COLLÈGE STEE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES POUR L'ÉNERGIE ET L'ENVIRONNEMENT

Campus de Pau

Contrôle Continu / ~~Examen~~	
1ère Session	2019-2020
Unité d'Enseignement - UE	
Graphes	
Durée de l'épreuve : 2h	

Diplôme et Filière	
Licence	L3 Info – Cmi3
Élément Constitutif - EC	
K. Ouriachi	

Date
06 janvier 2020 10h30 - 12h30

Conditions d'évaluation
Documents non autorisés – Calculatrices autorisées

Exerci

ce 1 : « Problème de contrôleur de messages d'alarme.» (6 points)

Dans une centrale nucléaire le traitement des alarmes est entièrement informatisé. En effet, pour éviter des erreurs humaines, N robots sont chargés de remplacer les opérateurs pour traiter chaque message d'alarme.

Les robots sont connectés par un réseau à liaisons bidirectionnelles. Un robot particulier, noté S, appelé **robot de contrôle** est chargé d'interpréter le message d'alarme et contrôler son envoi vers chacun des autres robots.

Le protocole prévoit, pour chaque message d'alarme, le **cycle** suivant :

-un message d'alarme est réceptionné exclusivement par le robot S; ce dernier interprète le message et génère un **message d'intervention**.

-le robot S transmet, ensuite **successivement** le message d'intervention à chacun des N-1 robots**,**

-le robot S envoie le message à **un seul** robot à la fois en respectant un certain ordre de priorité prédéterminé,

-après l'envoi d'un message, le robot S attend la réception d'un message d'accusé réception (par le robot destinataire) censé suivre le même chemin dans le réseau (routage) que le message envoyé.

-après réception du message d'accusé réception, le robot S reprend la transmission, du même message, en l'envoyant, au robot suivant (dans l'ordre de priorité),

-le robot S arrête le cycle de transmissions lorsque chacun des N-1 robots aura reçu le message d'intervention.

En respectant ce protocole, le problème consiste à trouver sur quel nœud du réseau il faut connecter le robot S de sorte que le cycle de transmission soit de **durée optimale**.

On considère le cas où N=6 et les robots connectés par un réseau décrit par la matrice M ci-dessous où Mij exprime le coût (durée de transmission) de la liaison bidirectionnelle entre les nœuds i et j.

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
R1		1	4		4	2
R2	1		1		2	2
R3	4	1		1	3	
R4			1		2	
R5	4	2	3	2		1
R6	2	2			1	

1-Proposer un modèle de graphe pour le réseau de connexion des N robots. (1 point)

2-A quel problème classique de la théorie des graphes ce problème se ramène-t-il? A ce stade, on se limitera à exposer la méthode dans le cas général. (1.5 point).

3- Proposer une solution qui répond au cas particulier présenté en 1 (3.5 points)

1-Proposer un modèle de graphe pour le réseau de connexion des N robots. (1 point)

Le modèle de graphe proposé est un graphe non orienté G= (S,A) défini comme suit:

-un sommet $s_i \in A$ (i=1,…,N) représentent un nœud r_i du réseau de connexion,

-un arc $a_k \in A$ modélise une connexion bidirectionnelle,

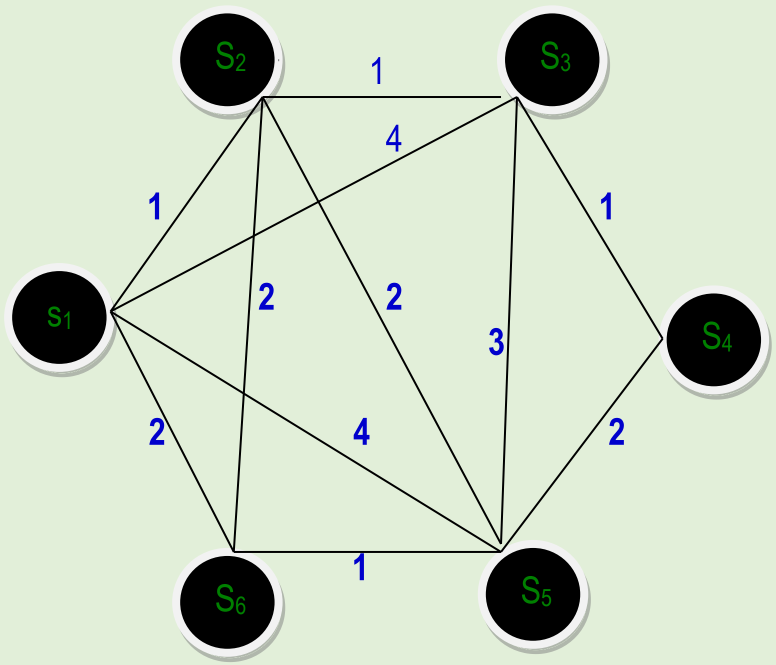
-le poids c_k associé à une arête représente le coût de la connexion correspondante.

En considérant le cas du réseau de connexion de 6 robots tel qu'il est décrit par la matrice M, on obtient le modèle de graphe G = (S,A) défini comme suit:

$$S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \}$$

A = { (s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_1, s_4), (s_1, s_5),(s_1, s_6), (s_2, s_3), (s_2, s_5), (s_2, s_6), (s_3, s_4), (s_3, s_5), (s_4, s_5), (s_5, s_6) }

Ce modèle de graphe G peut être visualisé comme suit:



2-A quel problème classique de la théorie des graphes ce problème se ramène-t-il? A ce stade, on se limitera à exposer la méthode dans le cas général. (1.5 point).

Le problème consistant à trouver le **nœud du réseau** de connexion du robot S qui garantit un cycle de transmission de durée optimale peut être ramené, au niveau du modèle de graphe du réseau, au problème classique de recherche de chemins optimaux reliant chacun des sommets s_i (i=1,…N) du graphe G aux N-1 autres sommets.

En se positionnant sur un sommet s_i, on calcule la somme Σ_i des longueurs des **chemins optimaux** permettant d'atteindre les N-1 autres sommets du graphe. La valeur de Σ_i représente, en fait, la moitié de la durée d_i du cycle optimal généré à partir de s_i.

En désignant par :

-CycleOptimal(s_i), la fonction qui calcule la durée d_i du cycle optimal à partir de s_i,

- leSommet: l'identifiant du sommet s_i recherché

on obtient la procédure suivante :

```
Min := 0
leSommet := s1 ;
Min :=CycleOptmal(leSommet)
Pour tous les x sommets de G
            Si CycleOptmal(x)  <  Min
            Alors  leSommet := x ; Min := CycleOptmal(x) ;
Retour (leSommet)
```

3- Proposer une solution qui répond au cas particulier présenté en 1 (3.5 points)

Pour mettre en œuvre la méthode précédente, on propose la procédure suivante:

1-marquer successivement les sommets $s_1, s_2, \ldots, s_6$ du graphe G,

2-à chaque marquage d'un sommet s_i appliquer la procédure de Dijkstra (voir cours) en choisissant s_i pour **source**.

On rappelle que cette procédure calcule tous les chemins optimaux issus du sommet s_i.

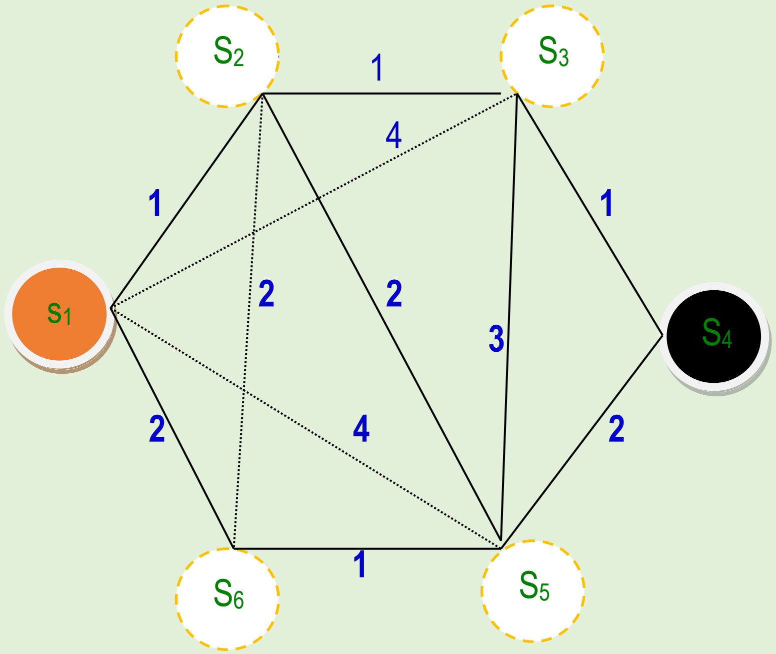
3-calculer la somme Σ_i des longueurs des **chemins optimaux** permettant d'atteindre, en partant de s_i, tous les autres sommets du graphe G

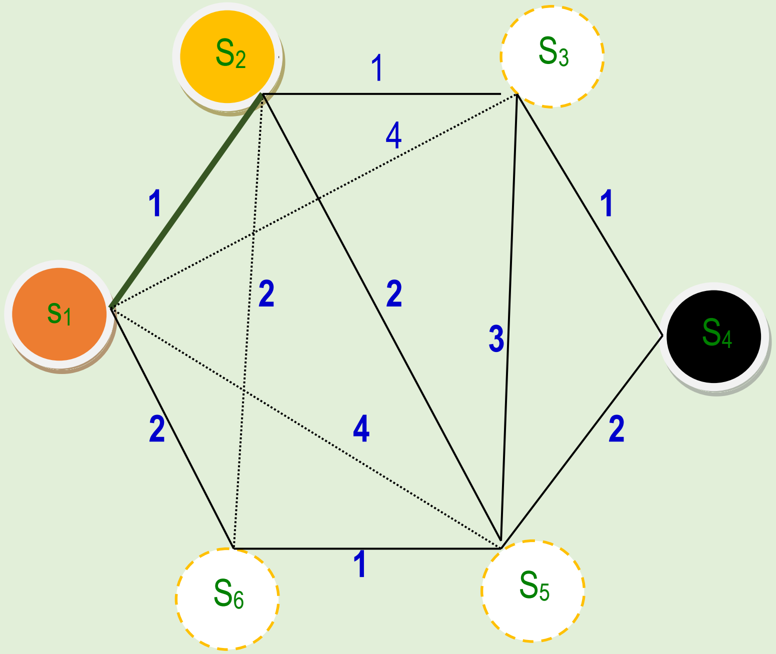
4-mettre en mémoire le sommet s_k si Σ_k est inférieure aux Σ_i calculées sur les sommets s_i **précédemment** marqués.

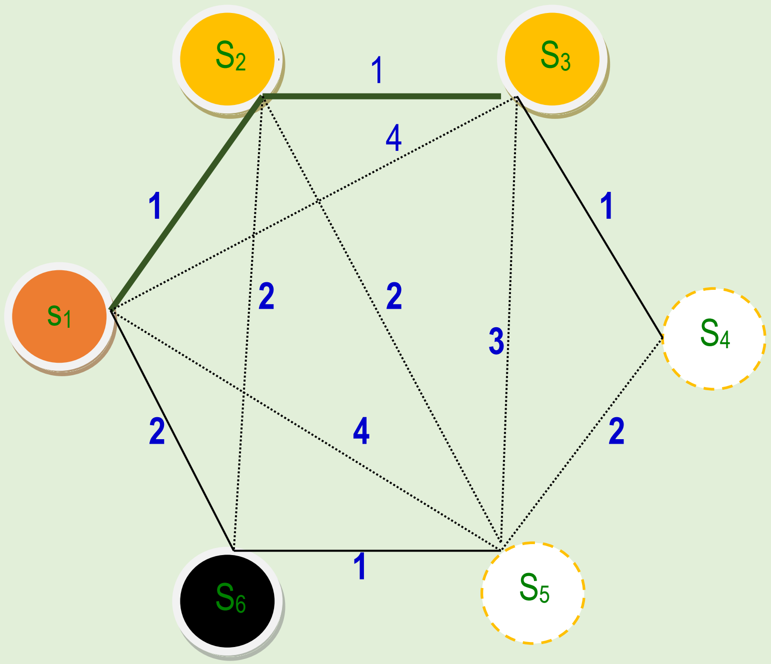
5-la procédure s'arrête lorsque tous les sommets du graphe G ont Eté marqués; le sommet mis en mémoire est le **sommet recherché**

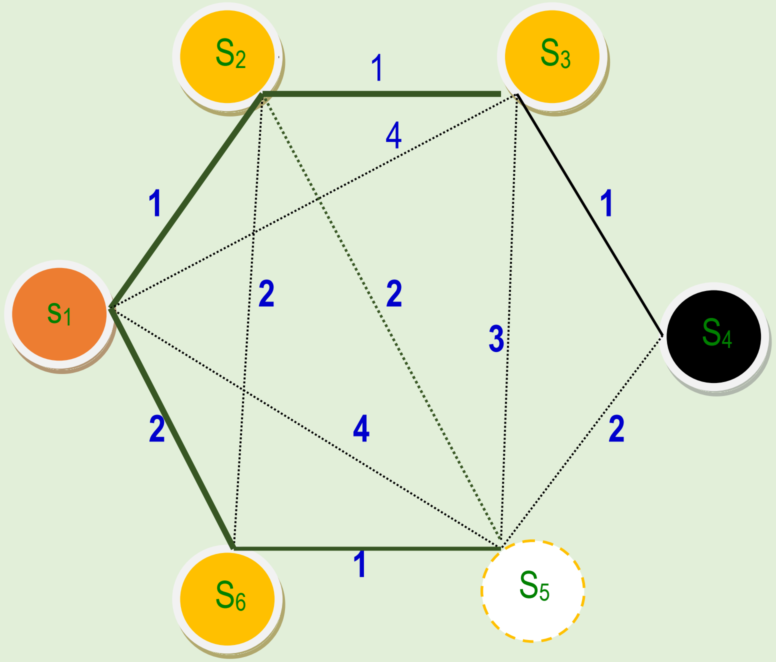
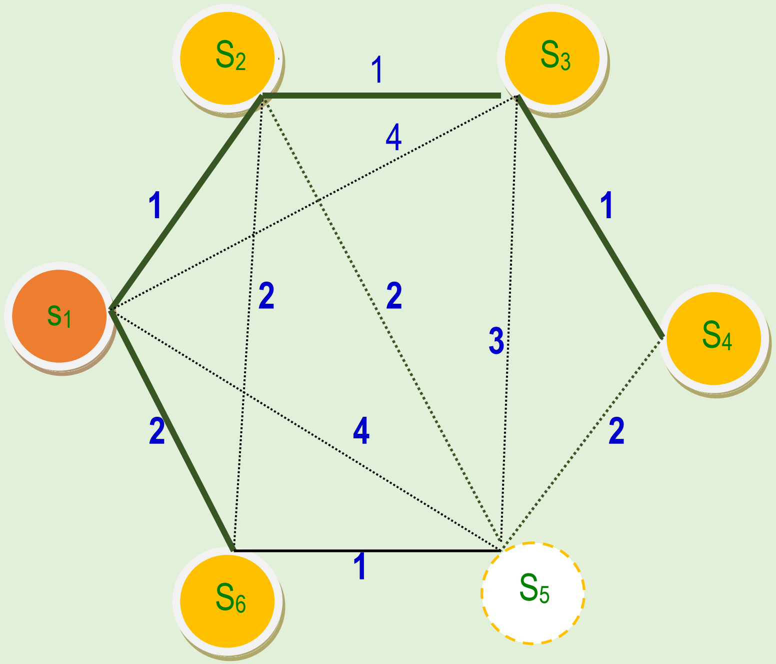
Application de la procédure

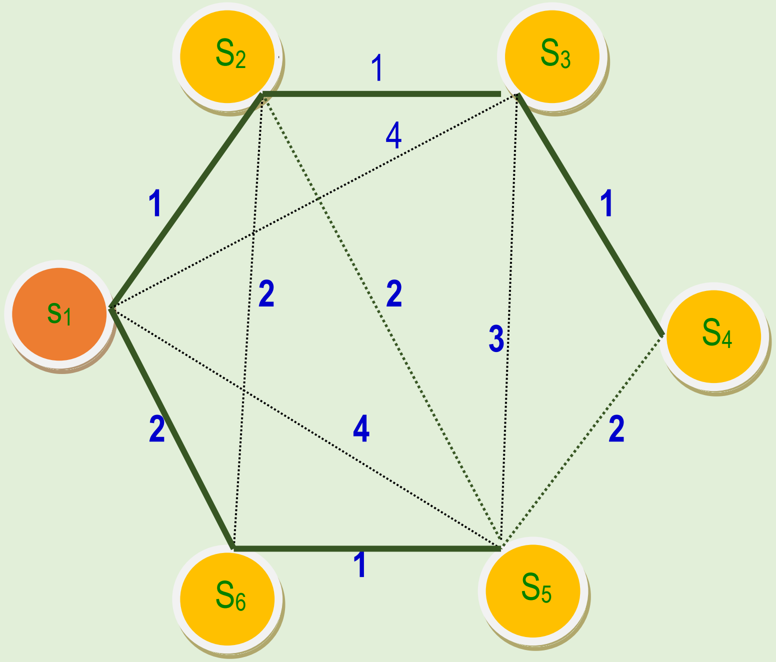
Marquer le sommet s_1 et appliquer Dijkstra(G,cout, s_1)




S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1


S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

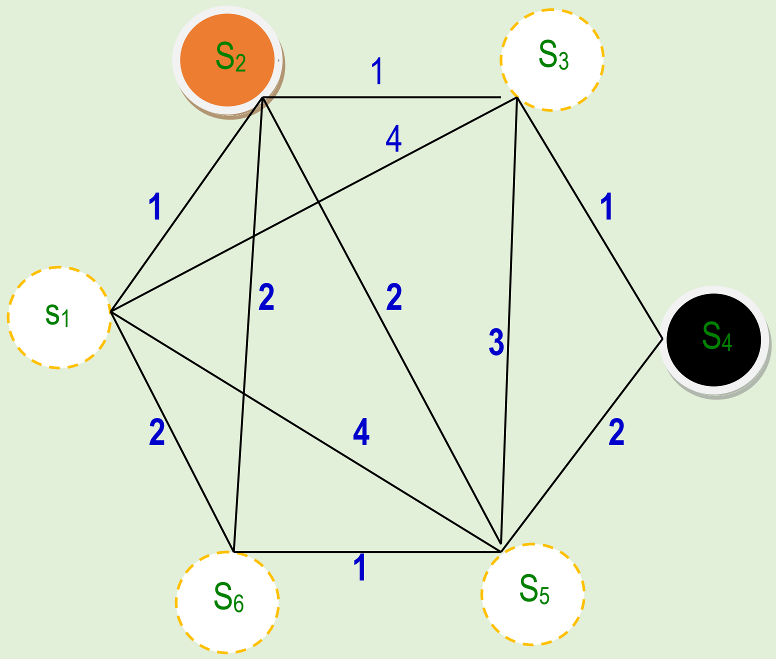

S2
S3
1
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
1
S6
S5

S2
S3
1
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
1
S6
S5

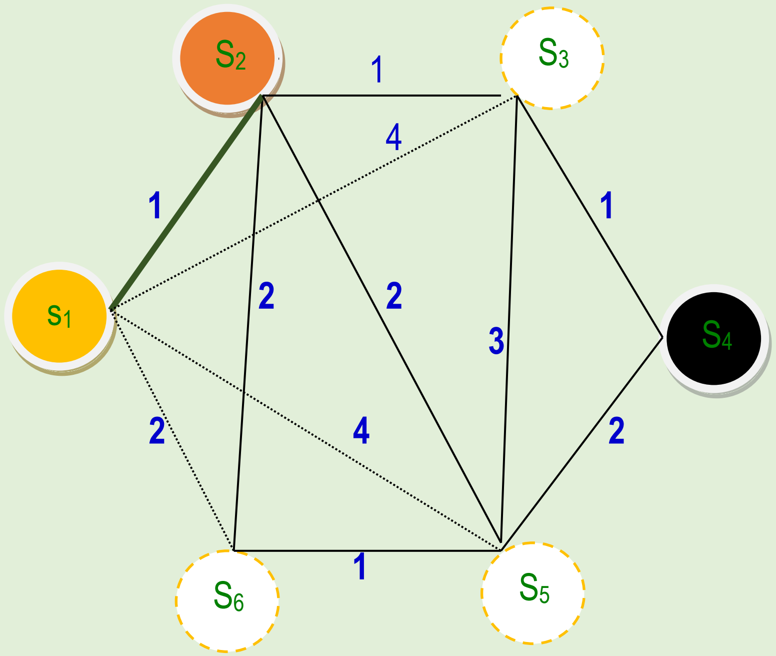

S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

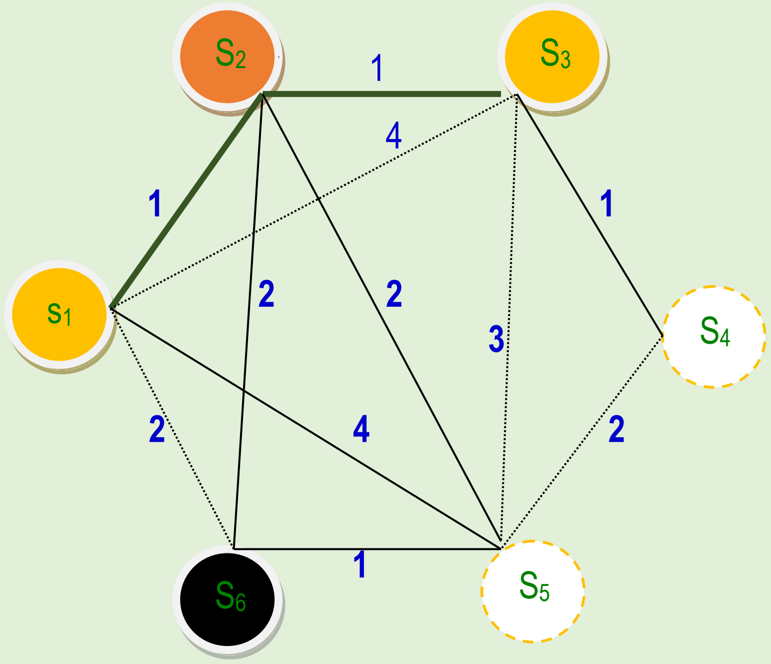
En calculant la somme des longueurs des chemins optimaux issus de s_1, on a :

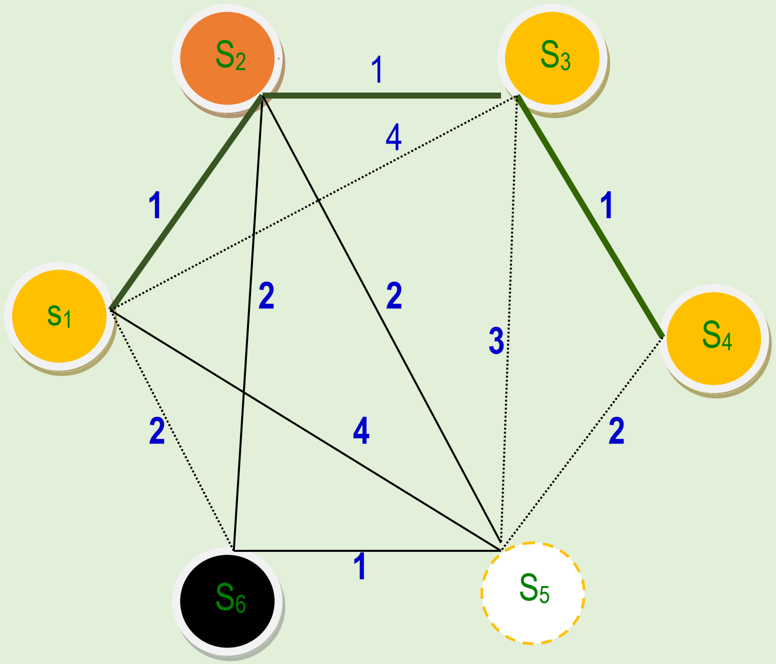
Vers le sommet...	...la longueur est
s_2	1
s_3	2
s_4	3
s_5	3
s_6	2
Σ_1	11

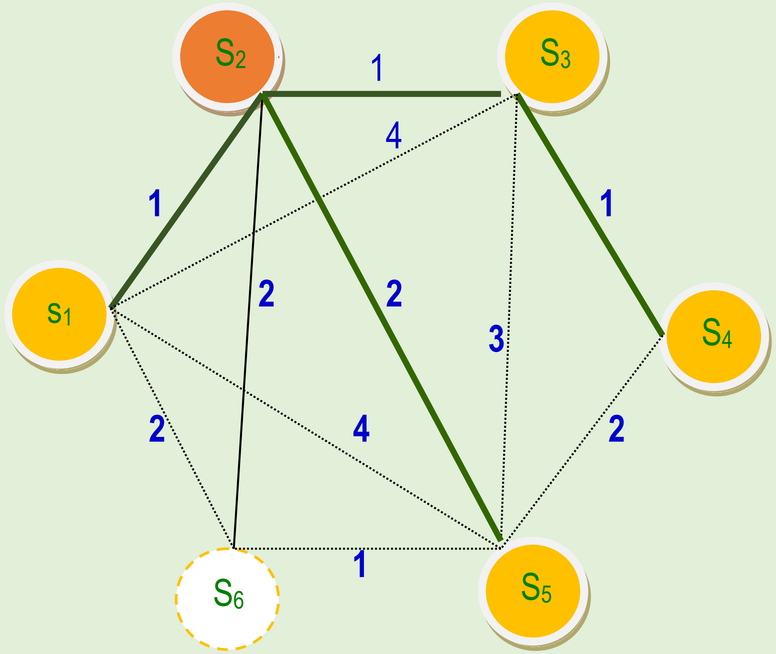
Marquer le sommet s_2 et appliquer Dijkstra(G,cout, s_2)

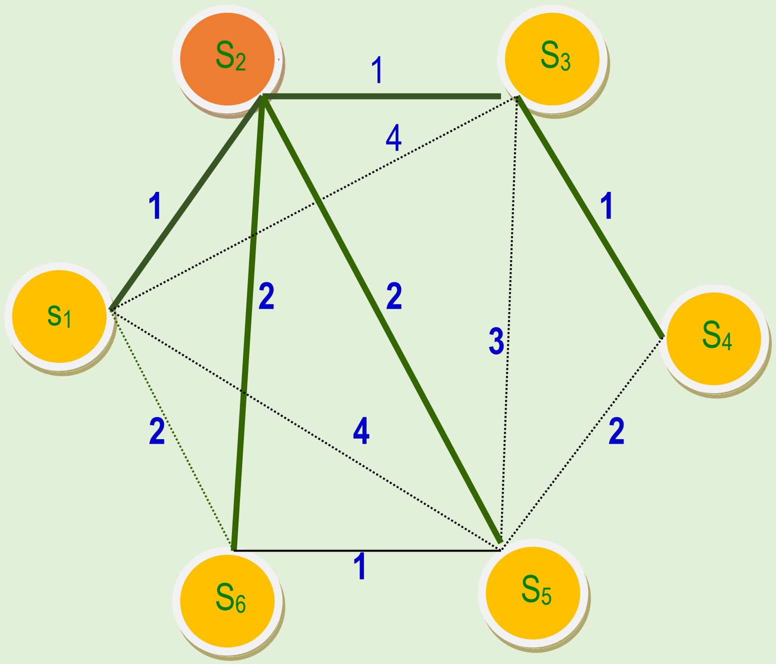





S2
S3
1
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
1
S6
S5


S2
S3
1
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
1
S6
S5

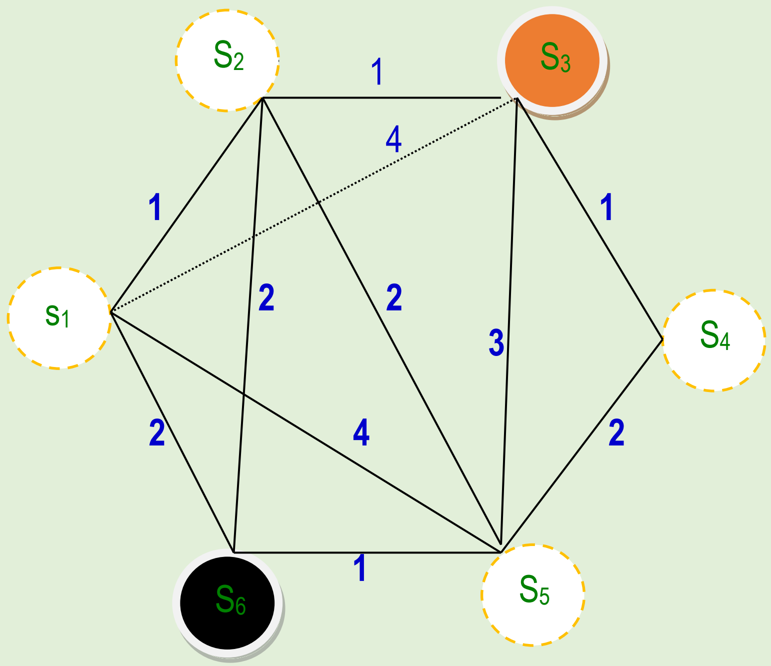

S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

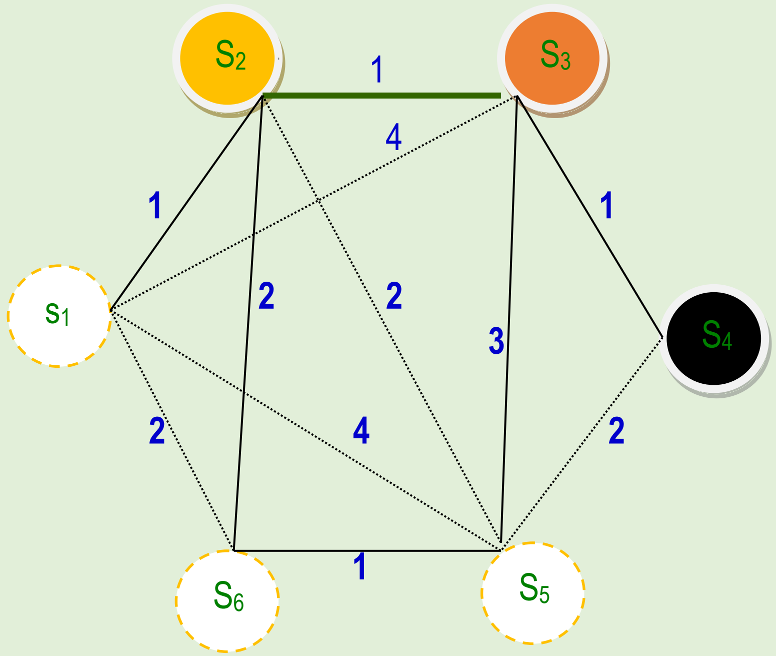

S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

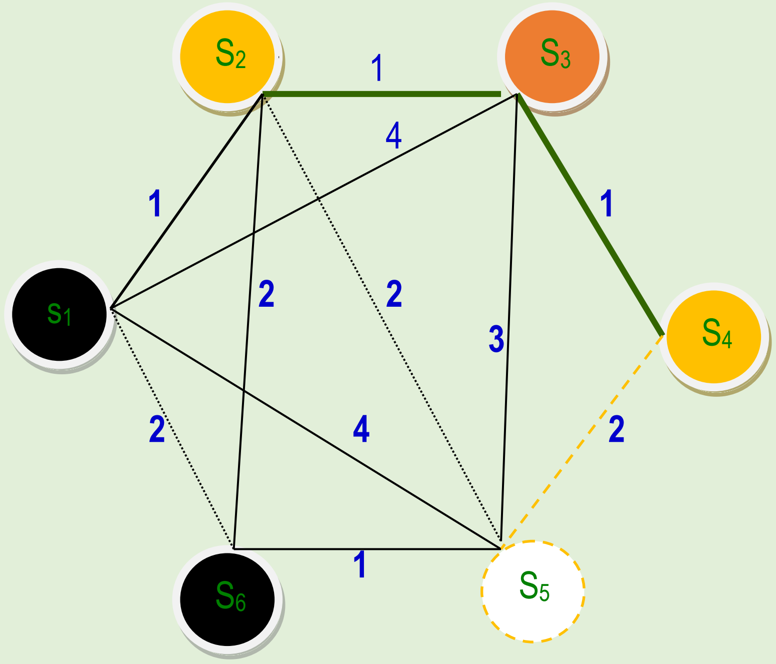
En calculant la somme des longueurs des chemins optimaux issus de s_2, on a:

