

## 一元函数积分学

1、设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , 记  $F(x) = \int_0^x f(t)dt, 0 \leq x \leq 2$ , 求  $F(x)$ 。

2、设  $\int f(x)dx = x^2 + C$ , 求  $\int xf(1-x^2)dx$ 。

3、求下列积分

(1)  $\int e^{e^x+x} dx$ ; (2)  $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ ; (3)  $\int x(1+x^2)^{100} dx$ ; (4)  $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}} dx$ ; (5)  $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x \cos x} dx$ ;

(6)  $\int (x-1)e^{x^2-2x} dx$ ; (7)  $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$ ; (8)  $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$ ; (9)  $\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx$ ;

(10)  $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ; (11)  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx (b \neq a)$ 。

4、求下列积分

(1)  $\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + \cos x \cdot e^{\sin x})} dx$ ; (2)  $\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$ ; (3)  $\int \frac{2 + \ln x}{x \ln x (1 + x \ln^2 x)} dx$ ; (4)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$ 。

5、设  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$ , 求  $\int f(x)dx$ 。

6、证明函数  $\operatorname{sgn}(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$  不存在原函数  $F(x)$ 。

7、建立  $I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{x^2+1}} dx$  的递推公式。

8、计算积分  $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$ 。

9、求积分  $\int t^\alpha \ln t dt$  ( $\alpha$  为常数)。

10、计算积分  $\int (\ln \ln x + \frac{1}{\ln x}) dx$ 。

11、求下列积分

(1)  $\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} dx$ ; (2)  $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ ; (3)  $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} dx (a > 0)$ ; (4)  $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$ ;

(5)  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{a^2+x^2}} dx (a > 0)$ ; (6)  $\int \frac{2^x}{1+2^x+4^x} dx$ ; (7)  $\int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})} dx$ ;

(8)  $\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} dx$ ; (9)  $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}} dx$ 。

12、求下列积分

$$(1) \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx; (2) \int \sin(\ln x) dx; (3) \int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx; (4) \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx; (5) \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx.$$

13、求下列积分

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx; (2) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx; (3) \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx; (4) \int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{\sin 2x + 2 \sin x} dx; (6) \int \sqrt{1 + \sin x} dx; (7) \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx; (8) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$(9) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx; (10) \int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)} \right] dx; (11) \int \frac{f'(\ln x)}{x\sqrt{f(\ln x)}} dx.$$

14、设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续且单调递减，证明  $\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$ 。

15、计算下列积分

$$(1) \int_{-3}^3 [x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{9-x^2}] dx; (2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 \arctan x + \cos^7 x + \sin^8 x) dx.$$

16、设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续且满足  $\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x$ ，求  $f(2)$ 。

17、求极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t e^t \sin t dt}{x^6 e^x}; (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}.$$

18、求下列积分

$$(1) \int_{1/4}^{1/2} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx; (2) \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx (a > 0); (3) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx;$$

$$(4) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{10} x - \cos^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} dx; (5) \int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx; (6) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx;$$

$$(7) \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx; (8) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{e^{x/2}(\cos x - \sin x)}{\sqrt{\cos x}} dx; (9) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx;$$

$$(10) \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x dx.$$

19、计算  $I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$  ( $n$  为自然数)。

20、求以下列积分：

$$(1) \int_{-2}^2 \max\{x, x^2\} dx; (2) \int_{-3}^2 \min\{2, x^2\} dx.$$

21、求下列积分

$$(1) \int_{1/e}^e |\ln x| dx; (2) \int_{-2}^5 |x^2 - 2x - 3| dx; (3) \int_0^1 t |t - x| dt; (4) \int_a^b |x| dx (a < b).$$

22、求下列积分

(1) 设  $f(x) = \int_0^{a-x} e^{y(2a-y)} dy$ , 求  $\int_0^a f(x) dx$ 。

(2) 设  $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$ , 求  $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$ 。

23、设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 求  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$ 。

24、求下列积分

(1) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $\forall x, y$  有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 求  $\int_{-1}^1 (x^2+1)f(x) dx$ 。

(2)  $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$ 。

25、设  $f(x), g(x)$  在  $[-a, a]$  ( $a>0$ ) 上连续,  $g(x)$  为偶函数, 且  $f(x)$  满足条件  $f(x) + f(-x) = A$

( $A$  为常数)。(1) 证明  $\int_{-a}^a f(x)g(x) dx = A \int_0^a g(x) dx$ ; (2) 求  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \arctan e^x dx$ 。

