Andragradsekvationer och andragradsfunktioner

I förra avsnittet bestämde vi en andragradsfunktions nollställen, extrempunkt och symmetrilinje grafiskt. Vi ska nu bestämma dem algebraiskt.

Bestämma nollställen, symmetrilinje och extrempunkt algebraiskt
Algebraiskt bestäms en andragradsfunktions

- nollställen genom att sätta funktionen lika med 0 och lösa den. Lösningarna ger nollställena.
- symmetrilinje genom medelvärdet av nollställena. Om nollställen saknas kan symmetrilinjen fås av "talet framför rottecknet" i *pq*-formeln, dvs. $x_s = -\frac{p}{2}$.
- extrempunkt genom att sätta in symmetrilinjens *x*-koordinat i funktionsuttrycket. Symmetrilinjen ger extrempunktens *x*-koordinat och funktionsuttryckets värde ger extrempunktens *y*-koordinat.

Ex. Vi har funktionen $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Ange funktionens
a) nollställen b) symmetrilinje c) extrempunkt d) extrempunkts karaktär
e) största eller minsta värde

a) Vi bestämmer nollställena genom att sätta funktionsuttrycket lika med 0 och lösa ekvationen.
$3x^2 - 12x + 9 = 0$

Vi dividerar båda led med 3 och löser sedan ekvationen med *pq*-formeln.
$\frac{3x^2}{3} - \frac{12x}{3} + \frac{9}{3} = \frac{0}{3}$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$
$x = 2 \pm \sqrt{1}$
$x = 2 \pm 1$
$x_1 = 2 - 1 = 1$
$x_2 = 2 + 1 = 3$

Svar: $x = 1$ och $x = 3$.

b) Symmetrilinjen ligger mitt emellan nollställena, vilket motsvarar deras medelvärde.
$x_s = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Svar: $x_s = 2$

c) Extrempunkten ligger på symmetrilinjen och har alltså samma x-koordinat, dvs. $\boldsymbol{x = 2}$.
Insättning av $x = 2$ i funktionen $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ger
$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9$
$f(2) = 12 - 24 + 9 = -12 + 9 = -3$

Extrempunktens y-koordinat är alltså $\boldsymbol{-3}$. Sammanfattningsvis är alltså extrempunktens fullständiga koordinater (2, −3).

Svar: (2, −3)

d) Extrempunktens karaktär avgörs av tecknet framför x^2-termen. I det här fallet har vi funktionen $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ som har en <u>positiv</u> x^2-term (vi tänker oss då en kurva med "positiv" mun ◡). Kurvan har alltså en "dal", vilket ger oss att det är en minimipunkt.

Svar: Minimipunkt

e) Eftersom funktionen har en minimipunkt har den ett <u>minsta värde</u>. Det minsta värdet motsvarar y-koordinaten i extrempunkten (största eller minsta värdet ligger alltid i extrempunkten). Vi har tidigare tagit fram extrempunkten som (2, −3). Det minsta värdet är alltså −3.

Svar: −3

Ex. Bestäm symmetrilinjen till $f(x) = x^2 + 6x + 10$

Vi börjar med att ta reda på funktionens nollställen genom att sätta funktionsuttrycket lika med 0 och lösa ekvationen.
$x^2 + 6x + 10 = 0$
$x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 10}$
$x = -3 \pm \sqrt{9 - 10}$
$x = -3 \pm \sqrt{-1}$

Denna ekvation saknar lösning eftersom kvadratroten ur negativa tal saknar reella lösningar. Funktionen saknar alltså nollställen (grafiskt betyder det att hela grafen ligger ovanför eller under x-axeln).

Vi kan ändå bestämma symmetrilinjens ekvation som "talet framför rottecknet" i pq-formeln. I detta fall är det −3. Alltså är symmetrilinjens ekvation $x_s = -3$.

Svar: $x_s = -3$