Матанализ 2 семестр ПИ, Лекции

Собрано 12 мая 2022 г. в 23:21

Содержание

Раздел #1: Интегральное исчисление

1.1. Неопределенный интеграл

Определение 1. $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной функцией f, если F дифференцируема на $\langle A, B\rangle, F'(x) = f(x)\ \forall x \in \langle A, B\rangle$.

Теорема 1. Пусть $f, F, G : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Тогда G – первообразная $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(x) + c = G(x)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv \text{const}$$

$\Leftarrow$. $(F(x) + c)' = (G(x))' \Leftrightarrow f(x) = F'(x) = G'(x) \Rightarrow G$ – первообразная. □

Определение 2. $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f. Множество функций $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ называется неопределенным интегралом f.

$$\int f(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Далее, $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$.

1. Дифференцирование
$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x), x \in \langle A, B\rangle$$

2. Арифметические действия:
$$\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx = \{F(x) + G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$
$$\int f(x)\, dx + H(x) = \{F(x) + H(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$
$$\lambda \int f(x)\, dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Утверждение 1. Если функция f непрерывна на $\langle A, B\rangle$, то у неё есть первообразная на $\langle A, B\rangle$.

Упражнение. $f(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$. Есть ли первообразная у этой функции?

Определение 3. $E \subset \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$. Если F дифференцируема на E и $F'(x) = f(x)$ на E, то F – первообразная f на множестве E.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int a\,dx = ax + c, a \in \mathbb{R}$
2. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
4. $\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c, a \in \mathbb{R}$

Доказательство. Дифференцирование □

Пример. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ – неберущийся интеграл. $\operatorname{Si}(x)$ – интегральный синус (одна из первообразных, закрепленная при $x \to 0+$).

$$(\operatorname{Si}(x))' = \frac{\sin x}{x}$$

Теорема 2 (Линейность неопределенного интеграла). $f, g : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}$, имеют первообразные на $\langle A, B\rangle$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha, \beta \neq 0$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть F и G – первообразные f и g на $\langle A, B\rangle$. Правая часть равенства: $\{\alpha F(x) + \beta G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

$$(\alpha F(x) + \beta G(x) + c)' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

□

Теорема 3 (Замена переменной). $f : \langle A, B\rangle \to \mathbb{R}, F$ – первообразная f на $\langle A, B\rangle$, $\varphi : \langle C, D\rangle \to \langle A, B\rangle$ – дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$$

Доказательство.

$$(F(\varphi(x)) + c)' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$\square$

Замечание. $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$. Пусть $y = \varphi(x)$

$$\int f(y)dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Пример. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$. Пусть $y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Следствие. Пусть в условиях теоремы φ имеет обратную функцию $\psi : \langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle$. Если $G(x)$ – первообразная функции $(f \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = G(\psi(x)) + c$$

Доказательство. Пусть F – первообразная f на $\langle A, B\rangle$. $F(\varphi(x))$ – первообразная $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ (по теореме). Рассмотрим $G(x) - F(\varphi(x))$ – постоянная (т.к. производная равна нулю). $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$. Тогда

$$G(\psi(y)) - F(y) = \text{const} \Rightarrow \int f(y)\,dy = G(\psi(y)) + c$$

$\square$

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Пусть $t = \sqrt{x}, t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = dt^2 = 2t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(\frac{2t+2}{t+1} - \frac{2}{t+1}\right) dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t - \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

Пример. $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = -\int \cos x\,d\cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + c$.
Иначе: $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = \frac{-\cos 2x}{4} + c$.
Мораль сей басни такова: константы разные, а не $\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}$.

Теорема 4 (Формула интегрирования по частям). $f, g \in C^1\langle A, B\rangle$. Тогда

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Доказательство. H – первообразная $g \cdot f'$. Тогда

$$(f(x)g(x) - H(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - H'(x) = f(x)g'(x)$$

□

Замечание. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Пример. $\int xe^x\,dx$. Пусть $u = x, u' = 1, v' = e^x, v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

Пример. $\int \ln x\,dx$. Пусть $u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = 1, v = x$.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x\ln x - x + c$$

Упражнение. $\int e^x \cdot \sin x\,dx$ Пусть $f = \sin x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x$$

Пусть теперь $f = \cos x, g = e^x$. Тогда

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \Leftrightarrow \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x$$

Отсюда

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Leftrightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Пример. Пусть $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}, n \in \mathbb{N}$. Выразим интеграл I_{n+1} через I_n для произвольного натурального n.
Обозначим $f(x) = \frac{1}{(x^2+a)^n}$ и $g(x) = x$. Тогда

$$df(x) = \left(\frac{1}{(x^2+a)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx, dg(x) = dx$$

По формуле интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} - 2na\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1} \end{aligned}$$

Откуда

$$2naI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a)^n}$$

Утверждение 2. Любая рациональная функция имеет элементарную первообразную.

Рассмотрим простейшие дроби:

1. $\frac{a}{(x+p)^n}, n \in \mathbb{N}, a, p \in \mathbb{R}$
2. $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Интегралы от простейших дробей первого рода вычисляются по таблице. Для простейших дробей второго рода используется следующий алгоритм:

1. Если $p \neq 0$, то выделим полный квадрат и выполним замену $y = x + \frac{p}{2}$. Если $p = 0$, тогда
$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = a\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n} + b\int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$$
2. Интеграл $\int \frac{x\,dx}{(x^2+q)^n}$ можно вычислить с помощью замены $y = x^2+q$, т.к. $dy = 2x\,dx$.
3. Применяя к интегралу $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+q)^n}$ формулу понижения $n-1$ раз сведем его к интегралу I_1, который является табличным.

Пример (12 и 13 из таблицы).

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + c$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Пусть $x = \operatorname{sh} t, dx = \operatorname{ch} t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{\operatorname{ch} t\,dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t}\,dt = \int\,dt = t + c$$

Упражнение. Найди формулу для $(\operatorname{sh} t)^{-1}$

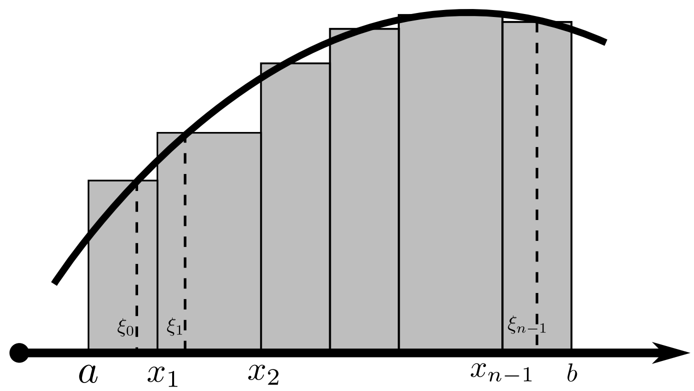
Неберущиеся интегралы:

- $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$
- $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$
- $\int \frac{dx}{\ln x}$
- $\int \frac{e^x}{x}\,dx$
- $\int \sin x^2\,dx$
- $\int \cos x^2\,dx$
- $\int e^{-x^2}\,dx$

1.2. Определенный интеграл Римана

Определение 4. $[a,b], a < b$. Набор точек $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ – разбиение (дробление) отрезка $[a,b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. $\lambda = \lambda_\tau = \max_{k\in[0,n-1]} \Delta x_k$ – ранг дробления (мелкость), $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ – оснащение дробления τ. Пара (τ, ξ) называется оснащенным дроблением.

Определение 5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ – суммы Римана (интегральные суммы).



Определение 6. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральных сумм при ранге $\to 0$:

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) \quad (I = \lim_{\lambda\to 0} \sigma)$$

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon$$

Замечание. Последовательность оснащенных дроблений $\{(\tau^{(i)}, \xi^{(i)})\}_{i=1}^{\infty} : \lambda^{(i)} \to 0$. $\forall \{\tau^{(i)}, \xi^{(i)}\} : \lambda^{(i)} \to 0\ \sigma_{\tau^{(i)}}(f, \xi^{(i)}) \to I$.

Определение 7 (Интеграл Римана). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Если $\exists \lim_{\lambda\to 0} \sigma = I$, то f называется интегрируемой по Риману на $[a,b]$, а число I называется интегралом f по $[a,b]$.
$R[a,b]$ – класс функций, интегрируемых по Риману на $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1.3. Суммы Дарбу

Определение 8. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ – дробление $[a,b]$.

$$M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

Суммы

$$S = S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, s = s_\tau(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

называются верхними и нижними интегральными суммами.

Замечание. Если f – непрерывна на $[a,b]$, то это две частные суммы из сумм Римана.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow$ S ограничена.

Свойства сумм Дарбу:

1. $S_\tau(f) = \sup\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi), s_\tau = \inf\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$

Доказательство. $M_k \geqslant f(\xi_k), k = 0, \dots, n-1$. Тогда $M_k \Delta x_k \geqslant f(\xi_k)\Delta x_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow S_\tau(f) \geqslant \sigma_\tau$, т.е. S_τ – верхняя граница. Докажем, что она является точной верхней границей.
Если f ограничена на $[a,b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. На каждом кусочке разбиения $\exists \xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}] : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > S - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S - \varepsilon$.
Если f не ограничена на $[a,b] \Rightarrow$ не ограничена на каком-то кусочке $[x_l, x_{l+1}]$. Фиксируем $A > 0$ и выберем ξ_k^* при $k \neq l$ произвольно, а для ξ_l^*

$$f(\xi_l^*) > \frac{1}{\Delta x_l}\left(A - \sum_{k\neq l} f(\xi_k^*)\Delta x_k\right)$$

Тогда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*)\Delta x_k > A \Rightarrow \sup_\xi \sigma = +\infty = S$$

□

2. При добавлении новых точек дробления верхняя сумма не увеличится, а нижняя не уменьшится.

Доказательство. Докажем для верхних сумм при добавлении одной точки. $\tau : \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$. Добавим точку c в $[x_l, x_{l+1}] - T$ – новое дробление.

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + M_l \Delta x_l + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$S_T = \sum_{k=0}^{l-1} M_k \Delta x_k + (c - x_l)\cdot M' + (x_{l+1} - c)M'' + \sum_{k=l+1}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

где $M' = \sup_{x\in[x_l,c]} f, M'' = \sup_{x\in[c,x_{l+1}]} f$. $M_l \geqslant M', M_l \geqslant M''$, т.к. $[x_l, c] \subset [x_l, x_{l+1}], [c, x_{l+1}] \subset [x_l, x_{l+1}]$.
Рассмотрим $S_\tau - S_T = M_l\Delta x_l - (c - x_l)M' - (x_{l+1} - c)M'' \geqslant M_l(x_{l+1} - x_l - c + x_l - x_{l+1} + c) = 0$.
Добавить больше точек можно по индукции. □

3. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней.

Доказательство. τ_1, τ_2 – разные дробления $[a, b]$. Докажем, что $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$. Возьмем $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда $s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}$ (по свойству 2). □

Утверждение 3. $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f не ограничена на $[a, b]$ сверху. Тогда $\forall \tau \Rightarrow \sup_\xi \sigma_\tau(f, \xi) = +\infty$. Тогда $\forall \tau$ и числа I $\exists$ оснащение $\xi' : \sigma_\tau(\xi') > I + 1 \Rightarrow$ никакое число I не является пределом интегральных сумм. □

Определение 9. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Возьмем

$$I^* = \inf_\tau S_\tau \qquad I_* = \sup_\tau s_\tau$$

где I^* – верхний интеграл Дарбу, I_* – нижний интеграл Дарбу.

Замечание. $I^* \geqslant I_*$.

Замечание. f ограничена сверху $\Leftrightarrow I^*$ ограничена.

1.4. Критерии интегрируемости функции

Теорема 5 (Критерий интегрируемости функции). Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $f \in R[a, b]$. Обозначим $I = \int_a^b f$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0 :$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Переходя к супремуму и инфимуму, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}$$

откуда $S_\tau - s_\tau \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3} - I + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
$\Leftarrow$. Пусть $S_\tau - s_\tau \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0 \Rightarrow$ все суммы Дарбу конечны.

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \Rightarrow 0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow I^* = I_*$ (т.к. это числа). Обозначим $I = I^* = I_*$.

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau, s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau \Rightarrow |I - \sigma_\tau| \leqslant S_\tau - s_\tau$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda_\tau < \delta\ |I - \sigma_\tau| < \varepsilon$. □

Замечание. Если $f \in R[a,b] \Rightarrow s_\tau \leqslant \int_a^b f \leqslant S_\tau$.

Следствие. $f \in R[a,b] \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} S_\tau = \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = \int_a^b f$

Доказательство. $0 \leqslant S_\tau - \int_a^b f \leqslant S_\tau - s_\tau$, $0 \leqslant \int_a^b f - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau$. □

Замечание. $\lim_{\lambda\to 0} S_\tau = I^*, \lim_{\lambda\to 0} s_\tau = I_*$.

Утверждение 4 (Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману). $f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ ограничена на $[a,b]$ и $I_* = I^*$.

Утверждение 5 (Критерий Римана интегрируемости). $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.

Определение 10. $f : D \to \mathbb{R}$. Величина

$$\omega(f)_D = \sup_{x,y\in D} (f(x) - f(y))$$

называется колебанием f на D. Из определений граней функции ясно, что

$$\omega(f)_D = \sup_{x\in D} f(x) - \inf_{y\in D} f(y)$$

Если задано τ отрезка $[a,b]$, то

$$\omega_k(f) = M_k - m_k$$

Тогда теорему можно записать:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$$

Теорема 6 (Интегрируемость непрерывной функции). $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.

Доказательство. По теореме Кантора $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерна непрерывна на $[a,b]$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall t', t'' \in [a,b] : |t' - t''| < \delta\ |f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

По теореме Вейерштрасса f достигает наибольшего и наименьшего значения на любом отрезке, содержащемся в $[a, b]$. Поэтому колебание f на всяком отрезке, длина которого меньше δ, будет меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\forall \tau : \lambda_\tau < \delta$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k$$

□

Теорема 7 (Интегрируемость монотонной функции). f монотонна на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть f монотонно возрастает на $[a, b]$. Если $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ постоянна $\Rightarrow f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$.
Если $f(a) < f(b)$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Возьмем произвольное $\tau : \lambda_\tau < \delta$ на $[x_k, x_{k+1}]$. В силу монотонности f верно $\omega_k(f) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon$$

□

Замечание. $f \in R[a, b]$. Если изменить значение f в конечном числе точек, то интегрируемость не нарушится и интеграл не изменится.

Доказательство. $\widetilde{f}$ – отличается от f в точках $t_1, t_2, ..., t_m$. $|f|$ ограничена на $[a, b] \Rightarrow |\widetilde{f}|$ ограничена. $|f| \leqslant A$, возьмем $\widetilde{A} = \max\{A, |\widetilde{f}(t_1)|, |\widetilde{f}(t_2)|, ..., |\widetilde{f}(t_m)|\}$. В интегральных суммах для f и $\widetilde{f}$ отличаются не более $2m$ слагаемых, поэтому

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - \sigma_\tau(\widetilde{f}, \xi)| \leqslant 2m(A + \widetilde{A})\lambda_\tau \underset{\lambda_\tau}{\longrightarrow} 0$$

Поэтому предел $\sigma_\tau(\widetilde{f}, \xi)$ существует и равен пределу $\sigma_\tau(f, \xi)$. □

Теорема 8 (Интегрируемость функции и её сужения).
1. $f \in R[a, b], [\alpha, \beta] \subset [a, b] \Rightarrow f \in R[\alpha, \beta]$
2. Если $a < c < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $f \in R[a, c], f \in R[c, b]$, то $f \in R[a, b]$.

Доказательство.
1. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta > 0$ из критерия интегрируемости на $[a, b]$. τ_0 – дробление $[\alpha, \beta], \lambda_{\tau_0} < \delta$. Добавим точек до дробления $[a, b]$. Получим $\tau(\lambda_\tau < \delta)$.

