Конспект лекций по геометрии, ПИ, 2 семестр Лекции

Собрано 21 мая 2022 г. в 10:10

Содержание

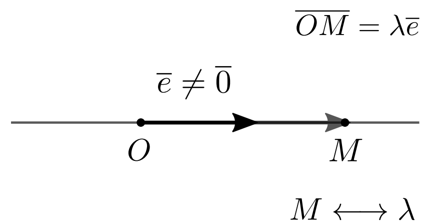
Раздел #1: Аналитическая геометрия

1.1. Системы координат

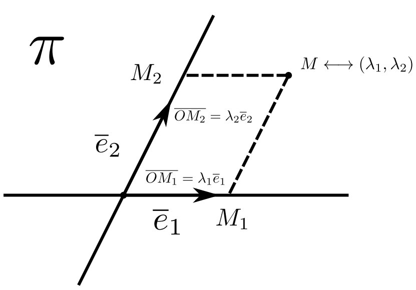
1.1.1. Аффинные системы координат

Определение 1. Аффинной системой координат на прямой называется взаимно-однозначное соответствие $l \longleftrightarrow \mathbb{R}$.

Она определяется выбором точки O и выбором вектора $\overline{e}$. АСК $= \{O, \{\overline{e}\}\}$.



Определение 2. АСК на плоскости называется биекция $\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$.
Она определяется выбором точки O и векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2 \neq \overline{e}, \overline{e}_1 \nparallel \overline{e}_2$. АСК $= \{O, \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}\}$.



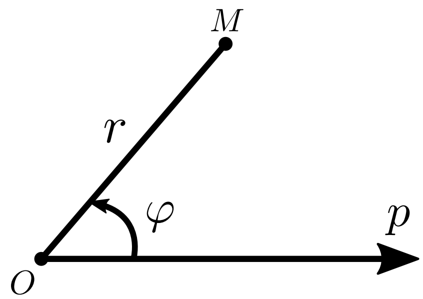
Определение 3. Если $|\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = 1, \overline{e}_1 \perp \overline{e}_2$, то АСК называется декартовой системой координат.

Определение 4. АСК в пространстве называется биекция $M \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$. Она определяется выбором точки O и векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \neq \overline{0}$ – не компланарны. АСК $= \{O, \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}\}$.

Определение 5. Упорядоченная тройка векторов $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ называется **правой** , если из конца вектор $\overline{w}$ поворот то $\overline{u}$ к $\overline{v}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и **левой** – в противном случае.

1.1.2. Криволинейные системы координаты

Определение 6. Выберем точку O и построим из неё луч p, который назовем *полярной осью*. Возьмем теперь произвольную точку M на плоскости и измерим две величины: расстояние от M до O и угол между вектором $\overline{OM}$ и полярной осью. Обозначим расстояние за r, а угол за φ. Тогда, чтобы избежать неоднозначности, будем считать, что $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$, и если $r = 0$, то $\varphi = 0$. Такая система координат называется **полярной**.



Определение 7. Полярная система координат, где $r \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$, то она называется *обобщенной* полярной системой координат.

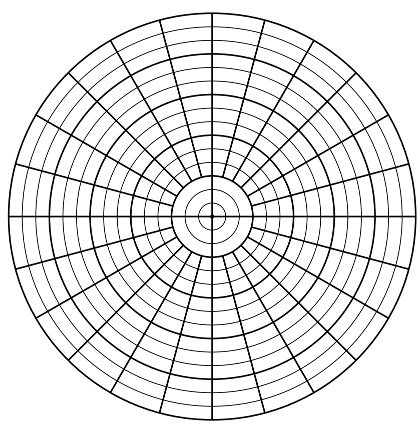


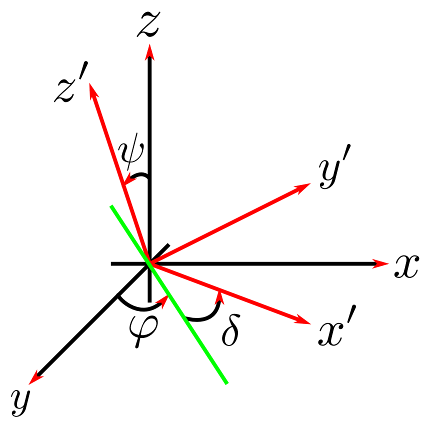
Рис. 1: Координатная сеть полярной системы координат

Определение 8. Цилиндрической системой координат называют трёхмерную систему координат, являющуюся расширением полярной системы координат путём добавления третьей координаты (обычно обозначаемой z), которая задаёт высоту точки над плоскостью.

Определение 9. Сферическая система координат — трёхмерная система координат, в которой каждая точка пространства определяется тремя числами, где r — расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный углы соответственно.

1.1.3. Параметризации

Построим декартову систему координат. Теперь возьмем какую-то новую систему координат x', y', z'. Проведем через x', y' плоскость. Если z' не совпадает с z, то эта плоскость пересекает плоскость (x, y) по какой-то прямой. Отсчитает от вектора x до этой прямой угол φ. Угол между z и z' обозначим за ψ. Теперь, мы можем эту прямую поворачивать вокруг оси z' на угол δ, пока она не совпадет с x'.



Таким образом, мы совместили исходную систему координат с новой СК. То есть мы построили соответствие между (ψ, φ, δ).

1.2. Понятие вектора

Пусть E – евклидово пространство.

Определение 10. Закрепленный вектор – упорядоченная пара точек в евклидовом пространстве. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, модуль $|\overrightarrow{AB}|$ – расстояние между точками A и B.

Определение 11. Пусть $\{(A, B), A, B \in E\}$ – множество закрепленных векторов. Введём на нём отношение равенства: $(A, B) = (C, D) \Leftrightarrow$:

1. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$
2. $(A, B) \| (C, D)$ либо совпадают.
3. $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$.

Замечание. $\forall A, B \to (A, A) = (B, B)$.

Утверждение 1. Отношение, введённое в прошлом определении – отношение эквивалентности.

Доказательство. 1. Рефлексивность: $(A, B) = (A, B)$ – верно.

2. Симметричность – очевидно.

3. Транзитивность: $(A,B) = (C,D), (C,D) = (F,G) \Rightarrow (A,B) = (F,G)$ – верно.
Значит множество закрепленных векторов разбивается на классы эквивалентности. □

Определение 12. Класс эквивалентности называется **свободным вектором**.

1.3. Сложение и умножение на число

Пусть $\overline{a}, \overline{b} \in V$ – классы.

Определение 13. Сложение векторов: $V \times V \to V$. $[\overrightarrow{OO''}] = \overline{a} + \overline{b}$

Определение 14. Пусть $\overline{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Умножение на число: $\mathbb{R} \times V \to V$.

$(V, +, \cdot)$. Свойства:

1. $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V \;\; \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.
2. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V \;\; (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.
3. $\exists \overline{0} : \forall \overline{a} \;\; \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$.
4. $\forall \overline{a} \;\; \exists -\overline{a} : \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b} \in V \;\; \lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$.
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V \;\; (\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$.
7. $\forall \overline{a} \in V \;\; 1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.
8. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V \;\; \lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$.

Определение 15. Множество $(V, +, \cdot)$, удовлетворяющее свойствам 1-8, называется **векторным пространством**. Элементы – векторы.

1.4. ЛЗ, ЛНЗ, Базис, размерность

Определение 16. $\lambda_1\overline{a}_1 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n$ – линейная комбинация. Если $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ – нетривиальная ЛК.

Определение 17. $\{\overline{a}_i\}_{i=1}^n$ – линейно зависимый, если $\exists$ нетривиальная ЛК $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$: $\sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{a}_i = 0$

Определение 18. $\{\overline{a}_i\}_{i=1}^n$ – ЛНЗ, если он не ЛЗ.

Свойства:

1. $\{\overline{a} \neq \overline{0}\}$ – ЛНЗ.
2. $\{\overline{0}\}$ – ЛЗ.

3. $\{\overline{a_1}, ..., \overline{a}_n, \overline{0}\}$ – ЛЗ.
4. Пусть $\{\overline{a}_i\}$ – ЛЗ. Тогда $\{\overline{a}_i, \overline{a}_j\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ – ЛЗ.

Определение 19. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ – ЛЗ, если в нем $\exists$ ЛЗ конечный поднабор.

Определение 20. ЛНЗ – набор, который не является ЛЗ.

Определение 21. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ – полный, если $\forall\overline{v}\in V\ \exists\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\lambda_i\}_{i=1}^n\ \overline{v} = \lambda_1\overline{a}_{\alpha_1} + ... + \lambda_n\overline{a}_{\alpha_n}$.

