אשנב למתמטיקה - ממ"ן 11

איליי גולן

מרץ 2020

שאלה 1

$$A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ...\} = \{\frac{1}{2^n} | n \in \mathbb{N}\}$$

א

על מנת להוכיח שקבוצה A היא קבוצה אינסופית נראה כי קיימת קבוצה שחלקית ממש לה ושקולה לה.

נגדיר קבוצה B שתקיים את התנאים.

$$B = \{\frac{1}{2^x} | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

קבוצה $B \subset A$ שכן, כל איבר $x \in B$ איבר גם בA אבל לא כל איבר $x \in A$ איבר גם בB.

כעת נראה התאמה חד חד ערכית בין איברי קבוצה A לאיברי קבוצה B.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^1}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^n} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^4}, & \frac{1}{2^6}, & \frac{1}{2^{2n}} \end{array}$$

כלל ההתאמה: לכל איבר $\frac{1}{2^{2n}} \in B$ נתאים את איבר $\frac{1}{2^n} \in A$.

ב

על מנת להראות כי הקבוצה A והקבוצה $\mathbb{N}$ שקולות נראה כי קיימת התאמה חד חד ערכית ביניהן.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^1}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^n} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & n \end{array}$$

כלל ההתאמה: לכל $n \in \mathbb{N}$ נתאים $A \ni \frac{1}{2^n}$.

ג

טענה זו אינה נכונה על מנת להראות זאת נראה התאמה שהיא לא חד חד ערכית בין איברי $\mathbb{N}$ לאיברי A.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^1}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^n} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{array}$$

כלל ההתאמה: לכל $A \ni \frac{1}{2^n}$ נתאים את איבר $\mathbb{N} \ni 1$.

ד

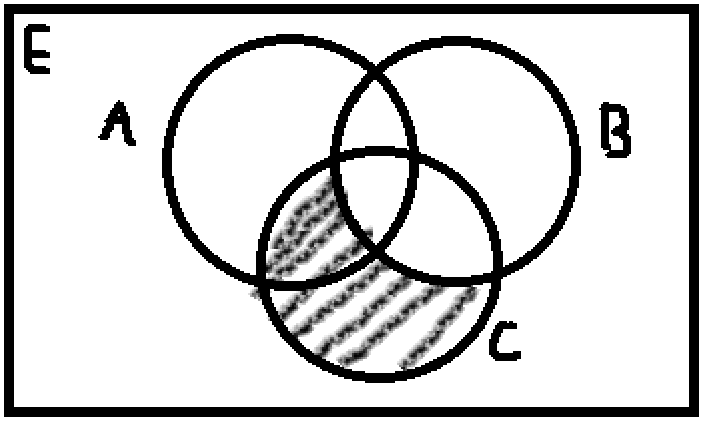
טענה זו נכונה ונראה התאמה חד חד ערכית המתאימה את $N \ni 1$ ל $A \ni \frac{1}{4}$.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^1}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^n} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2, & 1, & 3, & n \end{array}$$

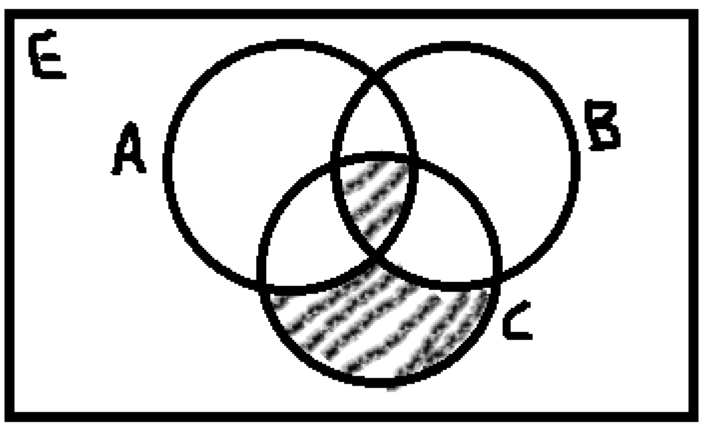
כלל ההתאמה: ל$\mathbb{N} \ni 1$ נתאים את $A \ni \frac{1}{2^2}$, ל$\mathbb{N} \ni 2$ נתאים את $A \ni \frac{1}{2^1}$. ולאחר מכן לכל $n \geq 3$ $\mathbb{N} \ni n$ נתאים את ל$\frac{1}{2^n}$.