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = \sum_{k=l}^{m-1} \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon$$

2. Пусть f не постоянна, т.е. $\omega(f)_{[a,b]} > 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$, подберем $\delta_1, \delta_2 : \forall \tau_1 : \lambda_{\tau_1} < \delta_1, \forall \tau_2 :$

$\lambda_{\tau_2} < \delta_2$

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{3}, S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3\omega}\}$. Пусть τ – дробление $[a,b], \lambda_\tau < \delta$. Точка $c \in [x_l, x_{l+1})$. Обозначим $\tau' = \tau \cup \{c\}, \tau_1 = \tau' \cap [a,c], \tau_2 = \tau' \cap [c,b]$

$$S_\tau - s_\tau \leqslant S_{\tau_1} - s_{\tau_1} + S_{\tau_2} - s_{\tau_1} + \omega_l(f)\delta < \varepsilon$$

□

Определение 11. Функция $f : [a,b] \to R$ называется кусочно-непрерывной на $[a,b]$, если множество её точек разрыв пусто или конечно (и все разрывы первого рода)

Следствие. f – кусочно-непрерывная на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

Доказательство. Возьмём точки $a_1, a_2, \dots, a_m$ (может $a_1 = a$ и/или $a_m =$ b). Рассмотрим отрезки $[a_k, a_{k+1}]$. f непрерывна на (a_k, a_{k+1}) и $\exists$ конечные $\lim\limits_{x\to a_k+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a_{k+1}-} f(x) \Rightarrow f \in R[a_k, a_{k+1}] \Rightarrow$ по теореме о сужении $f \in R[a,b]$ □

Определение 12. Множество X называется не более, чем счетным, если оно конечно или счетно.

Определение 13. $E \subset \mathbb{R}$ – имеет нулевую меру, если для $\forall\varepsilon > 0$ множество E можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых $< \varepsilon$.

$$\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)\right)$$

Пример. Множество из одной точки.

Упражнение. Чему равна мера $\mathbb{N}$?

Теорема 9 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.** Пусть $f : [a,b] \to R$.
$f \in R[a,b] \Leftrightarrow f$ ограничена и множество точек разрыва имеет нулевую меру.

Теорема 10 (Арифметические действия над интегрируемыми функциями)**.** $f, g \in \mathbb{R}[a,b]$. Тогда

1. $f + g \in R[a,b]$
2. $f \cdot g \in R[a,b]$

3. $\alpha f \in R[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$
4. $|f| \in R[a,b]$
5. Если $\inf\limits_{[a,b]}|g| > 0$, то $\dfrac{f}{g} \in R[a,b]$

Доказательство. 1. $D \subset [a,b]$. $x, y \in D$
$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)+g(y)-f(y)-g(y)| \leqslant |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leqslant \omega_D(f)+\omega_D(g)$
$\omega_D(f+g) \leqslant \omega_D(f)+\omega_D(g)$
$\underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(f+g) \leqslant \underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(f) + \underset{[x_k,x_{k+1}]}{\omega}(g)$
$\omega_k(f+g) \leqslant \omega_k f + \omega_k g$

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f+g)\delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k f \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k g \Delta x_k (\to 0, \lambda \to 0)$$

$\Rightarrow f+g \in R[a,b]$

2. $|fg(x) - fg(y)| \leqslant |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |g(x)||f(x)-f(y)| +$
$+ |f(y)||g(x)-g(y)| \leqslant A|f(x)-f(y)| + B|g(x)-g(y)|$ (т.к. $R[a,b] \Rightarrow$ ограничена на $[a,b]$)
3. $g(x) = \alpha$
4. $||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|$
$|\omega_k|f|| \leqslant |\omega_k f|$
5. $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$. Докажем, что $\dfrac{1}{g} \in R[a,b]$.
$0 < m = \inf\limits_{[a,b]}|g|$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{g(x)g(y)}\right| \leqslant \frac{g(x)-g(y)}{m^2} \Leftrightarrow \omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{\omega_k(g)}{m^2}$$

$\square$

Пример. 1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$
$x^2 \in C[a,b] \Rightarrow x^2 \in R[a,b]$.
Рассмотрим какую-нибудь интегральную сумму: $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $\int_0^1 e^x dx$– упражнение

3. $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $D \notin R[a,b], a < b$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(D)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a \underset{\lambda \to 0}{\not\to} 0$$

□

4. $r(x) \begin{cases} \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{дробь несократима} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$r(x)$ непрерывна в каждой точке, разрывна в каждой рациональной.
$r(x) \in R[0,1]$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ Рациональные числа из [0,1] со знаменателем $\leqslant N$, конечное число $= C_N$, множество X.
Возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4C_N}$ и дробление $\tau : \lambda_\tau < \delta$
Точки X попадут в не более, чем $2C_N$ отрезков дробления. В отрезках, где нет точек из X наибольшее значение $< \dfrac{1}{N}$
$s_\tau(r) = 0$

$$S_\tau(r) = \sum_{k: M_k \geqslant \frac{1}{N}} M_k \Delta x_k \sum_{k: M_k < \frac{1}{N}} M_l \Delta x_k \leqslant \underbrace{1 \cdot 2C_n}_{\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \delta + \underbrace{\frac{1}{N}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$S_\tau(r) - s_\tau(r) = S_\tau(r) \underset{\lambda_\tau \to 0}{\to} 0 \Rightarrow r \in R[0,1]$ и $\displaystyle\int_0^1 r(x)\,dx = 0$ □

Если $f \in R_D$ $g \in R[a,b]$, то $f(g) \in R[a,b]$? ($D-$ множество значений g)

Ответ: нет. Пример: $f(y) = \begin{cases} 1, y \in [0,1] \\ 0, y = 0 \end{cases}$ и $g(x) = r(x)$ на $[0,1]$

$f(r(x)) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = D(x) \notin R[0,1]$

Теорема 11 (Интегрируемость композиции). $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b], f : [a,b] \to \mathbb{R}$,
$f(\varphi) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$
$\varphi \in R[\alpha, \beta], f \in C[a,b]$. Тогда $f \circ \varphi \in R[\alpha, \beta]$

Доказательство. Например, из критерия Лебега. □

1.5. Свойства интеграла Римана

1. $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$

2. $\int_a^a f = 0$ ($\forall f$ на вырожденном отрезке $f \in R[a,a]$)

Свойства:

- Аддитивность интеграла по отрезку:
$a, b, c \in \mathbb{R},\ f \in R[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Доказательство. $f \in R[a,b] \Rightarrow f \in \mathbb{R}[a,c], f \in R[c,b], \{\overline{\tau}^{(n)}, \overline{\xi}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\overline{\overline{\tau}}^{(n)}, \overline{\overline{\xi}}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности оснащенных дроблений $[a,c]$ и $[c,b]$ (равномерных, т.е. $\overline{\lambda} = \frac{c-a}{n}, \overline{\overline{\lambda}}$)
$\tau^{(n)} = \overline{\tau}^{(n)} \cup \overline{\overline{\tau}}^{(n)}$ – дробление $[a,b]$
$\xi^{(n)} = \overline{\xi}^{(n)} \cup \overline{\overline{\xi}}^{(n)}$ – оснащение $\tau^{(n)}$
$\sigma = \overline{\sigma} + \overline{\overline{\sigma}}$ при $n \to \infty$

$$\underbrace{\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f}_{\text{по доказанному}} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^c f - \int_b^c f$$

Все остальные случаи – аналогично. □

- $f \equiv \alpha$ при $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \alpha(b-a)$

Доказательство.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \alpha(b-a)$$

□

- Линейность интеграла: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in R[a,b]$
$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b + \beta \int_a^b g$

Доказательство. $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$
$\sigma_\tau(\alpha f + \beta g) = \sigma_\tau(\alpha f) + \sigma_\tau(\beta g)$ и переход к пределу. □

- Монотонность интеграла: $a < b,\ \ f, g \in R[a,b]$ и $f \leqslant g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

Доказательство. $\sigma_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(g)$ □

Следствие. $a < b, f \in R[a,b]$, если $f \leqslant M \in \mathbb{R}$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f \leqslant M(b-a)$, если $f \geqslant m$ на $[a,b]$то $\int_a^b f \geqslant m(b-a)$

Следствие. $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$

- $a < b, \underset{f \geqslant 0 \text{ на } [a,b]}{f \in R[a,b]}$ и $\exists c \in [a,b] : f(c) > 0$ и f непрерывна в точке С.

Тогда $\int_a^b f > 0$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : \forall x \in \underbrace{[c-\delta; c+\delta] \cap [a,b]}_{[\alpha,\beta]} : |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$f(x) > f(c) - \varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f \geqslant \dfrac{f(c)}{2}(\beta - \alpha)$

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^b \geqslant \int_\alpha^\beta f \geqslant \frac{f(c)}{2}(\beta-\alpha) > 0$$

□

Замечание. Таким же образом строгий знак в монотонности интеграла.

Замечание. $f \in R[a,b], f > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$

- $a < b, f \in R[a,b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Доказательство. $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ □

Если не знаем, что $a \geqslant b$ или $b \geqslant a$

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \left| \int_a^b |f| \right|$$

1.6. Свойства интеграла, интегральные теоремы о средних, формулы Тейлора и Валлиса

Теорема 12. $f, g \in R[a,b], g \geqslant 0$ на $[a,b], m \leqslant f \leqslant M$. Тогда $\exists \mu \in [m,M] : \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$

Доказательство. $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ на $[a,b]$

$$m\int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M\int_a^b g$$

Если $\int_a^b g = 0$, то $\exists \mu \in [m,M] : 0 = \mu \cdot 0$

Если $\int_a^b g > 0$, то $m \leqslant \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leqslant M$

Возьмём $\mu = \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ □

Замечание. Для $g \leqslant 0$ тоже верно.

Следствие.

1. $f \in C[a,b], g \in R[a,b], g \geqslant 0($ или $g \leqslant 0)$.
   Тогда $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g$

   Доказательство. По теореме Вейерштрасса: $\exists m = \min\limits_{[a,b]} f$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f$
   Подберём $\mu \in [m,M]$ по предыдущей теореме. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists c \in [a,b] : f(c) = M$ □

2. $f \in R[a,b], m, M \in \mathbb{R} : m \leqslant f \leqslant M$ на $[a,b]$. Тогда $\exists \mu \in [m,M] : \int_a^b f = \mu(b-a)$

   Доказательство. $g \equiv 1$ в теореме. □

3. $f \in C[a,b]$. Тогда $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

   Доказательство. $g \equiv 1$ в следствии 1. □

Замечание. Теорему и следствия называют ещё теоремами о средних. Почему?

Определение 14. $f \in R[a,b], a < b$

$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$ – интегральное среднее f на $[a,b]$

Если возьмём равномерное разбиение $[a,b]$, то $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \dfrac{b-a}{n}$

То есть $\dfrac{\sigma_n}{b-a} \to \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$, где $\dfrac{\sigma_n}{b-a}$ – среднее арифметическое значений функции в точках ξ_k

Определение 15. $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток (может быть и лучом), $f : E \to \mathbb{R}$, f – интегрируема на каждом отрезке, содержащемся в E. $a \in E$.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, x \in E$ – интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 13 (Барроу, об интеграле с переменным верхним пределом). $E \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток, $f : E \to \mathbb{R}$, интегрируема на каждом отрезке из E, $a \in E$, $\Phi(x) = \int_a^x f, x \in E$. Тогда

1. $\Phi(x) \in C(E)$
2. Если f непрерывна в точке $x_0 \in E$, то Φ – дифференцируема в точке x_0, $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство.
1. Пусть $x_0 \in E$, подберем $\delta > 0[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap E = [A, B]$
$|f|$ на $[A, B]$ ограничена числом M. $\Delta x : x_0 + \Delta x \in [A, B]$
$|\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)| = \left|\int_a^{x_0+\Delta x} f - \int_a^{x_0} f\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f|\right| \leqslant |\Delta x| \cdot M \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$
2. Проверим, что $\dfrac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x_0)$
Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0 : \forall t : |t - x_0| < \delta\ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (по непрерывности.)
$\left|\dfrac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\dfrac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = f(x_0)\right| =$
$\left|\dfrac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| <$
$< \dfrac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon$, $k = \int_a^b k \cdot \dfrac{1}{b-a}$

□

Пример. $\Phi(x) = \int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt, x > 1$
$\Phi'(x) = \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow \mathrm{Si}'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Упражнение. $\int \mathrm{Si}(x)\,dx = ?$

Следствие. Функция, непрерывная на промежутке имеет на нём первообразную. Ей является интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 16. $\psi(x) = \int_x^a f$ (Условия на f и a прежние) – интеграл с переменным нижним пределом.
$\Rightarrow \psi'(x) = -f(x)$ (Если f непрерывна).

Теорема 14 (Формула Ньютона-Лейбница). $f \in R[a, b], F-$ первообразная f на $[a, b]$. Тогда:
$\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$:
$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$
По теореме Лагранжа $\exists \xi_{k,n} \in (x_k, x_{k+1})$
$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_{k,n})(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_{k,n})\Delta x_k$
$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k,n})\Delta x_k = \lim(F(b) - F(a)) = F(b) - F(a)$ □

Замечание. $\int_a^b f = F\Big|_a^b$
$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^b$ – двойная подстановка.

Замечание. $G(x) = F(x) + C$ – тоже первообразная.
$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

Пример. $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Пример. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$ - чушь!

1. $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ – не везде на $[-1, 1]$
2. $\frac{1}{x^2}$ не интегрируема на $[-1; 1]$, т.к. не ограничена.

Замечание. Обобщение теоремы.
$f \in R[a; b], F \in C[a, b]$, F – первообразная f на $[a, b]$ за исключением некоторого конечного числа точек.
Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство. Пусть $\alpha_0 = a, \alpha_m = b$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ – все точки на (a, b), в которых $F' \neq f$
$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{m-1}(F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)) = F(b) - F(a)$.
(Рассмотрим $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\alpha_k+\varepsilon}^{\alpha_{k+1}-\varepsilon} f = \lim_{\varepsilon\to 0+}(F(\alpha_{k+1} - \varepsilon) - F(\alpha_k + a)) = F(\alpha_{k+1}) - F(\alpha_k)$) □

Замечание. Без непрерывности F не получится: на $[-1, 1]$

$F(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}, f(x) = 0$

$0 = \int_{-1}^{1} f \neq F\Big|_{-1}^{1} = 2$

Замечание. $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
F дифференцируема, F' интегрируема.

Замечание. $F' \in R[a,b]$ – существенно.

$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos\frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

F' не ограничена, а значит не интегрируема.

Замечание. Интегрируемость $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ первообразной.
$\not\Rightarrow$ $\operatorname{sign} x$ интегрируема на [-1. 1], но первообразной нет.
$\not\Leftarrow$ Предыдущее замечание.

Теорема 15 (Интегрирование по частям в определенном интеграле.). f, g – дифференцируемы на $[a,b]$, $f', g' \in R[a,b]$. Тогда
$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$

Доказательство. f, g– дифференцируемы $\Rightarrow$ непрерывны $\Rightarrow$ интегрируемы.
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f \in R[a,b]$
$\int_a^b (fg)' = fg\Big|_a^b$
$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + g'f)$ $\square$

Замечание. $\int_a^b f\,dg = fg\Big|_a^b - \int_a^b g\,df$
$dg(x) = g'(x)\,dx$

Теорема 16 (Замена переменной в определенном интеграле). $\varphi : [\alpha, \beta] \to [A, B]$, дифференцируема на $[\alpha, \beta], \varphi' \in R[\alpha, \beta]$

$f \in C[A;B]$. Тогда
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\cdot\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

Доказательство. $f(\varphi) \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow f(\varphi) \in R[a,b] \Rightarrow f(\varphi)\cdot\varphi' \in R[a,b]$
Пусть F - первообразная f на $[A,B] \Rightarrow F(\varphi)$ – первообразная $f(\varphi)\cdot\varphi'$ на $[\alpha,\beta]$
$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\cdot\varphi' = F(\varphi)\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$ □

Упражнение. Пусть f четная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a = 2\int_0^a f$
Пусть f нечетная функция. Доказать, что $\int_{-a}^a f = 0$

Теорема 17 (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме). $n \in \mathbb{N}_0$,
$f \in C^{n+1}\langle A;B\rangle, a, x \in \langle A;B\rangle$. Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$

Доказательство. По индукции:
База: $n = 0 : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ (Формула Ньютона-Лейбница)
Пусть верно для $n-1$. Докажем для n.
$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$. Проинтегрируем остаток по частям: $u = f^{(n)}(t), u' = f^{(n+1)}(t), v' = (x-t)^{n-1}, v = \frac{(x-t)^n}{n}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\left(-f^{(n)}(t)\cdot\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x \frac{f^{n+1}(t)(x-t)^n}{n}\,dt\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$
□

Замечание. $\exists c :\in (a,x)\ \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^x (x-t)^m\,dt = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$
(Т.е. остаток в форме Лагранжа следует отсюда)

Последовательность $\{x_n\} : x_i \in \mathbb{Q}, x_n \to \pi$

Лемма 1. $m \in \mathbb{N}_0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot \sin x \, dx = -\sin^{m-1} \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x \, dx =$

$= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$

$I_m = (m-1) \cdot (I_{m-2} - I_m) \Rightarrow I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \dfrac{\pi}{2}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$I_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, m - \text{ четно} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 1, m - \text{ нечётно} \end{cases}$

Упражнение. $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ - непрерывна.
Доказать, что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, dx$

Теорема 18 (Формула Валлиса). $\pi = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$

Доказательство. $\forall x \in (0; \dfrac{\pi}{2}) \quad \sin x \in (0; 1)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{2n+1} < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$

$\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$

$< \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{(2n-2)!! \cdot (2n)!!)}{((2n-1)!!)^2}$

$\dfrac{1}{2n+1} \cdot \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 < \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{1}{2n} \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$

$x_n = \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \Rightarrow \pi < x_n < \dfrac{2n+1}{2n} \pi, \Rightarrow \; x_n \to \pi$ □

Теорема 19 (Вторая теорема о среднем для интегралов, Бонне). $f \in C[a, b]$, $g \in C^1[a, b], g$ монотонна на $[a, b]$. Тогда $\exists c \in [a, b] :$

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f$$

Доказательство. $F(x) = \int_a^x f, \quad F' = f, F(a) = 0$

$$\int_a^b fg = Fg\Big|_a^b - \int_a^b - \int_a^b Fg' = g(b)\int_a^b f - \int_a^b Fg' =$$
$$= g(b)\int_a^b f - \int_a^c f \cdot (g(b) - g(a)) = g(a)\int_a^c f + g(b)\int_c^b f$$

□

Упражнение. Оценить $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$

1. По первой теореме о среднем.
2. По второй теореме о среднем.

