TEORÍA DE AUTÓMATAS Y LENGUAJES FORMALES

Proposición lógica: Enunciado que puede ser calificado como falso o verdadero.

Ej. - El cielo es azul (V)
- El auto es veloz (F)
- ¡Felicidades! ← No es proposición lógica

Proposiciones lógicas simples: Proposición lógica que no es compuesta.
No tiene operadores lógicos.

Proposiciones lógicas compuestas: Serie de proposiciones lógicas unidas por medio de un conector lógico.

$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
y	o	no	implica	doble implica

p: El cielo es azul
q: El auto es veloz
$p \wedge q$: El cielo es azul y el auto es veloz

p	q	Contradicción ($p \wedge \bar{p}$)	AND $p \wedge q$	OR $p \vee q$	Implica $p \to q$	Doble implica $p \leftrightarrow q$	$\bar{p}$ $\neg p$	$\bar{q}$ $\neg q$	NOR $\overline{p \vee q}$	$\neg(p \to q)$	NAND $\overline{p \wedge q}$	XOR $\neg p \leftrightarrow q$	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	Tautología ($p \vee \bar{p}$)
F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	V	F	V

Implicación : Algo verdadero no implica algo falso

Doble implicación : ES verdadero cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

2 verdadero = verdadero 2 falso = verdadero

$\{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ ← Conjunto funcionalmente completo

Funciones proposicionales.

Es una función cuyas variables son proposiciones.
Generalmente se escribe con mayusculas y recibe argumentos.
Se puede decir que es V o F dependiendo del valor que tenga X.

$P(x)$: x es azul
$Q(x)$: x es veloz

$R(x) = P(x) \wedge Q(x)$: x es azul y x es veloz

$\forall x$ $P(x)$ es cierto — Para todo x

$\exists x$ — Existe x

$P(x)$: x es alumno de ESCOM de 6° semestre
$Q(x)$: x cursa "Introducción a los microcontroladores"

- $\forall x$ $P(x)$ es cierto (FALSO)
- $\exists x$ $P(x)$ es cierto (VERDADERO)
- $\forall x$ $P(x) \wedge Q(x)$ (FALSO)
- $\forall x$ $Q(x)$ (FALSO)
- $\exists x$ $Q(x)$ (VERDADERO)

Conjunto: Colección de objetos que cumplen alguna propiedad.
- Es una colección bien definida de objetos.

- Definición del conjunto por extensión, listando todos sus elementos explicitamente.

$A = \{ \text{juan, pedro, maría} \}$ enumeración

Cardinalidad $|A| = 3$

Definición

~~Especificación~~ del conjunto por comprensión especificando una propiedad que todos sus elementos poseen.

$B = \{x \mid p(x)\} = \{x \mid x$ es alumno del 3CM11 3CM12 $\}$

tal que

$|B| = 32$ cardinalidad

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ naturales $|\mathbb{N}| = \infty$

$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ enteros $|\mathbb{Z}| = \infty$

$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq \emptyset\}$ racionales $|\mathbb{Q}| = \infty$

pertenece

$\mathbb{R} = \{$racionales e irracionales$\}$ reales $|\mathbb{R}| = \infty$

Conjunto vacío $\emptyset$ $|\emptyset| = \emptyset$

Conjunto universo $U = \{ \quad \}$ Dominio de lo que estamos trabajando

Subconjunto $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$

$A \subseteq U$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B \subseteq A$ V

$B = \{2, 4\}$ $A \subseteq B$ F

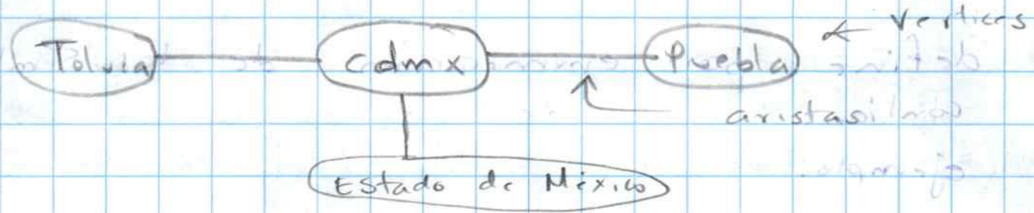
$A = \{x \mid P(x)\}$ $B = \{x \mid Q(x)\}$ Operaciones con conjuntos.

