# Compte Rendu TP4

## Introduction :

Dans ce TP, nous cherchons à représenter toute succession de décisions possibles d'un gestionnaire d'un parc d'avions. Parmi ces possibilités, nous voulons trouver la meilleure stratégie ainsi que le coût optimal.

Ce probème réel peut être amener à le traduire en un problème de graphe. Ce problème est posé en terme d'optimisation. Plus précisément, il est ramené à un problème de recherche dans un graphe de chemin optimal.

Nous allons résoudre ce problème via l'algorithme Belleman. L'algorithme de Djikstra permet aussi de déterminer le chemin optimal mais cet algorithme ne prend pas en compte les coûts négatifs contrairement à Belleman.

## Présentation de l'algorithme :

L'algorithme de Bellman est un algorithme qui calcule des plus courts chemins depuis un sommet source donné dans un graphe orienté.

La complexité de cet algorithme est en $O(|S||A|)$ où $|S|$ désigne le nombre de sommets et $|A|$ désigne le nombre d'arcs.

Voici le déroulement de l'algorithme :

Données :

- Un graphe valué sans circuits dont les sommets sont numérotés dans l'ordre du tri topologique
- Le sommet de départ s est racine du graphe et il est numéroté 1
- On connaît pour chaque sommet x ses prédécesseurs Pred(x)

Sortie :

- $\lambda(x)$ est égale à la longueur d'un plus court chemin de s à x.
- Père(x) détermine le sommet prédécesseur de x sur le plus court chemin de s à x.

Initialisation : Poser $\lambda(1) = 0$

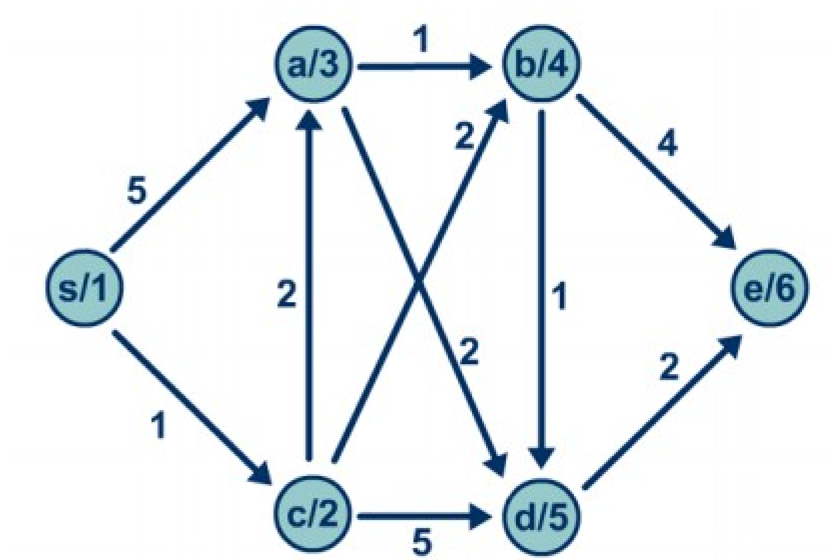
Etapes :

- on éxamine les prédécesseurs du sommet x
- calculer $\lambda(x) = \min(\lambda(y) + l(y,x))$ (on parcourt les prédécesseurs de x, on calcule $(\lambda(y) + l(y,x)$ et on prend le minimum de ces quantités)

- on pose père(x) = y avec y, le prédecesseur de x pour lequel ce minimum est atteint

Exemple d'application :

Soit le graphe suivant :




On numérote d'abord les sommets du graphe dans l'ordre du tri topologique.

