อ a เป็นสเกลาร์ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของเวกเตอร์ u ด้วย สเกลาร์ a เป็นเวกเตอร์เขียนแทนด้วย a$\vec{u}$ โดยถ้า a เป็นบวก

- ถ้า a เป็นบวก จะมีทิศทางเดียวกัน
- ถ้า a เป็น ลบจะมีทิศทางตรงกันข้าม
- ถ้า a = 0 แล้ว a$\vec{u}$ = $\vec{0}$

ตัวอย่าง



คำอธิบายจากรูป

$\vec{v} = -\vec{u}$

$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u}$

$\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{u}$

คุณสมบัติการบวกของเวกเตอร์

- คุณสมบัติปิด
- คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้
- คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์
- คุณสมบัติการมีอินเวอร์ส
- คุณสมบัติการสลับที่

คุณสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

เมื่อ $\vec{\mathbf{u}}$ และ $\vec{\mathbf{v}}$ ไม่เท่ากับ 0 ถ้า $\vec{\mathbf{v}}$ = m($\vec{\mathbf{u}}$)

ถ้า m เป็นบวก จะมีทิศทางเดียวกัน

ถ้า m เป็น ลบจะมีทิศทางตรงกันข้าม

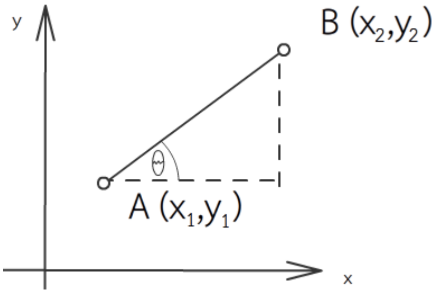
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{a}$ ใดๆในรูปเวกเตอร์ $\vec{\imath}$ และ $\vec{\jmath}$ ได้เสมอเมื่อ

$\vec{\imath}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วยและมีทิศทางไปทางแกน x ทางบวก

$\vec{\jmath}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วยและมีทิศทางไปทางแกน y ทางบวก



ให้ $a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath}$ สามารถเขียนให้อยู่ ในรูปของเมตริกซ์ได้ $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_b \end{bmatrix}$

ขนาด $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

ความชัน $m_{\vec{a}} = \tan\theta = \frac{a_1}{a_2}$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

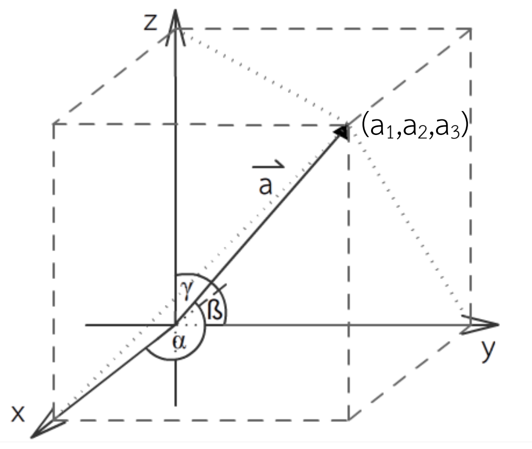
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{a}$ ใดๆในรูปเวกเตอร์ $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ และ $\vec{k}$ ได้เสมอเมื่อ

$\vec{\imath}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วยและมีทิศทางไปทางแกน x ทางบวก

$\vec{\jmath}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วยและมีทิศทางไปทางแกน y ทางบวก

$\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วยและมีทิศทางไปทางแกน z ทางบวก



ขนาด $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{a}$ คือ

$\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

หรือ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

คำแนะนำ

1. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A(x_1,y_1,z_1) และจุดสิ้นสุดที่ B(x_2,y_2,z_2)

คือ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

2. เวกเตอร์ 1 หนึ่งในทิศทางเดียวกัน $\vec{a}$ แทนด้วย $\hat{a}$ = $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะมี	
ทิศทางเดียวกัน	ทิศทางตรงข้ามกัน
มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน	โคไซน์แสดงทิศทางกับแต่ละแกนของเวกเตอร์ จะเป็นจำนวนที่มีค่าตรงข้ามกันกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

คุณสมบัติของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

นิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ a = d และ b = e c = f
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d \\ b + e \\ c + f \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - d \\ b - e \\ c - f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์ คือ$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	k$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ	k$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

<u>ผลคูณระหว่างเวกเตอร์</u>

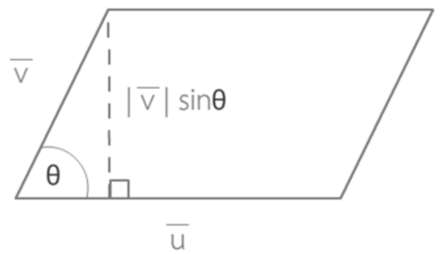
ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product)	
ผลคูณเชิงสเกลาร์สองมิติ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1+a_2b_2$ $= \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$; $0° \le \theta \le 180°$	ผลคูณเชิงสเกลาร์สามมิติ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $= \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$; $0° \le \theta \le 180°$
ตัวอย่าง กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ วิธีทำ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{i} \bullet (-3\vec{i})) + (3\vec{j} \bullet 4\vec{j})$ $= -6 + 12$ $= 6$	
ผลคูณเชิงเวกเตอร์(Cross Product)	
ผลคูณเชิงเวกเตอร์สามมิติ กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ $= \lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\sin\theta$	

คุณสมบัติผลคูณระหว่างเวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์	ผลคูณเชิงเวกเตอร์
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$	$\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w})$
$a(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \overrightarrow{(a\mathrm{u})}\cdot\vec{v}$ $= \vec{u}\cdot(a\vec{v})$	$a(\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(a\mathrm{u})}\times\vec{v}$ $= \vec{u}\times(a\vec{v})$
$\vec{u}\cdot\vec{u} = \lvert\vec{u}\rvert^2$	$\vec{u}\times\vec{u} = 0$
$\vec{u}\cdot\vec{0} = 0$	$\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}$
ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่เท่ากับ 0 แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ ก็ต่อเมื่อ θ เป็นมุมแหลม $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\theta = 90°$ และ $\vec{u},\vec{v}$ ตั้งฉากกัน $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ ก็ต่อเมื่อ θ เป็นมุมป้าน	ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่เท่ากับ 0 แล้ว $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{u} // \vec{v}$
$\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2 = \lvert\vec{u}\rvert^2 + \lvert\vec{v}\rvert^2 + 2\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert\cos\theta$ $\lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert^2 = \lvert\vec{u}\rvert^2 + \lvert\vec{v}\rvert^2 - 2\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert\cos\theta$ $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2 - \lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert^2 = 4(\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert)$ $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2 + \lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert^2 = 2(\lvert\vec{u}\rvert^2 + \lvert\vec{v}\rvert^2)$	$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$
$\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert^2 = \lvert\vec{u}\rvert^2 + \lvert\vec{v}\rvert^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$	

<u>การประยุกต์เวกเตอร์</u>

1.พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน (ต้องทราบ)

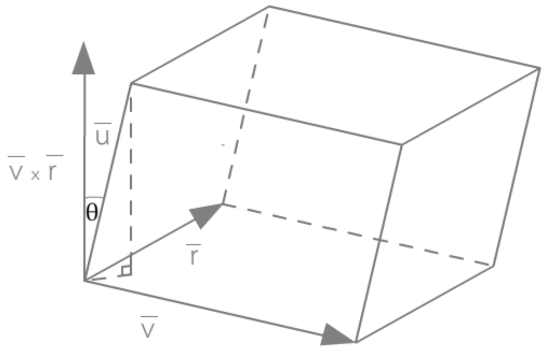


พื้นที่ = ฐาน × สูง

$= |\vec{u} \times \vec{v}|$

$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

2.ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ต้องทราบ)



ปริมาตร = พื้นที่ฐาน × สูง

$= |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{r}|\cos\theta$

$= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})|$

3.โปรเจคชั่นของเวกเตอร์ (นอกหลักสูตร แต่ควรทราบ)

$\mathrm{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = a\vec{v}$ เนื่องจาก $\vec{v}$ *ตั้งฉาก* $\vec{u} - a\vec{v}$

$\mathrm{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

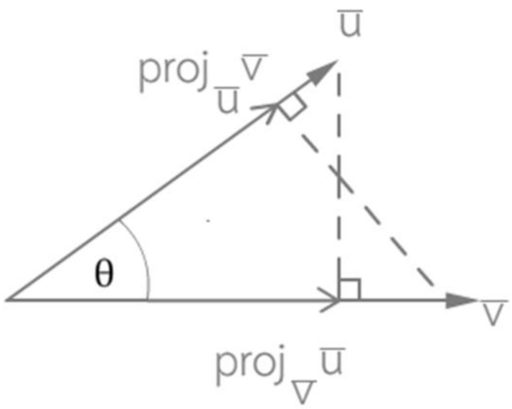
มาจาก $\vec{v} \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = 0$

$\vec{v} \cdot \vec{u} - (a\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = a|\vec{v}|^2$

$a = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}$

$\mathrm{Proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$



4.พื้นที่รูปสามเหลี่ยม (นอกหลักสูตร แต่ควรทราบ)

$\frac{1}{2} \times |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

- พื้นฐาน
  - ค่า i
  - ค่าสมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
  - สมบัติของจำนวนเชิงซ้อน
- สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน
- อินเวอร์สของจำนวนเชิงซ้อน
- กราฟของจำนวนเชิงซ้อน
- พิกัดเชิงขั้ว
  - รากที่ n
- การแก้ปัญหาสมการด้วยจำนวนเชิงซ้อน

สมการบางสมการไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริงจึงมีการกำหนดจำนวนจินตภาพขึ้นเพื่อใช้ในการหาคำตอบของสมการที่มีคำตอบไม่ใช่จำนวนจริง จำนวนจินตภาพ กับจำนวนจริงประกอบกัน เรียกว่า**จำนวนเชิงซ้อน**

ระบบจำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

เนื่องจากสมการพหุนามจำนวนมากไม่มีคำตอบตัวอย่างเช่น $x^2+1=0$ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ จึงมีการกำหนดจำนวนชนิดหนึ่งขึ้นมาเพื่อให้ง่ายต่อการใช้งานจำนวนชนิดหนึ่งซึ่งไม่ใช่จำนวนจริงเรียกว่า **จำนวนเชิงซ้อน** เพื่อหาค่าของสมการที่ไม่มีคำตอบในจำนวนจริง

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ *เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง*

เรียก a ว่าส่วนจริง (Real part) ของ z เขียนแทนด้วย Re(z)

เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ (Imaginary part) ของ z เขียนแทนด้วย Im(z)

จำนวนจินตภาพ

คือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริง เขียนในรูป $\sqrt{\text{จำนวนลบ}}$ โดยนิยมเขียนในรูปของตัว i

Ex

1. $\sqrt{-1} = i$
2. $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$

จำนวนจริงคือจำนวนเชิงซ้อนที่มีหน่วยจินตภาพเป็นศูนย์ และจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่มีส่วนจริงหรือส่วนจริงเป็นศูนย์ เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้ (Purely imaginary number)

Ex

1. $25 = 25 + 0i$
2. $\sqrt{25}i = 0 + \sqrt{25}i$

ค่าของ i^n

เมื่อ $n \in i^+$ สามารถหาค่าของ i^n ได้ดังนี้

1. ถ้า $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 0 ค่าของ $i^n = 1$
2. ถ้า $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 1 ค่าของ $i^n = i$
3. ถ้า $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 2 ค่าของ $i^n = -1$
4. ถ้า $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 3 ค่าของ $i^n = -i$

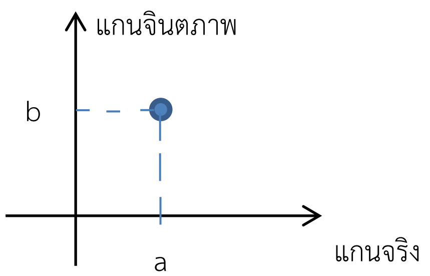
Ex

1. $i^8 = 1 \left(\frac{8}{4} \text{ เหลือเศษ } 0\right)$
2. $i^{13} = i \left(\frac{13}{4} \text{ เหลือเศษ } 1\right)$

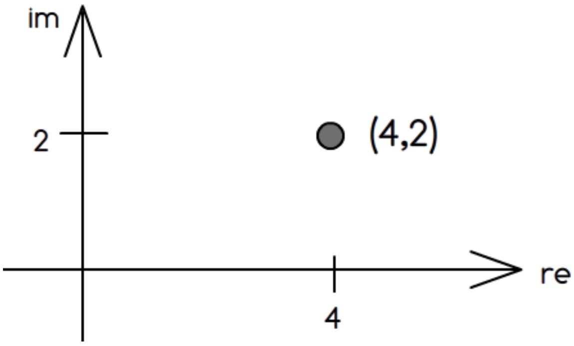
ข้อควรรู้ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$ $i^5 = i$ $i^6 = -1$ $i^7 = -i$ $i^8 = 1$

จำนวนเชิงซ้อน

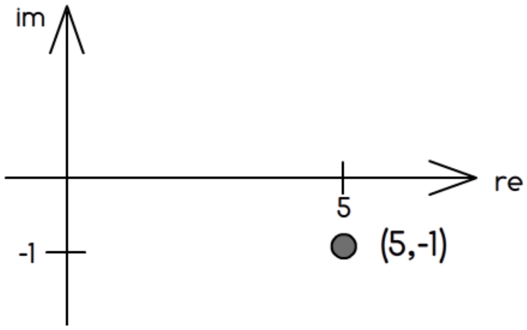
z = (a,b) = a + bi a คือส่วนจริง Re(z) b คือส่วนจินตภาพ Im(z)



ตัวอย่าง



เราสามารถเขียนได้ว่า 4 + 2i



เราสามารถเขียนได้ว่า 5 – i

สมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = \mathrm{c} + \mathrm{di}$

1. $z_1 = z_1$ เมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)$i
3. $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)$i
4. $kz_1 = ka + kbi$
5. $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ หรือ (a+bi)(c+di) แล้วคูณเหมือนจำนวนจริง
6. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนด $z_1 = 4 - 6i$ $z_2 = -3 + 2i$ จงหาค่า $3(z_1 + z_2)$

วิธีทำ $z_1 + z_2 = (4 - 3) + (-6+2)i$

$= 1 - 4i$

$3(z_1 + z_2) = 3 - 12i$

<u>ตอบ</u> 3 – 12i

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $4 + 3i = (3a+b) + (a+2b)i$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง จงหาค่า a+b

วิธีทำ จากโจทย์ $3a + b = 4$ --------- (1)

$a + 2b = 3$ --------- (2)

(1) x 2 $6a + 2b = 8$ --------- (3)

(3) – (2) $5a = 5$

$a = 1$

แทน a ลงในสมการ (2) $1 + 2b = 3$

$2b = 2$

$B = 1$

<u>ดังนั้น</u> $a+b = 2$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาค่าของ $\frac{2+5i}{2-3i}$

วิธีทำ $\frac{2+5i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{(2+5i)(2+3i)}{4-9i^2}$

$= \frac{4+6i+10+15i}{4+9}$

$= \frac{14+21i}{13}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\frac{y+11i}{x+3i}$ = 1 – 4i จงหาค่าของ y – x

วิธีทำ y + 11i = (1 - 4i)(x+3i)

= x + 3i – 4xi –12i^2

ดังนั้น y + 11i = (x + 12) + (3 - 4x)i

11 = 3 - 4x

4x = -8

x = -2

y = (x + 12)

= (-2+12)

= 10

y – x = 10 – (-2)

= 12

ตอบ 12

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (Conjugate)

ให้ $z = a + bi$ คอนจูเกตของ z คือ $\bar{z}$ โดยที่ $\bar{z} = a - bi$

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $z\bar{z} = a^2 + b^2$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
6. $z + \bar{z} = 2a$
7. $z - \bar{z} = 2bi$

ข้อควรรู้ การหารจำนวนเชิงซ้อนทำได้โดยการทำให้อยู่ในรูปของเศษส่วนแล้วนำสังยุกต์ของจำนวนนั้นๆไปคูณทั้งเศษและส่วน

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = a + bi$ ค่าสัมบูรณ์ของ z คือ $|z|$ โดยที่ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1. $|z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
4. $|z^n| = |z|^n$
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
6. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$
7. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$

รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z = x + yi$ และ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

รากที่สองของ $z = \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + i\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)$ เมื่อ $y \geq 0$ หรือ $\pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - i\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)$ เมื่อ $y < 0$

อินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = a + bi$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ z หรือ $z^{-1} = \frac{1}{z}$

ดังนั้น $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ |(5 - 4i)(5 + 12i)(-3i)|

วิธีทำ |(5 - 4i)|(5 + 12i)|(-3i)| = $\sqrt{5^2 + 4^2}\sqrt{5^2 + 12^2}\sqrt{3^2}$

= $\sqrt{41}$ (13)(3)

= $39\sqrt{41}$

ตอบ $39\sqrt{41}$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|(7-24i)(3+4i)z^6| = 1$ แล้ว $z \cdot \bar{z}$ มีค่าเท่าใด (Ent 42)

วิธีทำ $|(7 - 24i)||(3 + 4i)||z^6| = 1$

$\sqrt{7^2+24^2}\sqrt{3^2+4^2}|z^6| = 1$

$(25)(5)|z^6| = 1$

$|z^6| = \frac{1}{125}$

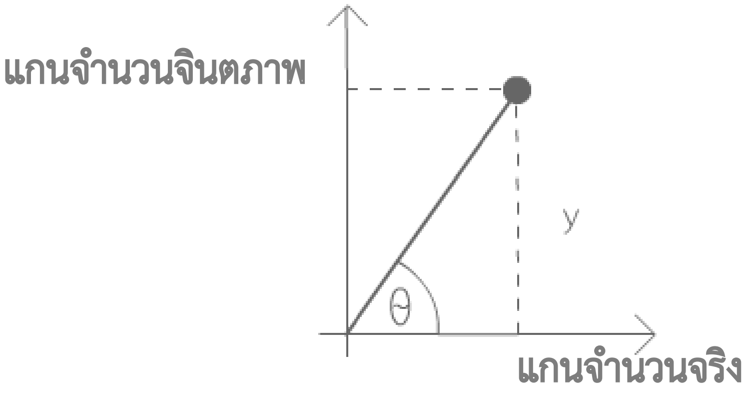
$z \cdot \bar{z} = |z^2|$

$|z^2| = \frac{1}{5}$

<u>ตอบ</u> $\frac{1}{5}$

กราฟของจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน ใช้จุดในระนาบเป็นตัวแทนของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งระนาบดังกล่าวประกอบด้วยแกนจริง(X)และแกนจินตภาพ(Y) ถ้า $z = x + yi$ จะมีความหมายดังนี้



เรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ของ z

จากรูป จะพบว่า $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \therefore b = |z|\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \therefore a = |z|\cos\theta$

แล้ว $r = |z|$

$\therefore a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

เรียกรูปแบบนี้ว่า **จำนวนเชิงซ้อนในรูปของพิกัดเชิงขั้ว** (Polar Co-Ordinate System)

- สามารถเขียน $\mathrm{a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ เป็น $\mathrm{a + bi = r\,cis\theta}$

การดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของพิกัดเชิงขั้ว

$z_1=r_1\text{cis }\theta_1$ $z_2=r_2\text{cis }\theta_2$

$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \text{ cis } (\theta_1+\theta_2)$

$z_1 \div z_2 = r_1 \div r_2 \text{ cis } (\theta_1-\theta_2)$

$z_1^n = (r_1)^n \text{ cis } (n\theta_1)$

$\bar{z}_1 = r_1\text{cis } -\theta_1$

ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = (a+bi)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ [3(cos35° +i sin35°)][5(cos55° +I sin55°)]

วิธีทำ [3cis35°][5cis55°] = [3×5 cis (35°+45°)

= 15 cis (90°)

= 15(cos90° + i sin 90°)

= 15 (0 + 1i)

= 15i

ตอบ 15i

การแก้สมการที่มีผลลัพธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. **ถ้าสมการอยู่ในรูป $x^2 + k = 0$**

   จัดรูปแล้วใช้ เทียบสูตร $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. **ถ้าสมการอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$**

   ใช้สูตร $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3. **ถ้าสมการมีเลขชี้กำลังสูงสุดเกิน 2 ขึ้นไป**

   ให้ใช้วิธีแยกตัวประกอบโดยอาจใช้วิธีเศษเหลือ ทำให้อยู่ในรูปแบบที่สองแล้วใช้สูตร

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = rcis\theta$ แล้ว รากที่ n ของ z จะมีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$\sqrt[n]{r}\left[cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

ข้อควรรู้เกี่ยวกับสมการพหุนาม

$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + s = 0$

ผลบวกของคำตอบทั้งหมดคือ $-\frac{b}{a}$

ผลคูณคำตอบทั้งหมดคือ $(-1)^n\frac{s}{a}$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงหารากที่ 2 ของ z เมื่อ z = 3 + 4i

วิธีทำ หา $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= 5$

รากที่ 2 ของ z คือ $z = \pm\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + i\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)$

$z = \pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right)$

$= \pm\ (2 + \mathrm{i})$

ความน่าจะเป็น (Probability)

- กฎการนับ
  - หลักการบวก ใช้เมื่องานยังไม่เสร็จ
  - หลักการคูณ ใช้เมื่องานเสร็จ
- รูปแบบวิธีการนับยอดนิยม

	ของต่าง	ของเหมือน	ของซ้ำ
ตัวอย่าง	ABCDE	AAAAA	MMCAI
การเรียงสับเปลี่ยน (สนใจตำแหน่งที่ได้)	n! 5! = 120 วิธี	1 วิธี	n! หารด้วยของที่ซ้ำ $\frac{5!}{2!}$
การเลือก (ไม่สนใจตำแหน่งที่ได้)	ใช้ $^{n}C_{r}$	1 วิธี	ใช้กฎการนับ
การแบ่ง	จำนวนของทั้งหมดหารด้วยกลุ่มที่แบ่ง	ใช้กฎ Star and Bar	ใช้กฎการนับ

- ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น เครื่องมือในการช่วยตัดสินใจและบอกถึงความเป็นไปได้ของสิ่งต่างๆ เป็นอีกวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญทั้งทางด้านธุรกิจ ด้านสถิติ ด้านวิศวกรรมศาสตร์

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

ปัญหาเกี่ยวกับการนับเป็นปัญหาหนึ่งที่มักจะพบอยู่เสมอ หลักการนับมี 2 ประการ ดังนี้

1.หลักการบวก ใช้เมื่อการทำงานนั้นยังไม่เสร็จ เช่นใช้ในรวมกันของกรณีต่างๆ

2.หลักการคูณ ใช้เมื่อการทำงานนั้นเสร็จสมบูรณ์แล้ว

หลักการบวก

ถ้าการทำงานหนึ่งมีวิธีการทำ k วิธี คือ วิธีที่ 1 ถึงวิธีที่ k โดยที่

การทำงานวิธีที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี

การทำงานวิธีที่ 2 มีวิธีทำ n_2 วิธี

$\vdots$

การทำงานวิธีที่ k มีวิธีทำ n_k วิธี

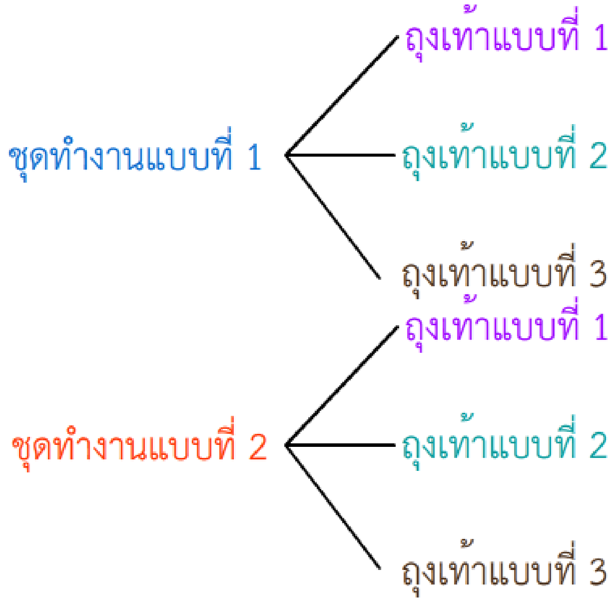
และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกัน แล้วจำนวนวิธีทำงานนี้เท่ากับ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> มีชุดทำงาน 2 ชุด มีถุงเท้า 3 แบบ จะเลือกวิธีการแต่งตัวโดยไม่ซ้ำกันเลย