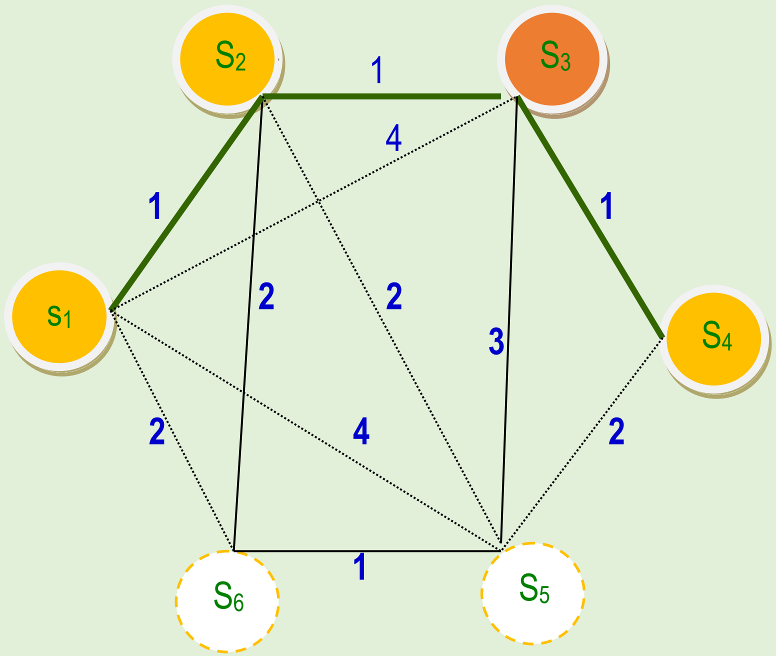
Vers le sommet …	…la longueur est:
s_1	1
s_3	1
s_4	2
s_5	2
s_6	2
Σ_2	8

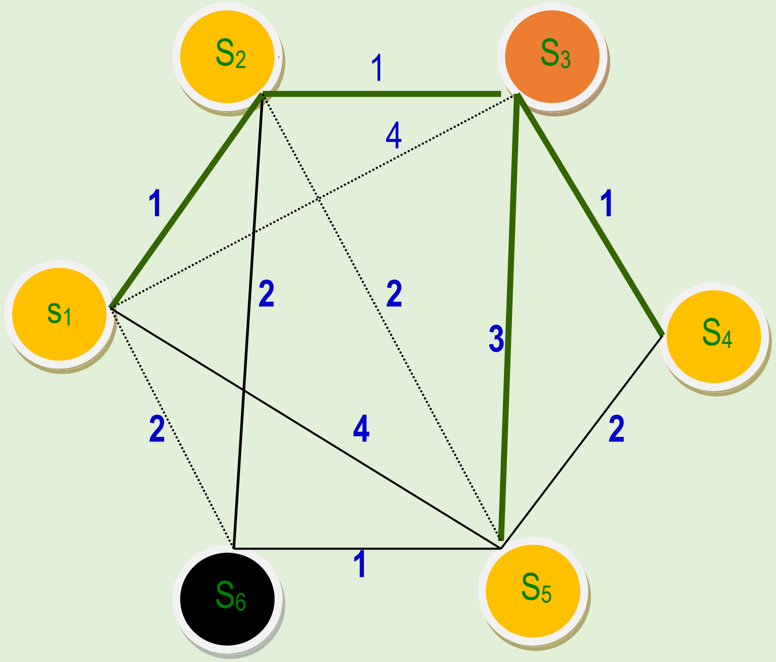
Marquer le sommet s_3 et appliquer Dijkstra(G,cout, s_3)

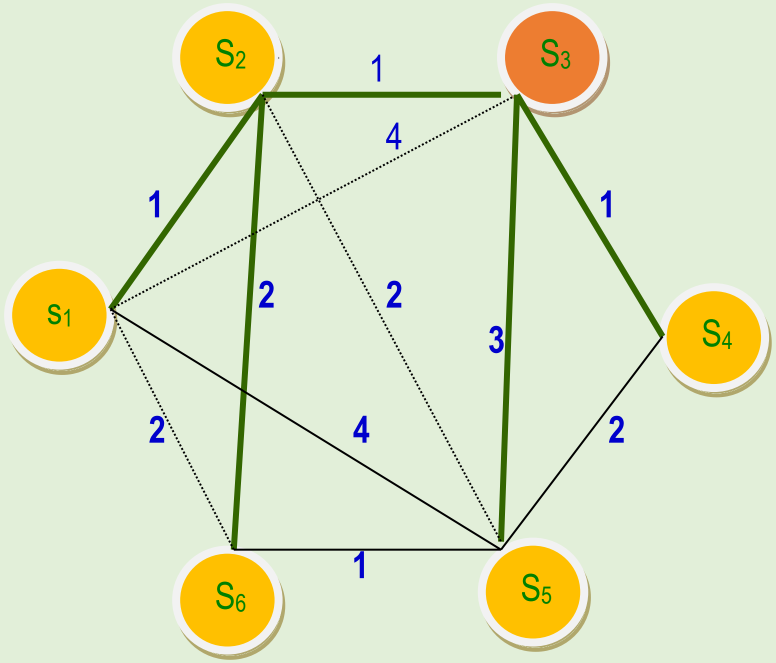





S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1


S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

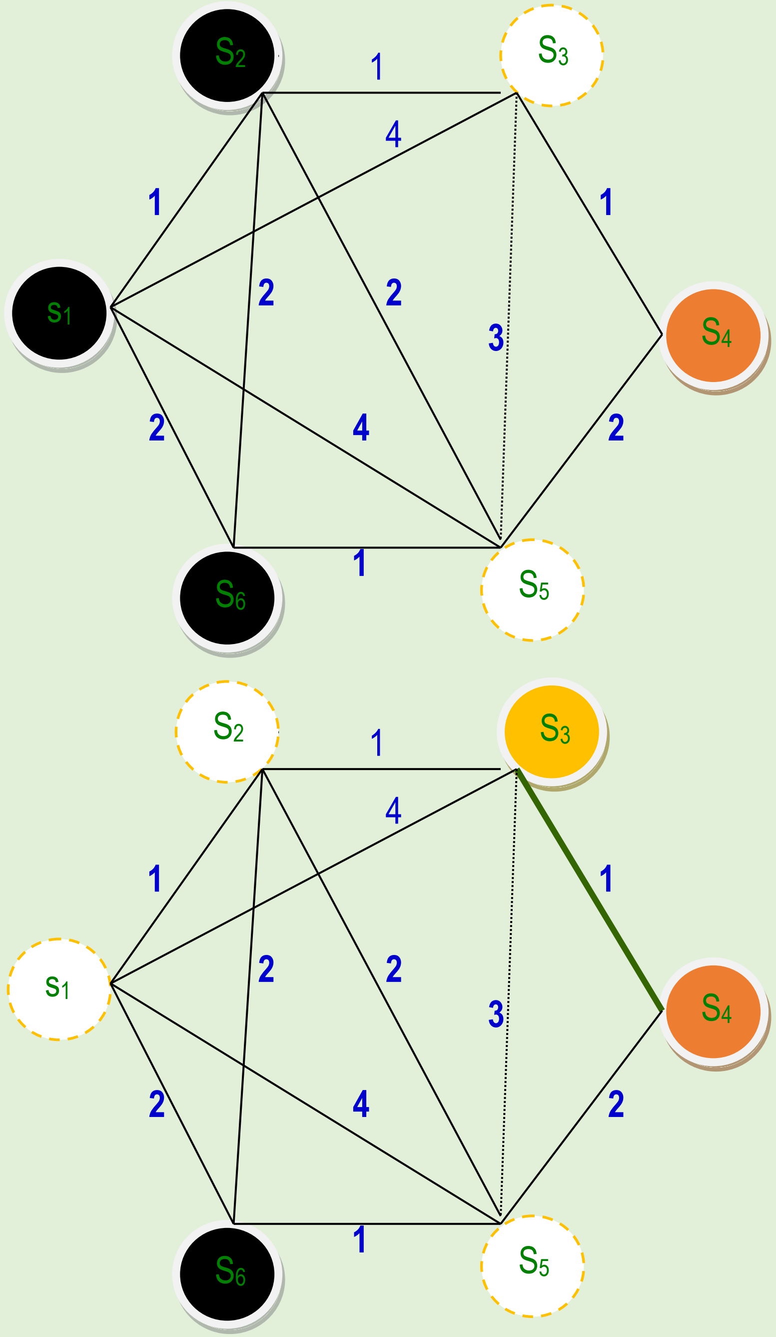

S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

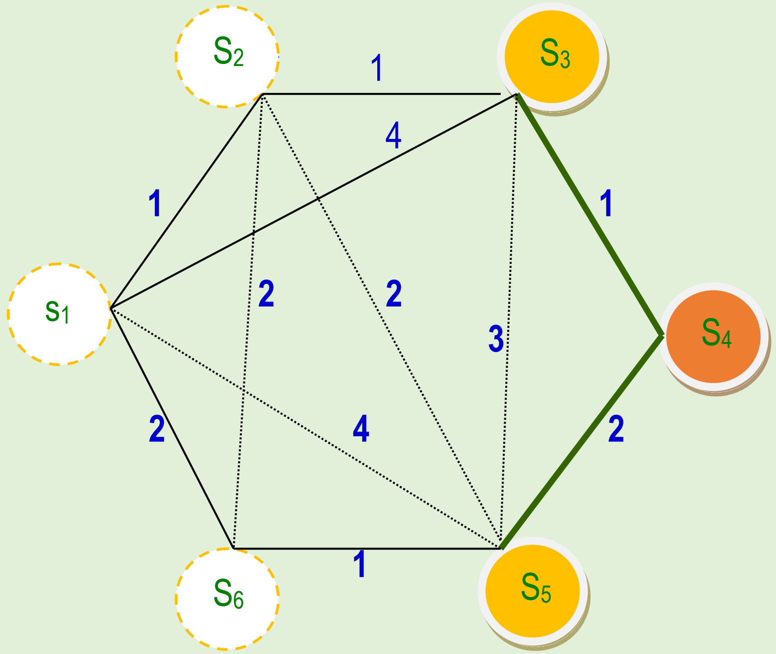

S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

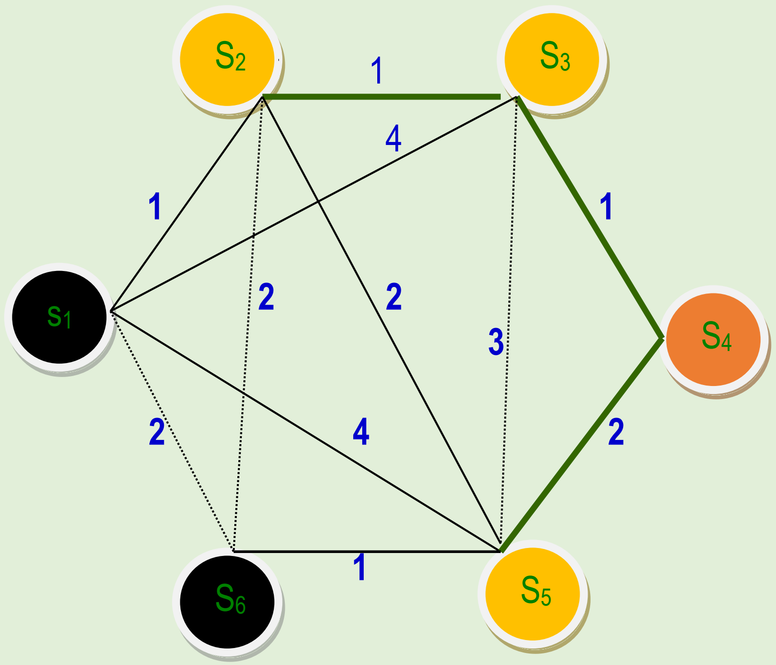
En calculant la somme des longueurs des chemins optimaux issus de s_3, on a:

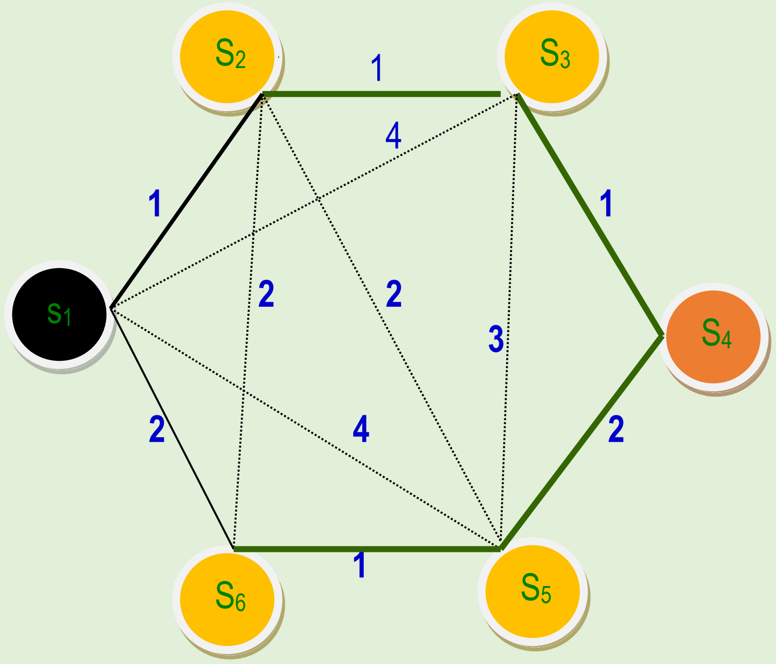
Vers le sommet …	…la longueur est
s_1	2
s_2	1
s_4	1
s_5	3
s_6	3
Σ_3	10

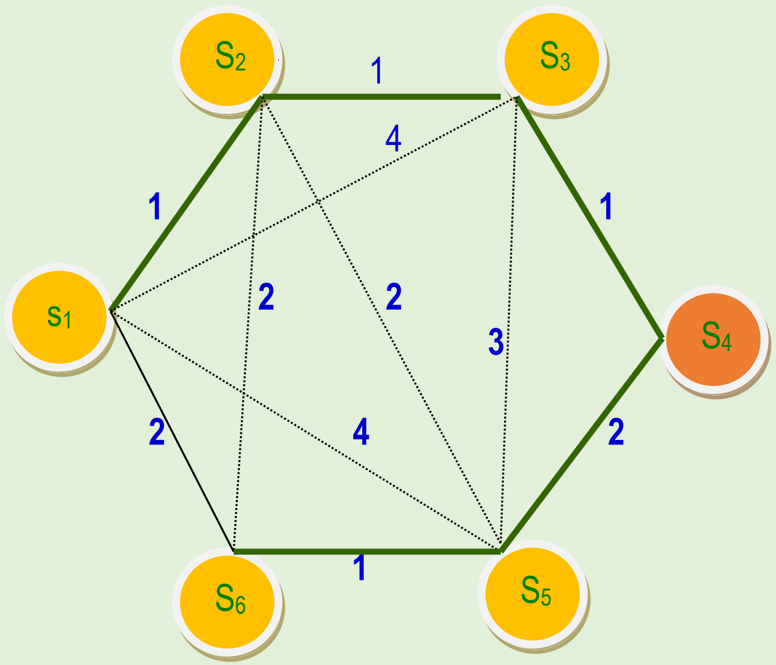
Marquer le sommet s_4 et appliquer Dijkstra(G,cout, s_4)




S1
S2
S3
S4
S5
S6
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1


S1
S2
S3
S4
S5
S6
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

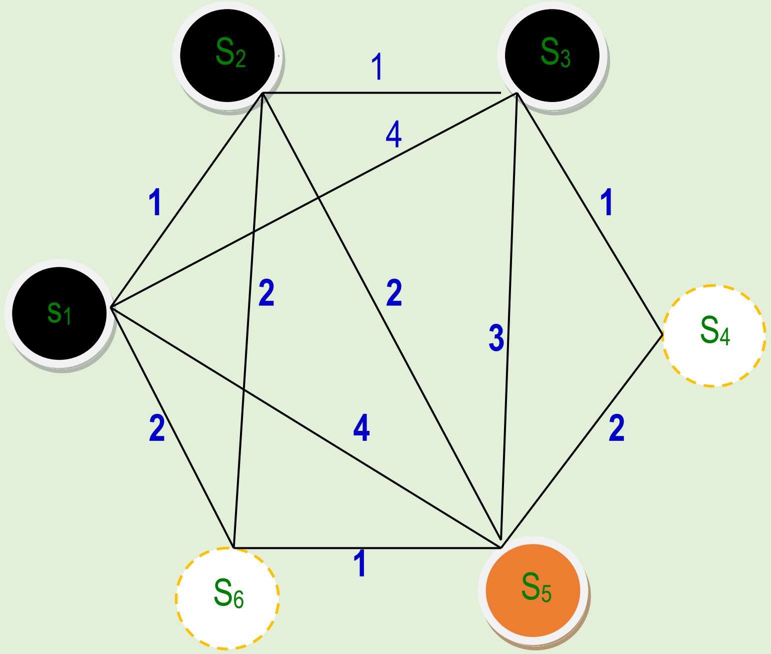

S1
S2
S3
S4
S5
S6
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

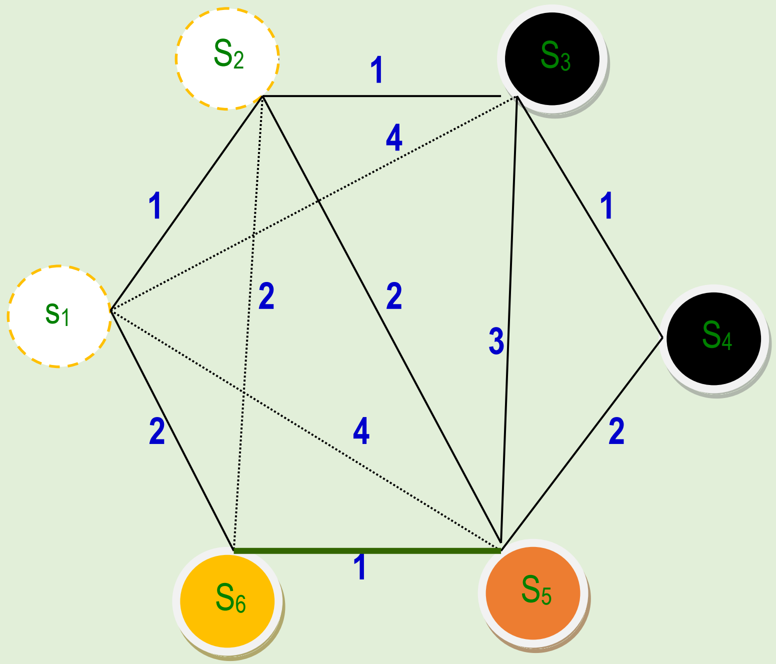

S1
S2
S3
S4
S5
S6
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

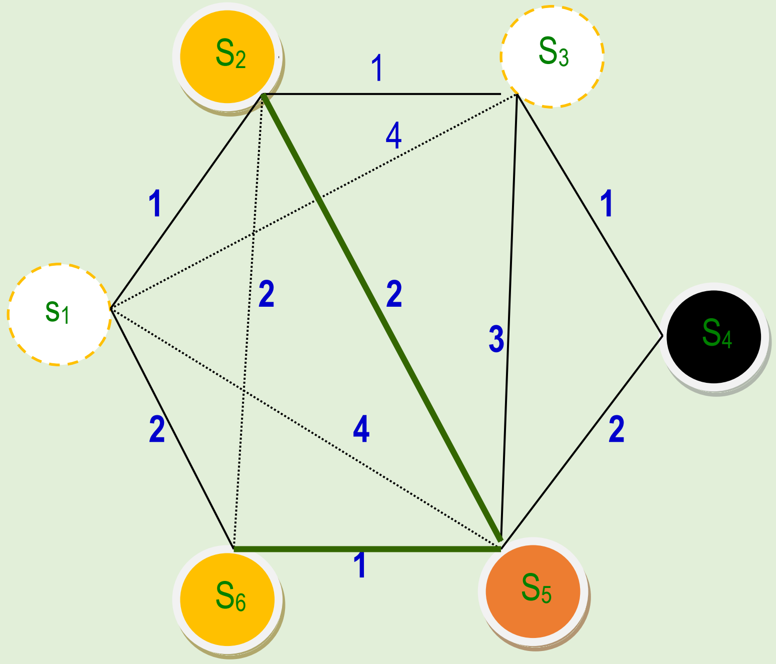
En calculant la somme des longueurs des chemins optimaux issus de s_4, on a:

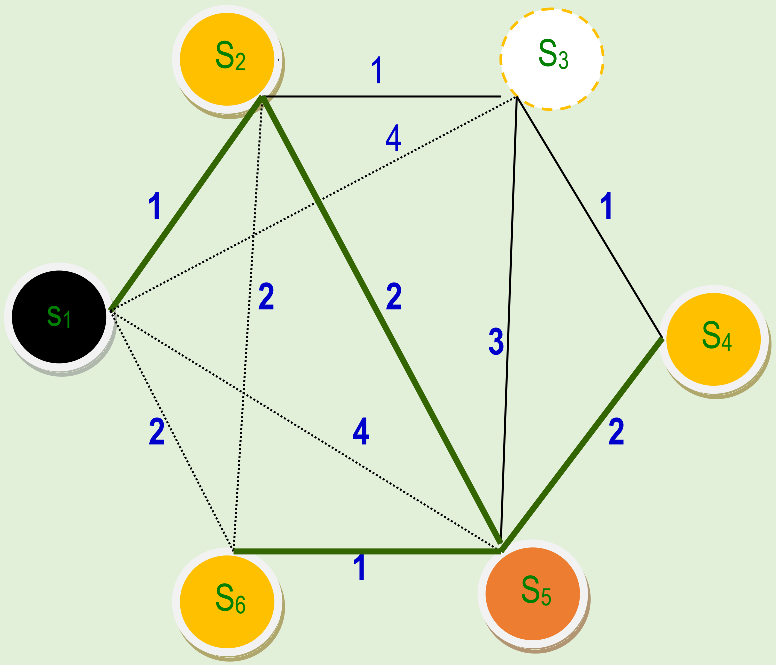
Vers le sommet…	…la longueur est
s_1	3
s_2	2
s_3	1
s_5	2
s_6	3
Σ_4	11

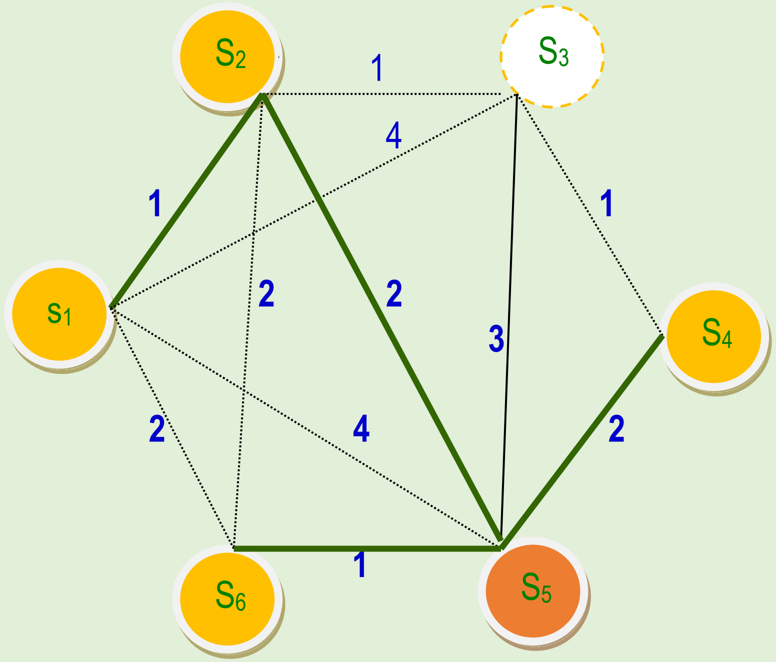
Marquer le sommet s_5 et appliquer Dijkstra(G,cout, s_5)

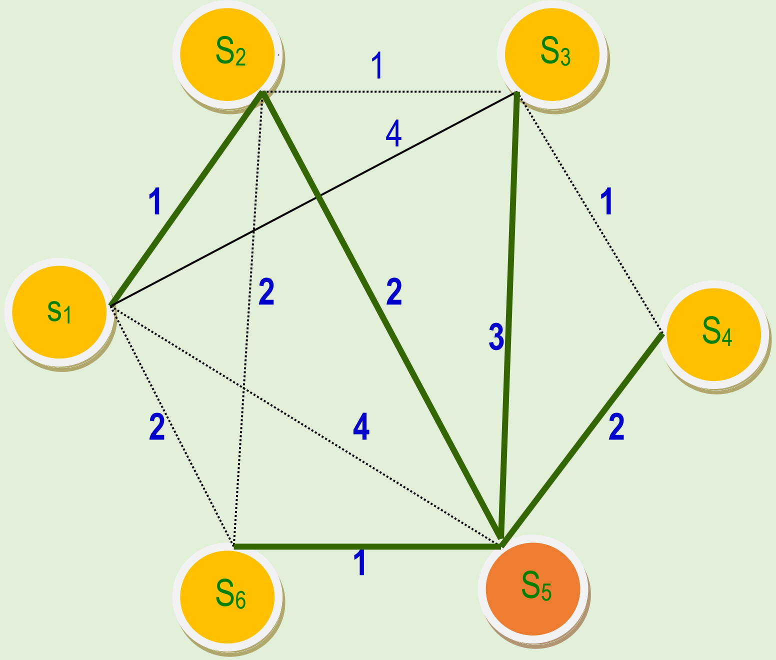





S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1


S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

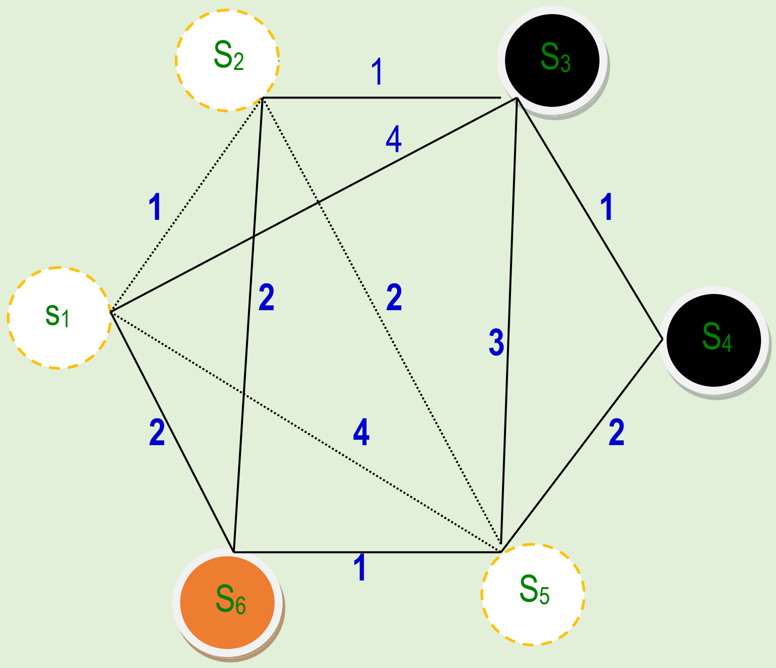

S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

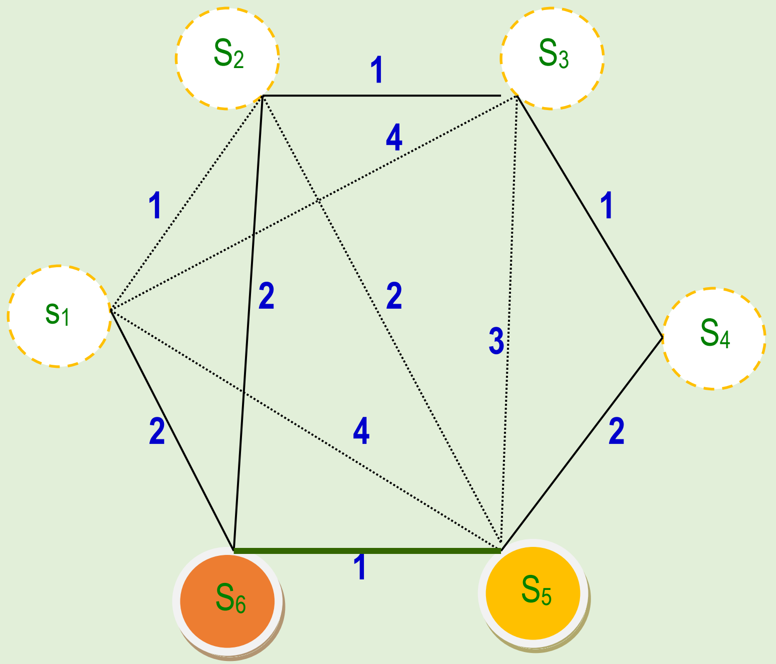

S2
S3
S1
S4
S6
S5
1
4
1
1
2
2
3
2
4
2
1

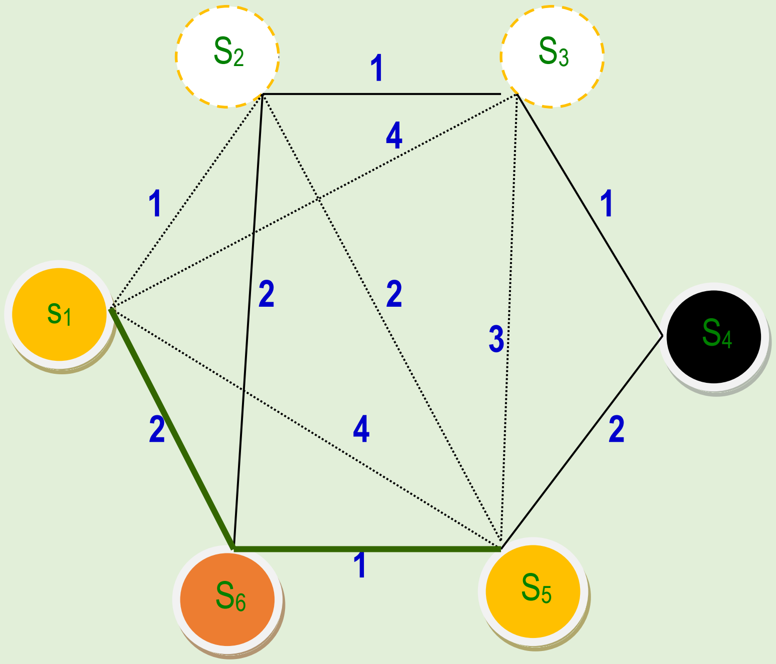
En calculant la somme des longueurs des chemins optimaux issus de s_5, on a:

