

20 呆@西西弗斯

QQ : 2305201452

一、 填空题 (4分×5=20分)

1、设  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a, & x \leq 0 \\ \frac{\sin^2 4x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$ , 当  $a = \underline{16}$  时, 函数  $y = f(x)$  在  $x = 0$  处连续。

2、 $\frac{d}{dx}(x^x) = \underline{x^x}(\ln x + 1)$ 。

3、设  $y = 3^{\sin 2x}$ , 则  $dy = \underline{2 \ln 3 \cos 2x 3^{\sin 2x} dx}$ 。

4、曲线  $y = \ln x$  上一点, 其横坐标  $x = 2$  为, 则曲线在该点处的切线方程为  $y = \underline{\frac{x}{2} + \ln 2 - 1}$ 。

5、已知  $f(x) = e^{-2x}$ , 则  $f^{(n)}(0) = \underline{(-2)^n}$ 。

二、单项选择题 (4分×4=16分)

1、设  $f(x) = \ln|x|$ , 则  $f'(x)$ 。 A

(A)  $= \frac{1}{x}$ ; (B)  $= \frac{1}{|x|}$ ; (C) 不存在; (D) 以上都不对。

2、当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小中最高阶的是 ( D )

(A)  $x^2 + x^6$ ; (B)  $\sin x - \tan x$ ; (C)  $1 - \cos^2 x$ ; (D)  $1 - \cos x^2$ 。

3、设  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - mx)^{\frac{1}{x}} = e^2$ , 则  $m =$  ( C )

(A)  $\frac{1}{2}$ ; (B) 2; (C) -2; (D)  $-\frac{1}{2}$ 。

4、点  $x = 1$  是函数  $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x > 1 \\ 12 - 5x, & x \leq 1 \end{cases}$  的 D

(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 第二类间断点; (D) 连续点。

三、(8分×3=24分)

1、计算  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

解: 原式  $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}$

2、计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k})$

解: 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^k} = \begin{cases} 0, & k > 2 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \\ \infty, & k < 2 \end{cases}$ 。

3、证明: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) - x = o(e^x - 1)$

呆@西西弗斯

QQ : 2305201452

呆@西西弗斯

QQ : 2305201452

$$\text{证: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

所以, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) - x = o(e^x - 1)$

四、(8分×3=24分)

1、求函数  $y = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2)$  的导数。

$$\text{解: } y' = \left( x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) \right)' = \arctan \frac{x}{a} + x \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} - \frac{a}{2} \frac{2x}{a^2 + x^2}$$

$$= \arctan \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2 + x^2} - \frac{ax}{a^2 + x^2} = \arctan \frac{x}{a}$$

$$2、\text{设 } \begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}。$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{2t - 3t^2}{2t} = 1 - \frac{3}{2}t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{3}{2}t \right) \frac{1}{2t} = -\frac{3}{4t}$$

3、设函数  $y = y(x)$  由  $y - xe^y = 1$  所确定, 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 。

解:  $y - xe^y = 1$  两边同时求导得:  $y' - e^y - xe^y y' = 0$

故  $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$  将  $x = 0, y = 1$  代入得  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = e$

五、(8分×2=16分)

$$1、\text{设 } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 求 } f'(x)。$$

呆@西西弗斯 解: 当  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ ,  
QQ : 2305201452

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{所以, } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2、设  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 在  $(1, 2)$  内可导, 且  $f(1) = f(2) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (1, 2)$ , 使得  $\xi \cdot f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$ 。

构造函数  $F(x) = x^{-2}f(x)$ ,  $[1, 2]$  上应用罗尔定理。

21

一、  $-1$ 、 $e^{-2}$ 、 $2\sqrt{x}$ 、 $x+y=1$ 、 $-1$ 、 $-\frac{7}{6}$ 、 $2$ 、 $二$ 、 $-1$

二、  $1$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$

2、

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} = \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq x_n \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 3、 \quad y' &= \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln \sqrt{1+x^2} + \arctan x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln \sqrt{1+x^2} + \arctan x \cdot \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

呆@西西弗斯  
QQ : 2305201452

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$$

呆@西西弗斯  
QQ : 2305201452

$$\begin{aligned} \text{三、 } 1、 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{b}{a} \csc^2 t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2} \csc^3 t \end{aligned}$$

$$2、 \text{求导: } 3y^2 y' + 4x - y - xy' = 0 \text{ 将 } x=0 \text{ 时 } y=-1 \text{ 代入得 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{3}$$

$$3、 x=1 \text{ 处连续: } f(1-0) = f(1+0) = f(1) \Rightarrow a+b=1$$

$$x=1 \text{ 处可导: } f'_-(1) = f'_+(1),$$

$$\text{又 } f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = a, \text{ 得 } a=2, b=-1$$

$$\begin{aligned} \text{四、 } 1、 \quad f(a) &= a \Rightarrow c=a, f(b) = b \Rightarrow c=b, \\ f(a) &\neq a \text{ 且 } f(b) \neq b \text{ 时, 构造函数 } F(x) = f(x) - x \text{ 用零点定理} \end{aligned}$$

$$2、 \text{构造函数 } F(x) = e^x f(x) \text{ 用罗尔定理}$$