วิธีทำ ชุดทำงานแบบที่ 1 สามารถใช้ถึงเท้าได้ 3 แบบ 3 วิธี

ชุดทำงานแบบที่ 2 สามารถใช้ถึงเท้าได้ 3 แบบ 3 วิธี

<u>ดังนั้น</u> วิธีการแต่งตัวโดยไม่ซ้ำกันเลยมีทั้งหมด 3 + 3 = 6 วิธี



<u>ตัวอย่าง</u> นักเรียน 3 คน ต้องการเข้าและออกห้องๆหนึ่ง ซึ่งมีประตู 3 บาน โดยนักเรียนคนที่ 1 เข้าและออกโดยใช้ประตูบานเดียวกัน นักเรียนคนที่ 2 เข้าและออกโดยไม่ใช้ประตูบานเดิม และนักเรียนคนที่ 3 เข้าและออกประตูบานใดก็ได้ จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนทั้งสามคนเข้าและออกห้องนี้

วิธีทำ นักเรียนคนที่ 1 มีวิธีเข้าและออกได้ 3 วิธี

นักเรียนคนที่ 2 มีวิธีเข้าและออกได้ 6 วิธี

นักเรียนคนที่ 3 มีวิธีเข้าและออกได้ 9 วิธี

<u>ดังนั้น</u> วิธีที่นักเรียนทั้งสามคนเข้าและออกห้องนี้มีทั้งหมด 3+6+9=18

<u>หลักการคูณ</u>

ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยการทำงาน k ขั้นตอน คือ ขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ k ตามลำดับ โดยที่

การทำงานขั้นตอนที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี

การทำงานขั้นตอนที่ 2 มีวิธีทำ n_2 วิธี

$\vdots$

การทำงานขั้นตอนที่ k มีวิธีทำ n_k วิธี

และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกัน แล้วจำนวนวิธีทำงานนี้เท่ากับ $n_1 \ n_2 \ldots n_k$วิธี

<u>ตัวอย่าง 1</u> บริษัทผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปแห่งหนึ่งผลิตเสื้อ 6 แบบ กางเกง 5 แบบ และเนคไท 4 แบบ ถ้าจะจัดแต่งตัวให้กับหุ่นเพื่อนำไปโชว์หน้าร้าน จะสามารถแต่งเป็นชุดต่างๆกันได้กี่ชุด

วิธีทำ ในการแต่งตัวให้กับหุ่นมี 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเสื้อได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกกางเกงได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเนคไทได้ 4 วิธี

<u>ดังนั้น</u> วิธีแต่งตัวให้กับหุ่นทำได้ทั้งหมด 6 x 5 x 4 = 120

ตัวอย่าง 2 ในคณะกรรมการนักเรียนจำนวน 10 คน จะมีวิธีเลือกประธาน รองประธานและเลขานุการ ได้กี่วิธี ถ้าคณะกรรมการคนหนึ่งไม่สมัครจะเป็นประธาน (Ent มีนาคม 48)

วิธีทำ **1.**ในตำแหน่งประธาน มีโอกาสเกิดได้ทั้งหมด 9 วิธี (เนื่องจากมีคณะกรรมการคนหนึ่งไม่สมัครจะเป็นประธาน)

2.ในตำแหน่งรองประธาน มีโอกาสเกิดได้ 9 วิธี (10คน ไปอยู่ประธานแล้ว 1 คน)

3.ในตำแหน่งเลขานุการ มีโอกาสเกิดได้ 8 วิธี

ดังนั้น วิธีเลือกประธาน รองประธานและเลขานุการได้ทั้งหมด $9 \times 9 \times 8 = 684$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 ในการสร้างรหัส (Code) กำหนดให้ใช้อักขระ 3 ตัวที่ไม่ซ้ำกัน โดยตั้งมีตัวอักษรภาษาอังกฤษ (A-F อย่างน้อย 1 ตัว และมีตัวเลข 0 – 9) อย่างน้อยหนึ่งตัวจำนวนหารที่สร้างได้โดยไม่ซ้ำแบบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (B-PAT ตุลาคม 51)

ก.1,260 ข.2,520 ค.5,040 ง.3,780

วิธีทำ ให้แยกกรณี จากโจทย์เราสามารถได้ทั้งหมด 5 กรณี

<table>
<tr>
<td>กรณี 1 มีอักษร 1 ตัว เกิดได้ 6 วิธี
มีตัวเลข 2 ตัว สองตำแหน่งตำแหน่งหนึ่งสามารถเกิดได้ 10 วิธี
6 x 10 x 10
ตัวอักษร ตัวเลข ตัวเลข
ดังนั้น กรณีที่ 1 มีโอกาสเกิด 600 วิธี</td>
<td>กรณี 2 มีอักษร 2 ตัว สองตำแหน่งตำแหน่งหนึ่งสามารถเกิดได้ 6 วิธี
มีตัวเลข 1 ตัว เกิดได้ 10 วิธี
6 x 6 x 10
ตัวอักษร ตัวอักษร ตัวเลข
ดังนั้น กรณีที่ 2 มีโอกาสเกิด 360 วิธี</td>
</tr>
<tr>
<td>กรณี 3 มีอักษร 1 ตัว เกิดได้ 6 วิธี
มีตัวเลข 2 ตัว สองตำแหน่งตำแหน่งหนึ่งสามารถเกิดได้ 10 วิธี
10 x 6 x 10
ตัวเลข ตัวอักษร ตัวเลข
ดังนั้น กรณีที่ 1 มีโอกาสเกิด 600 วิธี</td>
<td>กรณี 4มีอักษร 2 ตัว สองตำแหน่งตำแหน่งหนึ่งสามารถเกิดได้ 6 วิธี
มีตัวเลข 1 ตัว เกิดได้ 10 วิธี
10 x 6 x 6
ตัวเลข ตัวอักษร ตัวอักษร
ดังนั้น กรณีที่ 2 มีโอกาสเกิด 360 วิธี</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">กรณี 5 มีอักษร 1 ตัว เกิดได้ 6 กรณี
มีตัวเลข 2 ตัว สองตำแหน่งตำแหน่งหนึ่งสามารถเกิดได้ 10 วิธี
10 x 10 x 6
ตัวเลข ตัวเลข ตัวอักษร

ดังนั้น กรณีที่ 1 มีโอกาสเกิด 600 วิธี</td>
</tr>
</table>

ดังนั้น เราสามารถสร้างรหัสได้ทั้งหมด 600+600+600+360+360 = 2,520 วิธี

ตอบข้อ ข.

แฟคทอเรียล

คือจำนวนเต็มบวก n ใดๆ แฟคทอเรียล n เขียนแทนด้วย n! หมายถึงผลคูณจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n n! = n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)

ข้อควรระวัง 0! = 1 1! = 1

ข้อควรรู้ 4! = 24 5! = 120 6! = 720 7! = 5,040

รูปแบบวิธีการนับ

	ของต่าง	ของเหมือน	ของซ้ำ
ตัวอย่าง	ABCDE	AAAAA	MMCAI
การเรียงสับเปลี่ยน (สนใจตำแหน่งที่ได้)	n! 5! = 120 วิธี	1 วิธี	n! หารด้วยของที่ซ้ำ $\frac{5!}{2!}$
การเลือก (ไม่สนใจตำแหน่งที่ได้)	ใช้ $^{n}C_{r}$	1 วิธี	ใช้กฎการนับ
การแบ่ง	จำนวนของทั้งหมด หารด้วยกลุ่มที่แบ่ง	ใช้กฎ Star and Bar	ใช้กฎการนับ

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

เป็นการจัดเรียงสิ่งของโดยคำนึงถึงตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ

นิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n และเขียนแทนด้วย n! เช่น 5x4x3x2x1 = 5! เป็นต้น

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

เป็นการจัดเรียงสิ่งของในแนวเส้นตรง แบ่งออกได้ 2 แบบ ดังนี้

1.กฎการนับ เหมาะสำหรับทำโจทย์ในระดับสูง โจทย์ที่มีการประยุกต์ ไม่สามารถคิดด้วยสูตร

2.ใช้สูตรสำหรับการเรียงสับเปลี่ยน เหมาะสำหรับโจทย์ที่ไม่มีการประยุกต์

1.เรียงของแตกต่างกันหมด มีของ n ชิ้นนำมาเรียงเป็นจำนวน r ชิ้น $^{n}P_{r} = P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	Ex มีนักเรียน 10 คน นำมาเรียงเป็นแถวเพียง 7 คน $P_{n,r} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}$ = 60480 วิธี

2.เรียงของซ้ำ มีของ n ชิ้นนำมาเรียงเป็นเส้นตรง โดยมีของซ้ำ กลุ่ม $n_1\ n_2\ n_3 \dots n_k$ ${}^{n}P_r = P_{n,r} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}$	Ex หนังสือสังคมเหมือนกัน 3 เล่ม หนังสือคณิตศาสตร์เหมือนกัน 2 เล่ม นำมาเรียงบนชั้น $P_{n,r} = \dfrac{5!}{3!2!}$ = 10 วิธี

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ชาย 4 คน หญิง 2 คน เข้าแถวตรงโดยที่ไม่มีผู้หญิงยืนติดกันเลย จะได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิเคราะห์ ผู้ชายสามารถสลับกันเองได้ 4! วิธี

$\downarrow \underline{4} \downarrow \underline{3} \downarrow \underline{2} \downarrow \underline{1} \downarrow$

จับผู้หญิงแทรกระหว่างผู้ชายเพื่อไม่ให้ผู้หญิงยืนติดกัน ได้ ผู้หญิงคนแรก ยืนได้ 5 ตำแหน่งผู้หญิงคนที่สอง ยืนได้ 4 ตำแหน่ง

ดังนั้น 24 x (5x4) = 480 วิธี

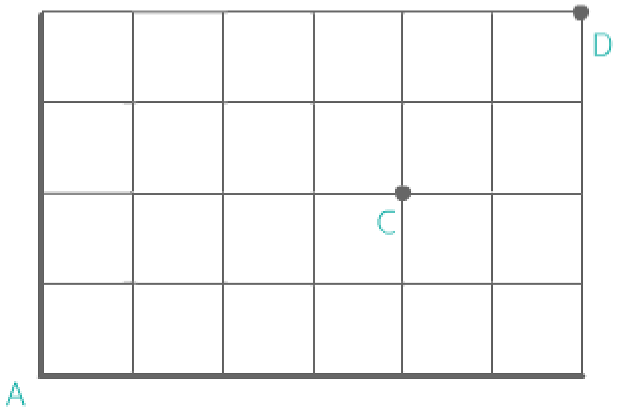
<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาจำนวนวิธีที่จะแจกหนังสือเลขซึ่งเหมือนกัน 2 เล่ม หนังสืออังกฤษที่เหมือนกัน 3 เล่ม และหนังสือวิทยาศาสตร์ที่ต่างกัน 2 เล่ม ให้นักเรียนคนละเล่มจะแจกได้กี่วิธี

วิธีทำ หนังสือมีทั้งหมด 7 เล่ม เรียงสับเปลี่ยนได้ 7! แต่เนื่องจากมีหนังสือเลขเหมือนกัน 2 เล่ม และหนังสือภาษาอังกฤษเหมือน 3 เล่ม ถ้าหนังสือภายในสองกองนี้ สลับกันเองทำให้เกิดเหตุการณ์ซ้ำ ดังนั้น เราต้องหารด้วย 2! และ 3!

$$\frac{7!}{2!\,3!}$$

<u>ดังนั้น</u> ตอบ 420 วิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนวิธีเดินทางจาก A ไป D ที่ ผ่านจุด C โดยทางทิศเหนือและตะวันออกเท่านั้น



วิธีทำ ให้ใช้วิธีคิดแบบของซ้ำ

จากโจทย์ เราต้องแบ่งเป็น 2 ช่วง คือ ช่วง A ไป C และ C ไป D

ช่วง A ไป C ต้องขึ้นทางทิศเหนือ 2 ครั้ง
ต้องไปทางตะวันออก 4 ครั้ง
รวมต้องเดินทั้งหมด 6 ครั้ง

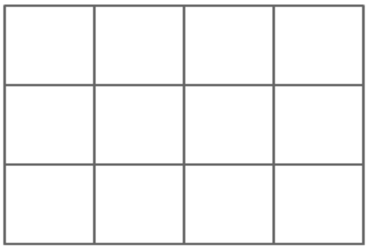
ช่วง C ไป D ต้องขึ้นทางทิศเหนือ 2 ครั้ง
ต้องไปทางตะวันออก 2 ครั้ง
รวมต้องเดินทั้งหมด 4 ครั้ง

$$\frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{2!2!}$$

ดังนั้นตอบ 90 วิธี

เสริมความรู้ ถ้าโจทย์กำหนดว่า A ไป D ต้องไม่ผ่านจุด C เรานำกรณีทั้งหมด ไปหักด้วยกรณีที่ผ่านจุด C กรณีทั้งหมด คือ เคลื่อนที่ทั้งหมด 10 ครั้ง ทางเหนือ 4 ครั้ง ทางตะวันออก 6 ครั้งดังนั้นได้ $\frac{10!}{4!6!} - 90$ ตอบ 120 วิธี

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จากรูปจงพิจารณาว่ามีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งหมดกี่รูป



วิธีทำ พิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป เกิดจากเส้นแนวตั้ง 2 เส้น และเส้นแนวนอน 2 เส้น จึงเกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

เลือกเส้นแนวตั้ง ${}^{5}C_{2} = 10$

เลือกเส้นแนวนอน ${}^{4}C_{2} = 6$

<u>ดังนั้น</u> สี่เหลี่ยมมุมฉากเกิดจากเส้นแนวตั้งและแนวนอนคือ $\underline{10} \times \underline{6} = 60$ รูป

วิธีจัดหมู่ (Combination)

เป็นการเลือกสิ่งของออกมาเป็นหมู่หรือชุด โดยไม่คำนึงว่าจะได้สิ่งของใดออกมาก่อนหรือหลัง เช่น มีตัวอักษร 3 ตัว คือ a , b และ c ถ้าต้องการเลือกตัวอักษร 2 ตัว จากตัวอักษร 3 ตัวนี้ โดยไม่คำนึงถึงลำดับก่อนหลังของการเลือก จะเลือกได้ 3 วิธี คือ ab , bc และ ca

โดยทั่วไปจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง ($0 \le r \le n$) เท่ากับจำนวนสับเซตที่มีสมาชิก r ตัว ของเซตที่มีสมาชิก *n*

ให้ ${}^{n}C_{r}$ หรือ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ แทนจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง ในแต่ละวิธีจัดหมู่ของสิ่งของ r สิ่ง เมื่อนำมาจัดเรียงในแนวเส้นตรง จะได้วิธีเรียงสับเปลี่ยน r! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทีละ *r* สิ่ง จากสิ่งของ *n* สิ่ง ที่แตกต่างกัน เท่ากับ $r! \times C_{n,r} = P_{n,r}$

$$\text{ดังนั้น } C_{n,r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

สรุปได้ว่า จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง ($0 \le r \le n$) เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!r!}$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} C_{n,r} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} \\ &= C_{n,n-r} \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่า $C_{n,r} = C_{n,n-r}$ หรือ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> รูป 12 เหลี่ยมมีเส้นทแยงมุมทั้งหมดกี่เส้น

วิธีทำ เนื่องจาก 12 เหลี่ยม มีเส้นรอบรูปทั้งหมด 12 เส้น

เราสามารถหาเส้นทแยงมุมจากการเลือกได้

มี 12 จุด เลือกมา 2 จุด เพื่อสร้างเส้นทแยงมุมจะได้ ${}^{12}C_2$ แล้วหักด้วยจำนวนเส้นรอบรูป เนื่องจากการเลือกจุด 2 จุดเหล่านั้น เป็นการนับรวมเส้นรอบรูปเข้าไปด้วย ดังนั้น เราต้องหักออกไป 12 เส้น

$${}^{12}C_2 - 12 = 54$$

ดังนั้น ข้อนี้มีเส้นทแยงมุมทั้งหมด 54 เส้น

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> รูป 12 เหลี่ยมจะมีเส้นทแยงมุมทั้งหมดกี่เส้น

<u>วิธีทำ</u> เส้นทแยงมุมเกิดจากการเลือกจุด 2 จุด จากทั้งหมด 12 จุด มาลากเส้นต่อกัน แต่เมื่อเลือกจุด 2 จุด จากทั้งหมด 12 จุด มาลากเส้นต่อกันจะได้เส้นรอบรูปมาเพิ่มด้วยดังนั้นเราต้องลบเส้นรอบรูปออกจะได้ว่า ${}^{12}C_2$ – 12(จำนวนเส้นรอบรูป)

$$= \frac{12(11)}{2} - 12$$

$$= 66 - 12$$

$$= 54$$

<u>ตอบ</u> รูปสิบสองเหลี่ยมจะมีเส้นรอบรูปทั้งหมด 54 เส้น

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดจุด 6 จุดบนวงกลมวงหนึ่ง จำนวนวิธีที่จะสร้างรูปเหลี่ยมบรรจุในวงกลมในวงกลมโดยใช้จุดเหล่านั้นเป็นจุดยอดมุมเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent)

1.20 2.35 3.42 4.65

วิธีทำ รูปเหลี่ยมที่สามารถเกิดขึ้นได้จากจุด 6 จุด

3 เหลี่ยม ${}^{6}C_{3} = 20$

4 เหลี่ยม ${}^{6}C_{4} = 15$

5 เหลี่ยม ${}^{6}C_{5} = 6$

6 เหลี่ยม ${}^{6}C_{6} = 1$

$20 + 15 + 6 + 1 = 42$

<u>ตอบ</u> ข้อ 3 42 รูป

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> มีคนงานหญิง 6 คนและคนงานชาย 8 คนซึ่งมีนายดำรวมอยู่ด้วย ถ้าจะเลือกคนงาน 4 คนไปทำงานที่ต่างกัน 4 ประเภทโดยให้เป็นหญิง 2 คน ชาย 2 คน และให้นายดำอยู่ใน 4 คนนี้ด้วย จำนวนวิธีการเลือกคนงานดังกล่าวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent 46 มีนาคม)

1.1,920 วิธี 2.2,400 วิธี 3.2,520 วิธี 4.2,880 วิธี

วิธีทำ เลือกผู้หญิง ${}^{6}C_{2}$ วิธี

เลือกผู้ชาย ${}^{7}C_{1}$ วิธี

เลือกนายดำได้ 1 วิธี

สลับงานได้ 4! วิธี

${}^{6}C_{2} \times {}^{7}C_{1} \times 1 \times 4!$

ตอบ ข้อ 3 2,520 วิธี

ตัวอย่างที่ 8 คุณครูสุวรีย์ ครูประจำชั้นห้อง ม.6/4 นำของรางวัลทั้งหมด 3 ชิ้น ในช่วงกิจกรรมวันเด็ก แต่ในห้องมีนักเรียนอยู่เพียง 10 เนื่องจาก เด็กส่วนใหญ่ต้องไปสอบตรง ในจำนวนนักเรียนที่อยู่ มีนายสมเกียรติ และ นางสาวทัศน์กมล อยู่ด้วย จงหาจำนวนวิธีที่ นายสมเกียรติ และ นางสาวทัศน์กมล รับรางวัลไม่พร้อมกัน

1. 720   2. 640   3.102   4.112

วิธีทำ หากรณีทั่วไป – กรณีรับรางวัลพร้อมกัน

กรณีทั่วไป $^{10}C_3$ มี 10 คนเลือกมา 3 คน

กรณีรับรางวัลพร้อมกัน $\underset{\text{นายสมเกียรติ}}{\underline{1}} \times \underset{\text{นางสาวทัศน์กมล}}{\underline{1}} \times \underset{\text{นักเรียนที่เหลือ}}{\underline{8}}$

120 – 8 = 112

ตอบข้อ 4 112 วิธี

<u>การแบ่งกลุ่ม</u>

การแบ่งกลุ่มของแตกต่างกันโดยแบ่งแล้วยังไม่แจก ใช้ วิธีคำแบบเดียวกับของซ้ำๆ
Ex มีปากกาที่แตกต่างกันทั้งหมด 10 ด้าม แบ่งเป็นกองละ 3 ด้าม 2 กอง กองละ 2 ด้าม 2 กอง
วิธีทำ $\frac{10!}{3!3!2!2!}$

มีปากกา 10 ด้ามเรียงสับเปลี่ยนได้ 10!
แบ่งเป็นกอง กองแรก 3 ด้าม กองสอง 3 ด้าม กองสาม 2 ด้าม กองสี่ 2 ด้าม

การแบ่งกลุ่มของเหมือนกัน ใช้หลักการ Stars and bars

- แบ่งของ n สิ่งเหมือนกัน ให้ r คน โดยทุกคนจะต้องได้รับ ${}^{n-1}C_{r-1}$
- แบ่งของ n สิ่งเหมือนกัน ให้ r คน โดยไม่จำเป็นที่ทุกคนจะต้องได้รับ ${}^{n-1+r}C_{r-1}$

<u>ซึ่งสามารถหารายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก</u>

http://en.wikipedia.org/wiki/Stars_and_bars_(combinatorics)

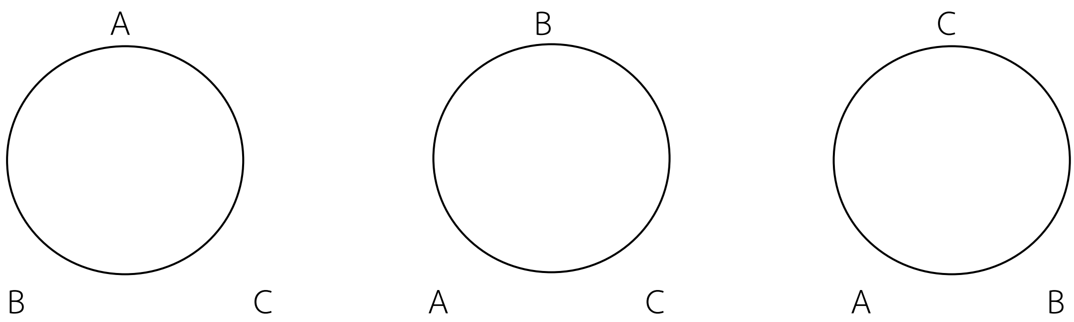
http://jhyun95.hubpages.com/hub/Stars-and-Bars-Combinatorics

<u>วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม</u>

พิจารณาการจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว คือ A ,B และ C เป็นแถวตรงจะมีวิธีจัดเรียงได้ 3! = 6 วิธี คือ

ABC BCA CAB ACB BAC CBA

วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ABC , BCA และ CAB เป็นการจัดเรียงแถวตรงที่แตกต่างกัน แต่ถ้านำแต่ละวิธีมาจัดเป็นวงกลม จะได้

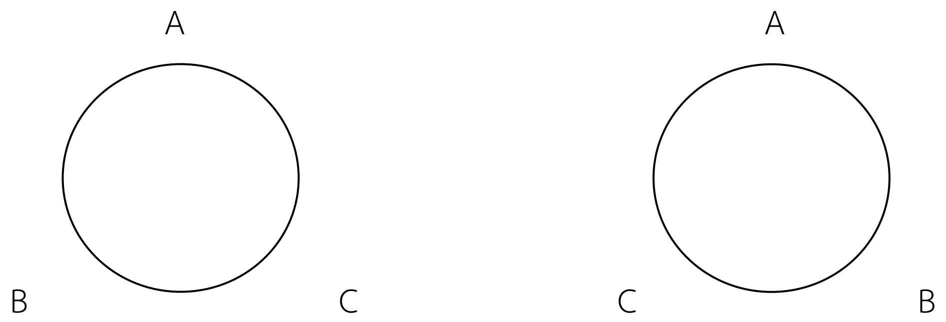


A → B → C B → C→A C → A → B

จะเห็นว่า การจัดเรียงทั้งสามแบบ ถือว่าเป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี เท่านั้น

ในทำนองเดียวกัน วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ACB BAC และ CBA เป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี

ดังนั้น การจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัวเป็นวงกลม จะจัดได้ 2 วิธี คือ



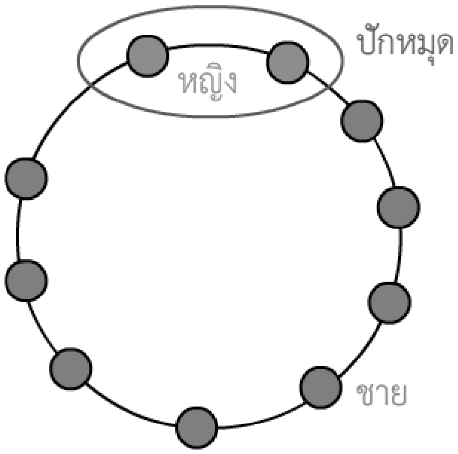
แนวคิดในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง อาจจะเริ่มโดยให้สิ่งของสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลืออยู่ n-1 สิ่ง จะได้ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ (n-1)(n-2)(n-3)... 3x2x1 = (n-1)!

