

装  
订  
线  
内

不  
要  
答  
题

# 北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 算法设计与分析 姓名： \_\_\_\_\_ 学号： \_\_\_\_\_

考试时间： 2018 年 6 月 24 日 大班教师： \_\_\_\_\_ 小班教师： \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									
阅卷人									

## 北京大学考场纪律

1、考生进入考场后，按照监考老师安排隔位就座，将学生证放在桌面上。无学生证者不能参加考试；迟到超过 15 分钟不得入场。在考试开始 30 分钟后方可交卷出场。

2、除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机、或有存储、编程、查询功能的电子用品等）不得带入座位，已经带入考场的必须放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题请向监考教师提出，不得向其他考生询问。提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；交卷后不得在考场内逗留或在附近高声交谈。未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场答卷。考试结束时间到，考生立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准交头接耳，不准偷看、夹带、抄袭或者有意让他人抄袭答题内容，不准接传答案或者试卷等。凡有违纪作弊者，一经发现，当场取消其考试资格，并根据《北京大学本科考试工作与学术规范条例》及相关规定严肃处理。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生以北京大学学生的荣誉与诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

**答题要求：**解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树等、约束条件；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。

得分

一、判断题（10 分，每题 1 分， 正确打✓，错误打✖）

1. 如果  $P=NP$ ，那么每一个 NPC 问题都可以在多项式时间内求解。（ ）
2.  $NP-hard$  问题一定是 NPC 问题。（ ）
3. 求  $n$  个数中的次大数最少只需要比较  $\log(n)$  次。（ ）
4. 近似算法的近似比越高，算法所得到的近似解越接近最优解。（ ）
5.  $\log(n!)=\Theta(n\log(n))$  （ ）
6. 0-1 背包问题可以用动态规划方法求解，因此不属于 NPC 类问题。（ ）
7. 一般货郎问题存在 2-近似算法。（ ）
8. 随机选择算法 RandomSelect 是一个 Monte Carlo 算法。（ ）
9. 线性规划问题一定有唯一的最优解。（ ）
10. 如果  $f$  是最大流，那么不存在关于  $f$  的  $s-t$  增广链。（ ）

得分

## 二、单选题( 每小题 2 分, 共 10 分)

1. 假设某算法的计算时间表示为递推关系式

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}, \quad T(1) = 1$$

则算法的时间复杂度为 ( )。

- A.  $O(n)$                       B.  $O(\sqrt{n})$                       C.  $O(\sqrt{n} \log n)$                       D.  $O(n^2)$

2. 给定含有  $n$  个不同的数的数组  $L = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 。如果  $L$  中存在  $x_i$  ( $1 < i < n$ ) 使得  $x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i$ , 并且  $x_i > x_{i+1} > \dots > x_n$ , 则称  $L$  是单峰的, 并称  $x_i$  是  $L$  的“峰顶”。现在已知  $L$  是单峰的, 请把 a-c 三行代码补全到算法中使得算法正确找到  $L$  的峰顶。

a. Search( $k+1, n$ )

b. Search( $1, k-1$ )

c. return  $L[k]$

Search( $1, n$ )

1.  $k \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$

2. if  $L[k] > L[k-1]$  and  $L[k] > L[k+1]$

3. then \_\_\_\_\_

4. else if  $L[k] > L[k-1]$  and  $L[k] < L[k+1]$

5. then \_\_\_\_\_

6. else \_\_\_\_\_

正确的填空顺序是 ( )。

- A. c, a, b                      B. c, b, a                      C. a, b, c                      D. b, a, c

3. 同时查找  $2n$  个数中的最大值和最小值, 最少比较次数为 ( )。

- A.  $3(n-2)/2$                       B.  $4n-2$                       C.  $3n-2$                       D.  $2n-2$

4. 以下最坏时间复杂度不是  $O(n^2)$  的排序方法是 ( )。

- A. 插入排序                      B. 归并排序                      C. 冒泡排序                      D. 快速排序

5. 以下问题中属于 NPC 的是 ( )。

- A. 最长公共子序列    B. 双机调度    C. 最小生成树    D. 快速排序

得分

### 三、(10 分)

矩阵  $A$  有  $m$  行  $n$  列，其中每个元素均为 0 或 1。是否存在矩阵  $A$  的若干行，使得以这些行组成的子矩阵中每一列恰好有一个 1？例如，在下图的 5 行 6 列的矩阵中，选择 2，4，5 行（阴影部分），可以满足要求。

1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0

请设计一个算法解决该问题并分析时间复杂度。

得分

#### 四、线性规划应用（10 分）

期末算法小班聚餐，餐费标准是人均 50 元。现在决定从“站点比萨”购买比萨和饮料，可供选择的有五种比萨和两种饮料，如下表

所示：

	比萨					饮料	
名称	垃圾桶	夏威夷	加州小牛肉	绞肉机	站点特色	可乐	雪碧
价格（元）	220	165	195	200	190	15	15
分量	6 人份	4 人份	5 人份	6 人份	5 人份	3 人份	3 人份

