Wyznaczanie niepewności pomiarów

Łukasz Piskorski

Zespół Fotoniki, Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

5 marca 2022

1. Wstęp

W niniejszym skrypcie podane zostały ogólne zasady obliczania i wyrażania niepewności pomiaru. Zasady te są zgodne z regułami ustalonymi w dokumencie *Evaluation of measurement data — Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* wydanym przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną, który można za darmo pobrać z Internetu [1]. Polska wersja tego dokumentu pt. *Ewaluacja danych pomiarowych — Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru* dostępna jest na stronie Głównego Urzędu Miar [2].

2. Niepewność wyniku pomiaru

Niepewność pomiaru — parametr związany w wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej [2].

Z uwagi na to, że wynik każdego pomiaru jest tylko przybliżeniem lub estymatą (oszacowaniem, oceną) wielkości mierzonej to należy go podawać wraz z niepewnością tego przybliżenia. Niepewność wyniku pomiaru obrazuje brak dokładnej znajomości wartości wielkości mierzonej. Można wskazać wiele możliwych źródeł niepewności wyniku pomiaru [2]:

a) niepełna definicja wielkości mierzonej;
b) niedoskonała realizacja definicji wielkości mierzonej;
c) niereprezentatywne próbkowanie — próbka mierzona może nie reprezentować danej wielkości mierzonej;
d) niepełna znajomość oddziaływań otoczenia na pomiar albo niedoskonały pomiar warunków otoczenia;
e) subiektywne błędy w odczytywaniu wskazań przyrządów analogowych;
f) skończona rozdzielczość albo próg pobudliwości przyrządu;
g) niedokładne wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia;
h) niedokładne wartości stałych i innych parametrów otrzymywanych ze źródeł zewnętrznych do pomiaru, a używanych w procedurach przetwarzania danych;
i) przybliżenia i założenia upraszczające tkwiące w metodzie i procedurze pomiarowej;
j) zmiany w powtarzanych obserwacjach wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach.

Przyczyny podane powyżej nie muszą być od siebie niezależne i nie wyczerpują wszystkich możliwych źródeł niepewności.

3. Obliczanie niepewności standardowej

Niepewność standardowa — niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego [2].

Wybór metody obliczania niepewności standardowej dla danej wielkości zależy od tego czy pomiar tej wielkości był wykonywany w sposób bezpośredni czy pośredni. O pomiarze bezpośrednim mówimy, gdy wielkość mierzona jest wprost. Pomiary tego typu to na przykład: pomiar grubości przy użyciu suwmiarki lub mikromierza, pomiar masy przy użyciu wagi, pomiar czasu przy użyciu sekundomierza, pomiar natężenia prądu przy użyciu amperomierza, pomiar napięcia przy użyciu woltomierza. W większości przypadków stosuje się pomiar pośredni, dla którego mierzona wielkość y określana jest na podstawie N innych wielkości x_1, x_2, …, x_N za pomocą zależności funkcyjnej f:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N). \tag{1}$$

Do pomiarów pośrednich należą na przykład: wyznaczanie gęstości ciała stałego na podstawie jego masy i wymiarów geometrycznych, wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego na podstawie długości nici i okresu drgań wahadła. Wielkości wejściowe x_1, x_2, …, x_N występujące we wzorze (1) mogą zależeć od innych wielkości. W takich przypadkach zdarza się, że zapis zależności funkcyjnej f jest dość złożony.

3.1. Metoda typu A obliczania niepewności standardowej

Metoda typu A obliczania niepewności — metoda obliczania niepewności drogą analizy statystycznej serii pojedynczych obserwacji [2].

Metoda ta jest stosowana w przypadku, gdy wykonany został wielokrotny pomiar danej wielkości x. Rezultatem tego pomiaru jest zbiór wartości x_1, x_2, …, x_n (n — liczba pomiarów), które różnią się między sobą z powodu przypadkowych zmian tej wielkości lub oddziaływań przypadkowych (czynników wywołujących czasowe i przestrzenne zmiany wielkości wpływających). **Odchylenie standardowe eksperymentalne** (odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru) s_x, które jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji, opisuje formuła:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \tag{2}$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną (wartością przeciętną) obliczaną ze wzoru:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3}$$

W celu wyznaczenia niepewności standardowej $u_{\mathrm{A}}(x)$ wyniku pomiaru wielkości x należy skorzystać ze wzoru:

$$u_{\mathrm{A}}(x) = s_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \tag{4}$$

gdzie $s_{\overline{x}}$ jest **odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej** (w skrócie: odchyleniem standardowym średniej).

Przykład 1. Przy użyciu mikromierza wykonano pięć pomiarów wysokości miedzianego walca. Odczytane wyniki to: 10,99 mm, 11,01 mm, 10,98 mm, 11,00 mm, 10,99 mm. Obliczyć niepewność standardową $u_{\mathrm{A}}(h)$ pomiaru wysokości.

Wartość szukanej niepewności należy obliczyć ze wzoru (4). Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

$$u_{\mathrm{A}}(h) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(h_i - \overline{h})^2}, \tag{5}$$

gdzie $n = 5$ jest liczbą pomiarów. Średnia arytmetyczna obliczona dla wysokości badanego elementu wynosi:

$$\overline{h} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} h_i = \frac{1}{5} \times 54{,}97\,\mathrm{mm} = 10{,}994\,\mathrm{mm}. \tag{6}$$

Tabela 1 zawiera zmierzone wartości wysokości badanego elementu i pośrednie obliczenia konieczne do wyznaczenia niepewności standardowej $u_{\mathrm{A}}(h)$. Niepewność ta, obliczona na podstawie danych z tabeli 1, wynosi:

$$u_{\mathrm{A}}(h) = \sqrt{\frac{1}{5 \times (5-1)} \times 52{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{mm}^2} = 5{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm}. \tag{7}$$

Tabela 1. Zmierzone wartości wysokości i wyniki obliczeń.

nr pomiaru	h_i [mm]	$(h_i - \overline{h})$ [10^{-3} mm]	$(h_i - \overline{h})^2$ [10^{-5} mm^2]
1	10,99	$-4{,}0$	1,6
2	11,01	16,0	25,6
3	10,98	$-14{,}0$	19,6
4	11,00	6,0	3,6
5	10,99	$-4{,}0$	1,6
suma	54,97		52,0

3.2. Metoda typu B obliczania niepewności standardowej

Metoda typu B obliczania niepewności — metoda obliczania niepewności sposobami innymi niż analiza serii obserwacji [2].

