Gráficas y Juegos: Tarea 02

Larios Ponce Hector Manuel
Rendón Ávila Jesús Mateo
Valencia Morales Indra Gabriel

February 28, 2025

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Profesor: César Hernández Cruz

1. Sea $(R, +, *)$ un anillo. Demostrar mediante definiciones que R es conmutativo si y sólo si $\forall x, y, \in R$ se cumple: $(x+y)*(x-y) = x^2 - y^2$

$\Longrightarrow$) *Hipotesis.* R es conmutativo.

P.D. Bajo la operaicón de la operación del producto se cumple que $\forall x, y \in R$ $(x+y)*(x-y) = x^2 - y^2$

Sea $x, y, \in R$, entonces

$$\begin{aligned}(x+y)*(x-y) &= x*(x-y) + y*(x-y)\\ &= xx - xy + yx - yy \text{ \textit{(por conmutatividad)}}\\ &= xx - xy + xy - yy\\ &= xx - yy\\ &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) *Hipotesis*: $\forall x, y \in R$ se cumple que $(x+y)*(x-y) = x^2 - y^2$.

P.D. R es conmutativo. *i.e* $\forall x, y \in R$ se cumple $x * y = y * x$

Sea $x, y \in R$

Por hipotesis

$$\begin{aligned}(x+y)*(x-y) &= x^2 - y^2\\ x*(x-y) + y*(x-y) &= x^2 - y^2\\ x^2 - xy + yx - y^2 &= x^2 - y^2 \text{ \textit{(por cancelación)}}\\ -xy + yx &= 0\\ yx &= xy\end{aligned}$$

2. Considera la relación $\sim$ usada para definir a $\mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$. Demuestra que:

a) $\overline{(k,0)} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = k + n \text{ y } b = n\}$.

$\subseteq$) *P.D* existe $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y existe un elemento $* \in \mathbb{N}$ tal que $x = k + *$ y $y = *$

Sea $(x, y) \in \overline{(k,0)}$, por definición de clase de equivalencia, $(x, y) \sim (k, 0)$, *i.e*:

$$\begin{aligned}x + 0 &= y + k\\ x &= y + k\end{aligned}$$

Con lo anterior, decimos que $* = y$

Por lo tanto $(x, y) \in \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = k + n \text{ y } b = n\}$

$\supseteq$) Sea $(x, y) \in \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = k + n \text{ y } b = n\}$

Es decir, $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y existe un $* \in \mathbb{N}$ tal que $x = k + *$ y $y = *$.

Proponemos $y = *$, enotnces $y = y$ y $x = y + k$

De esta última $x + 0 = y + k$, así $(x, y) \sim (k, 0)$ y por lo tanto $(x, y) \in \overline{(k, 0)}$

b) Usando el inciso previo, escribe por extensión el conjunto $\overline{(15, 5)}$

Digamos

$$\begin{aligned}
\overline{(15,5)} &= \overline{(*,0)} \\
(15,5) &\sim (*,0) \\
15 + 0 &= 5 + * \\
15 + 0 - 5 &= * \\
10 &= *
\end{aligned}$$

Con esto tenemos que $\overline{(15, 5)} = \{(10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 4), (15, 5), \dots\}$

3. Muestra los siguientes incisos referentes a orden en $\mathbb{Z}$.

(a) (+6) Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a \leq b$. Usando definiciones, prueba que si $0 < n$, entonces $a^n \leq b^n$.

(b) (+6) Si $a \leq 0$ y $0 < b$, entonces $ab \leq a$.

(c) (+6) Si $a \leq b$ y $c < d$, muestra con definiciones que $a - d < b - c$.