假设一个小班共有 15 人（包括助教和老师在内），请问如何选择比萨和饮料来满足以下要求：（1）每个人都至少有一份比萨和一份饮料；（2）人均消费不超过 50 元；（3）任何 1 种比萨的数量不能超过总比萨数量的一半；（4）总花费最少。

写出模型即可，不用具体求解。

1. 请先定义变量和写出目标函数。（5 分）

2. 请写出要满足的约束条件。（5 分）

得分

五、网络流应用（20 分）

生鲜商品的物流问题，只有尽快把生鲜商品及时送到冷库才能最大限度的减少生鲜商品的变质。假设共有  $k$  个冷库，每个冷库  $i$  最多可以储存  $b_i$  个生鲜集装箱。现共有  $n$  个生鲜集装箱，每个集装箱  $j$  距离每个冷库  $i$  的距离以运送时间计算记为  $t_{ij}$ 。我们希望集装箱既能在 1 小时内送到冷库，又不能把一个冷库的储存空间用完导致无法储存后续出现的生鲜集装箱，因此需要尽可能地保持冷库空间占用率平均，不要过于集中。

1. 请设计一个最大流算法，判断是否可以将  $n$  个生鲜集装箱在 1 小时内送往  $k$  个冷库，并保证每个冷库  $i$  的存储空间占用率不超过  $\left\lceil \frac{nb_i}{\sum b_i} \right\rceil$ ？画出流网络图，说明源点、汇点、中间节点、边、容量、流量分别代表的含义。（10 分）

2. 如果无法保证冷库空间占用率绝对平均，如何设计最大流算法，判断能否保证集装箱在 1 小时内送到冷库？如果能，又如何尽可能的使冷库的空间占用率的最大值最小化（也就是使各冷库的空间占用率尽可能地平均）？（10 分）

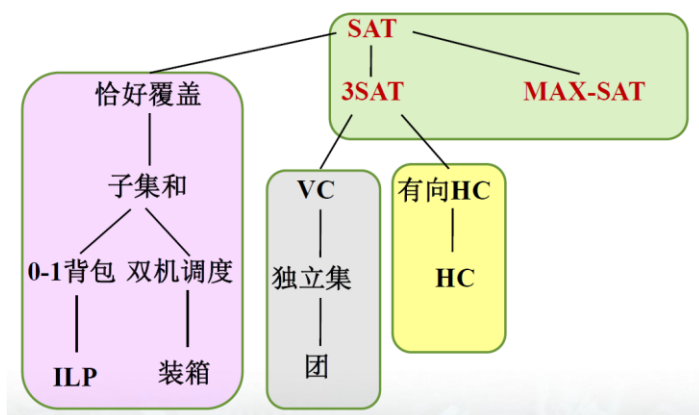
得分

## 六、NPC 证明 (15 分)

给定图  $G = \langle V, E \rangle$  和整数  $k$ 。如果任意两个结点  $v, u \in I$ , 边  $(v, u) \notin E$ , 并且也没有从  $v$  到  $u$  的两条边的路径, 即没有结点  $w$  使得  $(v, w) \in E$  且  $(w, u) \in E$ , 则称集合  $I \subseteq V$  是强独立的。强独立集问题是要确定  $G$  是否有一个大小不小于  $k$  的强独立集。

1. 请证明强独立集是  $NP$  (5 分)。

2. 请证明强独立集是  $NP$  难 (10 分)。(提示: 可以利用下图中的  $NP$  问题进行证明)





得分

### 七、近似算法（10 分）

下列算法是解决最小顶点覆盖问题（VC）的一个近似算法，给定图  $G = \langle V, E \rangle$ ，输出集合  $C$  代表找到的近似解。

Approx-VC ( $G$ )

1. 将  $C$  初始化为空集
2.  $EI = E$
3. While  $EI$  不为空
4.     Do 任取  $EI$  中的一条边  $(u, v)$
5.          $C = C \cup \{u, v\}$
6.         从  $EI$  中删除所有和  $u$  或  $v$  关联的边
7. Return  $C$

1. 证明算法的输出的是  $G$  的一个顶点覆盖。（3 分）

2. 请分析该近似算法的近似比。（7 分）

得分

### 八、(15 分)

1. 在  $n$  个数中找最大数至少比较  $n-1$  次，如果找一个至少第  $\lfloor n/2 \rfloor$  大的数，至少需要多少次比较？（5 分）
2. 如果想用更少的比较次数找出一个至少第  $\lfloor n/2 \rfloor$  大的数，就需要容忍一定的错误，请设计一个蒙特卡罗随机算法，使得在错误概率期望不超过  $1/n$  的情况下，找出一个至少第  $\lfloor n/2 \rfloor$  大的数。（5 分）
3. 该算法的时间复杂度是多少？（5 分）