Metoda ta jest najczęściej stosowana w przypadkach, gdy wykonany został tylko jeden pomiar danej wielkości, lub gdy wyniki wielokrotnego pomiaru tej samej wielkości są identyczne. Druga sytuacja zachodzi wówczas, gdy wykorzystane urządzenie pomiarowe ma za małą dokładność. Dokładność przyrządu pomiarowego określana jest przez niepewność wzorcowania. Czasami należy także wziąć pod uwagę niepewność eksperymentatora. Wartość niepewności eksperymentatora należy oszacować w oparciu o umiejętności osoby wykonującej pomiar i sposób wykonywania pomiaru. W przypadku, gdy występują oba źródła niepewności, niepewność standardową $u_{\mathrm{B}}(x)$ wyniku pomiaru oblicza się ze wzoru:

$$u_{\mathrm{B}}(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_{\mathrm{p}} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_{\mathrm{e}} x)^2}{3}}, \tag{8}$$

gdzie $\Delta_{\mathrm{p}} x$ i $\Delta_{\mathrm{e}} x$ są odpowiednio niepewnością wzorcowania (niepewnością graniczną) i niepewnością eksperymentatora. Jeżeli mamy do czynienia jedynie z niepewnością wzorcowania to wzór (8) przyjmuje postać:

$$u_{\mathrm{B}}(x) = \frac{\Delta_{\mathrm{p}} x}{\sqrt{3}}. \tag{9}$$

Sposób wyznaczania niepewności wzorcowania zależy od przyrządu wykorzystywanego do wykonywania pomiaru. W przypadku przyrządów mechanicznych takich jak: miara zwijana, linijka, suwmiarka, mikromierz, za niepewność wzorcowania $\Delta_{\mathrm{p}} x$ należy przyjąć działkę elementarną. Podobnie należy postąpić dla takich przyrządów jak termometr lub sekundomierz. Jeżeli pomiar jest wykonywany przy użyciu miernika analogowego o znanej klasie przyrządu to dla danego zakresu pomiarowego niepewność wzorcowania można określić korzystając z następującego wzoru:

$$\Delta_{\mathrm{p}} x = \frac{\text{klasa} \cdot \text{zakres}}{100}. \tag{10}$$

W sytuacji, gdy pomiar wykonywany jest z wykorzystaniem miernika cyfrowego to do określenia niepewność wzorcowania należy zastosować formułę:

$$\Delta_{\mathrm{p}} x = c_1 \cdot \mathrm{rdg} + c_2 \cdot \mathrm{dgt}, \tag{11}$$

gdzie c_1 i c_2 to wartości charakterystyczne dla danego miernika podane przez producenta, rdg to zmierzona wartość, a dgt oznacza rozdzielczość przyrządu na danym zakresie (najmniejszą wartość jaka może być wskazana przez wyświetlacz miernika na danym zakresie pomiarowym).

Przykład 2. Przy użyciu sekundomierza analogowego o podziałce 0,2 s wykonano pojedynczy pomiar czasu spadania stalowej kulki. Odczytany wynik to 2,6 s. Obliczyć niepewność standardową $u_{\mathrm{B}}(t)$ pomiaru czasu.

Wartość niepewności wzorcowania przyrządu określona na podstawie podziałki wynosi $\Delta_{\mathrm{p}} t = 0{,}2\,\mathrm{s}$ (działka elementarna). Oszacowana wartość niepewności eksperymentatora to $\Delta_{\mathrm{e}} t = 0{,}5\,\mathrm{s}$. Aby otrzymać wartość niepewności standardowej należy skorzystać ze wzoru (8). Niepewność ta wynosi:

$$u_{\mathrm{B}}(t) = \sqrt{\frac{(0{,}2\,\mathrm{s})^2}{3} + \frac{(0{,}5\,\mathrm{s})^2}{3}} = \sqrt{1{,}333 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}^2 + 8{,}333 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}^2} = 0{,}31\,\mathrm{s}. \tag{12}$$

Przykład 3. Przy użyciu woltomierza analogowego o klasie 0,5 i zakresie 30 V, który ma 30 działek na skali, wykonano pojedynczy pomiar napięcia między dwoma punktami obwodu elektrycznego. Odczytany wynik to 18 V. Obliczyć niepewność standardową $u_{\mathrm{B}}(U)$ pomiaru napięcia.

Wartość niepewności wzorcowania przyrządu obliczona ze wzoru (10) wynosi $\Delta_{\mathrm{p}} U = (0{,}5 \times 30\,\mathrm{V})/100 = 0{,}15\,\mathrm{V}$. Oszacowana wartość niepewności eksperymentatora to $\Delta_{\mathrm{e}} U = 0{,}5 \times (30\,\mathrm{V}/30) = 0{,}5\,\mathrm{V}$ (połowa działki elementarnej). Korzystając ze wzoru (8), obliczona wartość niepewności standardowej wynosi:

$$u_{\mathrm{B}}(U) = \sqrt{\frac{(0{,}15\,\mathrm{V})^2}{3} + \frac{(0{,}5\,\mathrm{V})^2}{3}} = \sqrt{7{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}^2 + 8{,}333 \times 10^{-2}\,\mathrm{V}^2} = 0{,}30\,\mathrm{V}. \tag{13}$$

Przykład 4. Amperomierz cyfrowy ma dokładność $\pm(0{,}5\,\%\,\mathrm{rdg} + 5\,\mathrm{dgt})$ dla zakresu 20 A. Dla tego zakresu wartości natężenia prądu są wyświetlane z dokładnością do 0,01 A. Odczytana wartość natężenia prądu to 16,38 A. Obliczyć niepewność standardową $u_{\mathrm{B}}(I)$ pomiaru natężenia prądu.

Wartość niepewności wzorcowania przyrządu obliczona ze wzoru (11) wynosi $\Delta_{\mathrm{p}} I = (0{,}5/100) \times 16{,}38\,\mathrm{A} + 5 \times 0{,}01\,\mathrm{A} = 0{,}1319\,\mathrm{A}$. Korzystając ze wzoru (9), obliczona wartość niepewności standardowej wynosi:

$$u_{\mathrm{B}}(I) = \frac{0{,}1319\,\mathrm{A}}{\sqrt{3}} = 0{,}076\,\mathrm{A}. \tag{14}$$

Wartości z tablic matematycznych, tablic fizycznych lub literatury są również obarczone niepewnościami. Jeżeli nie podano wartości odchylenia standardowego lub innych informacji o niepewności to należy przyjąć, że niepewność tablicowa jest równa dziesięciu jednostkom ostatniego miejsca zapisu wartości.

$$u_{\mathrm{B}}(x) = \frac{\Delta_{\mathrm{t}} x}{\sqrt{3}}, \tag{15}$$

gdzie: $\Delta_{\mathrm{t}} x$ — niepewność tablicowa.