$A \cup B = \{x \mid P(x) \vee Q(x)\}$ unión

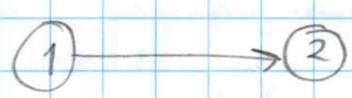
$A \cap B = \{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}$ intersección

$A^c = \{x \mid \neg P(x)\}$ complemento.

Grafo: Es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto.

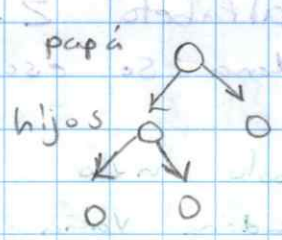


Grafos dirigidos: Es un tipo de grafo en el cual las aristas tienen un sentido definido.



Tienen dirección.

Árboles: Tiene un vertice principal o raiz que no tiene padre, solo puede tener hijos.



ningún nodo hijo apunta a la raiz

ALFABETO, SIMBOLOS Y PALABRAS

Sigma

- Un alfabeto Σ es un conjunto finito de símbolos.

• Se define por enumeración de los símbolos que contiene.

Por ejemplo:

$\Sigma_1 = \{A, B, C, D, E, \ldots, Z\}$
$\Sigma_2 = \{\emptyset, 1\}$
$\Sigma_3 = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdot\}$
$\Sigma_4 = \{/, \backslash\}$

$\Sigma_5 = \{x \mid x \text{ es una letra minuscula}\}$
$\Sigma_6 = \{x \mid x \text{ es un digito decimal}\}$

- Una cadena o palabra w es una secuencia de símbolos de un alfabeto Σ.

• La longitud de la cadena se escribe $|w|$.

• ε denota al símbolo nulo
• λ denota a la cadena vacía

pertenece

✓ $W_1 = \text{hola}$ $|W_1| = 4$
✓ $W_2 = \text{xyz}$ $|W_2| = 3$
✗ $W_3 = \text{Casa}$ $|W_3| = 4$
✓ $W_4 = \varepsilon\text{arb}\varepsilon\text{ol} = \text{arbol}$ $|W_4| = 5$
✓ $W_5 = \lambda$ $|W_5| = \emptyset$

- La concatenación de 2 cadenas w_1 y w_2 sobre Σ es $w = w_1 \cdot w_2$ y $|w| = |w_1| + |w_2|$

Ejemplo: $\Sigma = \{a, b, c, d, \dots, z\}$

$w_1 =$ hola $\qquad |w_1| = 4$

$w_2 =$ mundo $\qquad |w_2| = 5$

$w = w_1 \cdot w_2 =$ holamundo $\qquad |w| = |w_1| + |w_2| = 9$

Sea $V \subseteq \Sigma$. Denotamos V^* a la cerradura de V y es el conjunto de todas las palabras que se pueden hacer con símbolos de V, incluyendo λ.

Ejemplo: $\Sigma_1 = \{a\}$

Están en correspondencia uno a uno con los naturales

infinitos contables

$$\Sigma_1^* = \{\underset{0}{\lambda}, \underset{1}{a}, \underset{2}{aa}, \underset{3}{aaa}, \underset{4}{aaaa}, \dots\}$$

$$\Sigma_2 = \{0, 1\}$$

$$\Sigma_2^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$$

Un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es un conjunto finito o infinito contable de palabras sobre un alfabeto Σ. Evidentemente $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$

Ejemplo: $\Sigma = \{a, b, c, d, \dots, z\}$

$\mathcal{L} = \{w \mid w$ es una palabra en Español$\}$

$w_1 =$ hola $\qquad w_1 \in \mathcal{L}$

$w_2 =$ hello $\qquad w_2 \notin \mathcal{L}$

Autómatas (Reconocer)

Reconocen si una o n palabras pertenecen a un lenguaje.

Un autómata finito consta de un conjunto de estados y, partiendo de un estado inicial, realiza transiciones de un estado a otro en respuesta a los símbolos de entrada que procesa.

Cuando el autómata alcanza un estado final, se dice que ha reconocido la palabra formada por concatenación de los símbolos de entrada procesados.

Solo reconocen

- Autómatas finitos
- Autómatas de pila
- Máquinas Touring

Gramáticas (Generar)

Con ellas se pueden generar palabras de un lenguaje

Describe la estructura de las frases y de las palabras de un lenguaje.

