

Grafen till en andragsgradsfunktion

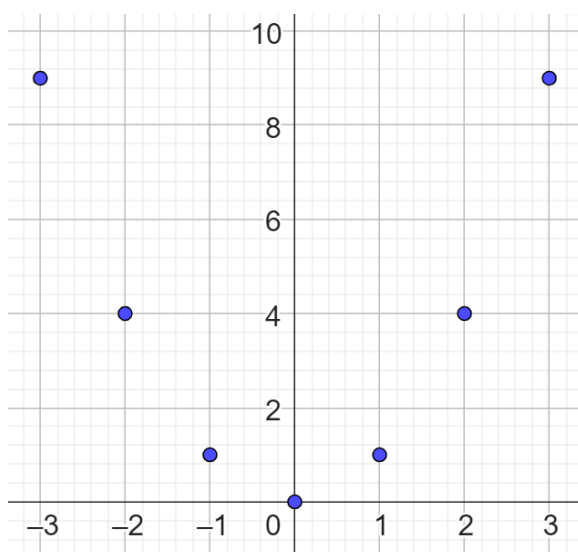
En funktion där variabeltermens största exponent är 2 kallas **andragradsfunktion**.

$f(x) = x^2 - 6$ och $g(x) = 3x^2 - 5x + 7$ är exempel andragradsfunktioner. x^2 och $3x^2$ kallas **andragradstermer**.

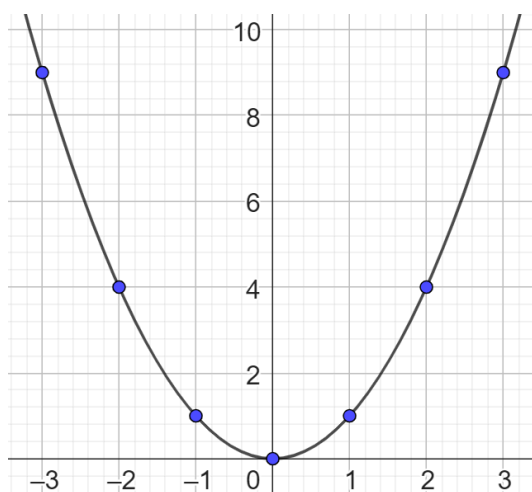
Vi kommer framför allt att använda digitala hjälpmedel för att rita grafer, men för förståelsen är det bra att kunna göra det för hand också. Vi ritar andragradsfunktionen $f(x) = x^2$ för hand.

Vi börjar med att rita upp en värdetabell för att få fram koordinater att pricka in. Vi väljer att gå från $x = -3$ till $x = 3$. För att beräkna y -koordinaten när $x = -3$ så sätter vi in -3 i vår funktion $f(x) = x^2$ och får $f(-3) = (-3)^2 = 9$. Sedan gör vi på motsvarande sätt för övriga x -värden. Vi prickar sedan in koordinaterna i ett koordinatsystem.

x	$y = f(x)$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^2 = 9$



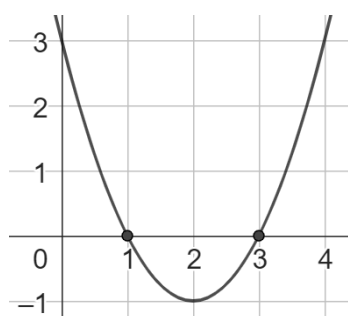
Vi förbinder sedan dessa punkter och får andragradsfunktionens graf.



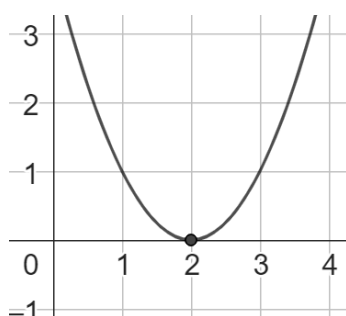
Vi ser att grafen till andragradsfunktionen bildar en "båge". Denna form kallas **parabel**. Parabeln kan antingen ha en "topp" där vi hittar grafens **maximipunkt** och största värde eller en "dal" där vi hittar grafens **minimipunkt** och minsta värde. Ett samlingsnamn för maximi- och minimipunkt är **extrempunkt**. En extrempunkt kan alltså antingen vara en maximi- eller en minimipunkt. Huruvida en extrempunkt är en maximi- eller minimipunkt kallas punktens **karaktär**.

Vi ser också att grafen är symmetrisk kring en lodrät linje som kallas **symmetrilinje**. Vi ser att extrempunkten ligger på symmetrilinjen (detta kommer vi att utnyttja framöver). Symmetrilinjens ekvation anges med dess x-koordinat. Om en symmetrilinje t.ex. ligger vid 3 på x-axeln är symmetrilinjens ekvation $x = 3$. Ibland skrivs den också $x_s = 3$.

