Université de Pau et des Pays de l'Adour **Année 2019-2020**
Département de Mathématiques

L2-info - Calcul Scientifique

TP-2: Intégration numérique

Les programmes de chaque exercices sont à déposer sur Elearn, dans le module prévu à cet effet. Vous rendrez également un document texte contenant les réponses aux questions.

Exercice 1.

On souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ en utilisant une formule de quadrature composite:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Pour cela, on décompose l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{N}$. On note $x_i = a+ih$, pour $i = 0, \ldots, N$. Sur chaque sous-intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \ldots, N-1$, on applique alors une formule d'intégration numérique. On veut comparer la formule aux points milieux, celle des trapèzes et celle de Simpson vues en cours.

1. Écrire une fonction qui utilise la formule composite aux points milieux pour approcher l'intégrale $I(f)$. La signature en langage C de cette fonction est la suivante :

```c
double integrationPtMilieuComposite(double a, double b, int N);
```

2. **Application**: Tester avec la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \pi]$. Pour différentes valeurs de N, on construira un graphique des erreurs relative par rapport à la valeur théorique en fonction de N en échelle log-log. Le graphique sera créé en utilisant le programme `gnuplot`. Pour cela vous remplirez un fichier `erreur.dat` dont le contenu est le suivant :

```
N    PtMilieu
2     .....
4     .....
8     .....
...
8192  .....
```

Vous visualiserez les données à l'aide des commandes `gnuplot` suivantes:

```
$> gnuplot
gnuplot> set logscale x
gnuplot> set logscale y
gnuplot> plot 'erreur.dat' using 1:2 with lp title col
```

L'option `using` permet de tracer la courbe en utilisant les colonnes 1 et 2 du fichier de points `erreur.dat`. L'option `title` impose comme titre à la courbe la valeur de la première ligne du fichier `erreur.dat`.

3. Compléter le programme avec une fonction

```c
double integrationTrapeze(double a, double b, int N);
```

Vous ajouterez une colonne `Trapeze` au fichier `erreur.dat` puis vous ajouterez la commande `plot "erreur.dat" using 1:3 with lp t col` à la commande `gnuplot` précédente.

4. Même question que précédemment pour la formule de Simpson.

5. Analysez les résultats: Quel est l'ordre numérique de chacune des méthodes? Quelle est la méthode la plus efficace ?

Exercice 2.

Programmer une méthode d'intégration numérique composites basée sur une formule de Newton-Cotes à 5 points dont les noeuds de quadrature sont donnés sur $[0, 1]$ par :

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$$

1. Vous devrez écrire une fonction prenant la fonction f en argument, les bornes a et b d'intégration ainsi que le nombre de sous-intervalles n. La signature de cette fonction en C sera:

```
double boole(double (*f)(double), double a, double b, int N)
```

2. Donner le degré d'exactitude ainsi que l'ordre de la méthode.
3. Confirmer le degré d'exactitude en utilisant successivement deux fonctions polynomiales f de degré bien choisi. On considèrera comme exacte une erreur de l'ordre de 10^{-16}.
4. Confirmer numériquement l'ordre de convergence avec une fonction f régulière de votre choix et en prenant $n = 10$ sous-intervalles puis $n = 20$. **Analysez** les résultats obtenus.

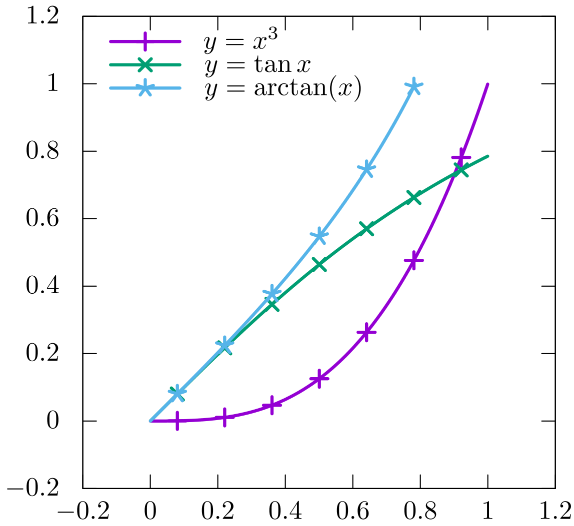
Exercice 3.

La longueur d'une courbe d'équation $y = f(x)$ de $x = a$ à $x = b$ est donnée par l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Utiliser la formule de Simpson composite avec 32 sous-intervalles pour calculer les longueurs des courbes suivantes. Vous pourrez réutiliser une partie du programme de l'exercice 1.

a. $y = x^3$ sur $[0, 1]$
b. $y = \tan x$ sur $[0, \pi/4]$
c. $y = \arctan x$ sur $[0, 1]$.



Exercice 4.

1. À l'aide de la formule de Simpson composite, écrire une fonction qui calcule de manière approchée l'intégrale sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. La fonction prendra donc en argument:

- la fonction f
- les réels a, b, c, d définissant le rectangle sur lequel la fonction est intégrée
- le nombre de découpages n et m dans chaque direction.

2. Tester la fonction écrite sur une fonction régulière et déterminer numériquement l'ordre de la formule.