สรุปได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่งให้ปักหมุด เพื่อไม่ให้วงกลมหมุนได้ (n-1)! วิธี

<u>ข้อควรระวัง</u> สำหรับโจทย์พื้นฐาน หากเป็นโจทย์ประยุกต์ให้ปักหมุดแล้วจำนวนที่เหลือ !

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ต้องการจัดชาย 8 คนหญิง 2 คน นั่งรับประทานอาหารโต๊ะจีนรอบโต๊ะกลม จงหาจำนวนวิธีที่หญิงทั้ง 2 คนนั้นต้องนั่งติดกันเสมอ

วิธีทำ



- มัดผู้หญิง (เพื่อให้ได้ว่าผู้หญิงต้องติดกัน) ผู้หญิงสลับกันเองได้ 2! วิธี
- มัดผู้หญิงสองคนแล้วมองเป็นก้อนเดียวกัน แล้วจับปักหมุด (การปักหมุดเพื่อไม่ให้วงกลมหมุน ปกติเรามักจะปักหมุดก้อนที่มีปัญหาก่อนแล้วค่อยทำ)
- ผู้ชายยืนสลับกันเองได้ 8!

<u>ดังนั้น</u>จำนวนวิธีที่ผู้หญิง 2 คนนั่งติดกันคือ 8!2!

ความน่าจะเป็น (Probability) คือจำนวนที่บ่งบอกว่าเหตุการณ์ที่เราสนใจนั้นมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อย ขนาดไหน ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 2 ครั้ง 1เหรียญมีโอกาสเกิดทั้งหัวและก้อย ครั้งแรกอาจจะเป็นหัวหรือก้อยก็ได้ ครั้งที่สองก็เช่นกัน เป็นต้น

<u>การทดลองสุ่ม</u> (Random Experiment)

การทดลองสุ่ม คือ การกระทำหรือการทดลองที่ไม่สามารถคาดการณ์คำตอบล่วงหน้าได้ ตัวอย่างของการทดลองสุ่ม เช่น

- การโยนเหรียญบาท
- การออกสลากกินแบ่งรัฐบาล
- การโยนลูกเต๋า

<u>ผลลัพธ์จากการทดลองสุ่ม</u> (Sample space)

ผลลัพธ์จากการทดลองสุ่ม คือ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างเช่น

- โยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้คือ หัว(Head) กับ ก้อย(Tail)
- โยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ แต้ม 1,2,3,4,5 ,6

<u>เหตุการณ์</u> (event)

เหตุการณ์ คือ สิ่งที่เราสนใจจากการทดลองสุ่ม ตัวอย่างเช่น หากโยนลูกเต๋า จงหาจำนวนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าออกหน้าเลขคู่ เป็นต้น

<u>นิยามของความน่าจะเป็น</u>

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ P(E) = $\frac{n(E)}{n(S)}$ โดยที่ $0 \leq P(E) \leq 1$

เมื่อ n(E) คือ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดของเหตุการณ์ใดๆที่เราสนใจ
n(s) คือ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดของ sample space

สิ่งที่ควรรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็น

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A') = 1 - P(A)$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $P(A \cup B)\ P(A) + P(B)$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ชาย 3 คน หญิง 4 คนนั่งในรถ จงหาความน่าจะเป็นที่คน 2 คนที่ลงรถก่อนนั้นเป็นผู้หญิง

วิธีทำ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ (Sample space) ของคนที่ลงจากรถ 2 คน คือ <u>7</u> x <u>6</u>
มีคนอยู่บนรถ 7 คน คนแรกลงจากรถจะมีได้ 7 วิธี คนที่สองลงจากรถ 6วิธี เนื่องจาก มีคนหนึ่งลงไปก่อนหน้านี้แล้ว
เหตุการณ์ ที่คนลงทั้งสองคนเป็นผู้หญิง <u>4</u> x <u>3</u> เนื่องจากมีผู้หญิง 4 คน

ดังนั้นความน่าจะเป็น คือ $\frac{4\times3}{7\times6} = \frac{2}{7}$

<u>ทฤษฎีบททวินาม</u>

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสูตรของการกระจาย $(x+y)^n$ เมื่อ x , y เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาการกระจายต่อไปนี้

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = x^2+2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3+ 3xy^2+ 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4= x^4+ 4x^3+ 3x^2y^2+ 3xy^3 + y^4$

$(x+y)^5= x^5+ 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$(x+y)^n=(x+y)(x+y) \dots (x+y)^n$

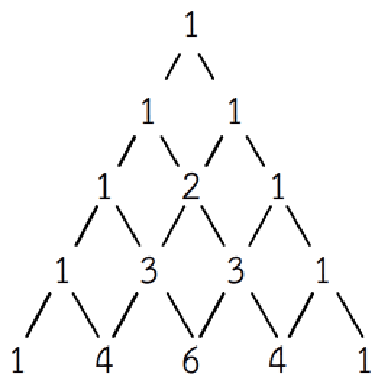
ถ้า x , y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y+\dots+\binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \dots+\binom{n}{n}y^n$$

<u>เราจึงสามารถสรุปกฎได้ว่า</u> $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^n - rb^r$

ข้อสังเกตการกระจาย $(a+b)^n$

- กระจายได้ทั้งหมด n+1 พจน์
- ดีกรีของแต่ละพจน์จะเท่ากับ n เสมอ
- ผลบวกสัมประสิทธ์ทวินามทุกพจน์ คือ 2^n
- ผลบวกทุกพจน์คือ $(a+b)^n$
- สัมประสิทธิ์ทวินามสามารถหาได้จากสามเหลี่ยมปาสคาลหรือใช้การเลือก



<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหาพจน์ที่ 7 ในการกระจาย $(x^2 - \frac{1}{x})^{10}$

$T_7 = T_{6+1} = {}^{10}C_6(x^2)^4(-\frac{1}{x})^6$

${}^{10}C_4\ x^8\ (\frac{1}{x})^6$

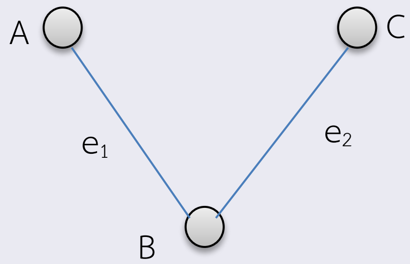
ตอบ $210x^2$

ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory)

- รายละเอียดของกราฟ
  - จุด
  - เส้นเชื่อม
  - วงวน
  - เส้นเชื่อมขนาน
- กราฟอย่างง่าย
- กราฟบริบูรณ์
- กราฟเติมเต็ม
- ดีกรี
- กราฟเชื่อมโยง
- กราฟออยเลอร์
- ประยุกต์กราฟ
  - กราฟย่อย
  - กราฟต้นไม้
    - ต้นไม้
    - ป่า
    - ต้นไม้แผ่ทั่ว
    - ต้นไม้แผ่ทั่วน้อยที่สุด
  - กราฟถ่วงน้ำหนัก

ทฤษฎีกราฟ คือแผนภาพซึ่งบรรจุจุดและเส้นเชื่อม ซึ่งถูกใช้ในการแก้ปัญหาในหลายด้านๆ เช่นการจัดตารางเวลา การเดินทางโดยเส้นที่สุด ฯลฯ

ทฤษฎีกราฟนั้น มีจุดเริ่มจากผลงานตีพิมพ์ของ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ในปี ค.ศ. 1736 (พ.ศ. 2279) หรือที่รู้จักกันในนาม ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก (Seven Bridges of Königsberg) เขาสนใจวิธีที่จะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่งนี้ โดยข้ามแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้น จากการพิสูจน์ของออยเลอร์ทำให้ทราบว่า เราไม่สามารถข้ามสะพานทั้ง 7 เพียงครั้งเดียวเพื่อกลับมาจุดเริ่มต้นได้เพราะ ถ้าหากแปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟ จะได้เส้นเชื่อมทั้งหมด 7 เส้นซึ่งขัดกับทฤษฎีว่าด้วยกราฟของออยเลอร์



ตัวอย่าง ที่ 1 กราฟ G

กราฟจะต้องประกอบไปด้วยจุดอย่างน้อย 1 จุด แต่จะมีเส้นเชื่อมหรือไม่ก็ได้ จากตัวอย่างกราฟ G เราสามารถบอกรายละเอียดของกราฟได้ดังนี้

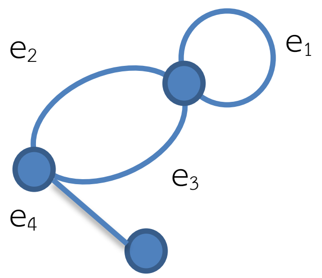
เซตของจำนวนจุดยอด (Vertex) แทนดวยสัญลักษณ์ V(G)

$$V(G) = \{A,B,C\}$$

เซตของเสนเชื่อม (Edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนดวยสัญลักษณ์ E(G)

$E(G)=\{e_1, e_2\}$ หรือ $E(G)=\{AB, BC\}$

<u>รายละเอียดที่น่าสนใจของกราฟ</u>



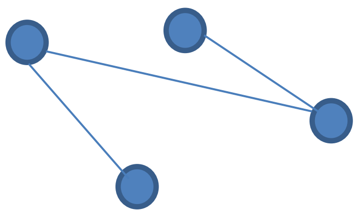
วงวน (loop) คือเสนเชื่อมที่อยู่ในรูป {u,u} หรือ uu หรือเสนที่มีจุดปลายทั้งสองเปนจุดเดียวกัน เช่นจุด e_1

เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) หรือเสนหลายชั้น (multiple edges) คือเสนเชื่อมที่มีมากกวา 1 เช่นจุด e_2

<u>กราฟอย่างง่าย</u>

คือ กราฟที่ไม่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

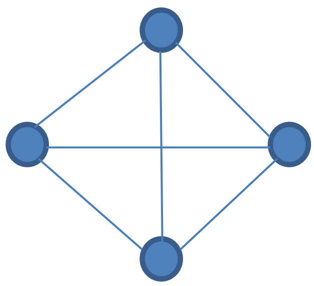
Ex



<u>กราฟบริบูรณ์</u>

คือกราฟอย่างง่ายที่ 2 จุด ที่ต่างกันต้องเป็นจุดประชิดกันเสมอ

Ex



กราฟนี้เป็นกราฟบริบูรณ์ 4 จุด เรียกว่าจุด K_4

อันดับและขนาด

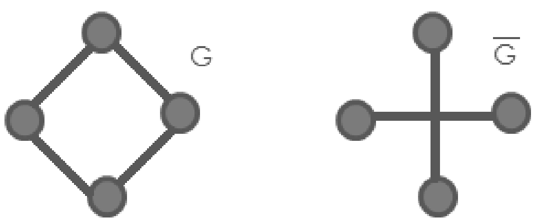
อันดับ คือจำนวนจุด

ขนาด คือ จำนวนเส้นเชื่อม

<u>กราฟเติมเต็ม</u>

คือ กราฟที่ไม่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนานเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{G}$

Ex

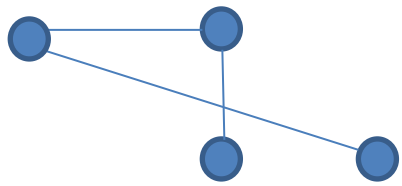


<u>ดีกรี</u> คือ จำนวนครั้งที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด

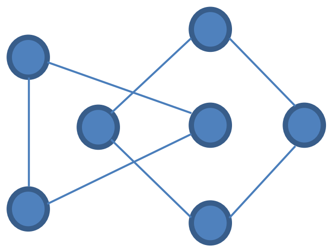
Handshaking Lemma ผลรวมของดีกรี <u>จะเป็นสองเท่าของเส้นเชื่อมเสมอ</u>

<u>แนวเดิน</u>
คือลำดับจำกัดของจุดยอดและเส้นเชื่อมสลับกัน
แนวเดินเปิด เป็นแนวเดินที่มี จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นคนละจุด
แนวเดินปิด เป็นแนวเดินที่มี จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุด เดียวกัน
รอยเดิน เป็นแนวเดินที่มี จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดใดก็ต้อง แต่ห้ามใช้เส้นเชื่อมซ้ำ
วิถี(แนวเดินอย่างง่าย) เป็นแนวเดินที่มี จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นคนละจุด ห้ามใช้เส้นเชื่อมและจุดซ้ำ
วงจร(Circuit) เป็นแนวเดินที่มี จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุด เดียวกัน เส้นเชื่อมห้ามใช้ซ้ำ
วัฏจักร(Cycle) เป็นแนวเดินที่มี จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุด เดียวกัน เส้นเชื่อมและจุดห้ามใช้ซ้ำ *ยกเว้นจุดเริ่มต้นและสิ้นสุด*

<u>กราฟเชื่อมโยง</u>
คือกราฟที่ไม่ขาดตอน เป็นกราฟที่ 2 จุดใดๆ สามารถมีแนวเดินถึงกันได้
เช่น กราฟ G มีจุดยอด U และ V เป็นจุดยอดที่ต่างกันในกราฟ จะต้องมีแนวเดิน U – V
Ex



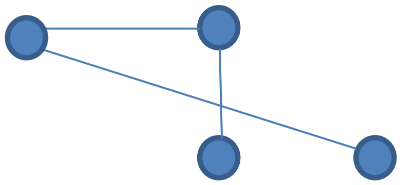
เป็นกราฟเชื่อมโยง



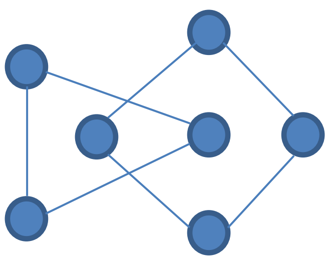
ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

<u>กราฟออยเลอร์</u> ต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง และ มีวงจรออยเลอร์ คือวงจรที่ผ่านจุดทุกจุดและเส้นเชื่อมบนกราฟ

Ex จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้เป็นกราฟออยเลอร์ หรือไม่



เป็นไม่กราฟกราฟออยเลอร์ เนื่องจากมีดีกรีเป็นเลขคี่

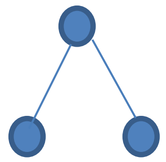


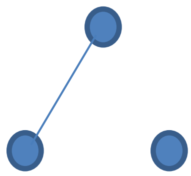
เป็นกราฟออยเลอร์

<u>ข้อสังเกต</u> กราฟออยเลอร์จุดทุกจุดของกราฟต้องมีดีกรีเป็นเลขคู่เท่านั้น

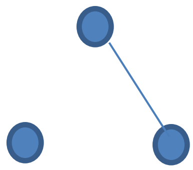
กราฟย่อย คือ กราฟที่ประกอบไปด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟนั้นๆ

Ex กราฟ G กราฟย่อยของ G





กราฟย่อยของ G

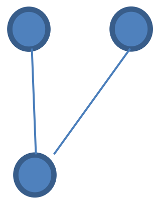


กราฟถ่วงน้ำหนัก คือกราฟเส้นเชื่อมทุกเชื่อมโดยแต่ละเส้นเชื่อมมีค่าน้ำหนัก

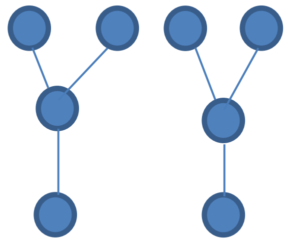
กราฟต้นไม้ คือกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวัฏจักร

ป่า คือ กราฟที่ไม่มีวัฏจักร แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง

ใบ คือจุดยอดป่าที่มีดีกรี เป็น 1



เป็นต้นไม้และป่า



เป็นป่าแต่ไม่เป็นต้นไม้

กราฟต้นไม้แผ่ทั่ว คือ ต้นไม้ที่เป็นกราฟย่อยของกราฟเชื่อมโยง

กราฟต้นไม้แผ่ทั่วน้อยสุด คือ ต้นไม้ที่มีผลรวมค่าน้ำหนัก น้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจาณาข้อความต่อไปนี้

ก. กราฟ G มีดีกรีจุดยอด 1,1,4,4,6 จะมีเส้นเชื่อม 8 เส้น

ข กราฟ G มีจุดยอด 7 จุด มีดีกรี 5,4,2,2,2,3 และ 3 ตามลำดับ

ค กราฟ G มีจุดยอดคี่ 6 จุดยอดคู่ 3 จุด

ข้อใด เป็นไปได้เกี่ยวกับกราฟ G

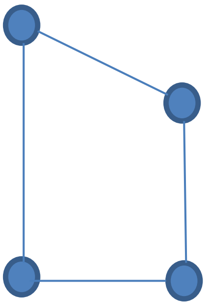
วิเคราะห์ ข้อ ก ถูกเนื่องจาก ผลรวมทั้งหมดของดีกรี เป็น 16 ซึ่งเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

. ข้อ ข ผิด เนื่องจาก กราฟ ต้องมีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่เท่านั้น

ข้อ ค ถูก เนื่องจาก กราฟ ต้องมีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่เท่านั้น

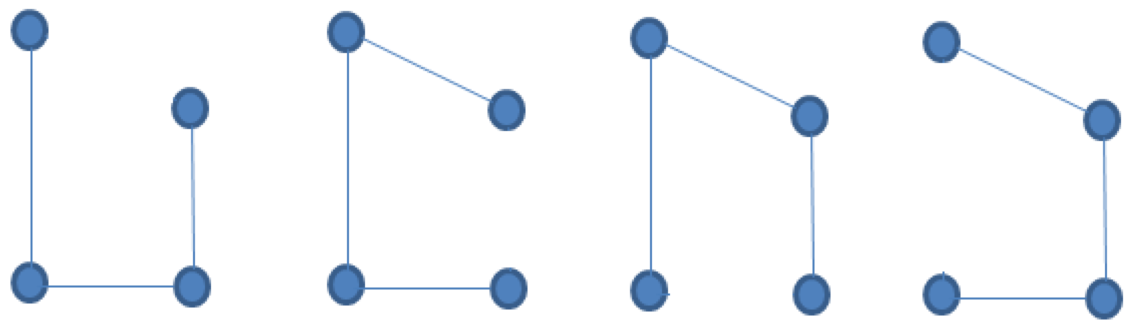
ดังนั้นข้อนี้ตอบ ถูก ข้อ ก และ ค

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด กราฟ G ดังรูป จำนวนกราฟต้นไม้แผ่ทั่วของกราฟ G ที่แตกต่างกันมีกี่แบบ

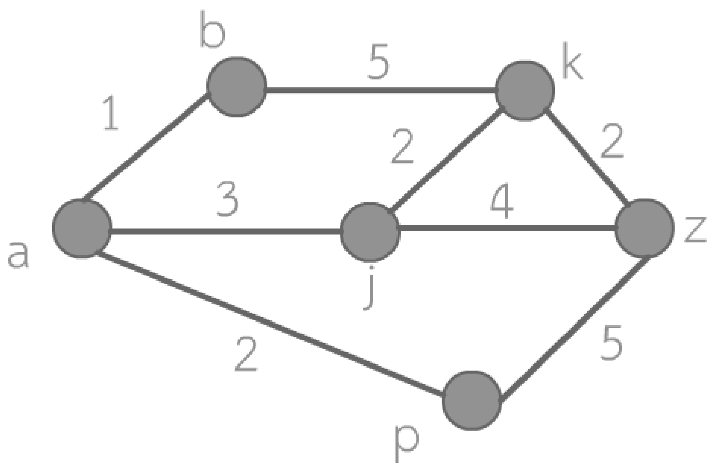


1. 4 แบบ
2. 5 แบบ
3. 6 แบบ
4. 7แบบ

วิเคราะห์ ตอบข้อ 1 4 แบบ เราสามารถเขียนได้ดังนี้

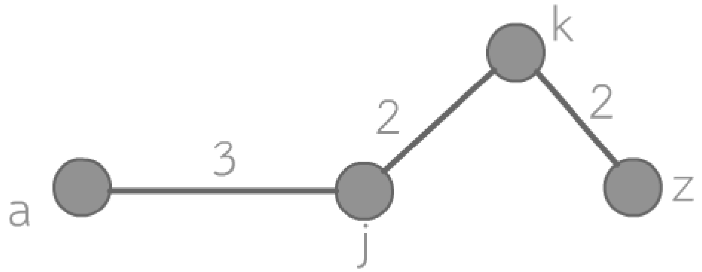


ตัวอย่างที่ 3 จากกราฟ วิถี A-Z จงหาผลรวมค่าน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟนี้



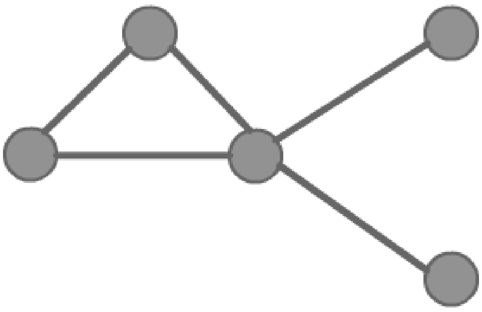
1.6　　　2.7　　　3.8　　　4.22

วิเคราะห์ ตอบข้อ 1 ผลรวมค่าน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดคือ 6 เราสามารถเขียนรูปต้นไม้แผ่ทั่วน้อยที่สุดได้ดังนี้

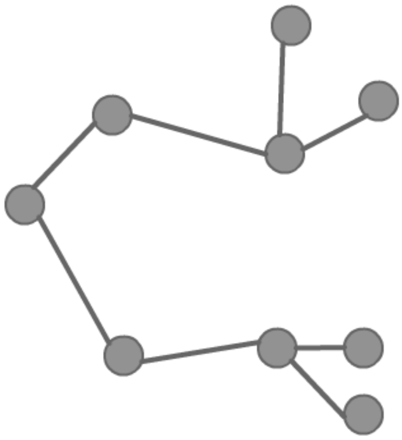


ตัวอย่างที่ 4 ข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟต้นไม้

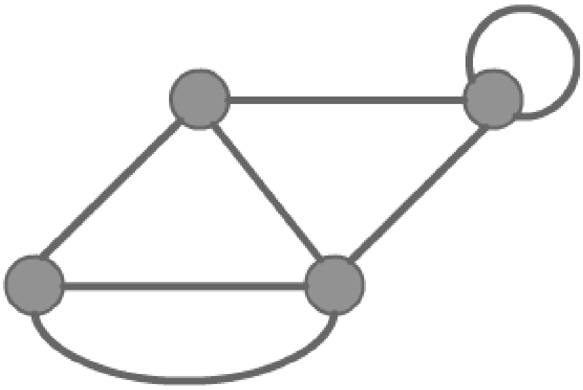
1



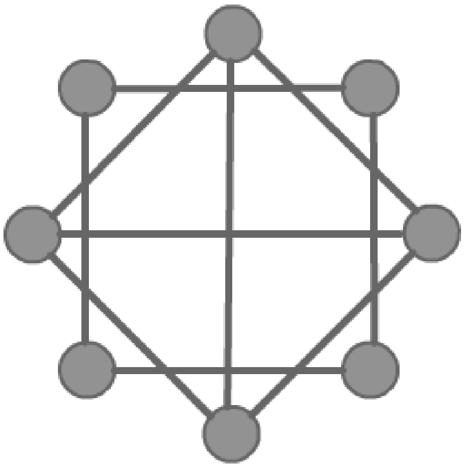
2



3



4



วิเคราะห์ ตอบข้อ 2 เนื่องจาก

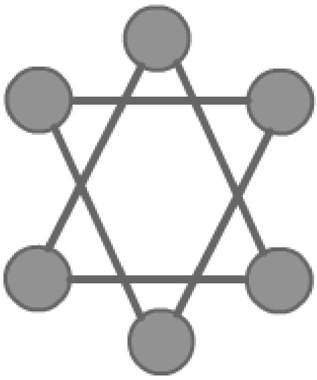
ข้อ 1 กราฟมี วงจร จึงไม่เป็นกราฟต้นไม้

ข้อ 3 กราฟมี วงจร จึงไม่เป็นกราฟต้นไม้

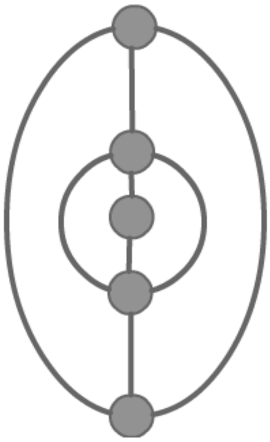
ข้อ4 ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง กราฟต้นไม้ต้องเป็นกราฟเชื่อมโยง

