呆@西西弗斯
QQ：2305201452

19 期中答案

一、填空

1、e^6；2、2π；3、$(1,-2),(-1,2)$；4、$\cos e^x$；5、-1

二、单项选择题

A 卷：CBCC　　　　　　B 卷：BCDA

三、1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+6\sin n}{3n^2-2n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+6\dfrac{\sin n}{n^2}}{3-2\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+6\dfrac{\sin n}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-2\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}=\dfrac{1}{3}$

2、$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)'-a\left(\arccos\dfrac{a}{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\left(x^2-a^2\right)'-a\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}}\right)\left(\dfrac{a}{x}\right)'$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+a\frac{|x|}{\sqrt{x^2-a^2}}\left(-\frac{a}{x^2}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{a^2|x|}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

3、$\dfrac{y'}{y}=2(\ln x+1)$，所以 $y'=2y(\ln x+1)=2x^{2x}(\ln x+1)$

四、1、$\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}$$

2、$f^{(10)}(x)=C_{10}^0\left(e^x\right)^{(10)}x^2+C_{10}^1\left(e^x\right)^{(9)}2x+C_{10}^2\left(e^x\right)^{(8)}2=x^2e^x+20xe^x+2C_{10}^2e^x$

$f^{(10)}(0)=2C_{10}^2e^0=90$

3、当 $x>0$ 时，$f'(x)=3^x\ln 3$，　　当 $x<0$ 时，$f(x)=3^{-x}$，$f'(x)=-3^{-x}\ln 3$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3^{-x}-1}{x}=-\ln 3,\ f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x-1}{x}=\ln 3$，　$f'(0)$ 不存在

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}-3^{-x}\ln 3, x<0\\ 3^x\ln 3, x>0\end{cases}$$ (2+2+3+1)

呆@西西弗斯
QQ：2305201452

五、1、$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2},\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$；　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=2t$

$\frac{d^2y}{dx^2}=2\left(1+t^2\right)$；　$\frac{d^3y}{dx^3}=4t\left(1+t^2\right)$

2、设 $f\left(x\right)=e^x-2-x$，$f\left(x\right)=e^x-2-x$在$[0,2]$上连续，

并且 $f\left(0\right)=1-2=-1<0$ $f\left(2\right)=e^2-2-2=e^2-4>0$

所以，由零点定理，在开区间(0,2)内至少存在一点ξ，使得 $f\left(\xi\right)=e^a-2-a=0$

即方程$e^x-2-x=0$至少存在一个根 a,且 0<a<2

也即是曲线 $y=e^x-2$ 与直线 y=x 至少有一个交点，且横坐标 x=a， 0<a<2，故该交点在第一象限.

20 期中答案 呆@西西弗斯

QQ：2305201452

一、 填空题（4 分×5=20 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases}3x^2+a, & x\le 0\\ \frac{\sin^2 4x}{x^2}, & x>0\end{cases}$，当 $a=$__16__时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

2、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y-\cos 3y=2x$ 确定，$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2+3\sin 3y}$.

3、设 $y=3^{\sin 2x}$，则 $dy=2\ln 3\cos 2x3^{\sin 2x}dx$.

4、曲线 $y=\ln x$ 上一点，其横坐标 $x=2$ 为，则曲线在该点处的切线方程为

$y=\frac{x}{2}+\ln 2-1$。

5、已知 $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$，则 $f^{(n)}(0)=(-2)^n$.

二、单项选择题（4 分×4=16 分）

1、设 $f(x)=\ln|x|$，则 $f'(x)$。 A

（A）$=\frac{1}{x}$；　（B）$=\frac{1}{|x|}$；　（C）不存在；　（D）以上都不对。

2、当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中最高阶的是 （ D ）

（A） x^2+x^6； （B） $\sin x-\tan x$； （C） $1-\cos^2 x$； （D） $1-\cos x^2$.

3、设 $\lim\limits_{x\to 0}(1-mx)^{\frac{1}{x}}=e^2$，则 $m=$（ C ）

（A） $\frac{1}{2}$；（B） 2；（C） -2；（D） $-\frac{1}{2}$。

4、点 $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}3x+4, x>1\\ 12-5x, x\le 1\end{cases}$ 的 D

（A）可去间断点； （B）跳跃间断点； （C）第二类间断点； （D）连续点。

三、(**8 分×3=24 分**)

1、计算 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=2\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}$

2、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^k}+\frac{2}{n^k}+\cdots+\frac{n}{n^k})$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^k}=\begin{cases}0，k>2\\ \frac{1}{2}, k=2\\ \infty, k<2\end{cases}$ 。

3、证明：当 $x\to 0$ 时， $\ln(1+x)-x=o(e^x-1)$

证： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}-1=1-1=0$

所以，当 $x\to 0$ 时， $\ln(1+x)-x=o(e^x-1)$

四、(**8 分×3=24 分**)

1、求函数 $y=x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)$ 的导数。

解： $y'=\left(x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)\right)'=\arctan\frac{x}{a}+x\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a}-\frac{a}{2}\frac{2x}{a^2+x^2}$

$=\arctan\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}-\frac{ax}{a^2+x^2}=\arctan\frac{x}{a}$

2、设$\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t-3t^2}{2t} = 1-\dfrac{3}{2}t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = = \dfrac{d}{dt}(1-\dfrac{3}{2}t)\dfrac{1}{2t} = -\dfrac{3}{4t}$

3、设$y = x^{2x} \quad (x>0)$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解：取对数，$\ln y = \ln x^{2x} = 2x\ln x$，

两边对 x 求导，$\dfrac{y'}{y} = 2(1+\ln x) \Rightarrow y' = 2y(1+\ln x) = 2x^{2x}(1+\ln x)$

五、（**8 分×2=16 分**）

呆@西西弗斯
QQ：2305201452

1、设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$。

解：当 $x \neq 0$，$f'(x) = \left(\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{x}\right)' = \dfrac{(x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}$，

当 $x=0$ 时，$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

所以，$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

2、（A 班做）设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续。且 $a \le f(x) \le b$，证明在$[a,b]$内至少存在点 C，使 $f(C) = C$。

构造函数$F(x) = f(x) - x$，$[a,b]$上应用零点定理。

（B 班做）设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续。且 $a < f(x) < b$，证明在(a,b)内至少存在点 C，使 $f(C) = C$。

构造函数$F(x) = f(x) - x$，$[a,b]$上应用零点定理。