(a) **Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}^+$ y $a \leq b$, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $a^n \leq b^n$.**

Demostración por inducción en n:

- **Base inductiva ($n = 1$):** Si $n = 1$, entonces $a^1 \leq b^1$ se reduce a $a \leq b$, lo cual es hipótesis.
- **Paso inductivo:** Supongamos que para un cierto $n \geq 1$ se cumple la proposición, es decir, $a^n \leq b^n$. Queremos demostrar que $a^{n+1} \leq b^{n+1}$. En efecto, dado que $a^n \leq b^n$ y $a \leq b$ (ambos no negativos pues $a, b \in \mathbb{Z}^+$), entonces

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \leq b^n \cdot b = b^{n+1}.$$

Así, por el principio de inducción, concluimos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $a^n \leq b^n$.

(b) **Probar que si $a \leq 0$ y $0 < b$, entonces $ab \leq a$.**

Demostración directa: Dado que $a \leq 0$, existe un entero no negativo k tal que $a = -k$ o simplemente reconocemos que a es no positivo. El número b es un entero positivo ($b > 0$). Queremos ver que $ab \leq a$.

Observemos que

$$ab \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad ab - a \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(b-1) \leq 0.$$

Dado que $a \leq 0$ y $b - 1 \geq 0$ (porque $b > 0$ implica $b - 1 \geq -1$, y si $b = 1$, la desigualdad $ab \leq a$ es incluso trivial), la multiplicación de un número no positivo con uno no negativo resulta ser no positiva. Así se concluye que $a(b-1) \leq 0$, por lo que $ab \leq a$.

(c) **Probar que si $a \leq b$ y $c < d$, entonces $a - d < b - c$.**

Demostración: CTM HECTOR Dados $a \leq b$ y $c < d$, queremos ver que $a - d < b - c$. Podemos reescribir:

$$(a-d) - (b-c) \;=\; a - d - b + c \;=\; (a-b) + (c-d).$$

Como $a \leq b$, se tiene $a - b \leq 0$; además, de $c < d$ se sigue $c - d < 0$. Por lo tanto,

$$(a-b) + (c-d) \;<\; 0 + 0 \;=\; 0,$$

lo cual implica

$$(a-d) - (b-c) \;<\; 0 \quad \Longrightarrow \quad a - d \;<\; b - c.$$

Así se demuestra la desigualdad requerida.

4. Calcula el cociente y el residuo de los siguientes incisos.

(a) (+2) 175 entre 46.

(b) (+2) 20145 entre 1050.

(c) (+2) -326 entre 40.

(a) **175 entre 46**

Buscamos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que

$$175 = 46\,q + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < 46.$$

Notamos que $46 \cdot 3 = 138$ y $46 \cdot 4 = 184$. Como $138 \leq 175 < 184$, se puede deducir que:

$$q = 3, \quad r = 175 - 138 = 37.$$

Por lo tanto, el cociente es 3 y el residuo es 37.

(b) **20145 entre 1050**

Buscamos $q, r \in \mathbb{Z}$ de modo que

$$20145 = 1050\,q + r, \quad 0 \leq r < 1050.$$

Notemos que $1050 \cdot 19 = 19950$ y $1050 \cdot 20 = 21000$. Dado que

$$19950 \leq 20145 < 21000,$$

obtenemos

$$q = 19, \quad r = 20145 - 19950 = 195.$$

Así, el cociente es 19 y el residuo es 195.

(c) -326 **entre 40**

En este caso, $a = -326$ y $b = 40$. Buscamos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que

$$-326 = 40\,q + r \quad \text{con} \quad 0 \le r < 40.$$

Como la división real es $-326/40 \approx -8.15$, el cociente entero (tomando la *parte entera hacia abajo*, es decir, la función piso) es $q = -9$. Verificamos esto lol:

$$40 \cdot (-8) + r = -320 + r \implies r = -6 \text{ (no válido, pues } r < 0\text{)},$$

mientras que

$$40 \cdot (-9) + r = -360 + r = -326 \implies r = 34,$$

y aquí $0 \le 34 < 40$, que sí cumple la condición de residuo. Así,

$$q = -9, \quad r = 34.$$

Por lo tanto, al dividir -326 entre 40, el cociente es -9 y el residuo es 34.