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงพิจารณาว่ากราฟใดต่อไปนี้จัดเป็นกราฟออยเลอร์

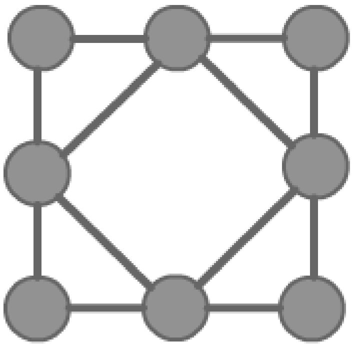
1



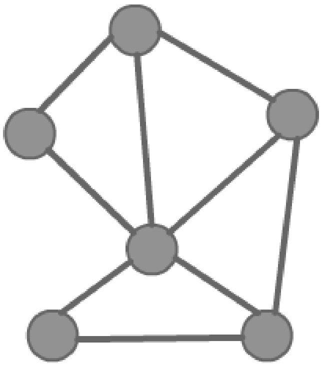
2



3



4



<u>วิเคราะห์</u> ตอบข้อ 3 เนื่องจากจุดยอดทุกจุดเป็นดีกรีเลขคู่

ข้อ 1 ผิด เนื่องจากไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

ข้อ 2 และ 4 ผิดเนื่องจากดีกรีของจุดยอดบางจุดเป็นเลขคี่จึงทำให้ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 6 กราฟ G มีจุดยอดทั้งหมด 10 จุด ซึ่งมีดีกรี ดังนี้ 1,1,3,3,3,5,x-5,x-3,x-2 และ x ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อมจำนวน 15 เส้นแล้ว ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก.กราฟ G มีจุดยอดคี่ 6 จุด และจุดยอดคู่ 4 จุด

ข.กราฟ G มีผลรวมดีกรีคือ 30

ค.กราฟ G เป็นกราฟออยเลอร์

วิเคราะห์ ผลรวมดีกรีเป็น 2 เท่าของเชื่อมเสมอดังนั้นผลรวมดีกรีจึงเป็น 30

1+1+1+3+3+3+5+x-5+x-3+x-2+x = 3

6+4x = 30

4x = 24

x = 6

ดังนั้น กราฟนี้จึงประกอบด้วยดีกรี 1,1,1,3,3,3,3,4,5,6

ข้อ ก จึงผิด

ข้อ ข ถูกเนื่องจากผลรวมดีกรีจะเป็น 2 เท่าของเส้นเชื่อมเสมอ

ข้อ ค ผิดเนื่องจากกราฟออลเลอร์ ทุกจุดบนกราฟต้องเป็นดีกรีเลขคู่

สถิติ (Statistic)

- การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น
  - สถิติเชิงพรรณนา
  - ค่ากลางข้อมูล
    - ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
    - มัธยฐาน
    - ฐานนิยม
  - การวัดการกระจายของข้อมูล
    - การวัดการกระจายแบบสัมบูรณ์
      - พิสัย
      - ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์
      - ส่วนเบี่ยงเฉลี่ย
      - ส่วนเบี่ยงมาตรฐาน
    - การวัดการกระจายแบบสัมพัทธ์
      - สัมประสิทธิ์พิสัย
      - สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์
      - สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเฉลี่ย
      - สัมประสิทธิ์การแปรผัน
- การแจกแจงปกติ
  - ค่ามาตรฐาน
  - โค้งปกติ
- ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล
  - เส้นตรง
  - พาราโบลา
  - เอกซ์โพเนนเชียล
  - อนุกรมเวลา

ข้อมูล ที่อยู่ในชีวิตประจำวันของเรา เมื่อเราจำนำข้อมูลมาใช้ประโยชน์ เราใช้สถิติเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติ (Statistic) คือ ตัวเลขที่แสดงข้อเท็จจริงของข้อมูล เช่น สถิติรายได้ประชาชาติ เป็นต้น สถิติมีความสัมพันธ์กับชีวิตประจำวันของเรา เราเห็นได้จาก ข่าวตามหน้าหนังสือพิมพ์ วิทยุกระจายเสียง วิทยุโทรทัศน์ จะมีข้อมูลตัวเลขแสดงให้เห็นถึงข้อเท็จจริงต่างๆ เช่น สถิติอัตราแลกเปลี่ยนค่าเงินบาท สถิติการซื้อ-ขายอนุพันธ์ในตลาดหลักทรัพย์ สถิติรายได้ประชาชาติ สถิติผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศ สถิติอุณหภูมิ

ในทางคณิตศาสตร์ สถิติหมายถึงศาสตร์หรือหลักการ และระเบียบวิธีการทางสถิติ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

- การเก็บรวมรวมข้อมูล
- การนำเสนอข้อมูล
- การวิเคราะห์ข้อมูล
- การตีความข้อมูล

การจำแนกข้อมูล

- ข้อมูลเชิงปริมาณ คือข้อมูลที่อยู่ในลักษณะเป็นตัวเลข
- ข้อมูลเชิงคุณภาพ คือข้อมูลที่แสดงลักษณะหรือคุณสมบัติ

แหล่งที่มาของข้อมูล

- ข้อมูลปฐมภูมิ คือข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากแหล่งต้นกำเนิด
- ข้อมูลทุติยภูมิ คือข้อมูลที่รวบรวมข้อมูลจากแหล่งอ้างอิง

การเก็บรวมข้อมูล

- เก็บรวบรวมข้อมูลจากทะเบียนประวัติ
- เก็บรวมรวมข้อมูลจากการสำรวจ
- เก็บรวบรวมข้อมูลจากการทดลอง
- เก็บรวบรวมข้อมูลจากการสังเกต

<u>ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง</u>

<u>ประชากร</u> (population) ในทางสถิติ มีความหมายคือ หน่วยต่างๆที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล หรือแหล่งที่มาของข้อมูล ประชากรอาจเป็นกลุ่มบุคคล สถานที่ เอกสารการพิมพ์

ประเภทของประชากร

1. ประชากรที่เป็นจำนวนจำกัด (Finite population) คือประชากรที่สามารถนับแจกแจงรายการได้
2. ประชากรที่มีจำนวนอนันต์ (Infinite population) คือประชากรที่ไม่สามารถนับจำนวนได้

ค่าที่แสดงคุณสมบัติหรือลักษณะของประชากร คือ พารามิเตอร์(parameter) ได้แก่

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเขียนแทนด้วย μ (มิว) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากรแทนด้วย σ (ซิกมา)

กลุ่มตัวอย่าง (Sample) หมายถึงส่วนหนึ่งของหน่วยข้อมูลหรือข้อมูลส่วนหนึ่งที่เลือกมาจากประชากร

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตกลุ่มตัวอย่าง เขียนแทนด้วย $\bar{x}$ (เอ็กซ์บาร์) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานกลุ่มตัวอย่าง เขียนแทนด้วย S (เอส)

<u>การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น</u>

การแจงแจงความถี่ของข้อมูล (Frequency distribution) เป็นวิธีการทางสถิติอย่างหนึ่งที่ใช้ในการจัดข้อมูลที่มีอยู่หรือที่ได้เก็บรวบรวมให้ได้เป็นหมวดหมู่ เพื่อสะดวกในการวิเคราะห์ข้อมูล

1.ข้อมูลที่แจกแจงความถี่ของข้อมูล

อายุ	จำนวน
30-34	10
35-39	15
40-44	25
45-49	6
50-54	20

1) อันตรภาคชั้นคือ ช่วงความกว้างแต่ละช่วง เช่น 30 -34

2) ขอบล่าง คือ ค่ากึ่งกลางระหว่างช่วงที่น้อยที่สุดในชั้นนั้น กับช่วงที่มากที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกัน และเป็นช่วงความกว้างต่ำกว่า เช่น

อันตรภาคชั้น 35 – 39 ขอบล่างคือ 34.5 มาจาก $\frac{35+34}{2}$

1) ขอบบนคือ คือค่ากึ่งกลางระหว่างช่วงที่มากที่สุดในอันตรภาคชั้นนั้น กับ ช่วงที่น้อยที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ติดกันและเป็นช่วงที่สูงกว่าเช่น

อันตรภาคชั้น 35 – 39 ขอบล่างคือ 39.5 มาจาก $\frac{39+40}{2}$

2) จุดกึ่งกลาง ของแต่ละอันตราภาคชั้น หาได้จากขอบบนและขอบล่างในแต่ละชั้น

$$\frac{\text{ขอบบน} + \text{ขอบล่าง}}{2}$$

เช่น จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้น 35 – 39 คือ $\frac{34.5+39.5}{2}$

คือ 37

5) ความกว้างของอันตรภาคชั้น คือขนาดของแต่ละชั้น หาได้จากผลต่างระหว่างขอบบนและขอบล่างของอันตรภาพชั้นนั้น ขอบบน – ขอบล่าง

ความกว้างของอันตรภาคชั้น 35 – 39 คือ 39.5-34.5 = 5

6) ความถี่สะสมของอันตรภาคชั้น คือผลรวมของความถี่ของอันตรภาคชั้น กับความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีช่วงต่ำกว่าทั้งหมด

7) ความถี่สัมพันธ์ ของอันตรภาคชั้น คือ อัตราส่วนระหว่างความถี่ของอันตราภาคชั้นนั้นกับผลรวมของความถี่ทั้งหมด

$$\text{ความถี่สัมพันธ์} = \frac{\text{ความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้น}}{\text{ผลรวมของความถี่ทั้งหมด}}$$

8) ความถี่สะสมสัมพัทธ์ ของอันตรภาคชั้น คืออัตราส่วนระหว่างความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้นกับผลรวมความถี่ทั้งหมด

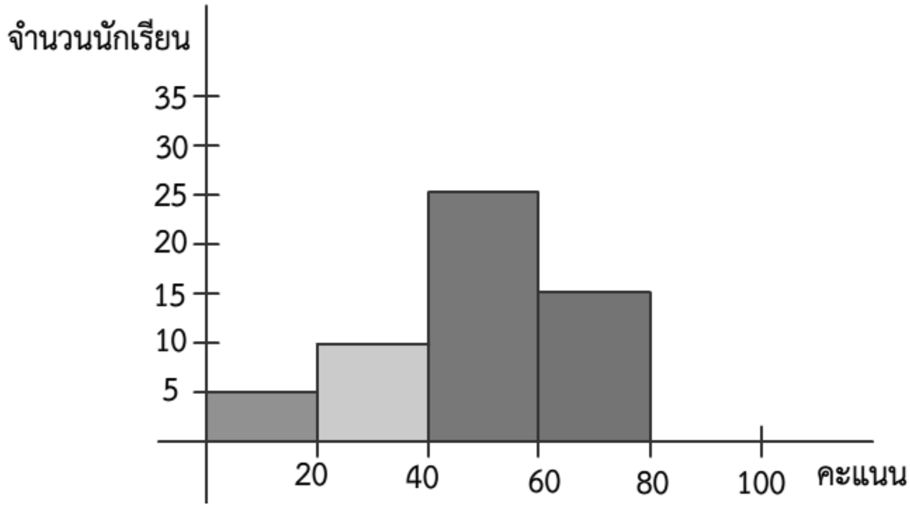
$$\text{ความถี่สะสมสัมพัทธ์} = \frac{\text{ความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้น}}{\text{ผลรวมของความถี่สะสมทั้งหมด}}$$

9) ร้อยละความถี่สัมพัทธ์ คือ ความถี่สัมพัทธ์ x 100%

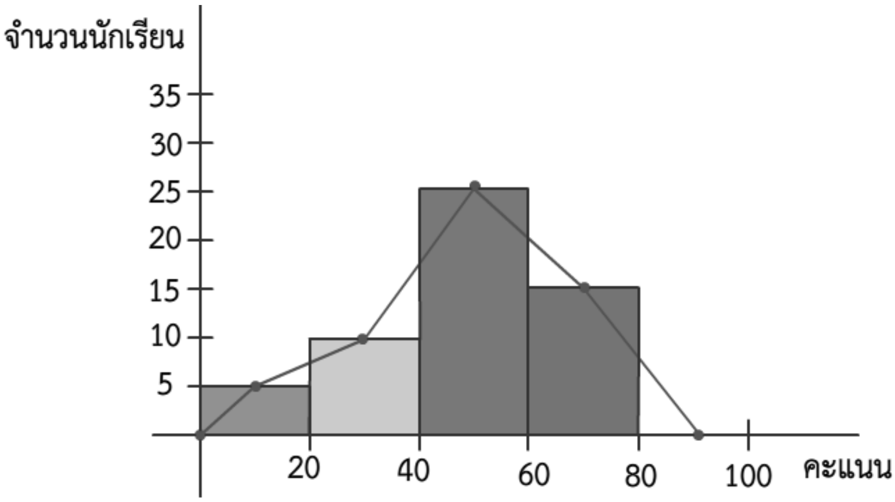
10) ร้อยละความถี่สะสมสัมพันธ์ คือ ความถี่สะสมสัมพัทธ์ x 100%

<u>การเขียนแจกแจงโดยใช้กราฟ</u>

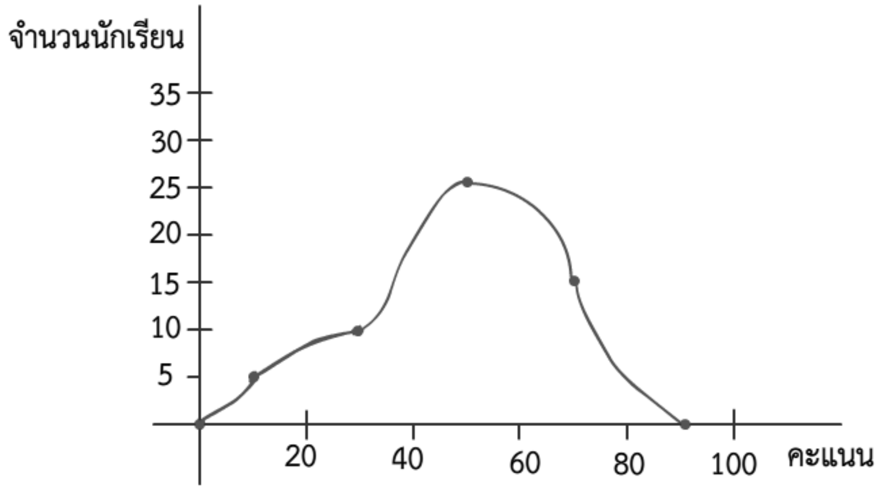
1.ฮิสโทแกรม (Histogram) เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่วางเรียงติดกันบนแกนนอน โดยให้แกนนอนแทนเป็นค่าตัวแปร ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมคือความกว้างของอันตรภาคชั้น พื้นที่ของสี่เหลี่ยมแต่ละรูปแทนความถี่ของแต่ละอันตรภาคชั้น



2. รูปหลายเหลี่ยมของความถี่ (frequency polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมที่เกิดจากการโยงจุดกึ่งกลางของยอดแท่งของฮิสโทแกรมด้วยเส้นตรง โดยเริ่มต้นและสิ้นสุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้น



3.พื้นที่โค้งของความถี่ (frequency curve) เป็นเส้นโค้งที่ได้รับจากการปรับด้านของรูปหลายเหลี่ยมของความถี่ให้เรียบขึ้น โดยพยายามให้พื้นที่ใต้โค้งที่ปรับแล้ว มีขนาดใกล้เคียงของเดิม



4.แผนภาพต้น – ใบ (Stem – leaf Diagram) เป็นการบอกข้อมูลโดยเขียนหลักสิบอยู่หน้าเส้นกั้น ส่วนหลักหน่วยอยู่หลังเส้นกัน

ตัวอย่าง

0	3 4 5
2	0
4	1 2
11	0 6 8

จากภาพแผนภาพต้น – ใบ เราสามารถเขียนสมาชิกได้ดังนี้ {3,4,5,20,41,42,110,116,118 }

ค่ากลางของข้อมูล

1.ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ประชากร $\boldsymbol{\mu}$

ข้อมูลเดี่ยว	ข้อมูลกลุ่ม
ข้อมูลทั่วไป ไม่มีการถ่วงน้ำหนัก • $\boldsymbol{\mu} = \frac{\sum x_i}{n}$ ข้อมูลถ่วงน้ำหนัก • $\boldsymbol{\mu} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$ w_i คือเลขถ่วงน้ำหนักของ x_i แต่ละตัว ข้อมูลหลายชุดนำมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต • $\boldsymbol{\mu}_{\text{รวม}} = \frac{\sum N_i \mu_i}{\sum N_i}$	• $\mu = \frac{\sum f_i x_i}{n}$ x = จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้น f คือความถี่

กลุ่มตัวอย่าง $\bar{\mathbf{x}}$

ข้อมูลเดี่ยว	ข้อมูลกลุ่ม
ข้อมูลทั่วไป ไม่มีการถ่วงน้ำหนัก • $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ ข้อมูลถ่วงน้ำหนัก • $\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$ w_i คือเลขถ่วงน้ำหนักของ x_i แต่ละตัว ข้อมูลหลายชุดนำมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต • $\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{\sum N_i \bar{x}}{\sum N_i}$	• $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$ x = จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้น f คือความถี่

คำแนะนำ การคิดค่าเฉลี่ยเลขคณิตข้อมูลกลุ่มแบบลดทอนข้อมูล

<u>คุณสมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต</u>

1.$x_{max} \leq \bar{x} \leq x_{min}$

2. $\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}$

3. $\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = 0$

4. $\sum_{i=1}^{N} (x_i - M)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ M = $\bar{x}$

5.ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\bar{y} = a\bar{x} + b$

2.มัธยฐาน คือข้อมูลที่อยู่ตำแหน่งกึ่งกลางของข้อมูลที่เรียงจากน้อยไปมาก ใช้สัญลักษณ์ Me หรือ Med
ข้อมูลเดี่ยว Me = Med = $\frac{N+1}{2}$

ข้อมูลกลุ่ม Me = $\frac{N}{2}$; N คือผลรวมของความถี่

$$= \mathrm{Med} = L + I\left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_M}\right)$$

L คือขอบล่างของชั้นที่ Me อยู่ f(M) คือความถี่ ณ ชั้น Me อยู่ I คือความกว้างของอันตรภาคชั้น
f_m คือ ความถี่ ณ ชั้น Me
I คือความกว้างของอันตภาพชั้น
3.ฐานนิยม คือข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด ใช้สัญลักษณ์ Mo หรือ Mod
ข้อมูลเดี่ยว Mo = ข้อมูลที่ซ้ำกันมากที่สุด
ข้อมูลกลุ่ม Mo = จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุด

ตัวอย่างที่ 1 นายอำนวย สอบได้คะแนนตามรายวิชาได้ดังนี้

รายวิชา	คะแนนที่ได้
วิชาสังคมศึกษา	68
วิชาสุขศึกษา	68
วิชาศิลปะ	85
วิชาคณิตศาสตร์	95

จงหาคะแนนเฉลี่ยและมัธยฐาน

คะแนนเฉลี่ย คือ $\frac{68+68+85+95}{4}$ = 79 คะแนน

มัธยฐาน ตำแหน่งคือ $\frac{N+1}{2} = \frac{4+1}{2}$ = 2.5 ซึ่งก็คือ $\frac{68+85}{2}$ = 76.5

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคะแนนเฉลี่ย ฐานนิยมและมัธยฐานจากข้อมูลต่อไปนี้

จากการสำรวจกลุ่มตัวอย่างของรายวิชาหนึ่งในภาคเรียนที่ 1 ได้ช่วงคะแนนของนักเรียนดังนี้

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน
50 - 60	28
60 - 70	16
70 - 80	38
80 - 90	6

วิธีทำ

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน (f)	ความถี่สะสม	x (จุดกึ่งกลางอันตภาพชั้น)	y = x - 65
50 - 60	28	28	55	-10
60 - 70	16	44	65	0
70 - 80	38	82	75	10
80 - 90	6	88	85	20
ผลรวม	88	242	280	20

$y = x - 65$ ดังนั้น $\bar{y} = \bar{x} - 65$

$\bar{y} = \frac{-10+0+10+20}{4} = 5$

$\bar{x} = \bar{y} + 65 = 5 + 65 = 70$

คะแนนเฉลี่ยคือ 70

ฐานนิยมคือ 75

ตำแหน่งมัธยมฐาน $\frac{N}{2} = \frac{88}{2} = 44$

จากสูตรมัธยมฐาน คือ $59.5 + 10\left(\frac{44-28}{16}\right)$

$= 59.5 + 10$

$= 69.5$

4.ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean)

ถ้า $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูล N จำนวนซึ่งเป็นจำนวนบวกทุกจำนวน ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต G.M. คือ $\sqrt[n]{x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n}$

เนื่องจากการหาค่าเฉลี่ยเรขาคณิตต้องคำนวณหากรณฑ์ที่ N ของจำนวนซึ่งทำให้การใช้สูตรดังกล่าวไม่สะดวกในการหาในกรณีที่มีจำนวนข้อมูลมีค่ามากๆ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคิดจึงใช้ลอการิทึมช่วยในการคำนวณ

ข้อมูลที่ไม่แจกจางความถี่

$$\log \text{G.M.} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \log X_i$$

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่

$$\log \text{G.M.} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i \log X_i$$

โดยที่ X_i คือจุดกึ่งกลางของอันตรภารชั้นที่ i

f_i คือแทนความถี่ของข้อมูลอันตรภาคชั้นที่ i

k คือจำนวนอันตรภาคชั้น

5.ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก (harmonic mean)

ถ้า $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นข้อมูล N จำนวนซึ่งเป็นจำนวนบวกทุกจำนวน

ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก H.M. คือ $\dfrac{1}{\frac{1}{N}\left\{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_N}\right\}}$

$= \dfrac{N}{\sum \frac{1}{x_i}}$

สำหรับข้อมูลที่แจกแจงความถี่

ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก H.M. คือ $\dfrac{1}{\frac{1}{N}\left\{f_1\frac{1}{x_1}+f_2\frac{1}{x_2}+f_3\frac{1}{x_3}+\cdots+f_k\frac{1}{x_k}\right\}}$

$= \dfrac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}}$

โดยที่ X_i คือจุดกึ่งกลางของอันตรภารชั้นที่ i

f_i คือแทนความถี่ของข้อมูลอันตรภาคชั้นที่ i

k คือจำนวนอันตรภาคชั้น

การวัดตำแหน่งข้อมูล

1.ควอไทล์ (Q_r) คือค่าของข้อมูลที่ถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆกัน เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก มีควอไทล์ทั้งหมด 3 ค่า คือ Q_1, Q_2, Q_3

2.เดไซน์ (D_r)คือค่าของข้อมูลที่ถูกแบ่งออกเป็น 10 ส่วนเท่าๆกัน เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก มีเดไซน์ทั้งหมด 9 ค่า คือ $D_1, D_2, D_2, ..., D_9$