- Gramáticas regulares
- Gramáticas sensibles al contexto
- Gramáticas libres de contexto

- Un autómata finito determinista (AFD) es una tupla (Σ, Q, q_0, F, T) donde:

- Σ es un alfabeto
- Q es un conjunto de estados
- q_0 es el estado inicial
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales
- $T: Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ es una función de transición.

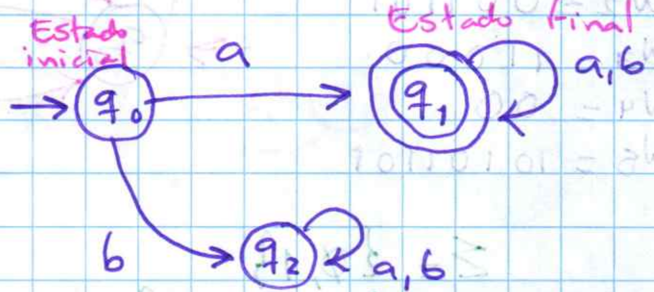
Para cada estado se debe de tener $|\Sigma|$ de flechas.

$\Sigma = \{a, b\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$q_0 = q_0$

$F = \{q_1\}$



T	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_2	q_2

$w_1 = abab$ ← Como termina en estado final si pertenece al lenguaje.
0 1 1 1

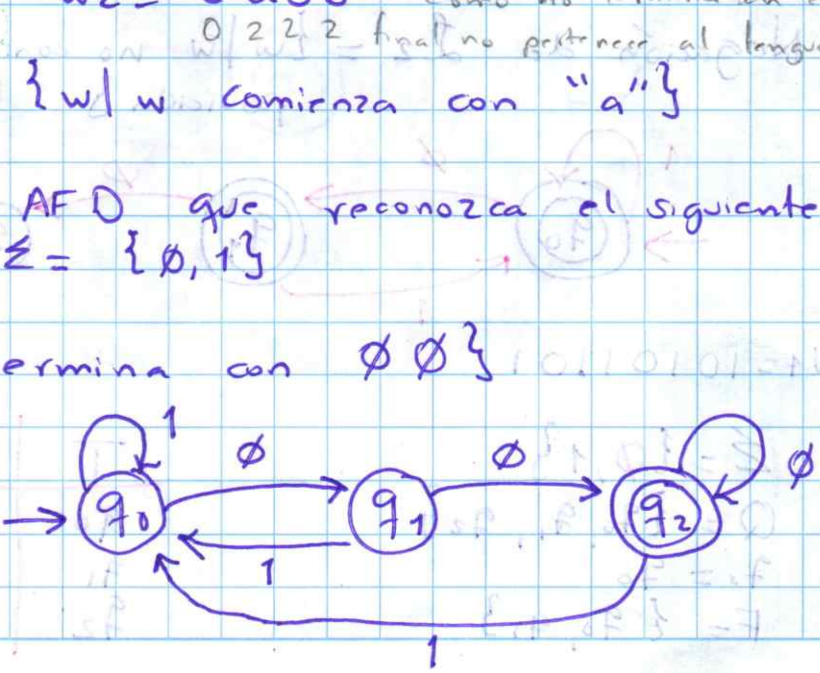
$w_2 = babb$ ← Como no termina en estado final no pertenece al lenguaje.
0 2 2 2

$\mathcal{L} = \{w \mid w \text{ comienza con "a"}\}$

Ejemplo: Hacer un AFD que reconozca el siguiente lenguaje sobre $\Sigma = \{\emptyset, 1\}$

$\mathcal{L} = \{w \mid w \text{ termina con } \emptyset\emptyset\}$

× $W_1 = 110110010$
✓ $W_2 = 10100$
✓ $W_3 = 00$
× $W_4 = 0$



$\mathcal{L} = \{w \mid w \text{ termina con } \emptyset\emptyset\}$

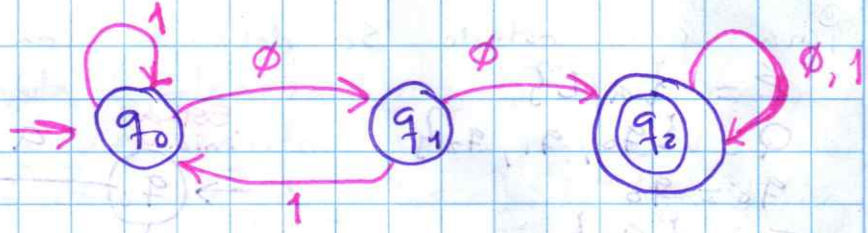
$\Sigma = \{\emptyset, 1\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
$q_0 = q_0$
$F = \{q_2\}$

T	$\emptyset$	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_0

$\mathcal{L}_2 = \{w \mid w \text{ contiene '}\emptyset\emptyset\text{' en cualquier posición}\}$

Pertenecen al lenguaje?

