

呆@西西弗斯
往年试卷 19 期中答案

QQ : 2305201452

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1、0

2、1

3、2

4、 $\frac{x^4}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + C$.

5、 $f'(x) = \underline{3^x \sec x (\ln 3 + \tan x)}$

二、选择答案。D、B、C、B

三、计算题（每题 8 分，共 24 分）

1、解：法一：先在两边取对数，得

$$\ln y = \tan x, \text{ 两边同时取对数, } \frac{y'}{y} = \sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x}$$

$$\text{所以, } \frac{dy}{dx} = x^{\tan x} \left(\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x} \right)$$

$$\text{法二: } y = x^{\tan x} = e^{\tan x \ln x}, \text{ 所以 } \frac{dy}{dx} = x^{\tan x} \left(\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x} \right)$$

$$2、\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1+t^2} = 2t, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \frac{dt}{dx} = 2(1+t^2)$$

$$3、\text{解: 把方程两边分别对 } x \text{ 求导, 得 } y + x \frac{dy}{dx} - e^{-y} \frac{dy}{dx} = 1, \text{ 解得 } \frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{x-e^{-y}}$$

$$\text{将 } x=0, \text{ 代入原方程解得 } y=0, \text{ 切点为 } (0, 0), \text{ 所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1.$$

切线方程为: $x + y = 0$.

呆@西西弗斯

往年试卷 四、计算题（每题 8 分，共 24 分）

QQ : 2305201452

$$1、\text{解: 原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot 3x} = \frac{1}{6}$$

2、解：由莱布尼茨公式得：

$$y^{(8)} = (x \cos x)^{(8)} = C_8^0 x (\cos x)^{(8)} + C_8^1 x' (\cos x)^{(7)} = 8 \sin x + x \cos x.$$

3、解： $f(x)=\lim_{t\rightarrow 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim_{t\rightarrow 0}[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}]^{3x}=xe^{3x}.$
 $f'(x)=e^{3x}(1+3x).$

五、解答题（每题 8 分，共 16 分）

1、解：由导数的定义知， $f'(0)=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1.$

$f'(0)$ 存在，等于1.

2、证明：令 $F(x)=xf(x)$,显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导.

$F(0)=F(1)=0$ ，由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ ，使得 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.
证毕.

附加题

证明：已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

由拉格朗日中值定理知， $\exists \xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

令 $g(x)=e^x$,显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

由柯西中值定理知， $\exists \eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$$

将 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 代入 $\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$ 式中得：

$$\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{e^b-e^a} \text{ 即 } \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta} \text{ 证毕}$$

一、 填空题（4 分×5=20 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases} 3x^2+a, & x\leq 0 \\ \frac{\sin^2 4x}{x^2}, & x>0 \end{cases}$ ，当 $a=\underline{16}$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

2、 $\frac{d}{dx}(x^x)=\underline{x^x(\ln x+1)}$ 。

3、设 $y=3^{\sin 2x}$ ，则 $dy=\underline{2\ln 3\cos 2x3^{\sin 2x}}dx$ 。

4、曲线 $y=\ln x$ 上一点，其横坐标 $x=2$ 为，则曲线在该点处的切线方程为

$$y=\frac{x}{2}+\ln 2-1。$$

5、已知 $f(x) = e^{-2x}$ ，则 $f^{(n)}(0) = (-2)^n$ 。

二、单项选择题（4分×4=16分）

1、设 $f(x) = \ln|x|$ ，则 $f'(x)$ 。 A

(A) $= \frac{1}{x}$; (B) $= \frac{1}{|x|}$; (C) 不存在; (D) 以上都不对。

2、当 $x \rightarrow 0$ 时，下列无穷小中最高阶的是 (D)

(A) $x^2 + x^6$; (B) $\sin x - \tan x$; (C) $1 - \cos^2 x$; (D) $1 - \cos x^2$ 。

3、设 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - mx)^{\frac{1}{x}} = e^2$ ，则 $m =$ (C)

(A) $\frac{1}{2}$; (B) 2; (C) -2; (D) $-\frac{1}{2}$ 。

4、点 $x=1$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x > 1 \\ 12-5x, & x \leq 1 \end{cases}$ 的 D

(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 第二类间断点; (D) 连续点。

呆@西西弗斯
往年试卷

三、（8分×3=24分）

QQ : 2305201452

1、计算 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}$

2、计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k})$

解：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^k} = \begin{cases} 0, & k > 2 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \\ \infty, & k < 2 \end{cases}$ 。

3、证明：当 $x \rightarrow 0$ 时， $\ln(1+x) - x = o(e^x - 1)$

证： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$

所以，当 $x \rightarrow 0$ 时， $\ln(1+x) - x = o(e^x - 1)$

四、（8分×3=24分）

1、求函数 $y = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2)$ 的导数。

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= \left(x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) \right)' = \arctan \frac{x}{a} + x \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} - \frac{a}{2} \frac{2x}{a^2 + x^2} \\ &= \arctan \frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2 + x^2} - \frac{ax}{a^2 + x^2} = \arctan \frac{x}{a}\end{aligned}$$

2、设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{2t - 3t^2}{2t} = 1 - \frac{3}{2}t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{3}{2}t \right) \frac{1}{2t} = -\frac{3}{4t}$$

3、设函数 $y = y(x)$ 由 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 。

$$\text{解: } y - xe^y = 1 \text{ 两边同时求导得: } y' - e^y - xe^y y' = 0$$

$$\text{故 } y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} \text{ 将 } x=0, y=1 \text{ 代入得 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = e$$

呆@西西弗斯

往年试卷 五、(8分×2=16分)

QQ : 2305201452

1、设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$ 。

$$\text{解: 当 } x \neq 0, f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{所以, } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2、构造函数 $F(x) = e^{g(x)} f(x)$ 应用罗尔定理。