18 工答案

一、客观题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1、$-\dfrac{1}{2}$；2、$-\dfrac{1}{x}$；3、$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$；4、$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-3}$；5、$y=x$；

6、$(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3}]$；7、$\dfrac{8}{\sqrt{3}}$；8、$y=x^2(C-\ln x)$。

二、判断级数的敛散性(本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分)

1、$\because \sqrt{n}\tan\dfrac{\pi}{n^2}\sim\dfrac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}}\quad n\to\infty$，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\tan\dfrac{\pi}{n^2}$ 收敛 $(p=\dfrac{3}{2}>1)$。

2、$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+2)^2\cdot 2^{n+1}}\cdot\dfrac{(n+1)^2\cdot 2^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3}{2(n+2)^2}=+\infty>1$，

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+1)^2\cdot 2^n}$ 发散。

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、$\because r^2-2r-3=(r-3)(r+1)=0$，$\therefore r_1=3$，$r_2=-1$，$\therefore Y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$。

$\because 0$ 不是特征值，$\therefore y^*=ax+b$。$\therefore -2a-3(ax+b)=3x+1$，$\therefore a=-1$，$b=\dfrac{1}{3}$。

$\therefore y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-x+\dfrac{1}{3}$。

2、$\because d(\sin(xy)+xz^2-3yz)=\cos(xy)(ydx+xdy)+z^2dx+2xzdz-3zdy-3ydz=0$，

$\therefore dz=\dfrac{y\cos(xy)+z^2}{3y-2xz}dx+\dfrac{x(\cos(xy)-3z}{3y-2xz}dy$，

$\therefore z_x=\dfrac{y\cos(xy)+z^2}{3y-2xz}$，$z_y=\dfrac{x(\cos(xy)-3z}{3y-2xz}$。

3、$f(x)=\ln 3+\ln(1+\dfrac{x-3}{3})=\ln 3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(x-3)^n\quad x\in(0,6]$。

四、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、$z_x=-3yf_1'+8xf_2'$，$z_{xy}=-3f_1'-3y(4y-3x)f_{11}''+8x(4y-3x)f_{12}''$。

2、$\because \begin{cases}y=-x\\x+2y=3\end{cases}\Rightarrow(-3,3)$，$\begin{cases}y=-x\\y=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)$，$\begin{cases}y=0\\x+2y=3\end{cases}\Rightarrow(3,0)$。

$\therefore \iint\limits_D(3y-1)d\sigma=\int_0^3(3y-1)dy\int_{-y}^{3-2y}dx=\int_0^3(-3y^2+10y-3)dy=9$。

3、$\because \begin{cases} z_x = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ z_y = 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \\ (2,2) \end{cases}$，又$\because z_{xx} = 6x - 8$，

$z_{xy} = 2$，$z_{yy} = -2$。$\therefore (0.0)$处，$AC - B^2 = 8 > 0$，并且$A = -8 < 0$，故$(0,0)$是极大值点，极大值为$z(0,0) = 1$；$(2,2)$处，$AC - B^2 = -8 < 0$，故$(2,2)$不是极值点。

五、计算题(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

1、令$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad x \in (-1,1)$，则

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = (\frac{1}{1-x} - 1)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad x \in (-1,1)，$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} s(\frac{1}{3}) = \frac{3}{4}$。

2、$I = \iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \overset{极}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 e^r r dr = 2\pi [re^r - e^r]_1^2 = 2\pi e^2$。

附加题（本题 5 分）

$\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$，$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$，

$\therefore e^x - e^{-x} = 2(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots)$，

$\therefore \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$。