1.7. Интегральные неравенства

Теорема 20 (Неравенство Йенсена). f – выпукла и непрерывна на $\langle A, B\rangle$, $\varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle$ – непрерывна, $\lambda : [a, b] \to [0, +\infty)$ – непрерывна, $\int_a^b \lambda = 1$. Тогда

$$f\left(\int_a^b \lambda\varphi\right) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot f(\varphi)$$

Доказательство. Обозначим $c = \int_a^b \lambda\varphi, \quad E = \{x \in [a, b] : \lambda(x) > 0\}$,
$m = \inf\limits_E \varphi, \quad M = \sup\limits_E \varphi$ (m и M конечны по теореме Вейерштрасса)
Если m = M, то есть φ постоянна на E, то $c = m$ и обе части неравенства равны $f(m)$.
Пусть $m < M$. Тогда $c \in (m, M)$ и, следовательно, $c \in (A, B)$. Функция f имеет в точке c опорную прямую; пусть она задается уравнением $y = \alpha x + \beta$. По определению опорной прямой $f(c) = \alpha c + \beta$ и $f(t) \geqslant \alpha t + \beta$ при всех $t \in \langle A, B\rangle$. Поэтому

$$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha\int_a^b \lambda\varphi + \beta\int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda \cdot (\alpha\varphi + \beta) \leqslant \int_a^b \lambda \cdot (f \circ \varphi)$$

□

Замечание. Строгое неравенство, если f строго выпукла и $\varphi \not\equiv \mathrm{const}$.

Теорема 21 (Неравенство Гельдера). $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$. Тогда

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Пусть $x_k = \frac{k(b-a)}{n} + a, \xi_k = x_k$. Обозначим $a_k = f(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k)(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a_k b_k = f(x_k)g(x_k)\Delta x_k$. Тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)g(x_k)\Delta x_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Выполним предельный переход:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)\frac{1}{p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)\frac{1}{q}$$

□

Следствие (Неравенство Коши-Буняковского). $f, g \in C[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$

Теорема 22 (Неравенство Минковского). $f, g \in C[a,b], p \geqslant 1$.

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Определение 17. Пусть $f \in C[a,b]$.

1. Величина
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$
называется интегральным средним арифметическим функции f на $[a,b]$.
2. Если $f > 0$, то величина
$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$$
называется интегральным средним геометрическим функции f на $[a,b]$.

Замечание. Интегральное среднее геометрическое есть пределы при $n \to \infty$ последовательности

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k)\right) = \exp\left(\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} \ln f(x_k)\Delta x_k\right)$$

при $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$.

Теорема 23 (Об интегральных средних). $f \in C[a,b], f > 0$. Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Доказательство. Предельный переход в неравенстве для сумм, либо применить неравенство Йенсена для $\ln x$. □

1.8. Несобственные интегралы

Определение 18. f локально интегрируема (по Риману) на промежутке E, если она интегрируема на каждом отрезке из E.

Замечание. Непрерывность влечет локальную интегрируемость.

Определение 19. Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a,b]$. Тогда $\int_a^{\to b} f$ – несобственный интеграл.

$$\lim_{t\to b-}\int_a^t f = \int_a^{\to b} f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 20. Несобственный интеграл называется сходящимся, если из $\mathbb{R}$.

Определение 21. Аналогично, для $-\infty \leqslant a < b < +\infty, f \in R_{loc}(a,b]$

$$\int_{\to a}^b f = \lim_{t\to a+}\int_t^b f$$

если предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема 24 (Критерий Больцано-Коши сходимости интегралов). Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a,b)$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a,b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b)\ \left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Phi(t) = \int_a^t f$. $\int_a^b$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{t\to b-}\Phi(t)$. Согласно критерию Больцано-Коши существования предела функции

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta \in (a,b) : \forall t_1, t_2 \in (\Delta, b)\ |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < \varepsilon$$

и по аддитивности интеграла $\Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f$. □

Замечание. Расходимость $\int_a^b f \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \Delta \in (a,b) \ \exists t_1, t_2 \in (\Delta, b) \ \left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| \geqslant \varepsilon$

Замечание. Запись:

$$\int_a^b f = \lim_{t\to b-} \int_a^t f = \lim_{t\to b-} (F(t) - F(a)) = F(b-) - F(a)$$

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty}, \alpha \neq 1 \\ \ln x\big|_1^{+\infty}, \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \\ +\infty, \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Пример. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty, \alpha \geqslant 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1. \end{cases}$

1.8.1. Свойства несобственного интеграла

Будем считать, что f локально интегрируема на рассматриваемых промежутках.

1. **Аддитивность по промежутку.** Если $\int_a^b f$ сходится, то $\forall c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b f$ тоже сходится и

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

   В обратную сторону, если при $c \in (a,b)$ интеграл $\int_c^b f$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f$.

   Доказательство. $\forall t \in (a,b)$ $\int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f$ – по аддитивности определенного интеграла. Переидем к пределу при $t \to b-$ предел левой части и правой части существует или не существует одновременно. □

2. Если $\int_a^b f$ сходится, то $\underbrace{\int_t^b f \xrightarrow[t\to b-]{} 0}_{\text{остаток интеграла}}$.

   Доказательство.

$$\int_t^b f = \int_a^b f - \int_a^t f \xrightarrow[t\to b-]{} \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

   □

3. **Линейность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Доказательство. Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных интегралов

$$\int_a^t (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^t g$$

□

Замечание. Если интеграл $\int_a^b f$ расходится, а интеграл $\int_a^b g$ сходится, то интеграл $\int_a^b (f+g)$ расходится. Действительно, если $f+g$ сходится, то сходится и интеграл от $f = (f+g)-f$ (?!).

4. **Монотонность несобственного интеграла.** Если интегралы $\int_a^b f, \int_a^b g$ существуют в $\overline{R}$, $f \leqslant g$ на $[a, b)$, то

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

Доказательство. Переидем к пределу в неравенстве для частичных пределов

$$\int_a^t f \leqslant \int_a^t g$$

□

Замечание. Аналогично, с помощью предельного перехода, на несобственные интегралы переносятся неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского.

5. **Интегрирование по частям в несобственном интеграле.** Пусть f, g дифференцируемы на $[a, b)$, $f', g' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Если два из этих трех пределов конечны, то третий предел также существует и конечен.

Доказательство. Устремим t к b слева в равенстве

$$\int_a^t fg' = fg\Big|_a^t - \int_a^t f'g$$

□

6. **Замена переменной в несобственном интеграле.** Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \to [A, B)$ – дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$, существует $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \in C[A, B)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$$

Опять же, если существует один из интегралов, то существует и другой.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_\alpha^t (f \circ \varphi)\varphi', \quad \psi(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f$$

По формуле замены переменной в собственном интеграле

$$\Phi(t) = \psi(\varphi(t))$$

1. Пусть $\exists \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = I \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что $\exists \int_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi' = I$, т.е. $\Phi(t) \xrightarrow[t \to \beta-]{} I$. Возьмем $\{t_n\} : t_n \to \beta, t_n < \beta$. Тогда $\varphi(t_n) \to \varphi(b-), \varphi(t_n) \in [A, B)$. Поэтому $\Phi(t_n) = \psi(\varphi(t_n)) \to I$. В силу произвольности выбора $\{t_n\}$, $\Phi(t) \to I$ при $t \to \beta-$.
2. Пусть существует интеграл $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = J \in \overline{R}$. Докажем, что интеграл $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f$ существует, и тогда по пункту 1 будет следовать, что он равен J. Если $\varphi(\beta-) \in [A, B)$, то интеграл собственный. Пусть $\varphi(\beta-) = B$. Возьмем $\{y_n\}, y_n \in [A, B), y_n \to B$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y_n \in [\varphi(\alpha), B)$. Тогда $\exists \gamma_n \in [\alpha, \beta) : \varphi(\gamma_n) = y_n$ (по теореме Больцано-Коши).
   Докажем, что $\gamma_n \to \beta$. Пусть $\beta' \in [\alpha, \beta)$. Т.к. $\max_{[\alpha,\beta']} \varphi < \beta$, а $\varphi(\gamma_n) \to B$, то, начиная с некоторого номера, $\gamma_n \in (\beta', \beta)$. Поэтому $\gamma_n \to \beta$, откуда $\psi(y_n) = \Phi(\gamma_n) \to J$.

□

Пример. $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t, \cos x \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$. Если $x = \pi$, то $t = +\infty$. Тогда

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot 2 + 1 - t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Замечание. $a < b \in \mathbb{R}$. Пусть $x = b - \frac{1}{t}$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}\, dt$$

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \cos x\, dx = \sin x\big|_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \sin x - \sin 1 \text{ — не существует}$$

1.8.2. Признаки сходимости несобственных интегралов

Лемма 2. $f \in R_{loc}[a,b), f \geqslant 0$. Тогда $\int_a^b f$ сходится $\Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f$ на $[a,b)$ ограничена сверху.

Доказательство. $F(t)$ возрастает на $[a,b)$ $\left(F(t_2) - \underset{t_1<t_2}{F(t_1)} = \int_{t_1}^{t_2} f \geqslant 0\right)$.

$\exists \lim\limits_{t\to b-} F(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F$ возрастает и F ограничена сверху. □

Замечание. Если $f \geqslant 0$, то $\int_a^b f \in \overline{R}$.

Теорема 25 (Признак сравнения). $f, g \in R_{loc}[a,b), f, g \geqslant 0$

$$f(x) = O(g(x)) \qquad \text{при } x \to b-$$

Тогда

1. Если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ сходится.
2. Если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ расходится.

Доказательство. 1. По определению O-большого найдутся такие $\Delta \in (a,b)$ и $K > 0$, что $f(x) \leqslant Kg(x)$ при всех $x \in [\Delta, b)$. Следовательно,

$$\int_\Delta^b f \leqslant K \int_\Delta^b g < +\infty$$

то есть остаток интеграла $\int_a^b f$ сходится, а тогда и сам интеграл $\int_a^b f$ сходится.

2. Если бы интеграл $\int_a^b g$ сходился, то по пункту 1 сходился бы и интеграл $\int_a^b f$.

□

Следствие (Признак сравнения в предельной форме). $f, g \in R_{loc}[a;b), f \geqslant 0, g > 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in [0;+\infty]$. Тогда

1. Если $l \in [0,+\infty)$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходится, то $\displaystyle\int_a^b f$ сходится
2. Если $l \in (0,+\infty]$ и $\displaystyle\int_a^b f$ сходится, то $\displaystyle\int_a^b g$ сходится
3. Если $l \in (0,+\infty)$, то $\displaystyle\int_a^b f$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходятся или расходятся одновременно

Доказательство. 1. $\dfrac{f}{g}$ ограничено в $(b-\varepsilon;b) \Rightarrow f(x) = O_b(g(x))$ при $x \to b- \Rightarrow$ по теореме $\displaystyle\int_a^b f$ сходится

2. Т.к. $l > 0$, то $f > 0$ в $(b - \varepsilon; b)$. Тогда поменяем f и g местами в п.1
3. Следует из пунктов 1 и 2.

$\square$

Следствие. Интегралы от неотрицательных эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha ln^7 x}$

Пример. Докажем, что $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ сходится $\not\Rightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

Доказательство. $E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}; k + \frac{1}{k^2(k+1)} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R} \backslash E \\ k, x = k \\ \text{линейно и непрерывном соединим точки}, x \in E \end{cases}.$$

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N \int_{k-\frac{1}{k^2(k+1)}}^{k+\frac{1}{k^2(k+1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} k \cdot \frac{2}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to\infty}{\to} 1$$

$\square$

Замечание. Можно построить пример с $g > 0$. $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x^2}$

1.9. Интегралы от знакопеременных функций

Определение 22. $-\infty < a < b \leqslant +\infty, f \in R_{loc}[a; b)$

$\displaystyle\int_a^b f$ сходится абсолютно, если сходится $\displaystyle\int_a^b |f|$

Замечание. Если $\displaystyle\int_a^b f$ и $\displaystyle\int_a^b g$ сходится абсолютно, то $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится абсолютно $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Доказательство. $|\alpha f + \beta g| \leqslant |\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|$ + признак сравнения для неотрицательных функций.

$\square$

Замечание. Если $\int_a^b f \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

Лемма 3. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a;b) \int_\Delta^b |f| < \varepsilon$
Тогда $\left|\int_\Delta^b f\right| < \int_\Delta^b |f| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^\Delta f + \int_\Delta^b f$ сходится по критерию Больцано-Коши. □

Определение 23.

$$x_+ = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad - \text{ положительная часть } x$$

$$x_- = \max\{-x, 0\} = \begin{cases} 0, x > 0 \\ -x, x \leqslant 0 \end{cases} \quad - \text{ отрицательная часть } x$$

$$x_+ - x_- = x \Rightarrow x_+ = \frac{|x| + x}{2}$$

$$x_+ + x_- = |x| \Rightarrow x_- = \frac{|x| - x}{2}$$

$0 \leqslant x_\pm \leqslant |x|$, $f_+ = \max\{f; 0\}$, $f_- = \max\{-f; 0\}$

Доказательство. $\int_a^b |f|$ сходится $\underset{0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|}{\Rightarrow} \int_a^b f_+$ и $\int_a^b f_-$ – сходятся $\Rightarrow$
$\underset{f = f_+ - f_-}{\Rightarrow} \int_a^b f$ сходится □

Замечание. Обратное утверждение к лемме неверно: $\int_a^b f$ сходится $\not\Rightarrow \int_a^b |f|$ сходится.

Определение 24. Если $\int_a^b f$ сходится, а $\int_a^b |f|$ расходится, то $\int_a^b f$ называют условно сходящимся.

Замечание. $\int_a^b f$ сходится абсолютно, $\int_a^b g$ сходится условно $\Rightarrow \int_a^b (f+g)$ сходится условно, т.к. $g = (f+g) - f$.

Теорема 26 (Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов). $f \in$

$C[a;b), g \in C^1[a;b], g$ монотонна.

1. **Признак Дирихле.** Если функция $F(t) = \int_a^t f$ ограничена, а $g(x) \xrightarrow[x\to b-]{} 0$, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.
2. **Признак Абеля.** Если интеграл $\int_a^b f$ сходится, а g ограничена, то интеграл $\int_a^b fg$ сходится.

Доказательство. 1. Проинтегрируем по частям:

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg\Big|_a^b - \int_a^b Fg'$$

Двойная подстановка обнуляется, поэтому сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла $\int_a^b Fg'$. Докажем, что $\int_a^b Fg'$ сходится абсолютно.

$$\int_a^b |Fg'| \leqslant \underset{|F|\leqslant K}{K} \int_a^b |g'| = K\left|\int_a^b g'\right| = K \cdot |g\Big|_a^b| = K|g(a)|$$

2. g ограничена и монотонна $\Rightarrow \alpha = \lim_{x\to b-} g(x)$
Функция $g - \alpha$ монотонна, $\xrightarrow[x\to b-]{} 0 \Rightarrow \int_a^b f(g-\alpha)$ сходится по признаку Дирихле. Поэтому интеграл $\int_a^b f(g-\alpha)$ сходится, а интеграл $\int_a^b fg$ сходится как сумма двух сходящихся:

$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g-\alpha) + \int_a^b f\cdot\alpha$$

□

Замечание. Можно ослабить условия: $f \in R_{loc}[a;b), g$ монотонна на $[a;b)$

Определение 25. v.p. $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f\right)$ – главное значение.