Wyjaśnienie skąd bierze się $\sqrt{3}$ we wzorach na niepewność standardową $u_{\mathrm{B}}(x)$ podane zostało w dodatku A.

Przykład 5: Obliczyć niepewność standardową metodą typu B dla wartości ciepła właściwego wody podanej jako: a) $c_{\mathrm{w}} = 4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$ [3], b) $c_{\mathrm{w}} = 4189{,}9\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$ [4].

a)

$$\Delta_{\mathrm{t}} c_{\mathrm{w}} = 10\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \tag{16}$$

$$u_{\mathrm{B}}(c_{\mathrm{w}}) = \frac{\Delta_{\mathrm{t}} c_{\mathrm{w}}}{\sqrt{3}} = \frac{10\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}}{\sqrt{3}} = 5{,}8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \tag{17}$$

b)

$$\Delta_t c_w = 1{,}0\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \tag{18}$$

$$u_B(c_w) = \frac{\Delta_t c_w}{\sqrt{3}} = \frac{1{,}0\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}}{\sqrt{3}} = 0{,}58\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \tag{19}$$

Przykład 6: Podać niepewność standardową dla wartości stałej grawitacji zapisanej jako: a) $G = 6{,}67408(31) \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ [5], b) $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$.

a)

$$u(G) = 0{,}00031 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} = 3{,}1 \times 10^{-15}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \tag{20}$$

b)

$$\Delta_t G = 0{,}10 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \tag{21}$$

$$u(G) = u_B(G) = \frac{\Delta_t G}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}10 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}}{\sqrt{3}} = 5{,}8 \times 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \tag{22}$$

3.3. Obliczanie całkowitej niepewności standardowej pomiaru bezpośredniego

W przypadku, gdy dla pomiaru bezpośredniego określone zostały niepewności standardowe $u_A(x)$ i $u_B(x)$ wyznaczane metodami odpowiednio A i B, to w celu wyznaczenia niepewności standardowej całkowitej $u(x)$ należy skorzystać ze wzoru:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}. \tag{23}$$

Przykład 7. Przy użyciu suwmiarki wykonano siedem pomiarów grubości stalowej płytki. Odczytane wyniki to: 7,35 mm, 7,30 mm, 7,35 mm, 7,40 mm, 7,30 mm, 7,30 mm, 7,35 mm. Działka elementarna noniusza wynosiła 0,05 mm. Obliczyć całkowitą niepewność standardową $u(h)$ pomiaru grubości.

Wartość szukanej niepewności należy obliczyć ze wzoru (23). Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

$$u(h) = \sqrt{u_A^2(h) + u_B^2(h)}, \tag{24}$$

gdzie $u_A(h)$ i $u_B(h)$ to niepewności standardowe obliczone odpowiednio metodami typu A i typu B.

Wartość niepewności standardowej $u_A(h)$ należy obliczyć analogicznie jak w przykładzie 1. Wynosi ona $u_A(h) = 0{,}0143$ mm.

Wartość niepewności wzorcowania przyrządu określona na podstawie podziałki wynosi $\Delta_p h = 0{,}05$ mm. Oszacowana wartość niepewności eksperymentatora to $\Delta_e h = 0{,}10$ mm. Aby otrzymać wartość niepewności standardowej $u_B(h)$ należy skorzystać ze wzoru (8). Niepewność ta wynosi $u_B(h) = 0{,}0645$ mm.

Korzystając ze wzoru (24), wartość całkowitej niepewności standardowej wynosi $u(h) = 0{,}066$ mm.

---

4. Określanie złożonej niepewności standardowej

Złożona niepewność standardowa — niepewność standardowa wyniku pomiaru określana, gdy wynik ten jest otrzymywany z wartości pewnej liczby innych wielkości, równa pierwiastkowi kwadratowemu z sumy wyrazów, będących wariancjami lub kowariancjami tych innych wielkości z wagami zależnymi od tego jak wynik pomiaru zmienia się wraz ze zmianami tych wielkości [2].

W przypadku, gdy wszystkie wielkości wejściowe x_j są niezależne to złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ pośredniego pomiaru wielkości y określanej tak jak we wzorze (1) oblicza się korzystając z formuły:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 u^2(x_j)}, \tag{25}$$

gdzie $u(x_j)$ jest niepewnością standardową obliczaną ze wzoru (23), a N jest liczbą wielkości wejściowych. Złożona niepewność standardowa $u_c(y)$ charakteryzuje rozrzut wielkości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Równanie (25) nazywane jest często **prawem propagacji niepewności**.

Pochodną cząstkową występującą we wzorze (25) określa się mianem **współczynnika wrażliwości** i oznacza się poprzez c_{x_j}. Iloczyn tego współczynnika i niepewności standardowej $u(x_j)$ to inaczej **udział niepewności**. Jeżeli znana jest postać funkcji f to należy wyznaczyć formuły dla kolejnych pochodnych cząstkowych, a następnie podstawić do tych formuł wielkości x_j oraz niepewności standardowe $u(x_j)$. Czasami, współczynniki wrażliwości wyznacza się eksperymentalnie — mierzy się zmianę wielkości y wywołaną przez pojedynczą zmianę danej wielkości wejściowej x_j (pozostałe wielkości wejściowe są wtedy stałe). W takim przypadku znajomość funkcji f (lub jej części, gdy wyznaczane są tylko niektóre współczynniki wrażliwości) jest odpowiednio zredukowana do empirycznego rozwinięcia funkcji w szereg Taylora pierwszego rzędu [2].

W sytuacji, gdy niektóre wielkości wejściowe x_j są wzajemnie zależne (czyli skorelowane) to ich korelacje należy wziąć pod uwagę przy obliczeniach niepewności. Z uwagi na to, że w laboratorium studenckim niemal wszystkie pomiary są pomiarami niezależnymi, to w niniejszym skrypcie do obliczania złożonej niepewności standardowej będzie stosowany wzór (25).