Num(s) = 1 num(c) = 2 num(a) = 3 num(b) = 4 num(d) = 5 num(e) = 6

Pred(s) = Ø Pred(c) = {s} Pred(a) = {s, c} Pred(b) = {a, c} Pred(d) = {a, b, c} Pred(e) = {b, d}

On calcule successivement :

$\lambda(s) = 0$

$\lambda(c) = \lambda(s) + l(s, c) = 0 + 1 = 1$ père(c) = s

$\lambda(a) = \mathrm{Min}(\lambda(s) + l(s, a), \lambda(c) + l(c, a)) = \min(0 + 5, 1 + 2) = 3$ père(a) = c

$\lambda(b) = \mathrm{Min}( \lambda(a) + l(a, b), \lambda(c) + l(c, b)) = \min(3 + 1, 1 + 2) = 3$ père(b) = c

$\lambda(d) = \mathrm{Min}( \lambda(a) + l(a, d), \lambda(b) + l(b, d), \lambda(c) + l(c, d)) = \min(3 + 2, 3 + 1, 1 + 5) = 4$ père(d ) = b

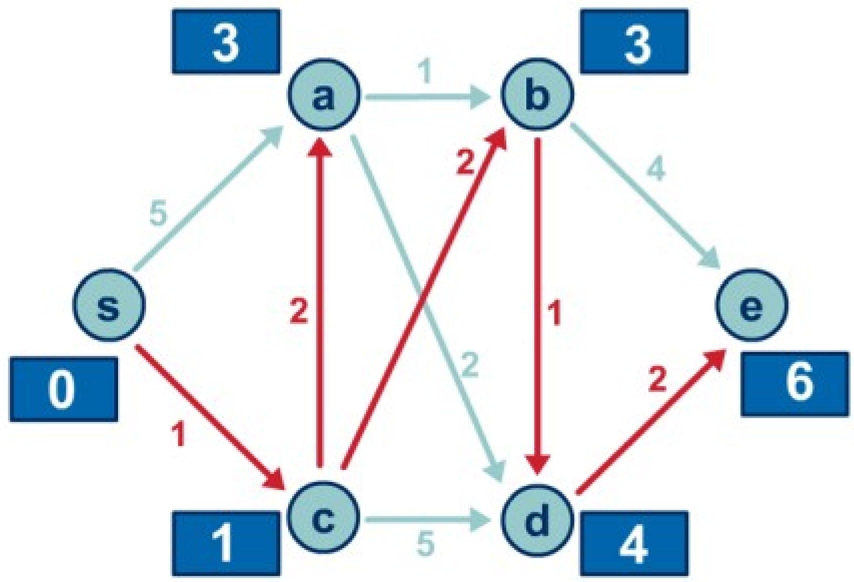
$\lambda(e) = \mathrm{Min}( \lambda(b) + l(b, e), \lambda(d) + l(d, e)) = \min(3 + 4, 4 + 2) = 6$ père(e) = d

Ces résultats sont reportés sur le graphique suivant :
Les longueurs des plus courts chemins sont dans les étiquettes et les arcs en gras montrent pour chaque sommet l'arc le reliant à son père.

Pour retrouver les plus courts chemins de la racine à un sommet donné, on part de ce sommet et de père en père on remonte à la racine.

On obtient par exemple, pour le plus court chemin de s à e : e a pour père d, qui a pour père b, qui a pour père c, qui a pour père s.

Le plus court chemin de s à e est de longueur 6 ; c'est le chemin s c b d e.




## **Résolution du problème réel:**

**Etude de la “décision A” :**

1) La décision A consiste, à la fin de chaque période:
   - soit vendre l’avion et le remplacer par un neuf
   - soit le garder en exploitation

