

## Grafen till en andragradsfunktion

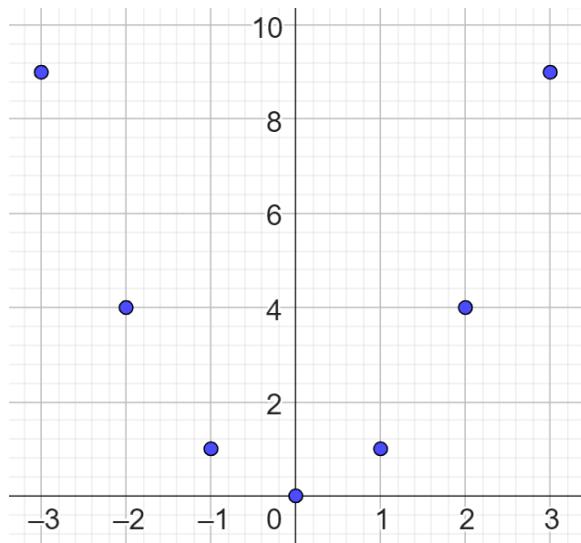
En funktion där variabeltermens största exponent är 2 kallas **andragradsfunktion**.

$f(x) = x^2 - 6$  och  $g(x) = 3x^2 - 5x + 7$  är exempel andragradsfunktioner.  $x^2$  och  $3x^2$  kallas **andragradstermer**.

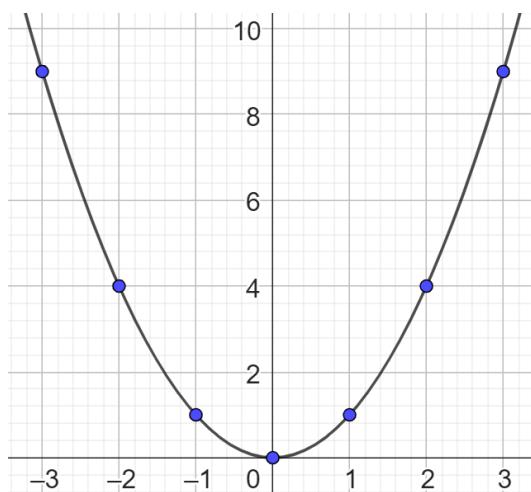
Vi kommer framför allt att använda digitala hjälpmedel för att rita grafer, men för förståelsen är det bra att kunna göra det för hand också. Vi ritar andragradsfunktionen  $f(x) = x^2$  för hand.

Vi börjar med att rita upp en värdetabell för att få fram koordinater att pricka in. Vi väljer att gå från  $x = -3$  till  $x = 3$ . För att beräkna  $y$ -koordinaten när  $x = -3$  så sätter vi in  $-3$  i vår funktion  $f(x) = x^2$  och får  $f(-3) = (-3)^2 = 9$ . Sedan gör vi på motsvarande sätt för övriga  $x$ -värden. Vi prickar sedan in koordinaterna i ett koordinatsystem.

$x$	$y = f(x)$
$-3$	$(-3)^2 = 9$
$-2$	$(-2)^2 = 4$
$-1$	$(-1)^2 = 1$
$0$	$0^2 = 0$
$1$	$1^2 = 1$
$2$	$2^2 = 4$
$3$	$3^2 = 9$



Vi förbinder sedan dessa punkter och får andragradsfunktionens graf.

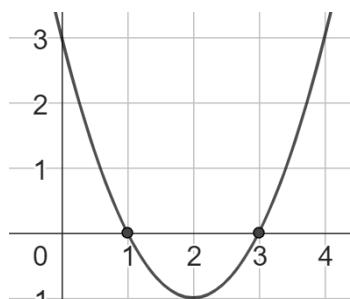


Vi ser att grafen till andragradsfunktionen bildar en "båge". Denna form kallas **parabel**. Parabeln kan antingen ha en "topp" där vi hittar grafens **maximipunkt** och största värde eller en "dal" där vi hittar grafens **minimipunkt** och minsta värde. Ett samlingsnamn för maximi- och minimipunkt är **extrempunkt**. En extrempunkt kan alltså antingen vara en maximi- eller en minimipunkt. Huruvida en extrempunkt är en maximi- eller minimipunkt kallas punktens **karakter**.

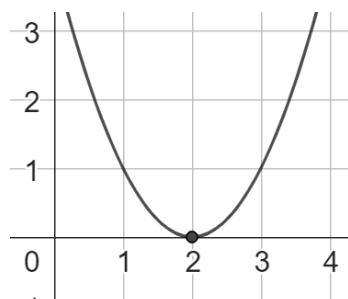
Vi ser också att grafen är symmetrisk kring en lodräta linje som kallas **symmetrilinje**. Vi ser att extrempunkten ligger på symmetrilinjen (detta kommer vi att utnyttja framöver).

Symmetrilinjens ekvation anges med dess x-koordinat. Om en symmetrilinje t.ex. ligger vid 3 på x-axeln är symmetrilinjens ekvation  $x = 3$ . Ibland skrivs den också  $x_s = 3$ .