Przykład 8. W celu wyznaczenia gęstości badanego elementu (plastikowa płytka) za pomocą suwmiarki i mikromierza zmierzono odpowiednio średnicę d podstawy oraz grubość h płytki, a następnie dokonano pomiaru jej masy m za pomocą wagi analitycznej. Każdy z wyżej wymienionych pomiarów został wykonany 5 razy. Średnie arytmetyczne obliczone dla tych wielkości to: $\overline{d} = 20{,}332\,\mathrm{mm}$, $\overline{h} = 2{,}106\,\mathrm{mm}$, $\overline{m} = 0{,}78242\,\mathrm{g}$. Z kolei wartości całkowitych niepewności standardowych to: $u(d) = 3{,}051 \times 10^{-2}\,\mathrm{mm}$, $u(h) = 4{,}623 \times 10^{-2}\,\mathrm{mm}$, $u(m) = 1{,}121 \times 10^{-4}\,\mathrm{g}$. Obliczyć gęstość badanego elementu oraz wartość złożonej niepewności standardowej dla tej wielkości.

Gęstość ρ ciała można w prosty sposób wyznaczyć znając jego masę m oraz objętość V:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{26}$$

Podstawiając do wzoru (26) wzór na objętość walca:

$$V = \pi \frac{d^2}{4} h \tag{27}$$

otrzymujemy:

$$\rho = \frac{m}{\pi\frac{d^2}{4}h} = \frac{4m}{\pi d^2 h}. \tag{28}$$

Po podstawieniu w miejsce m, d, h wartości odpowiednich średnich arytmetycznych podanych w treści zadania otrzymamy $\rho = 1144{,}28\,\mathrm{kg/m^3}$.

W celu wyznaczenia wartości złożonej niepewności standardowej dla gęstości należy skorzystać ze wzoru (25). Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

$$u_\mathrm{c}(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\right)^2 u^2(d) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\right)^2 u^2(h)}. \tag{29}$$

Równanie (29) można także zapisać w prostszej formie wykorzystując współczynniki wrażliwości:

$$u_\mathrm{c}(\rho) = \sqrt{c_m^2 u^2(m) + c_d^2 u^2(d) + c_h^2 u^2(h)}, \tag{30}$$

gdzie:

$$c_m = \frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{\rho}{m}, \tag{31}$$

$$c_d = \frac{\partial\rho}{\partial d} = -2\frac{\rho}{d}, \tag{32}$$

$$c_h = \frac{\partial\rho}{\partial h} = -\frac{\rho}{h}. \tag{33}$$

Współczynniki wrażliwości można obliczyć korzystając z obliczonej wcześniej gęstości oraz z wartości odpowiednich średnich arytmetycznych:

$$c_m = \frac{\rho}{\overline{m}} = 1{,}462 \times 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{mm^3}}, \tag{34}$$

$$c_d = -2\frac{\rho}{\overline{d}} = -1{,}126 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mm^4}}, \tag{35}$$

$$c_h = -\frac{\rho}{\overline{h}} = -5{,}433 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mm^4}}. \tag{36}$$

Korzystając ze wzoru (30) oraz wyznaczonych wcześniej wielkości, otrzymujemy:

$$u_\mathrm{c}(\rho) = \sqrt{\left(0{,}1639\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^2 + \left(-3{,}434\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^2 + \left(-25{,}12\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^2} = 25{,}36\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}. \tag{37}$$

---

5. Określanie niepewności rozszerzonej

Niepewność rozszerzona — wielkość określająca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego to przedziału oczekuje się, że obejmie dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej [2].

Współczynnik rozszerzenia — współczynnik liczbowy zastosowany jako mnożnik złożonej niepewności standardowej w celu otrzymania niepewności rozszerzonej [2].

Mimo iż $u_\mathrm{c}(y)$ można stosować do wyrażania niepewności wyniku pomiaru to często konieczne jest podawanie takiej miary niepewności, by wokół wyniku pomiaru określony został przedział obejmujący dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej. Dodatkowa miara niepewności nazywana jest niepewnością rozszerzoną i do jej oznaczenia używa się symbolu $U(y)$. W celu określenia niepewności rozszerzonej należy pomnożyć złożoną niepewność standardową $u_\mathrm{c}(y)$ przez współczynnik rozszerzenia k:

$$U(y) = ku_\mathrm{c}(y). \tag{38}$$

Jeżeli współczynnik rozszerzenia nie jest założony z góry to należy go obliczyć na podstawie wypadkowej liczby stopni swobody ν_eff oraz prawdopodobieństwa objęcia P. W takim przypadku do oznaczenia współczynnika rozszerzenia stosuje się z reguły symbol k_P.

Wypadkowa liczba stopni swobody określona jest wzorem Welcha-Satterthwaite'a:

$$\nu_\mathrm{eff} = \frac{u_\mathrm{c}^4(\rho)}{\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\left[c_{x_j} u(x_j)\right]^4}{\nu_{x_j}}}, \tag{39}$$

gdzie ν_{x_j} to stopnie swobody dla wielkości mierzonych bezpośrednio określone na podstawie liczby pomiarów tych wielkości. Warto także zaznaczyć, że z uwagi na to, że tablice statystyczne opracowane są dla całkowitych wartości stopni swobody to wartość ν_eff otrzymaną ze wzoru (39) należy zaokrąglić w dół do najbliższej liczby całkowitej. Dla tej wartości wypadkowej liczby stopni swobody oraz dla zadanego prawdopodobieństwa objęcia (np. $P = 95\,\%$) należy odczytać współczynnik rozszerzenia k_P.

Wartość współczynnika rozszerzenia wybierana jest na podstawie wymaganego poziomu ufności dla przedziału od $y - U(y)$ do $y + U(y)$. Z reguły wartość k zawiera się w granicach od 2 do 3, ale zdarza się, że wartość ta jest spoza tego przedziału. Mimo iż określenie wartości k w ten sposób, by jednoznacznie ustalony został poziom ufności jest zadaniem trudnym (wymaga to szczegółowej wiedzy o rozkładzie prawdopodobieństwa charakteryzowanym przez wynik pomiaru y i jego złożoną niepewność standardową $u_\mathrm{c}(y)$), to istnieją proste metody pozwalające na znalezienie przybliżonego rozwiązania. Można je stosować, gdy wspomniany rozkład prawdopodobieństwa jest w przybliżeniu normalny, a wypadkowa liczba stopni swobody wystarczająco duża.