Пример.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2dx = +\infty$$

Пример. 1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\cdot\sin x\,dx, f(x) \geqslant 0.$

- Если $\int_1^{+\infty} f$ сходится, то $\int_1^{+\infty} f(x)\sin x dx$ сходится абсолютно.
  $0 \leqslant |f(x)\cdot \sin x| \leqslant |f(x)| = f(x)$

- Если $\int_1^{+\infty} f$ расходится
  $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

  1. $l = 0$ и f монотонна, то признак Дирихле и $\int_1^{+\infty} f(x)\sin x dx$ – сходится.
     Но: $\int_1^{+\infty} |f(x)\sin x| dx$ не сходится.
     $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
     $$\int_1^{\infty} f(x)|\sin x| dx \geqslant \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}f(x)dx}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}f(x)\cos 2x dx}_{\text{сходится}}$$
  2. $l > 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f\sin x dx$ расходится.
     $$\int_{a_k}^{b_k} f(x)\cdot\sin x dx \geqslant \frac{1}{2}\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\min\{f(a_k), f(b_k)\} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{\pi}{3}\cdot l = \varepsilon > 0$$

2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.
   $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно по признаку сравнения.
   $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится условно
   $\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin x dx$ расходится
3. Нельзя пользоваться эквивалентностью в случае знакопеременной функции.
   $\int_1^{\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} dx$ – расходится
   $f(x) \sim \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x\to\infty$ $\int_1^{\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ сходится.
   Выделим главную часть: $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sin^2 x}{x}+\dfrac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}+r(x)\right) = \underbrace{\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся}} +$
   $\underbrace{\dfrac{\sin^2 x}{x}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\dfrac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}}_{\text{сх-ся абс-но}} + \underbrace{\dfrac{\sin^4 x}{x^2}}_{\text{сх-ся абс.}} + |q(x)|, \quad |q(x)| \leqslant \dfrac{c}{x^2}$
   $\left(\dfrac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+r(t), t\to 0\right)$
4. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$
   При $x\to 0 \sin x \sim x$ и $\sin x > 0$ на $(0;1)$
   $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^{\alpha-1}}$
5. $\int_{-1}^1 \dfrac{dx}{x} = \int_{-1}^0\dfrac{dx}{x} + \int_0^1\dfrac{dx}{x}$ расходится. Но сходится в смысле главного значения.

Замечание. $\int_1^{+\infty} f \cdot g, f$ – периодична с периодом $T > 0, g$ – монотонна $\underset{x\to+\infty}{\to} 0$
Тогда

1. Если $\int_1^{+\infty} g$ сходится $\Rightarrow \int_1^{+\infty} fg$
2. Если $\int_1^{+\infty} g$ расходится, то $\left(\int_1^{+\infty} fg \text{ сходится } \Leftrightarrow \int_1^{1+T} f = 0\right)$

Доказательство. Упражнение. □

Следствие. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится
$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$ сходится

1.10. Длина, площадь и объём

1.10.1. Площадь

Определение 26. $\|x\|, x \in \mathbb{R}^n$ – длина вектора.

$$\|A - B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (A_i - B_i)^2}$$

Определение 27. Движение – отображение $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояния.

$$\|A - B\| = \|U(A) - U(B)\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^n$$

Определение 28. Площадь – функционал $S : P \to [0; +\infty)$, где $\{P\}$ – множество квадрируемых фигур из $\mathbb{R}^2$

Теорема 27 (Свойства площади)**.** 1. Аддитивность: P_1, P_2 – квадрируемы и $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. Тогда $P_1 \cup P_2$ – квадрируемая и
$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

2. Нормированность на прямоугольниках: площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab
3. Инвариантность относительно движений: $S(U(P)) = S(P)$
4. Монотонность: P, P_2 – квадрируемые, $P_1 \subset P$, тогда $S(P_1) \leqslant S(P)$

Доказательство. $P = P_1 \cup (P \backslash P_1)$, $P_1 \cap (P \backslash P_1) = \varnothing$. Тогда по аддитивности площади: $S(P) = S(P_1) + S(P \backslash P_1) \geqslant S(P_1)$ □

5. Если P содержится в некотором отрезке, то $S(p) = 0$

Доказательство. P можно поместить в прямоугольник сколь угодно малой площади. □

6. Усиленная аддитивность: P_1 и P_2 пересекаются по множеству нулевой площади. Тогда $S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

Доказательство. Возьмем $P = P_1 \cap P_2 \Rightarrow S(P_1) = S(P) + S(P_1 \backslash P) = S(P_1 \backslash P)$
$S(P_1 \cup P_2) = S(P_1 \backslash P) + S(P_2) = S(P_1) + S(P_2)$ □

1.10.2. Объём

Определение 29. Объём – функционал $V : \{T\} \to [0; +\infty)$, где $\{T\}$ – класс кубируемых тел

Теорема 28 (Свойства объёма).

1. Аддитивность: T_1, T_2 – кубируемые, $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, тогда $T_1 \cup T_2$ – кубируемое, $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$
2. Нормированность на прямоугольных параллелепипедах. Объём параллелепипеда: $a \times b \times c = abc$
3. Инвариантность относительно движения: $V(U(T)) = V(T)$
4. Монотонность: T_1, T – кубируемые, $T_1 \subset T$, тогда $V(T_1) \leqslant V(T)$
5. Если тело T содержится в некотором прямоугольнике, то его объём равен нулю.
6. Усиленная аддитивность. T_1, T_2 – кубируемые, $T_1 \cap T_2$ нулевого объёма, тогда $V(T_1 \cup T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

Определение 30. $P \subset \mathbb{R}^2, h \geqslant 0$. Множество $Q = P \times [0; h]$ называется прямым цилиндром с основанием P и высотой h.

Определение 31. $T \subset \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}$
$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$ – сечение

1.10.3. Длина пути

Определение 32. $\gamma : [a; b] \to R^m, \gamma -$ непрерывное отображение
$\gamma_i, \quad i = 1, ..., m$ – i-тая координатная функция.
Если все γ_i непрерывны, то отображение γ непрерывно.

Определение 33. Путь в R^m – $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m) : [a,b] \to R^m$
$\gamma(a)$ – начало пути
$\gamma(b)$ – конец пути
$\gamma* = \gamma([a,b])$ – носитель пути. В каком-то смысле можно считать, что это изображение пути.

Пример. Полуокружность:
$\gamma^1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), t \in [-1,1]$, пробегаем дугу слева направо.
$\gamma^2(t) = (-\cos t, \sin t), t \in [0,\pi]$
$\gamma^3(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0,\pi]$
$\gamma^4(t) = (\cos t, |\sin t|), t \in [-\pi,\pi]$. пробежали дугу туда и обратно.
Все четыре отображения разные, но носитель пути у всех одинаковый.

Определение 34. $\gamma(a) = \gamma(b)$ – замкнутый путь

Определение 35. Если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ только при $t_1 = t_2$ или $t_1, t_2 \in \{a; b\}$, то путь несамопересекающийся (простой)

Определение 36. Если $\gamma_i \in C^r[a;b], i = 1, ..., m$, то путь γ гладкости r, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Определение 37. Если $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ – противоположный путь.

Упражнение. Посмотреть на кривые Пеано.

Определение 38. $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^m$, $\widetilde{\gamma} : [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}^m$ – эквивалентные, если существует строго возрастающая функция и $[a;b] \overset{\text{на}}{\to} [\alpha;\beta] : \gamma = \widetilde{\gamma} \circ u$.
Это отношение эквивалентности:

1. $\gamma \sim \gamma, \quad u = id[a;b]$
2. $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow \gamma \sim \widetilde{\gamma} \quad u^{-1}$ – обратное отображение
3. $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3 \quad u_1 \circ u_2$

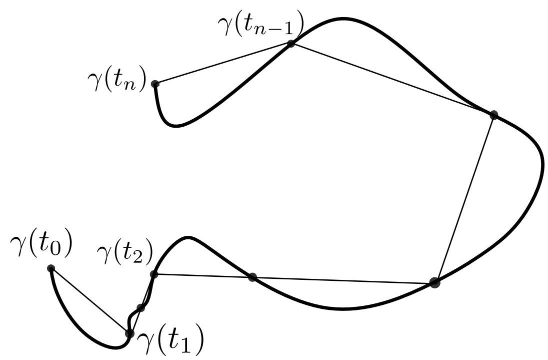
Определение 39. Класс эквивалентных путей – кривая
Каждый представитель класса – параметризация кривой
Кривая называется r-гладкой, если у неё найдется гладкая параметризация

1.10.4. Длина кривой

Определение 40. $\gamma \in C([a;b] \to \mathbb{R}^m)$– путь в R^m

1. Длина кривой, соединяющей точки A и B не меньше $\|AB\|$
2. Нужна аддитивность: $a < c < b$, $\gamma^1 = \gamma\big|_{[a;c]}, \gamma^2 = \gamma\big|_{[c;b]} \Rightarrow S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$

Пример. $\tau = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ – дробление $[a, b]$
l_τ – вписанная ломаная.



Определение 41. γ – путь в $\mathbb{R}^m$. Длиной пути γ называется $S_\gamma = \sup\limits_\tau l_\tau$

Определение 42. Путь с $S_\gamma < +\infty$ – спрямляемый.

Лемма 4. Длины эквивалентных путей равны.

Доказательство. $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \circ u, \quad u : [a;b] \overset{\text{на}}{\to} [\alpha;\beta]$ строго возрастает
$\tau = \{t_k\}_{k=1}^n$ – дробление $[a;b]$
$\widetilde{t}_k = u(t_k), \widetilde{\tau} = \{\widetilde{t}_k\}$ – дробление $[\alpha, \beta]$
$l_\tau = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \underbrace{\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|}_{\text{длина отрезка}} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \|\widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_{k+1}) - \widetilde{t}_k\| = l_{\widetilde{\tau}}$
$l_\tau = l_{\widetilde{\tau}} \leqslant S_{\widetilde{\gamma}} \Rightarrow S_\gamma \leqslant S_{\widetilde{\gamma}}$
Поменяем: γ и $\widetilde{\gamma}$ местами $\Rightarrow S_{\widetilde{\gamma}} \leqslant S_\gamma$ □

Замечание. Противоположные пути имеют одинаковую длину.

Лемма 5 (Аддитивность длины пути). $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}, a < c < b$
$\gamma^1 = \gamma\big|_{[a;c]}, \gamma^2 = \gamma\big|_{[c;b]}$
$S_\gamma = S_{\gamma^1} + S_{\gamma^2}$

Доказательство. Обозначим $S_1 = S_{\gamma^1}, S_2 = S_{\gamma^2}$. Возьмём дробления τ_1 и τ_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$; тогда $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ – дробление $[a,b]$. Построим по τ_1 и τ_2 ломаные, вписанные в γ^1 и γ^2, и обозачим через l_1 и l_2 их длины. Тогда $l_1 + l_2 = l_\tau \leqslant s_\gamma$. Последовательно переходя в левой части к супремуму по всевозможным дроблениям τ_1 и τ_2, получаем

$$s_1 + l_2 \leqslant s_\gamma,$$

$$s_1 + s_2 \leqslant s_\gamma.$$

Докажем противоположное неравенство

$$s_\gamma \leqslant s_1 + s_2.$$

Возьмём дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ и докажем, что $l_\tau \leqslant s_1 + s_2$; отсюда и будет следовать требуемое. Если $c \in \tau$, то $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 и τ_2 – дробления $[a,c]$ и $[c,b]$. Поэтому

$$l_\tau = l_1 + l_2 \leqslant s_1 + s_2.$$

Если $c \notin \tau$, то добавим c в число точек дробления, то есть положим $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. Пусть $c \in (t_\nu, t_{\nu+1})$. По неравенству треугольника

$$l_\tau = \sum_{k=0}^{\nu-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(t_\nu)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\nu=1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| + |\gamma(c) - \gamma(t_\nu)| + |\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(c)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = l_{\tau^*}$$

По доказанному

$$l_\tau \leqslant l_{\tau^*} \leqslant s_1 + s_2$$

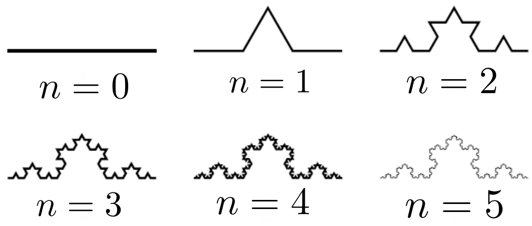
□

Определение 43. Длина кривой – длина какой-то из её параметризаций

Пример. Пример ограниченной, но неспрямляемой кривой: кривая Коха. Длины:

1. $n = 1: \ \dfrac{1}{3} \cdot 4$
2. $n = 2: \ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$
3. $n = 3: \ \left(\dfrac{4}{3}\right)^3$

1.10.5. Приложения интеграла Римана



Определение 44. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$
$Q_f\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a; b], y \in [0; f(x)]\}$ – подграфик
Если $f \in C[a; b]$, то Q_f называют криволинейной трапеция

Теорема 29. Пусть $f \in R[a; b]$. Тогда Q_f квадрируема

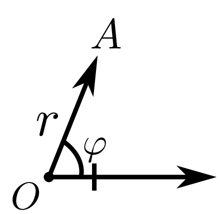
Доказательство. Без доказательства □

Замечание. Суммы Дарбу s_τ, S_τ
$\forall \tau \quad s_\tau \leqslant S(Q_f) \leqslant S_\tau$
Вспомним, что $\sup\limits_{\tau} S_\tau = \inf\limits_{\tau} S_\tau$
$\Rightarrow S(Q_f) = \int_a^b f dx$

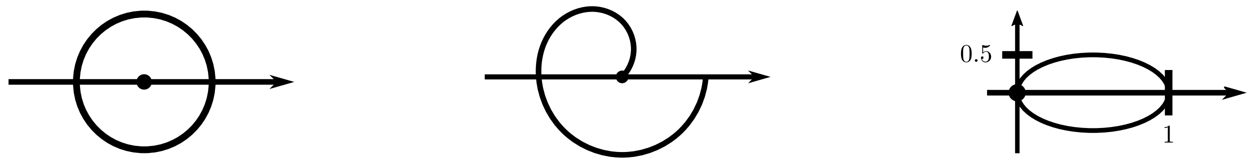
Замечание. $S(Q_f) = -\int_a^b f$

Пример. Площадь эллипса: $E = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}, a, b > 0$
$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, x \in [0; a]$
$S_E = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 t\, dt = 4ba \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ba$

1.11. Полярные координаты



Чтобы была взаимная однозначность, можно считать, что $\varphi \in [0, 2\pi]$. Можно обобщать на $r \in \mathbb{R}$, а не только $\mathbb{R}_+$.

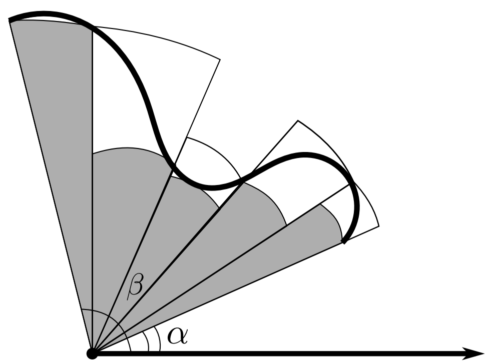


(a) $r(\varphi) = 1$ (b) $r(\varphi) = \varphi$ (c) $r(\varphi) = \cos\varphi$

Рис. 1: Примеры функций в полярных координатах

1.11.1. Вычисление площади в полярных координатах

$r(\varphi) : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}, \tau = \{\psi_k\}$ – разбиение $[\varphi_1, \varphi_2]$.