5. Muestra los siguientes incisos referentes a divisibilidad en $\mathbb{Z}$.

(a) (+6) Sean a y b dos enteros. Muestra que $|a| \mid b$ si y sólo si $a \mid b$ y $-a \mid b$.

(b) (+6) Muestra usando definiciones que si $a \mid b$ y $a \mid b + c$, entonces $a \mid c$.

(c) (+6) Muestra usando definiciones que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $0 \le n$, entonces $a - b \mid a^n - b^n$.

(a) **Probar que** $|a| \mid b$ **si y sólo si** $a \mid b$ **y** $-a \mid b$**.**

Demo:

($\Rightarrow$) Supongamos que $|a| \mid b$. Por definición de divisibilidad, existe un entero k tal que

$$b = |a| \cdot k.$$

Notemos que si $a \ge 0$, entonces $|a| = a$; si $a < 0$, entonces $|a| = -a$. En cualquiera de los casos, podemos relacionar:

$$b = |a| \cdot k = \begin{cases} a \cdot k, & \text{si } a \ge 0, \\ -a \cdot k, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Si $a \ge 0$, la expresión $b = a \cdot k$ muestra de inmediato $a \mid b$. Además, también $-a \mid b$ porque $b = (-a)(-k)$. Si $a < 0$, la expresión $b = (-a) \cdot k$ evidencia $-a \mid b$, y además $b = a \cdot (-k)$ prueba que $a \mid b$.

En cualquier caso, tanto $a \mid b$ como $-a \mid b$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $a \mid b$ y $-a \mid b$. Entonces existen enteros m y n tales que

$$b = a\,m = (-a)\,n.$$

En particular, si $a > 0$, entonces $b = a\,m$ nos dice que $|a| = a$ divide a b. Si $a < 0$, tomamos $b = (-a)\,n$ y notamos que $|-a| = -a$; así, $|a| = -a$ divide b. Finalmente, si $a = 0$, la condición $|a| \mid b$ significa $0 \mid b$, que sólo se cumple si $b = 0$. Por otro lado, $a \mid b$ y $-a \mid b$ se reducen a $0 \mid b$, igualmente forzando $b = 0$.

Con ello se demuestra que $|a| \mid b$ si y sólo si $a \mid b$ y $-a \mid b$.

(b) **Probar que si $a \mid b$ y $a \mid b+c$, entonces $a \mid c$.**

Demo por definiciones

Por hipótesis, $a \mid b$ implica la existencia de un entero m tal que

$$b = am.$$

Asimismo, $a \mid (b+c)$ implica la existencia de un entero n tal que

$$b + c = an.$$

Entonces

$$c = (b+c) - b = an - am = a(n-m).$$

Como $n - m$ es un entero, deducimos que c es múltiplo de a, es decir, $a \mid c$.

(c) **Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq n$, entonces $a - b \mid a^n - b^n$.**

Demostración por inducción en n:

- **Caso base:** Para $n = 0$, tenemos

$$a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0,$$

y $a - b \mid 0$ es cierto para cualquier entero $a - b$. Para $n = 1$,

$$a^1 - b^1 = a - b,$$

y evidentemente $a - b \mid a - b$.

- **Paso inductivo:** Supongamos que para algún $n \geq 1$ se cumple

$$a - b \ \mid \ a^n - b^n.$$

Queremos demostrar que

$$a - b \ \mid \ a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Efectivamente,

$$a^{n+1} - b^{n+1} \ = \ a \cdot a^n - b \cdot b^n \ = \ a^n(a-b) \ + \ b\big(a^n - b^n\big).$$

Por la hipótesis de inducción, $a^n - b^n$ es múltiplo de $a - b$, y claramente $a^n(a-b)$ también lo es. Por ende, la suma

$$a^n(a-b) \ + \ b\,(a^n - b^n)$$

es también un múltiplo de $a - b$. De este modo,

$$a - b \ \mid \ a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Con ello, por el principio de inducción, para todo $n \geq 0$ se cumple

$$a - b \ \mid \ a^n - b^n.$$

6. Muestra mediante inducción matemática lo siguiente. Si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_n$, entonces $a|b_1 + \cdots + a|b_n$.