Przykład 9. Wykorzystując dane z przykładu 8 obliczyć niepewność rozszerzoną $U(\rho)$ dla gęstości elementu. a) Przyjąć, że współczynnik rozszerzenia $k = 2$. b) Wyznaczyć współczynnik rozszerzenia k_P na podstawie wypadkowej liczby stopni swobody oraz prawdopodobieństwa objęcia $P = 95\,\%$.

a) W celu wyznaczenia niepewności rozszerzonej $U(\rho)$ należy skorzystać ze wzoru (38), podstawiając odpowiednie dane:

$$U(\rho) = ku_\mathrm{c}(\rho). \tag{40}$$

Dla $k = 2$ otrzymujemy $U(\rho) = 50{,}72\,\mathrm{kg/m^3}$.
b) W celu obliczenia wypadkowej liczby stopni swobody należy skorzystać ze wzoru (39). Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy:

$$\nu_\mathrm{eff} = \frac{u_\mathrm{c}^4(\rho)}{\frac{\left[c_m u(m)\right]^4}{\nu_m} + \frac{\left[c_d u(d)\right]^4}{\nu_d} + \frac{\left[c_h u(h)\right]^4}{\nu_h}}, \tag{41}$$

gdzie ν_m, ν_d, ν_h to stopnie swobody odpowiednio dla masy, średnicy podstawy i wysokości badanego elementu określone na podstawie liczby pomiarów tych wielkości. Ponieważ masy oraz wymiary geometryczne były mierzone pięciokrotnie, to dla każdej z tych wielkości liczba stopni swobody wyniosła 4. Wartość ν_eff otrzymana ze wzoru (41) to $\nu_\mathrm{eff} = 4{,}15 \approx 4$. Wartość współczynnika rozszerzenia dla $\nu_\mathrm{eff} = 4$ oraz dla $P = 95\,\%$ odczytana z tablic (patrz: dodatek B) to $k_P = 2{,}776$. Dla $k_{95\,\%} = 2{,}776$ otrzymujemy $U(\rho) = 70{,}39\,\mathrm{kg/m^3}$.

---

6. Podawanie niepewności

Przy podawaniu wyniku pomiaru i jego niepewności powinno się [2]:

a) opisać przejrzyście metody zastosowane do obliczenia wyniku pomiaru i jego niepewności na podstawie obserwacji eksperymentalnych i danych wejściowych;

b) wymienić wszystkie składowe niepewności i w pełni udokumentować to, jak były one oszacowane;

c) przedstawić analizę danych w taki sposób, żeby każdy z jej ważnych etapów mógł być odtworzony i aby obliczenie podanego wyniku pomiaru mogło być niezależnie odtworzone, jeżeli zachodziłaby taka potrzeba;

d) podać wszystkie poprawki i wartości stałych zastosowanych w analizie oraz ich źródła.

W szczególności, gdy miarą niepewności jest złożona niepewność standardowa, należy przede wszystkim podać:

a) pełną definicję wielkości mierzonej;

b) wartość y tej wielkości oraz wartość złożonej niepewności standardowej $u_c(y)$ (należy pamiętać o jednostkach);

c) względną złożoną niepewność standardową (tylko wtedy, gdy zachodzi taka potrzeba):

$$u_r(y) = \frac{u_c(y)}{|y|}. \tag{42}$$

Jeżeli miarą niepewności jest złożona niepewność standardowa $u_c(y)$ to istnieje kilka możliwości podania wartości liczbowej wyniku pomiaru.

Przykład 10. Załóżmy, że wielkością, której wartość będzie podawana, jest przyspieszenie ziemskie. Przyjmijmy, że obliczone wartości przyspieszenia ziemskiego g oraz złożonej niepewności standardowej $u_c(g)$ to odpowiednio $9{,}7863\,\mathrm{m/s^2}$ i $0{,}2267\,\mathrm{m/s^2}$. Preferowane sposoby zapisu wyniku to:

1) „$g = 9{,}79\,\mathrm{m/s^2}$ z $u_c(g) = 0{,}23\,\mathrm{m/s^2}$”;

2) „$g = 9{,}79(23)\,\mathrm{m/s^2}$, gdzie liczba w nawiasie jest wartością $u_c(g)$ odniesioną do ostatnich cyfr podawanego wyniku”;

3) „$g = 9{,}79(0{,}23)\,\mathrm{m/s^2}$, gdzie liczba w nawiasie jest wartością $u_c(g)$ wyrażoną w tej samej jednostce co wynik”;

4) „$g = (9{,}79 \pm 0{,}23)\,\mathrm{m/s^2}$, gdzie liczba zapisana za znakiem $\pm$ jest wartością $u_c(g)$, a nie jest przedziałem ufności”.

Ostatniego sposobu zapisu należy unikać, ponieważ może być on mylony z niepewnością rozszerzoną. Ponadto, mimo iż w zapisie występuje symbol u_c to zapis ten może być odebrany jako podanie niepewności rozszerzonej ze współczynnikiem rozszerzenia $k = 1$.

W przypadku, gdy miarą niepewności jest niepewność rozszerzona $U(y)$, należy podać:

a) pełną definicję wielkości mierzonej;

b) wynik pomiaru (z wykorzystaniem symbolu $\pm$);

c) względną niepewność rozszerzoną (tylko wtedy, gdy zachodzi taka potrzeba):

$$U_r(y) = \frac{U(y)}{|y|}; \tag{43}$$

d) wartość współczynnika rozszerzenia k przyjętą do obliczenia $U(y)$ (zaleca się podać także złożoną niepewność standardową $u_c(y)$);

e) przybliżoną wartość poziomu ufności związanego z przedziałem $y \pm U(y)$ oraz sposób w jaki został on wyznaczony.

Niezależnie od tego czy miarą niepewności jest złożona niepewność standardowa $u_c(y)$ czy niepewność rozszerzona $U(y)$ powinno się podawać również następujące informacje:

a) wartości wielkości wejściowych x_j i ich niepewności standardowe $u(x_j)$ wraz ze sposobem ich wyliczenia;
b) liczby stopni swobody niepewności standardowych dla wielkości wejściowych x_j, a także sposób ich wyznaczenia;
c) zależność funkcyjną $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, wzory pozwalające obliczyć wartości pochodnych cząstkowych (o ile znana jest postać funkcji f), wartości współczynników wrażliwości i udziałów niepewności i inne współczynniki wyznaczone eksperymentalnie;
d) wartość wypadkowej liczby stopni swobody ν_{eff}.

