אשנב למתמטיקה - ממ"ן 12

איליי גולן

אפריל 2020

שאלה 1

$$A = \{\emptyset, 1\}, \quad B = \{\{\emptyset, 1\}, \{1\}\}$$

א

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, 1\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{\{\emptyset, 1\}\}, \{\{1\}\}, \{\{\emptyset, 1\}, \{1\}\}\}$$

ב

$$P(A) \cap A = \{\emptyset\}$$

$$P(A) \cap B = \{\{\emptyset, 1\}, \{1\}\}$$

ג

$$B \setminus (A \cup P(A)) = \emptyset$$

$$P(B \setminus \{A\}) = \{\emptyset, \{\{1\}\}\}$$

שאלה 2

א

על מנת להראות כי

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

נראה כי

$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subseteq A \setminus (B \setminus C)$$

ונראה כי

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

לפי הגדרת האיחוד נוכל להראות כי $A \cap C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$ וכי $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

נגדיר כי x איבר כללי בקבוצה $A \cap C$ לכן, $x \notin (B \setminus C)$ שכן, לפי הגדרת החיתוך $x \in C$. לפי הגדרת החיתוך $x \in A$ לכן, לפי הגדרת ההפרש $x \in A \setminus (B \setminus C)$ שכן, ($x \in A,\, x \notin B \setminus C$) ולכן, $A \cap C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

נגדיר כי x איבר כללי ב$A \setminus B$, לפי הגדרת ההפרש $x \in A$, $x \notin B$ לכן, לפי הגדרת ההפרש $x \notin (B \setminus C)$ לפיכך, $x \in A \setminus (B \setminus C)$ שכן, $x \in A,\, x \notin (B \setminus C)$. ולכן, $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \setminus C)$.

לפיכך,

$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subseteq A \setminus (B \setminus C)$$

נגדיר איבר כללי x בקבוצה $A \setminus (B \setminus C)$ כלומר, $x \in A$, $X \notin (B \setminus C)$. נניח בשלילה כי $x \notin (A \cap C) \cup (A \setminus B)$ כלומר, לפי הגדרת החיתוך $x \notin C$ ולפי הגדרת ההפרש $x \in B$. לכן, לפי הגדרת ההפרש $x \in (B \setminus C)$ והגענו בסתירה לטענה כי $x \notin (B \setminus C)$ ולכן, $x \in (A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.

לפיכך,

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

לפיכך,

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

שכן קיימת הכלה דו כיוונית בין הקבוצות.

במידה ואחת הקבוצות שווה לקבוצה הריקה היא מוכלת בקבוצה השנייה שכן הקבוצה הריקה חלקית לכל קבוצה

ב

נראה כי מן הטענה $A \cap B \subseteq (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ נובע $A \subseteq B$, על מנת להראות זאת נראה כי לכל $x \in A$ קיים $x \in B$. נניח בשלילה כי קיים $x \in A$ כך ש $x \notin B$.

אחת משתי האפשרויות הבאות חייבת להתקיים:

$$1.x \in C \quad 2.x \notin C$$

נבחן כל אחת מן האפשרויות.

כש$x \in C$, כמובן ש$x \in (C \setminus B)$ (שכן, $x \in C$, $x \notin B$). לפי הגדרת האיחוד $(C \setminus B) \subseteq (A \cap B)$ לכן, $x \in A \cap B$ ולכן, לפי הגדרת החיתוך $x \in A, x \in B$ וזה בסתירה להנחה ש$x \notin B$.

כש$x \notin C$, כמובן ש$x \in (A \setminus C)$ (שכן, $x \in A$, $x \notin C$). לפי הגדרת האיחוד $(A \setminus C) \subseteq (A \cap B)$ לכן, $x \in A \cap B$ ולכן, לפי הגדרת החיתוך $x \in A$, $x \in B$ וזה בסתירה להנחה ש$x \notin B$.

לסיכום, ההנחה כי קיים איבר $x \in A$ כך ש$x \notin B$ הייתה שגויה, ולכן, $A \subseteq B$.

ג

על מנת להראות כי מן הטענה $P(A) \subseteq P(A \setminus B)$ נובע $A \cap B = \emptyset$, נניח בשלילה כי קיים $x \in A$ כך ש$x \in B$, לפי הגדרת ההפרש $x \notin A \setminus B$ (שכן,$x \in A$, $x \in B$). לפי ההנחה $x \in A$, ולכן, $\{x\} \in P(A)$ ו$\{x\} \notin P(A \setminus B)$ וכן הגענו לסתירה שכן $P(A) \subseteq P(A \setminus B)$.

לסיכום ההנחה כי קיים $x \in A$ כך ש$x \in B$ הייתה שגויה, ולכן, $A \cap B = \emptyset$.