Mostraremos por inducción sobre n que si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_n$, entonces $a|b_1 + \cdots + a|b_n$.

Base inductiva. Sea $n = 2$ si $a|b_1, a|b_2$ entonces $a|b_1 + a|b_2$

Por definicion de divisor, como $a|b_1$ entonces existe un único $r \in Z$ tal que $ar = b_1$ igualmente como $a|b_2$ entonces existe un único $s \in Z$ tal que $as = b_2$ es decir $a(r+s) = b_1 + b_2$ por lema 2.1.1 Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|b+c$. Podemos afirmar que $a|b_1 + b_2$

Hipotesis inductiva. supondremos que k es un natural tal que $k \geq 2$ si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_k$ entonces $a|b_1 + \cdots + b_k$ es decir, existe $at = b_1 + \cdots + b_k$.

Paso inductivo. Sea $k+1$ un natural tal que $k+1 \geq 2$ si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_k, a|b_k + 1$ entonces $a|b_1 + \cdots + b_k + b_k + 1$

Como por hipotesis inductiva $k \geq 2$, entonces podemos afirmar que $k+1 \geq 3$ Por definicion de divisor, como $a|b_k + 1$ entonces existe un único $v \in Z$ tal que $av = b_k + 1$ por hipotesis inductiva sabemos que $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_k$ entonces $a|b_1 + \cdots + b_k$, es decir, existe $at = b_1 + \cdots + b_k$ integrando $b_k + 1$ entonces $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_k, a|b_k + 1$ entonces $a|b_1 + \cdots + b_k + b_k + 1$, es decir, $at + av = b_1 + \cdots + b_k + b_k + 1$. reescribiendo tenemos $a(t+v) = b_1 + \cdots + b_k + b_k + 1$. Concluyendo por principio de induccion matematica para todo $k \geq 2$ si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_k$, entonces $a|b_1 + \cdots + b_k$.

Usando lo anterior, muestra que si $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_n$, entonces para toda $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a|c_1b_1 + \cdots + c_nb_n$ Sea $a|b_1, a|b_2, \ldots, a|b_n$ entonces existe $ar_1 = b_1, ar_2 = b_2 ... ar_n = b_n$. por el lema 2.1.2

Si $a|b$, entonces $ac|bc$. Luego $ac_1|c_1b_1, ac_2|b_2, ..., ac_n|c_nb_n$ por definicion de divisiblidad $ac_1r_1 = c_1b_1, ac_2r_2 = c_2b_2 ... ac_nr_n = c_nb_n$. Como anteriormente vimos $a|b_1 + \cdots + b_k$, es decir, $at = b_1 + \cdots + b_k$ aplicando el lema 2.1.2 nuevamente podemos decir $avt = c_1b_1 + c_2b_2 ... c_nb_n$ aplicando una vez mas definicion de divisibilidad se cumple que $a|c_1b_1 + \cdots + c_nb_n$

7. Sean a y b dos enteros. Muestra que si $13|5a + 8b$, entonces $13|31a - 5b$

8. Sean a y b dos enteros no nulos y $d \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d|a$ y $d|b$. Muestra que $\frac{ab}{d} = \frac{ba}{d}$.

9. Calcula los siguientes incisos.

a) Calcula 723 en base 7.

$$
\begin{aligned}
723 &= 103 * 7 + 2 \\
103 &= 14 * 7 + 5 \\
14 &= 2 * 7 + 0 \\
2 &= 0 * 7 + 2
\end{aligned}
$$

Con ello tenemos que 723 en base 7 es: $(2052)_7$.

b) Calcula 27 en base 2.

$$\begin{aligned} 27 &= 13 * 2 + 1 \\ 13 &= 6 * 2 + 1 \\ 6 &= 3 * 2 + 0 \\ 3 &= 1 * 2 + 1 \\ 1 &= 0 * 2 + 1 \end{aligned}$$

Con ello tenemos que 27 en base 2 es: $(11011)_2$.

c) Calcula $(1076)_8 + (2076)_8$.

