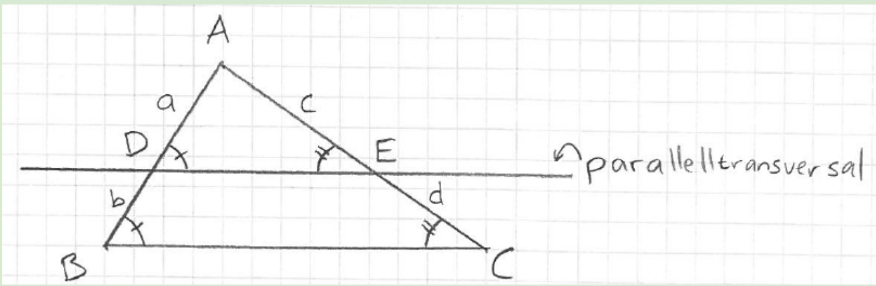
Triangelsatserna

Vi ska nu titta på några speciella samband i trianglar som tillsammans kallas **triangelsatserna**.

Topptriangelsatsen
En parallelltransversal bildar en topptriangel som är likformig med den ursprungliga triangeln.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$$



Parallelltransversalen är parallell med sidan BC.

Bevis – Topptriangelsatsen
$\wedge A$ är gemensam vinkel i $\triangle ABC$ och $\triangle ADE$.
$\wedge ABC = \wedge ADE$ (likbelägna vinklar)
$\triangle ABC$ och $\triangle ADE$ har alltså två lika vinklar $\Rightarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (trianglarna är likformiga)

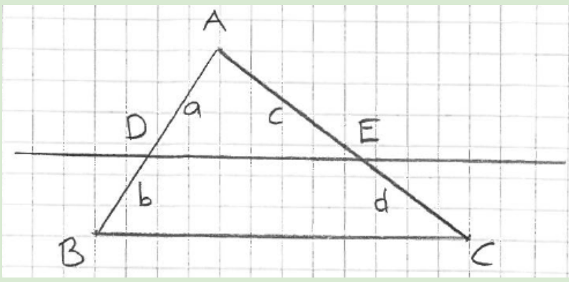
Förhållandet mellan motsvarande sidor är då lika, dvs.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$ **vsb.**

Transversalsatsen
En parallelltransversal delar en triangels sidor i samma förhållande.

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



Bevis – Transversalsatsen
Sedan tidigare har vi visat $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Detta ger

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

Vi inverterar båda led, delar upp bråken och löser sedan ut $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{c}{c} + \frac{d}{c}$

$1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{d}{c}$

Vi subtraherar 1 från båda led.

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Vi inverterar båda led.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **vsb.**

Topptriangelsatsen eller transversalsatsen

Om vi ska använda en triangelsats där topptriangelns bas

- <u>används</u> kan vi endast använda topptriangelsatsen.
- <u>inte används</u> kan vi använda både topptriangelsatsen och transversalsatsen. Tumregeln är då att använda transversalsatsen eftersom räkningen ofta blir enklare och snabbare.

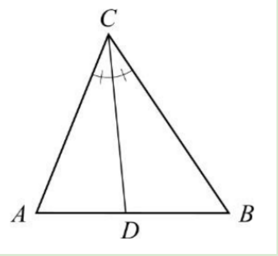
Bisektrissatsen

En bisektris (en stråle som delar en vinkel mitt itu) delar en triangel enligt förhållandet

$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$

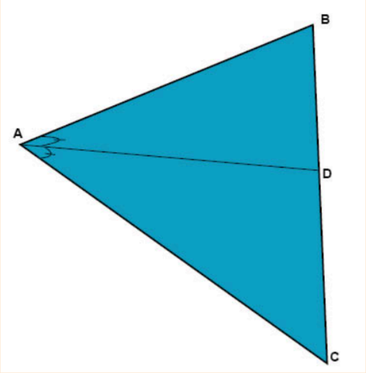
alternativt

$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$

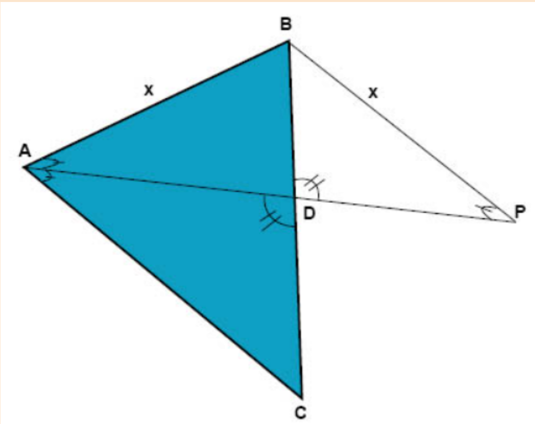


Bevis – Bisektrissatsen

Vi ritar en godtycklig triangel och ritar in en bisektris *AD*. Vi vill visa att $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$.



Vi förlänger bisektrisen till en punkt *P*, så att sträckorna *AB* och *BP* blir lika långa och bildar då en likbent triangel $\triangle ABP$.



Vi studerar ΔACD och ΔBDP.
$\wedge BAD = \wedge BPD$ (basvinklar i likbent triangel ΔABP)
$\wedge BAD = \wedge CAD$ (per definition eftersom *AP* är en bisektris som delar dem lika)

Alltså gäller
$\wedge BPD = \wedge CAD$
$\wedge BDP = \wedge ADC$ (vertikalvinklar)

ΔACD och ΔBDP har alltså två lika vinklar och är likformiga. Vi ställer upp sidförhållandena.

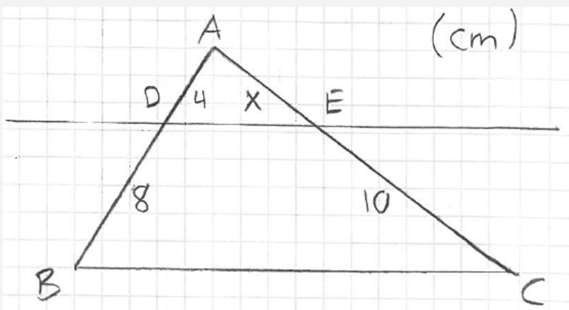
$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BP}$$

Eftersom *BP* = *AB* kan vi ersätta *BP* med *AB*, vilket ger

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$$ **vsb.**

Exempel 1. Bestäm sidan *x*.

Eftersom vi inte räknar på trianglarnas baser kan vi använda både transversalsatsen och topptriangelsatsen. Välj en metod. (Tumregeln är att använda transversalsatsen när det är möjligt.)



Transversalsatsen ger

$\frac{x}{10} = \frac{4}{8}$

$\frac{x}{10} \cdot \mathbf{10} = \frac{4}{8} \cdot \mathbf{10}$

$x = \frac{40}{8} = 5$

Svar: 5 cm

Topptriangelsatsen ger

$\frac{4}{4+8} = \frac{x}{x+10}$

$\frac{4}{12} = \frac{x}{x+10}$

Korsvis multiplikation ger

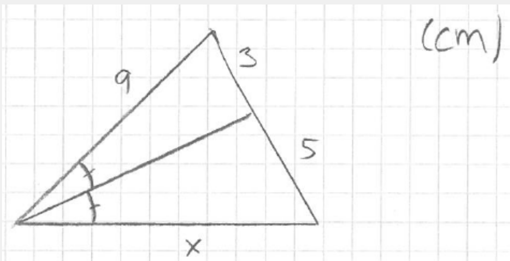
$4(x + 10) = 12x$
$4x + 40 = 12x$
$4x + 40 \mathbf{- 4x} = 12x \mathbf{- 4x}$
$40 = 8x$

$\frac{40}{\mathbf{8}} = \frac{8x}{\mathbf{8}}$

$5 = x$

Svar: 5 cm

Exempel 2. Bestäm sidan *x*.



Bisektrissatsen ger

$\frac{5}{3} = \frac{x}{9}$

Vi multiplicerar båda led med 9 för att lösa ut *x*.

$\frac{5}{3} \cdot \mathbf{9} = \frac{x}{9} \cdot \mathbf{9}$

$\frac{45}{3} = x$

$15 = x$

Svar: 15 cm