Gráficas y Juegos: Tarea 02

Martínez Méndez Ángel Antonio
Pinzón Chan José Carlos
Rendón Ávila Jesús Mateo

February 27, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesor: César Hernández Cruz

1. Sea $(R, +, *)$ un anillo. Demostrar mediante definiciones que R es conmutativo si y sólo si $\forall x, y, \in R$ se cumple: $(x + y) * (x - y) = x^2 - y^2$

$\Longrightarrow)$ *Hipotesis.* R es conmutativo.

P.D. Bajo la operaicón de la operación del producto se cumple que $\forall x, y \in R$ $(x + y) * (x - y) = x^2 - y^2$

Sea $x, y, \in R$, entonces

$$\begin{aligned}(x + y) * (x - y) &= x * (x - y) + y * (x - y)\\ &= xx - xy + yx - yy \textit{ (por conmutatividad)}\\ &= xx - xy + xy - yy\\ &= xx - yy\\ &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

$\Longleftarrow)$ *Hipotesis*: $\forall x, y \in R$ se cumple que $(x + y) * (x - y) = x^2 - y^2$.

P.D. R es conmutativo. *i.e* $\forall x, y \in R$ se cumple $x * y = y * x$

Sea $x, y \in R$

Por hipotesis

$$\begin{aligned}(x + y) * (x - y) &= x^2 - y^2\\ x * (x - y) + y * (x - y) &= x^2 - y^2\\ x^2 - xy + yx - y^2 &= x^2 - y^2 \textit{ (por cancelación)}\\ -xy + yx &= 0\\ yx &= xy\end{aligned}$$

2. Considera la relación $\sim$ usada para definir a $\mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$. Demuestra que:

a) $\overline{(k, 0)} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = k + n \text{ y } b = n\}$.

$\subseteq)$ *P.D* existe $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y existe un elemento $* \in \mathbb{N}$ tal que $x = k + *$ y $y = *$

Sea $(x, y) \in \overline{(k, 0)}$, por definición de clase de equivalencia, $(x, y) \sim (k, 0)$, *i.e*:

$$\begin{aligned}x + 0 &= y + k\\ x &= y + k\end{aligned}$$

Con lo anterior, decimos que $* = y$

Por lo tanto $(x, y) \in \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = k + n \text{ y } b = n\}$

$\supseteq$) Sea $(x, y) \in \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = k + n \text{ y } b = n\}$

Es decir, $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y existe un $* \in \mathbb{N}$ tal que $x = k + *$ y $y = *$.

Proponemos $y = *$, enotnces $y = y$ y $x = y + k$

De esta última $x + 0 = y + k$, así $(x, y) \sim (k, 0)$ y por lo tanto $(x, y) \in \overline{(k, 0)}$

b) Usando el inciso previo, escribe por extensión el conjunto $\overline{(15, 5)}$

Digamos

$$
\begin{aligned}
\overline{(15,5)} &= \overline{(*,0)} \\
(15,5) &\sim (*,0) \\
15 + 0 &= 5 + * \\
15 + 0 - 5 &= * \\
10 &= *
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos que $\overline{(15, 5)} = \{(10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 4), (15, 5), \dots\}$

3. Muestra los siguientes incisos referentes a orden en $\mathbb{Z}$.

a) Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a \leq b$. Usando definiciones, prueba que si $0 < n$, enotnces $a^n \leq b^n$.

b) Si $a \leq 0$ y $0 < b$, entonces $ab \leq a$

c) Si $a \leq b$ y $c < d$, muestra con definiciones que $a - d < b - c$.

4. Calcula el cociente y el residuo de los siguientes incisos.

a) 175 entre 46.

b) 20145 entre 1050.

c) -326 entre 40.

