Complex Numbers - The necessary

Vassily Isenbaev

24 de fevereiro de 2021

1 Conceitos iniciais

Potências de i

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$
$i^7 = -i$
$i^8 = 1$

A cada 4 números contados, eles começam a se repetir.

1.1 Formas algébricas

Forma algébrica: $z = a + bi$.
A letra a representa a parte real, já a letra b multiplicando o i representa a parte imaginária.
Exemplos:

A) $2 + 3i$, 2 é a parte real e 3 é a parte imaginária.
B) $1 - i$, 1 é a parte real e -1 é a parte imaginária.
C) 7, 7 é a parte real e 0 é a parte imaginária.
D) $5i$, 0 é a parte real e 5 é a parte imaginária.

1.2 Classificações - Real, imaginário e Imaginário Puro

Real: Quando o $b = 0$.
Imaginário: Quando o $b \neq 0$.
Puro: Quando o $b \neq 0$ e $a = 0$

1.3 Igualdade

Dois complexos são iguais quando as partes reais forem iguais e as partes imagináris também forem iguais.

Exemplo:

$$\begin{gathered}\text{Se } z = w\\ \text{então}\\ a = c \text{ e } b = d\end{gathered}$$

Exemplo:

$z = 3 + (k - 5)i$ e $w = (x^2 - 6) - 2i$ são iguais. Calcule k e x

$$\begin{gathered}\text{Valor de } X\\ x^2 - 6 = 3\\ x^2 = 9\\ x = \pm 3\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{Valor de } K\\ k - 5 = -2\\ k = 3\end{gathered}$$

1.4 Operações - Adição, subtração, multiplicação e divisão

Somamos ou subtraimos a parte real com parte real e parte imaginária com parte parte imaginária.

Exemplo:

$$z = 3 + 4i \text{ e } w = -1 + 2i$$

Calculando $z + w$ teremos:

$$\begin{gathered}3 - 1 = 2\\ 4i + 2i = 6i\\ \text{então}\\ z + w = 2 + 6i\end{gathered}$$

Exemplo:

$$z = 5 + i \text{ e } w = -1 + 3i$$

Calculando $z - w$ teremos:

$$5 - (-1) = 6$$
$$1i - 3i = 2i$$
$$\text{então}$$
$$z - w = 6 + 2i$$

Exemplo:

$$z = 2 + 3i \text{ e } w = 3 - 2i$$

Calculando $z.w$ teremos:

$$(2 + 3i).(3 - 2i) =$$
$$6 - 4i + 9i - 6i^2 = 6 + 5i - 6i^2$$

Usando a propriedade de $i^2 = -1$ teremos:

$$6 + 5i - 6. - 1 = 12 + 5i$$

Divisão:

Conjugado: O conjugado de $z = a + bi$ é igual a $z = a - bi$, então apenas o sinal é trocado. Para realizar a divisão de $zporw$ faremos o seguinte:

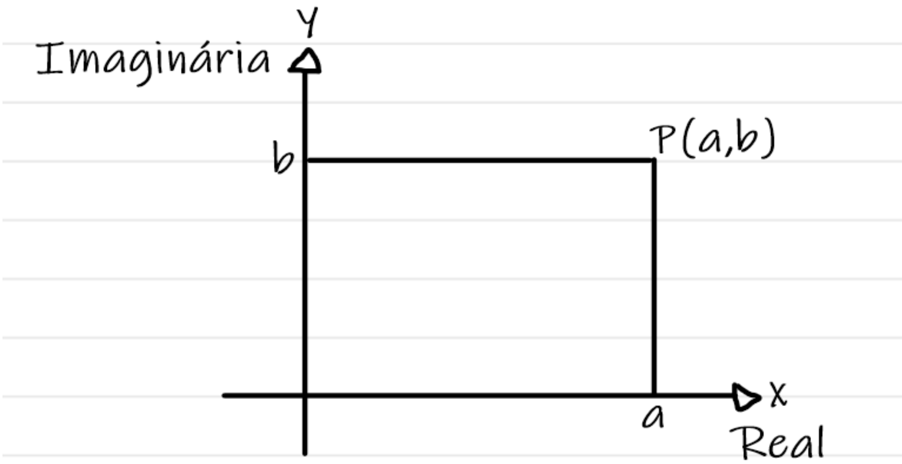
$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}.\frac{w}{w}$$

Exemplo:

Seja $z = 2 + 3i$ e $w = 3 - i$, calcule $z \div w$

$$\frac{2 - 3i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{6 + 2i - 9i - 3i^2}{3^2 - i^2} = \frac{6 - 7i + 3}{9 + 1} = \frac{9 - 7i}{10}$$

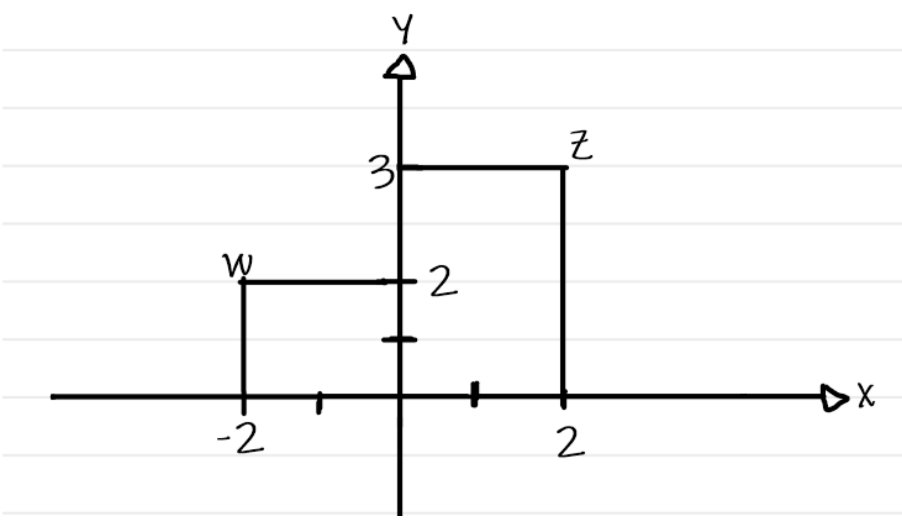
2 Interpretação geométrica, módulo e argumento



Exemplo:

$$z = 2 + 3i \text{ e } w = -2 + 2i$$

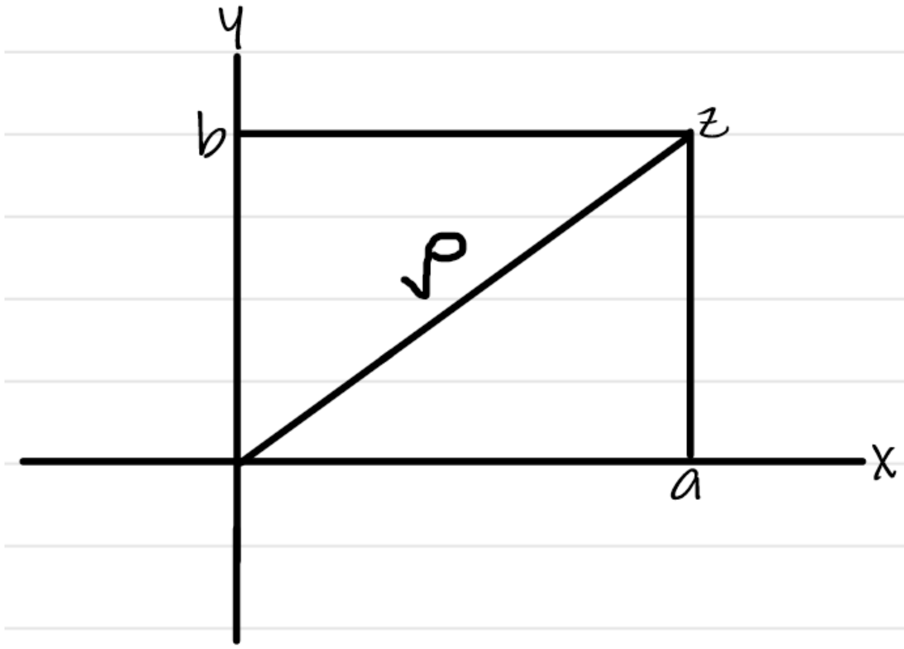
A representação geométrica dessa equação será:



A parte real da equação é escrita no eixo das abscissas e a parte imaginária no eixo das ordenadas.

2.1 Modulo

O módulo é a distancia da origem até o afixo e pode ser representade de duas maneiras: Pela letra grega ρ ou $|z|$ como veremos abaixo representado na imagem.