Площадь сектора равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$. Обозначим

$$s_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \min_{\varphi\in[\psi_k,\psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$
$$S_\tau = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\psi_k \cdot \max_{\varphi\in[\psi_k,\psi_{k+1}]} r^2(\varphi)$$

Тогда

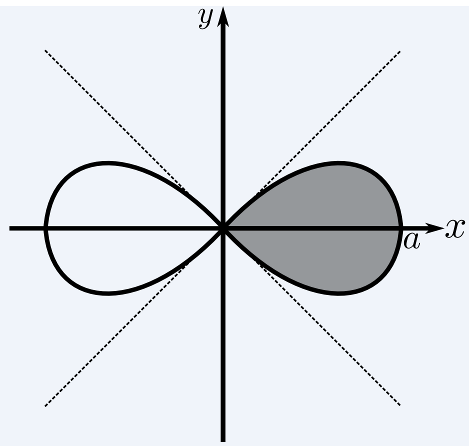
$$s_\tau \leqslant S(Q) \leqslant S_\tau$$

Если $r^2(\varphi) \in R[\varphi_1, \varphi_2]$, то $\sup_\tau s_\tau = \inf_\tau S_\tau = S(Q)$. Значит, искомая площадь равна:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

Пример. Найдем площадь S правого лепестка **лемнискаты Бернулли**

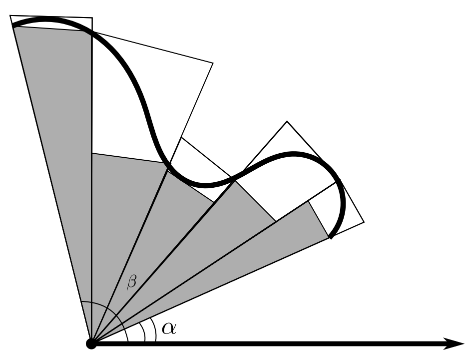
$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad a > 0$$



$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cdot 2\cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2}\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

Упражнение. Посчитать площадь правого лепестка лемниската Бернулли.

Замечание. Можно было приближать не секторами, а треугольниками.



$$\frac{1}{2}\min_{\varphi\in[\psi_k,\psi_{k+1}]} r^2(\varphi)\sin\Delta\psi_k$$

В данном случае, нельзя перейти к эквивалентным. Тогда

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} \leqslant \sin\alpha \leqslant \alpha$$

1.11.2. Вычисление объемов

T – кубируемое.

- Существует отрезок $[a,b]$ такой, что $T(x) = \varnothing$ $\forall x \notin [a,b]$
- $\forall x \in [a,b]$ $T(x)$ – квадрируемая фигура.

$\tau = \{x_k\}$ – разбиение $[a,b]$. Возьмем цилиндры с $h = \Delta x_k$, основаниями $\min\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} S(x)$ и

$\max\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} S(x)$. Тогда

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Пример. Найдем объем V эллипсоида

$$D = \left\{(x,y,z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}, \qquad a,b,c > 0$$

Если $x \notin [-a,a]$, то $D(x) = \varnothing$. Если $x = \pm a$, то $D(x) = \{(0,0)\}$. Если $x \in (-a,a)$, то

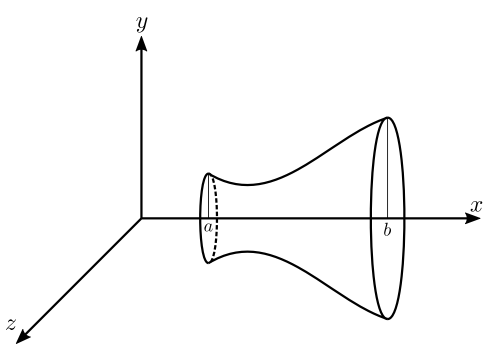
$$D(x) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 - \frac{x^2}{a^2}\right\}$$

есть эллипс с полуосями $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Площадь эллипса вычисляется по формуле: $S(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Отсюда

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=0}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Замечание. Пусть $f : [a,b] \to [0,+\infty), T_f$ – тело, получающееся вращением подграфика функции f вокруг оси OX. Тело T_f задается равенством

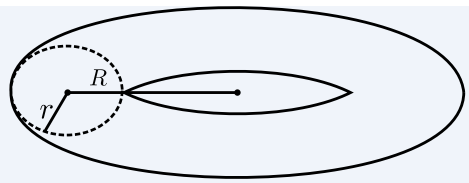
$$T_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\right\}$$



Замечание. Пусть $f \in C[a,b], f \geqslant 0$. Для тела вращения T_f при каждом $x \in [a,b]$ сечение есть круг радиуса $f(x)$, поэтому $S(x) = \pi f^2(x)$. Значит

$$V(T_f) = \pi \int_a^b f^2$$

Пример. Найдем объем V_T тора – тела, образованного вращением круга $\{(x,y) : x^2 + (y-R)^2 \leqslant r^2\}$ $\quad (0 < r < R)$ вокруг оси OX.



Тор представляется в виде разности тел вращения подграфиков функций, графики которых – верхняя и нижняя полуокружности, то есть функции

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad x \in [-r, r]$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_T &= \pi \int_{-r}^{r} f_1^2 - \pi \int_{-r}^{r} f_2^2 = \\ &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right) dx = \\ &= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

Замечание. Вокруг OY вращаем $y = f(x)$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

1.11.3. Длина кривой

Если $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$ – путь в $\mathbb{R}^m$, $\gamma_i \in C^1[a,b], \gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', ..., \gamma_m')$. По определению евклидовой длины

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'^2}$$

Теорема 30 (Длина гладкого пути). Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ – гладкий путь. Тогда γ спрямляем и

$$s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$$

Доказательство. 1. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Пусть дробление $\eta = \{u_k\}_{k=0}^n$ отрезка Δ. Тогда

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(u_{k+1}) - \gamma(u_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k))^2}$$

По формуле Лагранжа при каждых i и k найдется такая точка $c_{ik} \in (u_k, u_{k+1})$, что

$$\gamma_i(u_{k+1}) - \gamma_i(u_k) = \gamma_i'(c_{ik}) \Delta u_k$$

Поэтому

$$l_\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i'^2(c_{ik})} \cdot \Delta u_k$$

Обозначим

$$M_\Delta^{(i)} = \max_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|, \qquad m_\Delta^{(i)} = \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'^2(t)|$$

$$M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2}, \qquad m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2}$$

Тогда

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leqslant l_\eta \leqslant M_\Delta(\beta - \alpha)$$

Переходя к супремуму по всем дроблениям, мы получим

$$m_\Delta(\beta - \alpha) \leqslant s_{\gamma|_\Delta} \leqslant M_\Delta(\beta - \alpha)$$

В частности, при $\Delta = [a, b]$, отсюда следует, что путь γ спрямляем.

2. Возьмем дробление $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ и обозначим

$$m_k = m_{[t_k, t_{k+1}]}, \qquad M_k = M_{[t_k, t_{k+1}]}$$

По доказанному

$$m_k \Delta t_k \leqslant s_{\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}} \leqslant M_k \Delta t_k$$

Кроме того, при всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$m_k \leqslant \|\gamma'(t)\| \leqslant M_k$$

и поэтому

$$m_k \Delta t_k \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'\| \leqslant M_k \Delta t_k$$

Складывая неравенства и пользуясь аддитивностью длины пути и интеграла, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leqslant s_\gamma \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k \leqslant \int_a^b \|\gamma'\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k$$

Докажем, что для всех дроблений между левой и правой суммами лежит лишь одно число. Суммы в левой и правой части не обязаны быть интегральными для $\|\gamma'\|$, поэтому оценим разность между ними непосредственно. Если $M_\Delta + m_\Delta \neq 0$, то

$$M_\Delta - m_\Delta = \frac{M_\Delta^2 - m_\Delta^2}{M_\Delta + m_\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\left(M_\Delta^{(i)}\right)^2 - \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2\right)}{M_\Delta + m_\Delta} =$$
$$= \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)}\right) \cdot \frac{M_\Delta^{(i)} + m_\Delta^{(i)}}{M_\Delta + m_\Delta} \leqslant \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)} - m_\Delta^{(i)}\right)$$

Если же $M_\Delta = m_\Delta = 0$, то доказанное неравенство очевидно.
Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора все функции $|\gamma_i'|$ равномерно непрерывны на $[a, b]$. Поэтому для каждого $i = 1, \dots, m$ найдется такое $\delta_i > 0$, что

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta_i \Rightarrow \left||\gamma_i'(x)| - |\gamma_i'(y)|\right| < \frac{\varepsilon}{m(b-a)}$$

Положим $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \delta_i$. Для любого разбиения с рангом меньше, чем δ $|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому

$$\left|s_\gamma - \int_a^b \|\gamma'\|\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon$$

Так как ε произвольно, то $s_\gamma = \int_a^b \|\gamma'\|$.

□

Замечание. По аддитивности эта теорема распространяется на кусочно-гладкие пути.

Замечание. Запишем частный случай теоремы 1 при $m = 2$. Пусть $\gamma = (x(t), y(t)) \in C^1([a, b] \to \mathbb{R}^2)$

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Следствие. $y = f(x) \in C^1[a, b]$. Тогда график спрямляем и

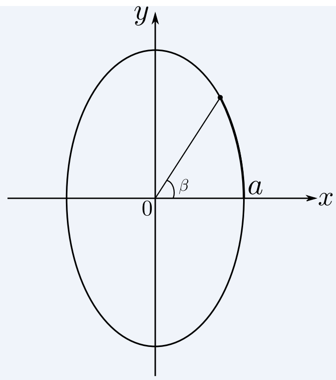
$$S_{\Gamma_f} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

График f – это путь

$$\Gamma_f(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b]$$

Пример. Длина дуги эллипса.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, \beta]$$



$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^\beta \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^\beta \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2 t}\, dt = b \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt
\end{aligned}
$$

Величина $\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ называется **эксцентриситетом** эллипса. Интеграл

$$E(\varepsilon, \beta) = \int_0^\beta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt$$

называется **эллиптическим интегралом второго рода**.

Замечание. Эллиптическим интегралом первого рода называется интеграл

$$K(\varepsilon, \beta) \int_0^\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}}\, dt$$

1.12. Функции ограниченной вариации

Определение 45. Величина

$$\mathop{V}_a^b f = \sup_\tau \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

называется полной вариацией f на $[a, b]$.
Если $V_a^b f < +\infty$, то f называется функцией **ограниченной вариации** на отрезке $[a, b]$. Множество всех функций ограниченной вариации на $[a, b]$ обозначается $V[a, b]$.

Теорема 31 (Свойства). 1. Вариация аддитивна: если $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < c < b$, то

$$\mathop{V}_a^b = \mathop{V}_a^c + \mathop{V}_c^b$$

2. Если f является кусочно-гладкой на $[a,b]$, то

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = \int_a^b |f'|$$

3. Вариация монотонна: если $f : [a,b] \to \mathbb{R}, [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, то

$$\mathop{V}_{\alpha}^{\beta} = \mathop{V}_{a}^{b} f$$

Вариацию можно определить и для функция, заданных на промежутке произвольного типа. Если $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, то

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = \sup_{[\alpha,\beta]\subset\langle a,b\rangle} \mathop{V}_{\alpha}^{\beta} f$$

4. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$. Тогда γ спрямляем в том и только том случае, когда $\gamma_i \in V[a,b]$ при всех $i = 1, \ldots, m$.
5. Если f монотонна на $[a,b]$, то $f \in V[a,b]$

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = |f(b) - f(a)|$$

6. Если $f \in V[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$.

Доказательство. Докажем свойства 3, 4, 5 и 6.
3. По аддитивности

$$\mathop{V}_{a}^{b} f = \mathop{V}_{a}^{\alpha} + \mathop{V}_{\alpha}^{\beta} + \mathop{V}_{\beta}^{b} \geqslant \mathop{V}_{\alpha}^{\beta} f$$

4. Доказательство следует из двусторонней оценки

$$|\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)| \leqslant \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k)|$$

5. Для любого дробления

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))\right| = |f(b) - f(a)|$$

6. При всех $x \in [a,b]$

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant |f(a)| + \mathop{V}_{a}^{b} f$$

□

Теорема 32 (Арифметические действия над функциями ограниченной вариации)**.** Пусть $f, g \in V[a,b]$. Тогда

1. $f + g \in V[a,b]$

2. $fg \in V[a,b]$
3. $\alpha f \in V[a,b]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
4. $|f| \in V[a,b]$
5. если $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0$, то $\frac{f}{g} \in V[a,b]$

Доказательство. Обозначим $\Delta_k f = f(x_{k+1}) - f(x_k)$

1. Складывая по всем k неравенства
$$|\Delta_k(f+g)| \leqslant |\Delta_k f| + |\Delta_k g|$$
получим
$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k(f+g)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k f| + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k g| \leqslant \mathop{V}_a^b + \mathop{V}_a^b g$$
Переходя в левой части к супремуму по всем дроблениям, получаем, что
$$\mathop{V}_a^b(f+g) \leqslant \mathop{V}_a^b f + \mathop{V}_a^b g$$
2. По свойству 6 функции f и g ограничены; пусть $|f|$ ограничена числом K, а $|g|$ – числом L. Тогда
$$|\Delta_k(fg)| \leqslant L|\Delta_k f| + K|\Delta_k g|$$
Складывая эти неравенства и переходя к супремуму, получим
$$\mathop{V}_a^b fg \leqslant L\mathop{V}_a^b f + K\mathop{V}_a^b g$$
3. Утверждение для αf следует из 2, если взять в качестве g функцию, тождественно равную α.
4. Аналогично, из неравенств
$$|\Delta_k|f|| \leqslant |\Delta_k f|$$
сложив и перейдя к супремуму, вытекает, что
$$\mathop{V}_a^b |f| \leqslant \mathop{V}_a^b f$$
5. Достаточно доказать, что $\frac{1}{g} \in V[a,b]$, а потом воспользоваться утверждением 2. Пусть $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Тогда
$$\left|\Delta_k \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{\Delta_k g}{g(x_k)g(x_{k+1})}\right| \leqslant \frac{|\Delta_k g|}{m^2}$$
откуда
$$\mathop{V}_a^b \frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{m^2}\mathop{V}_a^b g$$

$\square$

Теорема 33 (Характеристика функций ограниченной вариации). Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in V[a,b]$ в том и только том случае, когда f представляется в виде разности двух возрастающих на $[a,b]$ функций.

Доказательство. Достаточность очевидна из свойства 5 и предыдущей теоремы. Докажем необходимость. Пусть

$$g(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f, \quad x \in [a,b]; \qquad h = g - f$$

Если $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то по аддитивности

$$g(x_2) - g(x_1) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f \geqslant 0,$$
$$h(x_2) - h(x_1) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geqslant 0$$

то есть функции g и h возрастают. □

Следствие. $V[a,b] \subset R[a,b]$

Доказательство. Действительно, монотонная функция интегрируема и разность интегрируемых функций интегрируема. □

Следствие. Функция ограниченной вариации не может иметь разрывов второго рода.

Доказательство. Это следует из теоремы 33 и из того, что монотонная на отрезке функция не может иметь разрывов второго рода. □

Следствие. Ни один из классов $V[a,b]$ и $C[a,b]$ не содержится в другом.

Доказательство. Так как существуют разрывные монотонные функции, то $V[a,b] \not\subset C[a,b]$ Приведем пример непрерывной функции, вариация которой бесконечна. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Тогда $f \in C[0,1]$. Обозначим $x_k = \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$. При этом

$$f(x_k) = \frac{(-1)^k}{k}, \qquad |f(x_k) - f(x_{k+1})| = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим дробление: $0 < x_n < \ldots < x_1 = 1$ (для удобства точки дробления замурованы в порядке убывания). Сумма из определения вариации равна

$$\sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_n) - f(0)| = -1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Докажем, что последовательность **гармонических** сумм

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

не ограничена сверху. При $m \in \mathbb{N}$ оценим сумму с номером 2^m снизу. Для этого сгруппируем слагаемые, а затем оценим сумму в каждой группе как количество слагаемых, умноженное на самое малое слагаемое:

$$\begin{aligned} H_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Поэтому $f \notin V[0,1]$ $\square$

Раздел #2: Ряды

Определение 46. Рядами называется сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

где $\{a_k\}$ – последовательность из $\mathbb{R}$ (из $\mathbb{C}$)

Определение 47. Частичной суммой называется величина

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Определение 48. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow \exists$ конечный $\lim_{n\to\infty} S_n$

Утверждение 6. $\forall \{S_n\}$ является последовательностью частичных сумм какого-то ряда.

Доказательство. $a_1 = S_1, a_k = S_k - S_{k-1}$ □

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots = 0$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots = +\infty$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots, \quad S_n = \begin{cases} -1, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = a + a^2 + a^3 + \dots$, сходится при $|a| < 1$

Пример. $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $z \in \mathbb{C}$, сходится при $|z| < 1$.

Упражнение. Что будет, если $|z| = 1$?

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha^{2k} = \cos\alpha$

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$

Замечание. $H_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ – гармонические суммы.

Свойство 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\forall m \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ тоже сходится. Верно и что если $\exists m \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ сходится, то и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k$. Перейдем к пределу по $n \to \infty$. □

Свойство 2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=m}^{\infty} a_k \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Доказательство. $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ □

Свойство 3 (Линейность суммирования). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – сходятся, то $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ сходится. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Замечание. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{i=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ расходится

Доказательство. $a_k = (a_k + b_k) - b_k$ □

Свойство 4. $z_k = x_k + y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится.

