自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

密 封 线

东南大学成贤学院

第五届高等数学竞赛 选拔考试卷

考试时间	2020-9-23	考试形式	闭 卷	考试时间	120 分钟
学 号		班 级		姓 名	

题 号	一	二	三	总分
得 分				

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1、设 $z=f(x,y)$ 由 $x^2yz+yz^2+xz^3=27$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ___-1___

2、若 $a>0$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x\right]$，则 $a=$ ___36___。

3、已知当 $x\to\dfrac{1}{2}^+$ 时，$\pi-3\arccos x$ 与 $a(x-\dfrac{1}{2})^b$ 为等价无穷小，

则 $a=$ ___$2\sqrt{3}$___，$b=$ ___1___。

4、5. 设 $f(x,y)$，$g(x)$ 均可微，$z=f(xy,\ln x+g(xy))$，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ___f_2'___。

5、$\int_{-1}^{2}xe^{-|x|}dx=$ ___$\dfrac{2}{e}-\dfrac{3}{e^2}$___。

6、设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n(f(\dfrac{1}{n})-1)=$ ___1___。

7、设 $f(x)$ 是 x 到离 x 最近的整数的距离，则 $\int_0^{20}f(x)dx=$ ___5___。

8、设当 $x=0$ 时，$\dfrac{d}{dx}f(\sin x)=\dfrac{d}{dx}f^2(\sin x),f'(0)\neq 0$，则 $f(0)=$ ___$\dfrac{1}{2}$___。

9、设函数 $y=\left(x^2-3x+2\right)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$，则 $f^{(n)}(2)=$ ___$\dfrac{\sqrt{2}}{2}n!$___。

10、函数 $f(x)=\dfrac{x}{|1-x|}\ln|x|$ 的可去间断点为 ___$x=0$___。

二、计算下列题（每小题 10 分，共 40 分）

1、设 $f(t)=\int_1^t e^{-x^2}dx$，求 $\int_0^1 t^2 f(t)dt$。

解：

$$\int_0^1 t^2 f(t)dt=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt^3$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3e^{-t^2}dt=\frac{1}{3e}-\frac{1}{6} \qquad (4'+3'+3')$$

2、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{3}+\int_0^1 f^2\left(x^2\right)dx$，

求 $f(1)$ 的值。

解：$\int_0^1 f(x)dx \overset{x=u^2}{=\!=} 2\int_0^1 uf\left(u^2\right)du=2\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx \qquad (3')$

$$\therefore \int_0^1 2xf\left(x^2\right)dx=\frac{1}{3}+\int_0^1 f^2\left(x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2\left(x^2\right)dx-\int_0^1 2xf\left(x^2\right)dx+\int_0^1 x^2dx=0 \qquad (5'+2')$$

$$\Rightarrow \int_0^1\left[f\left(x^2\right)-x\right]^2dx=0$$

$$\Rightarrow f\left(x^2\right)\equiv x \quad \therefore f(1)\equiv 1$$

3、设

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{x}{n}+\cdots+\cos\dfrac{n-1}{n}x\right), & x>0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}dx\right)^n\right], & x=0\\ f(-x), & x<0\end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性。

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

密 封 线

$$x>0, f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x\right)$$

解：$$=\int_0^1 \cos xt\,dt=\frac{\sin x}{x} \qquad (3')$$

$$x=0, 1\le\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}\,dx\le\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!}\le\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}\,dx\right)^n\le\frac{\sqrt{3}}{n!}$$

$$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{x^5+x^3+1}\,dx\right)^n\right]=1 \qquad (3')$$

$$x<0, f(x)=f(-x)=\frac{\sin x}{x},$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases} \qquad (2')$$

$$\therefore f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=0 \qquad (2')$$

4、过坐标原点，作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线以及 x 轴围成的平面图形为 D。

（1）求 D 的面积 A；（2）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V。

解：切线方程：$y=\dfrac{x}{e}$ $\qquad (2')$

$$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{e}{2}-1 \qquad (4')$$

$$V=\pi\int_0^1((e-ey)^2-(e-e^y)^2)dy=\pi\left(\frac{5}{6}e^2-2e+\frac{1}{2}\right) \qquad (4')$$

三、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1、计算 $I=\int_1^e dy\int_0^1|y-e^x|\,x\,dx$。

$$I=\int_1^e dy\int_0^1|y-e^x|\,x\,dx$$

解：$$=\int_0^1 dx\int_{e^x}^e(y-e^x)x\,dy-\int_0^1 dx\int_1^{e^x}(y-e^x)x\,dy$$

$$=\left(\frac{3}{8}e^2-e+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}e^2\right)=\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}$$

2、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$。

证：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)$ $\qquad (2')$

则 $F(a)=F(b)=0, \exists x_1\in(a,b)$, 使 $F'(x_1)=0$

即 $f(x_1)-f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)-\frac{1}{2}(x_1-a)f'\left(\frac{a+x_1}{2}\right)=0$ $\qquad (3')$

由拉格朗日中值定理，$\exists x_2\in\left(\frac{a+x_1}{2},x_1\right), f(x_1)-f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)=f'(x_2)\frac{1}{2}(x_1-a)$

带入得：$f'\left(\frac{a+x_1}{2}\right)=f'(x_2)$, $\qquad (3')$

从而存在 $\xi\in\left(\frac{a+x_1}{2},x_2\right)\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$。 $\qquad (2')$