Определение 22. $\{\overline{a}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ – базис V, если он полный и ЛНЗ.

Определение 23. Размерность V ($\dim V$) – мощность базиса.

Определение 24. Векторное пространство V называется конечномерным, если $\exists$ конечный полный набор.

1.5. Скалярное умножение

Будем определять скалярное произведение для элементов векторного пространства V.

Определение 25. $(\overline{a}, \overline{b})$ – скалярное произведение: $V \times V \to \mathbb{R}$

Свойства:

1. Свойства 1-8, необходимые для существования векторного пространства.
2. $\forall\overline{a}\in V\ (\overline{a}, \overline{a}) \geqslant 0$ – положительная определённость.
   Кроме того, $(\overline{a}, \overline{a}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$ – невырожденность.
3. $\forall\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\in V\ (\overline{a}+\overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c})$ – аддитивность.
   $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b}\in V\ (\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$ – однородность.
4. $\forall\overline{a}, \overline{b}\in V\ (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$. – коммутативность.

Пример. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
$\overline{v} = (x_1, ..., x_n), \overline{w} = (y_1, ..., y_n)$
Тогда скалярное произведение: $(\overline{v}, \overline{w}) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.
Проверим свойства:

1. $(\overline{v}, \overline{v}) = x_1^2 + ... + x_n^2 \geqslant 0$.
   $(\overline{v}, \overline{v}) = 0 \Leftrightarrow \forall i\ x_i = 0$.
2. Пусть $\overline{z} = (z_1, ..., z_n)$, тогда $(\overline{v}+\overline{w}, \overline{z}) = (x_1+y_1)z_1 + ... + (x_n+y_n)z_n = x_1z_1 + ... + x_ny_z + y_1z_1 + ... + y_nz_n = (\overline{v}, \overline{z}) + (\overline{w}, \overline{z})$.

$(\lambda\overline{v}, \overline{w}) = \lambda x_1 y_1 + \ldots + \lambda x_n y_n = \lambda(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) = \lambda(\overline{v}, \overline{w})$.

3. $(\overline{v}, \overline{w}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n = (\overline{w}, \overline{v})$.

Пример. $C[0,1]$ – непрерывные функции на отрезке $[0,1]$.
Пусть $f, g, q \in C[0,1]$ – функции: $(f, g) = \int_0^1 fg\, dx$.

1. $(f, f) = \int_0^1 f^2\, dx \geqslant 0$.
   $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $(f + q, g) = \int_0^1 (f + q) g\, dx = \int_0^1 (fg + qg)\, dx = \int_0^1 fg\, dx + \int_0^1 qg\, dx = (f, g) + (q, g)$.
   $(\lambda f, g) = \int_0^1 \lambda fg\, dx = \lambda \int_0^1 fg\, dx = \lambda(f, g)$.
3. $(f, g) = \int_0^1 fg\, dx = \int_0^1 gf\, dx = (g, f)$.

Таким образом, это скалярное произведение непрерывных на $[0,1]$ функций.

Пусть есть конечномерное векторное пространство V, на нём задано скалярное произведение $(,)$, выберем базис векторного пространства $\{\overline{e}_i\}$, рассмотрим векторы $\overline{v} = (x_i), \overline{w} = (y_i)$, тогда их скалярное произведение $(\overline{v}, \overline{w}) = (x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n, y_1\overline{e}_1 + \ldots + y_n\overline{e}_n)$, т.е.

$$(\overline{v}, \overline{w}) = \sum_{i,j}^{n} x_i y_j (\overline{e}_i, \overline{e}_j)$$

Либо же запись вида:

$$(\overline{v}, \overline{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\overline{e}_1, \overline{e}_1) & (\overline{e}_1, \overline{e}_2) & \cdots & (\overline{e}_1, \overline{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{e}_n, \overline{e}_1) & (\overline{e}_n, \overline{e}_2) & \cdots & (\overline{e}_n, \overline{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

где $G = ((\overline{e}_i, \overline{e}_j)), 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ – матрица Грама скалярного произведения.
Тогда скалярное произведение можно записать в следующем виде: $(\overline{v}, \overline{w}) = \overline{v}^T G \overline{w}$.
В силу коммутативности скалярного произведения $G^T = G$.

Теорема 1 (Критерий Сильвестра).

$$\forall k = 1, \ldots, n \quad \det(G_k) > 0$$

где G_n – миноры главной диагонали.

Утверждение 2. Если взять R^n, G, то G – матрица Грама $\Leftrightarrow G^T = G$, которая удовлетворяет критерию Сильвестра.

Определение 26. Если базис обладает свойством: $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \Rightarrow G = E$, тогда он называется ортонормированным базисом (ОРБ).

Теорема 2 (Теорема Грама-Шмидта). В $\forall V^n$ со скалярным произведением $(,)$ $\exists$ ОНБ.

Определение 27. V – векторное пространство, $(,)$ – скалярное произведение на нём, тогда **модуль** (**длина**) $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}, |\overline{a}| = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = 0$.

Определение 28. Величина угла между векторами – число $\alpha \in [0; \pi] \in R : \cos\alpha = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|}, \overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0$.

Теорема 3 (Неравенство Коши-Буняковского).

$$(\overline{a}, \overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2\overline{b}^2$$

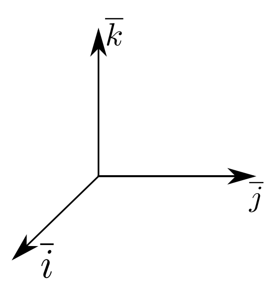
Доказательство. По свойству скалярного произведения $(\overline{a} + t\overline{b})^2$ всегда невырожденная величина, т.е. $(\overline{a}+t\overline{b})^2 \geqslant 0 \Rightarrow \overline{a}^2 + 2t(\overline{a}, \overline{b}) + t^2\overline{b}^2 \geqslant 0$, тогда его дискриминант не положительный, т.к. t – любое число, то

$$(\overline{a}, \overline{b})^2 - \overline{a}^2\overline{b}^2 \leqslant 0 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2\overline{b}^2$$

□

1.6. Векторное умножение

Векторное умножение определяется только для трёхмерного пространства V^3, кроме того, необходимо, чтобы пространство было ориентированным, выберем в нём правый ОНБ $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$.

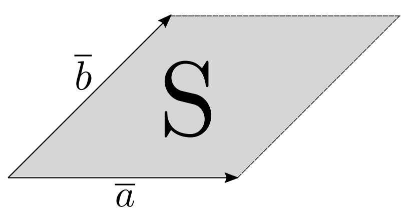


Определение 29. Пусть $\overline{v} = (x_1, x_2, x_3), \overline{w} = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда **векторное произедение** $\overline{v} \times \overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \overline{i}(x_2y_3 - x_3y_2) - \overline{j}(x_3y_1 - x_1y_3) + \overline{k}(x_1y_2 - x_2y_1)$.

Свойства:

1. $\overline{v} \times \overline{w} = -\overline{w} \times \overline{v}$ – кососоммутативность.
2. $\overline{v} \times \overline{v} = \overline{0}$.

3. $(\overline{v}+\overline{w})\times\overline{z} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \overline{v}\times\overline{z}+\overline{w}\times\overline{z}$ – аддитивность.
4. $(\lambda\overline{v})\times\overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda\overline{v}\times\overline{w}$.
5. $\overline{v}\times\overline{w}\perp\overline{v},\overline{w}$
   $(\overline{v},\overline{v}\times\overline{w}) = (\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \overline{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$
6. $\overline{v}\times\overline{w}=0 \Leftrightarrow \overline{v}\parallel\overline{w}$
   $(\overline{v},\overline{w},\overline{v}\times\overline{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (x_2y_3-x_3y_2) & (x_3y_1-x_1y_3) & (x_1y_2-x_2y_1) \end{vmatrix} = (x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow (\overline{v},\overline{w},\overline{v}\times\overline{w})=0 \Leftrightarrow \frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}, \frac{x_3}{y_3}=\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$.
7. $\overline{v}\nparallel\overline{w} \Rightarrow (\overline{v},\overline{w},\overline{v}\times\overline{w})$ – правая.
8. $\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}$. Получим таблицу умножения: $i\to j, j\to k, k\to i$.
9. $(\overline{a}\times\overline{b})^2 = (x_2y_3-y_2x_3)^2+(\dots)^2+(\dots)^2$
   $\overline{a}^2\overline{b}^2-(\overline{a},\overline{b})^2 = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$
   $(\overline{a}\times\overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2-(\overline{a},\overline{b})^2$ – упражнение.
   $\overline{a}^2\overline{b}^2-(\overline{a},\overline{b})^2 = S^2 = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2\sin^2\alpha = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2(1-\cos^2\alpha) = |\overline{a}|^2|\overline{b}|^2-(\overline{a},\overline{b})^2$, т.к. $\cos^2\alpha = \frac{(a,b)^2}{|a|^2|b|^2}$.
   Следствие: $|\overline{a}|=|\overline{b}|=1, (\overline{a},\overline{b}) \Rightarrow |\overline{a}\times\overline{b}|=1$.



