

Antal lösningar till en andragradsekvation

pq -formeln säger att ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Uttrycket under rottecknet $\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)$ kallas **diskriminant**. Genom att undersöka diskriminantens tecken kan vi avgöra hur många lösningar ekvationen har.

Undersökning – Diskriminantens tecken

Positiv diskriminant

Ekvationen $x^2 + 6x - 7 = 0$ har lösningarna

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 7} = -3 \pm \sqrt{16}$$

Vi har en positiv diskriminant (16) och vi får två lösningar ($x = -3 \pm 4$).

Diskriminanten 0

Ekvationen $x^2 + 6x + 9 = 0$ har lösningarna

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = -3 \pm \sqrt{0}$$

Vi har diskriminanten 0 och vi får en lösning ($x = -3$).

Negativ diskriminant

Ekvationen $x^2 + 6x + 18 = 0$ har lösningarna

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 18} = -3 \pm \sqrt{-9}$$

Vi har en negativ diskriminant (-9) och vi saknar lösningar eftersom vi inte kan ta kvadratroten ur en negativt tal (inget tal multiplicerat med sig själv blir -9).

Vi sammanfattar undersökningen ovan.

Diskriminantens tecken och antal lösningar

Om diskriminantens tecken är har ekvationen ...
positiv	två lösningar
noll	en lösning
negativ	noll lösningar

Ex. Ange antalet lösningar till

a) $x^2 + 12x - 13 = 0$

b) $x^2 + 5x + 8 = 0$

a) $x^2 + 12x - 13 = 0$

pq -formeln ger

$$x = -6 \pm \sqrt{6^2 + 13}$$

$$x = -6 \pm \sqrt{36 + 13}$$

$$x = -6 \pm \sqrt{49}$$

Diskriminanten (talet under rottecknet) är positiv (49). Alltså har ekvationen två lösningar.

Svar: 2

b) $x^2 + 5x + 8 = 0$

pq -formeln ger

$$x = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 8}$$

$$x = -2,5 \pm \sqrt{6,25 - 8}$$

$$x = -2,5 \pm \sqrt{-1,75}$$

Diskriminanten är negativ. Alltså saknar ekvationen lösningar.

Svar: 0

Ex. För vilka värden på a gäller att ekvationen $x^2 - 8x + a = 0$ har en enda lösning (en så kallad dubbelrot).

För att ekvationen ska ha en enda lösning ska diskriminanten vara lika med 0. Vi påbörjar en lösning med pq -formeln.

$$x^2 - 8x + a = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{4^2 - a}$$

Vi sätter nu diskriminanten lika med 0 och löser ekvationen.

$$4^2 - a = 0$$

$$16 - a = 0$$

$$16 - a + a = 0 + a$$

$$16 = a$$

Vi får alltså en enda lösning när $a = 16$.

Svar: $a = 16$