3.เปอร์เซ็นต์ไทล์(P_r) คือค่าของข้อมูลที่ถูกแบ่งออกเป็น 100 ส่วนเท่าๆกัน เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก มีเปอร์เซ็นต์ไทล์ทั้งหมด 99 ค่า คือ $P_1, P_2, P_3, ... P_{99}$

ข้อมูลเดี่ยว

ตำแหน่ง $Q_r = \frac{N+1}{4}(r)$

ตำแหน่ง $D_r = \frac{N+1}{10}(r)$

ตำแหน่ง $P_r = \frac{N+1}{100}(r)$

ข้อมูลกลุ่ม

ตำแหน่ง $Q_r = \frac{N}{4}(r)$

ตำแหน่ง $D_r = \frac{N}{10}(r)$

ตำแหน่ง $P_r = \frac{N}{100}(r)$

หรือใช้สูตรหา Q_r, D_r, P_r (เฉพาะข้อมูลกลุ่ม)

$$\text{ขอบล่าง} + \text{ความกว้างอันตรภาคชั้น}\left(\frac{\text{ตำแหน่ง} - \text{ความถี่สะสมชั้นก่อนหน้า}}{\text{ความถี่ ณ ชั้นนั้น}}\right)$$

<u>การวัดการกระจายของข้อมูล</u>

การวัดการกระจายของข้อมูลแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ

1.การวัดการกระจายแบบสัมบูรณ์ คือการวัดการกระจายของข้อมูลชุดเดียว ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบได้

2.การวัดการกระจายแบบสัมพัทธ์ คือการวัดการกระจายของข้อมูลแต่ชุดเพื่อนำเอาค่าที่ได้ไปใช้เปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลกับข้อมูลชุดอื่น

<u>การวัดการกระจายแบบสัมบูรณ์</u>

1.พิสัย = ค่ามากสุด – ค่าน้อยสุด

2.ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ (QD)

$$=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

3.ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (MD)

ข้อมูลเดี่ยว

MD = $\frac{\sum|x-\bar{x}|}{N}$

ข้อมูลกลุ่ม

MD = $\frac{\sum f|x-\bar{x}|}{N}$ เมื่อ x คือจุดกึ่งกลางชั้น

4.ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD)

ข้อมูลเดี่ยว

ประชากร $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}-\mu^2}$

กลุ่มตัวอย่าง SD = $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$

$$= \sqrt{\frac{\sum x^2-n\bar{x}^2}{n-1}}$$

<u>การวัดการกระจายแบบสัมพัทธ์</u>

1.สัมประสิทธิ์พิสัย = $\frac{\text{ค่ามากสุด} - \text{ค่าน้อยสุด}}{\text{ค่ามากสุด} + \text{ค่าน้อยสุด}}$

2.สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์

$$\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$$

3.สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย

$\frac{\mathrm{MD}}{\mu}$ หรือ $\frac{\mathrm{MD}}{\bar{x}}$

4.สัมประสิทธิ์การแปรผัน

ประชากร $\frac{\sigma}{\mu}$ หรือกลุ่มตัวอย่าง $\frac{\mathrm{SD}}{\bar{x}}$

ข้อมูลกลุ่ม

ประชากร $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\mu)^2}{N}}$

$= \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \mu^2}$

กลุ่มตัวอย่าง SD

SD $= \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum fx^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$

SD^2 เรียกว่าความแปรปรวน (Variance) หรือใช้สัญลักษณ์ σ^2

สมบัติของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

1.ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเป็นบวกเสมอ ในกรณีที่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเป็น 0 แสดงว่าข้อมูลชุดนั้น ในแต่ละค่าไม่แตกต่างจากค่าเฉลี่ยเลขคณิต

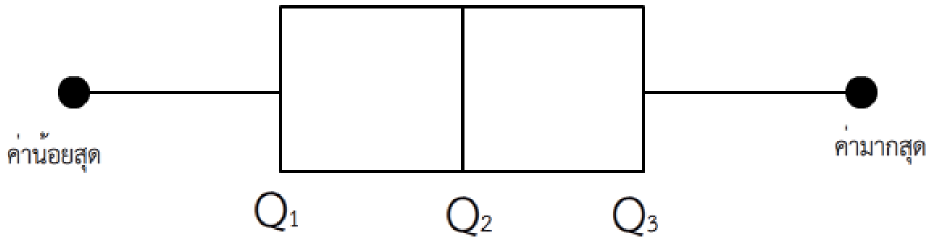
2.ส่วนเบี่ยงเบนเป็นการวัดการกระจายที่ให้ค่าลักษณะข้อมูลได้ละเอียดและดีที่สุดและเป็นการวัดการกระจายที่ใช้กันมากที่สุด

3.ถ้านำค่าคงตัว (k) ไปบวกหรือลบข้อมูลทุกค่าในข้อมูล ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะมีค่าเท่ากับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดเดิม

4.ถ้านำค่าคงตัว (k) ไปคูณทุกค่าในข้อมูล ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะมีค่าเท่ากับ

$S_{\text{ใหม่}} = |k| S_{\text{เดิม}}$

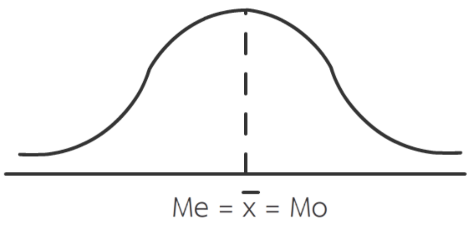
แผนภาพกล่อง (Box - plot)

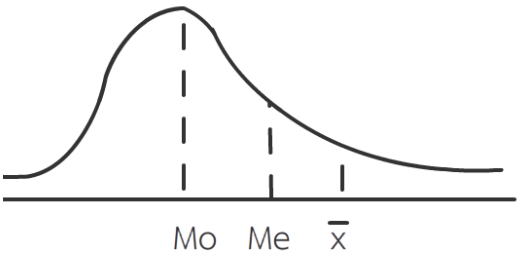


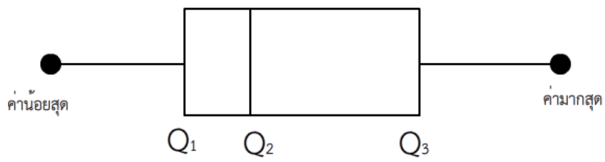
โดยแต่ละส่วนจะมีจำนวนประชากรร้อยละ 25 ของประชากรทั้งหมด

<u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่ ค่ากลางและการกระจายของข้อมูล</u>

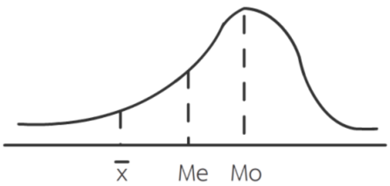
จากภาพเป็นการแจกแจงในรูปของโค้งปกติ

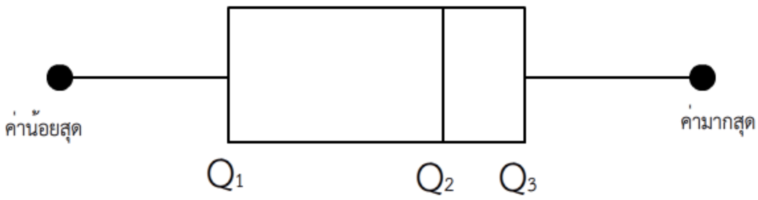






โค้งเบ้ขวา





โค้งเบ้ซ้าย

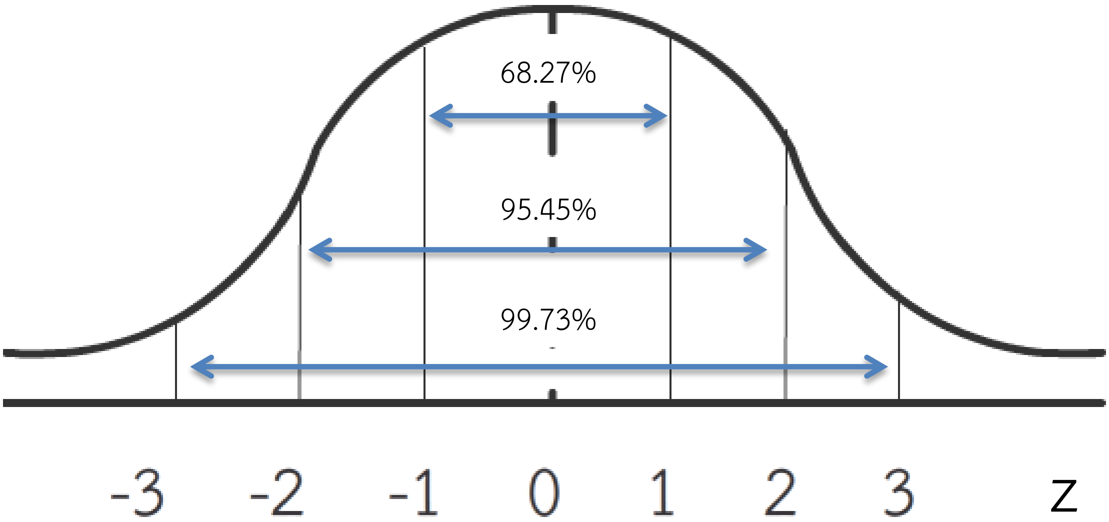
ค่ามาตรฐาน (standard value :Z)

$$z = \frac{x-\bar{x}}{SD} \text{ หรือ } z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

คุณสมบัติของค่ามาตรฐาน

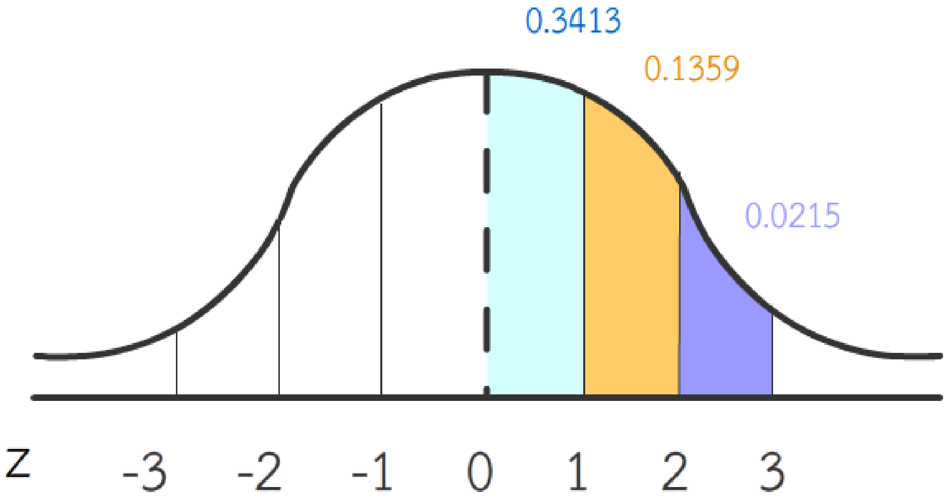
1. $\sum Z$= 0 เสมอ
2. ค่าเฉลยเลขคณิตของ z มีค่าเป็น 0 เสมอ
3. ส่วนเบี่ยงเบนของ z คือ 1 เสมอ
4. $\sum z^2$ ของข้อมูลประชากรจะเป็น N แต่ $\sum z^2$ ของกลุ่มตัวอย่างจะเป็น N – 1

พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ



เส้นโค้งแจกแจงปกติจะมีลักษณะสมมาตร คือพื้นที่ทางด้านซ้ายนของ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต กับพื้นที่ทางขวาของค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากันคือ 50% ของพื้นที่ทั้งหมด

<u>พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ</u>



ค่า z 0 ถึง 1 มีค่าประมาณ 0.3413

ค่า z 0 ถึง 2 มีค่าประมาณ 0.4772

ค่า z 0 ถึง 3 มีค่าประมาณ 0.4987

<u>ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน</u>

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน แบ่งออกเป็น 3 ประเภท คือแบบ เส้นตรง พาราโบลา และเอกซ์โพเนนเชียล ปกติข้อสอบ Ent จะออกแบบเส้นตรงเป็นหลัก

1.ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง

มีสมการเป็น $\hat{y}$ = ax +b (ทำนายค่า y)

จากสมการปกติ คือ $\sum y = a\sum x + \mathrm{N}b$ ----- (1)

$\sum xy = a\sum x^2 + b\sum x$ – (2)

ที่มาของสมการปกติ (1) เกิดจากสมการทำนาย y = ax + b คูณด้วยซิกมา ($\sum$)

$\sum$ y = $\sum$ (ax + b)

$\sum$ y = a $\sum$ x + $\sum$ b

$\sum$ y = a $\sum$ x + N(b) จากสมบัติของซิกมาค่าคงที่

ที่มาของสมการปกติ (2) เกิดจากสมการทำนาย y = ax + b คูณด้วยซิกมา ($\sum$ x)

$\sum$ xy = $\sum x$ (ax + b)

$\sum$ xy = a $\sum$ x^2 + b $\sum$ x

สมการทำนายค่า x คือ $\hat{x}$= ay+b (ทำนายค่า x)

<u>ข้อแนะนำ</u> สมการทำนาย y และสมการทำนาย x จะตัดกันที่จุด $(\bar{x}, \bar{y})$

ถ้าโจทย์กำหนด $\hat{y}$ มา แล้วกำหนดให้หาค่า x ตอบหาค่าไม่ได้

2.ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบพาราโบลา

มีสมการเป็น $\hat{y}$ = $ax^2 + bx + c$ โดยที่ a ไม่เท่ากับ 0

จากสมการปกติ คือ $\sum y_i = a\sum {x_i}^2 + \mathrm{b}\sum x_i + \mathrm{N}c$ ------------- (1)

$\sum x_i y_i = a\sum {x_i}^3 + \mathrm{b}\sum {x_i}^2 + c\sum x_i$ ------ (2)

$\sum {x_i}^2 y_i = a\sum {x_i}^4 + \mathrm{b}\sum {x_i}^3 + c\sum {x_i}^2$ --- (3)

ที่มาของสมการปกติ (1) เกิดจากสมการทำนาย y = $ax^2 + bx + c$ คูณด้วยซิกมา ($\sum$)

$\sum y = \sum (ax^2 + bx + c)$

$\sum y = a \sum x^2 + b \sum x + \sum c$

$\sum y = a \sum x^2 + b \sum x + Nc$ จากสมบัติของซิกมาค่าคงที่

ที่มาของสมการปกติ (2) เกิดจากสมการทำนาย y = $ax^2 + bx + c$ คูณด้วยซิกมา ($\sum x$)

$\sum xy = \sum x (ax^2 + bx + c)$

$\sum xy = a \sum x^3 + b \sum x^2 + c \sum x$

ที่มาของสมการปกติ (2) เกิดจากสมการทำนาย y = $ax^2 + bx + c$ คูณด้วยซิกมา ($\sum x^2$)

$\sum xy = \sum x^2 (ax^2 + bx + c)$

$\sum xy = a \sum x^4 + b \sum x^3 + c \sum x^2$

3.ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเอกซ์โพเนนเซียล

มีสมการเป็น $y=ab^x$ หรือ $\log \hat{y} = \log a + \log b$

จากสมการปกติ คือ $\sum \log\ y_i = (\log a) \sum x_i + N \log\ b$

$\sum x_i \log\ y_i = (\log a) \sum {x_i}^2 + (\log\ b) \sum x_i$

ที่มาของสมการปกติ (1) เกิดจากสมการทำนาย log y = log a + log b คูณด้วยซิกมา ($\sum$)

$\sum \log y = \sum (\log a + \log b)$

$\sum \log y = \log a \sum x + \sum \log b$

$\sum \text{Log } y = \log a \sum x + N(\log b)$ จากสมบัติของซิกมาค่าคงที่

ที่มาของสมการปกติ (2) เกิดจากสมการทำนาย y = ax + b คูณด้วยซิกมา ($\sum x$)

$\sum xy = \sum x (\log a + \log b)$

$\sum x\log y = \log a \sum x^2 + \log b \sum x$

X เป็นตัวแปรอิสระหรือตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม a,b,c, m เป็นค่าคงที่

ตัวอย่างแนวข้อสอบความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

1.ถ้าสมการแสดงถึงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างต้นทุนกับจำนวนสินค้าที่ผลิตคือ y = 2x+5 โดยที่ x คือจำนวนสินค้ามีหน่วยเป็นร้อยชิ้น y คือต้นทุนมีหน่วยเป็นพนบาท จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.ถ้าต้นทุนเท่ากับ 7,000 บาทคาดว่าผลิตสินค้าได้ 100 ชิ้น

ข.ถ้าผลิตสินค้าเพิ่ม 200 ชิ้นจะต้นทุนจำนวน 4,000 บาท

ข้อใดถูกต้อง

1.ข้อ ก ถูกเท่านั้น 2.ถูกทั้งสองข้อ 3.ข้อ ข ถูกเท่านั้น 4.ผิดทั้งสอง 2 ข้อ

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาข้อ ก จากสมการที่โจทย์กำหนดให้เป็นสมการทำนายต้นทุนโดยใช้จำนวนสิน้าที่ผลิตเป็นตัวแปรหลัก ดังนั้นข้อนี้จึงผิดเพราะเราต้องสร้างสมการหาค่า x

พิจารณาข้อ ข เมื่อ x = 200 y = 2(200) +5

y = 405

ข้อ ข จึงผิด

<u>ดังนั้น</u>ข้อนี้จึงตอบ ข้อ 4 ผิดทั้ง 2 ข้อ

2.จงพิจาณาข้อความต่อไปนี้

สมการทำนาย $y = 0.5(x)^2 + 1000x - 3000$

ก.สมการเชิงสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นสมการพาราโบลา

ข.สมการดังกล่าวเมื่อ x = 10 จะมีค่า y เป็นจำนวนเต็มลบ 32 เท่าของผลคูณของคำตอบสมการ $3x^3 + 6x^2 - 12x - 24 = 0$ และ $\sqrt{1024}$

ค.สมการดังกล่าวเมื่อค่า x = 5 ค่า y จะมีค่าเท่ากับ 2012.5

1.ถูกข้อ ก และ ข 2.ถูกข้อ ก และ ค 3.ถูกทั้ง 3 ข้อ 4.มีข้อถูกเพียง 1 ข้อ

<u>วิธีทำ</u>พิจารณา ข้อ ก ถูกต้องเพราะเป็นสมการที่มีกำลังเป็นกำลัง 2 ตามรูปแบบของสมการแบบพาราโบลา

ข้อ ข พิจารณาสมการทำนายเมื่อ x = 10

$y = 0.5(10)^2 + 1000(10) - 3000$

$= 50 + 10000 - 3000$

$= 7050$

พิจาณาสมการ $3x^3 + 6x^2 - 12x - 24 = 0$

$x^2(3x + 6) - 4(3x + 6) = 0$

$(x^2 - 4)(3x + 6) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(3x + 6) = 0$

$x = 2, -2$

ผลคูณคำตอบของสมการ คือ -4

จำนวนเต็มลบ 32 เท่าของผลคูณคำตอบของสมการและ $\sqrt{1024}$

คือ $32 \times -4 \times \sqrt{1024} = -128 \times 32$

$= -4096$

ดังนั้นข้อ ข จึงผิด

ข้อ ค พิจารณาสมการทำนายเมื่อ $x = 5$

$y = 0.5(5)^2 + 1000(5) - 3000$

$= 12.5 + 5000 - 3000$

$= 2012.5$

ดังนั้นข้อ ค จึงถูก

<u>ดังนั้น</u>ข้อนี้ตอบข้อ 2 ถูกข้อ ก และ ค

ลำดับอนุกรม (Series & Sequence)

- ลำดับ
  - จำกัด
    - เลขคณิต
    - เรขาคณิต
    - ผสม
  - อนันต์
    - เลขคณิต
    - เรขาคณิต
    - ผสม
- อนุกรม
  - ประเภทอนุกรม
    - อนุกรมจำกัด
      - อนุกรมเลขคณิต
      - อนุกรมเรขาคณิต
      - อนุกรมผสม
      - อนุกรมเศษส่วนย่อย
    - อนุกรมอนันต์
      - อนุกรมเรขาคณิตอนันต์
      - อนุกรมผสมเรขาคณิตอนันต์
      - อนุกรมเศษส่วนย่อยอนันต์
  - อนุกรมเลขคณิต
  - อนุกรมเรขาคณิต
  - อนุกรมผสมเรขาคณิต
  - อนุกรมเศษส่วนย่อย

ลำดับ คือเซตของจำนวนที่เรียงตัวอย่างเป็นระบบระเบียบภายใต้เงื่อนไข สมาชิกแต่ละตัวจะเรียกว่าพจน์ อนุกรมคือผลบวกของพจน์ทุกพจน์

ลำดับ (Sequence) คือเซตของจำนวนที่เรียงตัวอย่างเป็นระบบระเบียบ ภายใต้เงื่อนไข สมาชิกแต่ละตัวจะเรียกว่า**พจน์** (Term)

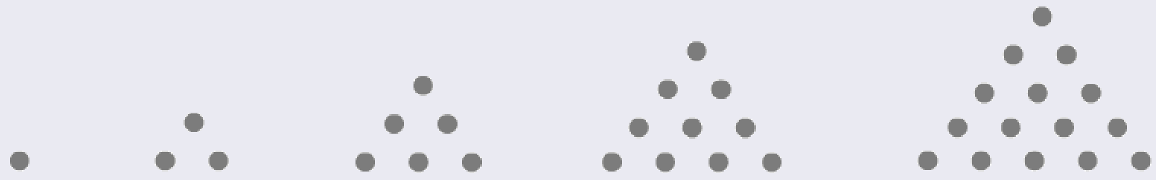
<u>ลำดับทั่วไปแบ่งได้เป็น</u>

1.ลำดับจำกัด (finite sequence)

2.ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

Ex

1. 2,4,6,8,10,...,100
2. sin 30°+ sin 60°+ sin 90° + ...



จากรูปข้างต้นพบว่า ลำดับรูปจำนวนจุดมีความสัมพันธ์ดังนี้

รูปที่	1	2	3	4	5
จำนวนจุด	1	3	6	10	15

จากตารางดังกล่าว แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของลำดับของรูปและจำนวนจุด โดยมีความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันโดยจำนวนรูปที่เป็นโดเมน {1,2,3,4,5}และมีจำนวนจุดเป็นเรนจ์ {1,3,6,10,15} ของฟังก์ชัน

<u>นิยาม</u> ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกหรือสับเซตของจำนวนเต็มบวกในรูป {1, 2, 3, 4, ... , n}

ลำดับที่	1	2	3	4	5	...	n	...
จำนวน	1	3	5	7	9	...	2n - 1	...

จากตารางแสดงให้เราเห็นถึงความสัมพันธ์โดยลำดับเป็นโดเมน และมีเรนจ์ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับโดเมน

เช่น ลำดับที่ 5 (โดเมนคือ 5 ซึ่งเรนจ์มีความสัมพันธ์กับโดเมนคือ 2n - 1)

จำนวนซึ่งมีความสัมพันธ์กับลำดับคือ $2(5) - 1$

$= 9$

ในการเขียนลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกันไปตามกล่าวคือถ้าa เป็นลำดับจำกัดจะเขียนแทนด้วย $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ในกรณีที่เป็นลำดับอนันต์ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

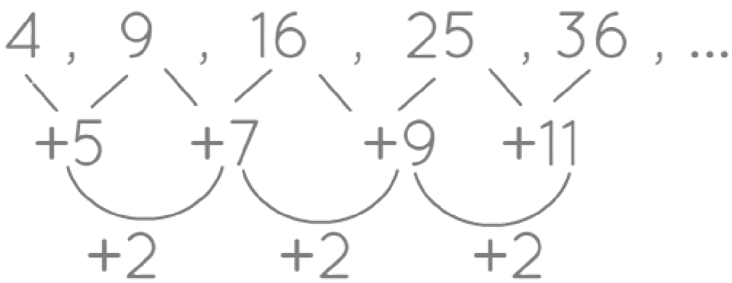
a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

⋮

a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไป

ตัวอย่างของลำดับ

1) 7, 14 , 21 , 28 , 35 , 42 เป็นลำดับจำกัดซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นคงที่ เพิ่มขึ้นครั้งละ 7
2) 3, 6 , 12 , 24 , ... เป็นลำดับอนันต์ มีค่าเพิ่มขึ้นคงที่ เพิ่มขึ้นเป็น 2เท่า* ของพจน์หน้า
3) $a_n = 2n + 3$ เป็นลำดับอนันต์ มีค่าเพิ่มขึ้นคงที่ เพิ่มขึ้นเป็น 2เท่า ของพจน์หน้า
4) $a_n = (n+1)^2$ เป็นลำดับอนันต์ ซึ่งค่าผลต่างครั้งที่ 2เพิ่มขึ้นคงที่



* 2 เป็นอัตราส่วนร่วม ซึ่งคือ อัตราส่วนระหว่างพจน์ที่ n +1 กับ พจน์ที่ n มีค่าคงตัว

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ (a_n)

ในการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ ถ้าระหว่างพจน์มีผลต่างเป็นจำนวนคงตัว (1 ครั้ง)

รูปแบบพจน์ทั่วไป คือ $a_n = an+b$; $a,b \in R$

ตัวอย่าง จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้แล้วหาพจน์ทั่วไป 1,3,5,7, ...