A formula utilizada para achar o valor do módulo é

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplos:

Determine o módulo dos valores abaixo:
A) $2 + 3i$

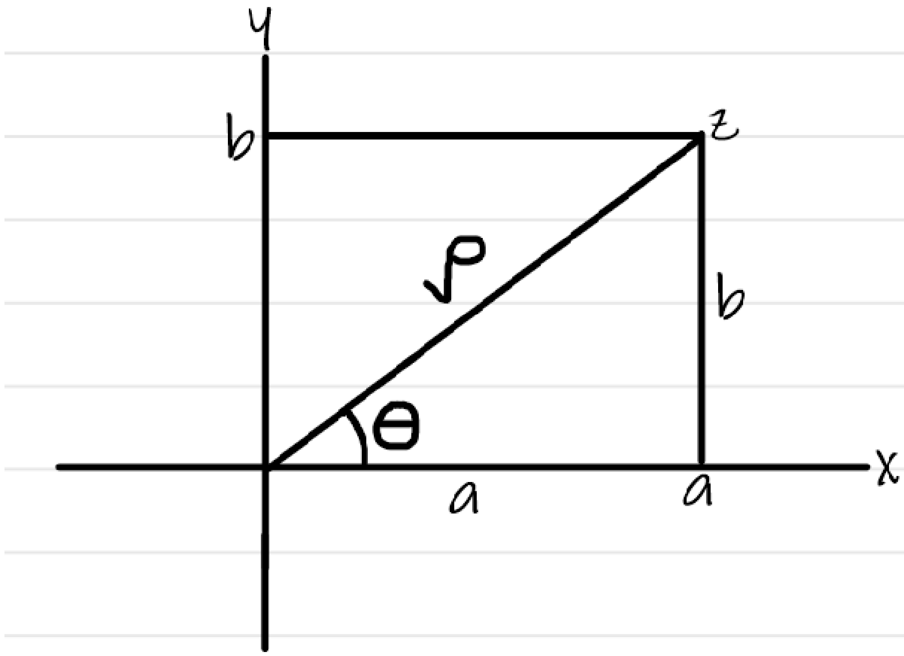
$$\rho = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$\rho = \sqrt{4 + 9}$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\rho = \sqrt{13}$$

B) $5i$

$$\rho = \sqrt{0^2 + 5^2}$$
$$\rho = \sqrt{25}$$
$$\rho = 5$$

2.2 Argumento

O argumento não é nada mais do que um ângulo, ou seja, é o angulo formado entra o eixo x e o eixo y no sentido anti-horário como veremos na imagem a seguir:



As formulas que serão usadas para encontrar o valor do argumento serão:

$$cos\theta = \frac{b}{\rho}$$

$$sen\theta = \frac{a}{\rho}$$

Exemplo:

Determine o modulo de $z = \sqrt{3} + i$

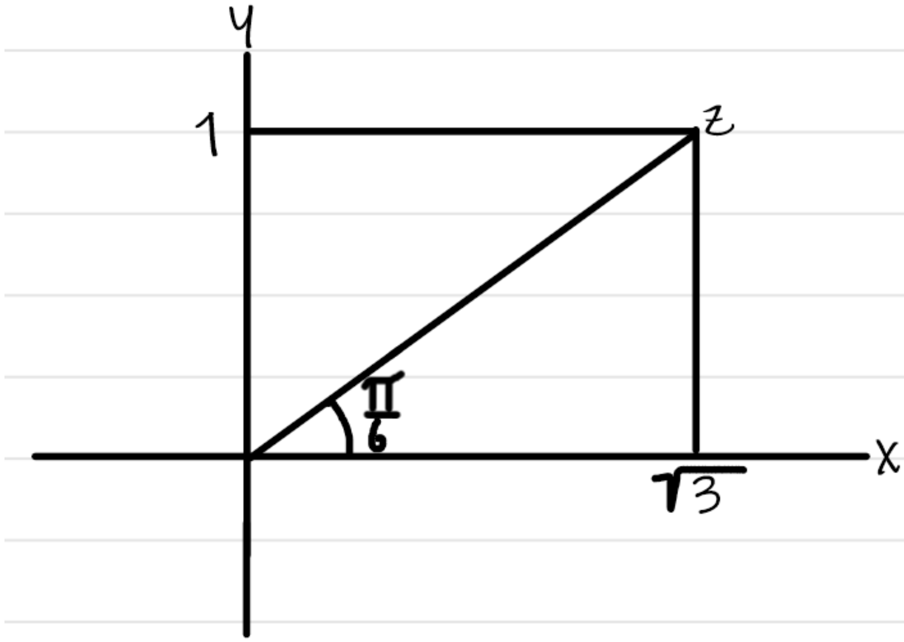
$$\rho = \sqrt{\sqrt{(a)^2} + 1^2}$$
$$\rho = \sqrt{4}$$
$$\rho = 2$$

Com o resultado do modulo, podemos calcular o argumento é:

$$sen\theta = \frac{1}{2} = 30^\circ$$

$$cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$$

$$\theta = 30^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{6}$$



Ou seja, o angulo θ da imagem acima vale $\frac{\pi}{6}$

3 Formas trigonométricas

Para calcular usando a forma trigonométrica usamos a formula a seguir:

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

Para conseguir usar essa formula, você precisa do valor de ρ e do valor de $cos\theta$ e $sen\theta$.