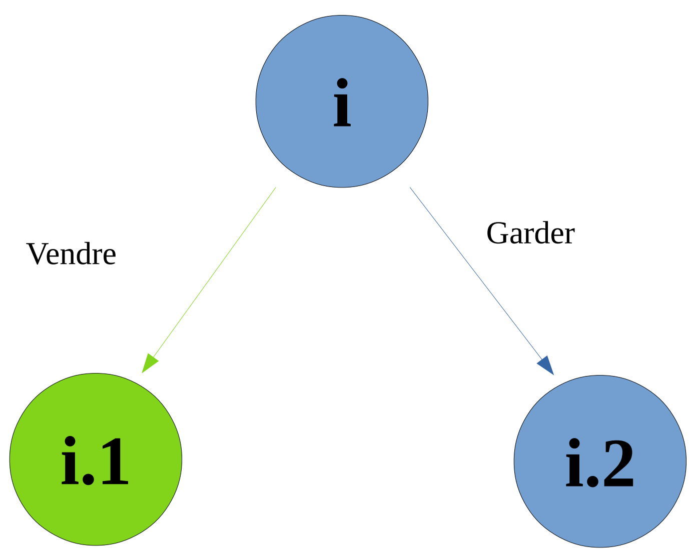
On représente le modèle A par un graphe orienté G = (S, A, C) où :

   - S représente l’ensemble des sommets : {0, 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8}

- A représente l'ensemble des arcs : {(0→1.1), (0→1.2), (1.1→2.1), (1.1→2.2), (1.2→2.3), (1.2→2.4), (2.1→3.1), (2.1→3.2), (2.2→3.3), (2.2→3.4), (2.3→3.5), (2.