Свойство 5 (Монотонность). $a_k, b_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ из $\overline{\mathbb{R}}$ и $a_k \leqslant b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Теорема 34 (Критерий Больцано-Коши). Пусть есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$

Доказательство. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n > N\ |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Возьмем $m = n + p$. □

Замечание. Необходимое условие сходимости ряда следует отсюда.

2.1. Группировка слагаемых

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ – подпоследовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k, \quad j \in \mathbb{N}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$ – получен из $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ при помощи группировки.

Теорема 35 (Группировка членов ряда). 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ $\left(S \in \overline{R} \cup \{\infty\} \text{ или } S \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{A_j} = S$$

2. $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = S$, и $a_n \to 0$ и $\exists L \in \mathbb{N}:$ в каждом A_j не более чем L штук a_k. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_k = S$$

3. $a_k \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} A_j = S \in \overline{R}$ и все a_k из одной группы одного знака. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Доказательство. 1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, T_m = \sum_{j=1}^{m} A_j$. T_m – подпоследовательность S_n $(T_m = S_{n_{m+1}})$

2. По определению сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m > N \ |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

А также

$$\exists K : \forall k > K \ |a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Возьмем $M = \max\{K, n_{N+1}\}$ и $n_m \leqslant n < n_{m+1}$ Тогда

$$|S_n - S| \leqslant |S_n - S_{n_m}| + |S_{n_m} - S| = \left|\sum_{k=n_m+1}^{n} a_k\right| + |S_{n_m} - S| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n_m+1}^{n} |a_k| + |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. Возьмем $\varepsilon > 0 \ \exists M : \forall m > M \ |S_{n_m} - S| < \varepsilon$. Пусть $N = n_{m+1}$. Возьмем $n_m \leqslant n < n_{m+1}$. Если $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, ..., a_{n_{m+1}} \geqslant 0$. Тогда

$$S_{n_m} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{m+1}}$$

Если $a_{n_m+1}, a_{n_m+2}, \ldots, a_{n_{m+1}} \leqslant 0$, то знаки в другую сторону.

$$|S_n - S| \leqslant \max\{|S_{n_m} - S|, |S_{n_{m+1}} - S|\}$$

□

2.2. Ряды с неотрицательными слагаемыми

Лемма 6. Если $a_k \geqslant 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится } \Leftrightarrow S_n \text{ ограничена сверху}$$

Доказательство. S_n неубывает, поэтому S_n сходится $\Leftrightarrow$ S_n ограничена сверху □

Замечание. Если $a_k \geqslant 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists \lim S_n = S \in \overline{R} \qquad (S = \sup S_n)$$

Достаточно ограниченности сверху подпоследовательности S_n.

Теорема 36 (Признак сравнения). $a_k, b_k \geqslant 0, a_k = O(b_k)$ при $k \to \infty$. Тогда

1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Доказательство. $\exists N \in \mathbb{N}, A > 0 : a_K \leqslant Ab_k$. Тогда

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leqslant A \sum_{k=N}^{\infty} b_k < +\infty$$

□

Следствие (Признак сравнения в предельной форме). $a_k \geqslant, b_k > 0$ и $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

1. Если $l \in [0, +\infty)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
2. Если $l \in (0, +\infty]$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.
3. Если $l \in (0, +\infty)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$ ограничена + теорема.

2. Если $l > 0$, то $a_k > 0$ с некоторого места, поэтому поменяем ролями a_k и b_k.
3. Следует из 1 и 2.

□

Следствие. $a_k \sim b_k, k \to \infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. При $\alpha < 1$ расходится, т.к. $\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \frac{1}{k}$. С другой стороны, при $\alpha \geqslant 2$ сходится, т.к. $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{5^k}$ сходится, т.к.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k^5}{5^k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^7}{5^k} = 0$$

Замечание. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – плохая запись!!!

Теорема 37 (Радикальный признак Коши). $a_k \geqslant 0, \exists \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = K$. Тогда

1. Если $K > 1$ то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.
2. Если $K < 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

Доказательство. 1. Т.к. $K > 1$, то бесконечно много $\sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow a_k > 1 \Rightarrow a_k \not\to 0$.

2. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-k}{2} > 0$. Начиная с некоторого номера все $\sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon = \frac{1+K}{2} \in (0,1) \Rightarrow a_n \leqslant \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+K}{2}\right)^n$ сходится (геометрическая прогрессия).

□

Замечание. Если $k = 1$, то бывает и сходимость, и расходимость. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится,} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится,} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Теорема 38 (Признак Даламбера). $a_k > 0$ и $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Тогда

1. Если $D > 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится
2. Если $D < 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится

Доказательство. 1. С некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, т.е. $a_{n+1} > a_n > a_N$ $\forall n > N$. Тогда $a_n \not\to 0$.

2. Пусть $\varepsilon = \frac{1-D}{2} > 0$. Начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon = \frac{1+D}{2} \in (0,1) \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1+D}{2} \cdot a_n$.

Для $m > N$

$$a_m < \frac{1+D}{2} \cdot a_{m-1} < \left(\frac{1+D}{2}\right)^2 a_{m-2} < \ldots < \left(\frac{1+D}{2}\right)^{m-N} a_N$$

Т.е. мы оценили a_m сверху членами геометрической прогрессии.

$\square$

Замечание. $D = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

С другой стороны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

Замечание. Эти два признака можно сформулировать и без использования пределов.

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, a > 0$. Используя признак Даламбера

$$\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{a^k} = \frac{a}{k+1} \to 0$$

По признаку Коши

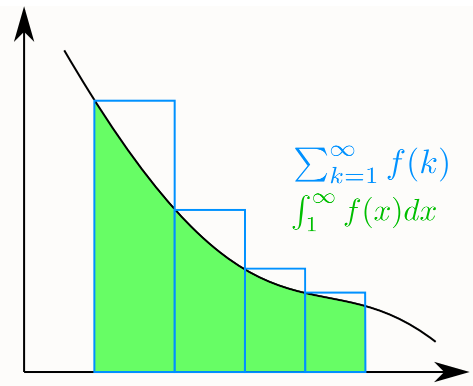
$$\sqrt[k]{\frac{a^k}{k!}} = \frac{a}{\sqrt[k]{k!}} \to 0$$

Замечание. $a_n > 0$. Если $\exists D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D$. Обратное неверно!

Упражнение. Доказать.

Теорема 39. f монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$

Доказательство. Пусть f невозрастает, $f \geqslant 0$.



$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k)$$

Просуммируем эти неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \tag{1}$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$ □

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \alpha \in (1,2)$. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится, поэтому сходится и ряд.

Упражнение. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$. При каких α и β сходится?

Замечание. Пусть $f \geqslant 0, f$ убывает на $[1; +\infty)$. Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f$$

Последовательность $\{A_n\}$ возрастает:

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f \geqslant 0$$

Кроме того, по неравенствам (1)

$$0 \leqslant A_n = f(1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - f(n+1) - \int_1^{n+1} f \leqslant f(1) - f(n+1) \leqslant f(1)$$

поэтому последовательность $\{A_n\}$ ограничена, а значит существует конечный неотрицательный предел $\{A_n\}$. Обозначим его c. Тогда справедлива асимптотическая формула:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f + c + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Если ряд расходится (и интеграл), то

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^{n+1} f$$

Пример. $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx + \gamma + \varepsilon_n = \ln(n+1) + \gamma + \varepsilon_n = \left| ln(n+1) - \ln n = \ln(1+\frac{1}{n}) \to 0 \right| =$
$\ln n + \gamma + \delta_n \Rightarrow H_n \sim \ln n$
$\gamma = 0,577215$

Пример. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}, \alpha \in (0;1)$
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx + c_\alpha + \varepsilon_n = \left| \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(1) - \frac{1}{1-\alpha} \right| = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + d_\alpha + \delta_n$
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Упражнение. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}, \alpha > 1$

Замечание. $\int_{n+1}^\infty f \leqslant \sum_{k=n+1}^\infty f(k) \leqslant \int_n^\infty f$ (Посмотреть на примере 3, как ведет себя "хвостик")

2.2.1. Ряды с произвольными членами

Определение 49. $\sum_{k=1}^\infty a_k$ сходится абсолютно, если $\sum |a_k|$

Замечание. $\sum a_k, \sum b_k$ – сходится абсолютно. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то $\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$ – сходится абсолютно

Доказательство. $|\alpha a_k + \beta b_k| \leqslant |\alpha||a_k| + |\beta||b_k|$ + признак сравнения □

Замечание. $\sum_{k=1}^\infty z_k, z_k \in \mathbb{C}, z_k = x_k + y_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$
$\sum_{k=1}^\infty z_k$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \sum x_k, \sum y_k$ сходится абсолютно

Доказательство. $|x_k|, |y_k| \leqslant |z_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$ □

Замечание.

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Следствие. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. $x_+ = \max\{x, 0\}, x = x_+ - x_-$
$x_- = \max\{-x, 0\}, |x| = x_+ + x_-, |x| \geqslant x_\pm \geqslant 0$
1. $a_k \in \mathbb{R}$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится 2. $a_k \in \mathbb{C}, a_k = x_k + iy_k$
$\sum |a_k|$ сходится $\Rightarrow \sum x_k, sumy - k$ абсолютно сходится $\Rightarrow \sum x_k, \sum y_k$ сходится $\Rightarrow \sum a_k$ □

Замечание. $\sum a_k$ – сходится условно, $\sum b_k$ сходится абсолютно $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ - сходится условно

Теорема 40 (Радикальный признак Коши абсолютной сходимости). $K = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. $k > 1$, то $\sum a_k$
2. $k < 1$, то $\sum a_k$ сходится абсолютно

Доказательство. $k > 1 \Rightarrow |a_n| \not\to 0 \Rightarrow a_n \not\to \Rightarrow \sum a_n$ расходится $k < 1 \Rightarrow \sum |a_k|$ сходится □

Теорема 41 (Признак Даламбера абсолютной сходимости). $a_k \neq 0, \mathcal{D} = \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ – существует

1. $\mathcal{D} > 1 \Rightarrow \sum a_k$ расходится
2. $\mathcal{D} < 1 \Rightarrow \sum a_k$ сходится абсолютно

Доказательство. Аналогично □

Лемма 7 (Преобразования Абеля). Договорися, что $\sum_{k=m}^{n} a_k$ при $m > n$
$\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ из $\mathbb{R}(\mathbb{C})$
$A_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j + A_0$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$

Доказательство. $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ □

Теорема 42 (Признак Дирихле). $\{a_k\} \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \{b_k\} \in \mathbb{R}$ – монотонно убывает. Если $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничена, $b_n \to 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится

Доказательство. $A_0 = 0$. Применим Преобразование Абеля: $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}_{\to \sum_{k=1}^{infty} a_k b_k} = \underbrace{A_n b_n}_{\to 0} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \underbrace{(b_k - b_{k+1})}_{\to 0}$ Покажем, что $*$ сходится абсолютно.

$\exists M : \forall k\ |A_k| \leqslant M$, $b_k - b_{k+1}$ одного знака.
$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n| = M(b_1)$ □

Теорема 43 (Признак Абеля)**.** $\{a_k\}$ из $\mathbb{R}(\mathbb{C}), \{b_k\}$ из $\mathbb{R}$ – монотонная Если $\sum a_k$ сходится, последовательность b_k ограничена, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится

Доказательство. $\exists$ конечный $\lim b_n = \alpha$
$\{a_k\}$ и $\{b_n - \alpha\}$ – удовлетворяют предыдущей теореме $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - \alpha)$ – сходится
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - \alpha) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ □

Определение 50. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} b_k$, если b_k одного знака, называется *знакочередующимися*.

Теорема 44 (Признак Лейбница)**.** Пусть $\{b_n\}$ монотонна, $b_n \to 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть $b_k \geqslant 0$. Рассмотрим последовательность $\{S_{2m}\}$. Она убывает, т.к.

$$S_{2m} - S_{2(m-1)} = b_{2m} - b_{2m-1} \leqslant 0$$

и ограничена снизу, поскольку

$$S_{2m} = -b_1 + (b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + \ldots + (b_{2m-2} - b_{2m-1}) + b_{2m} \geqslant -b_1 + b_{2m} \geqslant -b_1$$

Поэтому существует конечный $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Но тогда

$$S_{2m+1} = S_{2m} - b_{2m+1} \to S$$

т.к. $b_{2m+1} \to 0$. □

Замечание. Признак Лейбница следует из принципа Дирихле, если положить $a_k = (-1)^k$.

Замечание. Поскольку

$$S_{2m} = (-b_1 + b_2) + \ldots + (-b_{2m-1} + b_{2m}) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad S_{2m} \geqslant -b_1$$

то, по теореме о предельном переходе в неравенстве $-b_1 \leqslant S \leqslant 0$.

Замечание. Рассмотрим остаток лейбницевского ряда $S - S_n$. Тогда

$$-b_1 \leqslant (-1)(S - S_n) \leqslant 0$$

Для доказательства нужно применить замечание 1 к остатку ряда.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$. При $\alpha > 1$ он сходится абсолютно, т.к.

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right| = \frac{1}{k^\alpha}$$

При $\alpha \in (0, 1]$ он абсолютно не сходится, но сходится по признаку Лейбница.

Пример. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} S_{2n} &= H_{2n} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n = \\ &= \ln 2n + \gamma + \delta_{2n} - (\ln n + \gamma + \delta_n) \\ &= \ln 2 + \delta_{2n} - \delta_n \to \ln 2 \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Он получен из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ перестановкой членов. Обозначим частичные суммы этих рядов T_n и S_n соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} T_{3m} &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \\ T_{3m+1} &= T_{3m} + \frac{1}{2m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \\ T_{3m+2} &= T_{3m+1} - \frac{1}{4m+2} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \frac{\ln 2}{2}$, то есть сумма после перестановки слагаемые поменялась.

Определение 51. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (биекция). Тогда мы будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

получен перестановкой слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 45 (Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно к S, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (биекция). Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно к S.

Доказательство. 1. Пусть $a_k \geqslant 0$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$$

Для всех n верно

$$T_n \leqslant S_m \leqslant S$$

где $m = \max\{\varphi(1), ..., \varphi(n)\} \Rightarrow T_n \leqslant S$, т.е. перестановка не увеличивает сумму ряда. Применим к новому ряду $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Но такая перестановка тоже не увеличит сумму ряда, а значит $S \leqslant T$.

2. Пусть $a_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $a_{k\pm}, a_{\varphi(k)\pm}$. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-}$ сходятся. По доказанному, $a_{\varphi(k)\pm}$ сходятся к тем же суммам. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

3. Пусть $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k = x_k + i \cdot y_k$. По замечанию к определению абсолютной сходимости ряды с вещественными x_k и y_k абсолютно сходятся. По доказанному их суммы не меняются при перестановке, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} + i \sum_{k=1}^{\infty} y_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

□

Замечание. Перестановка членов расходящегося положительного ряда приводит к расходящемуся положительному ряду. Действительно, если бы ряд после перестановки сходился, то теореме сходился бы и исходный ряд.

Замечание. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-}$ расходятся.

Доказательство. Если бы они оба сходились, то сходился бы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ как сумма двух сходящихся. Если бы один из них сходился, а другой расходился, то расходился бы и исходный ряд как разность сходящегося и расходящегося. □

Теорема 46 (Римана. Перестановка членов условно сходящегося ряда). Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \in \mathbb{R}$ сходится условно. Тогда $\forall S \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S$. Более того, существует перестановка, после которой ряд вообще не будет иметь суммы.

