

Potensekvationer

En ekvation där variabeln, t.ex. x , är en potens ("upphöjt till något") kallas för **potensekvation**. Dessa kan lösas med två algebraiska metoder: med potenslagar eller med rotuttryck.

Lösa potensekvationer med potenslagar

$x^n = a$ har lösningen

$$x = a^{1/n}$$

Härledning – Lösa potensekvationer med potenslagar

Vi utgår från den generella ekvationen

$$x^n = a$$

Vi upphöjer båda led till exponentens invers, i detta fall $\frac{1}{n}$.

$$(x^n)^{1/n} = a^{1/n}$$

$$x^{n/n} = a^{1/n}$$

$$x^1 = a^{1/n}$$

$$x = a^{1/n}$$

vsv.

Lösa potensekvationer med rötter

$x^n = a$ har lösningen

$$x = \sqrt[n]{a}$$

OBS! Om exponenten är jämn får ekvationen, i allmänhet, två lösningar – en positiv och en negativ. Då ska \pm placeras framför rottecknet/lösningen. Om exponenten är udda får ekvationen en lösning och inget \pm ska placeras framför rottecknet/lösningen.

Antal lösningar till en potensekvation

En potensekvation $x^n = a$ med

- jämn exponent har två, en eller noll lösningar
- udda exponent har en lösning

Ex. Lös ekvationerna och avrunda svaret till två decimaler.

a) $x^{14} = 80\ 000$ b) $3x^5 - 21 = 0$ c) $x^{3,4} = 98$ d) $x^{\frac{1}{2}} = 4$ e) $x^{\frac{2}{5}} = 10$

a) Med potenslagar:

$$x^{14} = 80\ 000$$

$$(x^{14})^{1/14} = 80\ 000^{1/14}$$

$$x = \pm 2,239\dots \approx \pm 2,24$$

Med rotuttryck:

$$x^{14} = 80\ 000$$

$$x = \pm \sqrt[14]{80\ 000}$$

$$x = \pm 2,239\dots \approx \pm 2,24$$

Svar: $x \approx \pm 2,24$

b) Vi börjar med att lösa ut x^5 .

$$3x^5 - 21 = 0$$

$$3x^5 - 21 + 21 = 0 + 21$$

$$3x^5 = 21$$

$$\frac{3x^5}{3} = \frac{21}{3}$$

$$x^5 = 7$$

Därefter löser vi ekvationen med potenslagar eller med rotuttryck.

$$x = 7^{1/5} = \sqrt[5]{7} = 1,475\ldots \approx 1,48 \quad (\text{Inget } \pm \text{ eftersom exponenten är udda.})$$

Svar: $x \approx 1,48$

c) $x^{3,4} = 98$

Vi löser ekvationer med decimaltal i exponenten på motsvarande sätt.

$$x = \sqrt[3,4]{98} = 98^{1/3,4} = 3,851\ldots \approx 3,85$$

Svar: $x \approx 3,85$

d) $x^{\frac{1}{2}} = 4$

När vi har bråk i exponenten börjar vi med att få bort nämnaren i exponenten genom att upphöja båda led till den, i det här fallet med 2.

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = 4^2$$

$$x = 16$$

Svar: $x = 16$

e) $x^{\frac{2}{5}} = 10$

Vi har återigen ett bråk i exponenten. Vi upphöjer båda led till exponentens nämnare 5.

$$(x^{\frac{2}{5}})^5 = 10^5$$

$$x^2 = 100\,000$$

Därefter löser vi ekvationen som vanligt.

$$x = \pm\sqrt{100\,000} = \pm316,227\ldots \approx \pm316,23$$

Svar: $\pm x \approx 316,23$

Ex. Bestäm antal lösningar till ekvationen

a) $x^{12} = 154$ b) $x^4 = 0$ c) $x^{100} = -50$ d) $x^{99} = -5$

a) $x^{12} = 154$

$x = \pm \sqrt[12]{154}$

Svar: Två lösningar

b) $x^4 = 0$

$x = \sqrt[4]{0} = 0$

Svar: En lösning

c) $x^{100} = -50$

$x = \sqrt[100]{-50}$

Svar: Saknar lösningar

d) $x^{99} = -5$

Potensekvationer med udda exponent har alltid en lösning.

Svar: En lösning.