5. Muestra los siguientes incisos referente a divisibilidad en $\mathbb{Z}$

a) Sean a y b dos enteros. Muestra que $|a||b$ si y sólo si $a|b$ y $-a|b$.

b) Muestra usando definiciones que si $a|b$ y $a|b+c$, entonces $a|c$.

c) Muestra usando definiciones que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, entonces $a - b|a^n - b^n$.

6. Muestra mediante inducción matemática lo siguiente. Si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_n$, entonces $a|b_1 + \cdots + a|b_n$.

Usando lo anterior, muestra que si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_n$, entonces para toda $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a|c_1b_1 + \cdots + c_nb_n$

7. Sean a y b dos enteros. Muestra que si $13|5a + 8b$, entonces $13|31a - 5b$

8. Sean a y b dos enteros no nulos y $d \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d|a$ y $d|b$. Muestra que $\frac{ab}{d} = \frac{ba}{d}$.

9. Calcula los siguientes incisos.

a) Calcula 723 en base 7.

$$\begin{aligned} 723 &= 103 * 7 + 2 \\ 103 &= 14 * 7 + 5 \\ 14 &= 2 * 7 + 0 \\ 2 &= 0 * 7 + 2 \end{aligned}$$

Con ello tenemos que 723 en base 7 es: $(2052)_7$.

b) Calcula 27 en base 2.

$$\begin{aligned} 27 &= 13 * 2 + 1 \\ 13 &= 6 * 2 + 1 \\ 6 &= 3 * 2 + 0 \\ 3 &= 1 * 2 + 1 \\ 1 &= 0 * 2 + 1 \end{aligned}$$

Con ello tenemos que 27 en base 2 es: $(11011)_2$.

c) Calcula $(1076)_8 + (2076)_8$.

Primero vamos a pasar a base 10 ambas cantidades.

$(1076)_8$ a base 10.
$8^0 * 6 + 8^1 * 7 + 8^2 * 0 + 8^3 * 1 = 6 + 56 + 0 + 512 = 574$

$(2076)_8$ a base 10.
$8^0 * 6 + 8^1 * 7 + 8^2 * 0 + 8^3 * 2 = 6 + 56 + 0 + 1024 = 1086$

$574 + 1086 = 1660$

Podemos entonces pasar 1660 a base 8

$$\begin{aligned} 1660 &= 207 * 8 + 4 \\ 207 &= 25 * 8 + 7 \\ 25 &= 3 * 8 + 1 \\ 3 &= 0 * 8 + 3 \end{aligned}$$

Podemos entonces decir que la suma de $(1076)_8 + (2076)_8 = (3174)_8$.

10. Un profesor de matemáticas califica los exámenes de la siguiente manera: el primer problema vale un punto, el segundo 2, el tercero 4, el cuarto 8 y así sucesivamente. Un problema, o está bien o está mal, no hay término medio. Un alumno aprueba si al menos la mitad de todos los problemas están bien. Un estudiante obtuvo en el examen de junio, que constaba de 10 problemas, 581 puntos. Determina qué problemas hizo bien y si aprobó el examen o no.

Primero, tengamos el listado de puntajes a mano: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$.

Podemos ver que estamos en base 2, por lo que si trasladamos 581 a base 2 podriamos ver los problemas correctos.

$$\begin{aligned} 581 &= 290 * 2 + 1 \\ 290 &= 145 * 2 + 0 \\ 145 &= 72 * 2 + 1 \\ 72 &= 36 * 2 + 0 \\ 36 &= 18 * 2 + 0 \\ 18 &= 9 * 2 + 0 \\ 9 &= 4 * 2 + 1 \\ 4 &= 2 * 2 + 0 \\ 2 &= 1 * 2 + 0 \\ 1 &= 0 * 2 + 1 \end{aligned}$$

De lo anterior podemos ver que 581 es igual a $(1001000101)_2$. Así vemos que se obtuvieron bien el problema 10, 7, 3 y 1, que son $512 + 64 + 4 + 1 = 581$. Por lo que, al tener 4 problemas correctos, el alumno no aprobó el examen.