Exemplo:

Dê a forma trigonométrica de $z = 2 + 2i$
Primeiro temos que achar o valor do módulo:

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$
$\sqrt{8}$ pode ser escrita dessa forma $2\sqrt{2}$

Agora vamos encontrar o valor do argumento:

$$sen\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

Racionalizando, teremos:

$$\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

Agora vamos achar o cosseno:

$$cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

Racionalizando, teremos:

$$\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

Ou seja, o angulo θ é igual a 45° ou $\frac{\pi}{4}$

Agora para descobrir a forma trigonométrica, vamos usar a formula:

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

Agora vamos substituir os valores na formula.

$$z = 2\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4})$$

Então esse é o resultado da forma trigonométrica da equação.

Exemplo 2:

Dê a forma trigonométrica de $z = -1 + i$ Vamos achar o valor do módulo:

$$\rho = \sqrt{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

Agora vamos achar o argumento:

$$sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando, teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vamos achar o valor do cosseno:

$$cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Vemos que o valor do cosseno ficou negativo, então com os devidos conhecimentos sobre o circulo trigonométrico, sabemos que o multiplo de 45° é 135°.

Então o valor de θ vai ser 135°.

Agora vamos escrever na forma trigonométrica:

$$z = \sqrt{2}(cos135° + iseno135°)$$

3.1 Formas trigonométricas - Multiplicação e divisão

Multiplicação

Para realizar a multiplicação, vamos usar a formula a seguir:

$$z1 \cdot z2 = \rho1 \cdot \rho2(cos(\theta1 + \theta2) + isen(\theta1 + \theta2))$$

Exemplo:

Seja $z = 2(cos45° + isen45°)$ e $w = \sqrt{3}(cos30° + isen30°$, qual o resultado de $z \cdot w$?

Utilizando a formula que nos foi apresentada, chegaremos nesse resultado:

$$z \cdot w = 2\sqrt{3}(cos75° + isen75°)$$

Divisão:

Para fazer aa divisão, usaremos a formula a seguir:

$$\frac{z1}{z2} = \frac{\rho1}{\rho2}(cos(\theta1 - \theta2) + isen(\theta1 - \theta2))$$

Exemplo:

Seja $z = 3(cos2\pi + isen2\pi)$ e $w = 2(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$, calcule $\frac{z}{w}$
Utilizando a forma, teremos:

$$\frac{z}{w} = \frac{3}{2}(cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3})$$

4 Potenciação - Formula de moivre

4.1 Potenciação

Vamos falar sobre a 1^a formula de Moivre, que é sobre potenciação:

$$z^2 = \rho^n(cos(n \cdot \theta) + isen(n \cdot \theta))$$

A formula apresentando acima, é usada para calcular a potenciação.
Exemplo:

Seja $z = 5(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3)}$, calcule z^3

$$z^3 = 5^3(cos(3 \cdot \frac{\pi}{3}) + isen(3 \cdot \frac{\pi}{3})) =$$
$$z^3 = 125(cos\pi + isen\pi)$$

Exemplo 2:

Calcule $(\sqrt{3} + i)^{10}$

Vamos encontrar o valor do módulo:

$$\rho = \sqrt{\sqrt{(3)^2} + 1^2} = 2$$

Agora vamos encontrar o valor do argumento:

$$sen\theta = \frac{1}{2} = 30°$$

$$cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$$

Então o valor do argumento será:

$$\theta = 30° \text{ ou } \frac{\pi}{6}$$

Agora vamos determinar a forma trigonométrica:

$$z = 2(cos \cdot \frac{\pi}{6} + isen \cdot \frac{\pi}{6})$$

Agora vamos calcular z^{10}

$$z^{10} = 2^{10}(cos(10 \cdot \frac{\pi}{6}) + isen(10 \cdot \frac{\pi}{6}))$$

$$z^{10} = 1024(cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3})$$

Com o conhecimento adquirido desse material, você estára apto a resolver problemas envolvendo números complexos.