Рассмотрим V^3, зафиксируем ОНБ $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$, зададим векторное произведение $\times : V\times V\to V$.
Выберем $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – правый ОНБ, таким образом, если взять любой ОНБ, можно получить таблицу умножения: $a\to b, b\to c, c\to a$.
$\overline{v}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\ \overline{w}=(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \Rightarrow \overline{v}\times\overline{w} = (\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c})\times(\mu_1\overline{a}+\mu_2\overline{b}+\mu_3\overline{c}) =$
$= \lambda_1\mu_1\overline{a}\times\overline{a}+\lambda_1\mu_2\overline{a}\times\overline{b}+\lambda_1\mu_3\overline{a}\times\overline{c}+\lambda_2\mu_1\overline{b}\times\overline{a}+\lambda_2\mu_2\overline{b}\times\overline{b}+\lambda_2\mu_3\overline{b}\times\overline{c}+\lambda_3\mu_1\overline{c}\times\overline{a}+\lambda_3\mu_2\overline{c}\times\overline{b}+\lambda_3\mu_3\overline{c}\times\overline{c} =$
$= \overline{c}(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)-\overline{b}(\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1)+\overline{a}(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2) = \begin{vmatrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}.$

1.7. Смешанное умножение

Рассмотрим трёхмерное ориентированное векторное пространство V^3, в котором зафиксирован базис $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ и на котором задано векторное умножение: $\times$.
Зададим новую операцию – смешанное произведение $(,,) : V\times V\times V\to\mathbb{R}$.

Определение 30. Смешанное произведение трёх векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – скалярное произведение вектора $\overline{a}$ и векторного произведения векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c})$.

Пример. Что подразумевает под собой смешанное произведение?
Рассмотрим $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3), \overline{b} = (b_1, b_2, b_3), \overline{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

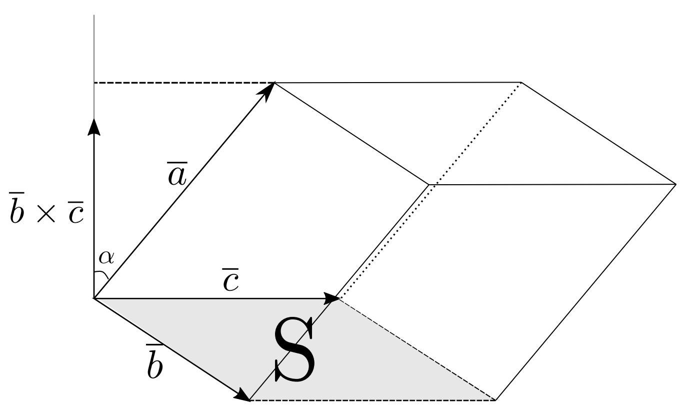
$$\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

Таким образом, $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Свойства смешанного произведения:

1. Линейность по каждому аргументу, как композиция линейных отображений.
2. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$ по свойству векторного произведения.
   $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}); (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a})$.
   Знак меняется в зависимости от чётности перестановки в силу свойств определителя.
3. Геометрический смысл для трёх некомпланарных.
   Если $\overline{a}$ сходит туда же, куда и $\overline{b} \times \overline{c}$, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ – правая тройка. Если $\overline{a}$ "смотрит"в другую плоскость, то тройка – левая.
   $\overline{b} \times \overline{c} = S$, тогда $(\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c}) = S \underbrace{|\overline{a}| \cos\alpha}_{h} = S \cdot h$. Таким образом, $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = S \cdot h = V_{\text{пар}}$.
   Вывод: смешанное произведение равно $\pm V$ параллелепипеда (знак зависит от ориентации).



1.8. Двойное векторное умножение. Тождество Якоби

Рассмотрим ориентированное V^3 и $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$, выражение имеет смысл, поскольку и $\overline{a}$ – вектор, и $(\overline{b} \times \overline{c})$ – вектор.

Утверждение 3 (Формула "бац минус цаб").

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}, \overline{b}).$$

Доказательство. И справа, и слева знака равенства линейные выражения. Представим, что есть функция с операцией из трёх аргументов $f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, где каждый из векторов может быть расписан по базису, т.е. $f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = f(a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}, b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}, c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}) = a_1b_1c_1 f(\overline{i}, \overline{i}, \overline{i}) + a_1b_1c_2 f(\overline{i}, \overline{i}, \overline{j}) + \ldots + a_3b_3c_3 f(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$, в силу линейности мы вынесли числа за скобки и получили все возможные наборы базисных элементов. В качестве первого, второго и третьего аргумента может быть один из трёх векторов: $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, т.е. 27 базисных наборов, в данном выражении 27 слагаемых.
Чтобы вычислить значение трилинейной функции на каком-то наборе векторов, достаточно знать координаты этих векторов и значения отображения функции 27 базисных наборов. Тогда для доказательства выражения достаточно проверить, совпадают ли две трилинейные функции на 27 базисных наборах, значит, они совпадают везде.
Проверим для базисного набора "$\overline{i}, \overline{i}, \overline{i}$": $\overline{i} \times \underbrace{(\overline{i} \times \overline{i})}_{0} = \overline{i}\,\underbrace{(\overline{i}, \overline{i})}_{1} - \overline{i}\,\underbrace{(\overline{i}, \overline{i})}_{1}$

Для набора "$\overline{i}, \overline{i}, \overline{j}$": $\overline{i} \times (\overline{i} \times \overline{j}) = \overline{i}(\overline{i}, \overline{j}) - \overline{j}(\overline{i}, \overline{i})$, используем таблицу умножения: $i \to j, j \to k, k \to i$, тогда $\overline{i} \times \underbrace{(\overline{i} \times j)}_{\overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}} = \overline{i}\,\underbrace{(\overline{i}, \overline{j})}_{0} - \overline{j}\,\underbrace{(\overline{i}, \overline{i})}_{1}$

Аналогично для остальных 25 базисных наборов. □

Теорема 4 (Тождество Якоби).

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) + \overline{b} \times (\overline{c} \times \overline{a}) + \overline{c} \times (\overline{a} \times \overline{b}) = 0$$

Доказательство. $\overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}, \overline{b}) + \overline{c}(\overline{a}, \overline{b}) - \overline{a}(\overline{b}, \overline{c}) + \overline{a}(\overline{c}, \overline{b}) - \overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) = 0$ □

Пусть V – векторное пространство, на нём есть бинарная операция $[,] : V \times V \to V$, которая обладает свойствами:

1. Билинейность
2. Кососоммутативность: $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$
3. Удовлетворяет тождеству Якоби: $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] + [\overline{b}, [\overline{c}, \overline{a}]] + [\overline{c}, [\overline{a}, \overline{b}]] = 0$

Определение 31. Если выполняются все свойства, то операция $[,]$ называется скобка Ли, а векторное пространство $(V, [,])$ – алгебра Ли.

1.9. Уравнение прямой на плоскости

Возьмём точку M и вектор $\overline{v}$, который отложим от точки M, проведём прямую, которая содержит эти два объекта. Отметим точку M', которая записывается как $M' = M + t\overline{v}$.

Определение 32. $M' = M + t\overline{v}$ – параметрическое задание.

Выберем начало координат O, вектор $\overline{r}_0$, который соответствует точке M и вектор $\overline{r}$, который соответствует произвольной точке M'. Тогда вектор $\overline{r}$ в зависимости от t представляется как $\overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{v}$

Определение 33.

$$\overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{v}$$

– параметрическое уравнение прямой.

Обозначим координаты вектора $\overline{r}$ как (x, y), вектора $\overline{r}_0$ как (x_0, y_0), вектора $\overline{v}$ как (a, b). Тогда запишем это уравнение с каждой координатой.

Определение 34. $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$ – параметрическое уравнение в координатах.

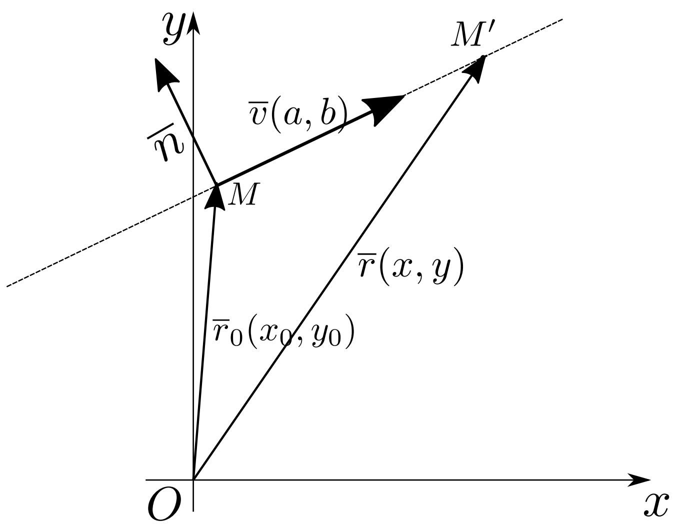


Рис. 2: Изображение вектора $\overline{v}$ на плоскости

Выразим из обоих уравнений t, из первого уравнения получаем $t = \frac{x-x_0}{a}$, из второго $t = \frac{y-y_0}{b}$, тогда верно $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$.

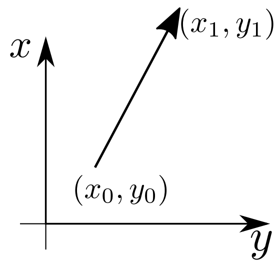
Определение 35.

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$$

– каноническое уравнение прямой на плоскости.

Пример. $2x = y - 1$, можно записать данное выражение как: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2}$

Пусть нам известны координаты начала вектора (x_0, y_0) и координаты конца (x_1, y_1), тогда можно записать каноническое уравнение прямой в другом виде.



Определение 36.
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$
– каноническое уравнение прямой на плоскости.

Приведём первый вариант канонического уравнения прямой к следующему виду:
$bx - x_0 b = ay - ay_0 \Rightarrow bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$.
Введём обозначения, пусть A – коэффициент при x, B – коэффициент при y, а C – свободный член.

Определение 37. $A^2 + B^2 \neq 0$
$$Ax + By + C = 0$$
– общее уравнение прямой на плоскости.
$(-B, A)$ – направляющий вектор.
$(-\frac{C}{A}, 0)$ – точка.
$(-B, A)$ – перпендикуляр к прямой (вектор нормали).

$B \neq 0$, тогда $y = -\frac{A}{B} - \frac{C}{B}$, введём обозначения.

Определение 38.
$$y = kx + b$$
– уравнение прямой с угловым коэффициентом, где $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Пусть вектор $\overline{n}$ с координатами (A, B) перпендикулярен вектору $\overline{v}$ (рис. 2), т.е. $\overline{MM'} \perp \overline{n}$), тогда $(\overline{n}, \overline{MM'}) = 0$.

Определение 39.
$$(\overline{n}, \overline{r} - \overline{r}_0) = 0$$
– векторное уравнение прямой на плоскости.

Раскроем скобки: $(\overline{n}, \overline{r}) - (\overline{n} - \overline{n}_0) = 0 \Rightarrow (\overline{n}, \overline{r}) = (\overline{n}, \overline{r}_0)$, обозначим $(\overline{n}, \overline{r}_0) = \alpha$, поскольку векторы $\overline{n}$ и $\overline{r}_0$ зафиксированы.

Определение 40.
$$(\overline{n}, \overline{r}) = \alpha$$
– векторное уравнение прямой на плоскости, где $\overline{n}$ – перпендикуляр к исходной прямой.

1.10. Уравнение плоскости в пространстве

Возьмём точку M_0 в $\mathbb{R}^3$ и зададим плоскость двумя неколлинеарными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. $\overline{a} \nparallel \overline{b}$. Любая точка M этой плоскости является линейной комбинацией: $M = M_0 + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

Определение 41. $M = M_0 + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ – параметрическое задание точек пространства $\mathbb{R}^3$.

Аналогично, как в уравнении прямой на плоскости, возьмём начало координат O и запишем через параметры радиус-вектор $\overline{r}$ точки M.

Определение 42.

$$\overline{r}(\alpha,\beta) = \overline{r}_0 + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$$

– параметрическое уравнение плоскости в пространстве.

Выберем систему координат, тогда у точки M будут координаты (x, y, z). Запишем параметрическое уравнение в координатах.

Определение 43. $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_1 + \beta b_1 \\ y = y_0 + \alpha a_2 + \beta b_2 \\ z = z_0 + \alpha a_3 + \beta b_3 \end{cases}$ – параметрическое уравнение плоскости в координатах.

Рассмотрим правоориентированное векторное пространство $\mathbb{R}^3$. Если есть вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то их векторное произведение – перпендикуляр $\overline{n}$ к плоскости, которая содержит эти вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. С помощью этого перпендикуляра можно записать уравнение плоскости: $(\overline{n}, \overline{M_0M}) = 0$.

Определение 44.

$$(\overline{n}, \overline{r} - \overline{r_0}) = 0$$

– векторное уравнение плоскости.

Если координаты вектора $\overline{n}$ – (A, B, C), то можно записать скалярное произведение в другом виде.

Определение 45.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

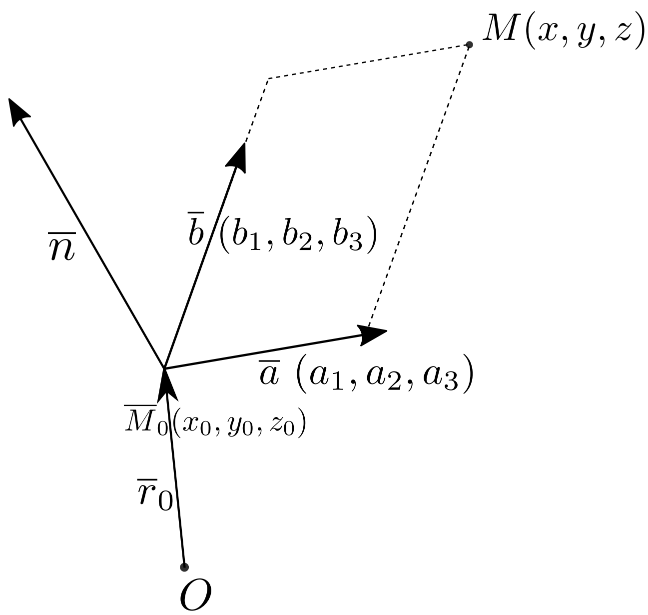
– общее уравнение плоскости.

x_0, y_0, z_0 – координаты конкретной точки, от которой можно отойти. Раскроем скобки, обозначим свободный член за D.

Определение 46.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– общее уравнение плоскости.



Векторов, перпендикулярных плоскости, содержащей векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, бесконечное множество, один из них – векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если "отойти"от параметров, то получим общее уравнение, значит, коэффициенты A, B, C будут пропорциональны векторному произведению.

Сопоставляя общее уравнение плоскости и параметрическое можно прийти к другому виду общего уравнения.

Определение 47.

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

– общее уравнение плоскости.

Плоскость можно задать тремя точками, не лежащими на одной прямой. Пусть их координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Предположим, что необходимо найти плоскость через общее уравнение плоскости, т.е. $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставим координаты трёх точек в это уравнение: $\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$

Необходимо решить эту систему, чтобы найти значения коэффициентов A, B, C, D. Три уравнения, четыре переменные, значит, решений у такой системы много. Добавим ещё одну точку $M(x, y, z)$, тогда система принимает вид: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases}$

При каком условии у такой системы найдётся решение? Если эта новая точка M лежит в одной плоскости с заданными тремя точками, то решение есть, иначе – нет.

В системе четыре уравнения, четыре неизвестных, все свободные члены равны нулю, получается, эта СЛУ однородная. Что значит, что эта система разрешима? У неё единственное решение, если эта система невырожденная, т.е. $(0,0,0,0)$, это решение не подходит.
Если точка M принадлежит искомой плоскости, то решение существует, причем решение системы должно быть не тождественный нуль, значит, эта система имеет вырожденную матрицу:
$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow M \in \pi$, где π – плоскость.

Определение 48.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

– матричное уравнение плоскости в пространстве.

1.11. Уравнение прямой в пространстве

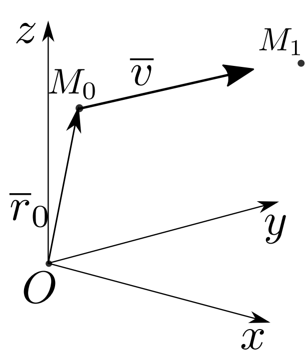
Определение 49. $M' = M + t\overline{v}$ – параметрическое задание.

Определение 50.

$$\overline{r}(t) = \overline{r}_0 + t\overline{v}$$

– параметрическое уравнение прямой.

Введём декартову систему координат.



Определение 51.

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

– параметрическое уравнение прямой в координатах, где a, b, c – координаты направляющего вектора $\overline{v}$.

"Избавимся"от параметра:

Определение 52.

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

– каноническое уравнение прямой в пространстве.

Если есть произвольная точка M_1, лежащая на прямой, координаты которой мы знаем.

Определение 53.

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

– каноническое уравнение прямой через две точки.

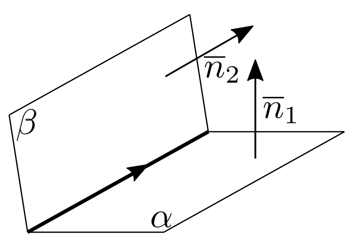
Можно переписать данное выражение в виде системы: $\begin{cases}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\\ \frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\end{cases}$, что эквивалентно другой системе: $\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0\\ A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}$. Каждое из уравнений в этой системе – уравнение плоскости, значит, прямая записана как пересечение двух плоскостей.

Определение 54.

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0\\ A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}$$

– уравнение прямой как линия пересечения двух плоскостей.

Значения A, B, C – координаты вектора нормали к плоскости. Пусть есть плоскость α с вектором нормали $\overline{n}_1$ и плоскость β с вектором нормали $\overline{n}_2$. Тогда линия пересечения плоскостей – необходимая прямая.



Чтобы эту прямую явно задать каноническим способом, нужно знать направляющий вектор и точку.

Точку можно найти следующим образом: можно любую из координат "положить"нуль, например, $x=0$, тогда решаем СЛУ стандартным образом.

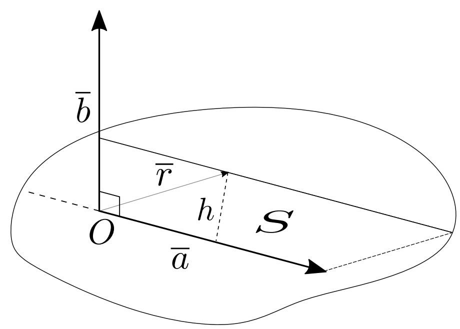
Как найти направляющий вектор? Этот вектор – векторное произведение двух нормалей плоскостей α и $\beta : \overline{n}_1\times\overline{n}_2$.

Пример. Допустим, координаты точки $(0, y_0, z_0)$. Тогда можно записать каноническое уравнение как:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}$$

Замечание. Можно судить о пересечении двух плоскостей; если вектора нормали неколлинеарны, то это заведомо прямая, иначе – нужно судить по свободным членам, если все коэффициенты пропорциональны, решение у этой системы – вся плоскость (т.е. плоскости совпадают), если не пропорциональны, то решение – $\varnothing$.

Рассмотрим некоторые векторы в ориентированном векторном пространстве V^3: зафиксированные $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и переменный вектор $\overline{r}$ – в выражении $\overline{a} \times \overline{r} = \overline{b}$.



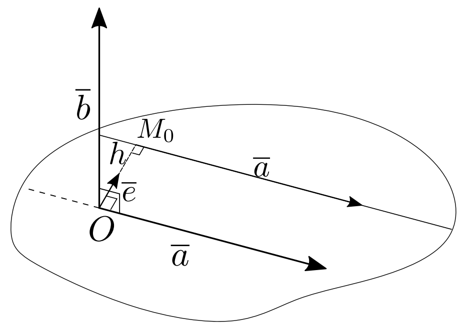
Чтоб решение у этого выражения существовало, необходимо задать, что $\overline{b} \perp \overline{a}$, значит, вектор $\overline{r}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к $\overline{b}$. Разделим эту плоскость на две полуплоскости по отношению к $\overline{a}$, вектор $\overline{r}$ должен лежать так, чтобы (по правилу буравчика) от вектора $\overline{a}$ давать вектор $\overline{b}$. Каков геометрический смысл векторного произведения? $|\overline{a} \times \overline{r}| = S_{\text{пар}}$, кроме того, $S = |\overline{b}|$. С другой стороны, $S = |\overline{a}|h$, где h – расстояние от "кончика"вектора $\overline{r}$ до прямой, содержащей $\overline{a}$, поскольку вектор $\overline{b}$ фиксирован, отчего фиксирована и величина S, то и все концы возможных векторов $\overline{r}$ должны лежать на одинаковом удалении от $\overline{a}$, равном h. Значит, все решения лежат на прямой, параллельной той, на которой лежит вектор $\overline{a}$, на расстоянии h по определённую полуплоскость. Таким образом, решение уравнения $\overline{a} \times \overline{r} = \overline{b}, \overline{b} \perp \overline{a}$ всегда есть, и им является прямая в пространстве.

Определение 55.

$$\overline{a} \times \overline{r} = \overline{b},\ \overline{b} \perp \overline{a}$$

– векторное уравнение прямой в пространстве.

Найдём точку, которая лежит на данной прямой, поскольку мы уже знаем, что это за прямая. Изобразим расстояние (перпендикуляр) от данной прямой, обозначим точкой M_0, до точки O. Из описанного ранее известно, что $h = \frac{S}{|\overline{a}|}$. Тогда $\overline{OM_0}$ это результат векторного произведения $\overline{a} \times \overline{b}$, тогда направление данного вектора это $\overline{e} = \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{|\overline{a} \times \overline{b}|}$, но нам необходим вектор, умноженный на h, тогда этот вектор $\overline{r}_0 = \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{|\overline{a} \times \overline{b}|} \cdot \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$ – частное решение уравнения, где направляющий вектор $\overline{a}$.



Раздел #2: Кривые и поверхности второго порядка

2.1. Кривые второго порядка

Определение 56. Кривая второго порядка (КВП) – уравнение на плоскости $\mathbb{R}^2$, где введена декартова система координат xOy, вида:

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная часть}} + \overbrace{2a_{13}x + 2a_{23}y + \underbrace{a_{33}}_{\text{св.коэф.}}}^{\text{линейная часть}} = 0$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Поскольку это уравнение, разумен вопрос "Что является решением этого уравнения?" Решением такого уравнения является множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Какова связь между точками множества и уравнением? Уравнение порождает множество точек. Если есть уравнение, то есть множество его решений, которое может быть пустым. Если есть множество, то уравнений, которые порождают это множество, "необозримое количество". Поэтому однозначной связи между уравнением и множеством нет. По этой причине КВП определяем как уравнение.

Пример. $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Существуют ли на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению? Нет, поскольку $x^2 + y^2 \geqslant 0$, то есть решение – $\varnothing$. Это кривая второго порядка, но мы её не видим, потому что множество точек – пустое. Рассмотрим другое уравнение: $x^2 + 1 = 0$, по аналогичной причине решение – $\varnothing$. Тогда верно ли, что эти кривые второго порядка совпадают? Как множества – конечно, множества решений совпадают, но это совершенно разные КВП, нельзя никакой заменой координат свести одно уравнение к другому.

Замечание. Шесть коэффициентов определяют кривую второго порядка. Если уравнение в определении КВП умножить на λ, получится другой набор коэффициентов, но множество решений этих двух уравнений ничем не будет отличаться. Возникает тот же вопрос, что и в описанном ранее примере, множество решений совпадают, но одинаковые ли будут уравнения? Это уже вопрос о том, с точностью до чего рассматриваются уравнения, с точностью до каких преобразований плоскости. Поэтому ответ на вопрос, одинаковые ли уравнение и уравнение, домноженное на λ, зависит от той группы преобразований, которые допускаем, приводя одно уравнение к другому.

Изобразим набор коэффициентов в виде матрицы. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ – симметричная матрица.

Умножим эту матрицу на другие матрицы: $\underbrace{\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. В результате умножения матриц получится матрица 1×1.

Упражнение. Посчитать произведение трёх матриц и убедиться, что оно равно уравнению в определению кривой второго порядка.

Пример. Гипербола – выражение вида $y = \frac{a}{x}$, приведём к другому виду $xy - a = 0$. Является ли она кривой второго порядка? Да, гипербола – это КВП, где $a_{12} = \frac{1}{2}, a_{33} = -a$.

2.1.1. Конические сечения

Посмотрим на матричное уравнение расширенно. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$

Формально необходимо рассматривать в трёхмерном пространстве и декартовой системе координат $xOyz$. Тогда уравнение в определении КВП будет иметь вид:
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$
С точки зрения алгебры это многочлен от трёх переменных, где все слагаемые второй степени.

Определение 57.

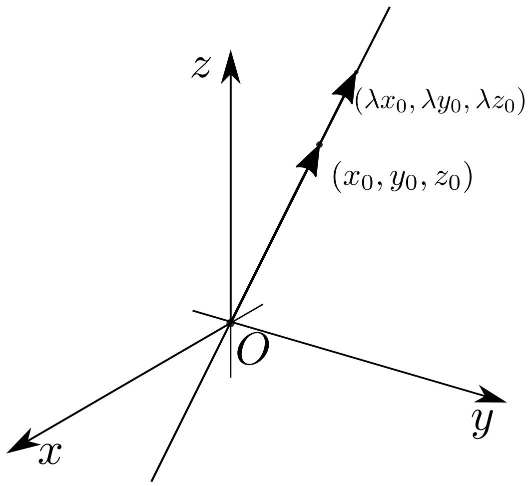
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

– однородный многочлен второй степени от трёх переменных.

Однородность подразумевает под собой, что если заменить значения переменной следующим образом: $x = \lambda x, y = \lambda y, z = \lambda z$, то при подстановке в многочлен выражение примет вид:
$a_{11}\lambda^2 x^2 + 2a_{12}\lambda x\lambda y + a_{22}\lambda^2 y^2 + 2a_{13}\lambda x\lambda z + 1a_{23}\lambda y\lambda z + a_{33}\lambda^2 z^2 = \lambda^2(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2) = 0$. Замена переменных на переменную, умноженную на константу, не меняет самого уравнения, поскольку константа выносится.

Геометрический смысл однородности в трёхмерном пространстве:
Заметим, что $x = 0, y = 0, z = 0$ удовлетворяет уравнению.
Предположим, что есть точка с координатами (x_0, y_0, z_0), которая является решением. Что означает однородность? Какое бы число λ ни взяли, то в силу однородности это λ выносится, и равенство нулю подтверждается. (x_0, y_0, z_0) – координаты радиус-вектора, заменили на $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$, каждую координату умножили на λ, этот радиус-вектор стал с новыми коор-

динатами. Но λ – любое, значит, это множество точек – прямая, проходящая через начало координат.



Если какая-то точка является решением матричного уравнения, то и вся прямая, которая проходит через эту точку и начало координат, является решением уравнения.
Что собой представляет решение однородного уравнения? Оно собой представляет точку O и совокупность прямых, проходящих через точку O.

Определение 58. Множество точек пространства, которое состоит из фиксированной точки и некоторых совокупностей прямых, проходящих через точку, называется **конус**, где O – вершина.

Пример. $x^2+y^2+z^2 = 0$. Единственное решение - $(0,0,0)$, что есть только одна точка? начало координат.

Вернёмся к исходному виду:
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$
, где первое уравнение – уравнение конуса в пространстве, а второе – линейное уравнение в пространстве, которое задаёт плоскость, параллельную xOy.
В геометрическом смысле система – пересечение множества решений. У первого уравнения решение – некий конус, у второго – плоскость, тогда их пересечение – кривая второго порядка, что есть коническое сечение.

Замечание. Любая КВП является коническим сечением, но в обратную сторону бывает только с оговорками. Конус обязательно должен быть задан как однородный многочлен второй степени от трёх переменных.

2.2. Центральные КВП

$\mathbb{R}^2$, xOy. Запишем КВП в общем виде: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.
Применим некоторые преобразования декартовой системы координат xOy. Сдвинем ДСК в другую точку параллельным переносом, где точка O' с координатами (x_0, y_0) будет новым началом координат, а x', y' – новые оси. Тогда можно записать систему: $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$, тогда вектором сдвига будет вектор с координатами (x_0, y_0).
Поскольку теперь у нас новые координаты, то уравнение изменится, но сама КВП (как множество решений) уравнения не изменилась. С некоторой точки зрения "новое уравнение" , которое получим после замены системы координат, будет то же самое уравнение с точностью до преобразований.
Мы рассматриваем некоторую совокупность преобразований, в данном случае – совокупность параллельных переносов, она образует множество, где мы можем последовательно применять параллельный перенос, в результате всё время будет параллельный перенос. В алгебре такая совокупность является группой относительно композиции этих преобразований. Идею, где мы рассматриваем некоторую совокупность преобразований, чтобы посмотреть, как изменяются уравнения под действием некоторых групп преобразований, будем эксплуатировать в данном вопросе. Мы разберём, что произойдёт с уравнением под действием группы параллельных переносов.
Выше записаны явно преобразования координат, мы запишем их в исходное уравнения, где в результате будут только x', y'. Действительно ли получится многочлен второй степени после замены координат?

Утверждение 4. Если $\begin{cases} x = k_{11}x' + k_{12}y' + a \\ y = k_{21}x' + k_{22}y' + b \end{cases}$ и $\det \|k_{ij}\| \neq 0$, то КВП в новой системе координат остаётся КВП.

Доказательство. "Устное". Что произойдёт, если заметить переменные x, y на линейные выражения? Слева будет сумма линейных выражений в квадрате, что есть многочлены второй степени, в совокупности вся сумма – многочлен, у которого степень не увеличится. КВП как многочлен опять перейдёт в многочлен степени не выше двух.
А может ли эта степень уменьшиться? Если степень уменьшилась до единицы, то КВП, вообще говоря, перестала быть КВП. Если это преобразование было невырожденным, то есть определитель матрицы коэффициентов был не нуль, то у такого преобразование есть обратное. Что это за преобразование? Была какая-то система координат, которую перевели в другую систему координат. Если эта матрица невырожденная, то эта система координат действительно перешла в новую систему координат, а не превратилась в образ всей плоскости. Тогда от новой системы координат можно перейти обратно, что является линейным выражением, которое можно записать явно, где степень многочлена не меняется. В силу обратимости степень сохраняется. □

Вывод: можно спокойно преобразовывать АСК, степень многочлена при этом сохраняется.
$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ Как выглядит матрица коэффициентов в этой системе?

Заметим, что $k_{11} = 1, k_{12} = 0, k_{21} = 0, k_{22} = 1$.
Тогда матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, что есть единичная матрица, определитель которой не нуль.
При подстановке в уравнение КВП, у переменных появятся новые коэффициентов:

$$x'^2 : a_{11}$$

$$x'y' : 2a_{12}$$

$$y'^2 : a_{22}$$

Заметим, что после параллельного переноса квадратичная часть не меняется. Чего нельзя сказать про линейную часть. Выпишем коэффициенты при других слагаемых:

$$x' : 2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_{13} = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})$$

$$y' : 2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_{23} = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})$$

$$1 : a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_o + 2a_{23}y_0 + a_{33}$$

Если обозначить многочлен как $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$, то свободный член есть не что иное, как $F(x_0, y_0)$, т.е. значение многочлена на координатах начала новой системы координат.
Посмотрим на уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Что для такого уравнения означает отсутствие линейной части без свободного коэффициента? Таким образом, рассмотрим $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$, т.е. тут все слагаемые чётной степени.
Возьмём решение (x_0, y_0) и $(-x_0, -y_0)$, с геометрической точки зрения это означает две точки, симметричные относительно начала координат.
Если (x_0, y_0) – решение, то и $(-x_0, -y_0)$ – решение, это означает, что множество решений многочлена только с чётными степенями обладает таким геометрическим свойством: любое решение даёт решение, симметричное относительно начала координат, т.е. множество решений уравнения является центрально симметричным, где центр симметрии – начало координат.
Например, у окружности существует центр симметрии, а у параболы его не существует. Таким образом, есть кривые, у которых есть центр симметрии, и кривые, у которых его нет.

Вернёмся к исходному многочлену второй степени:
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.
Хотим установить, существует ли у него центр симметрии. Для этого перенесём начало координат, т.е. сделать перенос так, чтобы попасть на центр симметрии; если в него попасть, то исчезнет линейная часть. Мы знаем коэффициенты при x' и y', то есть они должны быть равны нулю, необходимо решить систему: $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$
Если у неё есть решение, то на точку с координатами (x_0, y_0), которое и есть решение системы, необходимо перенести центр, линейная часть исчезнет, у КВП будет центр симметрии. Если у системы решений нет, то у КВП нет центра симметрии.
Решим систему, написанную выше, выпишем матрицу: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, это главный минор матрицы многочлена.

Определение 59.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$
– матрица главных членов (главных коэффициентов).

Будем обозначать $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \delta$ и рассмотрим разные случаи.

1. $\delta \neq 0$. $\exists!(x_0, y_0)$ – центр симметрии. КВП – **центральная**.
2. $\delta = 0$. Может быть два исхода:
   а) $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$, $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} \neq \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$. Множество решений системы – $\varnothing$, у кривой нет центров симметрии.
   б) $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$, $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$. Центров будет бесконечно много, а множество центров является прямой с уравнением: $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$.

Определение 60. КВП называется **центральной**, если $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$.
Другими словами: КВП называется центральной, если матрица главных членов невырожденная.

Пример. 1. Окружность. $x^2 + y^2 = R^2$. Матрица главных коэффициентов: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, определитель которой не нуль, значит, у неё есть центр.
2. Парабола. $y = x^2$, запишем в другом виде: $x^2 - y = 0$. Матрица всего многочлена имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, тогда определитель матрицы главных коэффициентов: $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Следовательно КВП не является центральной.
3. Две прямые, параллельные друг другу. У этой КВП будет центр симметрии, это любая точка на прямой между этими прямыми, которая параллельна им и лежит на одинаковом расстоянии от них. Например, задать КВП как $y^2 = 1$, тогда центром будет $y = 0$.

Явно запишем решение этой системы: $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$

$x_0 = \dfrac{a_{23}a_{12} - a_{13}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$, $y_0 = \dfrac{a_{23}a_{11} - a_{13}a_{12}}{a_{12}^2 - a_{22}a_{11}}$, где в знаменателе записан определитель матрицы главных коэффициентов, т.е.
$x_0 = \dfrac{a_{23}a_{12} - a_{13}a_{12}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$, $y_0 = \dfrac{-a_{23}a_{11} + a_{13}a_{12}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$, но и числитель можно интерпретировать как матрицу,

т.е. можно записать решение системы в следующем виде:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}},\ y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Приведём систему к следующему виду: $\begin{cases} a_{11}x_0^2 + a_{12}y_0x_0 + a_{13}x_0 = 0 \\ a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{23}y_0 = 0 \end{cases}$, где прибавим ко второму уравнению первое, получим: $a_{11}x_0^2 + 2a_{12}y_0x_0 + a_{22}y_0^2 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 = 0$, теперь получившееся уравнение вычтем из многочлена $F(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}$. Получим

$$F(x_0, y_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Если существует центр и перенести начало координат в точку с координатами (x_0, y_0), то свободный коэффициент равен получившемуся выражению $F(x_0, y_0)$. Подставим x_0, y_0 в это выражение.

$$F(x_0, y_0) = a_{13}\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} - a_{23}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} + a_{33}\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0) = \frac{a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

В числителе записано разложение матрицы коэффициентов уравнения КВП по третьей строке. Напомню, как выглядит эта матрица: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, определитель которой записывается как Δ. Тогда можно записать следующим образом:

$$F(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}, \delta \neq 0$$

Если $\delta \neq 0$, то свободный коэффициент при переносе в точку центра симметрии равен $\frac{\Delta}{\delta}$.

Определение 61. Если КВП центральная, то перенос начала координат в её центр приводит уравнение к виду

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

где x', y' — координаты относительно новой системы.

2.3. Преобразования плоскости

2.3.1. Аффинные преобразования

Определение 62. Преобразованием плоскости называется биективное отображение $\varphi : \pi \to \pi$.

Определение 63. Аффинное преобразование $\varphi : \pi \to \pi$ – преобразование вида

$$\overline{x}' = A\overline{x} + \overline{a}$$

где A – обратимая матрица 2×2, а $\overline{a} \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 5. Аффинные преобразования образуют группу относительно композиции.

Доказательство. 1. Замкнутость. Пусть есть два аффинных преобразования:

$$\varphi_1 : \overline{x}_1' = A_1\overline{x} + \overline{a}_1, \qquad \varphi_2 : \overline{x}_2' = A_2\overline{x} + \overline{a}_2$$

Тогда

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 : A_2(A_1\overline{x} + \overline{a}_1) + \overline{a}_2 = A_2A_1\overline{x} + (A_2\overline{a}_1 + \overline{a}_2)$$

2. Ассоциативность очевидна
3. В качестве нейтрального элемента:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. В качестве обратного:

$$A_2 = A_1^{-1}, \overline{a}_2 = -A_1^{-1}\overline{a}_1$$

□

Теорема 6 (Свойства аффинных преобразований). Рассматриваем $\overline{x}' = A\overline{x}$. Тогда

- Если $\overline{x} = \alpha\overline{e}_1 + \beta\overline{e}_2$, то
$$\overline{x}' = \alpha(A\overline{e}_1) + \beta(A\overline{e}_2)$$
- Прямые переходят в прямые
- Углы не сохраняются
- Расстояние между точками не сохраняется
- Пропорциональность коллинеарных точек сохраняется
- Параллельность прямых сохраняется

2.3.2. Преобразование поворота

Определение 64.

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha x - \sin\alpha y + a_1 \\ y' = \sin\alpha x + \cos\alpha y + a_2 \end{cases}$$

В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \det A = 1$$

A называется матрицей поворота, а преобразование называется преобразованием *поворота.*

Замечание. Совокупность таких отображений – группа.

Замечание. Геометрический смысл – поворот против часовой стрелки на угол α + параллельный перенос.

Определение 65. Совокупность

$$\mathcal{O}^+ : \begin{cases} x' = \cos\alpha x - \sin\alpha y + a_1 \\ y' = \sin\alpha x + \cos\alpha y + a_2 \end{cases}$$

$$\mathcal{O}^- : \begin{cases} x' = \cos\alpha x - \sin\alpha y + a_1 \\ y' = -\sin\alpha x - \cos\alpha y + a_2 \end{cases}$$

называется группой ортогональных преобразований (или группой движений плоскости).

Обозначение. $\mathcal{O}$ – группа ортогональных преобразований.

2.4. Диагонализация КВП. Инварианты

Теорема 7. Кривая второго порядка задана уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Тогда любое уравнение КВП можно привести к уравнению, матрица старших коэффициентов которого имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Доказательство. Будем делать это при помощи поворота. Поскольку при параллельном переносе квадратичная часть уравнения КВП не меняется, то будем рассматривать повороты, где

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \overline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, выразим старые координаты через новые:

$$\overline{x} = \mathcal{O}\overline{x}'$$

Выпишем теперь коэффициенты при слагаемых в квадратичной части:

$$\begin{aligned}
(x')^2 &: \quad a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha \\
x'y' &: \quad -2a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha \\
(y')^2 &: \quad a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$a'_{12} = (a_{22} - a_{11})\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{a_{22} - a_{11}}{2}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha$$

Откуда

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \Rightarrow \exists\alpha : a'_{12} = 0$$

□

Определение 66. Заметим, что $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$. Эту величину обозначают I_1 и называют *первым инвариантом.*

Теорема 8 (Второй и третий инварианты). Пусть КВП задается уравнением:

$$\overline{x}^T A\overline{x} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \det A$$

называются вторым и третьим инвариантом и обозначают I_2 и I_3 соответственно.

Доказательство. Выполним диагонализацию КВП, т.е. введем преобразование плоскости:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Также обозначим

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{O}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{O} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\overline{x}'^T\left(\widetilde{\mathcal{O}}^T A \widetilde{\mathcal{O}}\right)\overline{x}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{O}^T A_0 \mathcal{O} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = 0$$

где A_0 – матрица старших коэффициентов. Из такой записи видно, что

$$\Delta' = \det\left(\widetilde{\mathcal{O}}^T A \widetilde{\mathcal{O}}\right) = \det A = \Delta$$
$$\delta' = \det\left(\mathcal{O} A_0 \mathcal{O}\right) = \det A_0 = \delta$$

□

Утверждение 5. Все остальные инварианты порождаются I_1, I_2, I_3.

Замечание. Первый, второй и третий инварианты здесь и далее обозначаются I, δ и Δ соответственно, если не оговорено иное.

Замечание. Инварианты можно ввести и в общем виде. Зададим аффинное преобразование:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение КВП принимает вид

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Если $C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$, то

$$\Delta' = \det\left(\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det C \cdot \Delta \cdot \det C$$

Таким образом, чтобы сохранялся третий инвариант, достаточно, что $\det C = \pm 1$.
Заметим, что, если $C \in SL(n)$, где $SL(n)$ – группа матриц с определителем, равным 1, то

$$\begin{pmatrix} C^T & O \\ B^T & E \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline O & E \end{array}\right)\right) = \begin{pmatrix} A_1 C & A_1 B + A_2 \\ A_3 C & A_3 B + A_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} C^T A_1 C & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \delta' = \det C \cdot \delta \cdot \det C \Rightarrow \delta$ – инвариант.

2.5. Классификация КВП. Тип I.

Определение 67. Два уравнения КВП называются эквивалентными, если существует такое ортогональное преобразование, которое переводит одно уравнение в другое.

Замечание. Таким образом, множество всех КВП разбиваются на классы эквивалентности. Такое разбиение и называется *евклидовой* классификацией.

Замечание. Можно задать отношение эквивалентности следующим образом: два уравнения КВП называются эквивалентными, если существует *аффинное* преобразование, которое переводит одно уравнение в другое. Такое отношение будет задавать разбиение, называемое *аффинной* классификацией.

Замечание. Существует также *проективная* классификация.

Пример. Существует ли ортогональное преобразование, переводящее $x^2 + y^2 - 1 = 0$ в $2x^2 + 2y^2 - 2 = 0$. Запишем матрицу первого уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда $\delta_1 = 1$, а $\delta_2 = 4$, т.е. нарушается инвариант $\Rightarrow$ такого преобразования не существует.

Замечание. Классификация заключается в выделении из каждого класса *канонического* уравнения.

Теорема 9 (Классификация кривых второго порядка, тип I)**.** Пусть КВП задается уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0$$

где $\delta = a_{11}a_{22} \neq 0$. Тогда его можно при помощи ортогональных преобразований свести к одному из следующих уравнений:

1. $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma, \gamma > 0$ – эллипс
2. $\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma, \gamma > 0$ – мнимый эллипс
3. $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$ – мнимые пересекающиеся прямые
4. $\alpha x^2 - \beta y^2 = \gamma, \gamma \neq 0$ – гипербола
5. $\alpha x^2 - \beta y^2 = 0$ – две пересекающиеся прямые

где $\alpha, \beta > 0$

Доказательство. Во-первых, сделаем диагонализацию КВП, избавившись таким образом от слагаемого с xy. Далее, выделим полный квадрат в выражении:

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}\right) = a_{11}\left(\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right)$$

Аналогично

$$a_{22}x^2 + 2a_{23}x = a_{22}\left(x^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{22}}\right) = a_{22}\left(\left(x + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right)$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - a_{22}\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + a_{33} = 0$$

Введем ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ y' = y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \\ a'_{33} = -a_{22}\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + a_{33} = 0 \end{cases}$$

Получим, что

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0$$

Матрица этого уравнение имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \delta = a_{11}a_{22}, \quad \Delta = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Если $\delta > 0$, т.е. a_{11} и a_{22} одного знака, то нам нужно рассмотреть три случая:

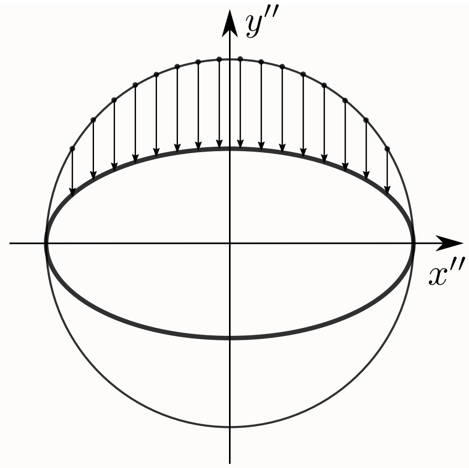
1. a'_{33} другого знака Не уменьшая общности, будем считать, что $a_{ii} > 0$. Применим следующее преобразование плоскости:

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = \sqrt{a_{11}}y \end{cases}$$

   т.е. сжатие или растяжение вдоль оси OY. Тогда уравнение принимает вид

$$x''^2 + y''^2 = \frac{a''_{33}}{a_{11}}$$

   и задает окружность радиуса $\sqrt{\frac{a''_{33}}{a_{11}}}$



2. a'_{33} того же знака. В таком случае множество решение пусто, а класс таких уравнений называется *мнимым эллипсом*
3. $a'_{33} = 0$. Множество решений – точка, а класс называется *мнимые пересекающиеся прямые*.

Если же $\delta < 0$, то не имеет значения, какого знака a'_{33}, поскольку мы всегда можем "поменять"x и y ортогональным преобразованием:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}'$$

Остается только рассмотреть следующие случаи:

1. $a'_{33} \neq 0$, т.е. $\Delta \neq 0$. Не умаляя общности, перепишем уравнение в следующем виде:

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = \gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Сделаем замену $y = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y'$, т.е. сделаем "сжатие":

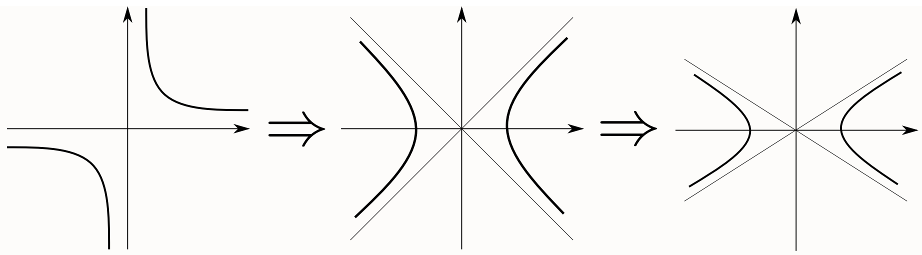
$$x^2 - y^2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{(x-y)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x+y)}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2\alpha}$$

Сделаем теперь преобразование поворота на 45°:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Тогда получим:

$$x'y' = \frac{\gamma}{2\alpha}$$



2. $a'_{33} = 0$. Тогда не умаляя общности

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = 0, \qquad \alpha, \beta > 0$$

задает две пересекающиеся прямые.

□

2.6. Классификации КВП. Тип II. Аффинная классификация

Теорема 10 (Классификация КВП, тип II). Пусть КВП задается уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0$$

где $\delta = a_{11}a_{22} = 0$. Тогда его можно при помощи ортогональных преобразований свести к одному из следующих уравнений:

1. $y^2 = 2px, p > 0$ – парабола.
2. $y^2 = \alpha, \alpha > 0$ – две параллельные прямые.
3. $y^2 = -\alpha, \alpha > 0$ – две мнимые параллельные прямые.
4. $y^2 = 0$ – две слившиеся прямые.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $a_{11} = 0$, поскольку всегда можно поменять x и y местами. Далее сделаем параллельный перенос так, чтобы прийти к уравнению вида:

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

Если $a_{13} \neq 0$, то сделаем замену $x' = x + \frac{a_{33}}{a_{13}}$. Получим, что

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{2a_{13}}{a_{22}}x$$

Положим $p = \frac{a_{13}}{a_{22}}$. Можно считать, что $p > 0$, т.к. мы всегда можем отразить КВП относительно OY преобразованием:

$$\begin{cases} x = -x \\ y = y \end{cases}$$

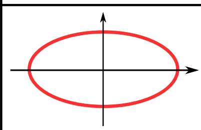
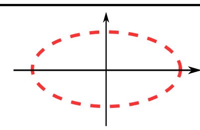
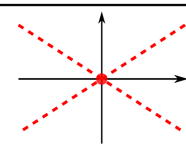
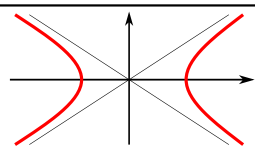
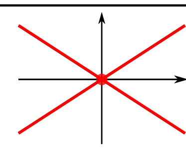
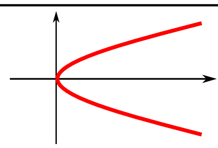
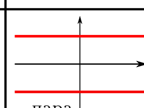
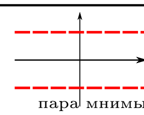
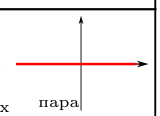
Если $a_{13} = 0$, тогда уравнение имеет вид

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

1. Если $a_{22}a_{33} < 0$, то $y^2 = \alpha, \alpha > 0$ – задает две параллельные прямые.
2. Если $a_{22}a_{33} > 0$, то $y^2 = -\alpha, \alpha > 0$ – две мнимые пересекающиеся прямые.
3. Если $a_{33} = 0$, то $y^2 = 0$ – две слившиеся прямые.

□

Замечание. Классификацию КВП можно резюмировать с помощью таблицы:

$\delta \backslash \Delta$	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	 эллипс  мнимый эллипс	 пара мнимых пересекающихся прямых
$\delta < 0$	 гипербола	 пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	 парабола	 пара параллельных прямых  пара мнимых параллельных прямых  пара совпадающих прямых

Теорема 11 (Аффинная классификация кривых второго порядка)**.** Пусть КВП задается уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0$$

Тогда, посредством аффинных преобразований, его можно свести к одному из следующих:

1. $x^2 + y^2 = 1$ – эллипс
2. $x^2 + y^2 = -1$ – мнимый эллипс
3. $x^2 + y^2 = 0$ – мнимые пересекающиеся прямые
4. $x^2 - y^2 = 1$ – гипербола
5. $x^2 - y^2 = 0$ – две пересекающиеся прямые
6. $y^2 = x$ – парабола
7. $y^2 = 1$ – параллельные прямые
8. $y^2 = -1$ – мнимые параллельные прямые
9. $y^2 = 0$ – две слившиеся прямые