ד

נראה כי אם $\{A\} \subseteq P(B)$ אז $P(A) \subseteq P(B)$. $\{A\} \subseteq P(B)$ לכן, $A \in P\{B\}$, לפי הגדרת $P(B)$ מכילה את כל הקבוצות החלקיות לB לכן, $A \subseteq B$, נניח כי קיים $X \in P(A)$ לכן, $X \subseteq A$ לכן, $X \subseteq B$ לפיכך, $X \in P(B)$ ולכן, $P(A) \subseteq P(B)$.

שאלה 3

א

הפעולה Δ מקיימת את תכונת הסגירות שכן, לכל $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים כי התוצאה שווה $a\in\mathbb{Z}$ או $b\in\mathbb{Z}$.
לכן הפעולה Δ מקיימת את תכונת הסגירות על הקבוצה $\mathbb{Z}$.

לכל $a,b,c\in\mathbb{Z}$ מתקיים:

כש$0\le a$

$$(a\Delta b)\Delta c = a\Delta c = a$$

$$a\Delta(b\Delta c) = a$$

כש$a<0$

$$(a\Delta b)\Delta c = b\Delta c$$

$$a\Delta(b\Delta c) = b\Delta c$$

לכן הפעולה Δ מקיימת את תכונת הקיבוציות על הקבוצה $\mathbb{Z}$.

נפריך את החילופיות של הפעולה Δ על הקבוצה $\mathbb{Z}$, באמצעות דוגמה נגדית.
$-10,-5\in\mathbb{Z}$ לכן, $-5\Delta-10=-10$ ו $-10\Delta-5=-5$ וכמובן ש$-10\neq-5$ לפיכך, לא קיימת חילופיות של הפעולה Δ על הקבוצה $\mathbb{Z}$.

נניח כי $e\in\mathbb{Z}$ הוא האיבר הניטלי בקבוצה $\mathbb{Z}$ ביחס לפעולה Δ. נבדוק כש$a\ge 0$ חייב להתקיים:

$$e\Delta 1 = 1$$

לפי הגדרת הפעולה Δ,

$$e\Delta 1 = e$$

כעת נפסול את 1 כאיבר ניטרלי $e=1$ לכן, לפי הגדרת הפעולה Δ:

$$1\Delta 2 = 1$$

ולפי הגדרת האיבר הניטרלי:

$$1\Delta 2 = 2$$

וזה בסתירה להגדרת הפעולה הבינארית, שכן, $2\neq 1$.

לכן לא קיים איבר ניטרלי בקבוצה $\mathbb{Z}$ לגבי הפעולה Δ.

ב

לכל $X,Y \in P(A)$ מתקיים:

יהי $x \in X \cap Y$ לכן, לפי הגדרת החיתוך $x \in X$. לפי הגדרת $P(A)$, $X \subseteq A$ לכן, $x \in A$ לפיכך, $X \cap Y \subseteq A$ ולפי הגדרת $P(A)$, $X \cap Y \in P(A)$ לפיכך, $X * Y \in P(A)$.

ולכן, הפעולה $*$ מקיימת את תכונת הסגירות על הקבוצה $P(A)$.

יהיו $X,Z,Y \in P(A)$ לפי הגדרת הפעולה $*$,

$$(X * Y) * Z = X \cap Y * Z = X \cap Y \cap Z$$

$$X * (Y * Z) = X \cap Y * Z = X \cap Y \cap Z$$

ולכן, הפעולה $*$ מקיימת את תכונת הקיבוציות על הקבוצה $P(A)$.

על פי הגדרת פעולה $*$ לכל $X,Y,Z \in P(A)$ מתקיים:

$$X * Y = X \cap Y$$

$$Y * X = Y \cap X$$

$$X \cap Y = Y \cap X = \{n | n \in X \wedge n \in Y\}$$

ולכן, הפעולה $*$ מקיימת את תכונת החילופיות על הקבוצה $P(A)$.

$A \subseteq A$ לכן, לפי הגדרת $P(A)$, $A \in P(A)$. לפי הגדרת $P(A)$ לכל $X \in P(A)$ תמיד מתקיים $X \subseteq A$ לכן, לפי הגדרת החיתוך תמיד מתקיים:

$$X * A = X \cap A = X$$

$$A * X = A \cap X = X$$

ולכן, קיים איבר ניטרלי ביחס לפעולה $*$ על הקבוצה $P(A)$.

לפי הגדרתה של $P(A)$, $P(A)$ מכילה את כל הקבוצות החלקיות לA לכן, $\emptyset \in P(A)$ כלומר, נניח בשלילה כי קיים $X \in P(A)$ כך ש:

$$X * \emptyset = A$$

כלומר,

$$X \cap \emptyset = A$$

על פי הגדרת הקבוצה הריקה כמובן מתקיים,

$X \cap \emptyset = \emptyset$

והגענו למסקנה כי $A = \emptyset$ וזה בסתירה לנתון כי $A \neq \emptyset$.

ולכן, לא עבור כל $X \in P(A)$ קיים איבר נגדי.