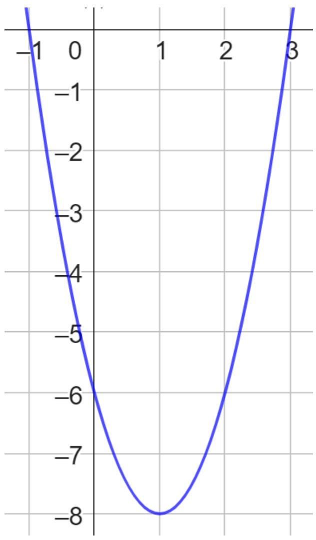
# Andragradsfunktioner och modellering

För att ta reda på vilken andragradsfunktion som är uppritad finns flera olika metoder.

**Bestämma andragradsfunktionen utifrån dess graf**

**Metod 1 – Använda nollställen och en punkt**
Andragradsfunktioner med nollställen kan skrivas i **faktorform** som $f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)$ där $x_1$ och $x_2$ är funktionens nollställen. Sätt in funktionens nollställen och bestäms sedan $k$ utifrån ytterligare en punkt på grafen (som inte får vara ett nollställe). Om funktionen har en dubbelrot (vänder på $x$-axeln) gäller att $x_1 = x_2$. Denna metod är att föredra om man enkelt kan avgöra nollställena.

**Metod 2 – Använda tre punkter**
Alla andragradsfunktioner kan skrivas i **utvecklad form** som $f(x) = ax^2 + bx + c$, där $a$, $b$ och $c$ är konstanter. Genom att sätta in tre valfria punkter på grafen i detta funktionsuttryck kan vi bilda ett ekvationssystem med tre obekanta och tre ekvationer. Då kan vi bestämma konstanterna $a$, $b$ och $c$ och därefter bestämma funktionen. Denna metod är ofta krångligare räknemässigt, men fungerar alltid, även om t.ex. nollställena är okända.




Ex. Figuren till höger visar grafen till en andragradsfunktion $f(x)$. Bestäm $f(x)$ och svara på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Vi ser enkelt att grafen har nollställena $x_1 = -1$ och $x_2 = 3$. Vi sätter in nollställena i funktionens faktorform, $f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)$.
$f(x) = k(x + 1)(x - 3)$ (1)

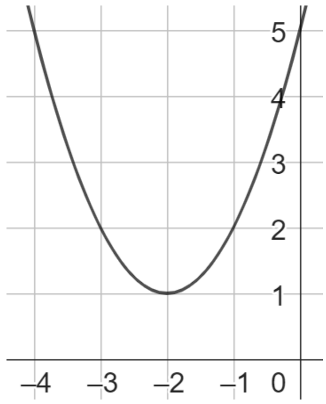
Vi bestämmer $k$ genom att sätta in ytterligare en punkt, t.ex. (1, −8), på grafen. Vi ersätter $x$ med 1 och $f(x)$ med −8 i (1) och får
$-8 = k(1 + 1)(1 - 3)$
$-8 = k \cdot 2 \cdot (-2)$
$-8 = -4k$
$\frac{-8}{-4} = \frac{-4k}{-4}$
$2 = k$

Vi kan nu sätta in $k = 2$ i (1) och får
$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$

Vi ska svara på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$, så vi utvecklar och svarar utan parenteser.
$f(x) = (2x + 2)(x - 3)$
$f(x) = 2x^2 - 6x + 2x - 6$
$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

**Svar:** $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

Ex. Figuren till höger visar grafen till en andragradsfunktion $f(x)$. Bestäm $f(x)$.




