L2-informatique Combinatoire&Graphes

CM2 : Relations : synthèse

Une relation (binaire) R *entre* les ensembles A et B est un ensemble de couples ordonnés (a,b) : A × B.

Donc R ⊆ A × B, c'est-à-dire R ε P(A × B).   On peut écrire aRb à la place de (a,b) ε R.

Une relation (binaire) R *dans* l'ensembles A est un ensemble de couples ordonnés (a,a') : A × A.

On peut dessiner R comme un graphe ordonné où les éléments de A sont les sommets et les couples sont les arcs :   (a,a') dessiné comme a → a'. Une relation peut être vide, finie ou infinie.

On peut définir une relation en énumérant ses couples, par exemple   { (2, -4), (4, 2), (0, 5) }

ou en donnant sa définition en compréhension, par exemple   { (n, n') | n' = n + 1 }.

Soit R une relation dans l'ensemble A :

R est …	**… signifie que :**	**… c'est-à-dire**
Réflexive	∀a. (a, a) ε R	∀a. a R a
Symétrique	∀a ∀b. (a, b) ε R => (b,a) ε R	∀a ∀b. a R b => b R a
Antisymétrique	∀a ∀b. (a, b)εR & (b,a)εR => a=b	∀a ∀b. aRb & bRa => a=b
Transitive	∀a ∀b ∀c. (a, b)εR & (b,c)εR => (a,c) ε R	∀a ∀b ∀c. aRb & bRc => aRc

Si R1 et R2 sont des relations dans A alors leur union/intersection/soustraction est naturellement l'union/intersection/soustraction de leurs couples (arcs).

Si R1 est une relation de A à B et R2 une relation de A à C, alors leur composition est :

R2 o R1 = { (a,c) | ∃b. (a R1 b) & (b R2 c) }.

Il s'agit des chemins de longueur 2 constitués d'abord d'un arc de R1 puis un arc de R2.

Remarque : La notation est de droite à gauche comme pour celle des fonctions (f o g).

Si R est une relation dans A, alors on peut définir R^2 = R o R, R^3 = R o R o R …

R^n = { (x,y) : A × A | x, y reliés dans le graphe de R par un chemin de longueur exactement n}.

Soient A= {a_1, …, a_m}, B={b_1, …, b_n } et R une relation entre A et B.

La matrice (d'adjacence) de R est la matrice booléenne M de dimensions m × n et dont l'élement M[i,j] vaut 1 si (a_i R b_j), et vaut 0 sinon.

Lorsque A=B et m=n, la matrice est carrée n × n et sa diagonale représente les boucles (x,x).

Une **relation d'équivalence** R sur A est une relation **réflexive, symétrique et transitive**.

Dans R, tout élément a ε A appartient à sa classe d'équivalence [a]_R = { x :A | aRx }.

Les classes d'équivalence de R forment une partition de A : elles sont disjointes et couvrent A.

Il peut y en avoir |A| de taille 1 chacune si chaque élément n'est équivalent qu'à lui-même, ou une seule de taille |A| si tous les éléments sont équivalents.

Le graphe d'une relation d'équivalence est une partition des sommets où les classes d'équivalence sont des « cliques », des blocs à l'intérieur desquels tout est relié à tout.

-

Une **relation d'ordre** R sur A est une relation **réflexive, antisymétrique et transitive**.

Dans le graphe d'une relation d'ordre il n'y a pas de cycles autres que des boucles (antisymétrie), et pour tout chemin il y a aussi un raccourci direct (transitivité).

Une relation d'ordre R est totale (elle est un **ordre total**) si ∀a ∀a'. (a R a') ou (a' R a). Dans ce cas le graphe est une chaîne où tout est comparable. Par exemple, la relation ≤ sur Nat est un ordre total.

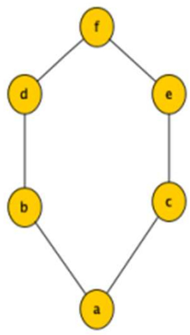
Sinon on dit que R est un **ordre partiel**, il existe de paires de sommets incomparables. Par exemple la relation « n divise n' » sur Nat est un ordre partiel, certains nombres ne se divisent pas entre eux.

Dans une relation d'ordre

- un **majorant** de E ⊆ A est un élément « plus grand ou égal » à tous les éléments de E. Il n'est pas nécessairement dans E lui-même,
- un **minorant** de E ⊆ A est un élément « plus petit ou égal » à tous les éléments de E. Il n'est pas nécessairement dans E lui-même
- un **plus grand élément** de E ⊆ A est un majorant qui fait partie de E, s'il existe il est unique et on l'écrit (max E).
- un **plus petit élément** de E ⊆ A est un minorant qui fait partie de E, s'il existe il est unique et on l'écrit (min E).

Le **diagramme de Hasse** d'une relation d'ordre est un schéma incomplet de son graphe où on ne garde que le minimum d'arcs pour conserver les chemins (on oublie la transitivité qui est sous-entendue) et on dessine les arcs vers le haut (on dessine des arètes sans flèches qui sont implicites).

Par exemple ce schéma est le diagramme de Hasse de la relation d'ordre



{ (a,a), (a,b), (a,d), (a,f), (a,c), (a,e),

(b,b), (b,d), (b,f),

(c,c), (c,e), (c,f),

(d,d), (d,f),

(e,e), (e,f),

(f,f) }