วิธีทำ แทนค่า n ถ้า n = 1 แล้ว $a(1)+b = 1$ ------- (1)

แทนค่า n ถ้า n = 2 แล้ว $a(2)+b = 3$ ------- (2)

(2) – (1) $a = 2$

แทน a ใน (1) $2 + b = 1$

$b = -1$

∴ ดังนั้นพจน์ทั่วไป $a_n = 2n - 1$

ในการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ ถ้าระหว่างพจน์มีอัตราส่วนร่วม(r)เป็นจำนวนคงตัว (1 ครั้ง)

รูปแบบพจน์ทั่วไป คือ $a_n = ar^n+b$; $a,b \in R$

ตัวอย่าง จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้แล้วหาพจน์ทั่วไป 4,8,16,32, ...

พิจารณาจากข้อมูลทำให้เราทราบว่าลำดับต่อไปนี้มี อัตราส่วนร่วมเป็น 2

วิธีทำ แทนค่า n ถ้า n = 1 แล้ว $a(2)^1+b = 4$ ------- (1)

แทนค่า n ถ้า n = 2 แล้ว $a(2)^2+b = 8$ ------- (2)

(2) – (1) $2a = 4$ ดังนั้น $a = 2$

แทน a ใน (1) $2(2)^1+b = 4$

$b = 0$

∴ ดังนั้นพจน์ทั่วไป $a_n = 2(2)^n$ หรือ 2^{n+1}

ในการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ ถ้าระหว่างพจน์มีผลต่างเป็นจำนวนคงในการหาครั้งที่ 2

รูปแบบพจน์ทั่วไป คือ $a_n = an^2+bn+c$; $a,b,c \in R$

ตัวอย่าง จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้แล้วหาพจน์ทั่วไป 5, 18, 35, 81, ...

5 18 35 56 81 ...

+13 +17 +21 +25 +29

+4 +4 +4 +4 +4

วิธีทำ แทนค่า n ถ้า n = 1 แล้ว $a(1)^2+b(1)+c = 5$ ------- (1)

แทนค่า n ถ้า n = 2 แล้ว $a(2)^2+b(2)+c = 18$ ------- (2)

แทนค่า n ถ้า n = 3 แล้ว $a(3)^2+b(3)+c = 35$ ------- (3)

(2) – (1) $3a+b = 13$ ------- (4)

(3) – (2) $5a+b = 17$ ------- (5)

(5) – (4) $2a = 4$

$a = 2$

แทนค่า a ใน (4) $b = 7$

แทนค่า a และ b ใน (1) $2(1) + 7 + c = 5$

$c = -4$

∴ ดังนั้นพจน์ทั่วไป $a_n = 2n^2+7n - 4$

ในการหาพจน์ทั่วไปลำดับ ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม (อัตราส่วนระหว่างพจน์ที่ n +1 กับ พจน์ที่ n) คงที่

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาลำดับต่อไปนี้แล้วหาพจน์ทั่วไป 2, 4, 8, 16, …

พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับจะเห็นว่า

พจน์ที่ 1 2

พจน์ที่ 2 $4 = 2 \times 2 = 2^2$

พจน์ที่ 3 $8 = 4 \times 2 = 2^3$

พจน์ที่ 4 $16 = 8 \times 2 = 2^4$

พิจาราความสัมพันธ์ 5 พจน์แรก จะได้ พจน์ที่ n คือ 2^n

∴ พจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้คือ 2^n

<u>ประเภทของลำดับ</u>

1.ลำดับเลขคณิต(arithmetic sequence)
คือลำดับที่มีผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันคงที่
$a_n = a_1+(n-1)d$ d คือผลต่างร่วม
(common difference)

2.ลำดับเรขาคณิต (geometric sequence)
คือลำดับที่อัตราส่วนระหว่างพจน์ที่ติดกันกับพจน์ข้างหน้ามีค่าคงที่
$a_n=a_1r^{n-1}$ r คืออัตราต่างร่วม(ratio)

Ex จงหาพจน์ที่ 10

1.1,3,5,... เป็นลำดับเลขคณิต d คือ 2
a_{10} = 1+(10-1)2 จะได้ 19

2. 1,4,16, ... เป็นลำดับเรขาคณิต
อัตราส่วนร่วมคือ 4
$a_{10} = 1(4)^{10-1}$ จะได้ 262144

<u>ชนิดของลำดับ</u>

1.ลำดับคอนเวอร์เจนต์หรือลำดับลู่เข้า
(Convergent sequence) คือลำดับที่หาได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
ได้แก่ 1.ลำดับเลขคณิตที่ ผลต่างร่วม(d) มีค่าเป็น 0
2.ลำดับเราขาคณิตที่อัตราส่วนร่วม(r)เป็น 1
3.ลำดับเรขาคณิตที่ $|r| < 1$
4.ลำดับใดๆ ที่สามารถหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty}$ ได้

2.ลำดับไดเวอร์เจนต์หรือลำดับลู่ออก (divergent sequence) คือลำดับที่หา $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ไม่ได้ได้แก่
1.ลำดับเลขคณิตที่ผลต่างร่วม(d) มีค่าไม่เป็น 0
3.ลำดับเรขาคณิตที่ $|r| > 1$
4.ลำดับใดๆ ที่สามารถหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty}$ ไม่ได้

Ex

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3+17n^2-1}{2n^3-1}$$

ให้ใช้ตัวดีกรีมากที่สุดหารทั้งเศษและส่วน ด้วยn^3
แล้วจะได้คำตอบเป็น $\frac{6}{2}$ หรือ 3
จึงเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3+17n^2-1}{2n^2-1}$$

เราไม่สามารถหาค่าของ ลิมิตได้ เพราะไม่สามารถใช้ตัวดีกรีมากที่สุดหารทั้งเศษและส่วนได้
จึงเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

คุณสมบัติของ $\lim\limits_{n\to\infty}$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}$ c โดยที่ c เป็นค่าคงที่ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต 200, 182, 164, 146, ... มีค่าต่างจากพจน์ที่ 10 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent)

1. 54 2.38 3.22 4.20

วิธีทำ ลำดับเลขคณิตชุดนี้มี – 18 เป็นผลต่างร่วม ใช้สูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$

หาพจน์ที่ 10 $a_{10} = 200 + (9)(-18)$

$= 200 - 163$

$= 38$

พิจารณาพจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบ

38, 20, 2, -16

$38 - (-16) = 54$

<u>ตอบ</u> ข้อ 1

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าผลคูณของลำดับเรขาคณิต 3 จำนวนที่เรียงติดกันเท่ากับ 343และผลบวกของทั้งสามจำนวนเท่ากับ 57 แล้วค่ามากที่สุดในบรรดา 3 จำนวนนี้เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

วิธีทำ $(a_1r^{-1})(a_1)(a_1r) = 343$

$a_1^3 = 343$

$a_1 = 7$

เมื่อเรานำค่าที่ได้มาเขียนใหม่ $a_1 + a_2 + a_3 = 57$

$a_1 + 7 + a_3 = 57$

$7r^{-1} + 7r = 50$

นำ r คูณตลอด $7 + 7r^2 = 50r$

$7r^2 - 50r + 7 = 0$

$(7r - 1)(r - 7) = 0$

$r = 7, \frac{1}{7}$

เราสามารถเขียนลำดับได้ดังนี้ 1,7,49 หรือ 49,7,1

<u>ดังนั้น</u>ค่ามากที่สุดคือ 49

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาค่าต่อไปนี้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2+5n-3}$

วิธีทำ ให้นำ n กำลังดีกรีสูงสุดหารทั้งเศษและส่วน

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n^2+2n-1)/n^2}{(2n^2+5n-3)/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})}{(2+\frac{5}{n}-\frac{1}{3^2})}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3+\cancelto{0}{\frac{2}{n}}-\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}})}{(2+\cancelto{0}{\frac{5}{n}}-\cancelto{0}{\frac{1}{3^2}})}$$

$$= \frac{3}{2}$$

<u>ตอบ</u> $\frac{3}{2}$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาค่าต่อไปนี้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+3^{n-1}}{2^{n+1}+5^{n-1}}$ (Ent)

วิธีทำ ให้จัดรูปของลิมิต

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n\cdot 5+3^n\cdot 3^{-1}}{2^n 2+5^n\cdot 5^{-1}}$

แล้วนำ ฐานที่มากที่สุดหารทั้งเศษและส่วน

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(5^n\cdot 5+3^n\cdot 3^{-1})}{5^n}}{\frac{(2^n 2+5^n\cdot 5^{-1})}{5^n}} = \frac{5+0}{0+5^{-1}}$

$$= 25$$

<u>ตอบ</u> 25

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาค่าต่อไปนี้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\log n)(\sin n)}{4\cdot 2^n n^{10}}$

วิธีทำ พิจารณาจากลิมิตพบว่าตัวส่วนมีการเพิ่มขึ้นเร็วกว่าตัวเศษเพราะฉะนั้นแล้วลิมิตจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ พิจารณาฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันที่เพิ่มช้ามากซึ่งคูณกับฟังก์ชันไซน์ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง –1 ถึง 1 จึงทำให้ตัวเศษมีค่าน้อยมาก

ตอบ 0

ข้อควรรู้ อัตราการเพิ่มขึ้น ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล > พหุหาม > ฟังก์ชันลอการิทึม

อนุกรม (Series) เป็นพจน์ของลำดับที่เขียนต่อเนื่องในรูปผลบวก S_n
อนุรมที่มีต้นกำเนิดจากลำดับจำกัด จะเป็นอนุกรมจำกัด อนุกรมที่มีต้นกำเนิดจากลำดับอนันต์จะเป็นอนุกรมอนนต์

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงหาค่าผลบวกของลำดับต่อไปนี้ $1 + 2 + 4 + 8 +\dots + a_7$

วิธีทำ ให้หารูปพจน์ทั่วไป จากลำดับเป็นลำดับเรขาคณิตมีอัตราส่วนร่วมเป็น 2

จะได้พจน์ทั่วไปคือ $a_1(r)^{n-1}$ หรือก็คือ $1(2)^6$

เราสามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้คือ 1+2+4+8+16+32+64

สัญลักษณ์แทนการบวก

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม เมื่อมีจำนวนพจน์มากจะทำให้เขียนได้ลำบาก ดังนั้นนักคณิตศาสตร์จึงกำหนดตัวอักษรกรีก ∑ เรียกว่าซิกมาเป็นสัญลักษณ์แทนการบวก หรืออาจกล่าวว่า $a_1+ a_2+a_3+\dots +a_n$ สามารถเขียนแทนด้วย

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ อ่านว่า การบวก a_i เมื่อ i มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n

ตัวอย่างการใช้สัญลักษณ์แทนการบวก

1. $\sum_{i=1}^{5} i$ แทน 1 + 2 + 3 + 4 + 5

2 $\sum_{i=1}^{5} i^2$ แทน $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

3 $\sum_{i=1}^{3} (2i+1)$ แทน (2+1) + (4+1) + (6 + 1)
ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3 + 5 + 7

4 $\sum_{i=1}^{\infty} (2i+1)$ แทน (2+1) + (4+1) + (6 + 1) + (8+1) + ...

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรม

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+5)^2$$

วิธีทำ ให้ S_n =

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(2i+5)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(4i^2+20i+25)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}4i^2+\sum_{i=1}^{n}20i+\sum_{i=1}^{n}25)$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n}i^2+20\sum_{i=1}^{n}i+25(n))$$

$$= 4\left(\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right)+20\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+25n$$

$$S_n = 4\left(\frac{20(2(20)+1)(20+1)}{6}\right)+20\left(\frac{20(20+1)}{2}\right)+25(20)$$

$$= 4\left(\frac{2(41)(21)}{6}\right)+20\left(\frac{20(21)}{2}\right)+500$$

$$= 11480+4200+500$$

$$= 16180$$

นั้นคือผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมต่อไปนี้ เท่ากับ 16,180

อนุกรมที่สำคัญ

1. $\sum n$ = 1+2+3+…+n = $\frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum n^2$ = $1+2^2+3^2+\ldots+n^2$ = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum n^3$ = $1+2^3+3^3+\ldots+n^3$ = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ข้อควรระวัง

$$\sum_{i=-1}^{n}$$

เป็นอนุกรมที่เริ่มต้นจาก -1 บวกไปถึงพจน์ที่ n

คุณสมบัติของ Σ

1. $\sum_{i=1}^{n} c = c(n)$

2. $\sum_{i=1}^{n} cf(i) = c\sum_{i=1}^{n} f(i)$

3. $\sum_{i=1}^{n} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$

อนุกรมเลขคณิต คือผลบวกของลำดับเลขคณิต

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 - (n-1)d)$

Ex จงหา S_n ของ 1 + 3 + 5 +... +(2n-1)

$S_n = \frac{n}{2}[1+(2n-1)]$

$= \frac{n}{2}[2n]$

$= n^2$

อนุกรมเรขาคณิต คือผลบวกของลำดับเรขาคณิต

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r < 1$

$= \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ เมื่อ $r > 1$

Ex จงหา S_n ของ 2 + 6 + 18 + ...

$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1}$

$= \frac{2(3^n-1)}{2}$

$= 2(3^n-1)$

อนุกรมอนันต์ [Infinite Series] คือ ผลบวกของพจน์ทุกพจน์ในอนุกรมอนันต์ หรือเรียกว่า ลิมิตของผลบวกย่อยตัวที่ n เมื่อ n เข้าสู่ค่าอนันต์

$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

อนุกรมคอนเวอร์เจอร์เจนต์ คือ อนุกรมที่ S_∞ หาค่าได้

อนุกรมไดเวอร์เจนต์ คืออนุกรมที่ S_∞ หาค่าไม่ได้

ข้อย้ำเตือน อนุกรมอนันต์ ไม่สามารถ หา S_∞ เพราะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \text{ และ } |r| < 1$$

ตัวอย่าง ที่ 8 จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

$S_\infty = 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots$

วิธีทำ $a_1 = 8$ $r = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}}$

$= 4$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลบวก 8 พจน์ ของอนุกรม 6 + 6.5 +7.25 +8.125 + ...

วิธีทำ จากอนุกรมที่โจทย์กำหนดให้เป็นอนุกรมผสมเรขาคณิต ซึ่งผสมกับอนุกรมเลขคณิต ซึ่งเราสามารถแยกได้เป็นอนุกรม 2 ชุด

อนุกรมชุดที่ 1 5 + 6 + 7 + 8+... +12 เป็นอนุกรมเลขคณิต

$S_8 = \frac{8}{2}[5+12]$

$= 68$

อนุกรมชุดที่ 2 1 + 0.5 + 0.25 +0.125 + ... เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$S_8 = \frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\left[\frac{255}{256}\right]}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{255}{128}$

$\therefore$ นำอนุกรมทั้ง 2 ชุดมาบวกกันจะได้ $69\frac{127}{128}$

แคลคูลัส (Calculus)

- ลิมิต (lim) และความต่อเนื่อง
- อัตราการเปลี่ยนเฉลี่ย
- อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
  - อัตราการเปลี่ยนขณะใดๆ เมื่อ y เทียบ x
  - ความชันเส้นโค้ง
  - ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด
  - ประยุกต์อนุพันธ์
- ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน
  - ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
  - ปริพันธ์จำกัดเขต
  - พื้นที่ใต้กราฟ

แคลคูลัส ถูกใช้ประโยชน์ทั้งทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างกว้างขวางซึ่งเป็นพื้นฐานในการคำนวณขั้นสูงต่อไป

แคลคูลัส (Calculus) เป็นสาขาหลักของคณิตศาสตร์ซึ่งพัฒนามาจากพีชคณิต เรขาคณิต และปัญหาทางฟิสิกส์ แคลคูลัสมีต้นกำเนิดจากสองแนวคิดหลัก ดังนี้

แนวคิดแรกคือ แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ (Differential Calculus) เป็นทฤษฎีที่ว่าด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลง และเกี่ยวข้องกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น การหา ความเร็ว, ความเร่ง หรือความชันของเส้นโค้ง บนจุดที่กำหนดให้. ทฤษฎีของอนุพันธ์หลายส่วนได้แรงบันดาลใจจากปัญหาทางฟิสิกส์

แนวคิดที่สองคือ แคลคูลัสเชิงปริพันธ์ (Integral Calculus) เป็นทฤษฎีที่ได้แรงบันดาลใจจากการคำนวณหาพื้นที่หรือปริมาตรของรูปทรงทางเรขาคณิตต่าง ๆ ทฤษฎีนี้ใช้กราฟของฟังก์ชันแทนรูปทรงทางเรขาคณิต และใช้ทฤษฎีปริพันธ์ (หรืออินทิเกรต) เป็นหลักในการคำนวณหาพื้นที่และปริมาตร

พื้นฐานของแคลคูลัส มีฐานมาจาก แนวคิดของฟังก์ชัน และลิมิต มันรวมเทคนิคของพีชคณิตพื้นฐาน และการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ การศึกษาพื้นฐานของแคลคูลัสสมัยใหม่ รู้จักกันในชื่อ การวิเคราะห์เชิงจริง ซึ่งประกอบด้วย นิยามที่เคร่งครัด และบทพิสูจน์ของทฤษฎีของแคลคูลัส เช่นทฤษฎีการวัด และการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน

การศึกษาลิมิตในบทเรื่องแคลคูลัส เป็นการศึกษาค่าเข้าใกล้ ไม่ใช่ค่านั้นโดยตรง

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงค่า $f(x) = 2x$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$

x	f(x)
1.0	2
1.5	3
1.8	3.6
1.9	3.8
1.99	3.98
1.999	3.998

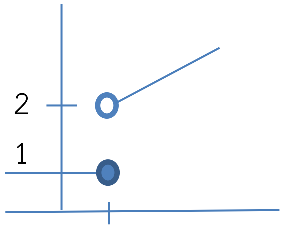
x	f(x)
3	6
2.5	5
2.1	4.2
2.05	4.1
2.01	4.02
2.001	4.002

จากตารางเมื่อ x เข้าใกล้ 2 $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 4

<u>ลิมิต</u> คือค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวจำนวนหนึ่ง

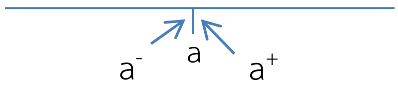
$\lim_{x\to a^+} f(x)$ (ลิมิตทางขวาของ a) คือ ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา (x > a)

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ (ลิมิตทางซ้ายของ a) คือ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา (x < a)



$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ = 2

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$ = 1



$\lim_{x\to a} f(x)$ จะหาได้ก็ต่อเมื่อ

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

ลิมิตทางซ้าย ต้องเท่ากับลิมิตทางขวา

ดังนั้นเราไม่สามารถหาค่า $\lim_{x\to 1} f(x)$

<u>ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of function)</u>

ฟังก์ชันจะต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ = f(x)

ซึ่งสามารถตรวจสอบได้จากการวาดกราฟ แล้วพิจาณาลิมิตด้านซ้าย ด้านขวาและค่าของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a,b) เมื่อเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆจุดในช่วง (a,b)

ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a,b] เมื่อเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆจุดในช่วง [a,b] และลิมิตทางซวาของ a = f(a) และลิมิตทางซ้ายของ b =f(b)

จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

$$f(x)\begin{cases} x-3\,, & x<1 \\ -2x\,, & x=1 \\ \frac{5-x}{-2}\,, & x>1 \end{cases}$$

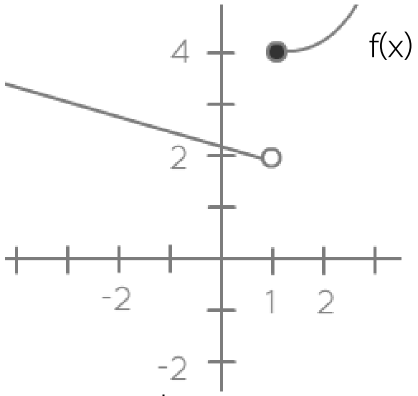
วิธีทำ หา $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ 1 – 3 = -2

หา $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\frac{5-1}{-2} = \frac{4}{-2}$ = -2

หา f(1) -2(1) = -2

$\therefore$ ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 2 จงตอบคำหาค่าต่อไปนี้โดยพิจารณาจากกราฟ



1) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

4) f(1)

5) ฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ 1) เมื่อค่า x เข้าใกล้ 1ทางด้านซ้าย (x<1)

จะได้ว่าค่าของ f(x) เข้าใกล้ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$

2) เมื่อค่า x เข้าใกล้ 1ทางด้านซวา (x>1)

จะได้ว่าค่าของ f(x) เข้าใกล้ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 4$

3) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้

4) f(1) = 4

5) ฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ เพราะ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

1. $\lim\limits_{n\to a}$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ แล้ว $\lim\limits_{n\to a} c = c$
2. $\lim\limits_{n\to a} ca_n = c \lim\limits_{n\to a} a_n$
3. $\lim\limits_{n\to a} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to a} a_n + \lim\limits_{n\to a} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to a} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to a} a_n - \lim\limits_{n\to a} b_n$
5. $\lim\limits_{n\to a} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to a} a_n \cdot \lim\limits_{n\to a} b_n$
6. $\lim\limits_{n\to a} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to a} a_n}{\lim\limits_{n\to a} b_n}$ และ $\lim\limits_{n\to a} b_n \neq 0$
7. $\lim\limits_{n\to a} (f(x))^n = [\lim\limits_{n\to a} f(x)]^n$

หลักการแก้ปัญหาเรื่องลิมิต เรานิยมแทนค่า x ลงไป ซึ่งทำให้เกิดกรณีต่อไปนี้

1.ถ้า x เป็นจำนวนจริง เราจะได้คำตอบ

2.ถ้าแทนแล้วได้ $\frac{c}{0}$ เมื่อ c ไม่เป็น 0 เราจะหาค่าไม่ได้

3.ถ้าแทนค่าแล้วได้ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ให้จัดรูป หรือ หาอนุพันธ์ตามกฎของโลปิตาล

ตัวอย่างที่ 3 จงหาลิมิตข้อต่อไปนี้

3) $\lim\limits_{x\to 2} \left\{\frac{x^2}{x} - 3\right\}$

ให้เราแทนเลขลงไปจะได้ เป็น $\frac{2^2}{2} - 3$

จะได้คำตอบคือ -1

ให้เราตอบว่า ลิมิตดังกล่าวมี ค่าเข้าใกล้ -1 แต่คำตอบไม่เท่ากับ -1 เป็นเพียงค่าเข้าใกล้ แต่เนื่องจากค่าเข้าใกล้มีจำนวนมากมายเป็นเซตอนันต์ เขาจึงกำหนดว่าเมื่อได้คำตอบตัวใดออกมา ให้ตอบตัวนั้นเลย คือ -1

4) $\lim\limits_{x\to 2} \left\{\frac{x^2-4}{-x+2}\right\}$ เมื่อเรานำ 2 ลงไปแทนจะทำเกิดเหตุการณ์ที่เป็น $\frac{0}{0}$

เราจึงต้องจัดรูปเป็น $\lim\limits_{x\to 2} \left\{\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{-1\cancel{(x-2)}}\right\} = \lim\limits_{x\to 2} \left\{\frac{(x+2)}{-1}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \{-(x+2)\}$