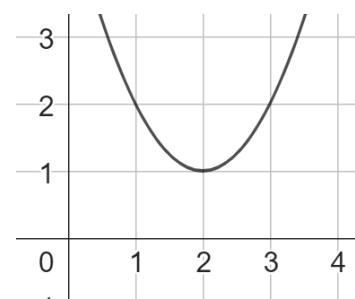
De x-värden där funktionens värde är 0 och där grafen till funktionen skär x-axeln kallas **nollställen**. Nollställena anges med sin x-koordinat. Om en graf skär x-axeln vid 5 är ett nollställe  $x = 5$ . En andragradsfunktion kan antingen har två, ett eller sakna nollställen.



Två nollställen.



Ett nollställe.



Saknar nollställen.

### Parabelns utseende

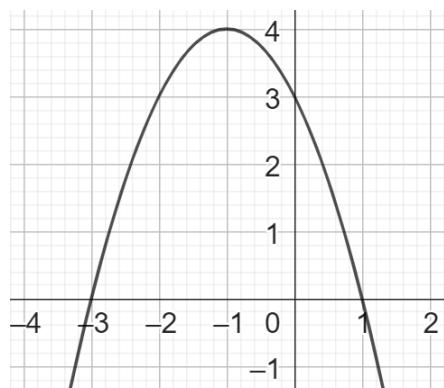
Om andragradstermen (t.ex.  $x^2$  eller  $t^2$ ) i en andragradsfunktion är

- positiv har grafen en minimipunkt (Minnesregel: positiv  $x^2$ -term ger "glad mun")
- negativ har grafen en maximipunkt (Minnesregel: negativ  $x^2$ -term ger "sur mun")

Ex. Rita grafen till funktionen  $g(x) = -x^2 - 2x + 3$  och bestäm

- a) största värdet      b) nollställena      c) extrempunkten koordinater  
d) symmetrilinjens ekvation

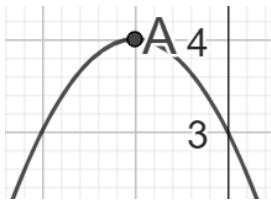
a) När vi ritar grafer i Geogebra ersätts funktionen med  $y$ , så i detta fall ersätts  $g(x)$  med  $y$ . Vi skriver in  $y = -x^2 - 2x + 3$  i inmatningsfältet i Geogebra och får nedanstående graf.



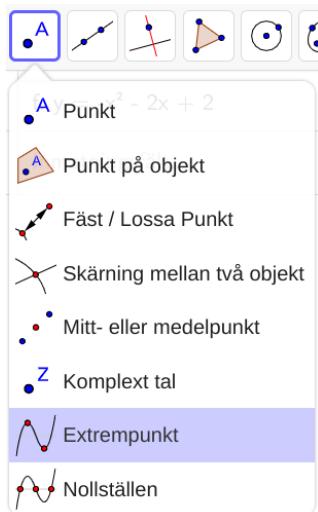
Vi ser att kurvan har en "topp" och därmed sitt största värde vid  $y = 4$ .

Om det är svårt att avläsa det största eller minsta värdet kan vi använda verktyget "Extrempunkt" i Geogebra. Klicka på "Extrempunkt" i menyn enligt bilden till höger.

Därefter klickar du någonstans på grafen. Största värdet kommer att markeras med en punkt på grafen och dess koordinat visas i menyn till vänster.



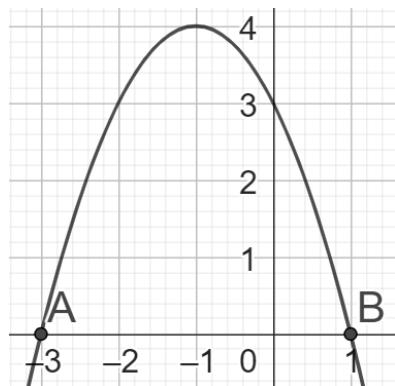
$$\text{VertexPunkter}(f) \\ = A = (-1, 4)$$



**Svar:** Största värdet är 4.

b) Nollställena är där grafen skär  $x$ -axeln, dvs. vid  $x = -3$  och vid  $x = 1$ .

Om det är svårt att avläsa nollställena kan vi använda verktyget "Nollställen" i Geogebra. Klicka på "Nollställen" i samma meny som där vi hittade "Extrempunkt". Därefter klickar du någonstans på grafen. Nollställena kommer att markeras och dess koordinater visas i menyn till vänster.



$$\text{Skärning}(f, \text{xAxeln}) \\ = A = (-3, 0) \\ B = (1, 0)$$

**Svar:**  $x = -3$  och  $x = 1$

c) Extrempunktens koordinater är, i detta fall, koordinaterna för maximipunkten, dvs.  $(-1, 4)$ .

**Svar:**  $(-1, 4)$

d) Symmetrilinjen är den lodräta linje som delar grafen i två likadana halvor. Den går alltid genom extempunkten. Eftersom extempunkten ligger vid  $x = -1$ , måste alltså symmetrilinjen också gå vid  $x = -1$ . Så symmetrilinjens ekvation är  $x_s = -1$ .

**Svar:**  $x_s = -1$