Implikation och ekvivalens

Ett logiskt förhållande där ett visst påstående 1 är sant medför att ett annat påstående 2 också måste vara sant kallas **implikation**. Något förenklat kan man säga att en implikation är när något medför något annat. Implikation skrivs med symbolen ⇒ och utläses "implicerar" eller "medför att".

Ett logiskt förhållande där implikationen även gäller åt andra hållet, dvs. om påstående 2 är sant och det medför att påstående 1 också måste vara sant, kallas **ekvivalens**. Ekvivalens skrivs med symbolen ⇔ och utläses "är ekvivalent med".

Om en implikation är falsk bevisar man det genom att ge ett motexempel (ett enda motexempel räcker).

Implikation och ekvivalens
Implikation: A ⇒ B. A leder till B, men B behöver inte leda till A.
Ekvivalens: A ⇔ B. A leder till B och B leder till A.

Exempel 1. Betrakta meningen *"Om det är en tax, så är det en hund"*.
a) Skriv meningen med logiska symboler.
b) Är meningen en implikation eller en ekvivalens?

a) Påståendena som kopplas ihop är *"det är en tax"* och *"det är en hund"*.

Svar: *Det är en tax ⇒ Det är en hund*

b) Implikationen *Det är en tax ⇒ Det är en hund* är sann.

Vi undersöker omvändningen.
Det är en hund ⇒ Det är en tax

Detta är falskt. **Motexempel: Det kan vara en pudel**

Eftersom implikationen endast gäller åt ett håll är det ingen ekvivalens.

Svar: Det är en implikation.

Exempel 2. Avgör vilket logiskt tecken som ska vara mellan påståendena.
Alla vinklar i triangeln är 60° ____ *Triangeln är liksidig*

Vi undersöker om implikationerna är sanna åt varje håll.
Alla vinklar i triangeln är 60° ⇒ Triangeln är liksidig

Detta påstående är sant, eftersom det inte finns några trianglar som detta gäller för förutom liksidiga trianglar.

Vi undersöker omvändningen.
Triangeln är liksidig ⇒ Alla vinklar i triangeln är 60°

Detta påstående är också sant. I alla liksidiga trianglar är alla vinklarna 60°.

Implikationen gäller alltså åt båda håll och vi har då en ekvivalens.

Svar: ⇔

Exempel 3. Avgör om följande implikationer stämmer.
a) $2x + 5 = 11 \Rightarrow x = 3$ b) man äter godis ⇒ man får hål i tänderna
c) $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ d) $x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$

a) Vi löser ekvationen för att undersöka om lösningen entydigt är $x = 3$.
$2x + 5 - 5 = 11 - 5$
$2x = 6$
$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$
$x = 3$ (och inga andra lösningar finns)

Svar: Implikationen gäller.

b) man äter godis ⇒ man får hål i tänderna

Svar: Implikationen gäller inte. Motexempel: Det finns de som äter godis som inte får hål i tänderna.

c) $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

Vi löser ekvationen för att undersöka om lösningen entydigt är $x = 5$.
$x^2 = 25$
$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Svar: Implikationen gäller inte. Motexempel: $x = -5$.

d) $x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$

Vi löser ekvationen för att undersöka om lösningen entydigt är $x = 3$.
$x^3 = 27$
$x = \sqrt[3]{27} = 3$ (inga andra lösningar finns)

Svar: Implikationen gäller.