Primero vamos a pasar a base 10 ambas cantidades.

$(1076)_8$ a base 10.
$8^0 * 6 + 8^1 * 7 + 8^2 * 0 + 8^3 * 1 = 6 + 56 + 0 + 512 = 574$

$(2076)_8$ a base 10.
$8^0 * 6 + 8^1 * 7 + 8^2 * 0 + 8^3 * 2 = 6 + 56 + 0 + 1024 = 1086$

$574 + 1086 = 1660$

Podemos entonces pasar 1660 a base 8

$$\begin{aligned} 1660 &= 207 * 8 + 4 \\ 207 &= 25 * 8 + 7 \\ 25 &= 3 * 8 + 1 \\ 3 &= 0 * 8 + 3 \end{aligned}$$

Podemos entonces decir que la suma de $(1076)_8 + (2076)_8 = (3174)_8$.

10. Un profesor de matemáticas califica los exámenes de la siguiente manera: el primer problema vale un punto, el segundo 2, el tercero 4, el cuarto 8 y así sucesivamente. Un problema, o está bien o está mal, no hay término medio. Un alumno aprueba si al menos la mitad de todos los problemas están bien. Un estudiante obtuvo en el examen de junio, que constaba de 10 problemas, 581 puntos. Determina qué problemas hizo bien y si aprobó el examen o no.

Primero, tengamos el listado de puntajes a mano: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$.

Podemos ver que estamos en base 2, por lo que si trasladamos 581 a base 2 podriamos ver los problemas correctos.

$$581 = 290 * 2 + 1$$
$$290 = 145 * 2 + 0$$
$$145 = 72 * 2 + 1$$
$$72 = 36 * 2 + 0$$
$$36 = 18 * 2 + 0$$
$$18 = 9 * 2 + 0$$
$$9 = 4 * 2 + 1$$
$$4 = 2 * 2 + 0$$
$$2 = 1 * 2 + 0$$
$$1 = 0 * 2 + 1$$

De lo anterior podemos ver que 581 es igual a $(1001000101)_2$. Así vemos que se obtuvieron bien el problema 10, 7, 3 y 1, que son $512 + 64 + 4 + 1 = 581$. Por lo que, al tener 4 problemas correctos, el alumno no aprobó el examen.

2. Sean $(R, +,)$ un anillo conmutativo, 0 el neutro aditivo de R y 1 el neutro multiplicativo de R. Muestra que $R = 0$ si y solo si $1 = 0$.

Demostraremos que $R = 0$ si y solo si $1 = 0$. Procederemos por doble implicacion para demostrar nuestro bicondicional

¡– Supongamos que R = 0 Como R es un anillo conmutativo por hipotesis tenemos que 1 es el neutro multiplicativo de R, por lo que $1 \in R$ como $R = 0$ entonces podemos concluir $1 = 0$

–¿ Supongamos que $1 = 0$ Notemos que los unicos objetos que podemos asegurar que pertenecen a $1 \in R$ y $0 \in R$, procederemos por contradiccion es decir que existe algun $c \neq 1$ y $c \neq 0$ entonces por existe $1 \in R$ tal que para todo $c \in R$, $1c = c$ y $c1 = c$. notemos que como $1 = 0$ entonces 0 tambien es neutro multiplicativo por lo que substituyendo $0c = 0$ y $c0 = 0$! La contradiccion anterior nos dice que al existir un $c \neq 1$ y $c \neq 0$ no se puede cumplir la propiedad de neutro multiplicativo De lo anterior podemos concluir que el unico miembro perteniente a R es 0, concluyendo $R = 0$