26、求下列积分

(1)  $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$ ; (2)  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan x)^\alpha} dx$  ( $\alpha$  为常数);

(3)  $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx$ 。

27、求下列积分

(1)  $\int_{1/2}^2 (1+x - \frac{1}{x}) e^{\frac{x+1}{x}} dx$ ; (2)  $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$ ; (3)  $\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$ ;

(4)  $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x) dx$ 。

28、设  $f(x)$  连续, 且关于  $x=T$  对称,  $a < T < b$ , 证明  $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx$ 。

29、若  $f(x)$  连续, 则  $\int_0^x [\int_0^u f(t) dt] du = \int_0^x (x-u) f(u) du$ 。

30、设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f(\xi) \int_\xi^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^\xi f(x) dx。$$

31、设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续的二阶导数, 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\xi)。$$

32、设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明  $(\int_a^b f(x) dx)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$ 。

33、设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且严格单增, 证明  $(a+b) \int_a^b f(x) dx < 2 \int_a^b x f(x) dx$ 。

34、设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上均为连续的增函数 ( $a, b>0$ ), 证明

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f(x) g(x) dx。$$

- 35、设  $f(x)$  在  $[a,b]$  上可导, 且  $f'(x) \leq M, f(a)=0$ , 证明  $\int_a^b f(x)dx \leq \frac{M}{2}(b-a)^2$ 。
- 36、设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有连续的导函数, 证明对任给的  $x \in [0,1]$  有  $|f(x)| \leq \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)dt$ 。
- 37、设  $f(x)$  在  $[a,b]$  上单调增加, 且  $f''(x) > 0$ , 证明  $(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 。
- 38、若  $f(x)$  与  $g(x)$  都在  $[a,b]$  上连续, 且  $g(x)$  在  $[a,b]$  上不变号, 则至少存在一点  $\xi \in [a,b]$  使得  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 。
- 39、若  $f(x)$  为  $[a,b]$  上单调可导函数,  $g(x)$  为可积函数, 则存在  $\xi \in [a,b]$  使得  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$ 。
- 40、设  $f(x)$  为  $[0,1]$  上的连续函数, 且在  $(0,1)$  上可微, 且  $8\int_{7/8}^1 f(x)dx = f(0)$ , 证明存在  $\xi \in (0,1)$  使得  $f'(\xi) = 0$ 。
- 41、设  $f(x), g(x)$  和它们的平方在  $[a,b]$  上可积, 证明  $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq [\int_a^b f^2(x)dx][\int_a^b g^2(x)dx]$ 。
- 42、设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上具有连续的导数, 且  $f(0) = f(1) = 0$ , 证明  $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \frac{1}{4} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$ 。
- 43、若  $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 证明  $2\int_a^b f(x)[\int_x^b f(t)dt]dx = [\int_a^b f(x)dx]^2$ 。
- 44、证明  $f(x) = \int_0^x (t-t^2)(\sin t)^{2n} dt$  ( $n$  为正整数) 在  $x \geq 0$  上的最大值不超过  $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ 。
- 45、设  $f(x), g(x)$  在  $[a,b]$  上连续,  $f(x) \leq g(x)$ , 且  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ , 证明  $f(x) \equiv g(x), x \in [a,b]$ 。
- 46、设  $f(x)$  在  $[0,+\infty)$  上连续, 且  $\varphi(x) = f(x)\int_0^x f(t)dt$  单调递减, 证明  $f(x) = 0, x \in [0,+\infty)$ 。
- 47、设  $f(x)$  为  $[a,b]$  上的连续递增函数, 证明  $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$ 。
- 48、设在  $[-1,1]$  上连续函数  $f(x)$  满足: 对  $[-1,1]$  上的任意偶连续函数  $g(x)$  都有  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ , 证明  $f(x)$  是  $[-1,1]$  上的奇函数。
- 49、求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\frac{1}{2^n}}{n+1} + \frac{\frac{2}{2^n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\frac{n}{2^n}}{n+\frac{1}{n}})$ 。
- 50、证明  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)dx > 0$ 。

51、证明  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

52、设  $f(x)$  二阶可导， $f''(x) \geq 0$ ， $g(x)$  为连续函数， $a > 0$ ，证明

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(g(x)) dx \geq f\left(\frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx\right)。$$

53、点  $A$  位于半径为  $a$  的圆周内部，且离圆心的距离为  $b$  ( $0 \leq b < a$ )，从点  $A$  向圆周上所有点的切线做垂线，求所有垂足所围成的图形的面积。