Доказательство. Для определенности докажем теорему, когда $S \in [0, +\infty)$. Пусть $\{b_p\}$ и $\{c_q\}$ – подпоследовательности всех неотрицательных и всех отрицательных членов ряда; $b_p = a_{n_p}, c_q = a_{m_q}$. По предыдущему замечанию оба ряда $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$ расходятся. Положим $p_0 = q_0 = 0$. Обозначим через p_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p > S$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p \leqslant S < \sum_{p=1}^{p_1} b_p$$

Затем обозначим через q_1 наименьшее число, для которого

$$\sum_{q=1}^{q_1} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_1} b_p$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q < S \leqslant \sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q$$

Такие p_1 и q_1 найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$. Продолжим построение неограниченно. Пусть номера $p_1, ..., p_{s-1}, q_1, ..., q_{s-1}$ уже выбраны. Обозначим через p_s наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p > S - \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s-1} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q \leqslant S < \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q$$

Затем обозначим через q_s наименьшее натуральное число, для которого $\sum_{q=1}^{q_s} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_s} b_p$ то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s} c_q < S \leqslant \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s-1} c_q$$

Такие p_s и q_s найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$.
Ряд

$$b_1 + ... + b_{p_1} + c_1 + ... + c_{q_1} + ... + b_{p_{s-1}+1} + ... + b_{p_s} + c_{q_{s-1}} + ... + c_{q_s} + ... \quad (2)$$

получен из исходного ряда перестановкой. Докажем, что он сходится к S. Сгруппировав члены одного знака, мы получим ряд

$$B_1 + C_1 + \ldots + B_s + C_s + \ldots$$

где $B_s = \sum_{p=p_{s-1}+1}^{p_s} b_p, C_s = \sum_{q=q_{s-1}+1}^{q_s} c_q$. Обозначим его частные суммы через T_n. По построению $0 < T_{2s-1} - S \leqslant b_{p_s}, c_{q_s} \leqslant T_{2s} - S < 0$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к, b_{p_s} и c_{q_s} стремятся к нулю. Следовательно, $T_n \to S$. По теореме о группировке членов ряда и ряд (2) сходится к S. □

2.2.2. Произведение рядов

Определение 52. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_k b_j$ – произведение частичных сумм.

Определение 53. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \ \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_k$

Возьмем биекцию $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Такая биекция существует, так как декартово произведение счетных множеств это тоже счетное множество.

$\gamma = (\varphi, \psi)$

Тогда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ – произведение рядов $\sum a_k$ и $\sum b_k$

Теорема 47 (Коши об умножении рядов). Пусть есть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ и оба абсолютно сходятся к суммам A и B. Тогда при любой нумерации произведение будет абсолютно сходиться к $A \cdot B$

Доказательство. Пусть есть $\gamma = (\varphi, \psi) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ – биекция.

$A^* = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \ B^* = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$

Возьмем $N \in \mathbb{N}$ и посмотрим на такую частичную сумму $\sum\limits_{l=1}^{N} |a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\max \varphi(l)} |a_k| \cdot \sum\limits_{k=1}^{\max \psi(l)} |b_k| \leqslant$

$\leqslant A^* \cdot B^*$. При каждом N частичная сумма ряда будет ограничена. Тогда ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ сходится абсолютно. А в абсолютно сходящихся можно менять нумерацию.

Рассмотрим какую-то нумерацию. Например, "по квадратам".

$S_{n^2} = \sum_{k,l=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\to} A \cdot B$. □

Замечание. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – сходятся к A и B, то их произведение "по квадратам"сходится к AB (даже без абсолютной сходимости).

Доказательство. Упражнение. □

Определение 54. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j}$ называется произведением $\sum a_k$ и $\sum b_k$ по Коши. ("По диагонали")
Иногда нумеруют с нуля $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Тогда запись будет следующая: $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$

Следствие. Если $\sum a_k$ и $\sum b_k$ абсолютно сходятся к A и B, то их произведение по Коши абсолютно сходится по к AB

Пример. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$
"Квадрат по Коши": $c_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}} = (-1)^{k=1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}$
$|c_k| \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}} = 1 \Rightarrow c_k \not\to 0$

Замечание. Если $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сходятся, причем хотя бы один абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится.

Замечание. Если $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сходится к A и B, и их произведение по Коши сходится к C, то $C = A \cdot B$

Пример. Возьмем два расходящихся ряда.
$$a_k = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 2^{k-1}, k \in \mathbb{N} \end{cases}, b_k = \begin{cases} 1, j = 0 \\ -1, j \in \mathbb{N} \end{cases}$$
$c_0 = 1, \ \ c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = -1 - \sum_{l=1}^{k-1} 2^{l-1} + 2^{k-1} = 0$

2.3. Функциональные последовательности и ряды

Определение 55 (Предел комплексной функции). $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall z : |z - z_0| < \delta \ |f(z) - A| < \varepsilon$

Замечание. Мы говорим о вещественных функциях, но почти все это можно переносить на функции комплексно-значного аргумента. $X \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Определение 56. X – множество. $f_n, f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции f на множестве X поточечно, если $\forall x \in X$ $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ как числовая последовательность.
$\forall x \in X \ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$

Обозначение: $f_n(x) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\to}} f(x)$
В кванторах: $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Пример. $X = [0;1], f_n(x) = x^n$
$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$
$f_n \overset{X}{\to} f$

Определение 57. X – множество, $f_n, f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$,
$\{f_n\}$ сходится к f равномерно на X, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Обозначение: $f_n \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$

Замечание. Если f_n сходится равномерно, значит сходится поточечно. Наоборот неверно.

Замечание. Как и для числовых послеодовательностей можно писать $\forall n \geqslant N$ или $|-| \leqslant \varepsilon$

Пример. $f_n(x) \equiv c_n$
Если $c_n \to c$, то $f_n(x) \rightrightarrows f(x) = c$ на любом множестве.

Замечание. Если $f : X \to \mathbb{C}$, то равномерная сходимость $\{f_n\}$ равносильна одновременной равномерной сходимости $\{Ref_n\}$ и $\{Imf_n\}$

Определение 58. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – функциональная последовательность, $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – функциональный ряд
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно, если $S_n(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ сходится поточечно.
$E = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится $\}$ – множество сходимости
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} = S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно, если $S_n(x)$ сходится равномерно.
Запись равномерной сходимости в кванторах: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N \ \ |\underbrace{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)}_{\text{остаток ряда}}| < \varepsilon$

Замечание. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Доказательство. $\forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ □

Пример. $f_n = x^n$ на $[0;1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$

Посмотрим на $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0;1)}|x^n| = 1 \not\to 0$

> **Замечание.** $X_0 \subset X$
> Если $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, то $f_n \overset{X_0}{\rightrightarrows} f$
> Если $f_n \overset{X_0}{\not\rightrightarrows} f$, то $f_n \overset{X}{\not\rightrightarrows} f$

$X = [0;\lambda], \lambda < 1$ – сходится равномерно.
$\sup\limits_{x\in[0;\lambda]}|f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;\lambda]}|x^n| = \lambda^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Замечание. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, $g_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, тогда $\alpha f_n + \overset{X}{\rightrightarrows} \alpha f + \beta g$

Доказательство. Упражнение. (Неравенство треугольника для sup) □

Замечание. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ и g ограничена на X, тогда $f_n g \overset{X}{\rightrightarrows} f \cdot g$

Теорема 48 (Критерий Больцано-Коши). $X, f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
f_n равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Замечание. Можно записать $\forall n > N$ и $\forall m |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < \varepsilon$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $f : f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$, тогда $\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f_{n+m} - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
$|f_n - f_{n+m}| \leqslant |f_n - f| + |f_{n+m} - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\Leftarrow$. $\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$ и $\forall m \in \mathbb{N} \forall x \in X |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$
Фиксируем $x_0 \in X$. Получим числовую последовательность (есть критерий Коши) $\Rightarrow$ $f_n(x) \overset{X}{\to} f(x)$
$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$
при $m \to \infty$ $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ □

Теорема 49 (Критерий Больцано-Коши для рядов). $X, f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \underbrace{|S_{n+p} - S_n|}_{\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)} < \varepsilon$

Доказательство. Аналогично. □

Следствие. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно $\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$

Пример. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, X = \mathbb{R}$
$f(x) = 0, f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$
Но $f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\not\rightrightarrows} 0$
Рассмотрим $[0;1]: \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]} \frac{nx}{1+n^2x^2} \geqslant \frac{1}{2} \not\to 0$

Пример. $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}, x = [-1;1]$
$f(x) = 1$ $f_n(x) - f(x) = \left|\frac{n^2-n^2-x^2}{n^2+x^2}\right| = \frac{x^2}{n^2+x^2} \leqslant \frac{x^2}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$
$\sup\limits_E |f_n - f| \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0$
$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$

Пример. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, x = [0;1)$
$f(x) = 0$
$\sup\limits_{x\in[0;1)} |x^n - x^{n+1}| = f_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot (1 - \frac{n}{n+1}) \to 0 \Rightarrow f_n \overset{[0;1)}{\rightrightarrows} f$
$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = nx^{n-1}(1 - x \cdot \frac{n+1}{n}) = 0$ при $\frac{n}{n+1}, 0$. f_n возрастает до $\frac{n}{n+1}$ и убывает дальше.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k, X = [0;1)$
$S(x) = \frac{1}{1-x}$ – поточечно. $f_n(x) = x^k \overset{X}{\not\rightrightarrows} 0$/ Не выполнено необходимое условие равномерной сходимости.

Теорема 50 (Признак Вейерштрасса). $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и $|f_n(x)| \leqslant a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно.

Доказательство. $\forall x \in X \quad |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+m}(x)| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}$.
По критерию Больцано-Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится абсолютно и равномерно, т.к. $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Замечание. Другими словами, если члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда, то функциональный ряд равномерно сходится.

Определение 59 (Равномерная ограниченность). Последовательность функций $g_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется *равномерно ограниченной* на X, если последовательность норм g_n ограничена.
Последнее равносильно тому, что

$$\exists M \in [0; +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |f_n(x)| \leqslant M.$$

Теорема 51 (Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов). Пусть X – множество, $f_k : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), g_k : X \to \mathbb{R}$.
1. Признак Дирихле. Если

1. последовательность $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ равномерно ограничена на X;
2. при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $g_n \rightrightarrows 0(X)$,

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X.
2. Признак Абеля. Если

1. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X;
2. при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $\{g_k\}$ равномерно ограничена на X,

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X.

Доказательство. В обоих случаях проверим выполнение условия Больцано-Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k g_k$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

1. При каждом $x \in X$ применим преобразование Абеля, положив $a_k = f_k(x), b_k = g_k(x), A_0 = 0$. Тогда $A_k = F_k(x)$. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{F_n\}$

$$\exists K > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |F_k(x)| \leqslant K,$$

   а в силу равномерного стремления g_n к нулю

$$\exists N\ \ \forall k > N\ \ \forall x \in X\ |g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

   По следствию преобразования Абеля при всех $m, n > N,\ m > n,\ x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x) \right| < 4K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon.$$

2. Снова применим при каждом $x \in X$ преобразование Абеля, положив на этот раз $a_k = f_k(x), b_k = g_k(x), A_0 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. Тогда $A_k = -\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} f_j(x)$ есть остаток равномерно сходящегося ряда. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{g_k\}$

$$\exists L > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ |g_k(x)| \leqslant L,$$

а в силу равномерного стремления остатка ряда к нулю

$$\exists N \ \forall k > N \ \forall x \in X \ \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4L}.$$

По следствию преобразования Абеля при всех $m, n > N, \ m > n, \ x \in X$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x)\right| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4L} \cdot L = \varepsilon.$$

□

Замечание. Напоминим, что ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} b_k$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k} b_k$, где $b_k \geqslant 0$ при всех k, называется *знакочередующимся*.

Следствие (Признак Лейбница равномерной сходимости рядов). Пусть X – множество, $g_k : X \to \mathbb{R}$, при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна, $g_n \rightrightarrows 0(X)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} g_k$ равномерно сходится на X.

Замечание. Признак Лейбница следует из признака Дирихле, если положить $f_k(x) = (-1)^{k-1}$ при всех $x \in X$.

2.4. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 52 (Перестановка пределов). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D, $f, f_n : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ и

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$

Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} A_n, \exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ – конечные и совпадают, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N : \forall m, n > N \ \forall x \in D \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Перейдем к пределу при $x \to x_0$. Тогда $|A_n - A_m| \leqslant \varepsilon \Rightarrow A_n$ сходится в себе $\Rightarrow A_n$ сходится к A.
Докажем, что $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$. По $\varepsilon > 0$ подберем номер L такой, что

$$\forall l > L \ \forall x \in D \ |f_l(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и номер K, что

$$\forall k > k \ |A_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Положим $M = 1 + \max\{L, K\}$. Тогда при любом $x \in D$

$$|f_M(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |A_M - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

По определению предела функции найдется такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что

$$\forall x \in \dot{V}_{x_0} \cap D \ |f_M(x) - A_M| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда при любом $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - A_M| + |A_M - A| < \varepsilon$$

В силу произвольности ε это и значит, что $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A_0$. □

Теорема 53 (Почленный переход к пределу). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка D, $f_k : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ и

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S
2. $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к некоторой сумме A, а предел $\lim_{x \to x_0} S(x)$ существует и равен A, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x)$$

Следствие (Непрерывность предельной функции в точке). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D, f, f_n : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ и

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$
2. все функции f_n непрерывны в точке x_0

Тогда функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Для изолированной точки x_0 утверждение тривиально. Если x_0 – предельная точка D, то $A_n = f_n(x_0)$. Поэтому

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} A_n = f(x_0)$$

что и означает непрерывность f в точке x_0. □

Следствие (Непрерывность суммы ряда в точке). Пусть $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D, f_k : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ и

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S
2. все функции f_k непрерывны в точке x_0

Тогда функция S непрерывна в точке x_0.

Следствие (Непрерывность предельной функции на множестве). Пусть $D \subset R, f, f_n : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ и

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$
2. все функции f_n непрерывны на D

Тогда функция f непрерывна на D.
Другими словами, равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

Следствие (Непрерывность суммы ряда на множестве, Стокса-Зейделя). Пусть $D \subset \mathbb{R}, f_k : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ и

1. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S
2. все функции f_k непрерывны на D

Тогда функция S непрерывна на D.
Другими словами, сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функция непрерывна.

Утверждение 7. Равномерная сходимость – не необходимое условие. Например

$$f_n(x) = \sqrt{n}x(1 - x^2)^n$$

Теорема 54 (Признак Дини). Пусть $f, f_n \in C[A, B], f_n \to f \ \forall x \in [A, B], \{f_n(x)\}$ – возрастает. Тогда $f_n \overset{[A,B]}{\rightrightarrows} f$.

Теорема 55 (Предельный переход под знаком интеграла). Пусть $f_n \in C[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Доказательство. $f \in C[a,b] \Rightarrow \int_a^b f$ имеет смысл. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной сходимости существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n > N, x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Поэтому для всех $n > N$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

$\square$

Теорема 56 (Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов). Пусть $f_k \in C[a,b]$, ряд $\sum_{k=1}^{f_k}$ равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k$$

Другими словами, равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно.

Пример. Последовательность $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ поточечно стремится к нулю на $[0,1]$. В то же время

$$\int_0^1 f_n = n^2 \int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = n^2\left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 = \frac{n^2}{2n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ сходится к сумме $\frac{1}{1+x}$ на $(-1,1)$. При $x=1$ он расходится, но его почленное интегрирование по отрезку $[0,1]$ приводит к верному равенству:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2, \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^1 x^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

Теорема 57 (Предельный переход под знаком производной). Пусть E – ограниченный промежуток, $f_n, \varphi : E \to \mathbb{R}$, функции f_n дифференцируемы на E, $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на E и существует $c \in E$ такое, что последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится. Тогда

1. Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на E к некоторой функции f

2. f дифференцируема на E
3. $f' = \varphi$

Равенство $f' = \varphi$ можно записать в виде

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$g_n(x) = g_{n,x_0}(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in E \setminus \{x_0\}$$

Докажем, что последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$. Для любых $m, n \in \mathbb{N}, x \in E \setminus \{x_0\}$ по формуле Лагранжа, примененной к функции $f_n - f_m$, найдется такое ξ между x и x_0, что

$$(g_n - g_m)(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_m)'(\xi)$$

Поэтому

$$\sup_{E\setminus\{x_0\}} |g_n - g_m| \leqslant \sup_E |f_n' - f_m'|$$

Последовательность $\{f_n'\}$ равномерно сходится и, значит, равномерно сходится в себе на E. Следовательно, последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится в себе на $E \setminus \{x_0\} \Rightarrow$ по критерию Больцано-Коши она равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$.
В частности, при $x_0 = c$ последовательность $\{g_{n,c}\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Поскольку умножение на ограниченную функцию $x \mapsto x - c$ не нарушает равномерной сходимости, последовательность $\{f_n - f_n(c)\}$ также равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Так как в точке c все ее члены равны нулю, она равномерно сходится на E. По условию последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится. Тогда и последовательность

$$f_n = (f_n - f_n(c)) + f_n(c)$$

равномерно сходится на E как сумма двух равномерно сходящихся последовательностей. Первый пункт теоремы доказан.
Обозначим $f = \lim f_n$. Снова зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

По доказанному $g_n \overset{E\setminus\{x_0\}}{\rightrightarrows} h$, а по определению производной $g_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f_n'(x_0)$. Тогда существует предел $\lim_{x\to x_0} h(x)$ и

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \varphi(x_0)$$

По определению производной $f'(x_0)$ существует и равняется $\varphi(x_0)$. В силу произвольности x_0 второе и третье утверждения теоремы доказаны. $\square$

Теорема 58 (Почленное дифференцирование рядов). Пусть E – ограниченный промежуток, функции f_k дифференцируемы на E, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ равномерно сходится на E и существует такое $c \in E$, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ сходится. Тогда

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на E
2. Его сумма дифференцируема на E
3. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1' = \sum_{k=1}^{\infty} 0$ сходится равномерно на любом промежутке.

