

Mönster och formler

En serie av tal kallas **talföljd**. Talen i talföljden kallas **element**.

Betrakta nedanstående talföljd.

3, 7, 11, 15, 19, ...

Elementen betecknas a_n där n står för **ordningsnumret**. Här gäller

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 7$$

$$a_3 = 11$$

...

En formel för att direkt beräkna ett element i talföljden kallas **sluten formel**.

Ex. Vi har talföljden 3, 7, 11, 15, 19, ...

a) Ange en sluten formel för talföljden.

b) Vilket är det 100:e talet i talföljden?

a) Vi kallar det n :te talet i talföljden a_n . Vi ser att varje tal i talföljden fås genom att addera 4 till det föregående talet. Då måste termen $4n$ finnas med i formeln, så

$$a_n = 4n$$

Vi vet att $a_1 = 3$, så om vi sätter in $n = 1$ i formeln ska det bli 3. Vi testar:

$$a_1 = 4 \cdot 1 = 4$$

a_1 blev 4 som är 1 för mycket (det skulle bli 3). Eftersom det blev 1 för mycket subtraherar vi med 1 i formeln så

$$a_n = 4n - 1$$

Vi testar igen.

$$a_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \text{Stämmer!}$$

$$a_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \text{Stämmer!}$$

$$a_3 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \quad \text{Stämmer!}$$

Vi har hittat vår formel!

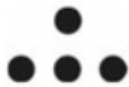
Svar: $a_n = 4n - 1$

b) Vi sätter in $n = 100$ i den slutna formeln $a_n = 4n - 1$ och får

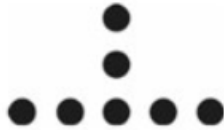
$$a_{100} = 4 \cdot 100 - 1 = 400 - 1 = 399$$

Svar: 399

Ex. Nedanstående figurer byggs.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

- a) Ange en sluten formel för antalet prickar i figur n .
b) Hur många prickar finns det i figur 1 000?

a) Vi studerar antalet prickar i varje figur.

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 7$$

$$a_3 = 10$$

För varje figur ökar antalet prickar med 3. Termen $3n$ bör därför vara med i formeln, så
 $a_n = 3n$

Vi vet att $a_1 = 4$. Vi testar att sätta in $n = 1$ och får
 $a_1 = 3 \cdot 1 = 3$.

3 är 1 för lite. Vi måste alltså addera 1 i formeln för att a_1 ska bli 4. Detta ger
 $a_n = 3n + 1$

Vi testar igen.

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4 \quad \text{Stämmer!}$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7 \quad \text{Stämmer!}$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10 \quad \text{Stämmer!}$$

Vi har hittat korrekt formel.

Svar: $a_n = 3n + 1$

b) Från a-uppgiften har vi att $a_n = 3n + 1$

Insättning av $n = 1\,000$ ger

$$a_{1000} = 3 \cdot 1\,000 + 1 = 3\,001$$

Svar: 3 001