

## Potensekvationer

En ekvation där variabeln, t.ex.  $x$ , är en potens ("upphöjt till något") kallas för **potensekvation**. Dessa kan lösas med två algebraiska metoder: med potenslagar eller med rotuttryck.

### Lösa potensekvationer med potenslagar

$x^n = a$  har lösningen

$$x = a^{1/n}$$

### Härledning – Lösa potensekvationer med potenslagar

Vi utgår från den generella ekvationen

$$x^n = a$$

Vi upphöjer båda led till exponentens invers, i detta fall  $\frac{1}{n}$ .

$$(x^n)^{1/n} = a^{1/n}$$

$$x^{n/n} = a^{1/n}$$

$$x^1 = a^{1/n}$$

$$x = a^{1/n}$$

vsv.

### Lösa potensekvationer med rötter

$x^n = a$  har lösningen

$$x = \sqrt[n]{a}$$

OBS! Om exponenten är jämn får ekvationen, i allmänhet, två lösningar – en positiv och en negativ. Då ska  $\pm$  placeras framför rottecknet/lösningen. Om exponenten är udda får ekvationen en lösning och inget  $\pm$  ska placeras framför rottecknet/lösningen.

### Antal lösningar till en potensekvation

En potensekvation  $x^n = a$  med

- jämn exponent har två, en eller noll lösningar
- udda exponent har en lösning

Ex. Lös ekvationerna och avrunda svaret till två decimaler.

a)  $x^{14} = 80\,000$

b)  $3x^5 - 21 = 0$

c)  $x^{3.4} = 98$

d)  $x^{\frac{1}{2}} = 4$

e)  $x^{\frac{2}{5}} = 10$

a) **Med potenslagar:**

$$x^{14} = 80\,000$$

$$(x^{14})^{1/14} = 80\,000^{1/14}$$

$$x = \pm 2,239... \approx \pm 2,24$$

**Med rotuttryck:**

$$x^{14} = 80\,000$$

$$x = \pm \sqrt[14]{80\,000}$$

$$x = \pm 2,239... \approx \pm 2,24$$

**Svar:**  $x \approx \pm 2,24$

b) Vi börjar med att lösa ut  $x^5$ .

$$3x^5 - 21 = 0$$

$$3x^5 - 21 + 21 = 0 + 21$$

$$3x^5 = 21$$

$$\frac{3x^5}{3} = \frac{21}{3}$$

$$x^5 = 7$$

Därefter löser vi ekvationen med potenslagar eller med rotuttryck.

$$x = 7^{1/5} = \sqrt[5]{7} = 1,475... \approx 1,48 \quad (\text{Inget } \pm \text{ eftersom exponenten är udda.})$$

**Svar:**  $x \approx 1,48$

c)  $x^{3,4} = 98$

Vi löser ekvationer med decimaltal i exponenten på motsvarande sätt.

$$x = \sqrt[3,4]{98} = 98^{1/3,4} = 3,851... \approx 3,85$$

**Svar:**  $x \approx 3,85$

d)  $x^{\frac{1}{2}} = 4$

När vi har bråk i exponenten börjar vi med att få bort nämnaren i exponenten genom att upphöja båda led till den, i det här fallet med 2.

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = 4^2$$

$$x = 16$$

**Svar:**  $x = 16$

e)  $x^{\frac{2}{5}} = 10$

Vi har återigen ett bråk i exponenten. Vi upphöjer båda led till exponentens nämnare 5.

$$(x^{\frac{2}{5}})^5 = 10^5$$

$$x^2 = 100\,000$$

Därefter löser vi ekvationen som vanligt.

$$x = \pm\sqrt{100\,000} = \pm 316,227... \approx \pm 316,23$$

**Svar:**  $\pm x \approx 316,23$

Ex. Bestäm antal lösningar till ekvationen

a)  $x^{12} = 154$

b)  $x^4 = 0$

c)  $x^{100} = -50$

d)  $x^{99} = -5$

a)  $x^{12} = 154$

$x = \pm \sqrt[12]{154}$

**Svar:** Två lösningar

b)  $x^4 = 0$

$x = \sqrt[4]{0} = 0$

**Svar:** En lösning

c)  $x^{100} = -50$

$x = \sqrt[100]{-50}$

**Svar:** Saknar lösningar

d)  $x^{99} = -5$

Potensekvationer med udda exponent har alltid en lösning.

**Svar:** En lösning.