$\therefore$ เมื่อนำ 2 ไปแทนแล้วจะได้ ลิมิตเข้าใกล้ -4

ลิมิตต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ = f(x) และทั้ง 3 ตัวต้องหาค่าได้

กฎของโลปิตาล(L'Hôpital's rule)

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิดที่มี a อยู่ โดยที่ g (x) ไม่เท่ากับศูนย์ ทุกค่า x ยกเว้นที่ x = a

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ทฤษฎีบท ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ บนช่วงเปิดที่มี a อยู่

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ตัวอย่างที่ 4

4.1) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 6x - 5, & 0 \le x < 4 \\ 3x, & x \ge 4 \end{cases}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดถูกต้อง

ก. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 12$

ข. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x+2) = 13$

วิธีทำพิจารณา

ก

ตรวจสอบลิมิตทางซ้าย

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 6x - 5$

$= 6(4) - 5$

$= 19$

ตรวจสอบลิมิตทางขวา

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 3x$

$= 3(4)$

$= 12$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ หาไม่ได้ข้อ ก ผิด

ข $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x+2) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(3)$

$= 6x - 5$

$= 6(3) - 5$

$= 13$

ดังนั้นข้อ ข ถูกต้อง

4.2) กำหนดให้ a,b,c เป็นจำนวนจริง และ f เป็นฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a-\sqrt{5-x}}{x-1}, & x<1 \\ b, & x=1 \\ 2cx-1, & x>1 \end{cases}$$

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 1 แล้วจงหาค่า $-2(a + b^{-1}c)$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{a-\sqrt{5-x}}{x-1}$ เมื่อ x = 1 จะทำให้ส่วนเป็น 0 มีเพียงกรณีเดียวที่ทำให้ส่วนเป็น 0 คือ $\frac{0}{0}$
ดังนั้น a - $\sqrt{5-x}$ = 0

ที่จุด x = 1 จะได้ว่า a - $\sqrt{5-1}$ = 0 ; a = 2

ดังนั้น b $= \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}$

$= \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} \cdot \dfrac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}$

$= \dfrac{4-(5-x)}{x-1(2+\sqrt{5-x})}$

$= \dfrac{1}{(2+\sqrt{5-x})}$

เมื่อ x = 1 $= \dfrac{1}{(2+\sqrt{5-1})}$

$= \dfrac{1}{4}$

$2cx-1 = \frac{1}{4}$

เมื่อ x = 1 $2c(1) = \frac{5}{4}$

$c = \frac{5}{8}$

$-2(a + b^{-1}c) = -2[(2) + 4(\frac{5}{8})]$

$= -2[2+\frac{5}{2}]$

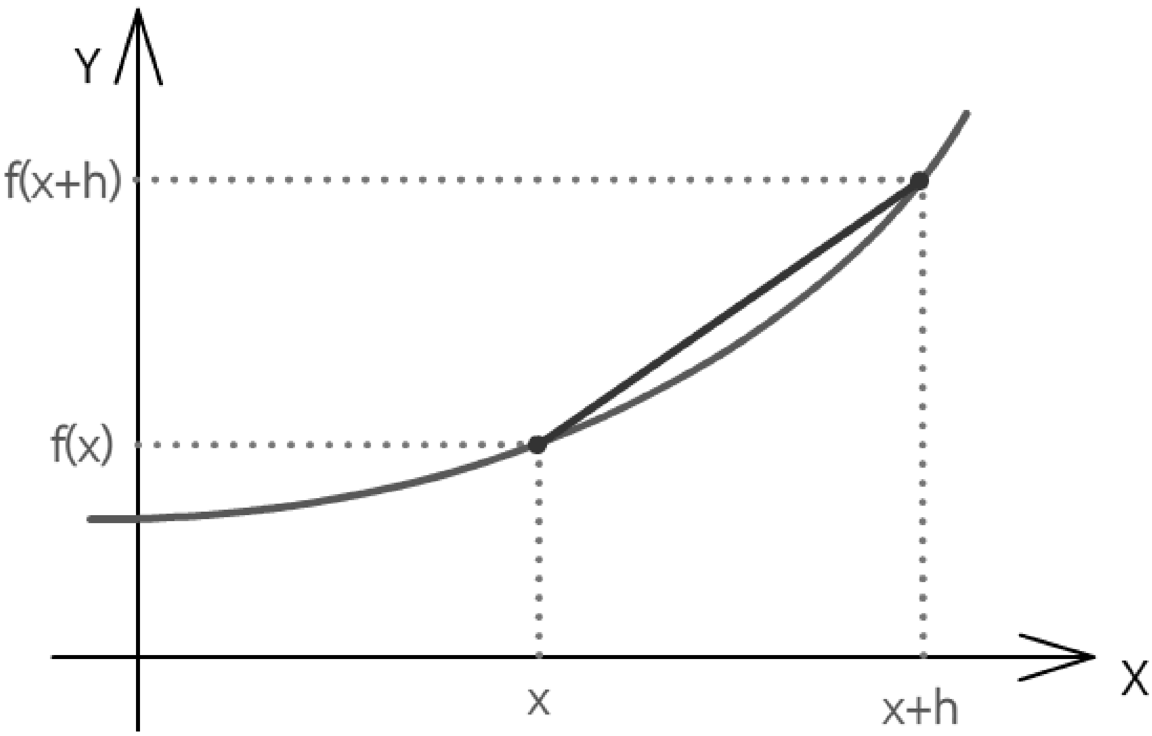
= -4 - 5

= -9

<u>ตอบ</u> -9

<u>อัตราการเปลี่ยนแปลงและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน</u>

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f(x) เทียบ x ในช่วง x+h คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หรือ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$



<u>นิยาม</u> ถ้า y = (x) เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่า x เปลี่ยนเป็น x+h แล้วอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบ x ในช่วง x ถึง x+h

Ex กำหนดให้ f(x) = x^2+1 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วง x = 2 ถึง 4

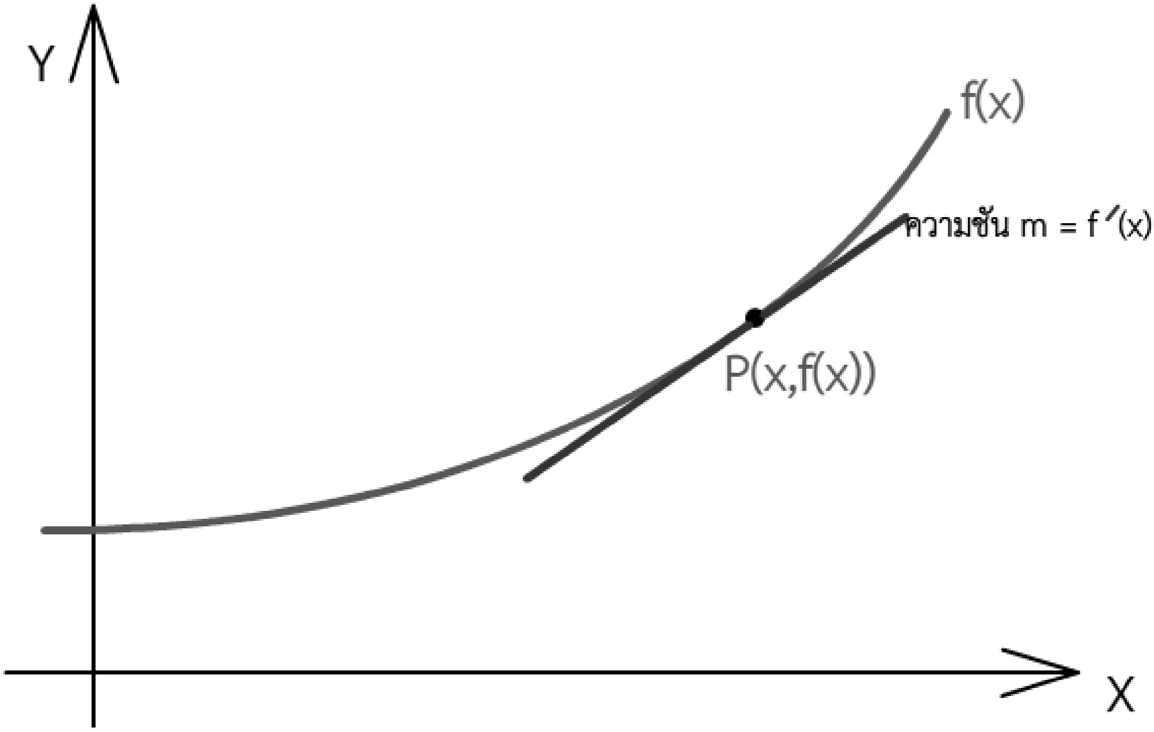
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2}$$

$$= \frac{17-5}{4-2}$$

$$= 6$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (The derivative of a function)

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หรือ f′ (x) นอกจากนี้เรายังสามารถเขียน f′(x) ในรูปของ $\frac{dy}{dx}$ อนุพันธ์ของฟังก์ชันคือความชันเส้นโค้งที่จุด P(x,y) ใดๆ



ข้อควรรู้ ขั้นตอนการหาอนุพันธ์เรียกว่า differentiation (ดิฟเฟอเรนชิเอต)

สูตรอนุพันธ์

1. y = c (ค่าคงที่) จะได้ y′ = 0
2. y = x จะได้ y′ = 1
3. $y = x^n$ จะได้ $y' = n(x)^{n-1}$
4. y = f±g จะได้ y′ = f ′ (x)±g′ (x)
5. y = cf(x) จะได้ y′ = cf ′(x)
6. y = fg(x) จะได้
   y′ =f(x)g ′(x)+g(x) f ′(x)
7. $y = \frac{f}{g}$ จะได้ $y' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. y = (gof)(x) จะได้ y′ = g′(f(x)) × f′(x)

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$

$$f' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= 2x$$

ความชันเส้นโค้ง y = f(x) ที่จุด x_0 คือ $f'(x_0)$

Ex กำหนดให้ y^2+3

จงหาความชันที่จุด x = 1

วิธีทำ $y' = 2y$

∴ ความชันที่จุด x = 1 คือ 2(1) = 2

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.$f(x) = x^3 - 3x + 7$ 2.$f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \log_{\sin 0} \tan 45°$ 3.$f(x) = (2x+3)^5$

วิธีทำ 1. $f(x) = x^3 - 3x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

2. $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \log_{45} \tan 45°$

$f'(x) = 35x^6 + 12x^3$ (เนื่องจาก $\log_{45} \tan 45°$ เป็นค่าคงที่ซึ่งมีอนุพันธ์เป็น 0)

3. $f(x) = (2x+3)^5$

$f'(x) = 5(2x+3)^4(2)$

$= 10(2x+3)^4$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> ให้ $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$, $g(x) = f''(x)$ จงหา (gof)(x) และ (gof)(1)

วิธีทำ จาก $g(x) = f''(x)$ จะได้

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$
$$f''(x) = 6x - 2$$

นั่นคือ $g(x) = f''(x) = 6x - 2$

จาก $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

$$= 6(x^3 - x^2 + 2x - 1) - 2$$
$$= 6x^3 - 6x^2 + 6x - 6 - 2$$
$$= 6x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

ดังนั้น $(g \circ f)(1) = 6(1)^3 - 6(1)^2 + 12(1) - 8$

$= 6 - 6 + 12 - 8$

$= 4$

<u>ระยะทาง ความเร็ว ความเร่ง</u>

สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ $s(t) = f(t)$ t เป็นหน่วยของเวลาส่วนใหญ่จะเป็นวินาที และ $s(t)$ คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ โดยอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเมื่อเวลาผ่านไป t

อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางขณะ t ใด คือ$s'(t)$ ซึ่งคือ ความเร็ว

อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วขณะ t ใด คือ $s''(t)$ ซึ่งคือ ความเร่ง

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> กำหนดให้ $F(x) = f(g(x))$; $g(3) = 5$; $g'(3) = 7$; $f'(3) = -4$; $f'(5) = 9$; $F'(3) = A$; $B = A + (A - 2) + (A - 4) + (A - 6) + \dots + -1$; $C = \log_2 \sin 30° + 4\tan 60° \sin 60°$

จงหา $B - 4AC$

วิธีทำ $F'(x) = f'(g(x))(g'(x))$

$F'(3) = f'(g(3))(g'(3))$

$= (f'(5))(7)$

$= (9)(7)$

$= 63 = A$

พิจารณา B คือ $A + (A - 2) + (A - 4) + (A - 6)$

$= 63 + 61 + 59 + 57 + \dots -1$

จากลำดับด้านบนเป็นลำดับเลขคณิต

พจน์ n มีค่า $-1 = 63 + (n-1)(-2)$

$-64 = (n-1)(-2)$

$33 = n$

ใช้สูตรอนุกรมเลขคณิต

$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$

$S_{33} = \frac{33}{2}(63-1)$

$= 1023$

$B = 1023$

พิจารณา C

$\log_2 \sin 30° + 4\tan 60° \sin 60°$

$= \log_2 2^{-1} + 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

$= -1 + (2)3$

$= 5$

$C = 5$

พิจารณา $B - 4AC$

$= 1023 - (4)(63)(5)$

$= 1023 - 1260$

$= -37$

<u>ตอบ</u> -37

<u>การประยุกต์อนุพันธ์</u>

ฟังก์ชัน เพิ่ม คือฟังก์ชันที่เมื่อ ค่า x เพิ่มขึ้น แล้วทำให้ค่า y เพิ่มขึ้น หาได้จาก เมื่อ $f'(x) > 0$

ฟังก์ชันลด คือ ฟังก์ชันที่เมื่อค่า x เพิ่มขึ้นแล้วทำให้ค่า y ลดลง หาได้จาก เมื่อ $f'(x) < 0$

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

1. การหาอนุพันธ์ระดับหนึ่ง

หาได้ $f'(x) = 0$ แล้วหาค่า x_1 ที่ทำให้ $f'(x_1) = 0$ เมื่อหาเสร็จแล้วให้พิจารณาว่า

$f'(x_1)$ เปลี่ยนเครื่องหมาย จากค่าบวกเป็นค่าลบ แสดงว่า เป็นจุดสูงสุดสัมพันธ์

$f'(x_1)$ เปลี่ยนเครื่องหมาย จากค่าลบเป็นค่าบวก แสดงว่า เป็นจุดต่ำสุดสัมพันธ์

2. การหาอนุพันธ์ระดับ สอง

หาได้จากค่าวิกฤตจากสมการ $f'(x) = 0$ แล้วทดสอบด้วย $f''(x)$ (อนุพันธ์ระดับ 2)

ถ้า $f''(x) > 0$ จะได้ค่าต่ำสุดสัมพันธ์

ถ้า $f''(x) < 0$ จะได้ค่าสูงสุดสัมพันธ์

ถ้า $f''(x) = 0$ ให้กลับไปใช้วิธีที่หนึ่ง เนื่องจาก ไม่สามารถใช้วิธีที่ 2 หาคำตอบได้

<u>วิธีการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์</u>

ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] แล้วสามารถหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ตามขั้นตอนดังนี้

1. หาค่าวิกฤตทั้งหมด จากการหาอนุพันธ์ของ f ในช่วงปิด [a,b]
2. หาค่าของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤตที่ได้
3. หาค่า f(a) และ f(b)
4. เปรียบเทียบค่าที่ได้จากจากข้อ 2 และข้อ 3 ซึ่ง สามารถสรูปได้ว่า

ค่ามากที่สุดจากข้อ 2 และข้อ 3 เป็นสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

ค่าน้อยที่สุดจากข้อ 2 และข้อ 3 เป็นสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f เมื่อ $f(x) = x^3 - 3x+2$ บนช่วงปิด [0,2]

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3-3x+2$

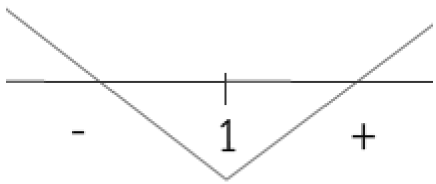
$f'(x) = 3x^2 - 3$

$= 3(x^2 - 1)$

$= 3(x-1)(x+1)$

เพราะฉะนั้นจะได้ค่าวิกฤต 2 ค่า คือ x = 1 และ x = -1 แต่ -1 ใช้ไม่ได้เพราะ - 1ไม่ได้อยู่ในช่วง [0,2]

วาดกราฟ



จุดที่ มีค่าน้อยสุด เกิดที่ x = 1 ดังนั้นf(1) = 13 - 3(1) + 2 จึงได้ f(1) =0

จุดที่ มีค่ามากสุด เกิดที่ x = 2 ดังนั้นf(2) = 23 - 3(2) + 2 จึงได้ f(2) =4

เมื่อพิจารณาจากกราฟ พบว่า f มีค่าสูงสุดที่ x = 2 ซึ่งคือ f(2) =4

F มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ f x =1 ซึ่งคือ f(1) =0

ปฏิยานุพันธ์ (Integration) เป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ แบ่งเป็น

1.ปริพันธ์ไม่จำกัดขอบเขต

2.ปริพันธ์จำกัดเขต

ปริพันธ์ไม่จำกัดขอบเขต

1. $\int kdx$ = kx+c
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$+c
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
4. $\int(f(x) \pm g(x)) = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx$

ข้อควรระวัง $\int(f(x) \times g(x))$ กระจายไม่ได้

ปริพันธ์จำกัดเขต

นิยาม f(x) = f′ (x) **ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง** f บนช่วง x = a ถึง x=b คือ

a คือขอบล่าง b คือขอบบน

การประยุกต์ปริพันธ์กับพื้นที่ใต้โค้ง

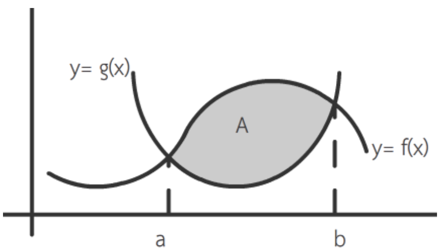
- ถ้ากราฟอยู่เหนือแกน x

พื้นที่ = $\int_a^b f(x)dx$

- ถ้ากราฟอยู่ใต้แกน x

พื้นที่ = $-\int_a^b f(x)dx$

เมื่อกราฟ 2 กราฟซ้อนกัน



ใช้พื้นที่กราฟบน – พื้นที่กราฟล่าง

Ex จงหาค่าของ $\int 8(x)^3 dx$

วิธีทำ $= \frac{8(x)^4}{4} + c$

= $2(x)^4$ + c

Ex $\int_{-2}^{3}(8x^3 + 3x - 1)dx$

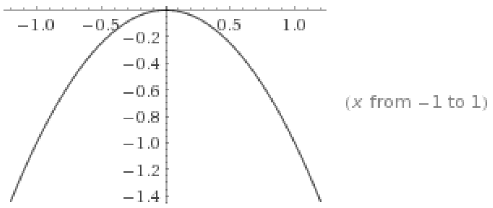
$= 2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - z + c \Big|_{-2}^{3}$

= $[2(3)^4 + \frac{3}{2}(3)^2 - (3) + c] - [2(-2)^4 + \frac{3}{2}(-2)^2 - (-2) + c]$

= 130 + 7.5 - 5

= 132.5

จงหาพื้นที่ใต้กราฟต่อไปนี้ f(x) = $-x^2$ ตั้งแต่ x= 0 ถึง 2



A = $-\int_0^2 f(x)dx$

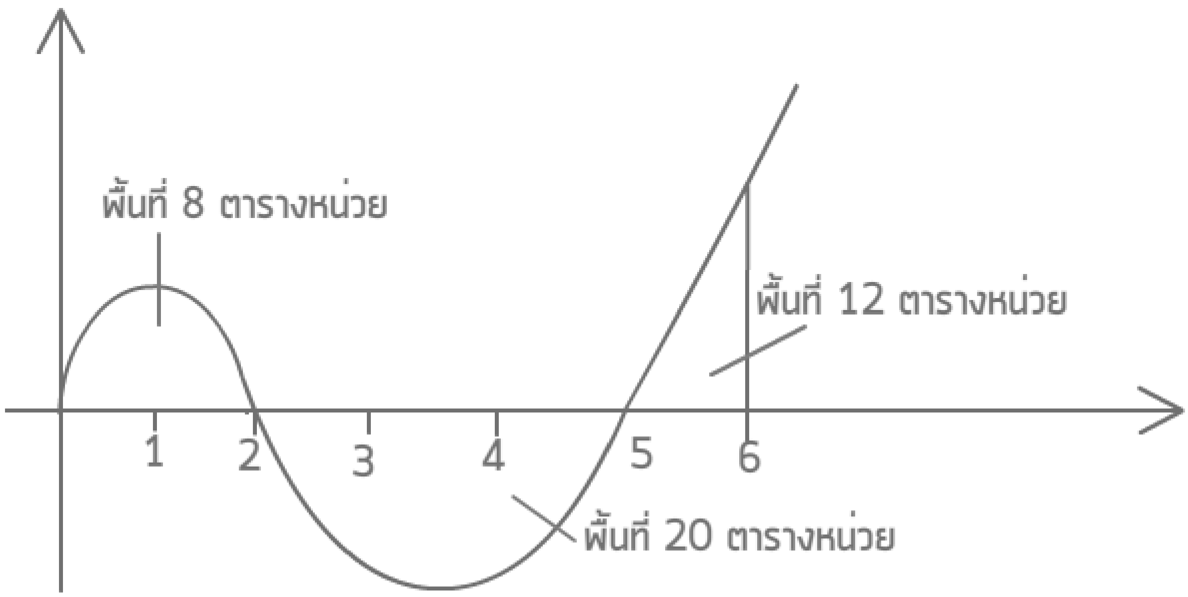
= $-\int_0^2 -x^2 + c\,dx$

= [-4] – [0]

A = -4

ดังนั้น พื้นที่ใต้กราฟ คือ 4

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด F′(x) ดังรูป กำหนดให้ F(0) = 4 F(6) = 4 จงหา F(5)



วิธีทำ $\int_5^6 F'(x)$ = F(6) - F(5)

12 = 4 - F(5)

F(5) = -16

กำหนดการเชิงเส้น (Linear programming)

- สมการเชิงเส้น
- สมการจุดประสงค์
- อสมการข้อจำกัด
- การแก้ปัญหาหาค่ามากสุด ค่าน้อยสุด

กำหนดการเชิงเส้น เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด

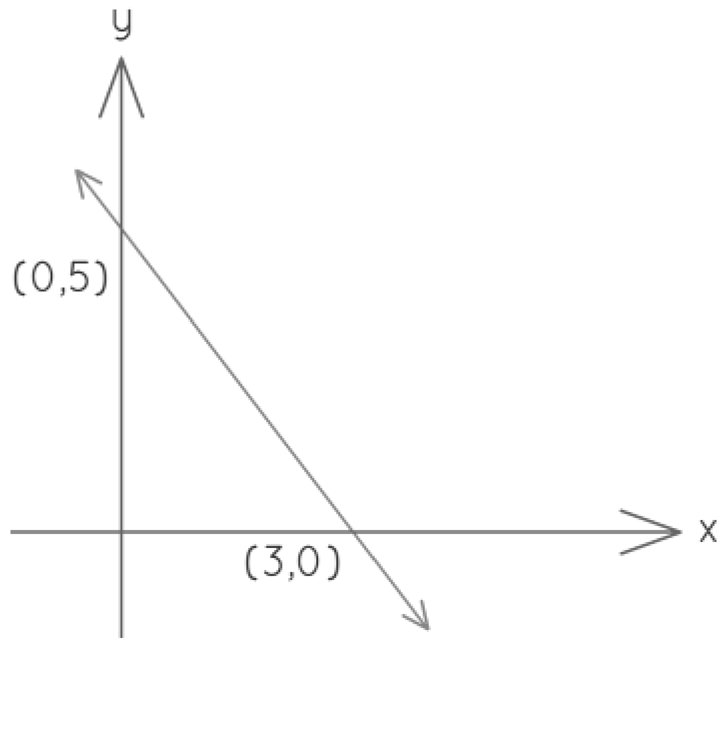
กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming) เป็นคณิตศาสตร์ประยุกต์แขนงหนึ่งที่คิดค้นขึ้น เพื่อแก้ปัญหาให้เป็นไปตามจุดประสงค์ของมนุษย์ โดยมีแนวคิดที่ว่า ให้เกิดประโยชน์อย่างสูงสุดในทรัพยากรที่มีจำกัด สามารถใช้คำนวณเพื่อแก้ปัญหาได้หลายอย่าง เช่น คำนวณการผลิตสินค้าให้ได้มากที่สุด แต่เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด,หาวิธีการเคลื่อนย้ายทหารให้มากที่สุดโดยที่เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด, ผลิตสินค้าจำนวนน้อยที่สุด แต่ทำกำไรได้มากที่สุด เป็นต้น