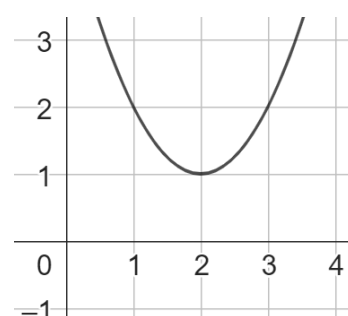
De x-värden där funktionens värde är 0 och där grafen till funktionen skär x-axeln kallas **nollställena**. Nollställena anges med sin x-koordinat. Om en graf skär x-axeln vid 5 är ett nollställe $x = 5$. En andragradsfunktion kan antingen ha två, ett eller sakna nollställena.



Två nollställena.



Ett nollställe.



Saknar nollställena.

Parabelns utseende

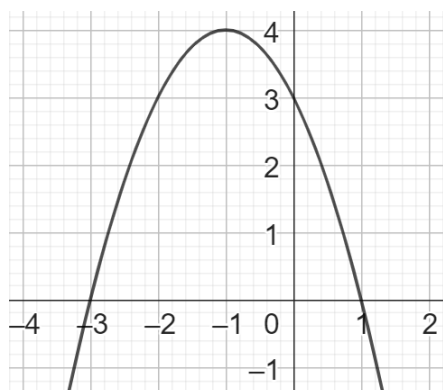
Om andragradstermen (t.ex. x^2 eller t^2) i en andragradsfunktion är

- positiv har grafen en minimipunkt (Minnesregel: positiv x^2 -term ger "glad mun")
- negativ har grafen en maximipunkt (Minnesregel: negativ x^2 -term ger "sur mun")

Ex. Rita grafen till funktionen $g(x) = -x^2 - 2x + 3$ och bestäm

- a) största värdet
- b) nollställena
- c) extrempunktens koordinater
- d) symmetrilinjens ekvation

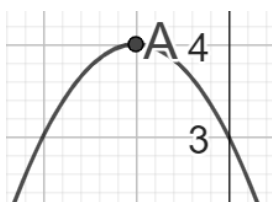
a) När vi ritar grafer i Geogebra ersätts funktionen med y , så i detta fall ersätts $g(x)$ med y . Vi skriver in $y = -x^2 - 2x + 3$ i inmatningsfältet i Geogebra och får nedanstående graf.



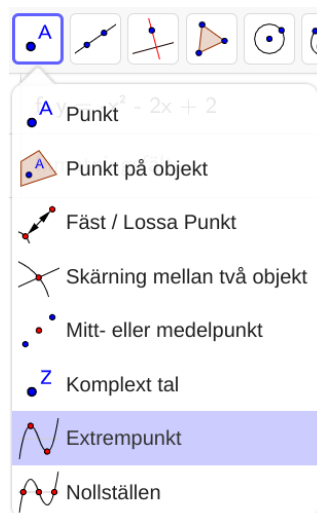
Vi ser att kurvan har en "topp" och därmed sitt största värde vid $y = 4$.

Om det är svårt att avläsa det största eller minsta värdet kan vi använda verktyget "Extrempunkt" i Geogebra. Klicka på "Extrempunkt" i menyn enligt bilden till höger.

Därefter klickar du någonstans på grafen. Största värdet kommer att markeras med en punkt på grafen och dess koordinat visas i menyn till vänster.



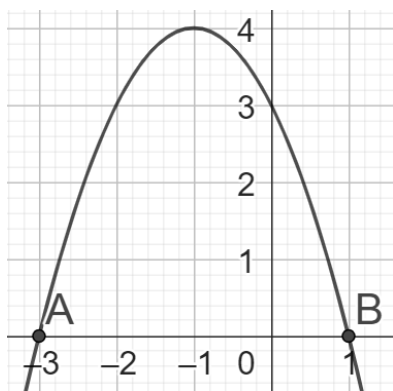
$$\begin{aligned}\text{VertexPunkter}(f) \\ = A = (-1, 4)\end{aligned}$$



Svar: Största värdet är 4.

b) Nollställena är där grafen skär x-axeln, dvs. vid $x = -3$ och vid $x = 1$.

Om det är svårt att avläsa nollställena kan vi använda verktyget "Nollställen" i Geogebra. Klicka på "Nollställen" i samma meny som där vi hittade "Extrempunkt". Därefter klickar du någonstans på grafen. Nollställena kommer att markeras och dess koordinater visas i menyn till vänster.



$$\begin{aligned}\text{Skärning}(f, \text{xAxeln}) \\ = A = (-3, 0) \\ B = (1, 0)\end{aligned}$$

Svar: $x = -3$ och $x = 1$

c) Extrempunktens koordinater är, i detta fall, koordinaterna för maximipunkten, dvs. $(-1, 4)$.

Svar: $(-1, 4)$

d) Symmetrilinjen är den lodräta linje som delar grafen i två likadana halvor. Den går alltid genom extrempunkten. Eftersom extrempunkten ligger vid $x = -1$, måste alltså symmetrilinjen också gå vid $x = -1$. Så symmetrilinjens ekvation är $x_s = -1$.

Svar: $x_s = -1$