3→3.6), (2.4→3.7), (2.4→3.8), (3.1→4.1), (3.2→4.2), (3.3→4.3), (3.4→4.4), (3.5→4.5), (3.6→4.6), (3.7→4.7), (3.8→4.8)}
- C représente le coût de chaque arc

Un sommet représente une étape et une étape correspond à :
- soit le début d'une période
- soit la fin d'une période

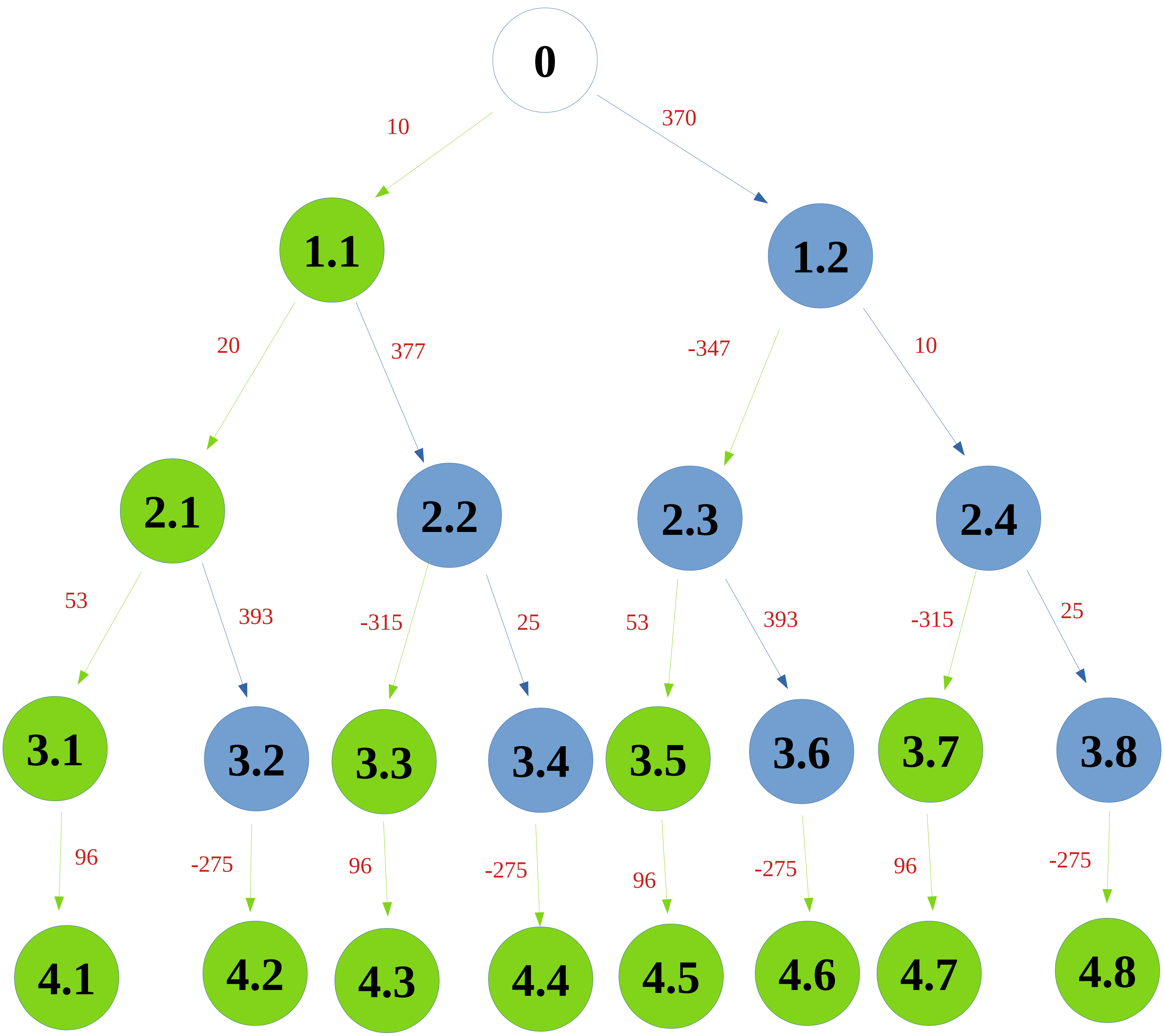
Un arc représente une décision :
- vendre ou garder