สมการเชิงเส้น (Linear equation)

รูปแบบสมการทั่วไป ax+ by = c ; a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เมื่อนำมาเขียนกราฟ จะได้รูปเส้นตรงซึ่งมีความชัน - $\frac{b}{a}$ และมีระยะตัดแกน x เป็น $\frac{c}{a}$

ตัวอย่างที่ 1 จงวาดกราฟของสมการต่อไปนี้ $5x + 3y = 15$



เมื่อเราวาดกราฟเราจะได้ กราฟตัดแกน x ที่ (3,0) ตัดแกน y ที่ (0,5) และพบว่าสมการนี้มีความชันเป็น - $\frac{5}{3}$

กำหนดการเชิงเส้น จะอยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของสมการเชิงเส้นและอสมการเชิงเส้น แล้วหาค่าสูงสุด ต่ำสุดของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ (และอสมการ) ที่กำหนด ตัวแบบคณิตศาสตร์ประกอบด้วย

สมการจุดประสงค์ เป็นสมการที่สร้างให้ตรงกับจุดประสงค์ที่ต้องการ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย โดยจะตั้งสมการขึ้นเพื่อหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุด ขึ้นอยู่กับตัวแปร เขียนอยู่ในรูป

$P = ax + by$ (ค่าสูงสุด)

$C = ax + by$ (ค่าน้อยสุด)

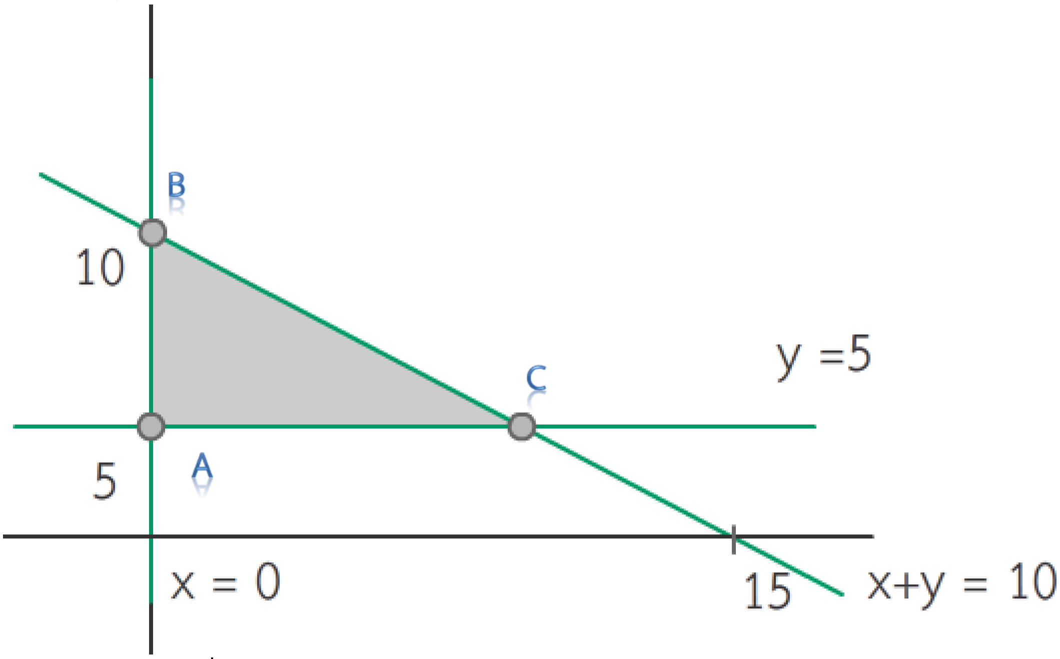
เช่น $P = 5x + 12y$

เงื่อนไขจำกัด (เงื่อนไขบังคับ) ได้แก่อสมการ หรือสมการที่เป็นเงื่อนไขที่กำหนดให้ เป็นเงื่อนไขที่ถูกจำกัดของทรัพยากร หรือตัวแปร เช่น $2x + y < 100$ และ $x > 0$

หลักการแก้ปัญหา

1. ให้นำอสมการข้อจำกัดไปวาดกราฟ
2. ค่าสูงสุด และต่ำสุดของ P จะอยู่ที่จุดมุมของพื้นที่ปิดของกราฟ
3. ในกรณีพื้นที่เปิดอาจจะมีค่าสูงสุด,ต่ำสุด หรือไม่ก็ได้

Ex กำหนดสมการจุดประสงค์คือ $P = 3x - 2y$ และสมการข้อจำกัดคือ $y \geq 5, x \geq 0, x+y \leq 10$ จงหาค่าสูงสุดของ P



วิธีทำ จุด A อยู่ที่ (0,5) เกิดจาก คือ $y \geq 5, x \geq 0$

จุด B อยู่ที่จุด (0,10) เกิดจาก $x = 0$ ตัดกับ $x+y=10$

$0 + y = 10$

$y = 10$ เมื่อ $y = 10$ $x = 0$

จุด C อยู่ที่ (5,5) เกิดจาก $y = 5$ ตัดกับ $x+y=10$

$x + 5 = 10$

$x = 5$ เมื่อ $x = 5$ แล้ว $y = 5$

วิธีทำที่ 1 แทนค่าลงไปในแต่ละจุด

จุดมุม	$P = 3x - 2y$
A(0,5)	$3(0) - 2(5) = -10$
B(0,10)	$3(0) - 2(10) = -20$
C(5,5)	$3(5) - 2(5) = 5$

$\therefore$ P สูงสุดเมื่อ $x = 5$ $y = 5$ โดยที่ $P = 5$

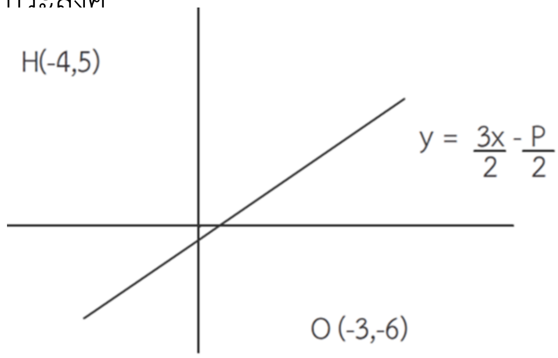
วิธีทำที่ 2 จัดรูปหาความชัน

ขั้นที่ 1 จัดรูปเพื่อให้สามารถหาความชันได้ในสมการจุดประสงค์

$P = 3x - 2y$

$2y = 3x - P$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{P}{2}$



ขั้นที่ 2 กำหนดจุด 2 จุดโดยที่จุดแรก

อยู่เหนือกราฟบริเวณใดก็ได้ จุดที่ 2อยู่ใต้กราฟบริเวณใดก็ได้

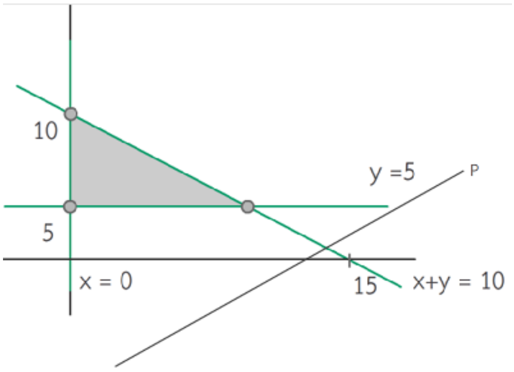
กำหนดจุด H (-4,5) แทนลงในสมการจุดประสงค์จะได้ว่า

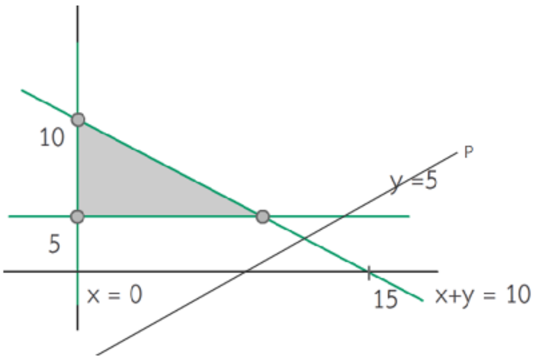
$P = 3(-4) - 2(5) = -22$

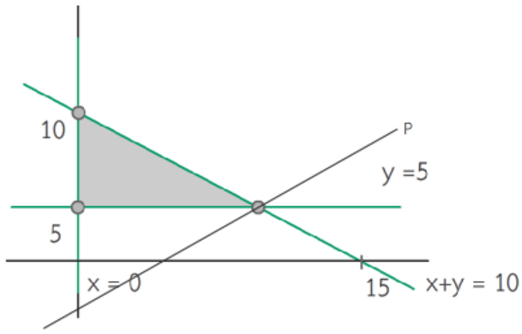
กำหนดจุด O (-3,-6) แทนลงในสมการจุดประสงค์จะได้ว่า

$P = 3(-3) - 2(-6) = 3$

จากตรวจสอบพบว่าเมื่อจุดใดๆที่อยู่ใต้กราฟจุดประสงค์จะมีค่ามาก







ขั้นตอนที่ 3 ให้เลื่อนกราฟเพื่อหาคำตำแหน่งที่ต้องการ

จากสมการจุดประสงค์ให้เลื่อนกราฟจากบริเวณมากไปน้อยดังรูปข้างต้นเมื่อสมการจุดประสงค์จะตัดที่จุด C เป็นจุดแรก แสดงว่าจุด C มีค่าวสูงสุด

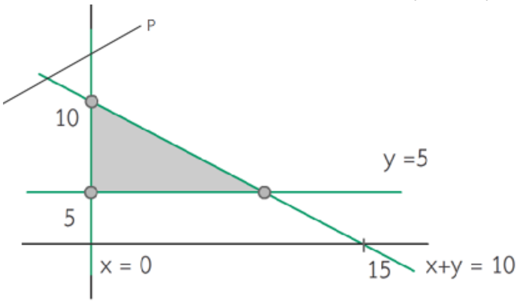
ข้อควรระวังเมื่อใช้วิธีทำที่ 2 จัดรูปหาความชัน

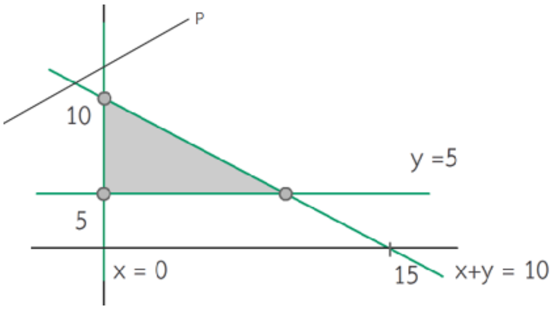
รูปแบบการเลื่อนเพื่อหาตำแหน่งในโจทย์แต่ละข้อจะได้วิธีทำที่ไม่เหมือนกัน

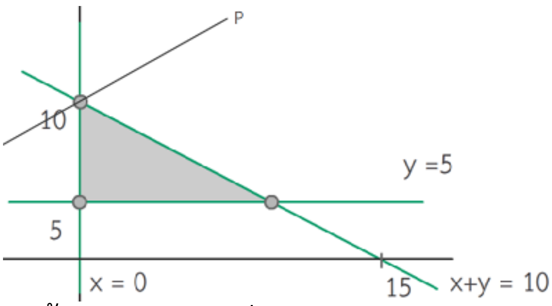
Ex กำหนดสมการจุดประสงค์คือ $P = 3x - 2y$ และสมการข้อจำกัดคือ $y \geq 5$, $x \geq 0$, $x+y \leq 10$ จงหาต่ำของ P

วิธีจากโจทย์เราไม่สามารถใช้วิธีการเลื่อนแบบเดิมได้เพราะการเลื่อนตำแหน่ง
จากตำแหน่งมากมาน้อย เพื่อหาจุดสูงสุด เมื่อสมการจุดประสงค์ตัดที่จุดแรกใดในพื้นที่

ให้โจทย์ข้อนี้
จากตำแหน่งน้อยมามาย เพื่อหาจุดต่ำสุด เมื่อสมการจุดประสงค์ตัดที่จุดแรกใดในพื้นที่







ดังนั้นจุด B จึงมีค่าต่ำสุด

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนด $P = ax + 2y$ และมีเงื่อนไขดังนี้

$2x + y \geq 50$

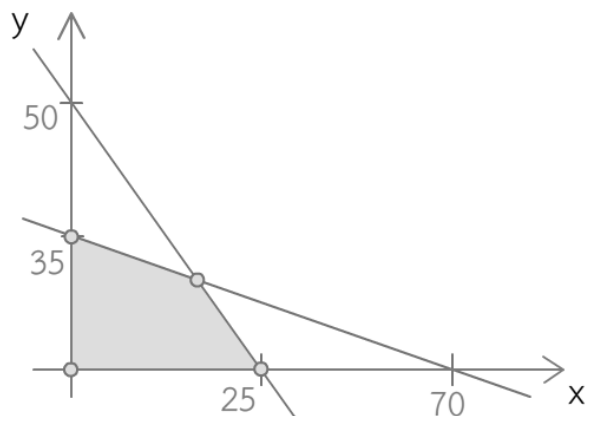
$x+2 \geq 70$

$x \geq 0$, $y \geq 0$

ถ้าค่าสูงสุดของ P เท่ากับ 100 แล้วค่า a เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้ (Ent 44 มีนาฯ)

1.1 2.2 3.4 4.6

วิธีทำ ขั้นแรกให้วาดกราฟ



จุดที่กราฟทั้ง 2 กราฟตัดกันคือ

$2x+y=50$ ----- (1)

$x+2y=70$ ----- (2)

(1)×2 $4x+2y=100$ -- (3)

(3) – (2) $3x = 30$

$x = 10$

$y = 3$

เนื่องจาก สมการจุดประสงค์เราไม่สามารถหาความชันได้เนื่องจากติดค่า a

(x,y)	P = ax + 2y	P
(0,0)	a(0)+2(0)	0
(0,35)	a(0)+2(35)	70
(25,0)	a(25)+2(0)	25a
(10,30)	a(10)+2(30)	10a+60

ดังนั้นค่า P สูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุด (10,30)

$P = 10a + 60$

$100 = 10a + 60$

$40 = 10a$

$a = 4$

<u>ดังนั้น</u> ตอบข้อ 2

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์และอสมการข้อจำกัดดังนี้

$C = 40x + 32y$

$6x + 2y \geq 12$

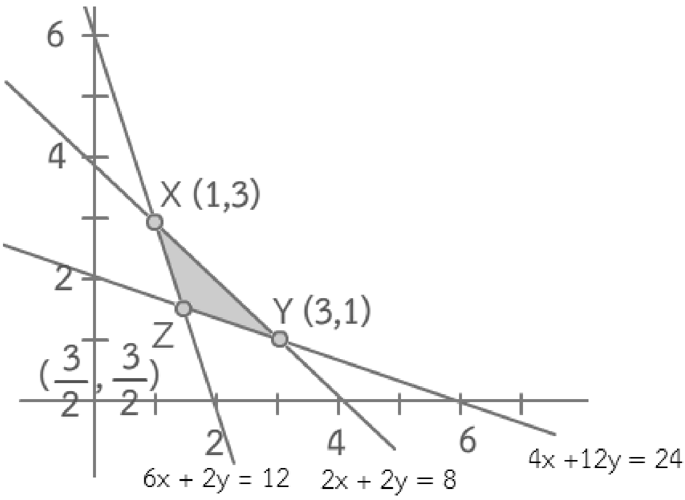
$2x + 2y \leq 8$

$4x + 12y \geq 24$

ค่าต่ำสุดของ C เท่ากับเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (Ent)

1. 108 2.112 3.136 4.152

วิธีทำ (ใช้วิธีตรวจสอบด้วยความชัน) ขั้นแรกให้วาดกราฟ



$6x + 2y = 12$ ตัดแกนที่ (0,6) (2,0)

$2x + 2y = 8$ ตัดแกนที่ (0,4) (4,0)

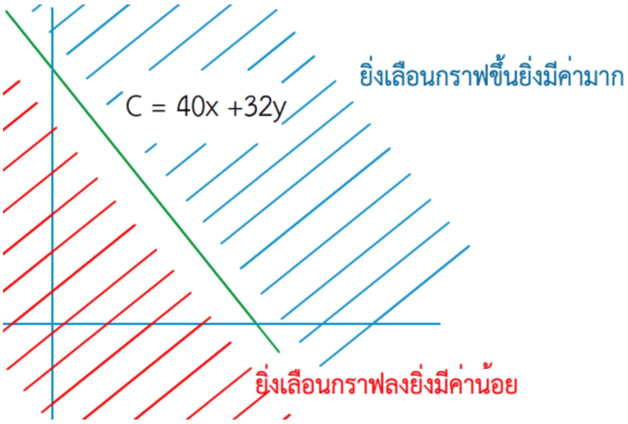
$4x + 12y = 24$ ตัดแกนที่ (0,2) (6,0)

หาจุด X	หาจุด Y	หาจุด Z
เกิดจาก $6x+2y = 12$ --- (1) ตัดกับ $2x+2y = 8$ --- (2) (1) - (2) $4x = 4$ $x = 1$ แทน x ใน (2) $2(1)+2y = 8$ $2y = 6$ $y = 3$ จุดตัด (1,3)	เกิดจาก $2x+2y = 8$ --- (1) ตัดกับ $4x+12y = 24$ --- (2) (2) – 2(1) $8y = 8$ $y = 1$ แทน y ใน (1) $2x+2(1)=8$ $2x = 6$ $x = 3$ จุดตัด (3,1)	เกิดจาก $6x+2y = 12$ --- (1) ตัดกับ $4x+12y = 24$ --- (2) (2) – 6(1) $-32x = -48$ $x = \frac{48}{32}$ หรือ $x = \frac{3}{2}$ แทน x ใน (1) $6(\frac{3}{2})+2y = 12$ $9 + 2y = 12$ $y = \frac{3}{2}$ จุดตัด $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

ตรวจสอบด้วยความชัน จัดรูป $C = 40x + 32y$ ให้อยู่ในรูปของสมการความชัน

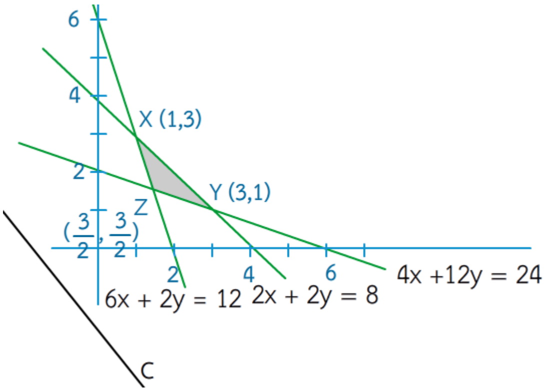
$y = -\frac{40}{32}x + \frac{1}{32}C$ ความชัน $m = -\frac{40}{32}$ หรือ $-\frac{5}{4}$

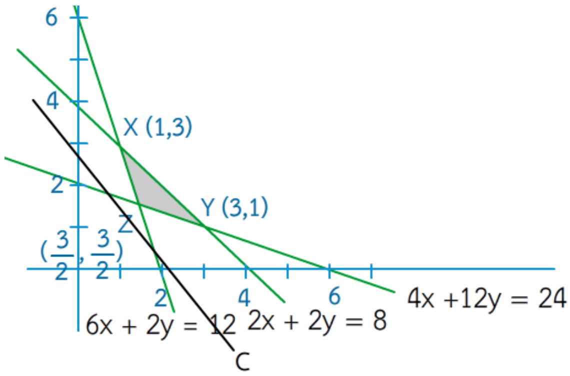
<u>ตรวจสอบกราฟ </u>สมการจุดประสงค์

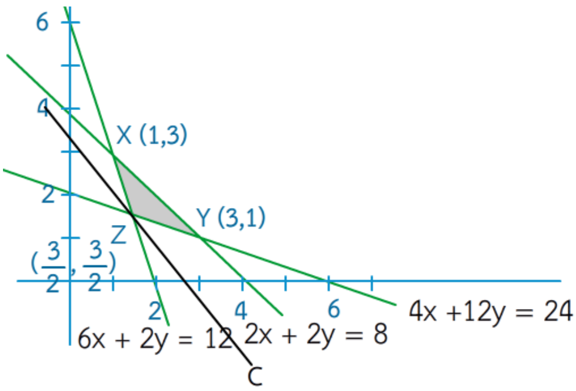


ดังนั้นเพื่อให้ได้ค่าน้อยที่สุด ต้องเลื่อนกราฟจากด้านล่างเมื่อกราฟสมการตัดประสงค์ตัดจุดใดเป็นจุดแรกแสดงว่าจุดนั้นเป็นค่าน้อยสุด

เลื่อนกราฟสมการจุดประสงค์







จากการตรวจสอบด้วยความชันพบว่าสมการจุดประสงค์ที่จุด Z เป็นจุดแรกดังนั้นจุด Z จึงมีค่าน้อยสุด

นำพิกัดของ Z มาแทนลงในสมการจุดประสงค์จะได้คำตอบ

$$C = 40\left(\frac{3}{2}\right) + 32\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 108$$

<u>ดังนั้น</u> ตอบ ข้อ 1

ขอบคุณที่ติดตาม

ข้าพเจ้า ในนามผู้เขียน ขอพระคุณทุกท่านในการติดตามเนื้อหาของหนังสือเล่มนี้จนจบเล่ม ข้าพเจ้าหวังว่าหนังสือสรุปแก่นคณิตศาสตร์ ม.ปลาย จะเป็นประโยชน์ต่อทุกท่าน ไม่มากก็น้อย หากหนังสือเล่มนี้มีข้อผิดพลาดประการใดต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย ทางผู้เขียนจะรีบปรับปรุงแก้ไขให้ถูกต้องโดยเร็วที่สุด ท่านสามารถแจ้งข้อผิดพลาดได้ที่ webinfo@karmins.com

ผลงานเขียนสรุปแก่นคณิตศาสตร์ ม.ปลาย (MATH KIT EBOOK) เป็นหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ที่ทำขึ้นโดยวัตถุประสงค์เพื่อยกระดับความรู้ ความสามารถ ของผู้ที่มีความสนใจ ซึ่งทางผู้เขียนแจกฟรีในทุกช่องทาง และจะพัฒนาต่อไปให้ดียิ่งขึ้น

แต่อย่างไรก็ตามกระบวนการพัฒนาหนังสือต้องใช้เวลาและค่าใช้จ่ายในการพัฒนา MATH KIT EBOOK เพื่อให้หนังสือเล่มนี้ได้มีการพัฒนาปรับปรุงให้สอดคล้องกับหลักสูตรต่อไป ท่านผู้อ่าน หากท่านเห็นว่าหนังสือเล่มนี้เป็นประโยชน์ก็สามารถบริจาคเงินในการสนับสนุนการพัฒนาหนังสือเล่มนี้ต่อไป ท่านสามารถให้ความสนับสนุนได้ โดยอุทิศเงินเพียงเล็กน้อย ตามความประสงค์

บัญชีออมทรัพย์ ธนาคารกสิกรไทย
เลขที่บัญชี 081-2-76272-9
ชื่อบัญชี คณิน อังศุนิตย์

ท่านที่แจ้งรหัสการนำฝากหรือโอนมายังอีเมล์ webinfo@karmins.com ในนามของผู้เขียน เงินสนับสนุนของท่านที่ท่านเสียสละในการพัฒนาหนังสือสื่อเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อสังคม สืบต่อไป

คำขอบคุณ

ขอขอบพระคุณ

อาจารย์ยุทธนา เฉลิมเกียรติสกุล

อาจารย์สุวรีย์ เมธาวีวินิจ