微分方程测验

一、客观题. （每题 5 分，共 60 分）

1、下列给定的方程中，不是微分方程的是（ B ） 因为不含未知函数的导数或者微分

A. $xy'=2y$ B. $x^2+y^2=C^2$ C. $y''+y=0$ D. $y''+y^2=0$

2、微分方程 $y'-y\cot x=0$ 的通解为（ B ）

A. $y=C\cos x$ B. $y=C\sin x$ C. $y=C\tan x$ D. $y=C\csc x$

3、下列微分方程是线性方程的是（ A ） 未知函数及未知函数的导数都是一次

A. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$ B. $y'+y=y^2\cos x$ C. $y'=y^3+\sin x$ D. $y'^2+6y'=1$

4、以下函数组线性无关的是（ C ） 线性无关：二者的商不等于常数

A. e^x,e^{x+1} B. $x^2,3x^2$ C. $\sin^2 x,\sin x$ D. $\ln x,\ln x^2$

5、设线性无关的函数 y_1,y_2 与 y_3 都是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，C_1,C_2 为任意常数，则方程的通解为（ D ）

A. $C_1y_1+C_2y_2+y_3$ B. $C_1y_1+C_2y_2+(C_1+C_2)y_3$

C. $C_1y_1+C_2y_2-(1+C_1+C_2)y_3$ D. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

解析：y_1-y_3,y_2-y_3 是齐次方程的两个线性无关的特解，$C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$ 是齐次方程的通解。故非齐次方程的通解为 $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$

6、设常数 p,q 满足 $p^2-4q=0,p\neq 0$，则微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为（ C ）

A. $y=Ce^{-\frac{p}{2}x}$ B. $y=Cxe^{-\frac{p}{2}x}$ C. $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$ D. $y=C_1+C_2x$

解析：特征方程 $r^2+pr+q=0$，因为 $p^2-4q=0,p\neq 0$，即判别式=0，所以特征方程有两个相等实根 $r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$，所以，齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 为 $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$.

7、$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解为 ____$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$____.

8、以函数 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为___$y''-2y'+2y=0$___________.

解析：因为 $y=e^{x}\left(C_1\sin x+C_2\cos x\right)$ 是通解，则 $r_1=1+i,r_2=1-i$ 是特征方程的两个复根。

以 $r_1=1+i,r_2=1-i$ 为根的一元二次方程应为 $r^2-(r_1+r_2)r+r_1r_2=0$，即 $r^2-2r+2=0$，

故以 $r^2-2r+2=0$ 为特征方程的二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

9、$y''+py'+qy=P_m\left(x\right)e^{\lambda x}$ 的一个特解可设为 $y^*=x^kQ_m\left(x\right)e^{\lambda x}$，假设 λ 不是特征方程的根，则 $k=$ ____0_____.

10、微分方程 $y''-2y'-3y=3x+5$ 的一个特解为__ $y^*=-x-1$ _____.

解析：因为 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，由第 9 题的结论，可设 $y^*=ax+b$，将其代入原方程，

得 $-3ax-2a-3b=3x+5$，比较系数得到 a=-1,b=-1，所以特解 $y^*=-x-1$.

11、方程 $y''=e^{3x}+\sin x$ 的通解为___ $y=\frac{1}{9}e^{3x}-\sin x+C_1x+C_2$ _______.

12、二阶常系数齐次线性方程的一个特解为 $y=xe^{2x}$，则此微分方程为 $y''-4y'+4y=0$.

解析：因为方程的一个特解为 $y=xe^{2x}$，则特征方程有二重根 $r_1=r_2=2$，故特征方程为

$r^2-4r+4=0$，所以微分方程 $y''-4y'+4y=0$.

二、计算题. （每题 10 分，共 40 分）

1、（10 分）求微分方程 $\frac{dy}{dx}=x^2\tan y$ 的通解.

解： 分离变量 $\frac{dy}{\tan y}=x^2dx$， 两边积分 $\int\frac{dy}{\tan y}=\int x^2dx$

得通解为 $\ln\left|\sin y\right|=\frac{x^3}{3}+C$.（5+5 分）

或者 $\ln\left|\sin y\right|=\frac{x^3}{3}+C_1$,去掉对数 $\Rightarrow\sin y=\pm e^{C_1}\cdot e^{\frac{x^3}{3}}=Ce^{\frac{x^3}{3}}(C=\pm e^{C_1})$,

通解为 $y=\arcsin(Ce^{\frac{x^3}{3}})(C=\pm e^{C_1})$（化简正确不加分，错误扣分）

2、（10 分）求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$ 的通解.

解： 关于 y=y(x)不是线性方程.

但是 $\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2x}{y}-y\Rightarrow\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-y$ 这是一个关于 x=x(y)的一阶线性非齐次微

分方程（倒线性），且 $P(y)=-\dfrac{2}{y},Q(y)=-y$，所以方程的通解为

$$x=(\int -y\cdot e^{\int -\frac{2}{y}dy}dy+C)e^{\int \frac{2}{y}dy}=(\int -y\cdot y^{-2}dy+C)y^2=(\int -y\cdot y^{-2}dy+C)y^2=(-\ln|y|+C)y^2$$

即 $x=Cy^2-y^2\ln|y|$ 为方程的通解. （5+5 分）

3、（10 分）求微分方程 $\boldsymbol{y''-y'-6y=0}$，满足初始条件 $y(0)=2$， $\boldsymbol{y'(0)=1}$ 的特解.

解： 特征方程为 $r^2-r-6=0$，解得特征根 $r_1=-2$，$r_2=3$，所以通解 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$.

又因为 $y(0)=2$， $\boldsymbol{y'(0)=1}$，得到 $\begin{cases} C_1+C_2=2 \\ -2C_1+3C_2=1 \end{cases}$

解得 $C_1=C_2=1$，故所求特解为 $y=e^{-2x}+e^{3x}$ （6+4 分）

4、（10 分）求微分方程 $y''+2y'+y=\left(x^2-1\right)e^{-x}$ 的通解.

解： 对应齐次方程 $y''+2y'+y=0$，其特征方程为 $r^2+2r+1=0$，有二重根 $r_1=r_2=-1$，

所以齐次方程的通解为 $Y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}$ （5 分）

又因为 $f(x)=\left(x^2-1\right)e^{-x}$， $\lambda=-1$ 是二重根，所以设非齐次方程的一个特解为

$y^*=x^2(ax^2+bx+c)e^{-x}=Q(x)e^{-x}$，（7 分）

代入方程 $(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+Q''(x)=P_n(x)$。因为 $\lambda=-1$ 是二重根，所以 $\boldsymbol{\lambda^2+p\lambda+q=0}$**，且** $\boldsymbol{2\lambda+p=0}$，得到 $12ax^2+6bx+2c=x^2-1$，比较系数得

$a=\dfrac{1}{12},b=0,c=-\dfrac{1}{2}$，所以非齐次方程的一个特解为 $y^*=(\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{1}{2})x^2e^{-x}$ （9 分）

故非齐次方程的通解为： $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+(\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{1}{2})x^2e^{-x}$ （10 分）