20 期末

一、客观题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1、设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin xy}{y}, & (x,y)\neq(2,0)\\ a, & (x,y)=(2,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点连续，则 $a=$______。

2、设 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$，$\vec{l}=(2,-1,2)$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(-1,1,2)}=$______。

3、交换积分次序 $I=\int_1^2 dx\int_1^{x^2} f(x,y)dy=$______。

4、曲线 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=2t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程为______。

5、设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\left.dz\right|_{(1,1)}=$______。

6、微分方程 $y'=1+y^2$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解为______。

7、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}(x-1)^n$ 的收敛域为（　　）

（A）$(-2,2)$　（B）$[-1,3]$　（C）$[-2,2]$　（D）$(-1,3)$

呆@西西弗斯
往年试卷
QQ:2305201452

8、微分方程 $y'-3y=e^{2x}$ 的通解为（　　）

（A）$y=\dfrac{1}{5}e^{2x}+Ce^{-3x}$　（B）$y=\dfrac{1}{5}e^{-2x}+Ce^{3x}$

（C）$y=-e^{2x}+Ce^{3x}$　（D）$y=-e^{3x}+Ce^{2x}$

二、计算题(本题共 4 小题，每小题 8 分，满分 32 分)

1、判断级数的敛散性(本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分)

①$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$；　②$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)^2}$

2、求微分方程 $y''-3y'+2y=3xe^x$ 的通解。

3、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+2y+z-2xy^2z^3=0$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

4、将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$ 展成 x 的幂级数，并且写出收敛域。

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

呆@西西弗斯
往年试卷
QQ:2305201452

1、设 $z=f(xy,\frac{x}{y})$，其中 f 有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2、计算 $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$，其中 D 是以 $0(0,0)$、$A(1,1)$、$B(0,1)$ 为顶点的三角形区域。

3、求函数 $z=x^3-y^3+3xy$ 的极值。

四、计算题(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

1、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$ 的和函数。

2、计算二重积分： $I=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$。

答案

一、客观题(本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分)

2； $-\frac{14}{3}$ ； $\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$ ； $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$ ； $dz=-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$ ；

$y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$； D； C

呆@西西弗斯
往年试卷
QQ:2305201452

二、计算题(本题共 4 小题，每小题 8 分，满分 32 分)

1（1）、 $n\to\infty,\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}},u_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(p>1)$ 故原级数收敛。

1（2）、 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}=2>1,$ 故原级数发散。

2、特征方程： $r^2-3r+2=0,\text{解得}r_1=1,r_2=1$

$\text{其次方程通解为},\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$

$\alpha=1\text{是特征单根，因此，}y^*=x(A_0x+A_1)e^x\text{代入原微分方程，}$

$$\text{解得,}\begin{cases}A_0=-\frac{3}{2},\\ A_1=-3\end{cases}\text{通解为}y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(-\frac{3}{2}x-3)e^x$$

$\text{令}F(x,y,z)x+2y+z-2xy^2z^3,$

3、 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1-2y^2z^3}{1-6xy^2z^2};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2-4xyz^3}{1-6xy^2z^2}$

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2})$$

4、 $$=\frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{\infty}-x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1]x^n,\ x\in(-1,1)$$

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2';$$

1、 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

2、 $$\iint_D\frac{x}{y^2}dxdy=\int_0^1dx\int_x^1\frac{x}{y^2}dy=\frac{1}{2}\text{或}\iint_D\frac{x}{y^2}dxdy=\int_0^1dy\int_0^y\frac{x}{y^2}dx=\frac{1}{2}$$

3、 $z=x^3-y^3+3xy$， $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-3y^2+3x=0\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6y;$$

$$AC-B^2=-36xy-9;$$

当$(x,y)=(0,0)$时，$AC-B^2=-9<0$,因此（0, 0）不是极值点；

当$(x,y)=(1,-1)$时，$AC-B^2=6>0$,因此（1, -1）是极小值点,极小值z=-1.

四、计算题(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

1、

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$,收敛域为[-1, 1)；

$[x^2S(x)]'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\frac{x}{1-x}$,等式两端同时积分得：

$x^2S(x)=\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=-x-\ln(1-x)$,又有$S(0)=0$,

故$S(x)=\begin{cases}\frac{-x-\ln(1-x)}{x^2},x\in[-1,0)\text{或}(0,1)\\ 1,x=0\end{cases}$

令$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

2、$I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sin\rho \cdot \rho d\rho$，

$= -2\pi\int_0^R \rho d\cos\rho = -2\pi(R\cos R - \sin R)$