Le coût de cet arc représente la conséquence financière de la décision.

La décision «acheter en début de la période i et vendre à la fin de cette période» est modélisée par un arc dont le coût Ci calculé selon la formule: Ci = Pi + Ei - Ri

On obtient alors le graphe suivant :



2) Une stratégie est définie par une succession d'arcs. La décision partira du sommet 0 et finira à un sommet de niveau 4.

3) Dans le modèle de graphe, chaque arc à comme coût la conséquence finacière de la décision pour une période j.

La recherche de la meilleure stratégie se ramène donc à la recherche de la branche de coût minimal.

4) Le graphe est une arborescence, donc on doit appliquer la méthode exhaustive consistant à calculer le coût de toutes les branches.

La meilleure stratégie correspondra donc à la branche de coût minimum.

Donc la meilleure stratégie consiste à garder l'avion à la fin des périodes 1,2 et 3, puis de le vendre à la fin de la période 4.

Le coût de cette stratégie est de 130 :
370 + 10 + 25 – 275 = 30

**Etude de la "décision B" :**

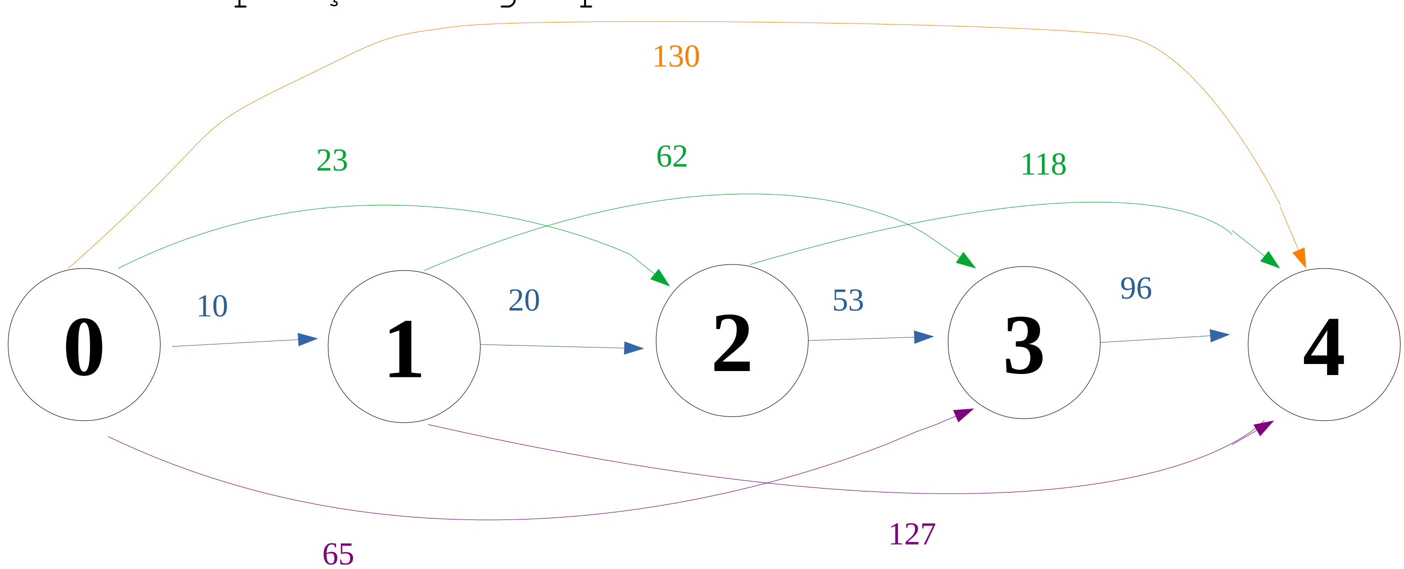
1) On représentera le modèle B par un graphe orienté valué G = (S, A, C) où :

- S représente l'ensemble des sommets : {0, 1, 2, 3, 4}
- A représente l'ensemble des arcs : {(0→1), (0→2), (0→3), (0→4), (1→2), (1→3), (1→4), (2→3), (2→4), (3→4)}
- C représente les coûts des arcs

Un arc(i→j) désigne :

- l'acquisition d'un avion neuf à la date i
- et à sa revente à la date j

Voici un aperçu du graphe :



Le coût d'un arc correspond à le conséquence finacière consécutive à la décision modélisée par l'arc.

2) Dans ce modèle de graphe, une décision correspon à la durée pendant laquelle on va garder un avion neuf.

Cette décision est modélisé par un arc.

Une stratégie possible correspond à une suite de décision.

Dans le graphe, une stratégie possible est représentée par un chemin :
- ayant le sommet 0 pour origine
- et pour extrémité le sommet 4

3) La recherche de la meilleure stratégie est modélisée par la recherche du plus court chemin dans ce graphe entre le sommet 0 et le sommet 4.

4) Pour cela on utilise l'algorithme de Belleman.

1ère étape : on marque le sommet 0 : coût = 0

2ème étape : ensuite le sommet 1 : coût = 10

3ème étape : ensuite le sommet 2 : coût = 23

4ème étape : ensuite le sommet 3 : coût = 65 dernière étape : enfin le sommet 4 : coût = 130

5) Le modèle A consiste à énumérer toutes les possibilités (solution exhaustive)

Le modèle B quant à lui ne nécessite pas le calcul du coût de toutes les branches de l’arborescence.

## Résolution informatique du problème réel:

Nous avons joint avec le compte rendu, un programme en Java qui applique l'algorithme de Bellman.

Grâce à la démonstration ci-dessus et le code en Java, nous avons montré que nous pouvons résoudre le problème enoncé au départ.

Le chemin optimal obtenu montre qu’il existe une stratégie meilleure parmi tant d’autres pour ce problème donné.

## Conclusion :

Pour conclure nous avons appris :

- qu’un problème réel peut se traduire en un problème d’optimisation

- que l’algorithme de Bellman permet de déterminer la branche optimale de décisions.