

Produktregeln

Kuriosa – Kortleken

När du blandar en kortlek så kan du vara tämligen säker på att ordningen som korten hamnar i är fullständigt unik i hela den mänskliga historien. Det finns ca $8 \cdot 10^{67}$ sätt att blanda en kortlek eller mer exakt $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ (utläses "52 fakultet" och skrivs "52!") = $80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000$ möjliga kombinationer.

Detta tal är så stort att även om vi blandade kortleken en gång per sekund från Big bang så hade universum hunnit gå under innan vi nått en chans på miljarden att få upp samma sekvens av kort. Antal möjliga blandningar motsvarar lika många atomer som i 600 biljarder jordklot. Eller: Tänk dig att vi har en biljon människor. Det är 10 gånger så många människor som någonsin har levt på jorden. Ge dem en kortlek var. Sedan ger du dem instruktionen att blanda sina kortlekar en biljon gånger i sekunden i en biljon år. Sedan låter vi detta utspela sig i en biljon civilisationer i vårt universum. Om du nu tar en kortlek och blandar den, så är det bara 40 % chans att den är likadan som någon av de kombinationer som har blandats i detta påhittade universum. Så när du blandar en kortlek kan du vara tämligen säker på att den kombinationen, från första till sista kortet, aldrig någonsin har uppstått i en tidigare blandning.

När en kombination av händelser sker kan vi beräkna sannolikheten för kombinationen genom att multiplicera sannolikheterna för de enskilda händelserna genom **produktregeln**.

Om sannolikheten för en händelse

- inte påverkas av händelsen innan har vi en **oberoende händelse**. T.ex. sannolikheten att slå en sexa vid ett kast med tärning är $\frac{1}{6}$. Sannolikheten för att slå en sexa nästa gång med tärningen är fortfarande $\frac{1}{6}$ ("slumpen har inget minne"). Kast med tärningar är alltså oberoende händelser.
- påverkas av händelsen innan har vi en **beroende händelse**. T.ex. sannolikheten att dra ett hjärter ur en kortlek är $\frac{13}{52}$. Om jag lägger undan kortet ("utan återläggning"), så är sannolikheten att dra ytterligare ett hjärter ur kortleken $\frac{12}{51}$ (12 hjärter är kvar av 51 kort totalt). Sannolikheten att dra ett hjärter har ändrats! Att dra kort utan återläggning är alltså beroende händelser.

Ex. Vad är sannolikheten att slå två sexor i rad med tärning?

$$P(\text{två sexor}) = P(\text{sex}) \cdot P(\text{sex}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Svar: $\frac{1}{36}$

Ex. Vad är sannolikheten att slå fem sexor vid ett kast med fem tärningar? Yatzy!

$$\begin{aligned} P(\text{fem sexor}) &= P(\text{sex}) \cdot P(\text{sex}) \cdot P(\text{sex}) \cdot P(\text{sex}) \cdot P(\text{sex}) = P(\text{sex})^5 = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1^5}{6^5} \\ &= \frac{1}{7776} \approx 0,00013 = 0,013 \% \end{aligned}$$

Svar: 0,013 %

Ex. I en skål ligger 6 röda och 4 blå kulor. Vad är sannolikheten att dra två blå kulor
a) med återläggning? b) utan återläggning?

a) Med återläggning påverkas inte sannolikheterna av föregående händelser.

$$P(\text{två blå}) = P(\text{blå}) \cdot P(\text{blå}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0,16 = 16 \%$$

Svar: 16 %

b) Utan återläggning påverkas sannolikheterna av föregående händelser. Efter att vi har dragit en blå kula (4 på 10) finns bara 3 blå kulor kvar av 9 kulor totalt. Så sannolikheten att dra en blå kula andra gången är alltså $\frac{3}{9}$.

$$P(\text{två blå}) = P(\text{blå}) \cdot P(\text{blå}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 0,13 = 13 \%$$

Svar: 13 %