Funktionen saknar nollställen och vi kan därför inte enkelt skriva den i faktorform. Vi skriver funktionen i utvecklad form $f(x) = ax^2 + bx + c$ och sätter in tre punkter och bildar ett ekvationssystem. Vi väljer punkterna $(-2, 1)$, $(-1, 2)$ och $(0, 5)$ som ger

$$\begin{cases} a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 1 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 2 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \end{cases}$$

Vi ska nu bestämma konstanterna $a$, $b$ och $c$. Vi förenklar ekvationerna och får

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 & (1) \\ a - b + c = 2 & (2) \\ c = 5 \end{cases}$$

Från den undre ekvationen har vi att $c = 5$. Insättning i ekvation (1) och (2) ger

$$\begin{cases} 4a - 2b + 5 = 1 & (3) \\ a - b + 5 = 2 & (4) \end{cases}$$

Vi använder substitutionsmetoden och löser ut $a$ från ekvation (4).

$a = b - 3$ (5)

Insättning av $a = b - 3$ i ekvation (3) ger

$4(b - 3) - 2b + 5 = 1$

$4b - 12 - 2b + 5 = 1$

$2b - 7 = 1$

$2b = 8$

$\frac{2b}{2} = \frac{8}{2}$

$b = 4$

Insättning av $b = 4$ i (5) ger

$a = 4 - 3 = 1$

Insättning av $a = 1$, $b = 4$ och $c = 5$ i $f(x) = ax^2 + bx + c$ ger

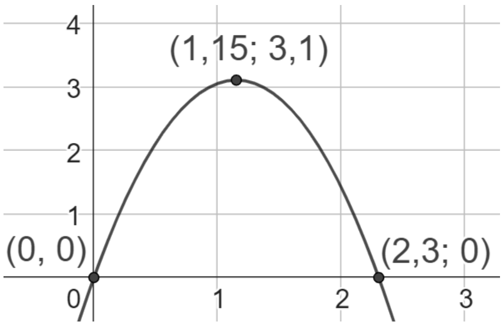
$f(x) = x^2 + 4x + 5$

**Svar:** $f(x) = x^2 + 4x + 5$

Ex. Bilden visar en fontän från Sydkoreas huvudstad Seoul.

Avståndet längs vattenytan från en strâles start till dess att strålen träffar vattnet är ungefär 2,3 m. Strålens högsta höjd över vattenytan är ungefär 3,1 m. Anta att strålens bana har samma form som grafen till en andragradsfunktion. Bestäm en funktion som beskriver strålens bana. *(Np Ma2c vt 2013)*

Vi gör en skiss och lägger in parabeln i ett koordinatsystem. Det kan göras på olika sätt, men vi väljer att lägga in den med start i origo. Vi inser att vi då får nollställen vid $x = 0$ och $x = 2,3$. Maximipunkten måste ligga mitt emellan dessa dvs. vid $x = \frac{0 + 2,3}{2} = 1,15$ och med $y = 3,1$. Vi markerar dessa tre punkter med koordinater.




Vi kallar funktionen $f(x)$ och skriver den i faktorform $f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)$ där $x_1 = 0$ och $x_2 = 2,3$.

$f(x) = k(x - 0)(x - 2,3)$
$f(x) = kx(x - 2,3)$ (1)

Vi sätter in punkten (1,15; 3,1), dvs. $x = 1,15$ och $f(x) = 3,1$ i (1) för att bestämma $k$.
$3,1 = k \cdot 1,15(1,15 - 2,3)$
$3,1 = k \cdot 1,15 \cdot (-1,15)$
$3,1 = -1,3225k$

$$\frac{3{,}1}{-1{,}3225} = \frac{-1{,}3225k}{-1{,}3225}$$

$-2{,}344\ldots = k$

Insättning av $k = -2{,}344\ldots$ i (1) ger

$f(x) = -2{,}344\ldots x(x - 2{,}3)$

Vi utvecklar funktionsuttrycket och får

$f(x) = -2{,}344\ldots x^2 + 5{,}391\ldots x$

Vi avrundar koefficienterna till två decimaler och får

$f(x) = -2{,}34x^2 + 5{,}39x$

**Svar:** $f(x) = -2{,}34x^2 + 5{,}39x$