Пример. Последовательность $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}$ равномерно сходится к 0 на $\mathbb{R}$, так как $\|f_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Однако, последовательность $f_n'(x) = \cos nx$ не имеет предела при $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$.

Пример. Последовательность $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ равномерно сходится к 0 на $[0,1]$, так как $\|f_n\| = \frac{1}{n+1} \to 0$. Последовательность же $f_n'(x) = x^n$ сходится на $[0,1]$ неравномерно, и в точке 1 ее предел равен 1, а не 0.

Пример. Пусть f_0 – 1-периодическая функция, а ее сужение на $[0,1]$ задается равенством

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - x, & \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Положим $f_k(x) = \frac{1}{4^k} f_0(4^k x), f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $\mathbb{R}$, так как $\|f_k\| = \frac{1}{2\cdot 4^k}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 4^k} < +\infty$. Кроме того, $f_k \in C(\mathbb{R})$. Следовательно, $f \in C(\mathbb{R})$.
Докажем, что f не дифференцируема ни в одной точке. Упражнение :)

2.5. Степенные ряды

Определение 60 (Степенной ряд). Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

где $c_n, a, z \in \mathbb{C}$, называется степенным рядом. Числа c_n называются его коэффициентами, а a – центром.

Определение 61 (Радиус сходимости). Величина $R \in [0, +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда, если

1. $\forall z : |z - a| < R$ ряд сходится
2. $\forall z : |z - a| > R$ ряд расходится

Замечание. Далее будем считать, что $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$

Теорема 59 (Формула Коши-Адамара). Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости, и он выражается формулой

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Доказательство. Пусть $z \neq a$. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Вынося положительный не зависящий от n множитель $|z - a|$ за знак верхнего предела, имеем

$$K = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = \overline{\lim} \left(|z-a| \sqrt[n]{|c_n|}\right) = |z-a| \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Если $|z - a| < R$, то $K < 1$, и ряд сходится, а если $|z - a| > R$, то $K > 1$, и ряд расходится. □

Замечание. По признаку Коши при $|z - a| < R$ ряд сходится абсолютно.

Определение 62 (Круг сходимости). Пусть дан степенной ряд, R – его радиус сходимости. Множество

$$V_a(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$$

называется *кругом сходимости* ряда.

Замечание. Часто радиус сходимости можно найти не только по формуле Коши-Адамара, но и с помощью признака Даламбера. Именно,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

если предел в правой части существует.

Пример. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$ При $|z| \geqslant 1$ ряд расходится. Поэтому радиус сходимости этого ряда равен 1, а множество сходимости совпадает с кругом сходимости.

Пример. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ равен 1. На окружности $|z| = 1$ он абсолютно сходится.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. При $x = -1$ то ряд – гармонический, а значит он расходится. При $x = -1$ ряд сходится по признаку Лейбница.

Упражнение. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Упражнение. $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$

Теорема 60 (Равномерная сходимость степенных рядов). Пусть дан степенной ряд, $R \in (0, +\infty]$ – его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ ряд равномерно сходится в круге $\overline{V_a(r)}$ (круг с границей).

Доказательство. Если $|z - a| \leqslant r$, то

$$|c_k(z-a)^k| \leqslant |c_k| r^k$$

$z = r$ – внутри круга сходимости $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ сходится абсолютно. Значит, по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно в круге $\overline{V_a(r)}$. □

Следствие. Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Теорема 61 (Теорема Абеля о степенных рядах). Пусть дан вещественный степенной ряд, $R \in (0, +\infty)$ – его радиус сходимости. Если ряд сходится при $x = a + R$ или $x = a - R$, то он равномерно сходится на $[a, a + R]$ или $[a - R, a]$ соответственно, а его сумма непрерывна в точке $a + R$ слева (соответственно, в точке $a - R$ справа).

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $a = 0$.

$$a_k \cdot x^k = a_k \cdot R^k j \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ сходится равномерно на $[0, R]$. Последовательность $\left\{\left(\frac{x}{R}\right) k\right\}$ равномерно ограничена на $[0, R]$ и убывает в силу неравенства $0 \leqslant \frac{x}{R} \leqslant 1$. Следовательно, по признаку Абеля ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ равномерно сходится на $[0, R]$. И применить теорему Стокса-Зейделяю □

Следствие (Интегрирование степенных рядов). Пусть дан вещественный степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, $R \in (0; +\infty]$ – его радиус сходимости. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости: если $[A; B] \subset (a - R; a + R)$, то

$$\int_A^B \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(B-a)^{k+1} - (A-a)^{k+1}}{k+1} \quad (*).$$

Если, кроме того, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ сходится при $x = a + R$ или $x = a - R$, то равенство $(*)$ верно и при $B = a + R$ или $A = a - R$ соответственно.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $a = 0$. Обозначим $r = \max\{|A|, |B|\}$. Тогда
$$[A, B] \subset [-r, r] \subset (-R, R).$$
По теореме о равномерном сходимости степенных рядов ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, $R \in (0; +\infty]$ равномерно сходится на $[A, B]$. Следовательно, его можно интегрировать по $[A, B]$ почленно. Если $B = R$, то ряд равномерно сходится на отрезке $[0, B]$ по теореме Абеля о степенных рядах, а на отрезке с концами A и 0 – по теореме о равномерной сходимости степенных рядов. Поэтому ряд равномерно сходится на $[A, B]$. Аналогично рассматривается случай $A = -R$. □

Определение 63. $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. a – внутренняя точка D. Если $\exists \lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$, то f дифференцируема в точке a и обозначается $f'(a)$.

Пример. $f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
$n = 0 \quad f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
$n \in \mathbb{N}\ \dfrac{z^n - a^n}{z - a} = z^{n-1} + z^{n-2}a + z^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1} \xrightarrow[z\to a]{} na^{n-1}$
$(z^n)' = nz^{n-1}$ в $\mathbb{C}$.
При $n \in \mathbb{Z}\backslash\{\mathbb{N} \cup \{0\}\}\quad (z^n)' = nz^{n-1}$ в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Лемма 8 (Радиусы сходимости рядов).
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k k(z-a)^{k-1}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-a)^{k+1}$$
равны.

Доказательство. По формуле Коши-Адамара достаточно.
$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{lim} \sqrt[n]{|c_n| n}.$$
Т.к. $\sqrt[n]{n} \to 1$, то
$$\exists N : \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \sqrt[n]{n|c_n|} \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt[n]{|c_n|}.$$
□

Теорема 62 (Дифференцирование степенных рядов). $R \in (0; +\infty]$ – ряд сходимости $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = f(z)$, Тогда f – бесконечно дифференцируема $V_a(R)$ и ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z-a)^{k-m}, \ |z-a| < R$$

Доказательство. $m = 1:$

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(z-a)^k - (z_1-a)^k}{(z-a) - (z_1-a)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left((z-a)^{k-1} + (z-a)^{k-2}(z_1-a) - (z-a)^{k-3}(z_1-a)^2 + \dots + (z_1-a)^{k-1}\right)$$

$z \neq z_1; z_1, z \in V_a(\rho), \rho < R$

$$|c_{k_0}\left((z-a)^{k_0-1} + (z-a)^{k_0-2}(z_1-a) + \dots + (z_1-a)^{k_0-1}\right)| \leqslant |c_{k_0}| k_0 \rho^{k_0-1}.$$

По признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно в $\overline{V_a}(\rho)$. □

Теорема 63 (Единственность разложения функции в степенной ряд). $R \in (0; +\infty]$ – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, |z-a| < R$.
Тогда коэффициенты определяются единственным образом:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Доказательство.

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-(m-1))c_k(z-a)^{k-m}, \ |z-a| < R$$

При $z = a$

$$f^{(m)}(a) = c_m \cdot m!$$

□

Определение 64. f имеет производную всех порядков в точке a.
Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ – ряд Тейлора функции f с центром в точке a.

Замечание. Частичные суммы – многочлены Тейлора.
$z = a$ – ряд Маклорена.

Пример. 1. Ряд сходится к f.

$\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k,\ |x| < 1.$

2. Ряд расходится.

$\dfrac{1}{1+x},\ |x| \geqslant 1.$

$\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ сходится при $x^2 < 1$.

$\dfrac{1}{1+z^2}$ – не опр. при $z = i$ или $-i$.

3. Ряд сходится, но не к f.

$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases},$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$

$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{-x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$, где P_n – некоторый многочлен.

$n = 1\ \ \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

$f^{(n+1)}(x) = \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \underbrace{\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)} e^{-\frac{1}{x^2}}.$

В нуле: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \underset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim\limits_{y\to\infty}\sqrt{y}\cdot e^{-y} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$

$f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\dfrac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$

$f^{(m)}(0) = 0.$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{\text{сумма=0}}$$

Теорема 64 (Признак разложимости в ряд Тейлора). $f \in C^\infty\langle A; B\rangle;\ x, a \in \langle A; B\rangle, x \neq a.$
$\exists M > 0:\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ |f^{(n)}(x)| \leqslant M$ на $\widetilde{\Delta}_{a,x}$.
Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$$

.

Доказательство. (из I семестра)

$$|f(x) - T_{a,n}f(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

и устремить $n \to \infty$. □

Определение 65. $-\infty \leqslant A < B \leqslant +\infty$, $f : (A;B) \to \mathbb{R}$, $a \in (A;B)$. Функция f – *аналитическая*, если раскладывается в степенной ряд в окрестности a.

$$\mathcal{A}(A;B) \subsetneq C^\infty(A;B)$$

2.6. Разложения элементарных функций

Определение 66. При $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$sinz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$cosz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Теорема 65 (T1)**.** Функции $\exp, \sin, \cos$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{C}$ и

$$(e^z)' = e^z,\ (\sin z)' = \cos z,\ (\cos z)' = -\sin z$$

.

Доказательство. Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема в круге сходимости. Продиффиренцируем:

$$(e^z)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$(\sin z)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \cos z$$

$$(\cos z)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = -\sin z.$$

□

Теорема 66 (T2. Основное свойство степени)**.**

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Доказательство.

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_2^j}{j!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_1^j}{j!}\frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\infty} C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = e^{z_1+z_2}$$

□

Теорема 67 (Т3). Синус – нечетная функция, косинус – четная.

Доказательство. Это свойство очевидно из определения. □

Теорема 68 (Т4. Формулы Эйлера).

$$e^{iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Доказательство. $i^{2k} = (-1)^k$, запишем разложения синуса и косинуса в виде:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}, \qquad i \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

сложим их, получим степенной ряд для e^{iz}.
Для доказательства второй и третьей формулы Эйлера заменим z на $-z$ и воспользуемся свойством **Т3**:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Остаётся взять полусумму выражений для e^{iz} и e^{-iz} и их полуразность, делённую на i. □

Замечание. Укажем частные случаи формулы Эйлера:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

Комплексное число может быть записано в алгебраическом форме:

$$z = x + iy, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

и в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} x.$$

По формуле Эйлера последнее выражение можно переписать в виде

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной*.

Теорема 69 (Т5). Тождества для тригонометрических функций остаются справедливыми при комплексных значениях аргумента. Например,

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Доказательство. По формулам Эйлера и основному свойству степени

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 =$$

$$= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) =$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2)$$

□

Определение 67. Функции ch и sh, опеределяемые формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболичесим синусом.*

Замечание. По формулам Эйлера

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad i \operatorname{sh} z = \sin iz, \quad i \sin z = \operatorname{sh} iz.$$

отсюда получаются разложения гиперболических функций в степянные ряды

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

абсолютно сходящиеся на $\mathbb{C}$. Производные этих функций равны

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

На рис.2 изображены графики гиперболических функций вещественной переменной.

Теорема 70 (Т6). Функции cos и sin не ограничены на $\mathbb{C}$.

Доказательство. $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\cos i\alpha = ch\alpha \xrightarrow[\alpha \to \pm\infty]{} +\infty, \quad |\sin i\alpha| = |\operatorname{sh} \alpha| \xrightarrow[\alpha \to \pm\infty]{} +\infty$$

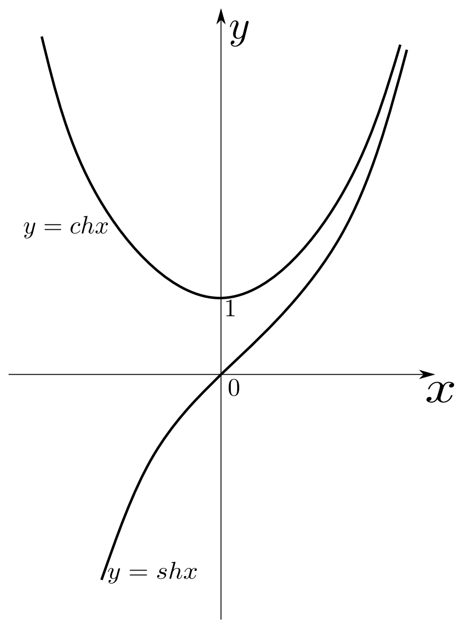


Рис. 2: Гиперболический косинус и синус

□

Теорема 71 (Т7). e^z не имеет нулей. $\sin z$ и $\cos z$ не имеют нулей не из $\mathbb{R}$.

Доказательство. $z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}$.

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x > 0.$$

$\cos z = 0$. В силу Т5 и связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\dots) = \cos x \operatorname{ch} y = 0 \\ \mathrm{Im}(\dots) = \sin x \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

□

Теорема 72 (Т8). e^z имеет периоды $2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и не имеет других периодов.
$\sin z, \cos z$ имеют периоды $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ и не имеют других периодов.

Доказательство. По формуле Эйлера

$$e^{2\pi ik} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1.$$

$$\Rightarrow e^{z+2\pi ik} = e^z.$$

Докажем, что других периодов нет. Пусть $T = 2\pi ik$ – период. $e^{z+T} = e^z\ \ \forall z \in \mathbb{C}$. При $z = 0:$

$e^T = 1$. Пусть $T = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогда $e^\alpha e^{i\beta} = 1$. Если $e^\alpha = 1$, тогда $\alpha = 0$; $e^{i\beta} = 1$. По формуле Эйлера

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta = 1$$

$\Rightarrow \cos\beta = 1, \sin\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$. □

Следствие.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg} z \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2.6.1. Логарифм и арктангенс

Замечание.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,\ \ |x| < 1.$$

Заменим x на $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,\ \ |x| < 1.$$

Проинтегрируем $\int_0^t \ldots dx$.

$$\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$$

При $t = 1$ сходится по признаку Лейбница.
По Теореме Абеля:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = -(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots), \quad -1 \leqslant t < 1.$$

$$\frac{1}{2}(\ln(1+t) - \ln(1-t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}, \quad |t| < 1$$

Подставим $t = \frac{}{1n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}$$

Теорема 73 (Формула Стирлинга). $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \theta \in (0;1)$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}$$

$$\left(n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

Доказательство.

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}$$

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = 1 + \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2} = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{4n^2+4n} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

Пусть $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Левое неравенство означает, что последовательность $\{a_n\}$ строго убывает, а правое – что последовательность $\{a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}}\}$ строго возрастает. Т.к. $e^{-\frac{1}{12n}} \to 1$, то по теореме о пределе монотонной последовательности обе последовательности сходятся к общему пределу, причём

$$\exists \lim a_n = a: \ a_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n.$$

Другими словами,

$$e^{\frac{0}{12n}} = 1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}} \Rightarrow a_n = a\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

$$n! = a\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

$$\pi = \lim\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \lim\frac{1}{n}\cdot\frac{(2^n n!)^2}{\left(\frac{(2n)!}{(2n)!!}\right)} = \lim\frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 =$$

$$\lim\frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}\cdot a^2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\cdot n\cdot e^{\frac{\theta_n}{6n}}}{a\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2n}e^{\frac{\theta_n'}{24n}}}\right)^2 = \lim\frac{1}{n}\left(\frac{a\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{2}}e^{\alpha_n}\right)^2 = \lim\frac{a^2}{2}e^{2\alpha_n} \underset{\alpha_n\to 0}{=} \frac{a^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = \pi \Leftrightarrow a = \sqrt{2\pi}$$

□