L2-informatique Combinatoire&Graphes

CM Graphes : synthèse

Graphes non-orientés

Définition : Un graphe (non-orienté) est un **G=(X, E)** où X est un ensemble non-vide de *sommets* (ou « points ») et E un ensemble *d'arêtes*. Une arête e possède deux sommets {x, y} non-ordonnés et pas toujours distincts. Elle peut aussi avoir un nom. Si x=y l'arête est une *boucle*. Deux sommets peuvent être reliés par aucune, une ou plusieurs arêtes. On dit que e *relie* x et y. On dit que x et y sont *voisins*, *adjacents*. On dit que e est *incidente* à x et à y.

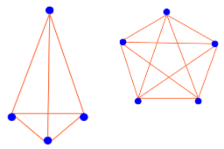
Cardinalités notations habituelles : $n = |X|$ et $m = |E|$.

Définition : Le degré d'un sommet x, $d(x) = deg(x) = | \{ e : E \mid e \text{ incidente à } x \} |$.

Définition : Un graphe est dit simple s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples. Dans un graphe simple toute paire de sommets x, y est reliée par une ou aucune arête, et il n'y a pas de boucles.

Définition : Un **isomorphisme** entre deux graphes G1= (X1, E1) et G2= (X2, E2) est une bijection phi : X1→X2 et une bijection psi : E1→E2 telle que si e relie {x, y} alors psi(e) relie {phi(x), phi(y)}. En d'autres mots phi, psi forment un renommage de toute le graphe G1 vers G2 de manière réversible. On dit alors que G1 et G2 sont **isomorphes**. Cela signifie qu'ils sont essentiellement un nommage (et sur papier, un dessin) différent de la même structure.

Définition : Les graphes complets sont les graphes simples où toute paire de sommets distincts est reliée par une arête. K_n = le graphe complet sur n sommets (à isomorphisme près, c-à-d sans préciser les noms dans X ou E) ; n(K_n) = n, m(K_n) = C(n, 2).



Il ne peut y avoir plus d'arêtes dans un graphe simple à n sommets et donc pour tout graphe simple G on a $m(G) \leq C(n, 2)$.

Définition : un graphe est dit **planaire** s'il est possible de le dessiner sans que les lignes représentant les arêtes ne se coupent (ailleurs qu'aux sommets). Par exemple K_4 est planaire mais K_5 ne l'est pas.

Définition : un **sous-graphe** de G=(X,E) est un G'=(X',E') tel que $X' \subseteq X$ et $E' \subseteq E$ et tout arête e' :E' a ses extrémités dans X'. Le sous-graphe est ***couvrant*** si X'=X.

Si $X'' \subseteq X$, le **sous-graphe *engendré*** (ou *induit*) par X'' G(X'') est (X'', E'') où E'' = toutes les arêtes de E dont les sommets sont dans X''.

Soustractions sur les graphes : soit G=(X,E) et X' un ensemble de points, alors G-X' = G(X-X') le sous-graphe engendré par X-X' ; si E' est un ensemble d'arêtes, alors G-E' = G(E-E') est le sous-graphe sur X dont les arêtes sont E-E'.

Union, intersection de graphes : l'intersection (resp. l'union) de deux graphes est le graphe constitué de l'intersection (resp. l'union) de leurs sommets et l'intersection (resp. l'union) de leurs arêtes.

Un sommet x est dit isolé si $d(x) = 0$.

Proposition : la somme des degrés des sommets égale deux fois le nombre d'arêtes $\Sigma_{\{x :X\}} d(x) = 2m$.

Démonstration : chaque arête est comptée à ses deux extrémités (une boucle ne compte qu'une fois).

Définition : un graphe G et dit ***connexe*** si **toute paire de sommets x, y est reliée dans G par une chaîne**.

