Negativa exponenter och exponenten noll

Exponenten noll

7^3 betyder att 7 ska multipliceras med sig själv 3 gånger, dvs. $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$, men hur ska vi tolka exponenten noll, t.ex. 7^0?

Undersökning – Tolkning av exponenten noll

För att undersöka det så studerar vi t.ex. kvoten $\frac{7^5}{7^5}$ och beräknar den på två sätt.

Med potenslagarna: $\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = \mathbf{7^0}$

Lika stora tal divideras: $\frac{7^5}{7^5} = \mathbf{1}$

Båda sätt är korrekta. Vi ser alltså att $7^0 = 1$. Detta gäller för alla reella tal. Enda undantaget är 0, eftersom det skulle motsvara en division med 0. Till exempel: $0^0 = \frac{0^5}{0^5} = \frac{0}{0}$ som inte är definierat.

Exponenten noll
$a^0 = 1$, där $a \neq 0$

VARNING!
$7^0 \neq 0$

Ex. Beräkna
a) 25^0 b) $4^0 + (-7)^0$

a) $25^0 = 1$ **Svar:** 1

b) $4^0 + (-7)^0 = 1 + 1 = 2$ **Svar:** 2

FORTSÄTT PÅ NÄSTA SIDA!

Negativa exponenter

Hur ska vi tolka negativa exponenter, t.ex. 2^{-3}? Vi undersöker!

Undersökning – Tolkning av negativa exponenter
På motsvarande sätt som för exponenten noll, så undersöker vi tolkningen av negativa tal genom att beräkna t.ex. kvoten $\frac{2^2}{2^5}$ på två olika sätt.

Med potenslagarna: $\frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = \mathbf{2^{-3}}$

Med förkortning av bråk: $\frac{2^2}{2^5} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \mathbf{\frac{1}{2^3}}$

Båda sätt är korrekta. Vi ser alltså att $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$. Vi kan upprepa samma resonemang och visa att t.ex. $3^{-7} = \frac{1}{3^7}$ och $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$. Slutsats: Tal upphöjt till negativa tal kan skrivas som “1 dividerat med samma tal, men utan minustecknet framför exponenten”.

Negativa exponenter
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, där $a \neq 0$

Ex. Beräkna utan räknare
a) 4^{-2} b) 5^{-1}

a) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ **Svar:** $\frac{1}{16}$

b) $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$ **Svar:** $\frac{1}{5}$

Ex. Skriv $\frac{1}{3^5}$ i potensform.

Vi ska skriva $\frac{1}{3^5}$ som en potens. Eftersom $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ måste givetvis det omvända gälla. Så

$\frac{1}{3^5} = 3^{-5}$ **Svar:** 3^{-5}

Ex. Skriv $\frac{5}{x}$ som en potens med basen *x*.

Ett alternativt sätt att tänka när vi ska skriva om bråk som potenser är att "flytta upp" nämnaren till täljaren. Samtidigt som vi gör det ska vi byta tecken på exponenten, så

$\frac{5}{x} = \frac{5}{x^1} = 5x^{-1}$ **Svar:** $5x^{-1}$

Upphöja bråk till (−1)
Att upphöja bråk till (−1) är samma sak som att invertera bråket.

Bevis – Upphöja bråk till (−1) är samma sak som bråkets invers

Vi studerar bråket $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. Enligt reglerna för negativa exponenter och division av bråk gäller

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

dvs. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ vsv.

Ex. Beräkna

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ **Svar:** $\frac{4}{3}$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$ **Svar:** $\frac{25}{16}$