Zgodnie z wytycznymi podanymi w [2] wartości liczbowe wielkości y, złożonej niepewności standardowej $u(y)$ oraz niepewności rozszerzonej $U(y)$ nie powinny być podawane z nadmierną liczbą cyfr. W zapisie końcowym wymienione niepewności wystarcza podać z najwyżej dwiema cyframi znaczącymi (wcześniej, na etapie obliczeń, należy pozostawiać dodatkowe cyfry, aby poprawnie dokonać zaokrąglenia). Przy podawaniu końcowych wyników może być czasami uzasadnione zaokrąglanie niepewności w górę. W wielu sytuacjach stosuje się jednak ogólne zasady zaokrąglania. Po zaokrągleniu niepewności należy tak zaokrąglić wielkości wejściowe i wyjściowe, by pod względem liczby cyfr znaczących były one zgodne z odpowiadającymi im niepewnościami. W przypadku współczynników korelacji, ich wartości powinny być podane z dokładnością do trzech cyfr znaczących, gdy ich wartości bezwzględne są bliskie jedności.

7. Metoda najmniejszych kwadratów

Podczas wykonywania niektórych ćwiczeń w laboratorium mierzone wielkości x i y są od siebie zależne. W takim przypadku dla różnych wartości x_i otrzymamy różne wartości y_i. Jeżeli wykonano n takich pomiarów to w rezultacie mamy n par liczb $(x_i,\ y_i)$. Często kolejnym etapem takiego ćwiczenia jest wyznaczenie na podstawie tych par liczb wartości parametrów występujących w zadanej zależności funkcyjnej. Jedną z metod, które pozwalają na osiągnięcie tego celu jest metoda najmniejszych kwadratów. Metoda ta, nie tylko umożliwia wyznaczenie wspomnianych parametrów, ale także może być stosowana w celu określenia niepewności dla tych parametrów. Po poddaniu tych niepewności analizie można ocenić jak dobrze wyznaczona zależność funkcyjna pasuje do danych eksperymentalnych. Warto dodać, że wyznaczanie niepewności metodą najmniejszych kwadratów należy do analizy niepewności metodą typu A.

Załóżmy, że zależność funkcyjna ma postać:

$$y = f(x, a, b, c, \ldots). \tag{44}$$

Dla ułatwienia dyskusji należy wprowadzić dwa założenia. Po pierwsze: choć pomiary y_i są obarczone niepewnością, to niepewności określone dla x_i są dużo mniejsze, przez co można je pominąć. Po drugie: każdy wynik y_i podlega rozkładowi Gaussa o wartości oczekiwanej $f(x_i, a, b, c, \ldots)$ i szerokości σ_{y_i}. Dla takich założeń można napisać następującą zależność opisującą prawdopodobieństwo otrzymania zmierzonej wartości y_i:

$$P(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_{y_i}} \exp\left\{-\frac{[y_i - f(x_i,a,b,c,\ldots)]^2}{2\sigma_{y_i}^2}\right\}. \tag{45}$$

Z uwagi na to, że prawdopodobieństwo otrzymania kompletnego zbioru wyników $y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n$ jest iloczynem kolejnych wartości $P(y_i)$:

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(y_1) \cdot P(y_2) \cdot \ldots \cdot P(y_n), \tag{46}$$

to:

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_n) \propto \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} \sigma_{y_i}} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \tag{47}$$

gdzie:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{[y_i - f(x_i,a,b,c,\ldots)]^2}{\sigma_{y_i}^2}. \tag{48}$$

Zadana zależność funkcyjna najlepiej pasuje do danych, gdy prawdopodobieństwo $P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jest największe, czyli gdy suma kwadratów χ^2 jest najmniejsza (stąd bierze się nazwa metody najmniejszych kwadratów). W celu znalezienia współczynników $a, b, c, \ldots$, dla których suma kwadratów χ^2 jest najmniejsza należy zróżniczkować χ^2 względem kolejnych współczynników, a następnie przyrównać te pochodne do zera: $\partial\chi^2/\partial a = 0$, $\partial\chi^2/\partial b = 0$, $\partial\chi^2/\partial c = 0$, $\ldots$.

W wielu ćwiczeniach zależność funkcyjna (44) ma postać:

$$y = ax. \tag{49}$$

Wtedy:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} \tag{50}$$

oraz

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i)x_i}{\sigma_{y_i}^2} = 0. \tag{51}$$

Z równania (51) można wyprowadzić wzór na współczynnik a:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}}. \tag{52}$$

W celu wyznaczenia niepewności dla współczynnika a należy skorzystać z prawa propagacji niepewności (25). Prawo to zastosowane do wzoru (52) umożliwia wyprowadzenie wzoru:

$$u(a) = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}}}. \tag{53}$$

Jeżeli poszczególne niepewności $\sigma_{y_i}^2$ nie są znane, to należy założyć, że są sobie równe. Wtedy wzory (52) i (53) mają postać:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{54}$$

oraz

$$u(a) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2}{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}. \tag{55}$$

Przy wyznaczaniu wzoru (55) skorzystano z tego, że identyczną dla każdego z pomiarów y_i niepewność σ_y można zapisać jako:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2}{n-1}}. \tag{56}$$

Ze wzoru (56) widać, że jeżeli zależność funkcyjna ma postać $y = ax$ i nic nie wiadomo o niepewności σ_y, to dysponując jedną parą liczb (x_1, y_1) nie ma sensu wyznaczanie niepewności dla współczynnika a.

Jeżeli w ćwiczeniu zależność funkcyjna (44) ma postać:

$$y = ax + b, \tag{57}$$

to wtedy:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_{y_i}^2}. \tag{58}$$

Wzory na pochodne cząstkowe w takim przypadku są następujące:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i - b)x_i}{\sigma_{y_i}^2} = 0, \tag{59}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i - b)}{\sigma_{y_i}^2} = 0. \tag{60}$$

Ze równań (59) i (60) można wyprowadzić wzory na współczynniki a i b:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2}\right)^2} \tag{61}$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_{y_i}^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2}\right)^2} \tag{62}$$

W celu wyznaczenia niepewności dla współczynników a i b należy skorzystać z prawa propagacji niepewności (25). Prawo to zastosowane do wzorów (61) i (62) umożliwia wyprowadzenie wzorów:

$$u(a) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2}\right)^2}}, \tag{63}$$

$$u(b) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2}\right)^2}}. \tag{64}$$

Jeżeli poszczególne niepewności $\sigma_{y_i}^2$ nie są znane, to należy założyć, że są sobie równe. Wtedy:

$$a = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{65}$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{66}$$

oraz

$$u(a) = \sqrt{\frac{\frac{n}{n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} \tag{67}$$

$$u(b) = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} \tag{68}$$

Przy wyznaczaniu wzorów (67) i (68) skorzystano z tego, że identyczną dla każdego z pomiarów y_i niepewność σ_y można zapisać jako:

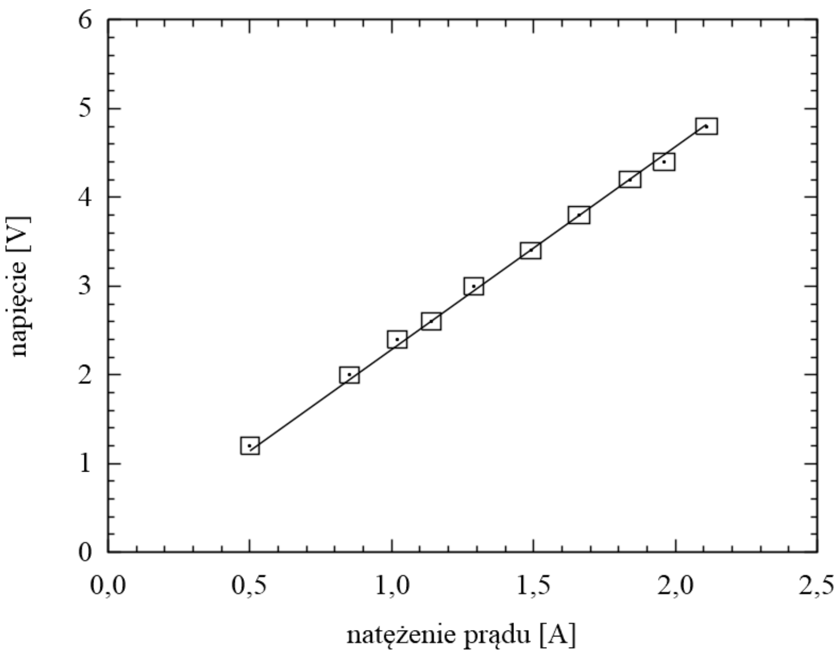
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2}{n-2}} \tag{69}$$

Ze wzoru (69) widać, że jeżeli zależność funkcyjna ma postać $y = ax + b$ i nic nie wiadomo o niepewności σ_y, to dysponując mniej niż trzema parami liczb (x_i, y_i) nie ma sensu wyznaczanie niepewności dla współczynników a i b.

Przykład 11. Wykonano pomiar zależności natężenia prądu od przyłożonego napięcia dla pewnego opornika. Do pomiaru natężenia wykorzystano amperomierz cyfrowy, którego dokładność dla zakresu 20 A to: 0,8 % rdg + 5 dgt. Napięcie mierzono woltomierzem analogowym o klasie 2,5 na zakresie pomiarowym 5 V, który miał 25 działek na skali. Wyniki pomiarów podano w tabeli 2. Wykonać wykres przedstawiający zależność $U(I)$ (pokazać na nim pola niepewności). Wyznaczyć wartość oporu R, wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów. Pokazać na wykresie prostą stanowiącą dopasowanie do danych eksperymentalnych o współczynniku kierunkowym wyznaczonym metodą najmniejszych kwadratów.

Tabela 2. Zmierzone wartości natężenia prądu i przyłożonego napięcia.

nr pomiaru	I_i [A]	U_i [V]	$\Delta_\mathrm{p}(U_i)$ [V]	$\Delta_\mathrm{e}(U_i)$ [V]	$u(U_i)$ [V]	$\Delta_\mathrm{p}(I_i)$ [A]	$u(I_i)$ [A]
1	0,50	1,2	0,125	0,1	0,0924	0,0540	0,0312
2	0,85	2,0	0,125	0,1	0,0924	0,0568	0,0328
3	1,02	2,4	0,125	0,1	0,0924	0,0582	0,0336
4	1,14	2,6	0,125	0,1	0,0924	0,0591	0,0341
5	1,29	3,0	0,125	0,1	0,0924	0,0603	0,0348
6	1,49	3,4	0,125	0,1	0,0924	0,0619	0,0357
7	1,66	3,8	0,125	0,1	0,0924	0,0633	0,0365
8	1,84	4,2	0,125	0,1	0,0924	0,0647	0,0374
9	1,96	4,4	0,125	0,1	0,0924	0,0657	0,0379
10	2,11	4,8	0,125	0,1	0,0924	0,0669	0,0386



Rys. 1. Zmierzone wartości natężenia prądu i przyłożonego napięcia. Linią prostą pokazano zależność $U(I)$ wyznaczoną metodą najmniejszych kwadratów.

Zależność $U(I)$ została przedstawiona na rys. 1. W celu narysowania pól niepewności należało wyznaczyć niepewności całkowite dla wartości natężenia prądu i przyłożonego napięcia. Dla obu wielkości będą one odpowiadały niepewnościom standardowym wyznaczanym metodą typu B.

W celu wyznaczenia niepewności typu B dla wartości przyłożonego napięcia zastosowano wzór:

$$u_{\mathrm{B}}(U) = \sqrt{\frac{(\Delta_{\mathrm{p}}U)^2}{3} + \frac{(\Delta_{\mathrm{e}}U)^2}{3}}, \tag{70}$$

gdzie (patrz wzór (10)):

$$\Delta_{\mathrm{p}}U = \frac{\mathrm{klasa} \cdot \mathrm{zakres}}{100} = \frac{2{,}5 \times 5\,\mathrm{V}}{100} = 0{,}125\,\mathrm{V} \tag{71}$$

oraz $\Delta_{\mathrm{e}}U = 0{,}1\,\mathrm{V}$ (połowa działki elementarnej). A zatem:

$$u_{\mathrm{B}}(U) = \sqrt{\frac{(0{,}125\,\mathrm{V})^2}{3} + \frac{(0{,}1\,\mathrm{V})^2}{3}} = 0{,}0924\,\mathrm{V}. \tag{72}$$

W celu wyznaczenia niepewności typu B dla wartości natężenia prądu zastosowano wzór:

$$u_{\mathrm{B}}(I) = \frac{\Delta_{\mathrm{p}}I}{\sqrt{3}}, \tag{73}$$

gdzie (patrz wzór (11)):

$$\Delta_{\mathrm{p}}I = c_1 \cdot \mathrm{rdg} + c_2 \cdot \mathrm{dgt} = 0{,}008 \times \mathrm{rdg} + 5 \times 0{,}01\,\mathrm{A}. \tag{74}$$

Z uwagi na to, że w miejsce rdg należy wstawić wartość natężenia prądu odczytaną z przyrządu to niepewności liczone wzorem (73) będą się różnić (patrz tabela 2).