<u>Définition</u> : un graphe G(X,E) est **biparti** si X peut être partitionné en deux X= X1 U X2, X1∩X2= { } et que toute arête de E a une extrémité dans X1 et une dans X2. Cela signifie qu'il n'y a aucune arête interne à X1 ni à X2.

Le graphe **K_{n1, n2}** est (à isomorphisme près) le graphe **biparti complet** est tel que |X1|=n1, |X2|=n2 et E relie chaque sommet de X1 à chaque sommet de X2, donc |E| = n1 × n2.

<u>Matrice d'adjacence</u> : Comme une relation, un graphe <u>simple</u> peut être représenté par une matrice carrée binaire : lignes, colonnes ~ les sommets et 1 en (x,y) s'il existe une arête {x,y} et 0 sinon. La matrice est donc forcément symétrique car {x,y} est valable dans les deux sens.

<u>Définition</u> : un graphe simple valué est un G=(X, E, coût) où coût : E → R+ (les réels non-négatifs). Le coût d'une arête peut représenter une distance, un prix, une bande passante etc. La matrice d'adjacence contient alors coût({x,y}) s'il existe une arête {x,y} et ∞ (infini) sinon.

<u>Définition</u> : un **arbre** non-orienté est un graphe **simple, connexe et sans cycle**. S'il est simple, sans cycle mais pas connexe, on peut l'appeler une **forêt** car il est constitué de plusieurs arbres déconnectés.

Graphes orientés

<u>Définition</u> : Un graphe orienté est un **G=(X, A)** où X est un ensemble non-vide de *sommets* (ou « points ») et A un ensemble ***d'arcs*** *(arêtes orientées)*. Un arc e possède deux sommets (x,y) ordonnés dont x est l'origine et y la destination. Si x=y c'est une *boucle*. L'arc peut aussi avoir un nom. On dit que e va de x à y. Un graphe orienté est **symétrique** si pour tout arc (x,y) il y a aussi (y,x).

<u>Définition</u> : Le **degré intérieur** (**entrant**) de x est d^{-}(x) = |{ (u,v) :A | v=x}| et le **degré extérieur** (**sortant**) de x est d^{+}(x) = |{(u,v) :A | u=x}|. Un sommet x est appelé une source si d^{-}(x) = 0, « rien n'y entre ». Un sommet y est appelé un puits si d^{+}(x) = 0, « rien n'en sort ».

<u>Proposition</u> : la somme des degrés intérieurs et égale à la somme des degrés extérieurs, égale m.

<u>Démonstration</u> : chaque arête est comptée une fois dans les d^{+}(_) et une fois dans les d^{-}(_).

<u>Définition</u> : un graphe orienté est **fortement connexe** si ∀ x, y ε X, il y a un chemin de x à y.

<u>Matrice d'adjacence</u> : Comme une relation, un graphe orienté peut être représenté par une matrice carrée binaire : lignes, colonnes ~ les sommets et 1 en (x,y) s'il existe une arête {x,y} et 0 sinon. La matrice n'est *pas* forcément symétrique.

<u>Définition</u> : un graphe orienté valué est un G=(X, A, coût) où coût : A → R+ (les réels non-négatifs). Le coût d'un arc peut représenter une distance, un prix, une bande passante etc, cette fois l'information est « à sens unique » contrairement au graphe non-orienté. La matrice d'adjacence contient alors coût(x,y) s'il existe un arc {x,y} et ∞ (infini) sinon.

<u>Définition</u> : un graphe orienté *acyclique* en est un où il n'y a pas de chemin qui revienne à son point de départ. Il a nécessairement des sources et des puits. Un **tri topologique** du graphe orienté est une liste de ses sommets qui respecte le sens des arcs.

Algorithme : pour trouver le tri topologique 1. Créer une liste vide de sommets 2. Tant qu'il reste des sommets 2a. choisir une source et l'ajouter à la fin de la liste, 2b enlever cette source du graphe. 3. Rendre la liste de sommets.