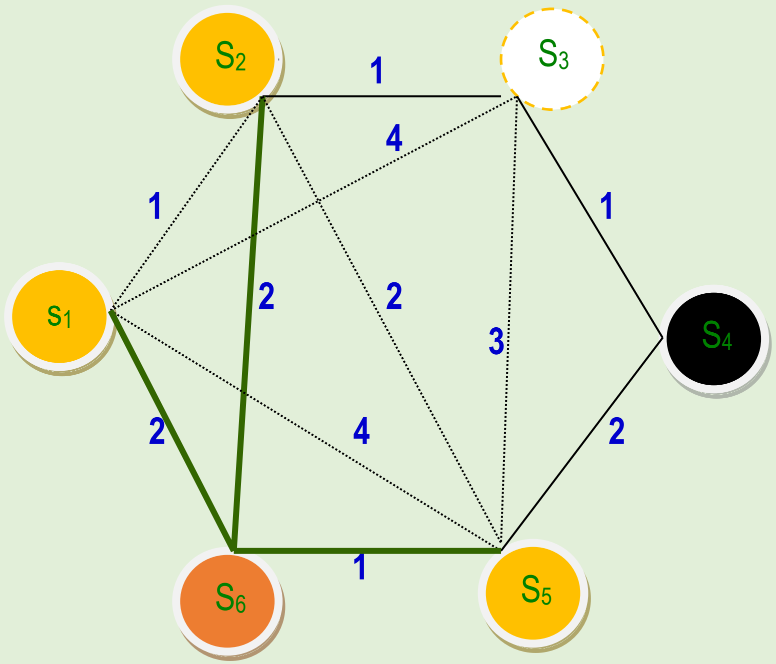
Vers le sommet…	…la longueur est
s_1	3
s_2	2
s_3	3
s_4	2
s_6	1
Σ_5	11

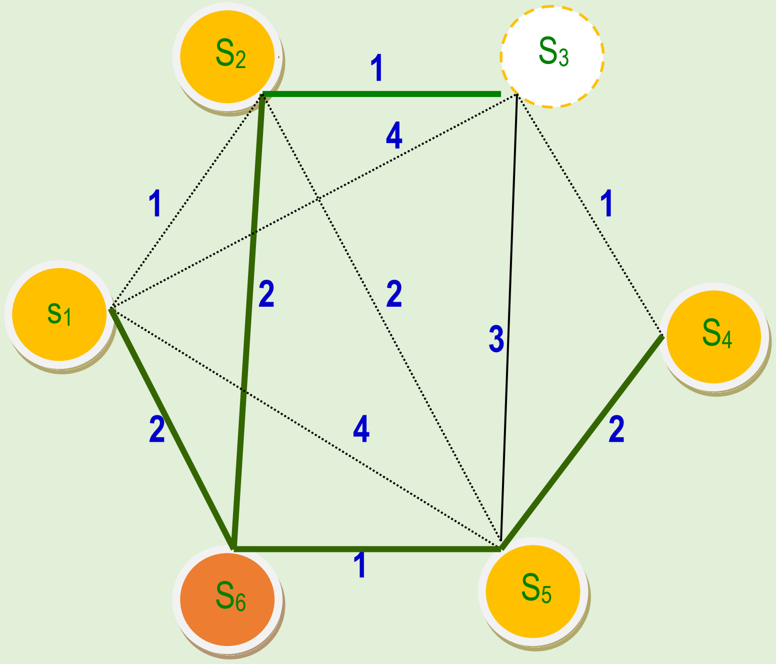
Marquer le sommet s_6 et appliquer Dijkstra(G,cout, s_6)

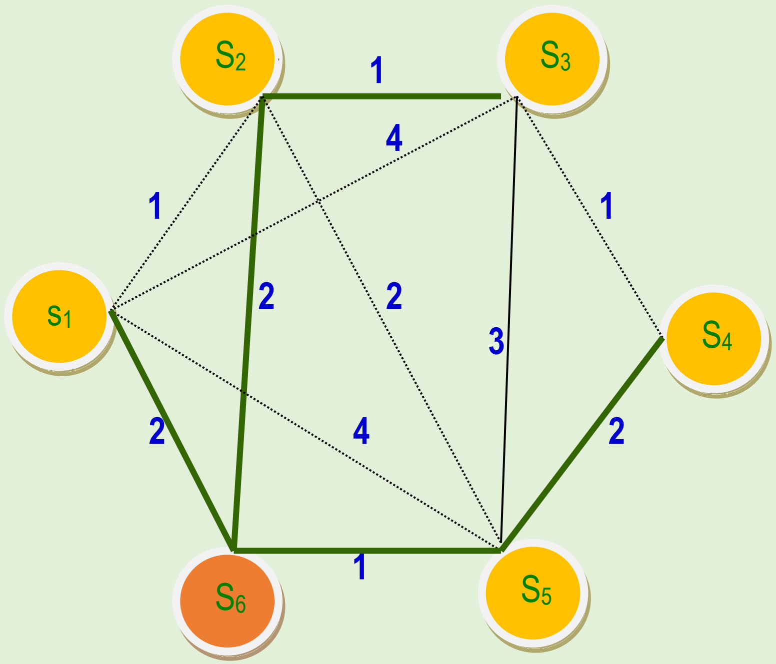





S2
S3
1
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
1
S6
S5


S2
S3
1
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
1
S6
S5


S2
1
S3
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
S6
1
S5


S2
1
S3
4
1
1
S1
2
2
3
S4
2
4
2
S6
1
S5

En calculant la somme des longueurs des chemins optimaux issus de s_6, on a:

Vers le sommet…	…la longueur est
s_1	2
s_2	2
s_3	3
s_4	3
s_5	1
Σ_6	11

En établissant le tableau des sommes Σ_1 des longueurs des chemins optimaux issus de s_i:

Sommet	Somme	Longueur
s_1	Σ_1	11
s_2	Σ_2	8
s_3	Σ_3	10
s_4	Σ_4	11
s_5	Σ_5	11
s_6	Σ_6	11

il appert que le choix du sommet s_2 du graphe G constitue une solution optimale au problème.

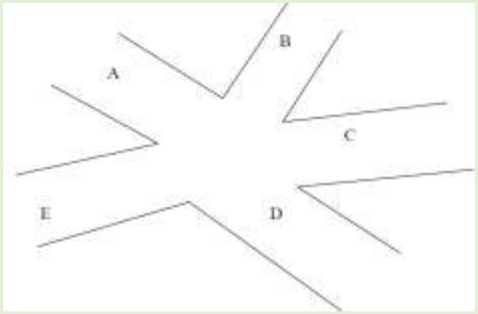
Le robot S doit donc être connecté au nœud 2 du réseau de connexion.

Le durée du cycle optimal est (en unités de temps) :

$$d_2 = 2 \times \Sigma_2 = 16$$

EXERCICE II **:** Franchissement d'un carrefour régulé par des feux tricolores (6 points)

La Sécurité Routière souhaite aménager un carrefour périurbain important (figure ci-dessous) où se croisent 5 axes routiers traversés par des flux de véhicules à haut débit.



Pour fluidifier le trafic tout en garantissant un franchissement du carrefour avec un haut niveau de sécurité, les mesures suivantes sont prises:

-réguler le franchissement du carrefour par des feux tricolores placés aux 5 entrées du carrefour,

-n'autoriser que les seuls franchissements indiqués par le tableau suivant :

En arrivant par…	A	B	C	D	E
un véhicule peut aller en…	C,E	A,E,D	A,D	C,A	C,D

-prévoir suffisamment de files sur chaque axe (travaux) pour assurer une entrée sans risque dans un axe en cas de trafic conjoint (venant de deux axes différents sans se croiser).

-interdire le croisement des flots de véhicules: les franchissements **incompatibles** sont indiqués dans le tableau suivant:

Le franchissement…	AC	CA	AE	BA	BE	BD	CA	CD	DC	DA	EC	ED
	BE	BD	BE	CA	AE	AC	BD	BD	AC	CD	AC	BD
est incompatible avec …	BD	BE		DA	AC	ED	BE	AC	EC	CA	BD	CD
	CD	BA			CA	EC	BA	ED		BD	CD	
	DC	DA				DA	DA	EC		BE	DC	
	DA					CD		DA		BA	DA	
	EC					CA				AC		
										EC		

Pour l'ingénieur informaticien, le problème consiste, dans le cadre de ces mesures, à réduire au maximum le temps d'attente des véhicules devant chaque feu. En d'autres termes trouver le nombre minimum de cycles des feux tricolores.

1-Proposer un modèle de graphe pour le franchissement du carrefour. (1.5 point)
2-Montrer que le problème d'optimisation du nombre de cycles se ramène à un problème classique de coloration de graphe. Formuler avec précision ce problème (1 point)
3-Proposer une solution au problème ainsi formulé en exposant l'algorithme retenu et sa trace d'exécution. (3.5 points)

1-Proposer un modèle de graphe pour le franchissement du carrefour. (1.5 point)

Il s’agit de mettre en évidence :

- les **franchissement** autorisées,
- la relation d’**incompatibilité** qui est imposée entre ces franchissements

Les franchissement sont **incompatibles** lorsqu’ils ne peuvent pas se produire au cours d’un même cycle de feux de signalisation.

Un modèle de graphe approprié peut être un graphe G

G=(S, A)

non orienté car l’incompatibilité est propriété symétrique.

Le graphe est défini selon les conventions suivantes:

-un **sommet** $s_i \in S$, formalise un **franchissement**,

-une **arête** $a_k = (s_i, s_j) \in A$ modélise la propriété d'**incompatibilité** entre les deux franchissements formalisés par ses extrémités s_i et s_j .

Dans notre cas particulier décrit comme:

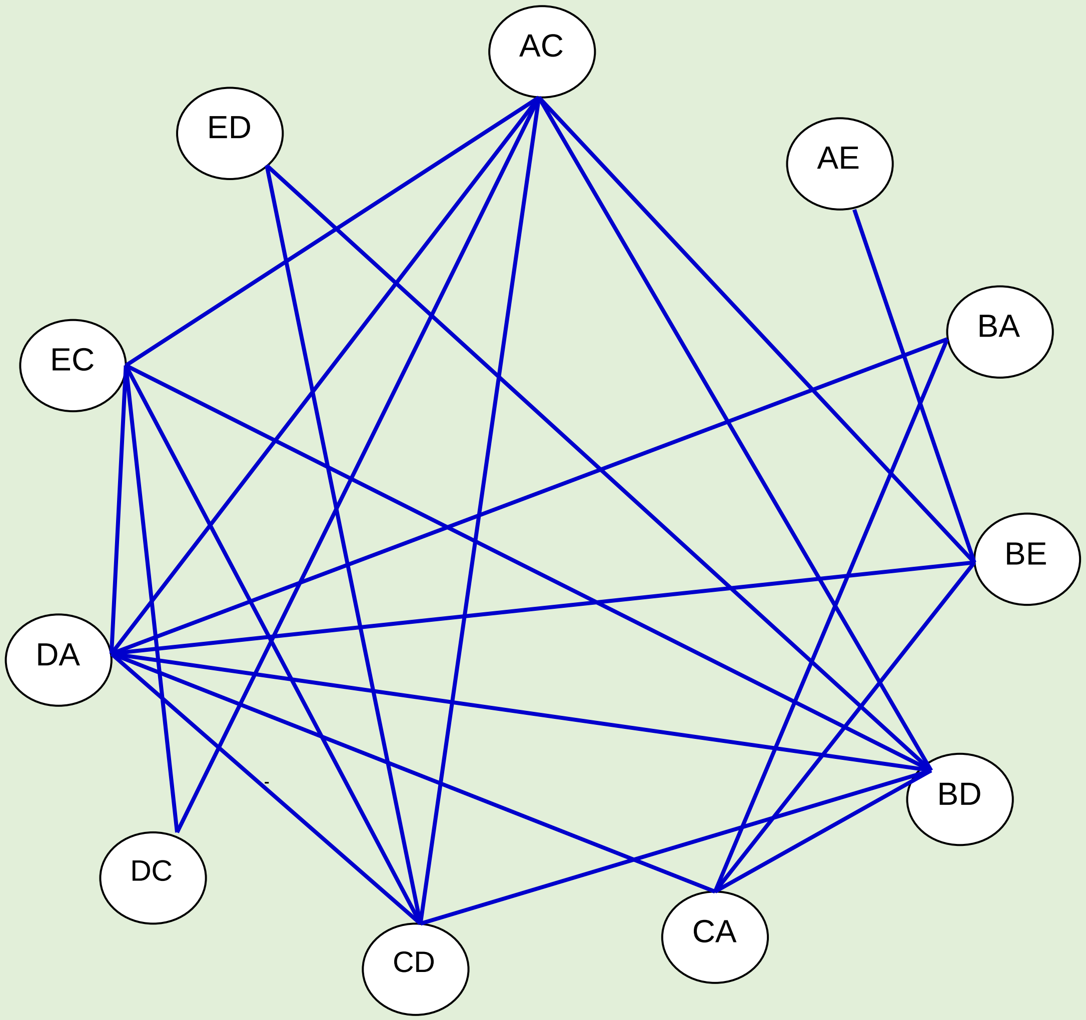
En arrivant par…	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
un véhicule peut aller en…	**C, E**	**A, E, D**	**A, D**	**C, A**	**C, D**

le modèle de graphe G proposé est défini comme suit :

S = { **AC, AE, BA, BE, BD, CA, CD, DC, DA, EC, ED** }

A = { **(AC, BE), (AC, BD), (AC, CD), (AC, DC), (AC,DA), (AC, EC),(BA, CA), (BA, DA),**
(BE, AE), (BE, DA), (BE, CA), (BD, ED), (BD, EC), (BD, DA), (BD, CD), (BD, CA),
(CA, DA), (CD, ED), (CD, EC), (CD, DA), (DC, EC), (DA, EC) }

Il peut être visualisé comme suit :



2-Montrer que le problème d’optimisation du nombre de cycles se ramène à un problème classique de coloration de graphe.

Dans le modèle de graphe proposé, deux franchissements **incompatibles** sont représentés par deux sommets adjacents : extrémités d’une **arête**.

Donc, un ensemble de sommets formant un **stable** représentent des franchissements compatibles, ceux pouvant se produire au cours d’un **même cycle**.

Un cycle peut être formalisé par un stable.

Chercher le nombre minimum de cycles revient donc à chercher le nombre minimum de stables dans S.

Or, dans un graphe coloré les sommets d'un stable peuvent porter **une même couleur**.

Chercher le nombre le **nombre minimum de cycles** revient donc à chercher le nombre **minimum** de couleurs pour colorer tous les sommets du graphe.

Formuler avec précision ce problème (1 point)

Plus précisément, le problème de recherche de nombre minimum de cycles se ramène au calcul du nombre chromatique γ (G) du graphe G.

3-Proposer une solution au problème ainsi formulé en exposant l'algorithme retenu et sa trace d'exécution. (3.5 points)

Le problème de calcul du nombre chromatique est un problème **NP-complet**.

L'algorithme de Welsh Powell est un algorithme **polynomial** qui fournit une solution «**approchée**».

Il permet d'obtenir une coloration du graphe qui utilise un nombre k «**pas trop grand»** de couleurs.

Cependant il **n'assure pas** que le résultat retourné soit **minimum**, c'est à dire que :

$$k = \gamma(G)$$

avec $\gamma(G)$ désignant le nombre chromatique de G.

La mise en œuvre de l’algorithme W-P implique trois étapes :

<u>Etape1</u>:

1- Classer les sommets du graphe dans l'ordre **décroissant** de leur degré.

2- Attribuer à chacun des sommets un ordre dans la liste triée.

<u>Étape 2</u>

En parcourant la liste des sommet **dans l'ordre** de tri:

1- attribuer une couleur **non encore utilisée** au premier sommet **non encore coloré**

2- attribuer cette **même couleur** à chaque sommet **non encore coloré** et **non adjacent** à un sommet de **cette couleur**.

<u>Étape 3</u>

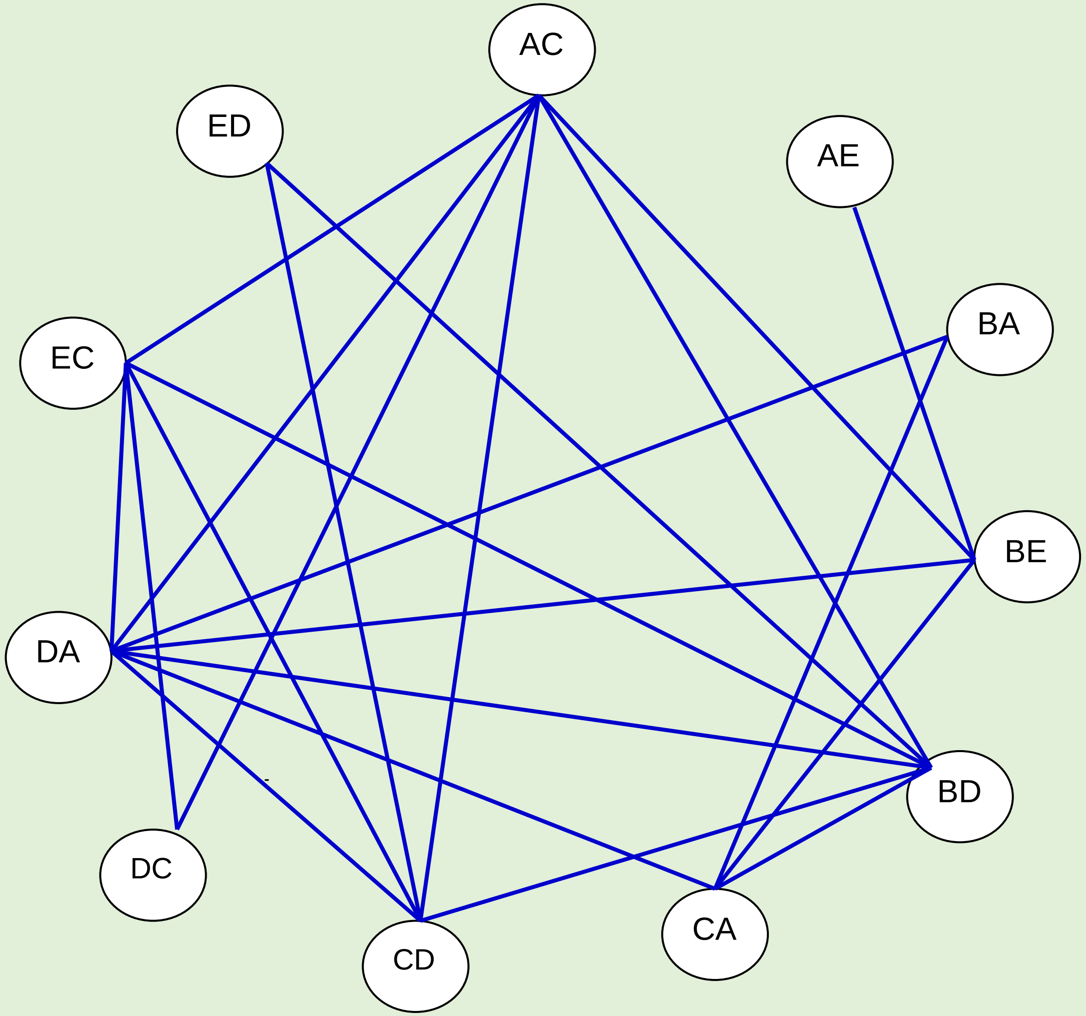
1-S'il reste des sommets non colorés revenir à l'étape 2.

2- Sinon, la coloration des sommets est terminée.

<u>Mise en œuvre de l'algorithme de W-P</u> :

Au départ :

- -le graphe G
- -aucun nœud n'est coloré


AC
ED
AE
BA
EC
BE
DA
BD
DC
CA
CD

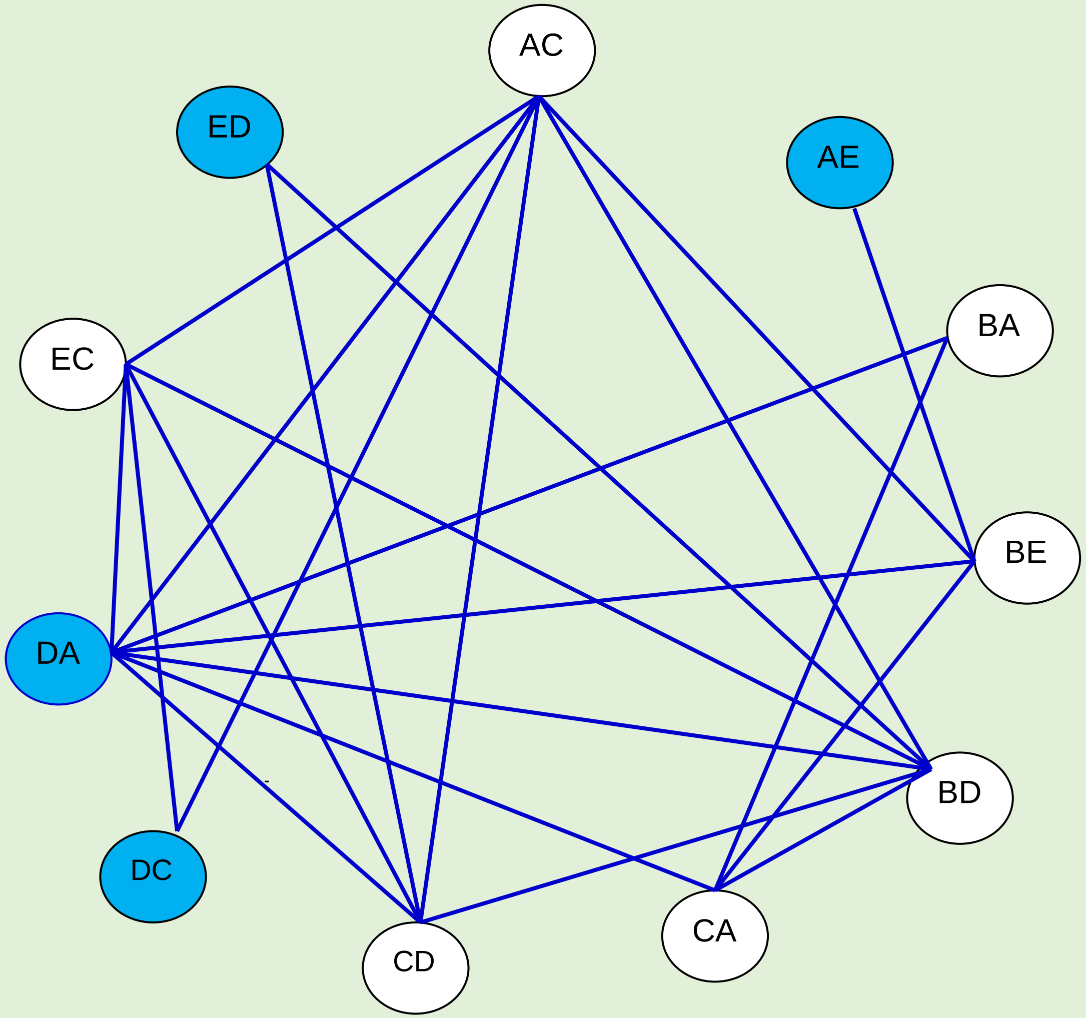
Etape 1 : commencer par trier les sommets dans l'ordre **décroissant** de leur degré.

1- d°(DA) =7
2- d°(AC) =6
3- d°(BD) =6
4- d°(EC) =5
5- d°(CD) =5
6- d°(CA) =4
7- d°(BE) =4
8- d°(BA) =2
9- d°(DC) =2
10- d°(ED) =2
11- d°(AE) =1

Etape 2 : colorier en bleu, par exemple, le sommet **DA** et tous les sommets non adjacents

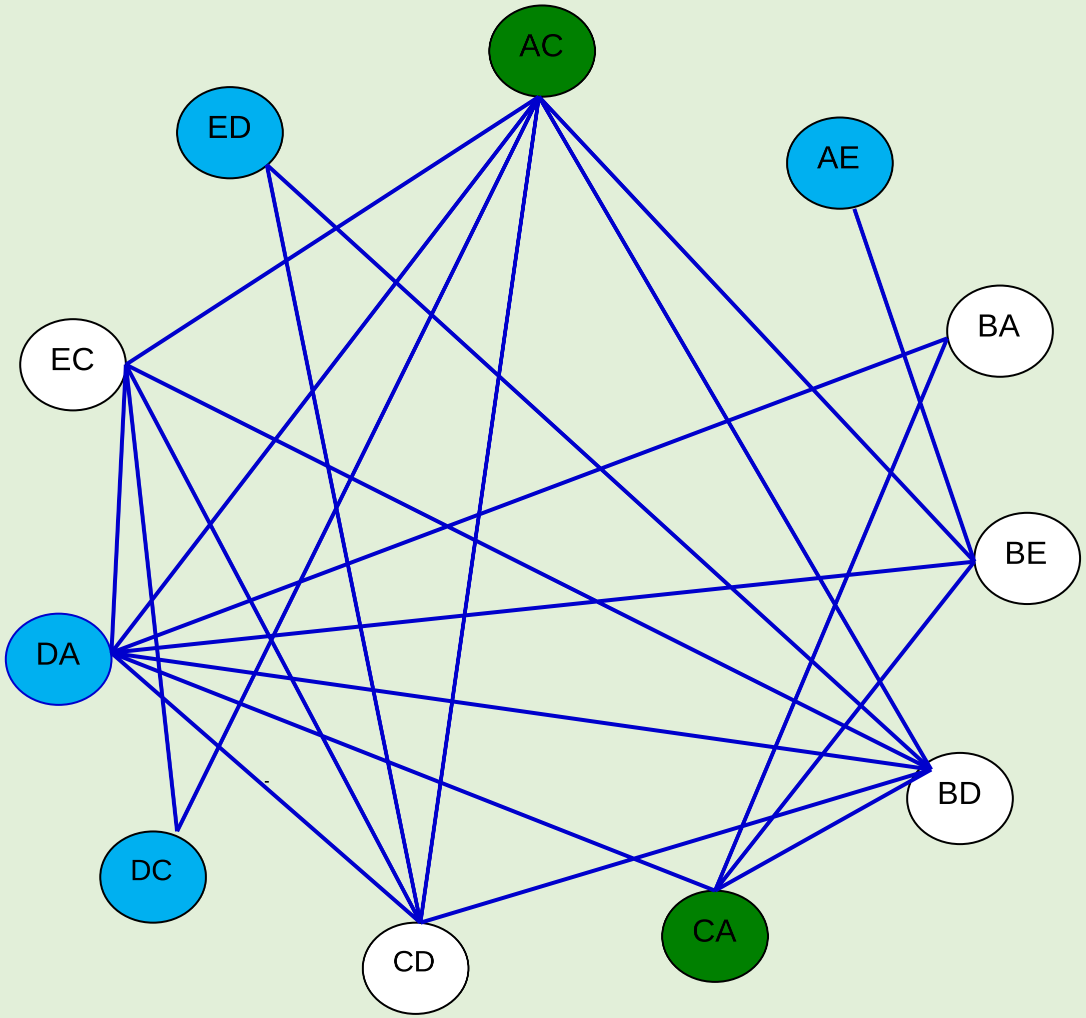
12- d°(DA) =7
13- d°(AC) =6
14- d°(BD) =6
15- d°(EC) =5
16- d°(CD) =5
17- d°(CA) =4
18- d°(BE) =4
19- d°(BA) =2
20- d°(DC) =2
21- d°(ED) =2
22- d°(AE) =1

1. ED, AC, AE et CA 2. BA, BE, BD et EC 3. DC et DA 4. CD



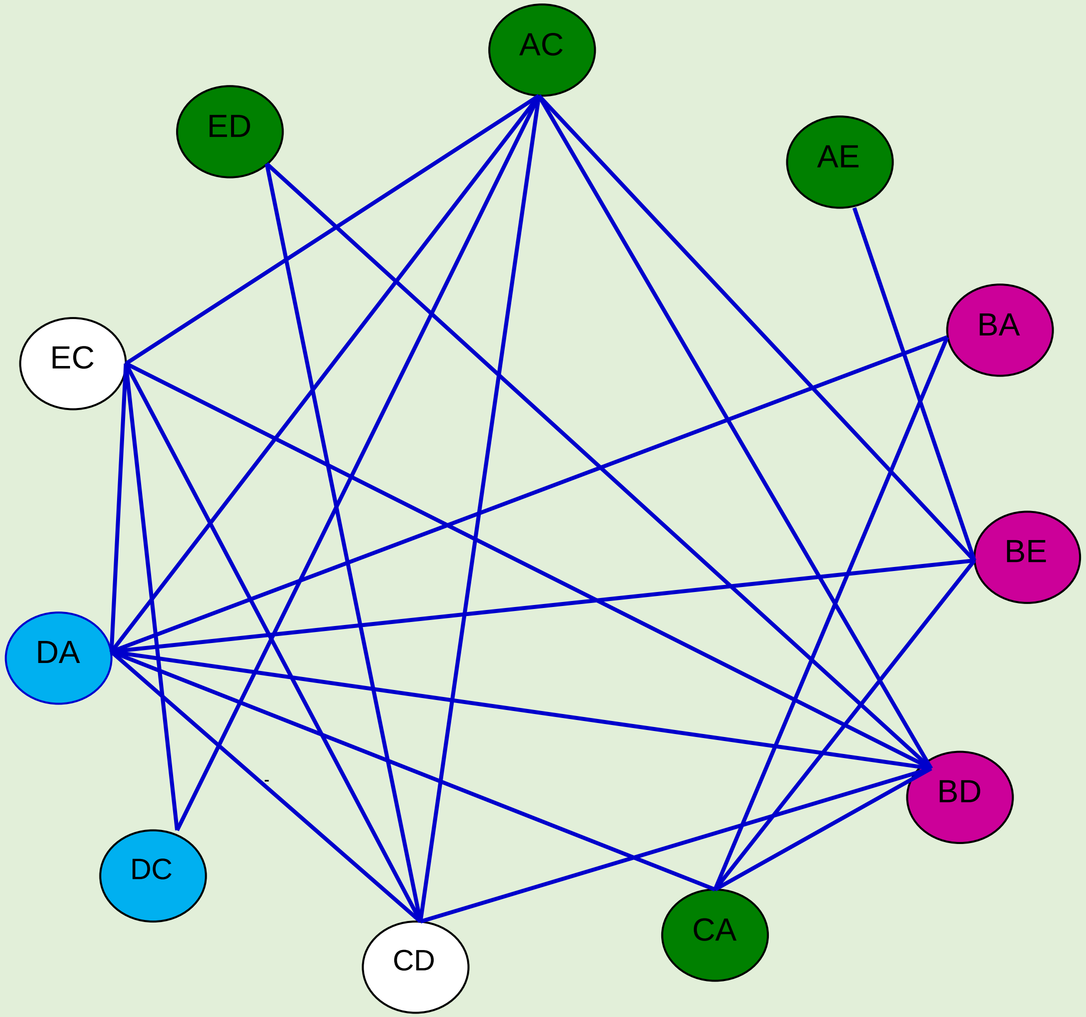
Etape 2 : colorier en vert, par exemple, le sommet **AC** et tous les sommets non adjacents

23- d°(DA) =7
24- d°(AC) =6
25- d°(BD) =6
26- d°(EC) =5
27- d°(CD) =5
28- d°(CA) =4
29- d°(BE) =4
30- d°(BA) =2
31- d°(DC) =2
32- d°(ED) =2
33- d°(AE) =1


AC
ED
AE
BA
EC
BE
DA
BD
DC
CA
CD

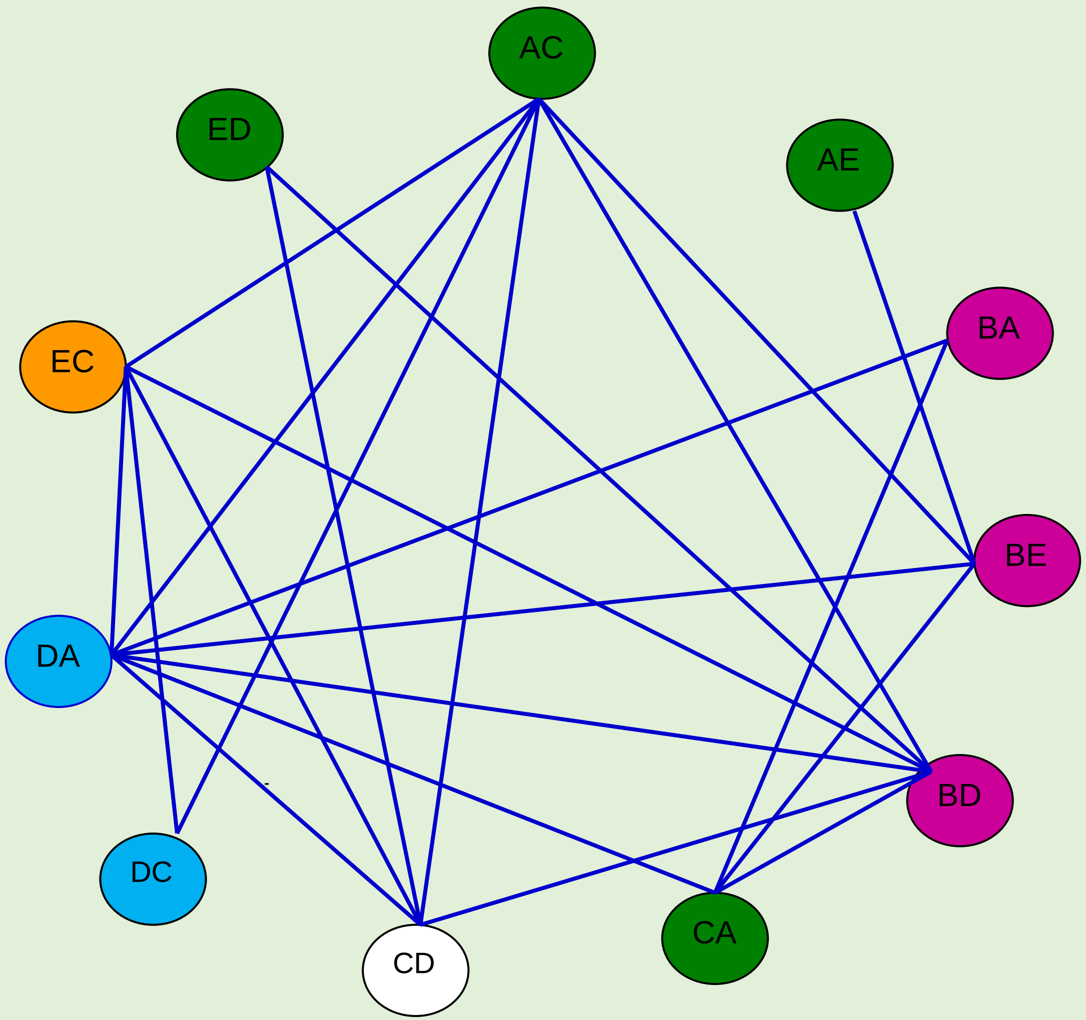
Etape 2 : colorier en rose, par exemple, le sommet **BD** et tous les sommets non adjacents non colorés

34- d°(DA) =7
35- d°(AC) =6
36- d°(BD) =6
37- d°(EC) =5
38- d°(CD) =5
39- d°(CA) =4
40- d°(BE) =4
41- d°(BA) =2
42- d°(DC) =2
43- d°(ED) =2
44- d°(AE) =1


AC
ED
AE
BA
EC
BE
DA
BD
DC
CA
CD

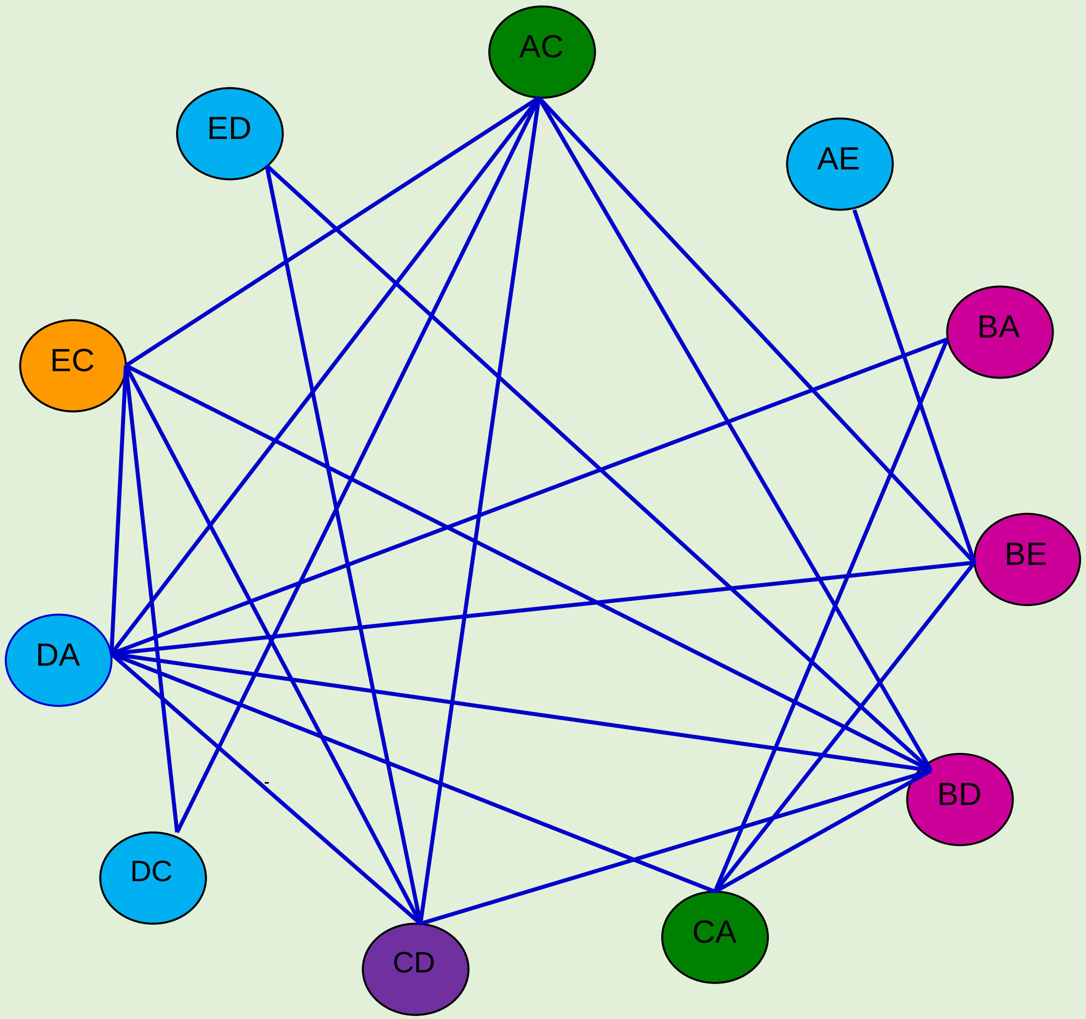
Etape 2 : colorier en orange, par exemple, le sommet **EC** et tous les sommets non adjacents non colorés

45- d°(DA) =7
46- d°(AC) =6
47- d°(BD) =6
48- d°(EC) =5
49- d°(CD) =5
50- d°(CA) =4
51- d°(BE) =4
52- d°(BA) =2
53- d°(DC) =2
54- d°(ED) =2
55- d°(AE) =1

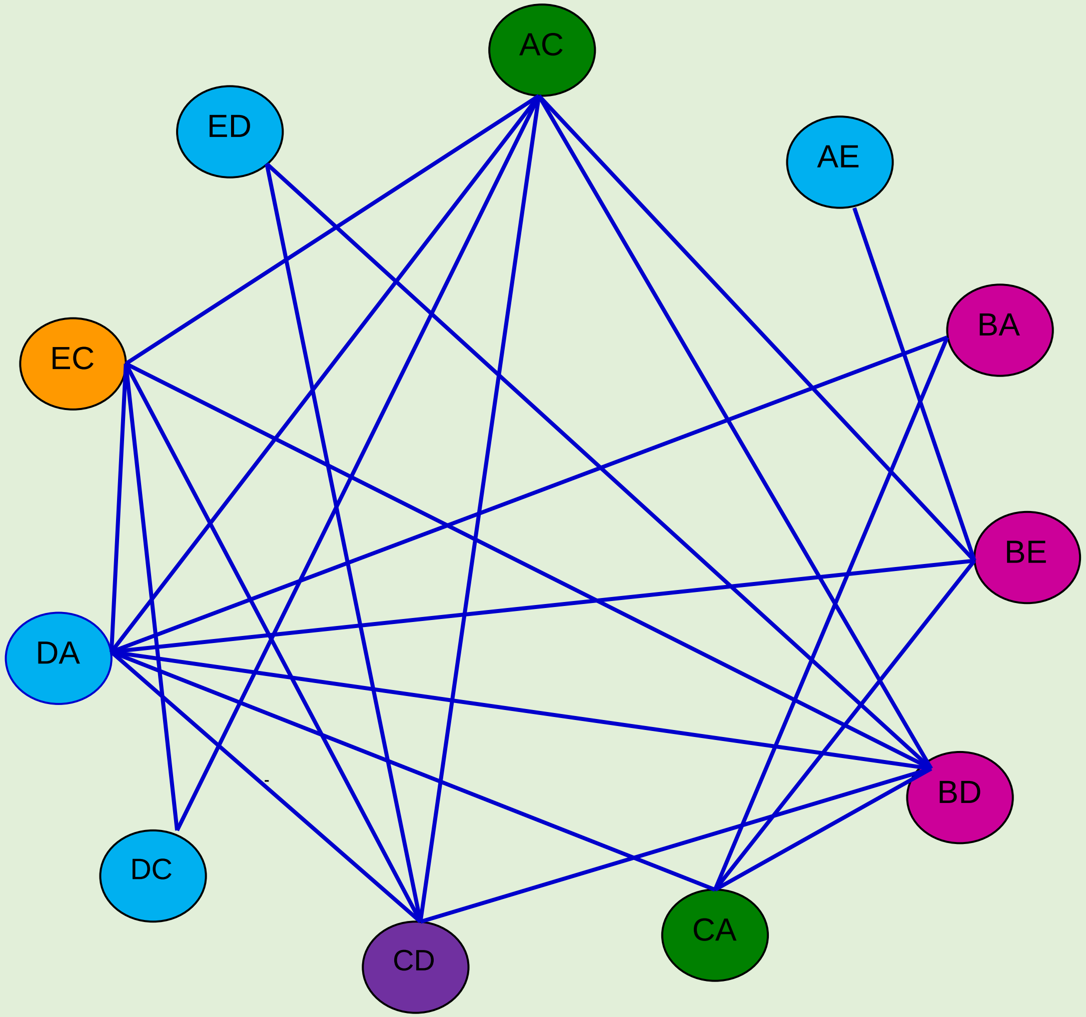

AC
ED
AE
BA
EC
BE
DA
BD
DC
CA
CD

Etape 2 : colorier en violet, par exemple, le sommet **CD** et tous les sommets non adjacents non colorés

56- d°(DA) =7
57- d°(AC) =6
58- d°(BD) =6
59- d°(EC) =5
60- d°(CD) =5
61- d°(CA) =4
62- d°(BE) =4
63- d°(BA) =2
64- d°(DC) =2
65- d°(ED) =2
66- d°(AE) =1


AC
ED
AE
BA
EC
BE
DA
BD
DC
CA
CD

D'après l'algorithme de W-P, il est possible de colorier le graphe G avec 5 couleurs.



Donc, on a :

$$\gamma(G) \approx 5$$

Ce qui signifie que de façon optimale, le nombre de cycles est égal à 5.

Vérification de l'admissibilité de la solution :

$$\gamma(G) \approx 5$$

La solution obtenue respecte l'encadrement prévu :

1) $\gamma(G) < r+1 \leq 7+1 \leq 8$

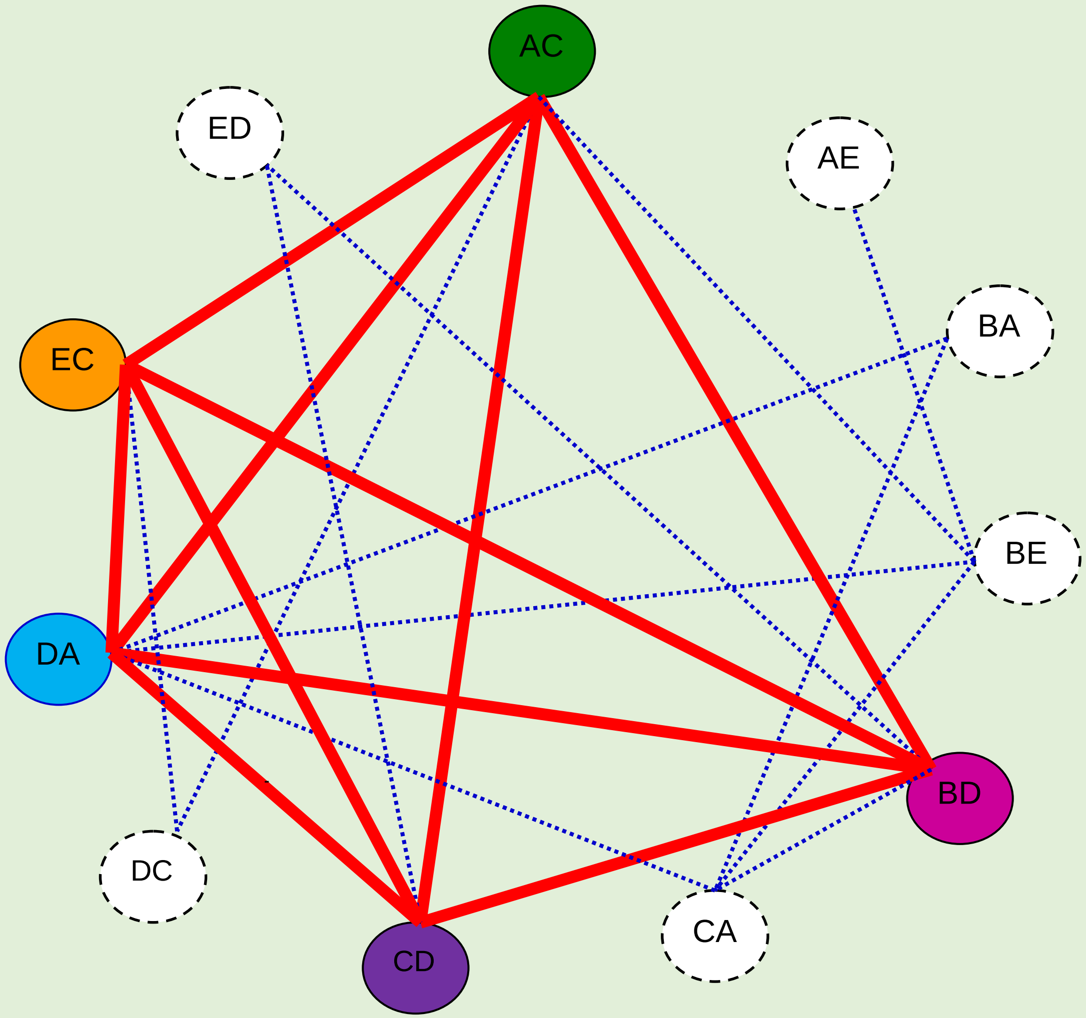
2) $\gamma(G) < n+1 - \alpha(G) \leq 11+1-4 \leq 8$

3) $\gamma(G) \geq \omega(G) \geq 5$

D'où : $5 \leq \gamma(G) \leq 8$

Elle est donc **admissible**.

On relèvera que la clique (en rouge) ci-dessous est maximale: c'est un **K_5** coloriable.



<u>Exercice III</u> : Optimisation d'une prise de décision en coopération (8 points)

Pour les Systèmes d'Intelligence Artificielle de dernière génération la prise de décision résulte de la coopération de plusieurs sous-systèmes fonctionnant en **mode coopératif.** Chaque sous-système est doté de connaissances expertes spécifiques qui lui confèrent la capacité de prendre un type de **décision partielle**, souvent simple, participant ainsi à l'élaboration d'une **décision globale,** souvent complexe.

Le tableau ci-après montre une décision globale décomposée en 13 décisions partielles codées A, B, C,…L ,M en précisant les relations de précédence entre ces décisions partielles ainsi que les durées maximales respectives pour les élaborer.

Pour les ingénieurs IA, 3 paramètres déterminent la performance d'un système de décision coopératif:

-la date au **plus tôt** pour la prise de chaque décision partielle,
-la date au **plus tard** pour la prise de chaque décision partielle,
-la **durée minimale** pour la prise de décision globale

1-Proposer un modèle de graphe pour représenter le système de décision coopératif. On peut utiliser les conventions suivantes:

-un sommet du graphe représente une décision; à chaque sommet, on associe 3 données :

-la **date au plus tôt** de la prise de décision **(**qui sera calculée en 2).
-la **date au plus tard** de la prise de décision. (qui sera calculée en 3)
-la **durée** maximale pour la prise de décision.

-un arc représente la **relation de précédence** entre deux décisions partielles : l'arc (**x**,**y**) signifie que la décision **y** est précédée immédiatement de la décision **x**.

- deux sommets particuliers sont à distinguer:

- l'un, appelé **Début,** représente la décision de lancer le processus de décision: cette décision n'est précédée d'aucune autre décision. Sa durée est nulle et ses dates au plutôt et au plus tard sont égales à 0.
- l'autre, appelé **Fin,** représente la décision de terminer le processus de décision; la durée est nulle; elle ne précède aucune décision. (1.5 point)

Code décision	Décision(s) précédente(s)	Durée (en unité de temps)
A	Néant	1
B	A	3
C	B	1
D	A	2
E	C, D	1
F	Néant	3
G	B, F	0
H	E, G	8
I	H	8
J	D, I	3
K	I	4
L	K	4
M	L	1

2-Montrer que sur la base du modèle précédent, le problème calcul de la date **au plus tôt** d'une prise de décision partielle **X** se ramène au problème de recherche d'un **chemin optimal** entre le sommet **Début** et le sommet représentant **X.** (1.5 point)

En déduire immédiatement une solution pour calculer :

- les dates au **plus tôt** de prise de chaque décision,
- la **durée optimale** de la prise de décision globale. (2 points)

On souhaite savoir, dans le cadre de la solution proposée précédemment, quelles sont :

-les décision partielles dont la date plus tôt **ne peut pas être retardée**: «décisions critiques»

-les décision partielles pour lesquels **il est possible de retarder** la date au plus tôt sans remettre en cause la durée optimale de la décision globale calculée en 2.

D'où le calcul, pour chaque décision, de sa date d'élaboration **au plus tard**.

3-Montrer que le problème de calcul de la date **au plus tard** d'une décision X se ramène à la recherche, dans le modèle de graphe, d'un chemin **optimal** entre le sommet **X** et le sommet **Fin**. (2 points)

En déduire la détermination des décisions critiques (décisions dont la date au plus tôt est égale à la date au plus tard) (1 point)

1-Proposer un modèle de graphe pour représenter le système de décision coopératif.

En tenant compte des conventions précédentes, le modèle proposé peut être un graphe orienté G= (S,A) défini comme suit:

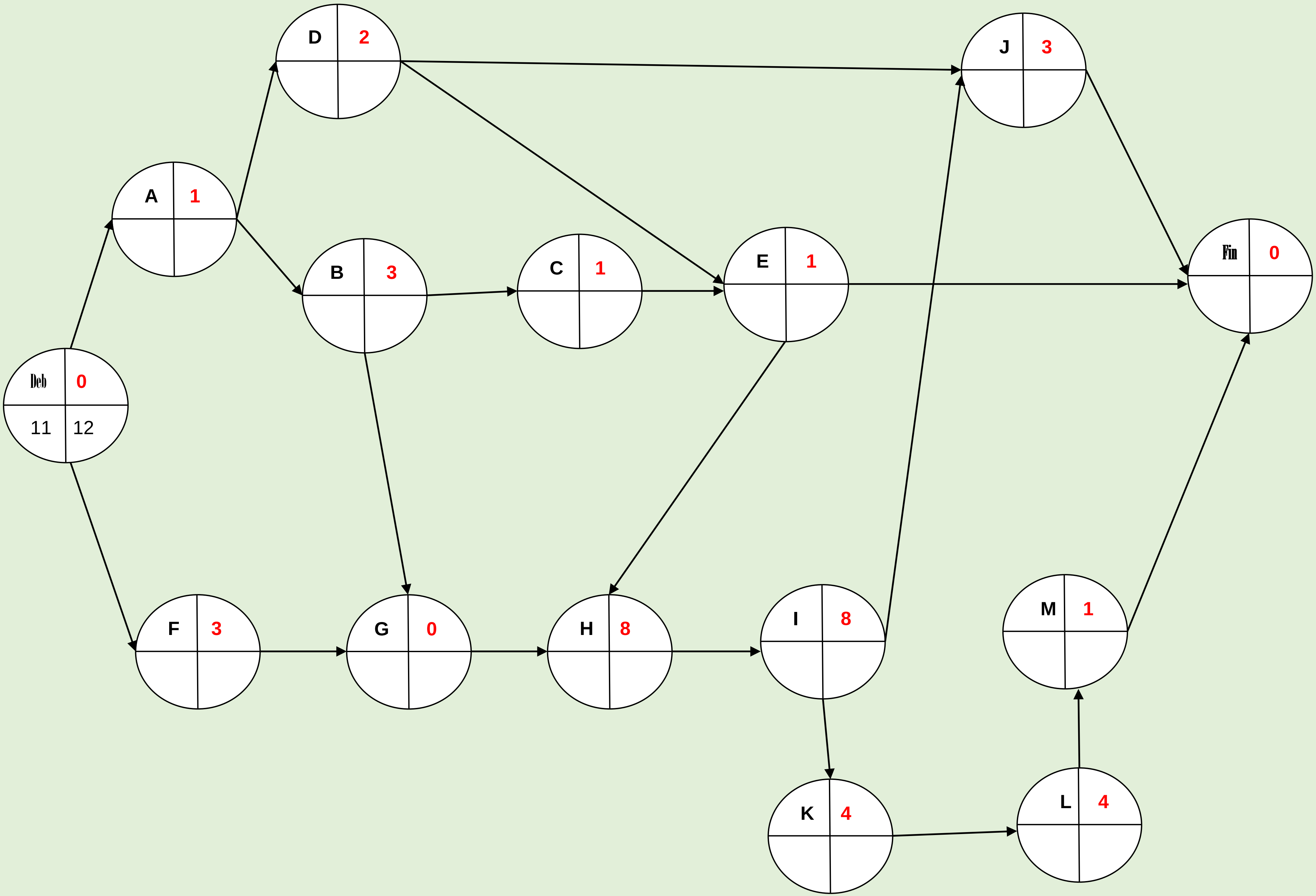
S= {Deb, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, Fin}

A = { (Deb, A), (Deb, F), (A, B), (B, C), (C, E), (A, D), (D, E), (B, G), (F, G),
(E, H), (G, H), (H, I), (D, J), (I, J), (I, K), (K, L), (L, M), (J, Fin), (M, Fin) }

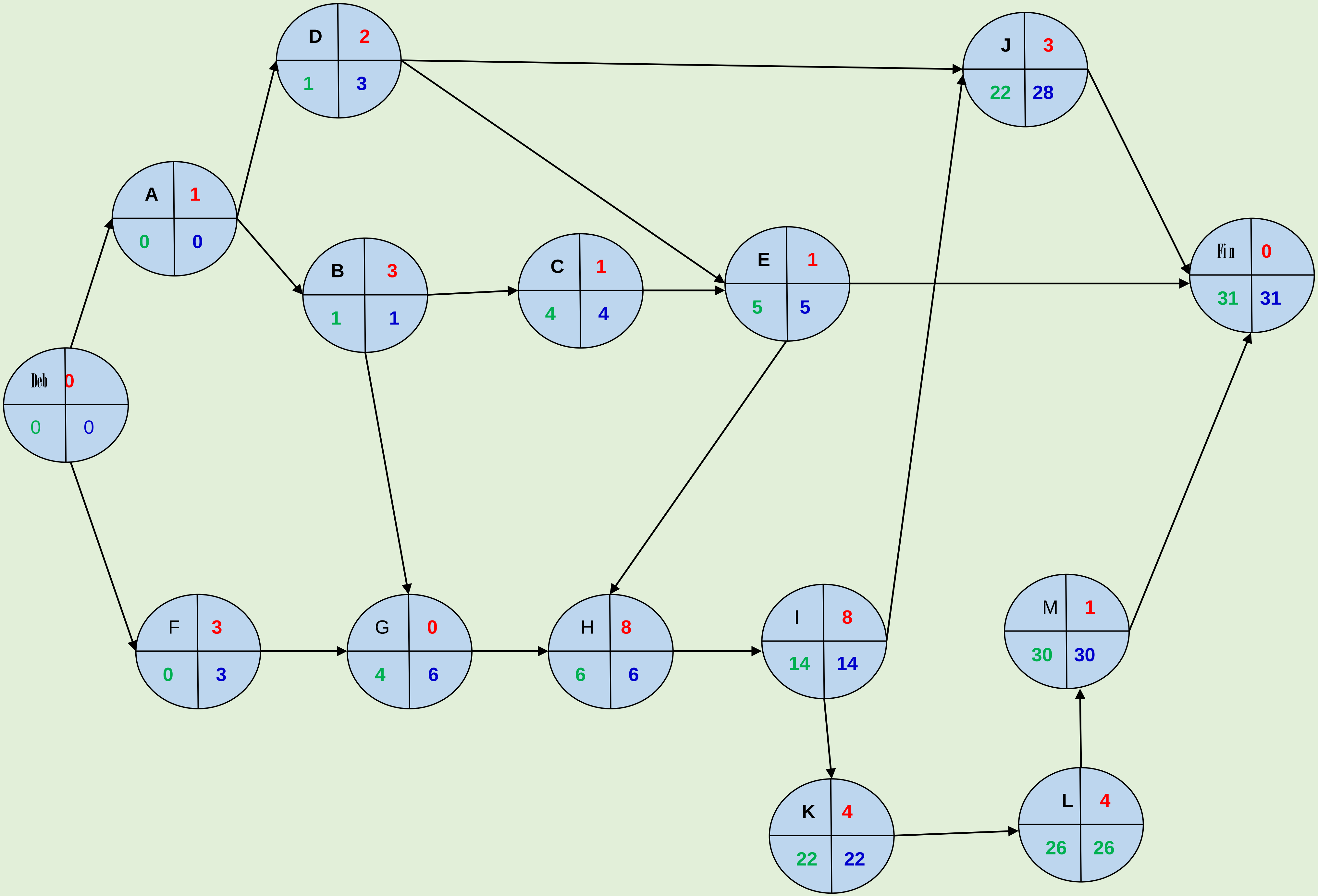
Chaque sommet du modèle de graphe porte 3 données:

- -la **durée** maximale d'une prise de décision partielle.
- -la **date au plus tôt** de la prise de décision **(**qui sera calculée en 2).
- -la **date au plus tard** de la prise de décision. (qui sera calculée en 3)

Le modèle de graphe est visualisé ci-après. A titre indicatif, le modèle complet est ensuite visualisé.



D 2
J 3
A 1
B 3
C 1
E 1
Fin 0
Deb 0
11 12
F 3
G 0
H 8
I 8
M 1
K 4
L 4


Deb 0
0 0
A 1
0 0
D 2
1 3
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26

2-Montrer que sur la base du modèle précédent, le problème calcul de la date **au plus tôt** d'une prise de décision partielle **X** se ramène au problème de recherche d'un **chemin optimal** entre le sommet **Début** et le sommet représentant **X.** (1.5 point)

Pour préserver la relation de précédence on doit imposer qu'une décision:

- -ne peut être prise
- -qu'une fois prise **toutes** les décisions qui la précèdent.

Donc, la détermination de la date au plus tôt d'une décision X se ramène au calcul :

- - de la longueur **L_x** du **chemin le plus long**
- - entre les sommets **DEBUT** et **X**

D’où la formule suivante de calcul de la date au plus tôt d’une décision:

$$\text{D+tôt}(X) = \mathbf{L_X}$$

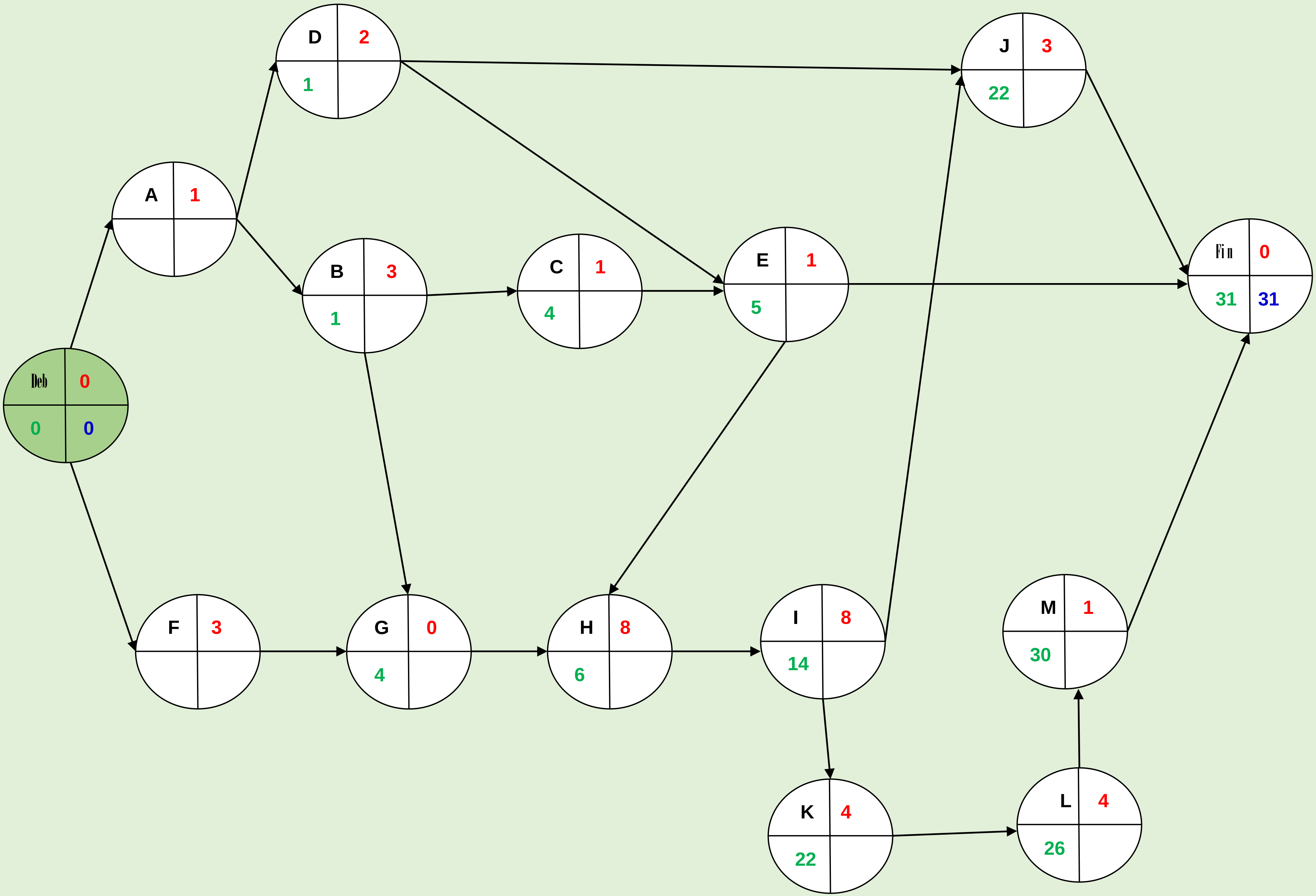
Dans le modèle de graphe proposé, la longueur d’un chemin est calculée en faisant la somme de tous les sommets qui s’inscrivent le long de ce chemin.

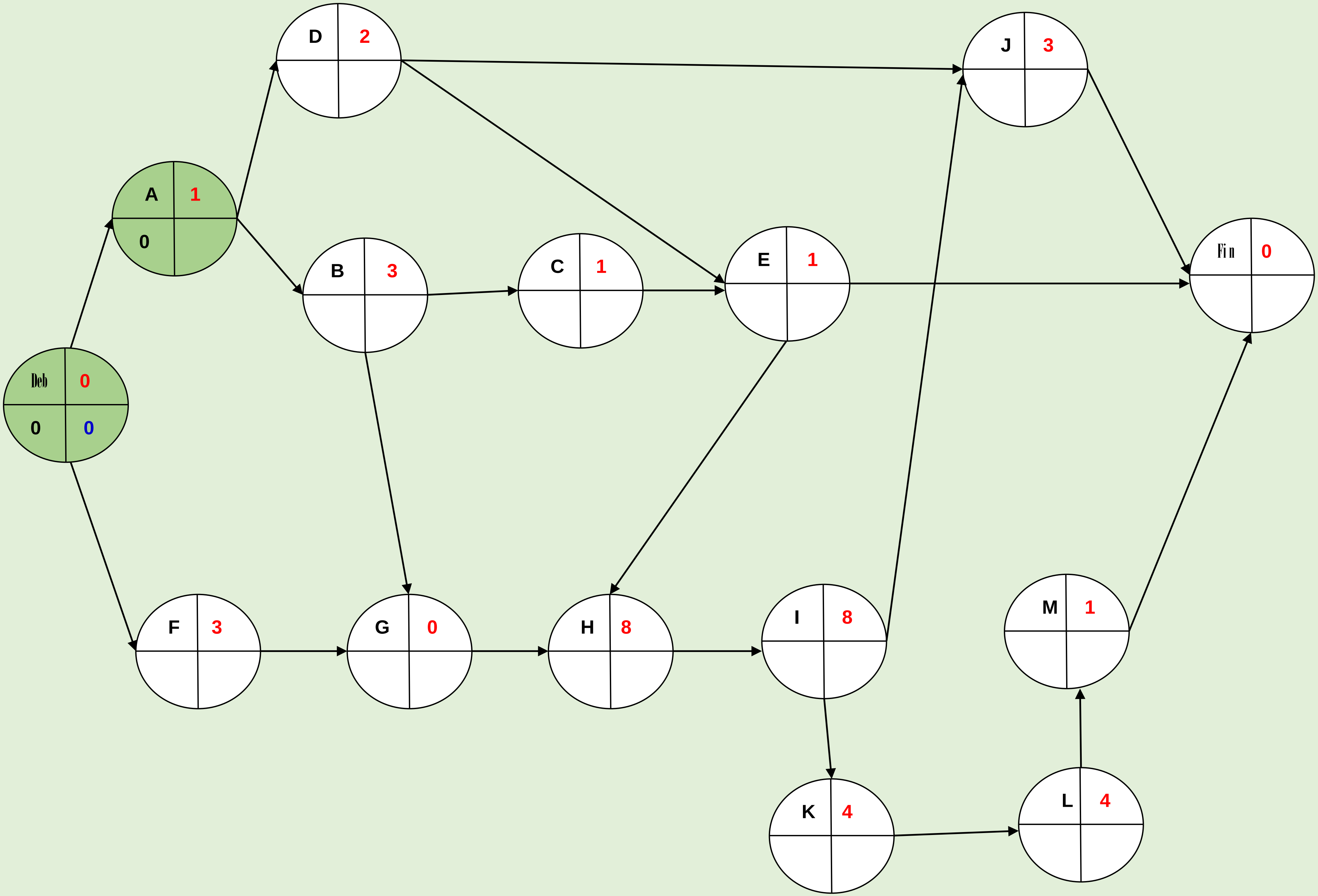
En déduire immédiatement une solution pour calculer :

- les dates au **plus tôt** de prise de chaque décision,

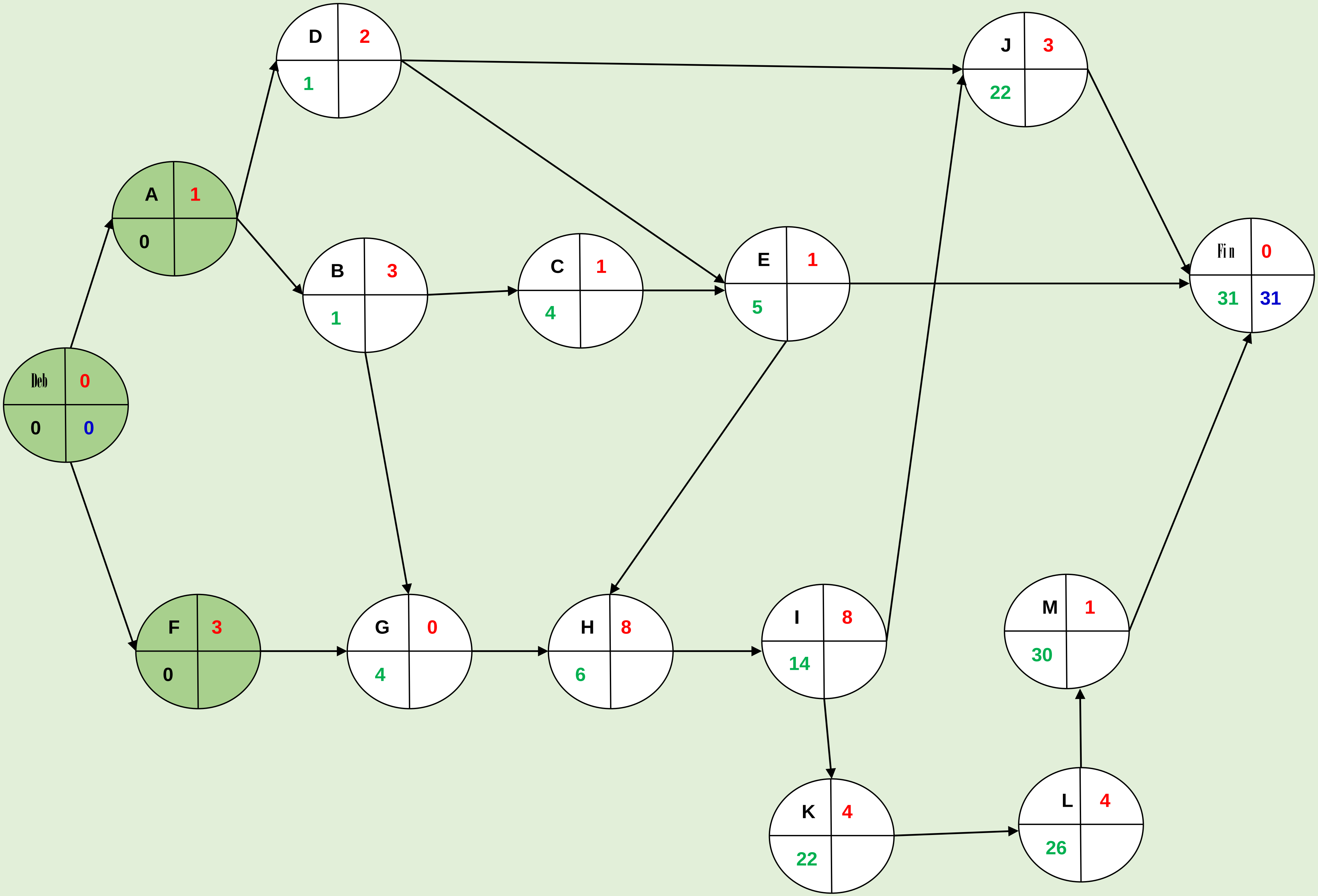
En appliquant l'**algorithme de Bellman** pour le calcul du plus long chemin, on obtient avec la formule précédente, le tableau suivant :

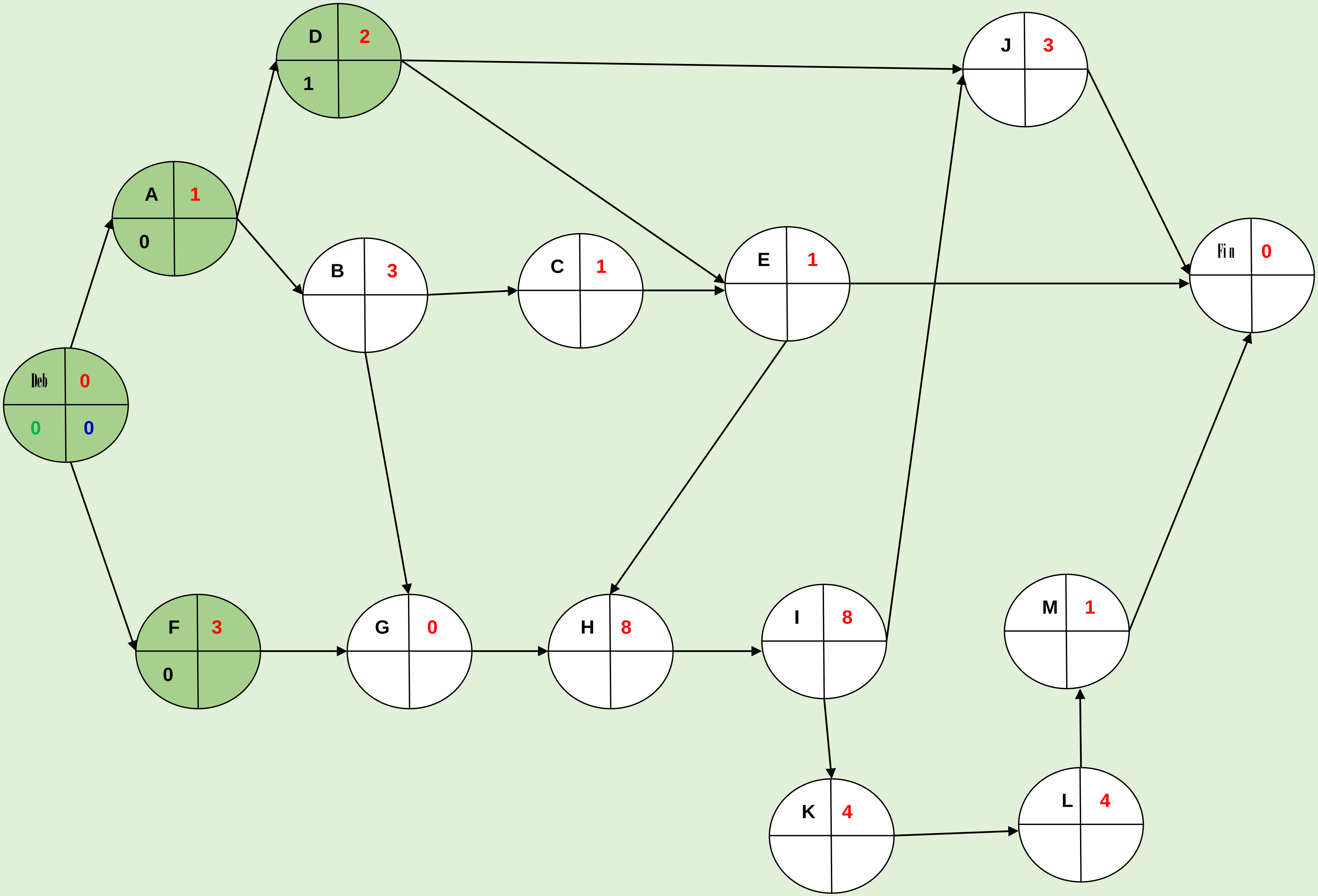
Code décision	Décision(s) précédente(s)	Durée (en unité de temps)	Date au plus tôt
A	**Néant**	**1**	**0**
B	**A**	**3**	**1**
C	**B**	**1**	**4**
D	**A**	**2**	**1**
E	**C, D**	**1**	**5**
F	**Néant**	**3**	**0**
G	**B, F**	**0**	**4**
H	**E, G**	**8**	**6**
I	**H**	**8**	**14**
J	**D, I**	**3**	**22**
K	**I**	**4**	**22**
L	**K**	**4**	**26**
M	**L**	**1**	**30**


Deb 0
0 0
A 1
D 2
1
B 3
1
C 1
4
E 1
5
J 3
22
Fin 0
31 31
F 3
G 0
4
H 8
6
I 8
14
M 1
30
K 4
22
L 4
26

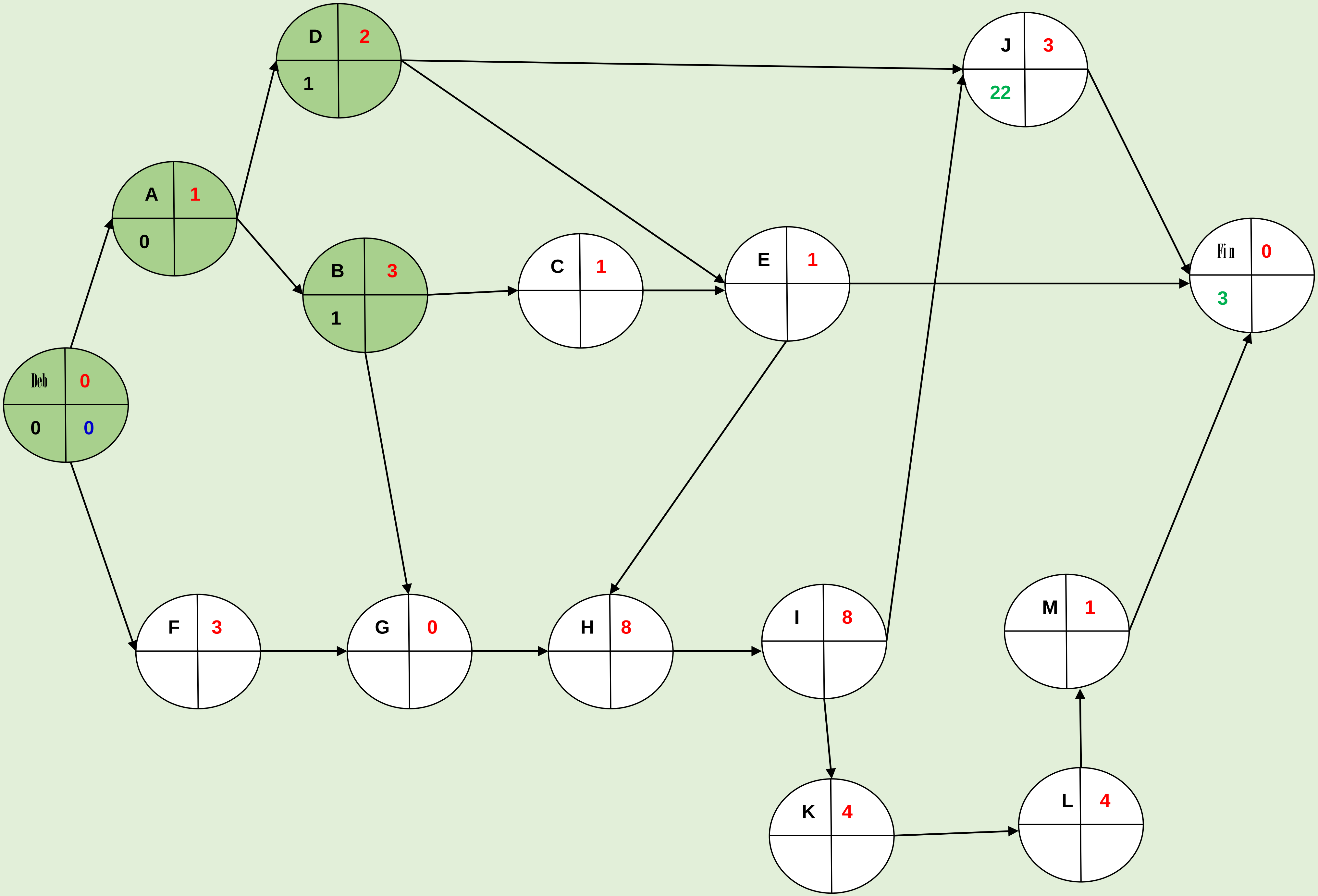


D 2
J 3
A 1
0
B 3
C 1
E 1
Fin 0
Deb 0
0 0
F 3
G 0
H 8
I 8
M 1
K 4
L 4

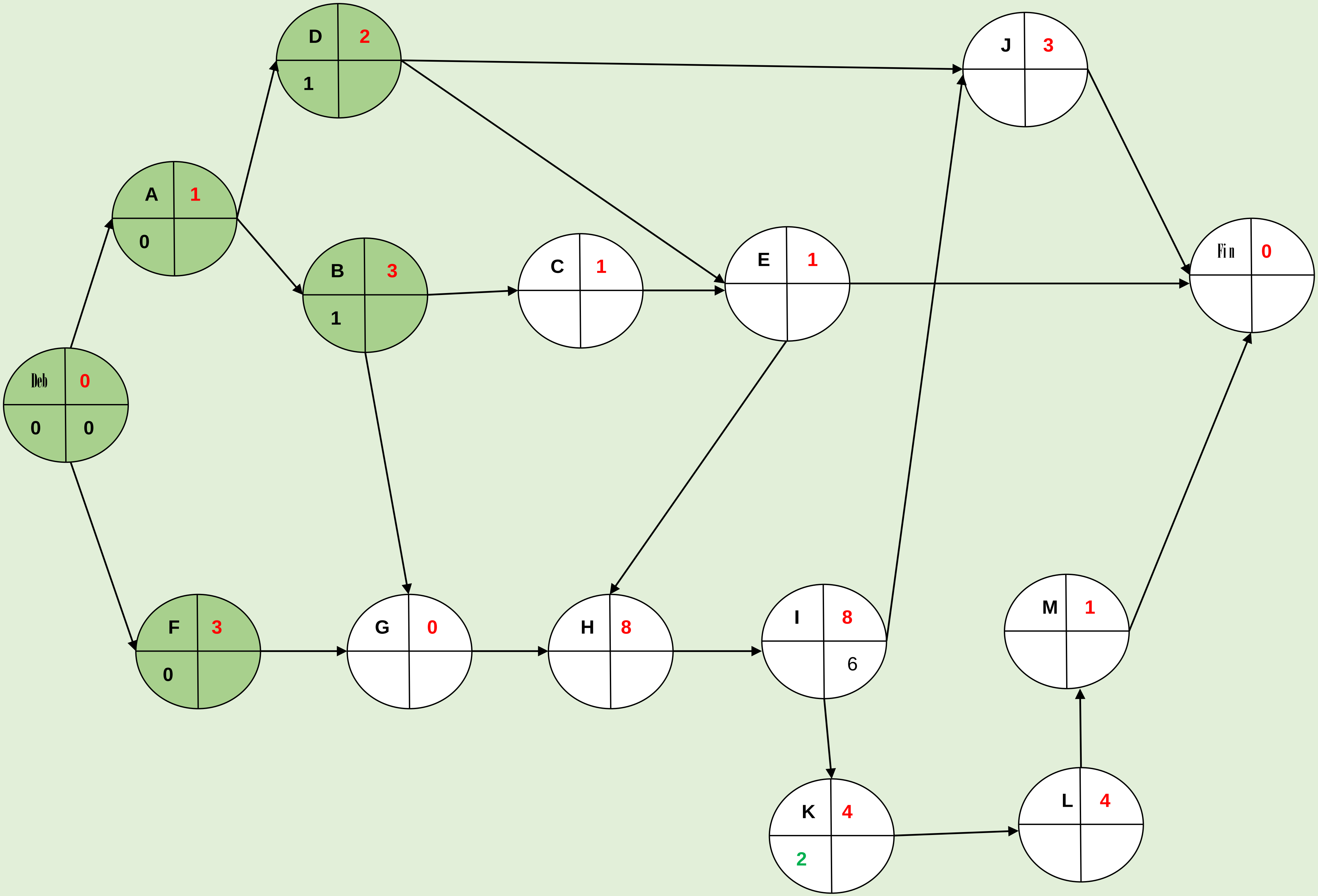

D 2
1
J 3
22
A 1
0
B 3
1
C 1
4
E 1
5
Fin 0
31 31
Deb 0
0 0
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
14
M 1
30
K 4
22
L 4
26



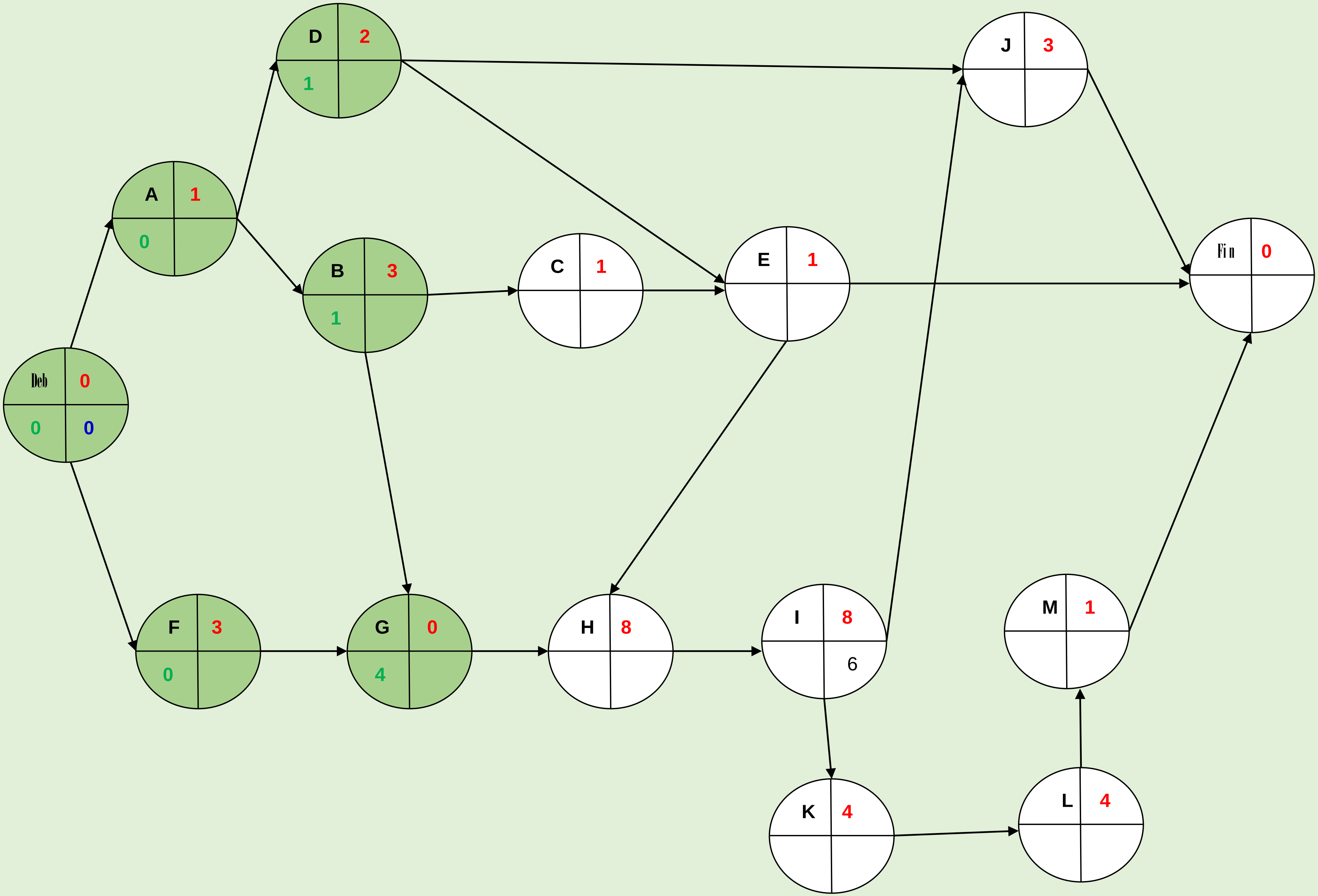
Deb 0
0 0
A 1
0
D 2
1
B 3
C 1
E 1
J 3
Fin 0
F 3
0
G 0
H 8
I 8
M 1
K 4
L 4



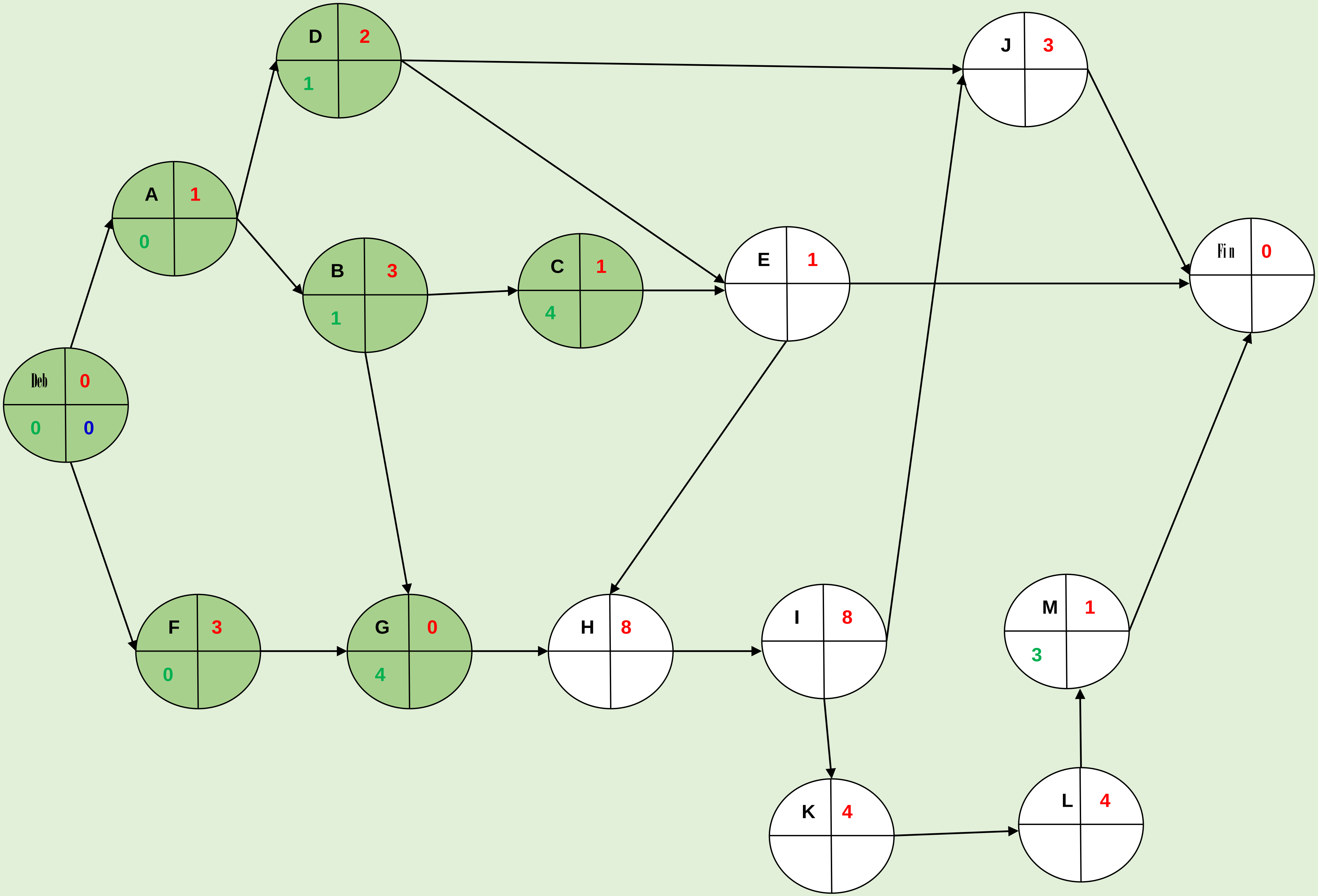
D 2
1
J 3
22
A 1
0
B 3
1
C 1
E 1
Fin 0
3
Deb 0
0 0
F 3
G 0
H 8
I 8
M 1
K 4
L 4



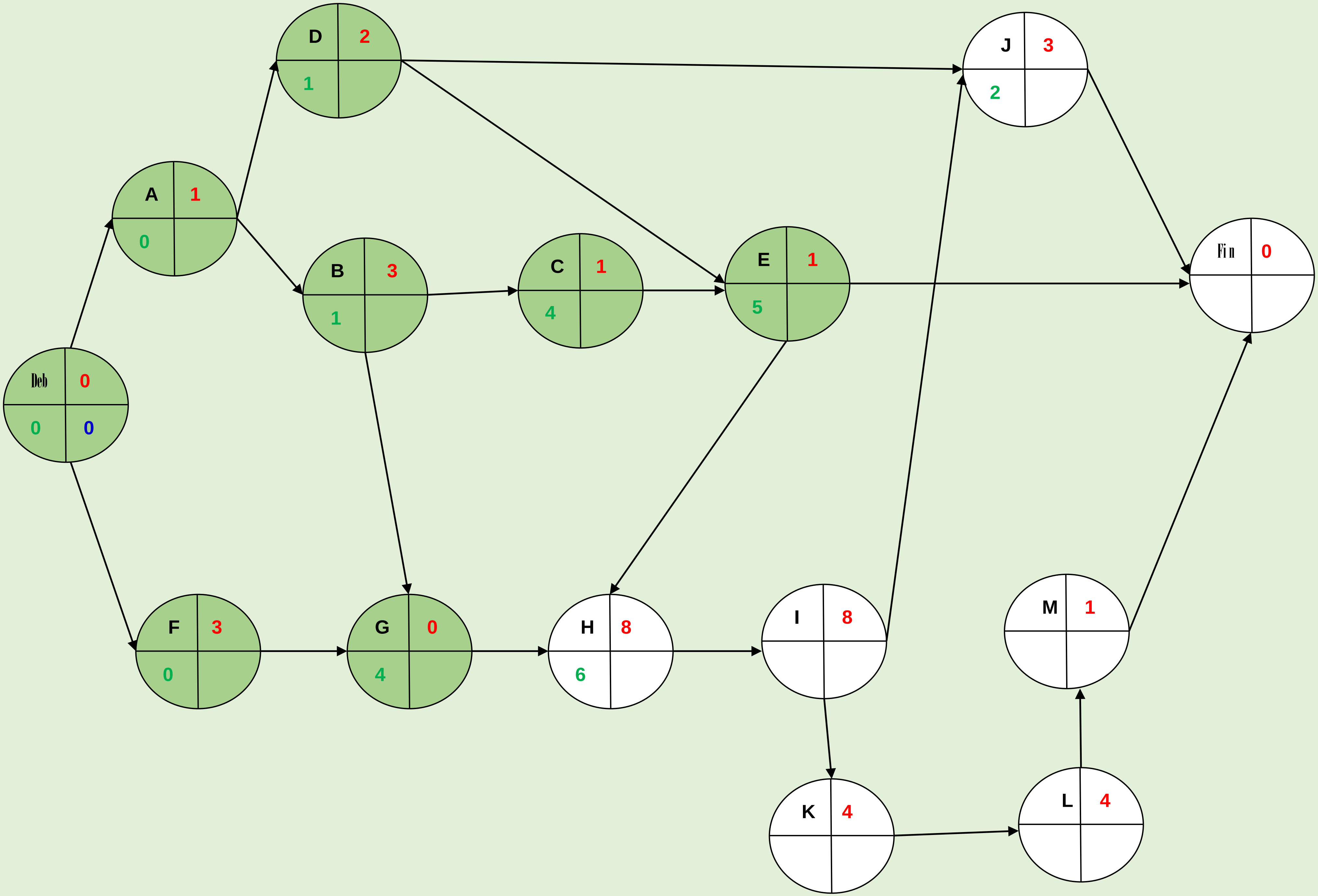
D
2
1
J
3
A
1
0
B
3
1
C
1
E
1
Fin
0
Deb
0
0
0
F
3
0
G
0
H
8
I
8
6
M
1
K
4
2
L
4



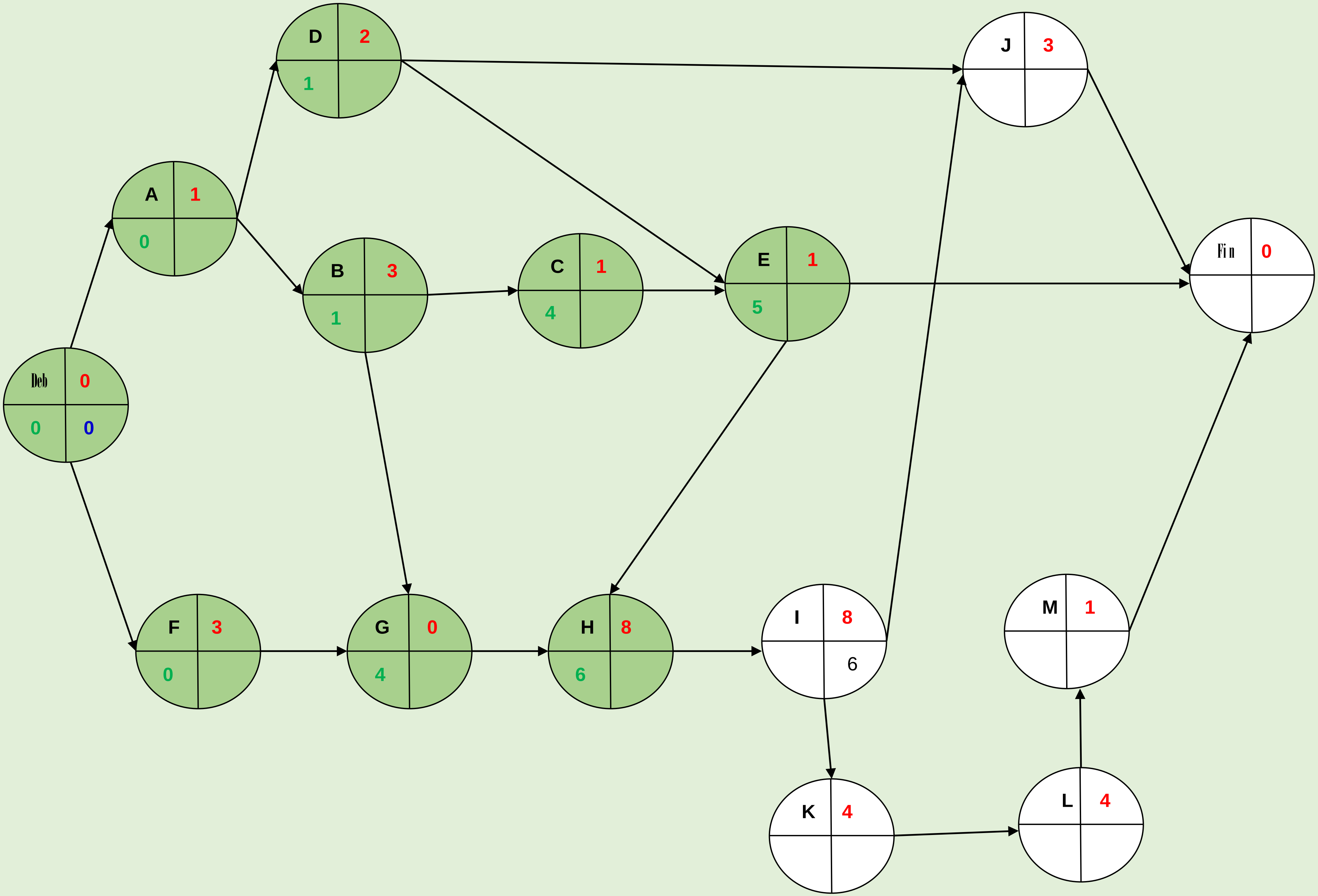
D 2
1
J 3
A 1
0
B 3
1
C 1
E 1
Fin 0
Deb 0
0 0
F 3
0
G 0
4
H 8
I 8
6
M 1
K 4
L 4



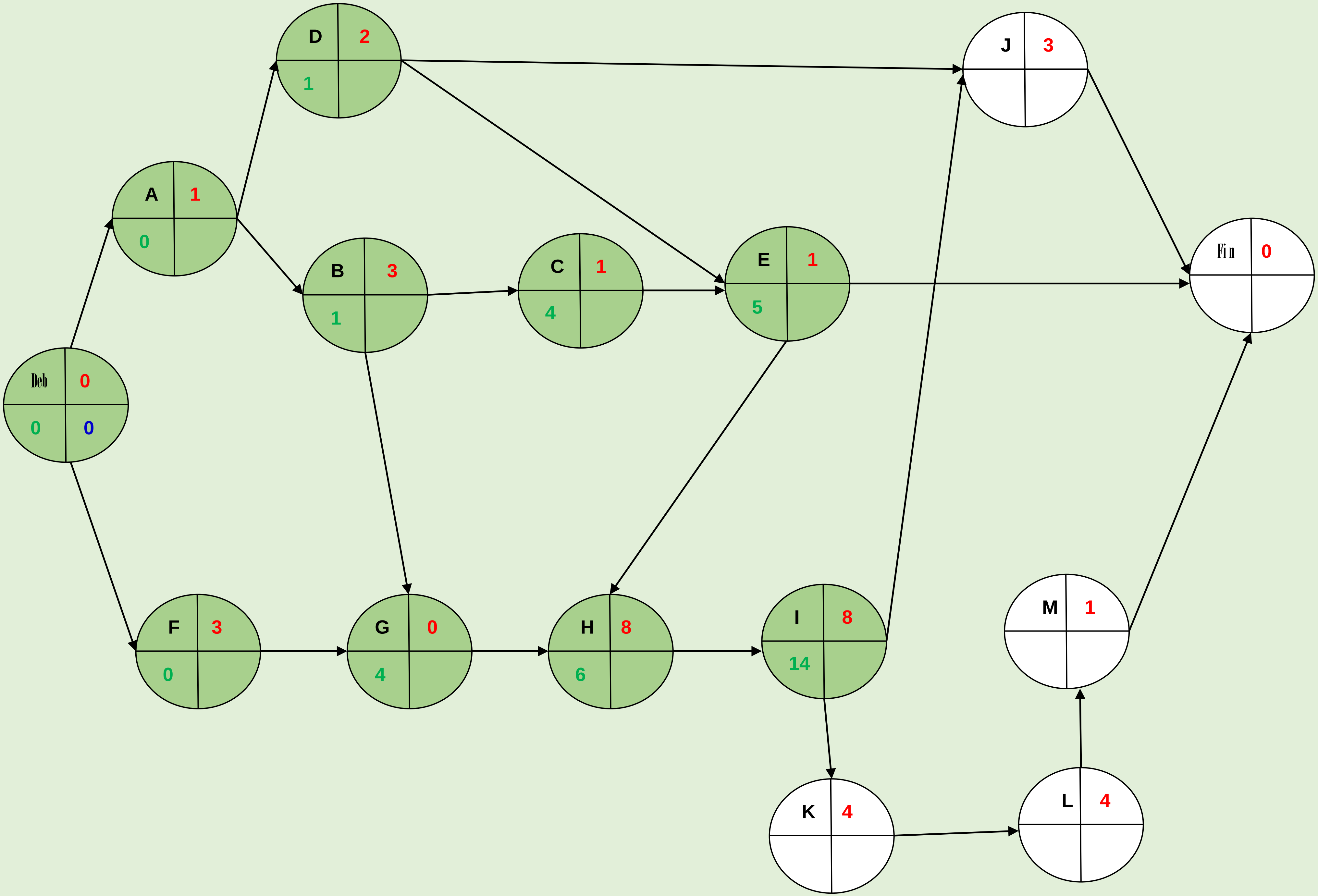
Deb 0
0 0
A 1
0
D 2
1
B 3
1
C 1
4
E 1
J 3
Fin 0
F 3
0
G 0
4
H 8
I 8
M 1
3
K 4
L 4



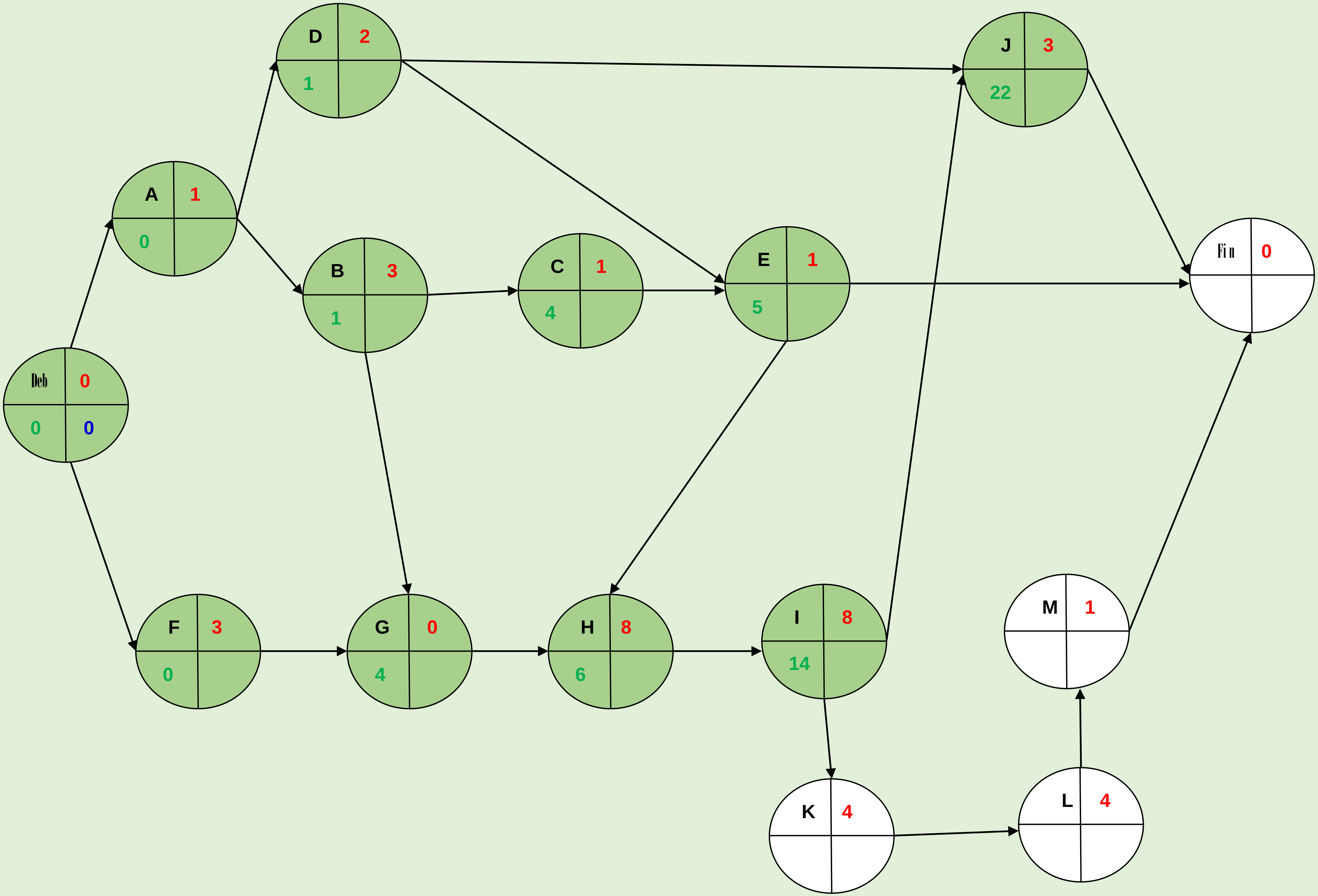
Deb 0
0 0
A 1
0
D 2
1
B 3
1
C 1
4
E 1
5
J 3
2
Fin 0
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
M 1
K 4
L 4



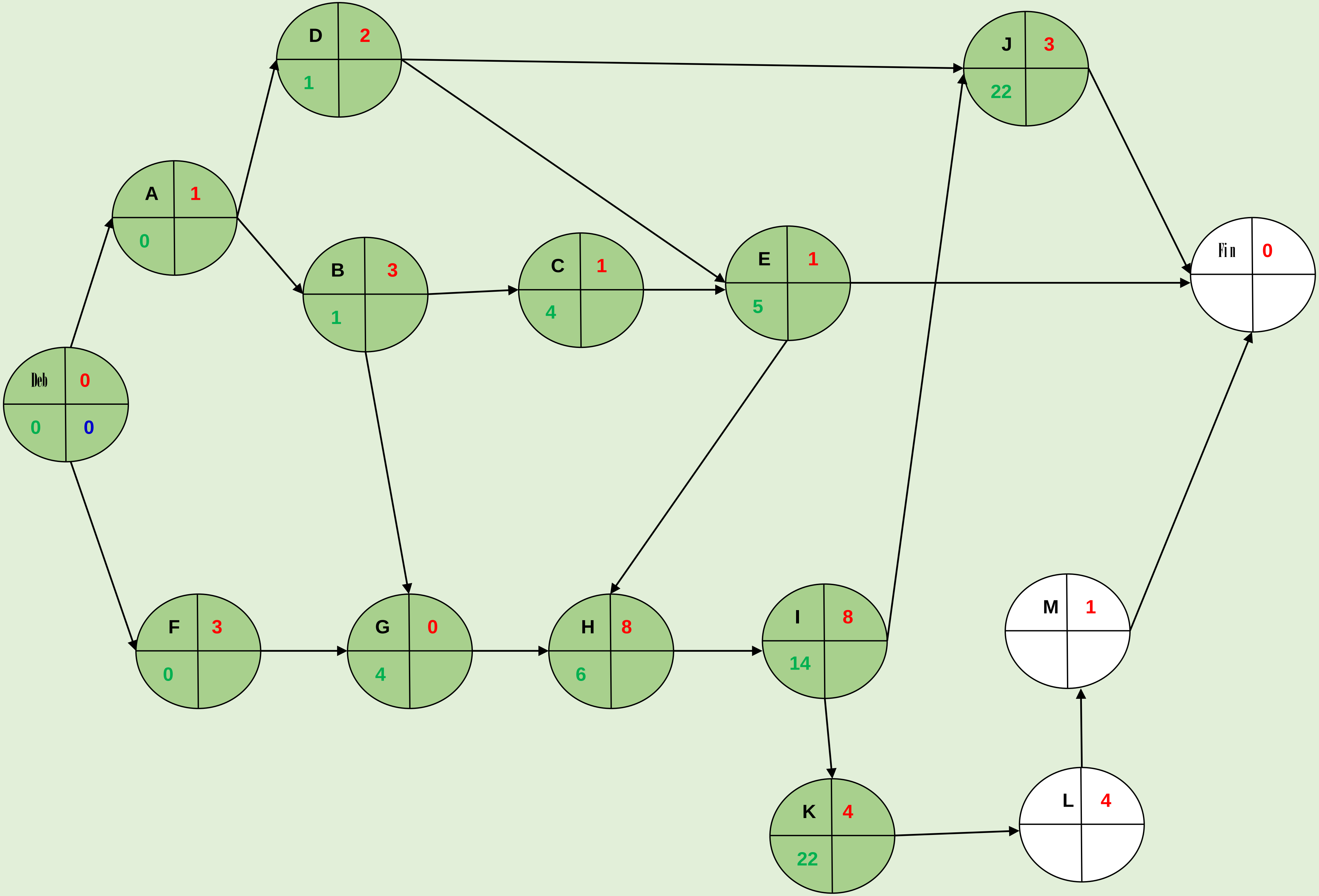
Deb 0
0 0
A 1
0
D 2
1
B 3
1
C 1
4
E 1
5
J 3
Fin 0
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
6
M 1
K 4
L 4



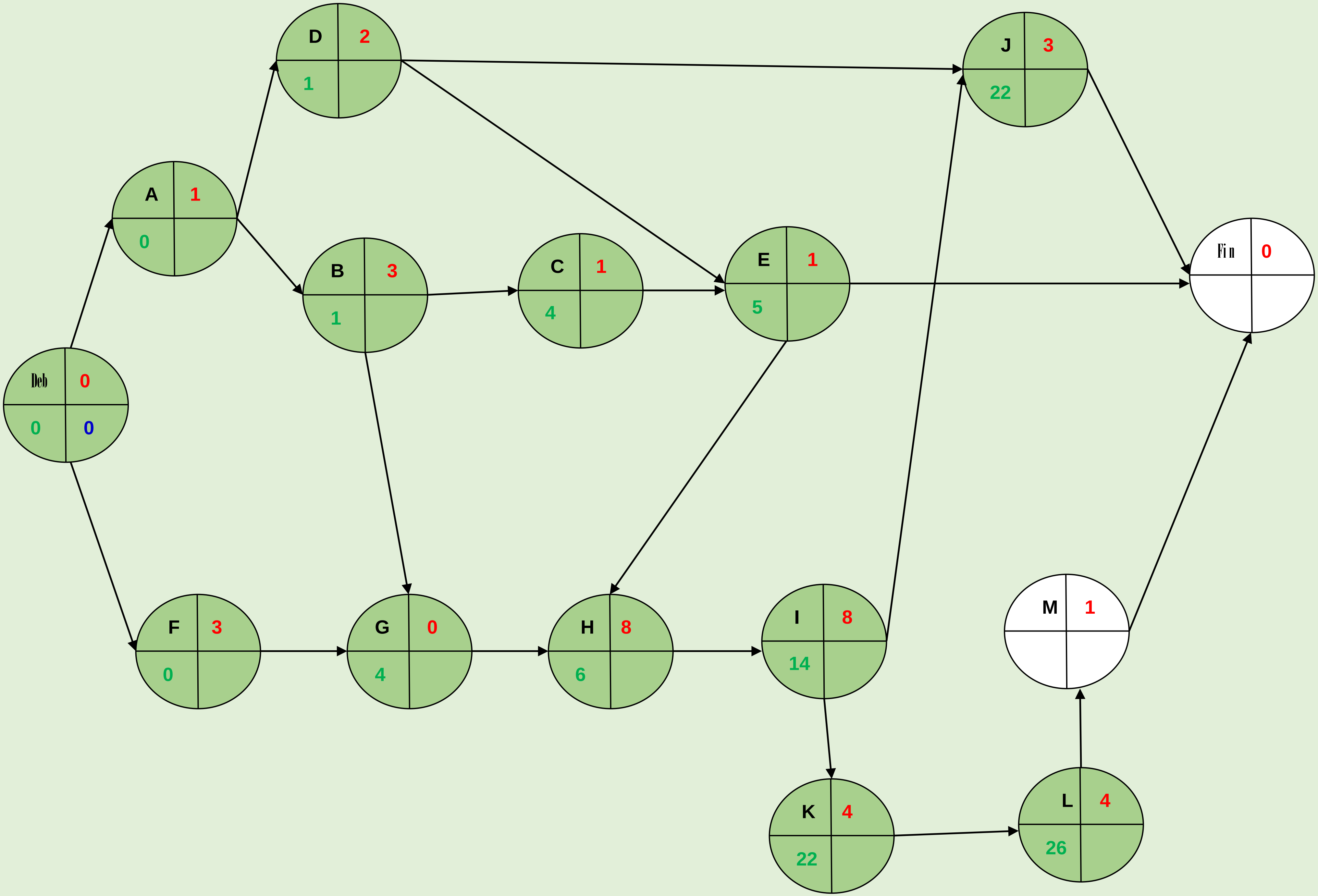
D 2
1
J 3
A 1
0
B 3
1
C 1
4
E 1
5
Fin 0
Deb 0
0 0
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
14
M 1
K 4
L 4



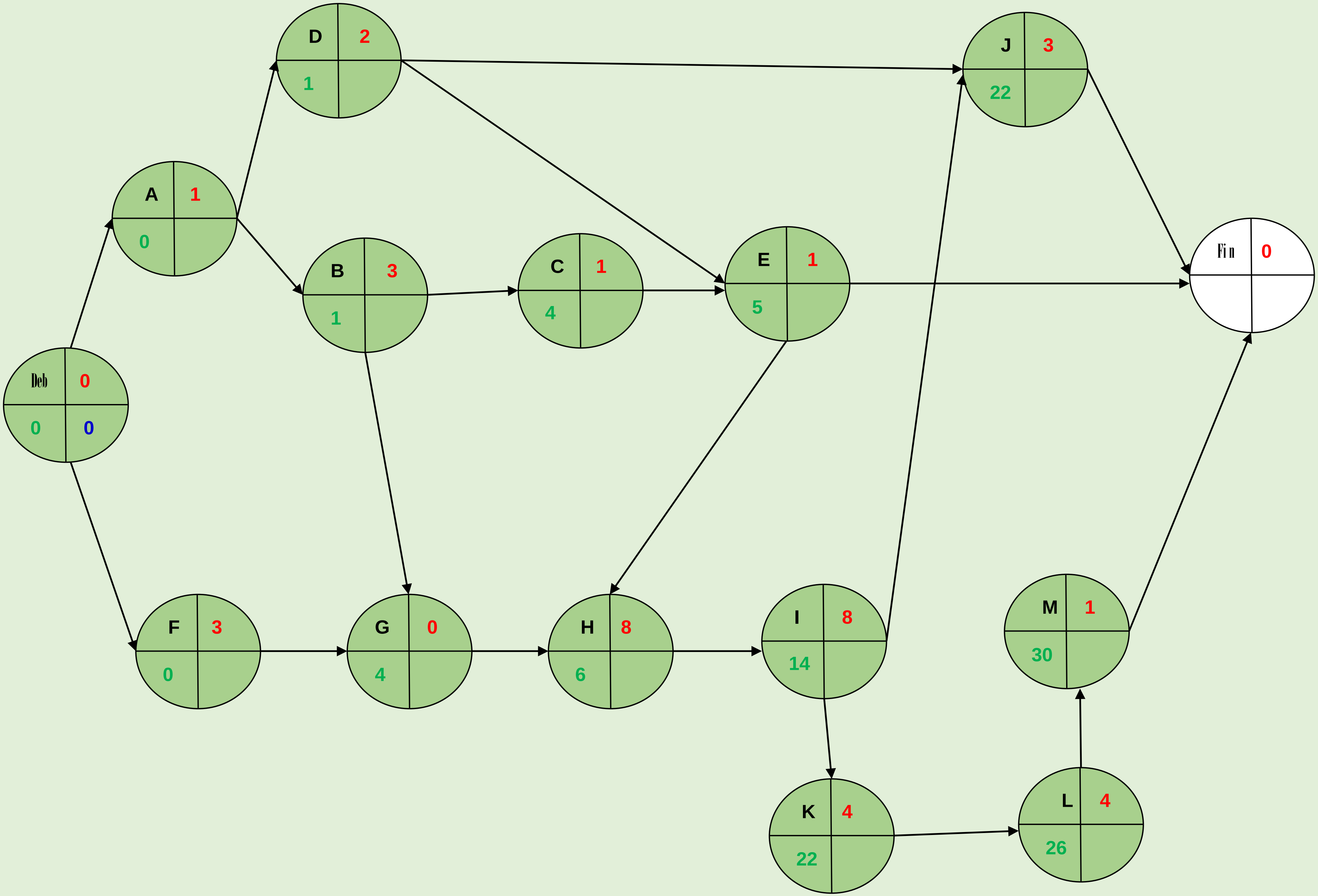
Deb 0
0 0
A 1
0
D 2
1
B 3
1
C 1
4
E 1
5
J 3
22
Fin 0
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
14
M 1
K 4
L 4



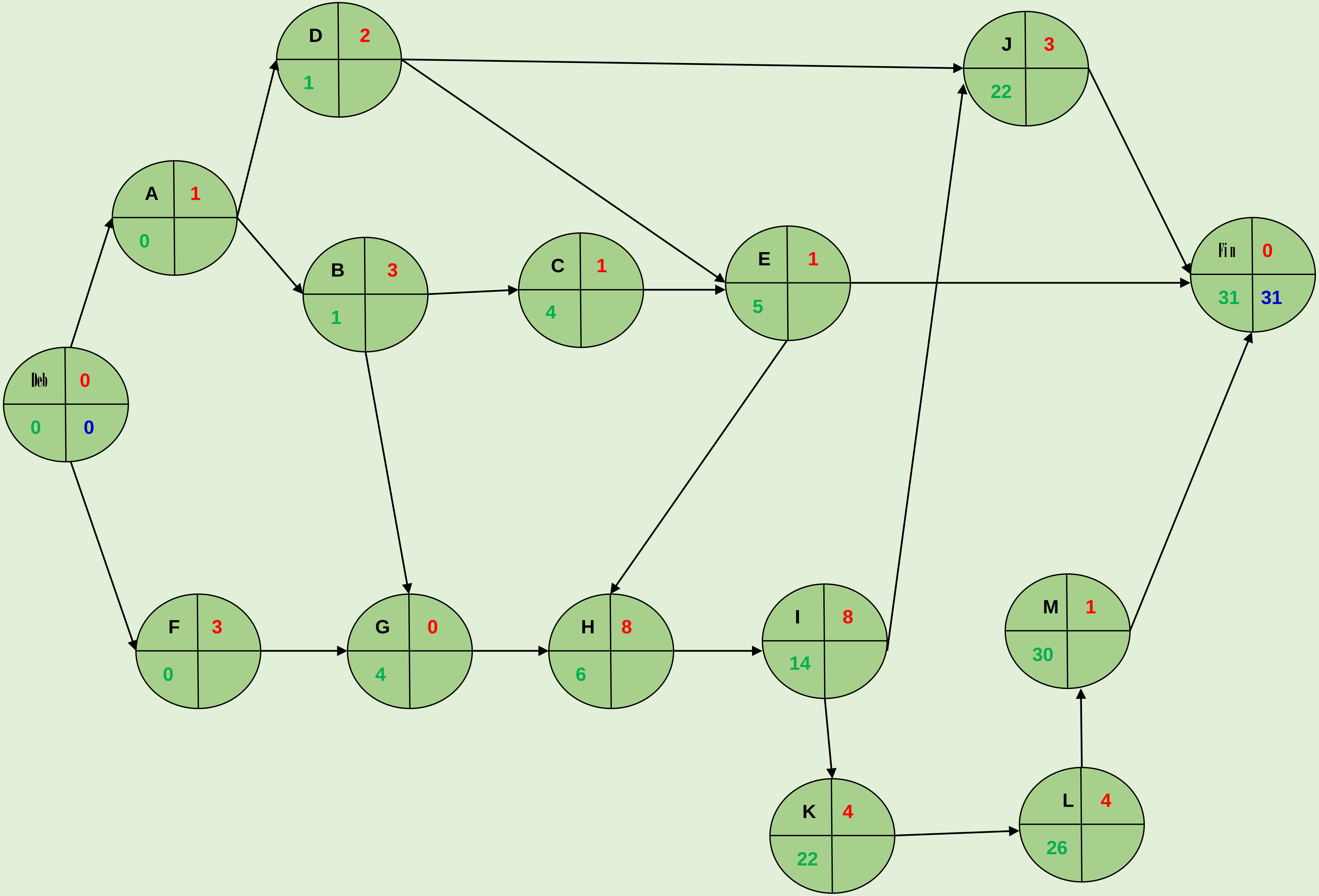
D 2
1
J 3
22
A 1
0
B 3
1
C 1
4
E 1
5
Fin 0
Deb 0
0 0
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
14
M 1
K 4
22
L 4



Deb
0
0
0
A
1
0
D
2
1
B
3
1
C
1
4
E
1
5
J
3
22
Fin
0
F
3
0
G
0
4
H
8
6
I
8
14
M
1
K
4
22
L
4
26



D 2
1
J 3
22
A 1
0
B 3
1
C 1
4
E 1
5
Fin 0
Deb 0
0 0
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
14
M 1
30
K 4
22
L 4
26



Deb 0
0 0
A 1
0
D 2
1
B 3
1
C 1
4
E 1
5
J 3
22
Fin 0
31 31
F 3
0
G 0
4
H 8
6
I 8
14
M 1
30
K 4
22
L 4
26

- la **durée optimale** de la prise de décision globale. (2 points)

La durée optimal de la décision globale est obtenue en calculant la date au plus tôt de la tâche FIN.

D'après 2) elle est égale à longueur du chemin le plus long partant du sommet DEBUT et atteignant le sommet FIN :

Durée optimale de la décision globale = Date+tot(Fin)
= 31 (unités de temps)

3-Montrer que le problème de calcul de la date **au plus tard** d'une décision X se ramène à la recherche, dans le modèle de graphe, d'un chemin **optimal** entre le sommet **X** et le sommet **Fin**. (2 points)

Il convient de tenir le **raisonnement** suivant :

« L'objectif est d'estimer la durée maximale :

- dont il est possible **retarder le démarrage** d'une tâche
- sans pour autant augmenter la **durée optimale** de la décision globale»

Pour cela, on doit garantir :

- la date de **fin** d'une tâche de décision,
- doit précéder la date de **début** de toutes les tâches de décision suivantes

D'où le calcul pour chaque tâche de décision **X** du **chemin le plus long :**

-entre le sommet **Fin**

-et le sommet qui représentant **X.**

6-Proposer une solution pour calculer les dates au plus tard

.

Notant **L_{XF}**, la longueur du plus long chemin entre :

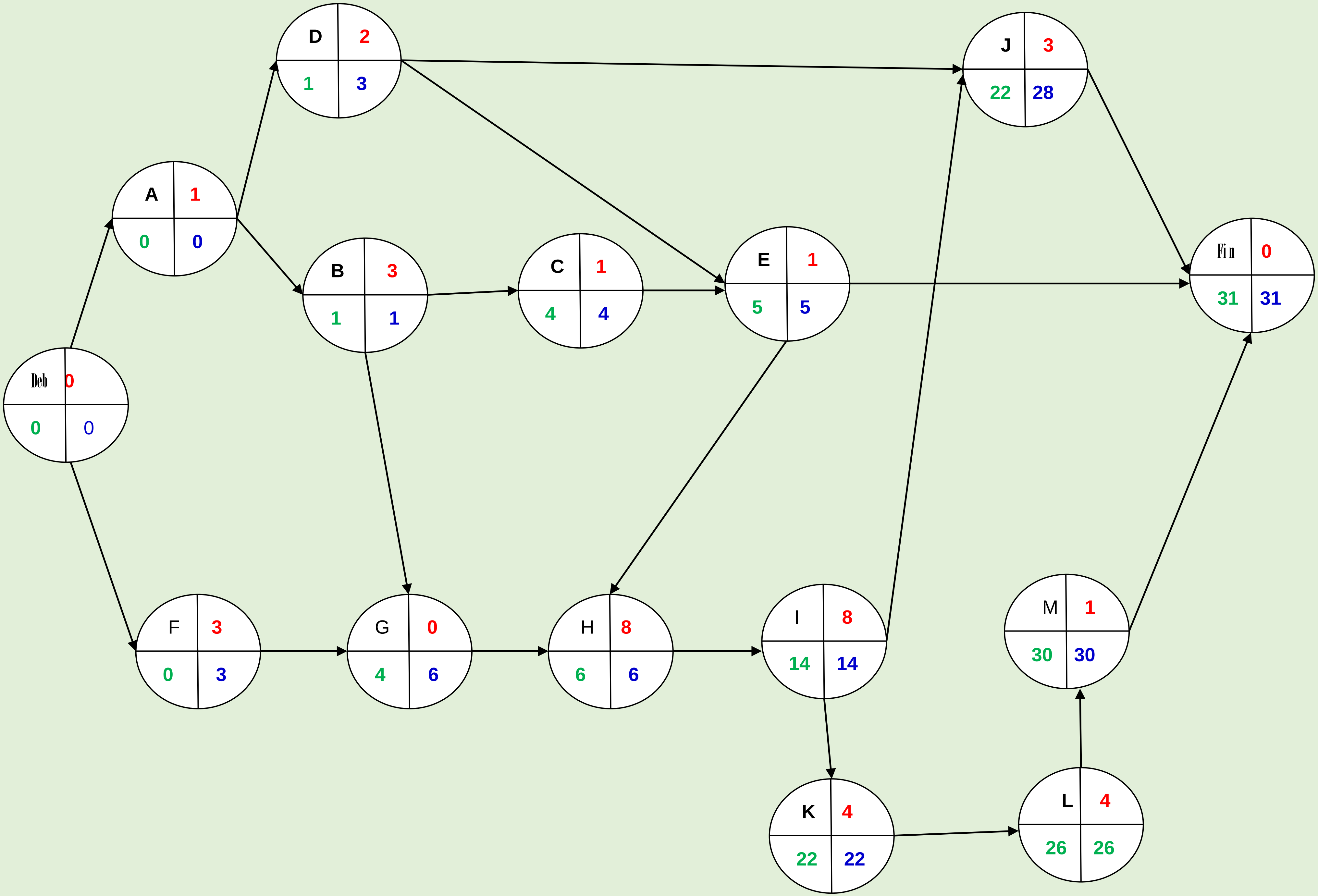
- le sommet représentant la décision X
- et la tâche **FIN**

La date de début au plus tard de la décision X est calculée à l’aide de la formule :

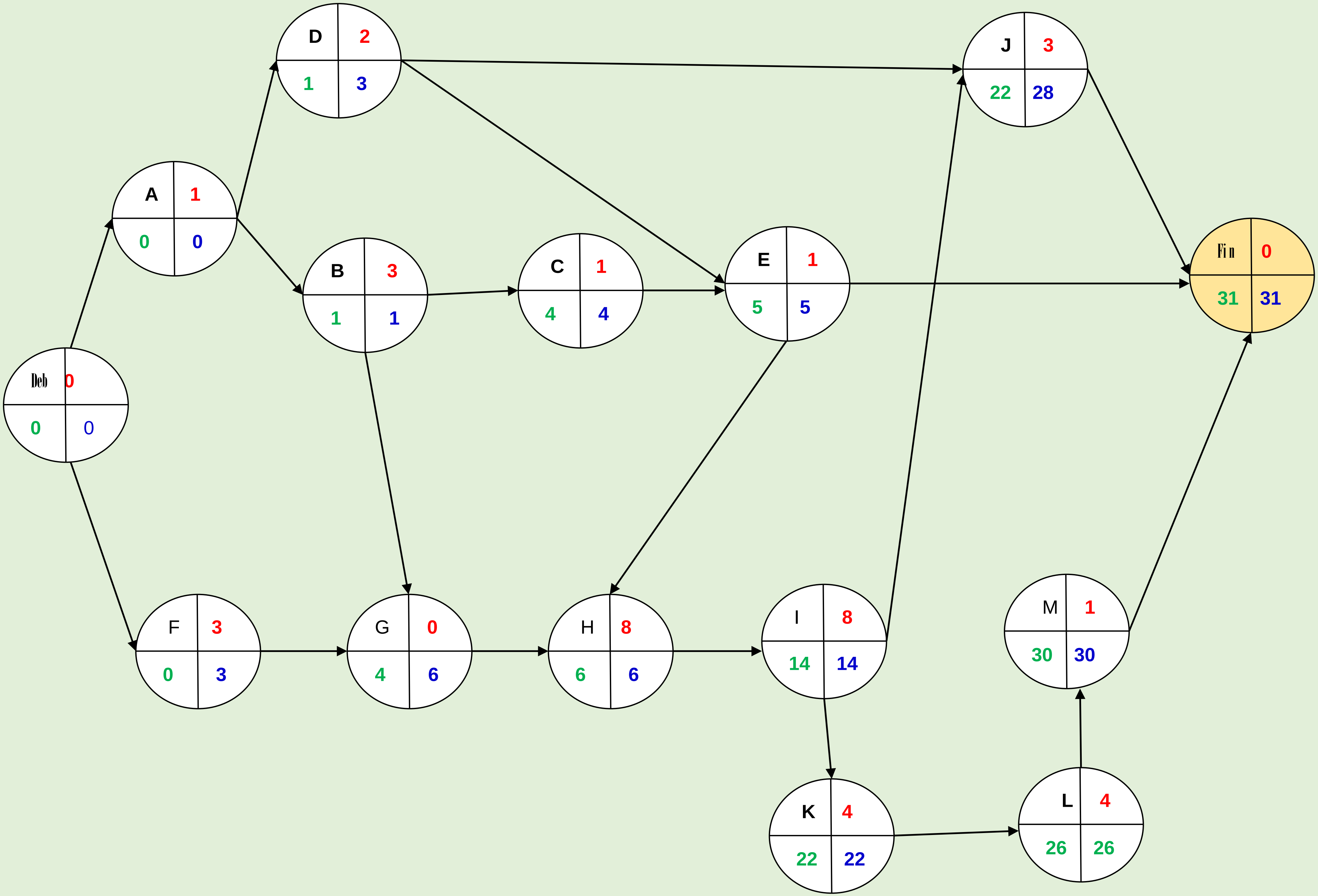
$$Date+tard(T) = (31 - L_{XT})$$

La longueur L est calculée en appliquant l’algorithme de **Bellman dual** dont la procédure est exposée en cours.

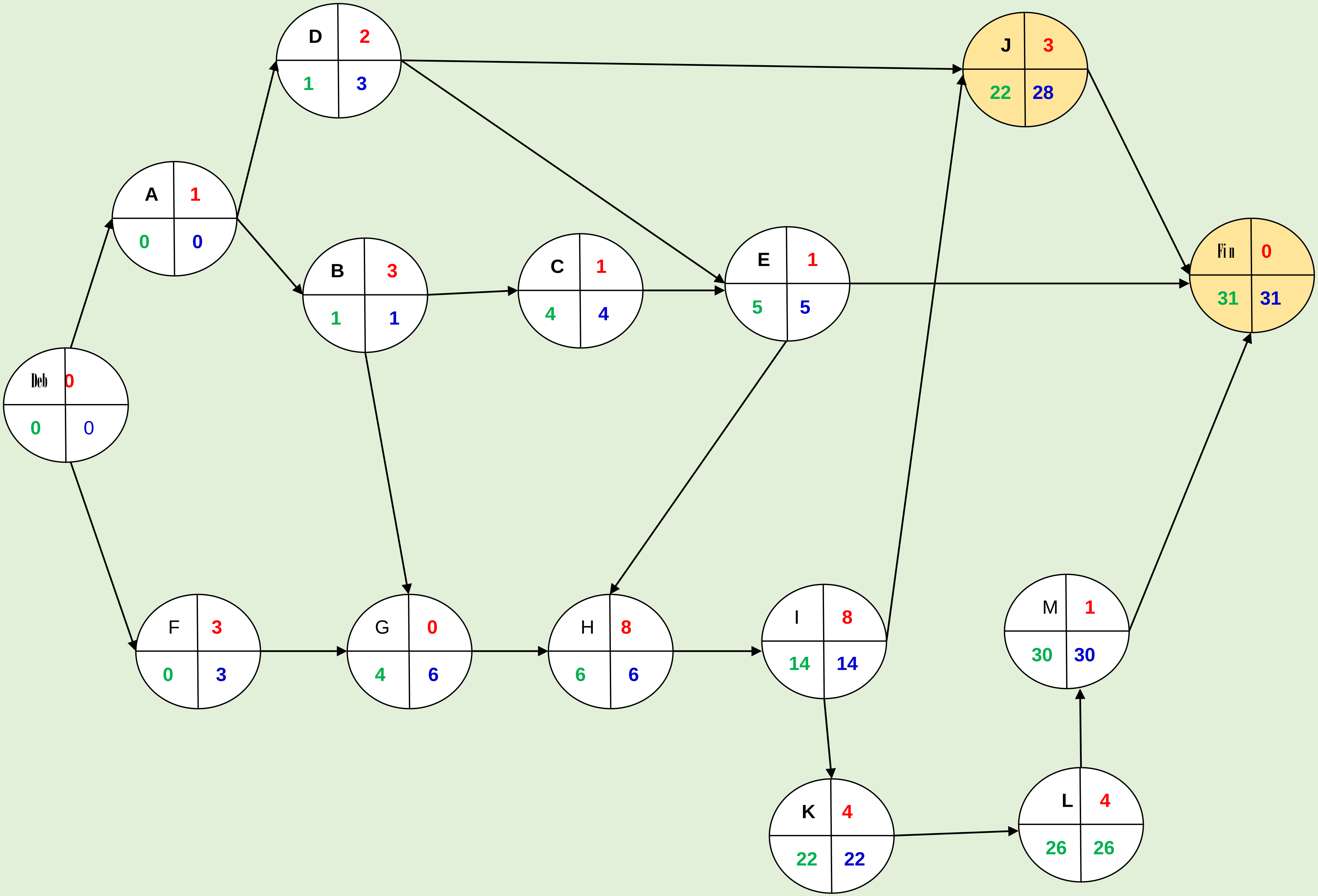
La trace d’exécution est exposée dans ce qui suit :



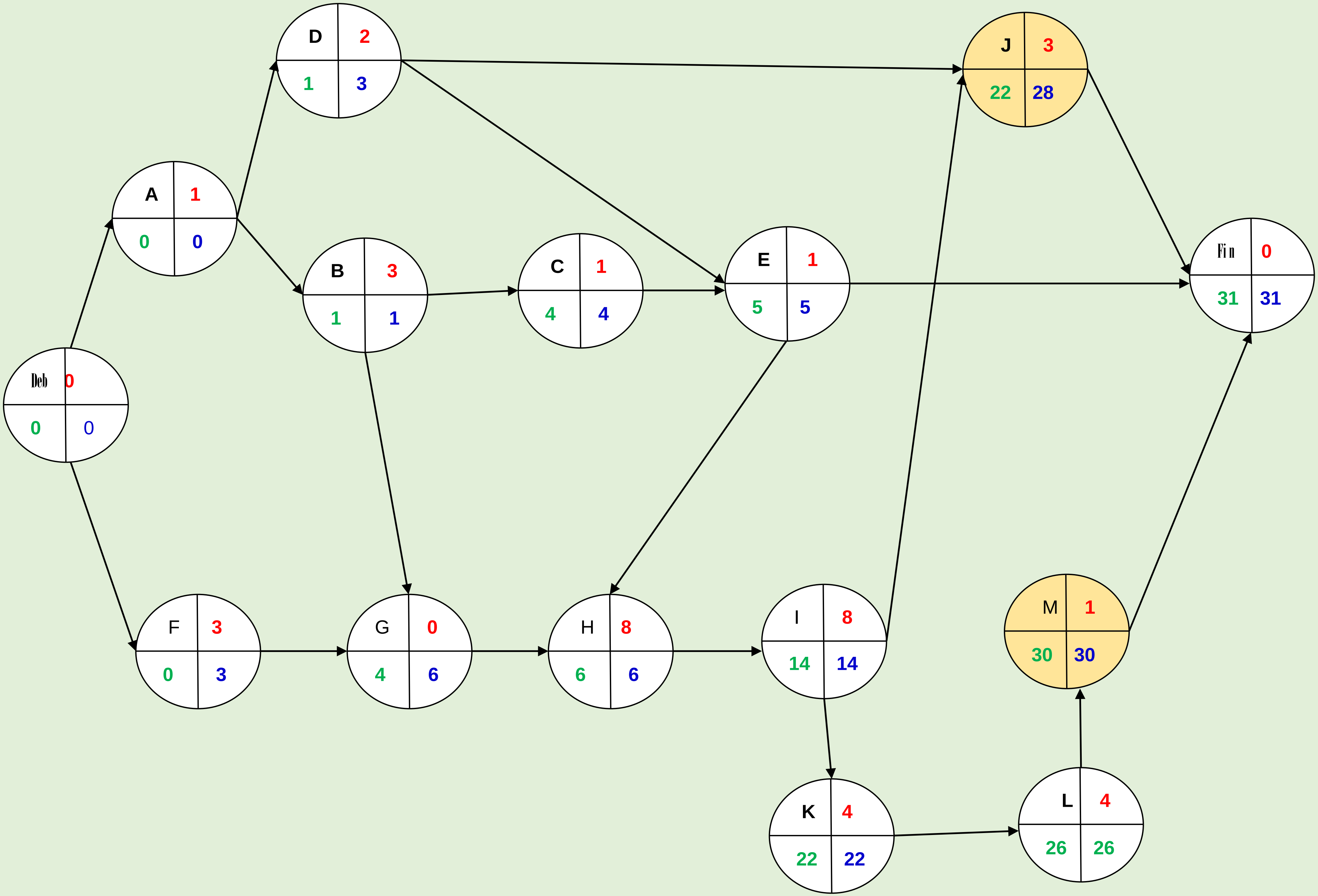
Deb 0
0 0
A 1
0 0
D 2
1 3
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



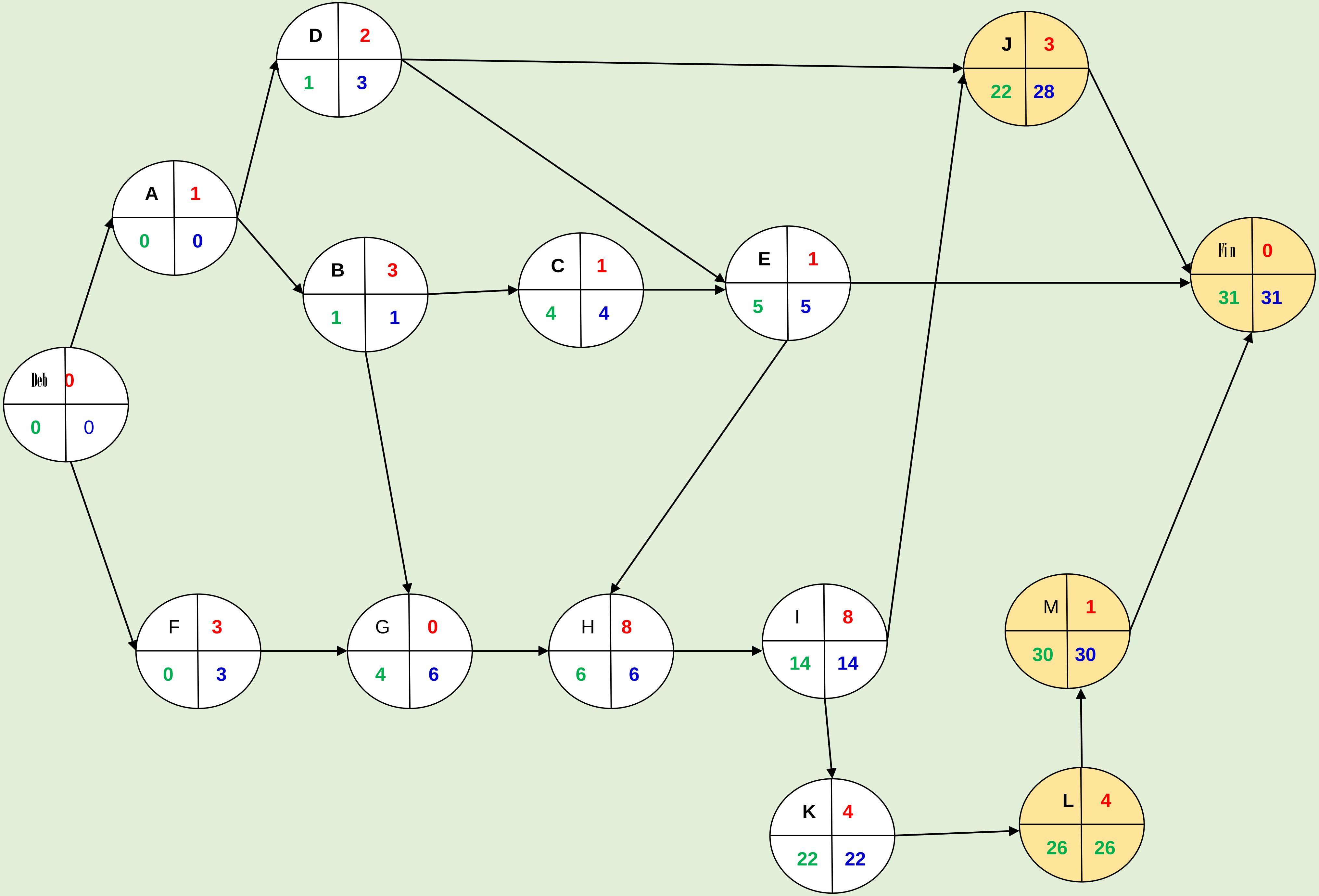
D 2
1 3
J 3
22 28
A 1
0 0
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
Fin 0
31 31
Deb 0
0 0
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



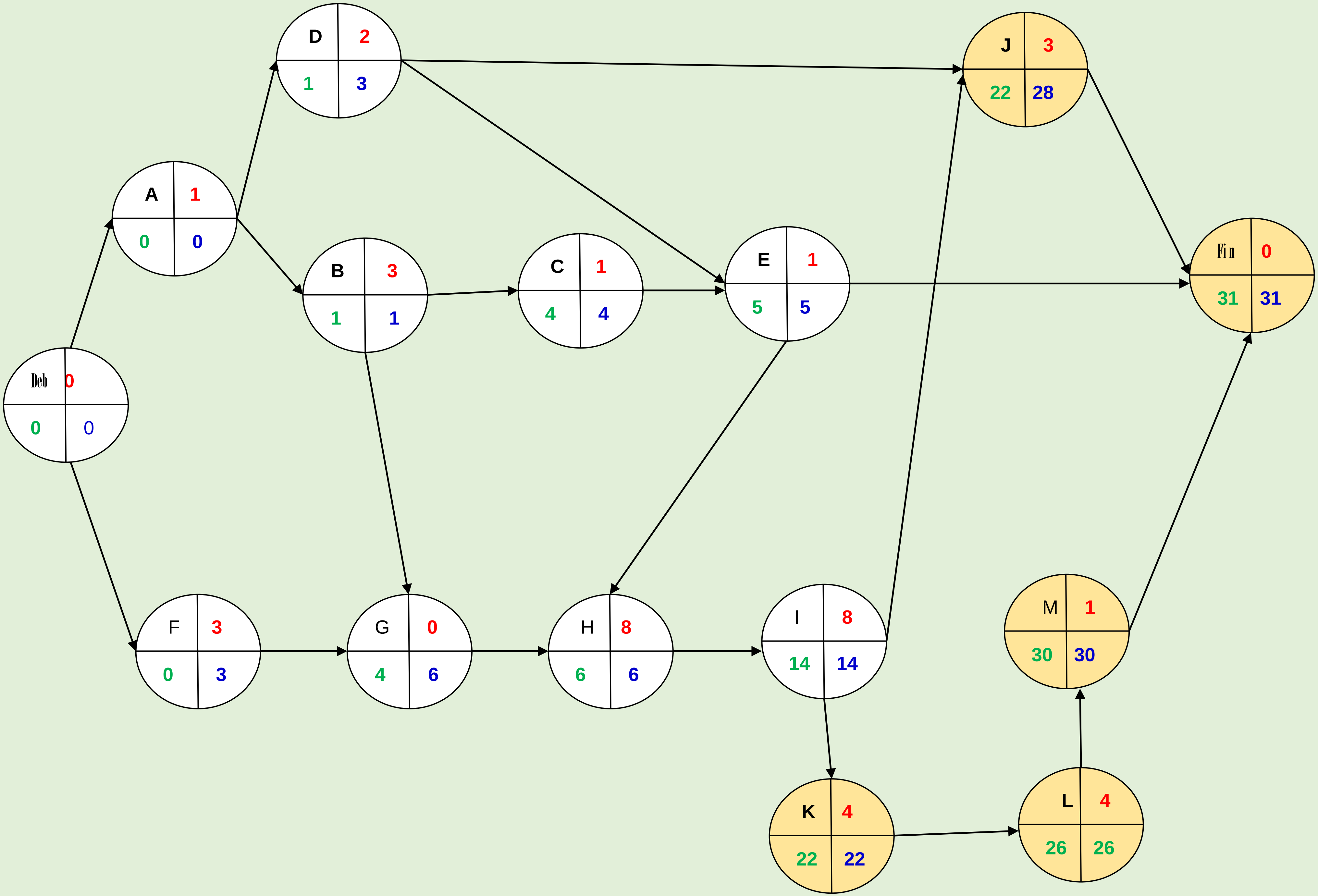
D 2 1 3
J 3 22 28
A 1 0 0
B 3 1 1
C 1 4 4
E 1 5 5
Fin 0 31 31
Deb 0 0 0
F 3 0 3
G 0 4 6
H 8 6 6
I 8 14 14
M 1 30 30
K 4 22 22
L 4 26 26



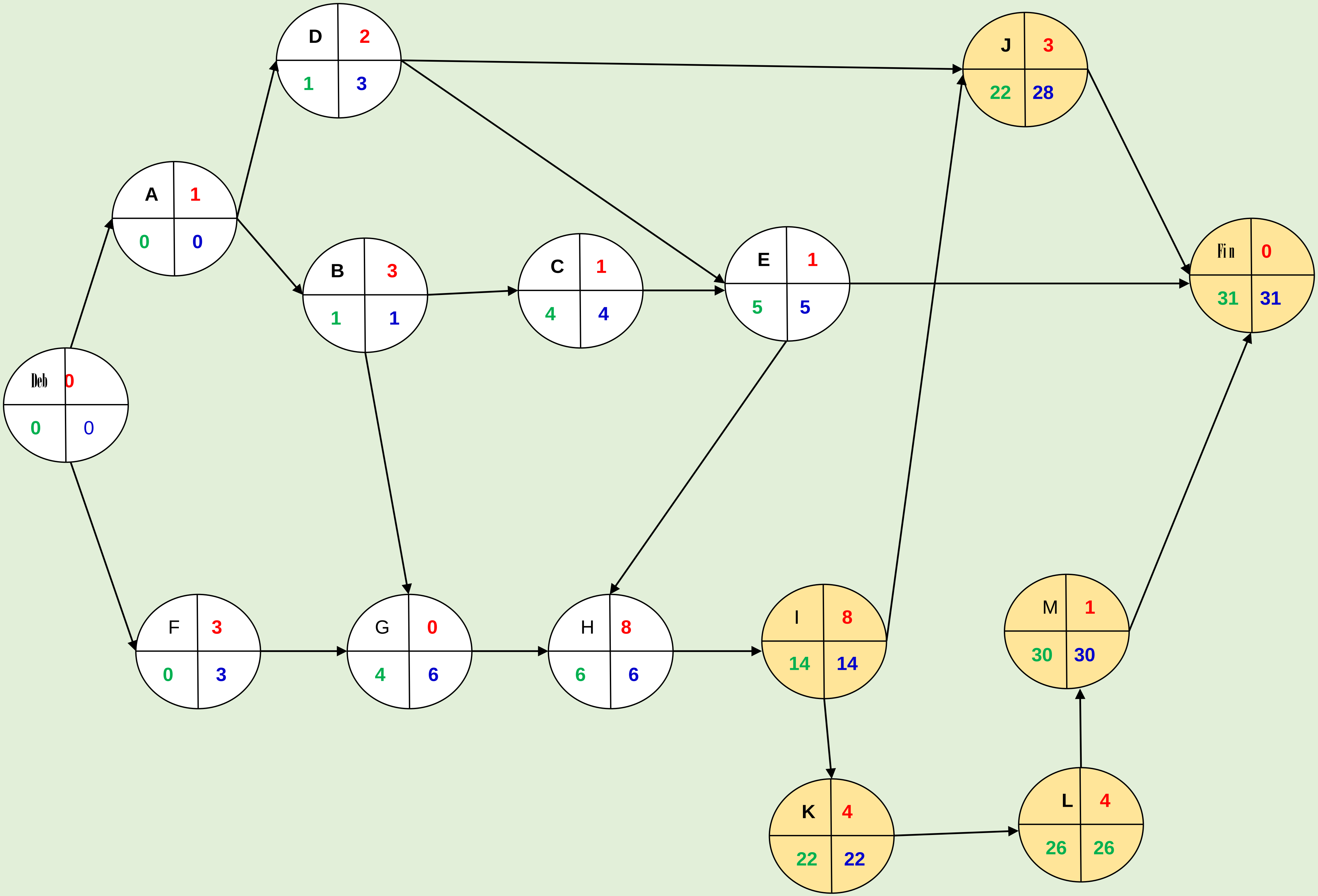
D 2
1 3
J 3
22 28
A 1
0 0
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
Fin 0
31 31
Deb 0
0 0
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



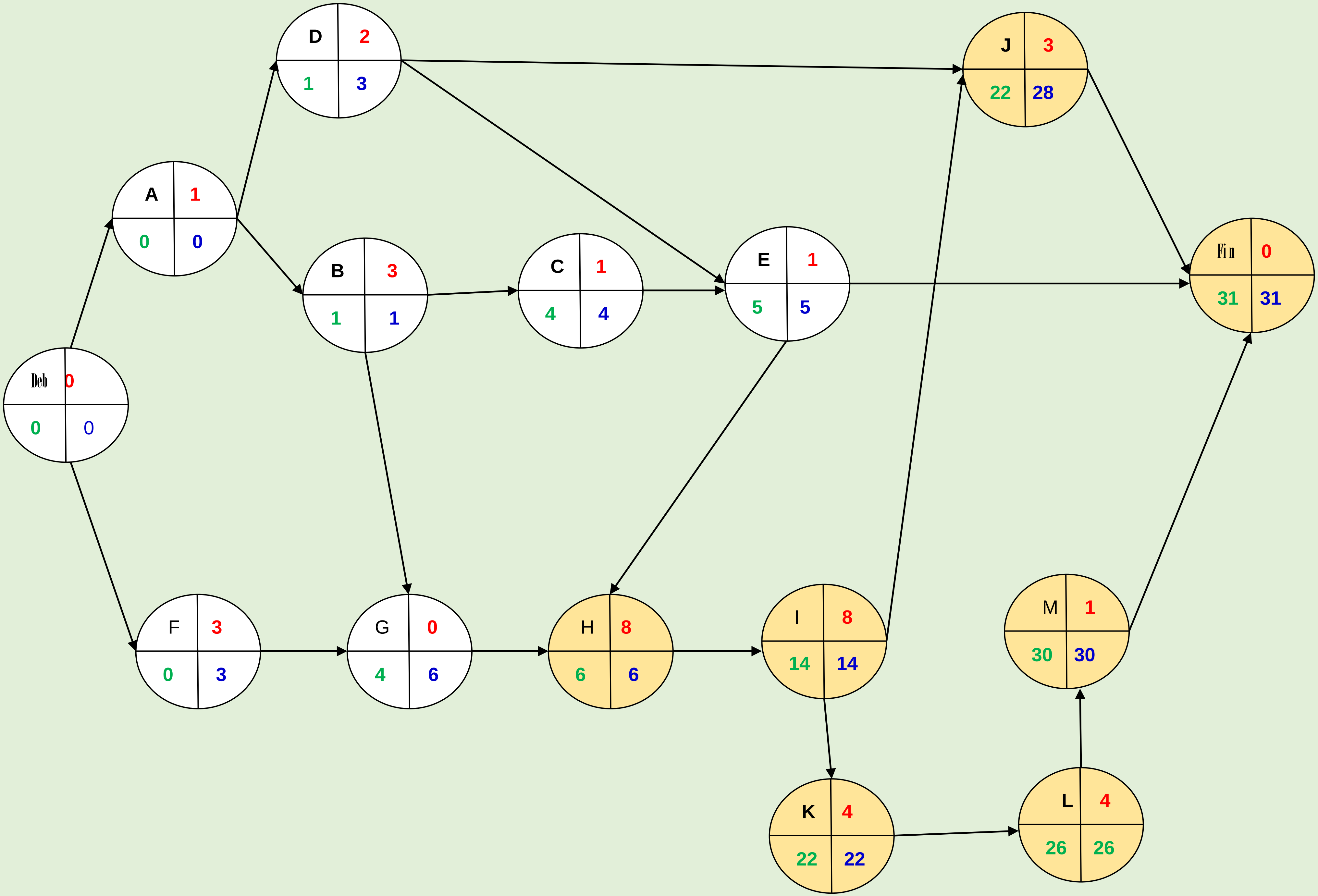
D 2 1 3
J 3 22 28
A 1 0 0
B 3 1 1
C 1 4 4
E 1 5 5
Fin 0 31 31
Deb 0 0 0
F 3 0 3
G 0 4 6
H 8 6 6
I 8 14 14
M 1 30 30
K 4 22 22
L 4 26 26



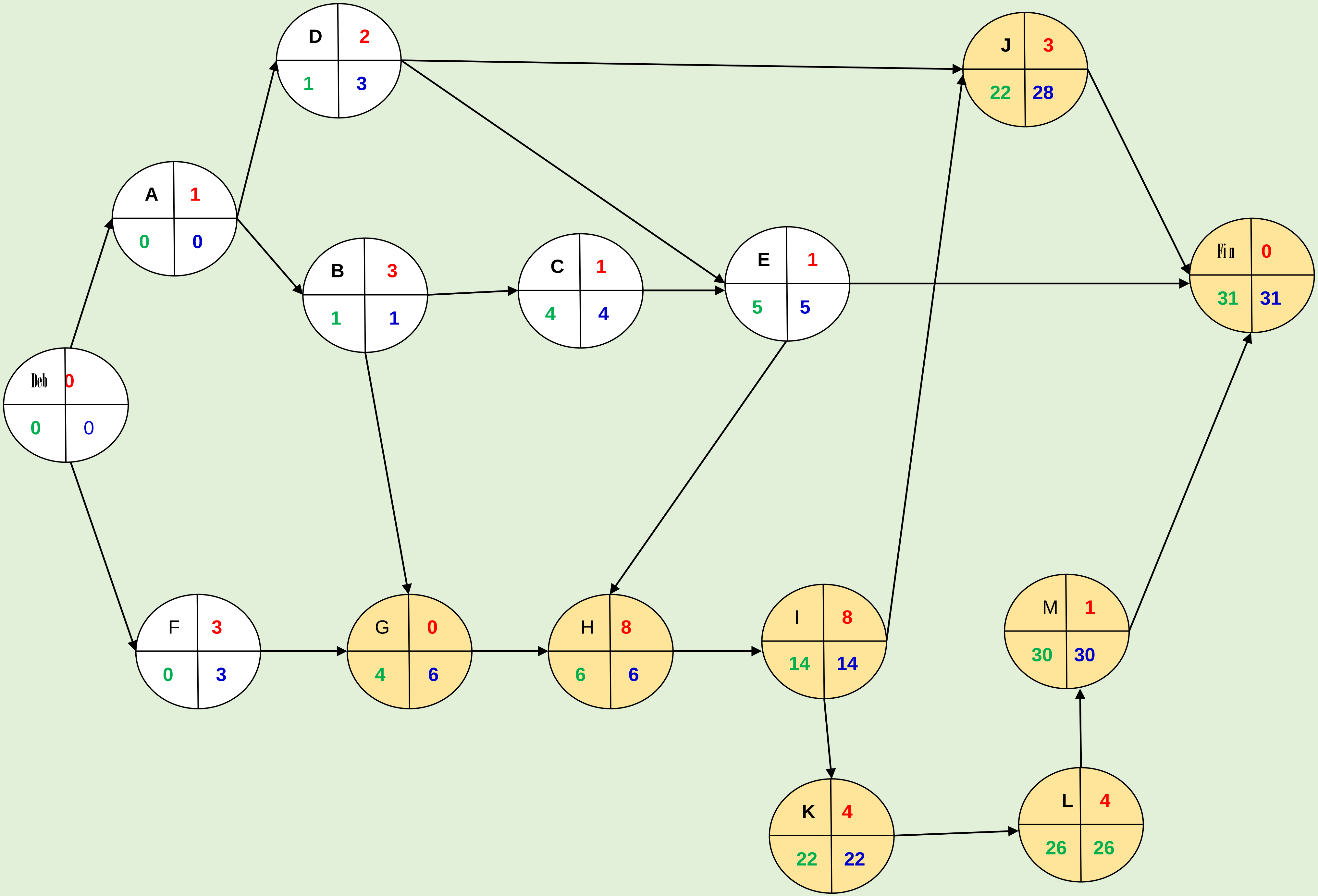
Deb 0
0 0
A 1
0 0
D 2
1 3
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



