Rotekvationer

En ekvation där variabeln, t.ex. *x*, är under ett rottecken kallas **rotekvation**.

Lösa rotekvationer – generellt
1. Lös ut termen som innehåller rotuttrycket.
2. Kvadrera båda led (för att bli av med rottecknet) och lös med lämplig metod.
3. Kontrollera din lösning! Falska rötter kan uppstå.

Lösa rotekvationer – med variabelsubstitution
1. Substituera (byt ut) rotuttrycket, t.ex. $\sqrt{x}$, mot en annan variabel, t.ex. *t*.
2. Teckna en ny ekvation med *t* och lös ekvationen.
3. Bestäm den ursprungliga variabeln *x* med hjälp av värdet på *t*.
4. Kontrollera din lösning! Falska rötter kan uppstå.

Ex. Lös

a) $\sqrt{x} = 8$ b) $\sqrt{x+2} = 17$ c) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

a) $\sqrt{x} = 8$

Vi kvadrerar båda led och löser ekvationen.

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 8^2$
$x = 64$

Kontroll: Insättning av $x = 64$ i den ursprungliga ekvationen $\sqrt{x} = 8$ ger

VL = $\sqrt{64} = 8$ = HL Stämmer!

Svar: $x = 64$

b) $\sqrt{x+2} = 17$

Vi kvadrerar båda led och löser ekvationen.

$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = 17^2$
$x + 2 = 289$
$x + 2 \mathbf{- 2} = 289 \mathbf{- 2}$
$x = 287$

Kontroll: Insättning av $x = 287$ i den ursprungliga ekvationen $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = 17^2$ ger

VL = $\sqrt{287+2} = \sqrt{289} = 17$ = HL Stämmer!

Svar: $x = 287$

c) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Vi löser ut termen med rotuttrycket $3\sqrt{x}$.

$x + 3\sqrt{x} - 4 \mathbf{- x + 4} = 0 \mathbf{- x + 4}$

$3\sqrt{x} = 4 - x$

Vi kvadrerar båda led.

$\left(3\sqrt{x}\right)^2 = (4 - x)^2$

$9x = 16 - 8x + x^2$

Vi modifierar ekvationen och löser den sedan med *pq*-formeln.

$9x \mathbf{- 9x} = 16 - 8x + x^2 \mathbf{- 9x}$

$x^2 - 17x + 16 = 0$

$x = 8,5 \pm \sqrt{8,5^2 - 16}$

$x = 8,5 \pm \sqrt{56,25}$

$x = 8,5 \pm 7,5$

Detta ger lösningarna

$x_1 = 8,5 - 7,5 = 1$

$x_2 = 8,5 + 7,5 = 16$

Kontroll: Insättning av $x = 1$ i den ursprungliga ekvationen $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$ ger

$VL = 1 + 3\sqrt{1} - 4 = 1 + 3 - 4 = 0 = HL$ *Stämmer!*

Kontroll: Insättning av $x = 16$ i den ursprungliga ekvationen $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$ ger

$VL = 16 + 3\sqrt{16} - 4 = 16 + 3 \cdot 4 - 4 = 16 + 12 - 4 = 24 \neq HL$ *Stämmer inte! Falsk rot!*

Svar: $x = 1$

Alternativ lösning med variabelsubstitution:

$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Sätt $\sqrt{x} = t$. Detta ger $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = t \cdot t = t^2$ och den nya ekvationen

$t^2 + 3t - 4 = 0$

pq-formeln ger

$t = -1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 4}$

$t = -1,5 \pm \sqrt{6,25}$

$t = -1,5 \pm 2,5$

Detta ger lösningarna
$t_1 = -1{,}5 - 2{,}5 = -4$
$t_2 = -1{,}5 + 2{,}5 = 1$

$\sqrt{x} = t_1$ ger
$\sqrt{x} = -4$
$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (-4)^2$
$x_1 = 16$

$\sqrt{x} = t_2$ ger
$\sqrt{x} = 1$
$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 1^2$
$x_2 = 1$

(Kontrollera lösningarna $x_1 = 16$ och $x_2 = 1$ som i första lösningen.)

Svar: $x = 1$

Kuriosa – Varför uppstår falska rötter?
Anta $A = B$

Vi kvadrerar båda led och får
$A^2 = B^2$

Löser vi denna ekvation får vi
$A = \pm B$

Den andra lösningen $A = -B$ är en falsk rot (om A inte är lika med 0) eftersom den inte uppfyller det första villkoret $A = B$.

Slutsats: Kvadreringar kan ge extra “falska” rötter.