22 期末

一、客观题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1、设 $\boldsymbol{z}=\ln\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}+\frac{\arctan \boldsymbol{y}^2}{\sqrt{\ln \boldsymbol{y}+1}}$，则 $\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}}=$ ________ 。

2、设 $z=\frac{y}{x^2+y^2}$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$ ________ 。

3、交换积分次序 $\int_0^1 \boldsymbol{dx}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}=$ ________ 。

4、曲面 $z^3=xy$ 在点 $P_0=(-1,1,-1)$ 处的切平面方程为 ________ 。

5、微分方程 $y'=(1+x)(1+y)$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解为 ________ 。

6、幂级数 $\sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{n}}{2^{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{x}-1)^{\boldsymbol{n}}$ 的收敛域为 ________ 。

7、设 $f(x,y,z)=x^2y^2+yz^3$，$\vec{l}=(1,1,1)$，则 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{l}}\Big|_{(1,1,1)}=$ ________ 。

8、微分方程 $\boldsymbol{y}'-\frac{2}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}$ 的通解为 ________ 。

9、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=$ ________。

二、解答题。（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2+1}$ 的敛散性。

2、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$ 是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

3、将 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=2$ 处展开成 $(\boldsymbol{x}-2)$ 幂级数，并且写出收敛域。

4、求函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分）

1、设 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{xy}-2,\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y})$，其中 f 有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2、计算 $\iint_D(3y-1)d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=-x, x+2y=3$ 及 x 轴围成.

3、计算二重积分：$\iint_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{dxdy}$，$\boldsymbol{D}$ 为 $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big|1\le \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\le 4\}$。

四、计算题(本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

1、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{nx^{n-1}}{3^n}$ 的收敛域、和函数.并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$ 的

2、求微分方程 $y''-y'-2y=2xe^{2x}$ 的通解.

答案

一、客观题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1、$-\frac{1}{x}$；2、dy；3、$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f\cdot dx$；4、$-x+y+3z+1=0$；5、$\ln(1+y)=x+\frac{x^2}{2}$；

6、$(-1,3)$；7、$\frac{8}{\sqrt{3}}$；8、$x^2(-\ln x+C)$；9、1。

二、解答题。(本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分)

1、因为 $\frac{\sqrt{n}}{2n^2+1}\sim\frac{\sqrt{n}}{2n^2}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛（$p=\frac{3}{2}>1$），所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2+1}$ 收敛。

2、考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}<1$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$ 绝对收敛。

3、

$$y=\ln x=\ln(2+(x-2))=\ln(2\left(1+\frac{(x-2)}{2}\right))$$

$$=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{(x-2)^n}{2^n},x\in(0,4]$$

4、$\begin{matrix} z_x=3x^2-8x+2y=0 \\ z_y=2x-2y=0 \end{matrix}$ 得驻点 $(0,0)(2,2)$

$$A=z_{xx}=6x-8,B=z_{xy}=2,C=z_{yy}=-2$$

$(0,0)$ 是极大值点，取得极大值 1，$(2,2)$ 不是极值点

三、计算题(本题共 3 小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1、$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+f_2'$；　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+(x+3y)f_{12}''+3f_{22}''$

2、$\iint_D(3y-1)d\sigma=\int_0^3 dy\int_{-y}^{3-2y}(3y-1)dx=\int_0^3(3y-1)(3-y)dy=9$

呆@西西弗斯
往年试卷
QQ：2305201452

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_D \rho e^{\rho}d\rho d\varphi$$

3、$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2\rho e^{\rho}d\rho=2\pi\int_1^2\rho de^{\rho}=2\pi e^2$

五、计算题(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{nx^{n-1}}{3^n}$ 收敛域 $(-3,3)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{nx^{n-1}}{3^n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{3^n}\right)'$$

$$=\left(\frac{\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{3}}\right)'=\left(\frac{x}{3+x}\right)'=\frac{3}{(3+x)^2},x\in(-3,3)$$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}=S(1)=\frac{3}{16}$

2、$y''-y'-2y=0$ 特征方程 $r^2-r-2=0$，特征根 $r_1=-1,r_2=2$

齐次通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$，设非齐次特解为 $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$ 带入得

$A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{9}$。故非齐次通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x\right)e^{2x}$