Biorąc pod uwagę prawo Ohma zapisane w postaci:

$$U = RI \tag{75}$$

oraz to, że wartości niepewności dla przyłożonego napięcia są identyczne, wzory na rezystancję opornika i niepewność odpowiadającą tej wielkości mają postać:

$$R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} I_i U_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} I_i^2} \tag{76}$$

oraz

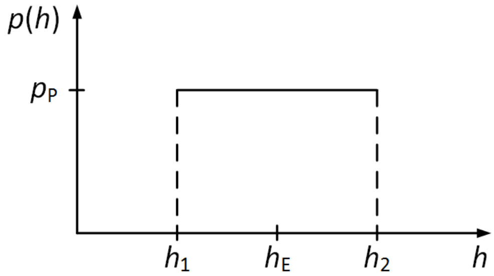
$$u(R) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (U_i - RI_i)^2}{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} I_i^2}}, \tag{77}$$

gdzie n jest liczbą pomiarów.

Podstawiając do wzorów (76) i (77) wartości z tabeli 2 otrzymujemy, że R i $u(R)$ wynoszą odpowiednio: $2{,}285\,\Omega$ i $0{,}010\,\Omega$. Wynik końcowy można zatem zapisać jako $R = 2{,}285(10)\,\Omega$.

A. Dlaczego $\sqrt{3}$?

Załóżmy, że posiadamy mało informacji o wielkości h, i że wszystko co można zrobić to założyć, że h jest opisane przez symetryczny prostokątny rozkład prawdopodobieństwa.



Rys. 2. Graficzna interpretacja obliczania niepewności standardowej na podstawie danego rozkładu prostokątnego.

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa ma postać:

$$p(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_2 - h_1} & \text{dla } h_1 < h < h_2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } h. \end{cases} \tag{78}$$

Wartość oczekiwana wynosi:

$$h_\mathrm{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h p(h)\,\mathrm{d}h = \int\limits_{h_1}^{h_2} h \frac{1}{h_2 - h_1}\,\mathrm{d}h = \frac{h_1 + h_2}{2}. \tag{79}$$

Wariancja wynosi:

$$\sigma_h^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h^2 p(h)\,\mathrm{d}h - h_\mathrm{E}^2 = \int\limits_{h_1}^{h_2} h^2 \frac{1}{h_2 - h_1}\,\mathrm{d}h - \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}(h_2 - h_1)^2. \tag{80}$$

Odchylenie standardowe wynosi:

$$\sigma_h = \sqrt{\sigma_h^2} = \sqrt{\frac{1}{12}(h_2 - h_1)^2} = \frac{h_2 - h_1}{2\sqrt{3}} = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}}. \tag{81}$$

B. Współczynnik rozszerzenia k_P

Tabela 3. Wartości k_P potrzebne do uzyskania różnych wartości prawdopodobieństwa objęcia P.

liczba stopni swobody ν	wartości k_P dla $P = 99{,}9\,\%$	wartości k_P dla $P = 99{,}5\,\%$	wartości k_P dla $P = 99\,\%$	wartości k_P dla $P = 98\,\%$	wartości k_P dla $P = 95\,\%$	wartości k_P dla $P = 90\,\%$
1	636,619	127,321	63,657	31,821	12,706	6,314
2	31,599	14,089	9,925	6,965	4,303	2,920
3	12,924	7,453	5,841	4,541	3,182	2,353
4	8,610	5,598	4,604	3,747	2,776	2,132
5	6,869	4,773	4,032	3,365	2,571	2,015
6	5,959	4,317	3,707	3,143	2,447	1,943
7	5,408	4,029	3,499	2,998	2,365	1,895
8	5,041	3,833	3,355	2,896	2,306	1,860
9	4,781	3,690	3,250	2,821	2,262	1,833
10	4,587	3,581	3,169	2,764	2,228	1,812
11	4,437	3,497	3,106	2,718	2,201	1,796
12	4,318	3,428	3,055	2,681	2,179	1,782
13	4,221	3,372	3,012	2,650	2,160	1,771
14	4,140	3,326	2,977	2,624	2,145	1,761
15	4,073	3,286	2,947	2,602	2,131	1,753
16	4,015	3,252	2,921	2,583	2,120	1,746
17	3,965	3,222	2,898	2,567	2,110	1,740
18	3,922	3,197	2,878	2,552	2,101	1,734
19	3,883	3,174	2,861	2,539	2,093	1,729
20	3,850	3,153	2,845	2,528	2,086	1,725
21	3,819	3,135	2,831	2,518	2,080	1,721
22	3,792	3,119	2,819	2,508	2,074	1,717
23	3,768	3,104	2,807	2,500	2,069	1,714
24	3,745	3,091	2,797	2,492	2,064	1,711
25	3,725	3,078	2,787	2,485	2,060	1,708
26	3,707	3,067	2,779	2,479	2,056	1,706
27	3,690	3,057	2,771	2,473	2,052	1,703
28	3,674	3,047	2,763	2,467	2,048	1,701
29	3,659	3,038	2,756	2,462	2,045	1,699
30	3,646	3,030	2,750	2,457	2,042	1,697
35	3,591	2,996	2,724	2,438	2,030	1,690
40	3,551	2,971	2,704	2,423	2,021	1,684
45	3,520	2,952	2,690	2,412	2,014	1,679
50	3,496	2,937	2,678	2,403	2,009	1,676
60	3,460	2,915	2,660	2,390	2,000	1,671
70	3,435	2,899	2,648	2,381	1,994	1,667
80	3,416	2,887	2,639	2,374	1,990	1,664
90	3,402	2,878	2,632	2,368	1,987	1,662
100	3,390	2,871	2,626	2,364	1,984	1,660
120	3,373	2,860	2,617	2,358	1,980	1,658
140	3,361	2,852	2,611	2,353	1,977	1,656
160	3,352	2,846	2,607	2,350	1,975	1,654
180	3,345	2,842	2,603	2,347	1,973	1,653
200	3,340	2,839	2,601	2,345	1,972	1,653
500	3,310	2,820	2,586	2,334	1,965	1,648
1000	3,300	2,813	2,581	2,330	1,962	1,646
10000	3,291	2,808	2,576	2,327	1,960	1,645
∞	3,291	2,807	2,576	2,326	1,960	1,645

Literatura

[1] *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement.* https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

[2] *Ewaluacja danych pomiarowych — Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru.* https://www.gum.gov.pl/download/1/7017/PrzewodnikJCGM100verfin27082019popr.pdf

[3] https://www.engineeringtoolbox.com/sensible-heat-storage-d_1217.html

[4] http://calculla.com/specific_heat_table?inPrecision=9&inUnitId=J_per_kg_K

[5] https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg