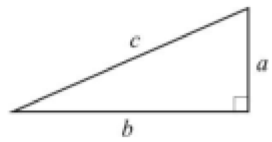
Pythagoras sats

Om vi vet två sidor i en rätvinklig triangel kan vi ta reda på den tredje med **Pythagoras sats**. Triangelns längsta sida (mitt emot den räta vinkeln) kallas **hypotenusa** och de två övriga sidorna kallas **kateter**.

Pythagoras sats

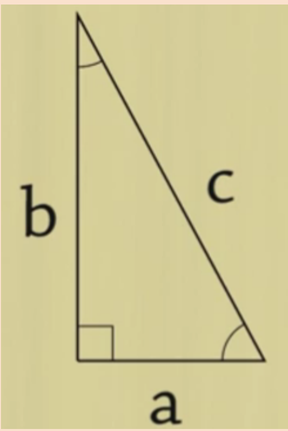
Summan av kvadraterna på de två kortare sidorna är lika med kvadraten på hypotenusan.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

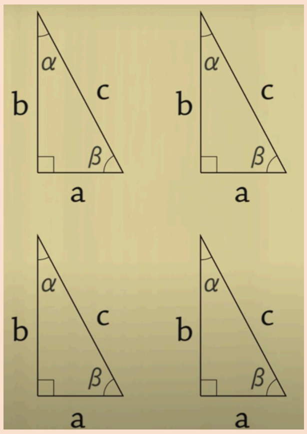


Härledning – Pythagoras sats

1.Vi bildar en godtycklig rätvinklig triangel med kateterna *a* och *b*, och hypotenusan *c*.



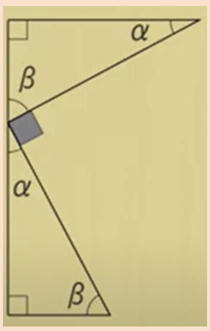
2. Vi bildar sedan fyra likadana sådana trianglar och betecknar vinklarna som inte är räta för α och β.



För varje triangel gäller
$90° + \alpha + \beta = 180°$ (vinkelsumma△)

Vi subtraherar 90° från varje led och får
$\alpha + \beta = 90°$ (detta samband återkommer vi till strax)

3. Vi arrangerar två trianglar enligt



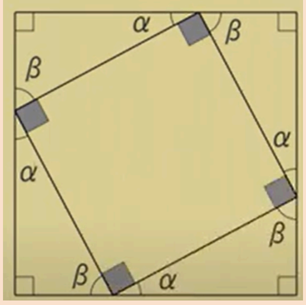
$\alpha + \beta$ + mellanliggande vinkeln = 180° (sidovinklar)

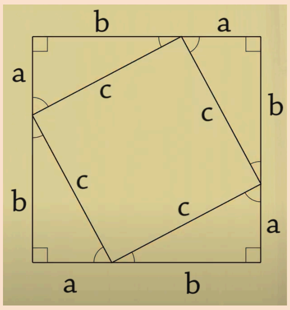
$\alpha + \beta = 90°$ (som vi kom fram till tidigare) i ekvationen ovan ger
90° + mellanliggande vinkeln = 180°

Vi subtraherar 90° från båda led och får
mellanliggande vinkeln = 90°

Oavsett vilka vinklarna α och β är kommer de alltså att bilda mellanliggande vinkeln 90°.

4. Vi arrangerar nu den tredje och fjärde triangeln på motsvarande sätt enligt.





Vi har nu bildat två kvadrater. En stor med sidan ($a + b$) och en liten inskriven kvadrat med sidan c.

Vi tecknar arean för den stora kvadraten på två sätt.

Varje sida i den stora kvadraten är ($a + b$) så
Area = $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1)

Vi kan även teckna arean av den stora kvadraten som den sammanlagda arean av de fyra trianglarna och den lilla inskrivna kvadraten. Arean hos varje triangel är $\frac{ab}{2}$ och arean hos den inskrivna kvadraten är c^2. Detta ger

Area = $4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$ (2)

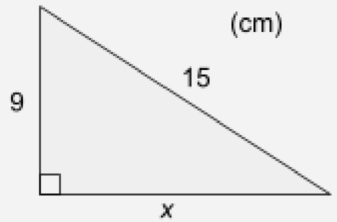
Vi har nu tecknat arean på den stora kvadraten på två olika sätt och dessa uttryck måste såklart vara lika stora, dvs. (1) = (2). Detta ger
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

Vi subtraherar 2ab från båda led.
$a^2 + b^2 = c^2$

vsv.

Om triangeln är rätvinklig, så gäller $a^2 + b^2 = c^2$. Men omvändningen gäller också, dvs. om $a^2 + b^2 = c^2$, så är triangeln rätvinklig. Detta är alltså en ekvivalens, så
$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow$ *Triangeln är rätvinklig*

Ex. Bestäm sidan x.



Sidan 15 cm är hypotenusa eftersom den är mitt emot den räta vinkeln. Pythagoras sats ger
$x^2 + 9^2 = 15^2$

Vi beräknar och löser ut x.
$x^2 + 81 = 225$
$x^2 + 81 \mathbf{- 81} = 225 \mathbf{- 81}$
$x^2 = 144$
$x = \pm\sqrt{144} = \pm 12$

Sidan måste vara positiv, så vi bortser från den negativa lösningen, så $x = 12$ cm.

Svar: 12 cm

Ex. Sidorna i en triangel är 8 cm, 15 cm och 20 cm. Är triangeln rätvinklig?

Om triangeln är rätvinklig ska summan av kvadraterna hos de korta sidorna vara lika med kvadraten hos den längsta sidan.

$a^2 + b^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = \mathbf{289}$
$c^2 = 20^2 = \mathbf{400}$

$289 \neq 400$, alltså gäller inte $a^2 + b^2 = c^2$ och då är triangeln <u>inte</u> rätvinklig.

Svar: Nej