שאלה 2

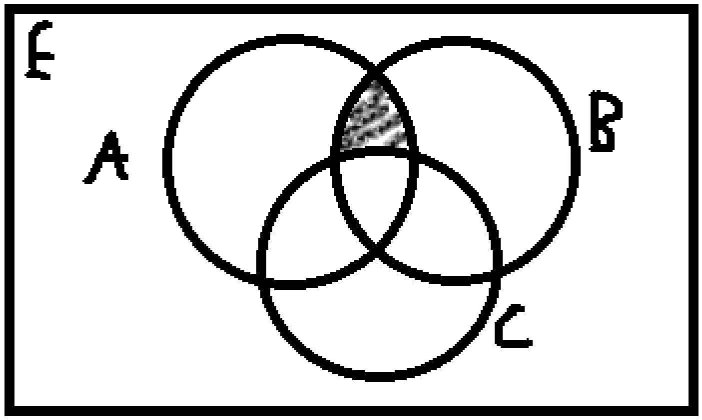
א



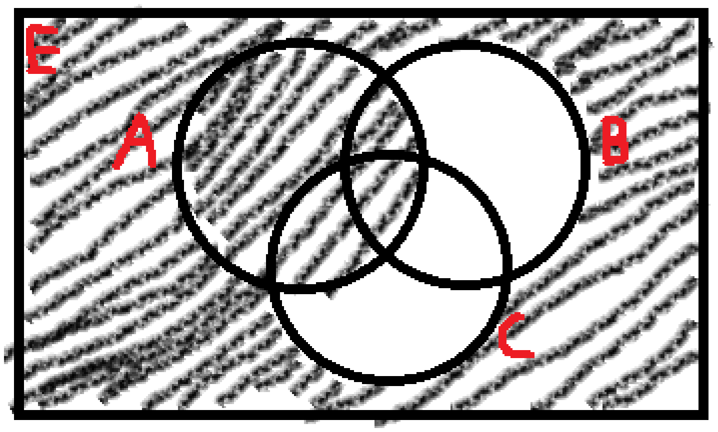
ב



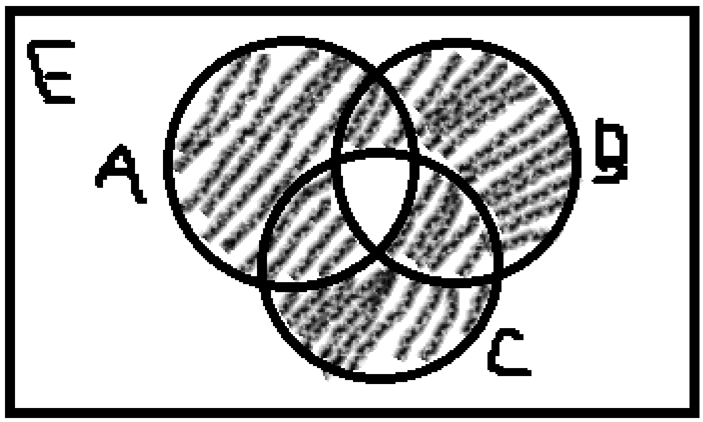
ג.



ד.



ה



שאלה 3

א

על מנת להראות כי $B \subseteq A$. נראה כי לכל $y \in B$ גם $y \in A$. מההגדרה של קבוצה B נתון $x \in A$, כך ש$y = 2x$. נתון לנו כי $2x \in A$ לכן $y \in A$. מכך נובע ש$B \subseteq A$.
על מנת להראות כי B שקולה לA. נראה כי קיימת התאמה חד חד ערכית בין איברי קבוצה A לאיברי קבוצה B.

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & x \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2, & 4, & 2x \end{array}$$

כלל ההתאמה: לכל איבר $x \in A$ נתאים את איבר $2x \in B$.

ב

בסעיף א הראינו כי קבוצה B חלקית לקבוצה A ושקולה לה, על מנת להראות כי קבוצה A היא קבוצה אינסופית נראה כי קבוצה B חלקית לה ממש.
על מנת להראות זאת נראה כי $1 \notin B$. נתון לנו בשאלה כי A חלקית לקבוצה המספרים הטבעיים, בנוסף לזה אומרים לנו כי $1 \in A$ לכן, 1 הוא האיבר הכי קטן בקבוצה A.
לפיכך לא קיים x טבעי בקבוצה A כך ש$2x = 1$, ולכן $B \subset A$, A קבוצה אינסופית.

ג

נראה קבוצה המקיימת את תנאי השאלה.

$$A = \{\text{קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים והמספר } \mathbf{1}\} = \{1, 2, 4, 6, ...\}$$

קבוצה זו מקיימת את תנאי השאלה שכן קבוצה זו היא $\{1\} \cup \{2x | x \in \mathbb{N}\}$, מההגדרה של איחוד אנו יודעים כי 1 שייך לקבוצה הזאת, ולכל איבר x בקבוצה גם האיבר $2x$ נמצא בה.
הקבוצה חלקית לקבוצה $\mathbb{N}$ שכן $1 \in A$ ולכל איבר $x \in A$ קיים איבר $x \in \mathbb{N}$.

שאלה 4

א

טענה זו נכונה, על מנת להוכיח זאת נראה כי כש$A \cup B \neq B$ מתקיים $A \cap B \subset A$.
$A \cup B \neq B$ כלומר קיים $x \in A \cup B$ כך ש $x \notin B$ לכן לפי הגדרת האיחוד $x \in A$.
לפי הגדרת החיתוך $x \notin A \cap B$ שכן, $x \in A$ אבל $x \notin B$, לפי הגדרת החיתוך $A \cap B \subseteq A$ לפיכך, מתקיים $A \cap B \subset A$. נתון לנו כי $A \cap B$ שקולה לקבוצה A, לכן לפי הגדרת האינסופיות A קבוצה אינסופית שכן קיימת קבוצה שחלקית לA ושקולה לA.

ב

טענה זו אינה נכונה, נפריך אותה באמצעות דוגמה נגדית:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

נראה כי הקבוצות מקיימות את תנאי השאלה, $A \cup B \neq A$ שכן, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. בנוסף לכך $A \cap B$ שקולה לA שכן $A \cap B = A = \{1, 2, 3, 4\}$ (קבוצות שוות הן שקולות). ניתן לראות כי הקבוצות אכן מקיימות את תנאי השאלה וקבוצה B היא קבוצה סופית.

ג

טענה זו נכונה, נראה זאת בדרך השלילה. לפי הגדרת החיתוך $A \cap B \subseteq A$ בהנחה ש $A \cap B \neq A$ (כלומר קיים $x \in A$ כך ש$x \notin A \cap B$), אנו מקבלים לפי הגדרת החלקיות ממש ש$A \cap B$ חלקית ממש לA והגענו לסתירה שכן אם $A \cap B$ שקולה לA וחלקית לה ממש A קבוצה אינסופית.
לפיכך, $A = A \cap B$. לפי הגדרת החיתוך $A \cap B \subseteq B$, נחליף את $A \cap B$ בA ונקבל ש$A \subseteq B$.