

# 北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目: 算法设计与分析 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

考试时间: 2020年6月8日 小班教师: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									
阅卷人									

## 北京大学考场纪律

1、考生要按规定的考试时间提前5分钟进入考场, 隔位就坐或按照监考人员的安排就座, 将学生证放在桌面。无学生证者不能参加考试; 迟到超过15分钟不得入场; 与考试无关人员不得进入考场。考生在考试开始30分钟后方可交卷出场; 未交卷擅自离开考场, 不得重新进入考场继续答卷; 交卷后应离开考场, 不得在考场内逗留或在考场附近高声交谈。

2、除非开卷考试中教师另有说明, 除必要的工具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外, 其它所有物品(包括空白纸张、手机等)不得带入座位, 已经带入考场的手机等电子设备必须关机, 不得随身携带或放在座位旁边, 应与其他物品一起放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放, 考试结束时收回, 一律不准带出考场。若有试题印制问题应向监考人员提出, 不得向其他考生询问。考生提前答完试卷, 应举手示意请监考人员收卷后方可离开; 考试结束监考人员宣布收卷时, 考生应立即停止答卷, 在座位上等待监考人员收卷清点后, 方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则, 在规定时间内独立完成答卷。不准旁窥、交头接耳、打暗号或做手势, 不准携带与考试内容相关的材料参加考试, 不准使用手机、非教师允许的计算器等具有信息发送、接受、存储功能的设备, 不准抄袭或协助他人抄袭试题答案或者与考试内容相关的资料, 不准传、接或者交换试卷、答卷、草稿纸, 不准由他人代替考试或替他人参加考试等。凡违反考试纪律或作弊者, 按《北京大学本科考试工作与学习纪律管理规定》给予相应处分。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确, 并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生诚信答卷, 共同维护北京大学的学术声誉。

**答题要求:** 解答算法设计题目时, 请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法, 请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素; 贪心法需给出证明; 回溯法需给出解向量、搜索树等、约束条件; 各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。



## 一、选择题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 假设某算法的计算时间表示为递推关系式

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$T(1) = 1$$

则算法的时间复杂度为 (C)

- A.  $O(n)$     B.  $O(\sqrt{n})$     C.  $O(\sqrt{n} \log n)$     D.  $O(n^2)$
2. (C) 的平均和最坏时间复杂度为  $\Theta(n^2)$ , 其中  $n$  是待排序的元素个数。  
A. 快速排序    B. 插入排序    C. 冒泡排序    D. 排序
3. (B) 属于 NP 类问题。  
A. 不存在一个 P 类问题。  
B. 任何一个 P 类问题。  
C. 任何一个不属于 P 类的问题。  
D. 任何一个不属于 NPC 类的问题。
4. 以下哪个论述是正确的? (D)  
A. 单纯形法在最坏情况下是多项式时间的。  
B. 在线算法的竞争比越大, 算法的性能越好。  
C. 拉斯维加斯算法的输出有可能是错误的。  
D. 使用回溯算法的必要条件是问题要满足多米诺性质。
5. 关于网络流, 以下哪个论述是错误的? (C)  
A. 如果可行流  $f$  是最大流, 那么不存在关于  $f$  的  $s-t$  增广链。  
B. 最大流一定是极大流。  
C. 极大流一定是最大流。  
D. 容量网络的最大流的流量等于最小割集的容量。

## 二、算法设计 (共 10 分)

疫情期间, 小明买了  $n$  种不同的口罩, 对于第  $i$  种口罩, 其单价为  $p_i$ , 最大使用时间为  $t_i$  小时, 个数为  $K_i$  个。假设小明下周计划外出  $m$  个小时, 在保证安全的前提下 (每个口罩的实际使用时间要小于等于其最大使用时间), 如何使用口罩能使小明使用代价最小? 如果一个口罩的实际使用时间为  $t$  小时, 并小于其最大使用时间, 则认为其使用代价为  $\frac{t}{t_i} \times p_i$ 。请设计一个算法帮助小明。

贪心,  $\frac{p_i}{t_i}$  排序





### 三、算法设计 (共 15 分)

设  $n$  为正整数, 有  $n$  个男生和  $n$  个女生, 开始男生和女生随机站成一排, 现在需要通过一系列相邻同学的交换, 把  $n$  个男生换到  $n$  个女生的右边. 以下是  $n=4$  的一个实例.

输入: 女 男 男 女  
输出: 女 女 男 男

- 男  
朴素的归并(冒)
- (1) 请设计一个交换算法, 说明算法的主要思想并计算在最坏情况下的交换次数.
  - (2) 假设一种特殊情况是男生和女生开始是交替出现的, 即: 男 女 男 女 ...  
请问在这种输入情况下, 任何求解该问题的算法都至少需要交换多少次? ( $O(n^2)$ )
  - (3) 考虑所有可能的输入是等概率发生的, 请分析任何求解该问题的算法都至少需要做的交换次数的期望. 对称, 每一种排列  $A$  对应一个  $A'$ , 且  $A+A' = \frac{n^2}{4}$ .

### 四、算法设计 (共 20 分)

疫情期期间, 接蹊男小马在家工作, 他有一批频率各不相同的通信收发芯片, 其中有  $n$  个接收芯片,  $n$  个发送芯片接. 如果接收芯片和发送芯片的频率相同, 就可以配对用来做实验, 频率不同的收发芯片连到一起会报错 (提示接收或发送芯片哪个频率更高). 接收芯片和发送芯片的接口不同, 所以很容易区分, 但接收芯片之间和发送芯片之间的外表完全相同, 只能通过把一对收发芯片接到一起进行测试看是否报错来检验, 且每次只能测试一对芯片. 二次查找 或  $n \log n$   $n \log n$

(1) 小马把已配对好的  $n$  对收发芯片按频率高低顺序摆在了桌上后, 就走去阳台望向窗外, 心里构思着如何进行实验. 可当小马转身时却发现, 他那淘气的儿子把所有的接收芯片都拿走当积木玩了起来. 小马并没有生气, 他很自信可以很快把这些芯片重新配对, 因为发送芯片还按顺序摆在桌上没被动过. 请问小马该如何用最快的时间把所有的收发芯片重新配对? 请帮小马设计一个算法, 用语言简要描述算法的设计思想, 并分析该算法在最坏情况和平均情况下的复杂度.

(2) 小马重新把  $n$  对芯片配对并按顺序排在桌上后, 发现已经快到吃饭时间, 就去做饭了. 等做完饭回来一看, 桌上的芯片又被淘气的儿子拿去当积木玩了, 而且是所有的芯片! 小马这下郁闷了, 他该如何把所有的收发芯片重新配对呢? 请再帮小马设计一个算法, 用语言简要描述算法的设计思想, 并分析该算法在最坏情况和平均情况下的复杂度. 类似于快排  $n \log n$   $n^2$

### 五、算法设计 (共 15 分)

凤鸣小城的街道很有特点, 以中心广场为根, 呈现为一颗满的二叉树. 一条条街道是树中的边, 街道口位置是树中的节点. 极限广告公司通过招标拿下了凤鸣小城街道上的广告牌业务, 但被要求只能在每个街道口 (节点) 处最多设置一个广告

同解



牌,并且同一条街道(边)的两端街道口(节点)不能都设置广告牌。为了获得最大化的广告收益,极限广告公司对在每个街道口(节点)处设置广告牌能获得的收益都进行了评估,请帮助极限广告公司根据评估结果做出规划,应该在哪些街道口(节点)设置广告牌。(注:中心广场处也可以最多设置一个广告牌)

#### 六、平摊分析(共10分)

考虑平摊分析课程中介绍的双栈结构实现队列的习题,  $\sum n_B + n_B$

- (1) 在只有  $\text{dequeue}(\text{List } l)$  和  $\text{enqueue}(\text{List } l, \text{Object } o)$  操作时,如何用势函数证明,这两个操作的平摊代价都是  $O(1)$ ?
- (2) 如果我们增加了一个  $\text{multidequeue}(\text{List } l, \text{int } k)$  操作,可以一次最多从队列中移除  $k$  个对象,该如何设计势函数,使得  $\text{multidequeue}$  操作的平摊代价也是  $O(1)$ ?

#### 七、近似算法(共10分)

找到图  $G$  中一个度数最大的顶点  $u_1$ ,找出所有与  $u_1$  相邻的顶点,构成顶点集  $U_1$ ,构造图  $G$  的  $U_1$  导出子图  $G_1$ 。再对图  $G_1$  用上述方法找出度数最大的顶点  $u_2$ ,继而构造导出子图  $G_2$ 。以此类推,最终得到  $u_1, u_2, \dots$ , 构成一个团。该近似算法是否是一个常数近似比的算法?如果是,求其近似比,并尝试构造其紧实例;如果不是,举反例证明你的结论。  
*举极端反例,证明不是近似比算法*

#### 八、NP完全性(10分)

证明最小平方和问题是 NP 完全的,

输入: 一个有  $n$  个整数的集合  $A$ 、待划分的子集个数  $K$ 、以及整数  $L$ 。

输出: 是否能将  $A$  划分成  $K$  个不相交的子集  $A_1, A_2, \dots, A_K$  且  $A = \bigcup_{i=1}^K A_i$ , 使得

$$\sum_{i=1}^K (\sum_{a \in A_i} a)^2 \leq L.$$

可以利用下图中的某个问题进行证明。  $k=2, L = \frac{\text{sum}}{2} \times 2$

