pq-formeln

Ekvationer som innehåller x^2-termer, x-termer och konstanttermer kan vi varken lösa med vår vanliga metod eller med nollproduktmetoden. Dessa ekvationer löser vi med ***pq*-formeln**.

***pq*-formeln**
$x^2 + px + q = 0$

har lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Konstanttermen med ombytt tecken.

Halva koefficienten framför *x*-termen med ombytt tecken.

Föregående tal upphöjt till 2. (Eventuellt minustecken innan kan bortses.)

OBS! En förutsättning för att *pq*-formeln ska kunna användas är att ekvationen är lika med 0 och att vi inte har någon koefficient framför x^2-termen.

Härledning – *pq*-formeln
Vi utgår från ekvationen
$x^2 + px + q = 0$

Vi subtraherar båda led med q för att få x-termerna ensamma i VL.
$x^2 + px + q \mathbf{- q} = 0 \mathbf{- q}$
$x^2 + px = -q$

Vi adderar $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ till båda led, så att VL kan skrivas som en kvadreringsregel.

$$x^2 + px + \boldsymbol{\left(\frac{p}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\left(\frac{p}{2}\right)^2} - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Vi drar roten ur båda led och löser sedan ut x.

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x + \frac{p}{2} \boldsymbol{- \frac{p}{2}} = \boldsymbol{-\frac{p}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

vsb.

Ex. Lös ekvationerna

a) $x^2 + 6x - 7 = 0$ b) $3x^2 - 15x + 18 = 0$ c) $x^2 = 39 - 10x$

a) $x^2 + 6x - 7 = 0$

Vi identifierar p och q.
$p = 6$ och $q = -7$

Insättning av dessa i pq-formeln ger

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-7)}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 7}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9 + 7}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{16}$$

$$x = -3 \pm 4$$

Detta ger lösningarna
$x_1 = -3 - 4 = -7$
$x_2 = -3 + 4 = 1$

Svar: $x_1 = -7$ och $x_2 = 1$

Alternativ (och snabbare) lösning med ord:

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 7}$$

Konstanttermen med ombytt tecken. − 7 blir + 7.

Halva koefficienten framför *x*-termen med ombytt tecken. (Hälften av 6 med ombytt tecken är lika med −3.)

Föregående tal (3) upphöjt till 2. (Minustecknet innan kan bortses.)

… som ger samma lösningar som föregående metod.

b) $3x^2 - 15x + 18 = 0$

För att kunna använda pq-formeln dividerar vi båda led med 3 för att få bort koefficienten framför x^2-termen.

$\frac{3x^2}{3} - \frac{15x}{3} + \frac{18}{3} = \frac{0}{3}$
$x^2 - 5x + 6 = 0$

pq-formeln ger

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$

Detta ger lösningarna

$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Svar: $x_1 = 2$ och $x_2 = 3$

c) $x^2 = 39 - 10x$

För att kunna använda *pq*-formeln gör vi om ekvationen så att ena ledet blir lika med 0.
$x^2 \mathbf{+ 10}\boldsymbol{x} \mathbf{- 39} = 39 - 10x \mathbf{- 39 + 10}\boldsymbol{x}$
$x^2 + 10x - 39 = 0$

Nu använder vi *pq*-formeln.
$x = -5 \pm \sqrt{5^2 + 39}$
$x = -5 \pm \sqrt{64}$
$x = -5 \pm 8$

Detta ger lösningarna
$x_1 = -5 - 8 = -13$
$x_2 = -5 + 8 = 3$

Svar: $x_1 = -13$ och $x_2 = 3$