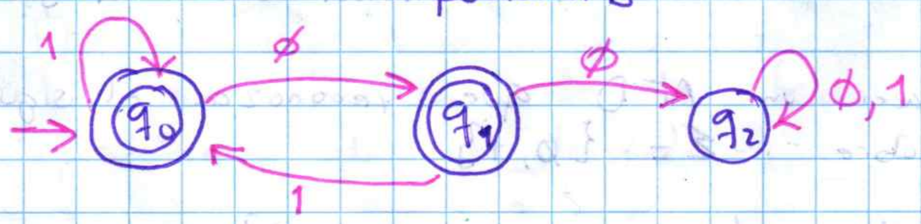
✓ $W_1 = 1100011$
✓ $W_2 = 001101$
✓ $W_3 = 11000$
✓ $W_4 = 00$
✗ $W_5 = 10101101$



$\Sigma = \{\emptyset, 1\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
$q_0 = q_0$
$F = \{q_2\}$

T	$\emptyset$	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_2

Negación de $\mathcal{L}_2 = \{w \mid w \text{ no contiene } \emptyset\emptyset \text{ en cualquier posición}\}$



✓ $W_1 = 10101101$

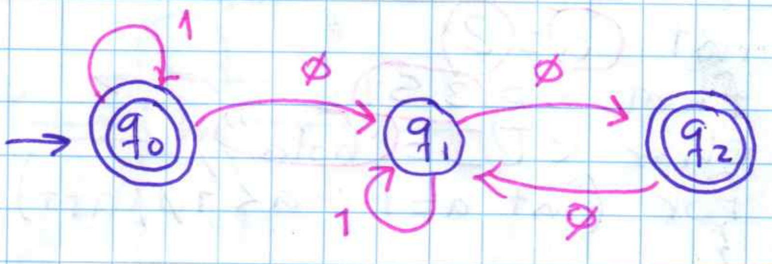
$\Sigma = \{\emptyset, 1\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
$q_0 = q_0$
$F = \{q_0, q_1\}$

T	$\emptyset$	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_2	q_2

$\mathcal{L}_3 = \{ w \mid w$ tiene un número par de ceros$\}$

✓ $w_1 = 101011010$

✗ $w_2 = 01010$



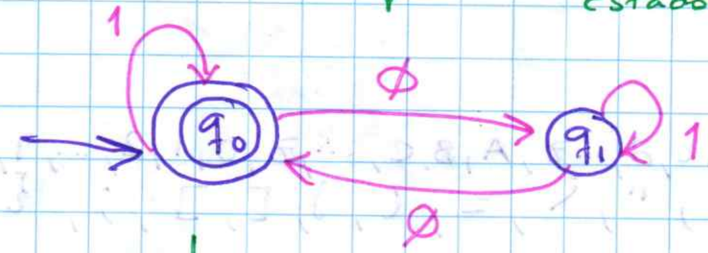
$\Sigma = \{\emptyset, 1\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$q_0 = q_0$

$F = \{q_0, q_2\}$

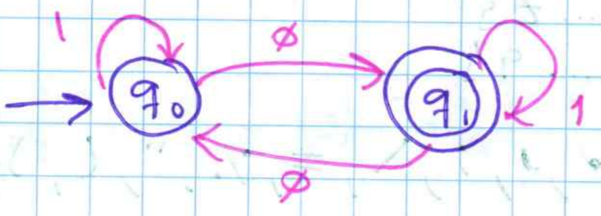
Minimización de estados



Negación de $\mathcal{L}_3$

$\overline{\mathcal{L}_3} = \{ w \mid w$ tiene un número impar de ceros$\}$

T	∅	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_0	q_1



$\Sigma = \{0, 1\}$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$q_0 = q_0$

$F = \{q_1\}$

Negación = Complemento de estados finales.