Logaritmlagarna

Räknereglerna för logaritmer kallas **logaritmlagarna**.

Logaritmlagarna
Första logaritmlagen: $\lg x + \lg y = \lg xy$

Andra logaritmlagen: $\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$

Tredje logaritmlagen: $\lg x^p = p \cdot \lg x$

där $x > 0$ och $y > 0$

Härledning – Första logaritmlagen
Vi skriver multiplikationen $x \cdot y$ på två sätt.

Sätt 1: $x \cdot y = 10^{\lg x} \cdot 10^{\lg y} = \mathbf{10^{\lg x + \lg y}}$
Sätt 2: $x \cdot y = \mathbf{10^{\lg (x \cdot y)}}$

Eftersom dessa motsvarar samma sak, måste de vara lika, så
$10^{\lg x + \lg y} = 10^{\lg (x \cdot y)}$

Eftersom vi har en likhet med samma bas, måste exponenterna vara lika, så
$\lg x + \lg y = \lg xy$ vsv

Härledning – Andra logaritmlagen
Vi skriver divisionen $\frac{x}{y}$ på två sätt.

Sätt 1: $\frac{x}{y} = \frac{10^{\lg x}}{10^{\lg y}} = \mathbf{10^{\lg x - \lg y}}$

Sätt 2: $\frac{x}{y} = \mathbf{10^{\lg \frac{x}{y}}}$

Eftersom dessa motsvarar samma sak, måste de vara lika, så
$10^{\lg x - \lg y} = 10^{\lg \frac{x}{y}}$

Eftersom vi har en likhet med samma bas, måste exponenterna vara lika, så

$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$ vsv

Härledning – Tredje logaritmlagen
Vi skriver x^p på två olika sätt.

Sätt 1: $x^p = (10^{\lg x})^p = 10^{p \cdot \lg x}$
Sätt 2: $x^p = 10^{\lg x^p}$

Eftersom dessa motsvarar samma sak, måste de vara lika, så
$10^{p \cdot \lg x} = 10^{\lg x^p}$

Eftersom vi har en likhet med samma bas, måste exponenterna vara lika, så
$p \cdot \lg x = \lg x^p$ vsv

Med den tredje logaritmlagen kan vi lösa exponentialekvationer, på ytterligare ett sätt.

Lösa exponentialekvationer med tredje logaritmlagen
1. Logaritmera båda led i ekvationen (sätt lg framför båda uttrycken).
2. Multiplicera ner exponenten, enligt tredje logaritmlagen och lös sedan som vanligt.

Vi kan nu även stöta på logaritmekvationer med flera logaritmtermer.

Lösa logaritmekvationer med flera logaritmtermer
Skriv om båda led som en enda logaritm med hjälp av logaritmlagarna. Logaritmfunktionen kan därefter strykas och vi löser ekvationen som vanligt.

Ex. Beräkna utan räknare (E)
a) $\lg 25 + \lg 4$ b) $\lg 3\,000 - \lg 3$

Vi utnyttjar första logaritmlagen och får
$\lg 25 + \lg 4 = \lg (25 \cdot 4) = \lg 100 = 2$

Svar: 2

b) Vi utnyttjar andra logaritmlagen och får
$\lg 3\,000 - \lg 3 = \lg \dfrac{3\,000}{3} = \lg 1\,000 = 3$

Svar: 3

Ex. Lös ekvationerna med tredje logaritmlagen.

a) $5^x = 136$ (E) b) $4 \cdot 5^x = 3 \cdot 2^x$ (C)

a) $5^x = 136$

Vi logaritmerar båda led.

$\lg 5^x = \lg 136$

Vi multiplicerar ner exponenten och löser sedan ekvationen som vanligt.

$x \cdot \lg 5 = \lg 136$

$$\frac{x \cdot \lg 5}{\lg 5} = \frac{\lg 136}{\lg 5}$$

$$x = \frac{\lg 136}{\lg 5} \approx 3{,}05$$

Svar: $x = \frac{\lg 136}{\lg 5} \approx 3{,}05$

b) $4 \cdot 5^x = 3 \cdot 2^x$

Vi samlar faktorerna med exponenter på samma sida för att därefter skriva om dem med en enda exponent. Därefter logaritmerar och löser med tredje logaritmlagen.

$$\frac{5^x}{2^x} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{3}{4}$$

$$\lg \left(\frac{5}{2}\right)^x = \lg \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$x \cdot \lg \left(\frac{5}{2}\right) = \lg \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$x = \frac{\lg \left(\frac{4}{3}\right)}{\lg \left(\frac{5}{2}\right)} \approx 0{,}31$$

Svar: $x = \frac{\lg \left(\frac{4}{3}\right)}{\lg \left(\frac{5}{2}\right)} \approx 0{,}31$

Ex. Lös ekvationen (C)
$2 \lg 5 + \lg 4 = \lg 2x$

Vi börjar med att skriva om den första termen i VL med tredje logaritmlagen.
$\lg 5^2 + \lg 4 = \lg 2x$
$\lg 25 + \lg 4 = \lg 2x$

Vi skriver sedan om hela VL med första logaritmlagen.
$\lg (25 \cdot 4) = \lg 2x$
$\lg 100 = \lg 2x$

Vi har nu en enda logaritm i båda led och kan ta bort logaritmfunktionen från båda sidor och sedan lösa ekvationen som vanligt.
$100 = 2x$
$\frac{100}{\mathbf{2}} = \frac{2x}{\mathbf{2}}$
$50 = x$

Svar: $x = 50$