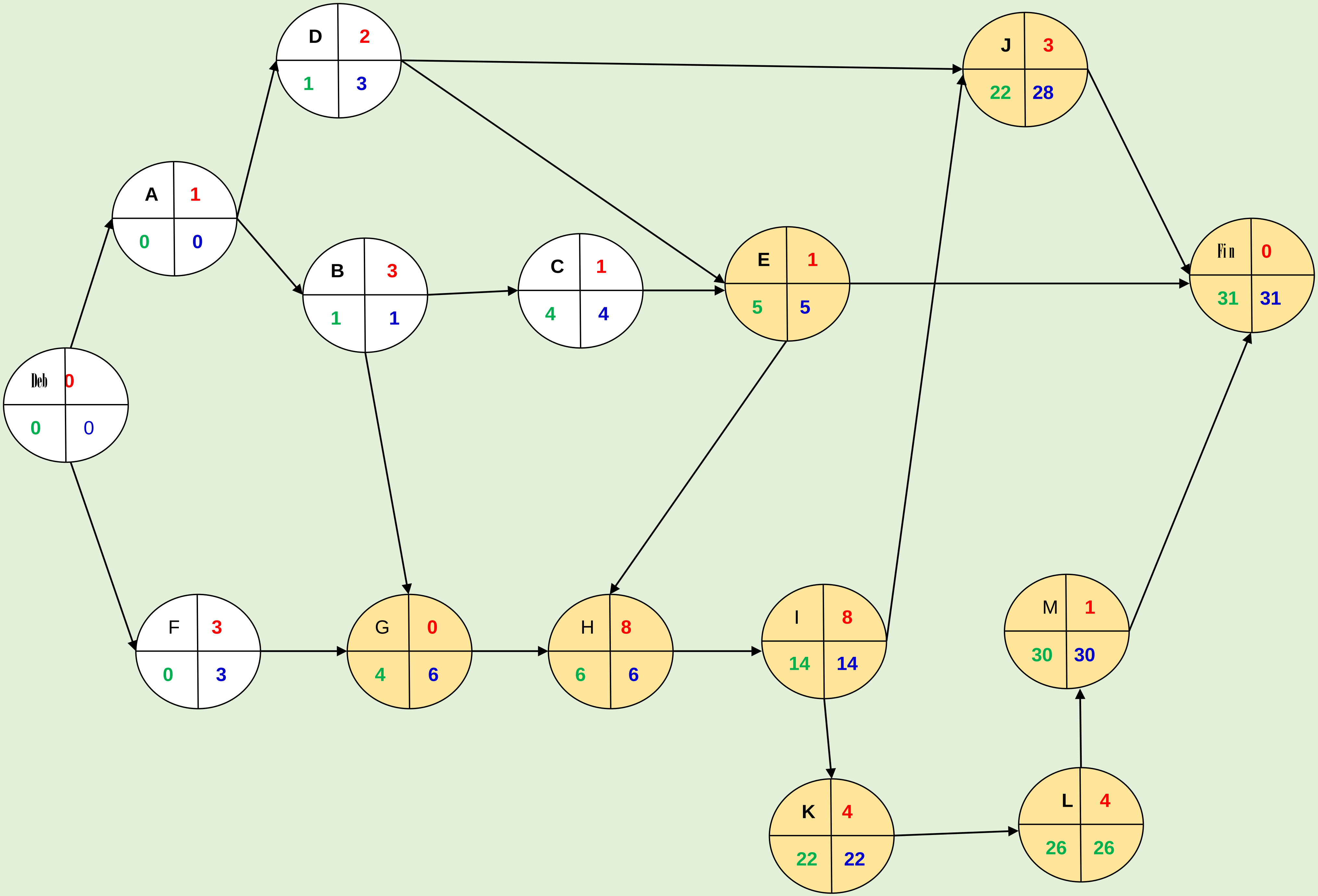
D 2 1 3
J 3 22 28
A 1 0 0
B 3 1 1
C 1 4 4
E 1 5 5
Fin 0 31 31
Deb 0 0 0
F 3 0 3
G 0 4 6
H 8 6 6
I 8 14 14
M 1 30 30
K 4 22 22
L 4 26 26



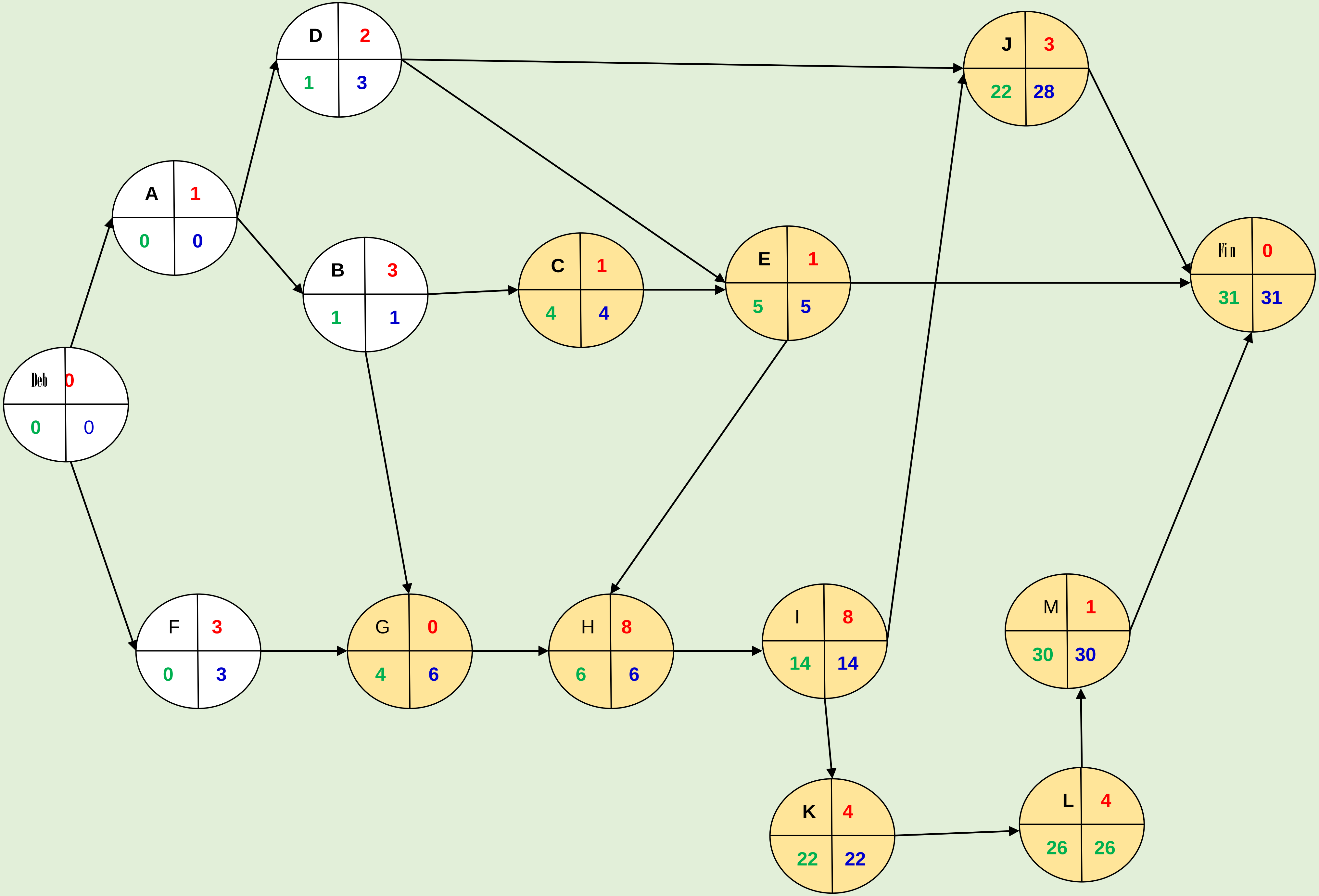
D 2 1 3
A 1 0 0
B 3 1 1
C 1 4 4
E 1 5 5
J 3 22 28
Fin 0 31 31
Deb 0 0 0
F 3 0 3
G 0 4 6
H 8 6 6
I 8 14 14
M 1 30 30
K 4 22 22
L 4 26 26



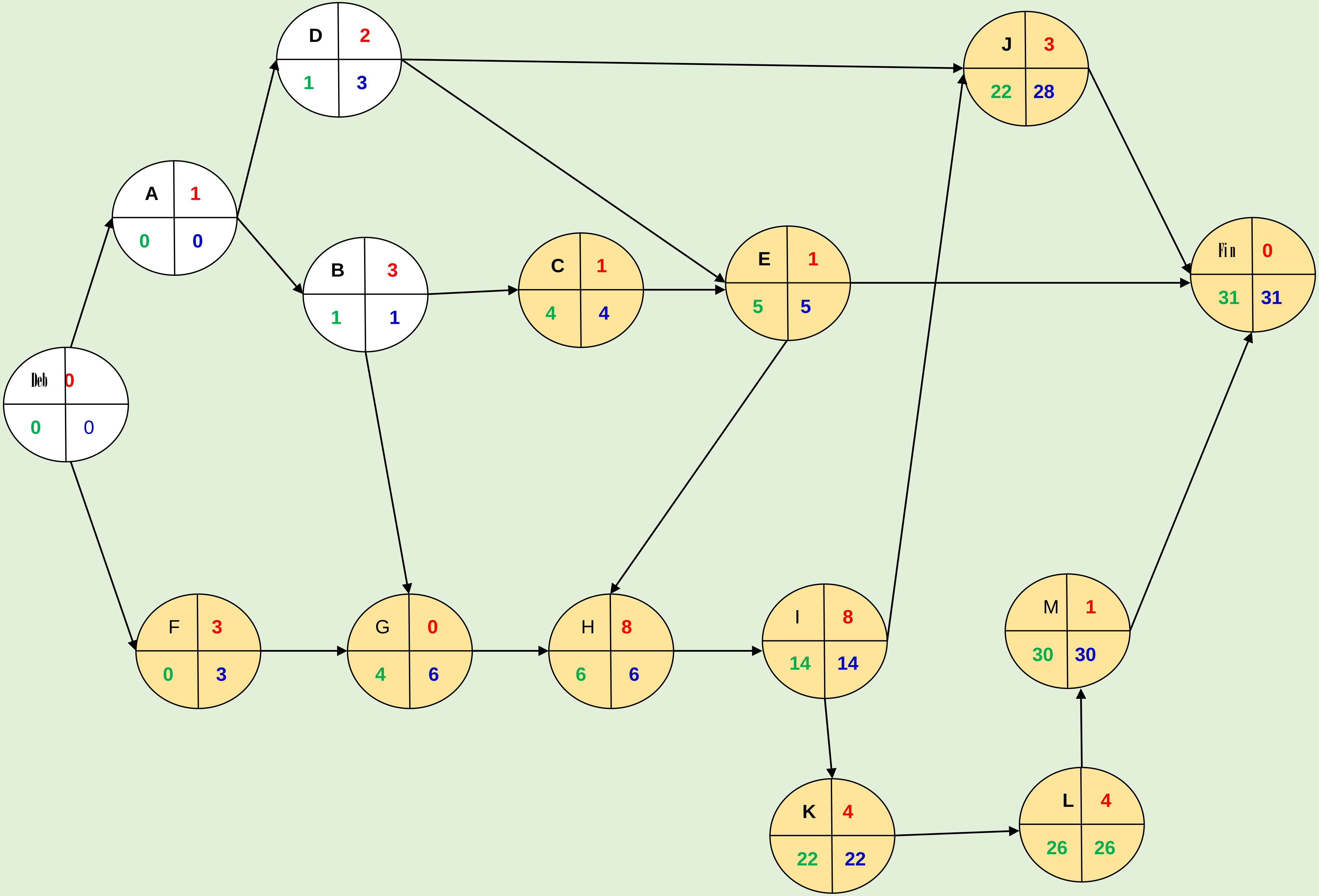
D 2 1 3
J 3 22 28
A 1 0 0
B 3 1 1
C 1 4 4
E 1 5 5
Fin 0 31 31
Deb 0 0 0
F 3 0 3
G 0 4 6
H 8 6 6
I 8 14 14
M 1 30 30
K 4 22 22
L 4 26 26



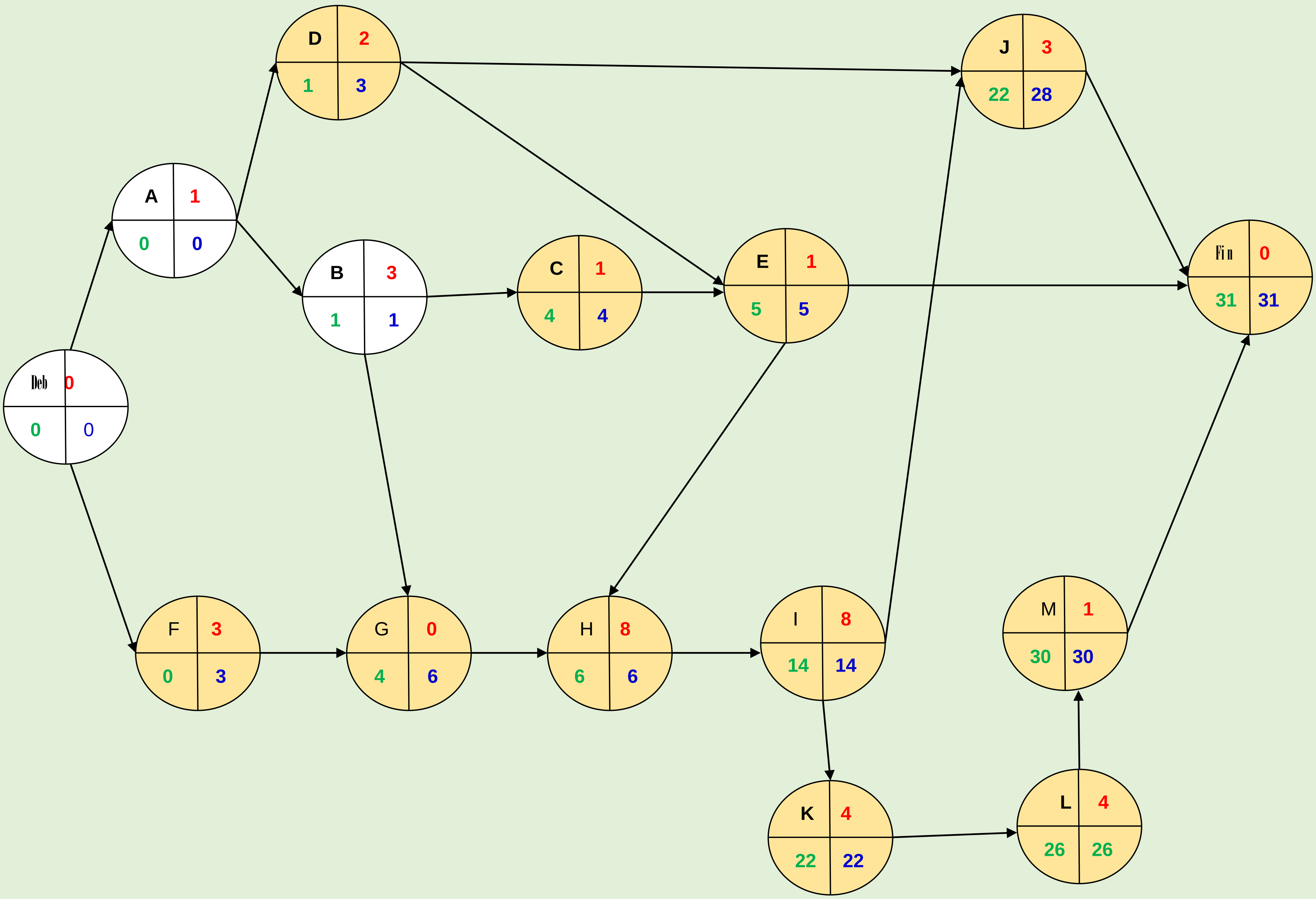
Deb 0 0 0
A 1 0 0
D 2 1 3
B 3 1 1
C 1 4 4
E 1 5 5
J 3 22 28
Fin 0 31 31
F 3 0 3
G 0 4 6
H 8 6 6
I 8 14 14
M 1 30 30
K 4 22 22
L 4 26 26



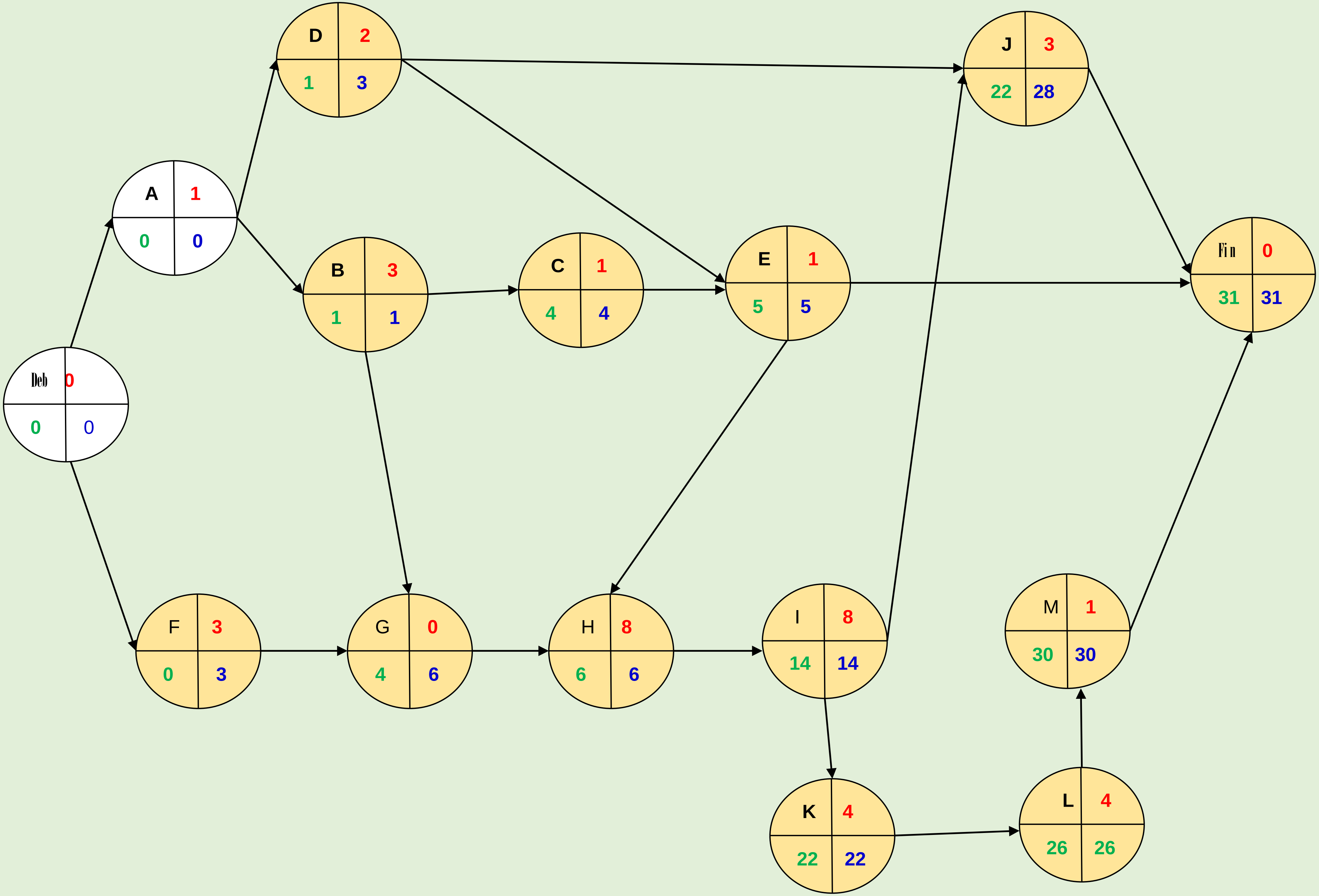
Deb 0 0 0
A 1 0 0
D 2 1 3
B 3 1 1
C 1 4 4
E 1 5 5
J 3 22 28
Fin 0 31 31
F 3 0 3
G 0 4 6
H 8 6 6
I 8 14 14
M 1 30 30
K 4 22 22
L 4 26 26



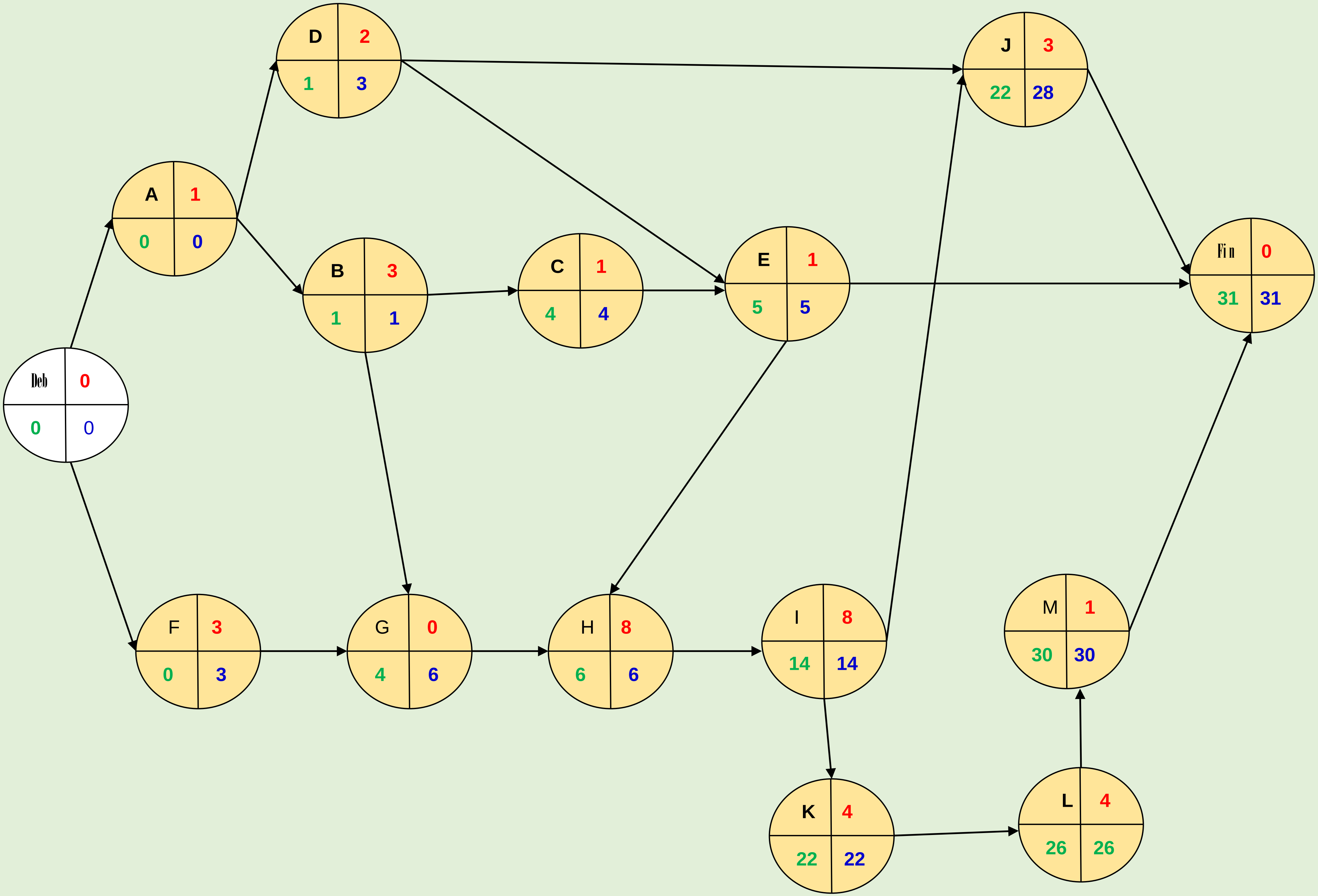
Deb 0
0 0
A 1
0 0
D 2
1 3
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



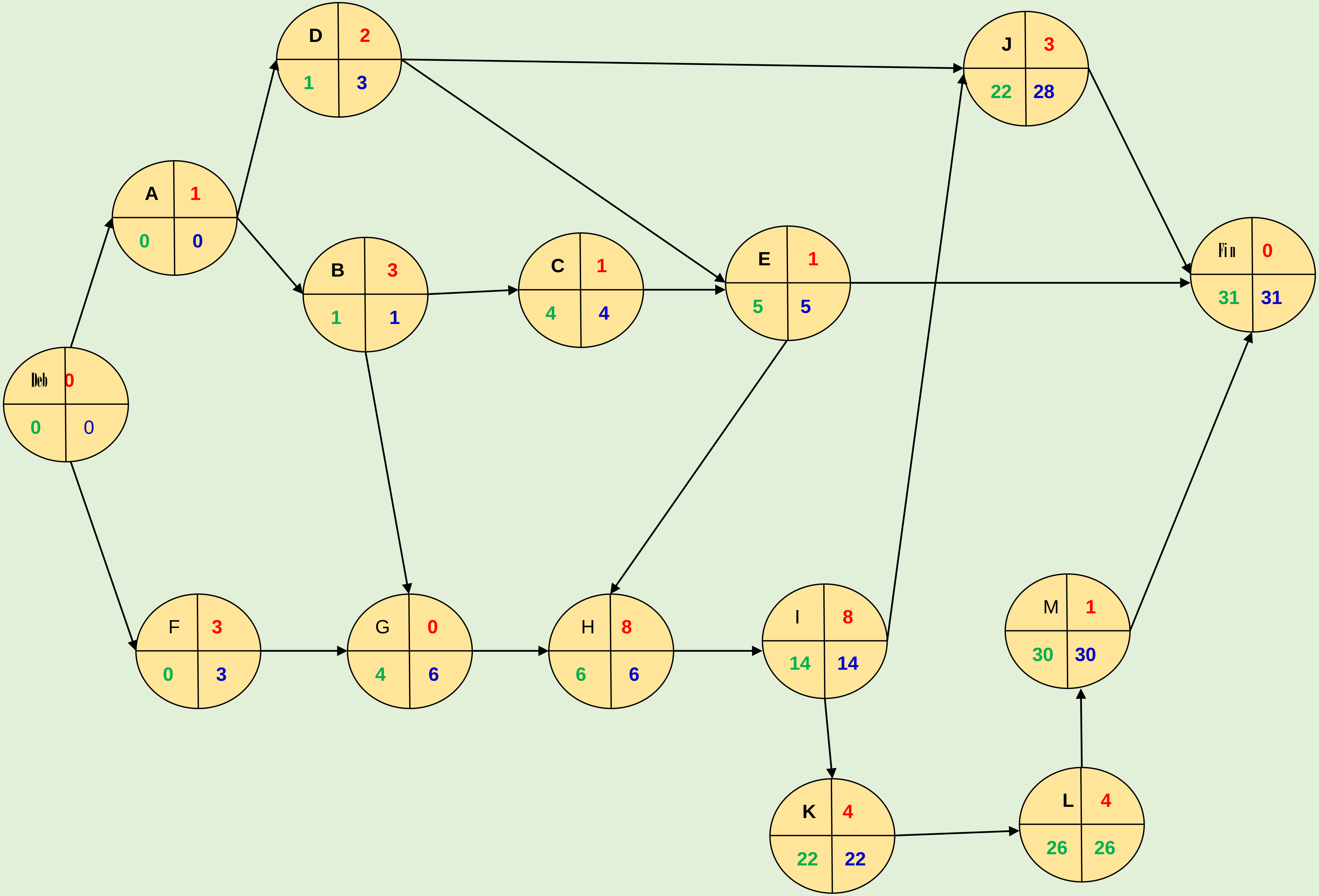
Deb 0
0 0
A 1
0 0
B 3
1 1
D 2
1 3
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



Deb 0
0 0
A 1
0 0
D 2
1 3
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



Deb 0
0 0
A 1
0 0
D 2
1 3
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26



D 2
1 3
J 3
22 28
A 1
0 0
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
Fin 0
31 31
Deb 0
0 0
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26

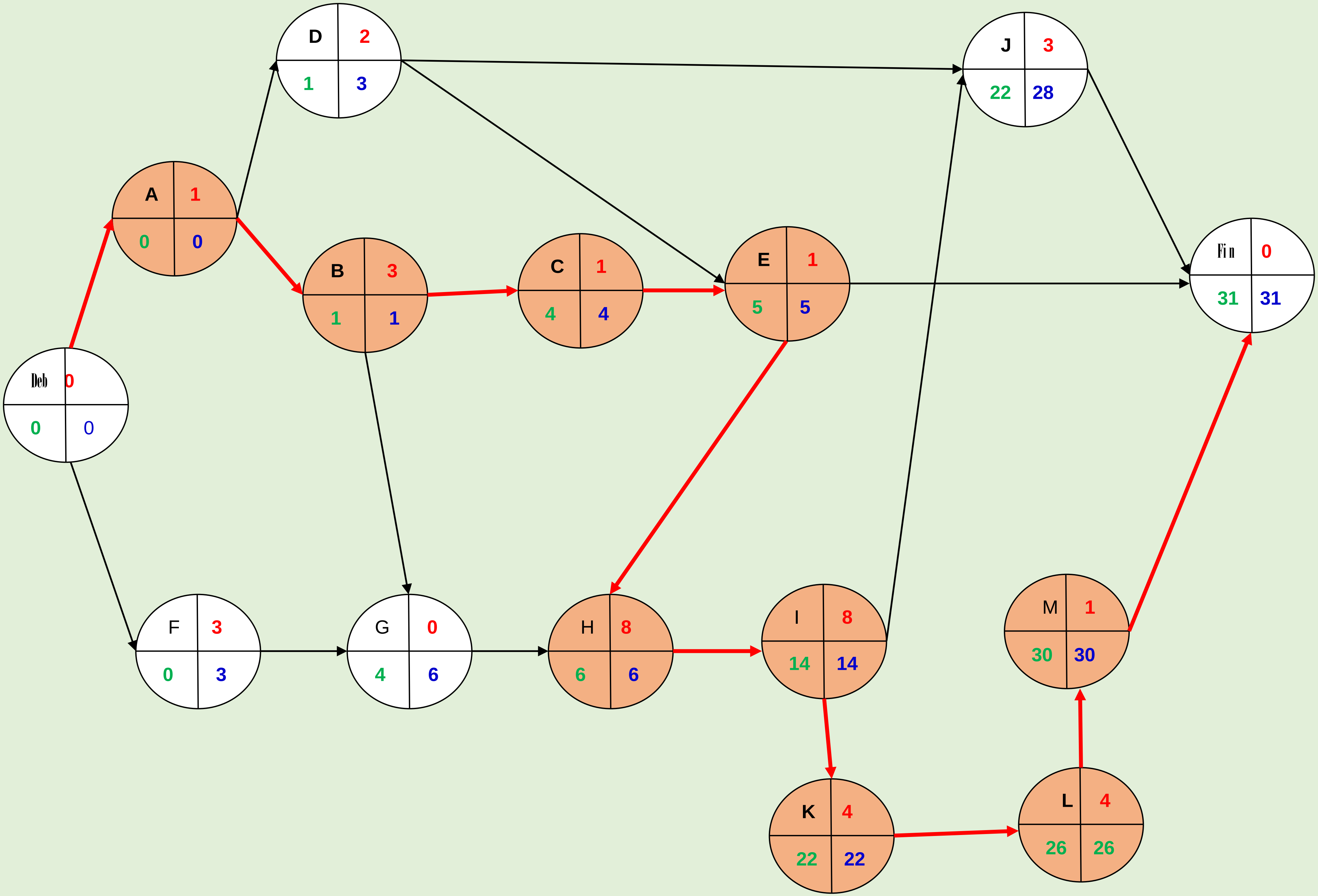
En déduire la détermination des décisions critiques (décisions dont la date au plus tôt est égale à la date au plus tard) (1 point)

Est considérée comme critique toute décision partielle X telle que :

Date+tôt(X) = Date+tard (X)

Tout retard au niveau d'une telle décision entraîne la remise en cause de la durée optimale de la tâche globale calculée en 2).

Le chemin traversant les sommets correspondant aux décisions critiques est appelé **chemin critique**: c'est le chemin le long du graphe partant du sommet **début** et atteignant le sommet **Fin**.



Deb 0
0 0
A 1
0 0
D 2
1 3
B 3
1 1
C 1
4 4
E 1
5 5
J 3
22 28
Fin 0
31 31
F 3
0 3
G 0
4 6
H 8
6 6
I 8
14 14
M 1
30 30
K 4
22 22
L 4
26 26