Funktion och funktionsvärde

Ett samband mellan två variabler, t.ex. x och y, där varje tillåtet x-värde ger exakt ett y-värde kallas **funktion**. Om vi ritar upp grafen till en funktion innebär det att om vi lägger en penna lodrätt över grafen kan den bara skära grafen en gång.

I sambandet $y = 2x + 3$ säger vi att “y är en funktion av x”.

Vad y har för värde beror på vad x har för värde. Därför kallas y den **beroende variabeln**. På motsvarande sätt kallas x för den **oberoende variabeln**. Det värde som funktionen y får kallas **funktionsvärde**.

För att förtydliga att vi har en funktion och för att visa vilken variabel den beror på används ett annat skrivsätt. Istället för y skriver vi $f(x)$, där f är namnet på funktionen och x står för vilken variabel den beror på. Alltså gäller $y = f(x)$ (film här). $f(x)$ utläses “f av x”.

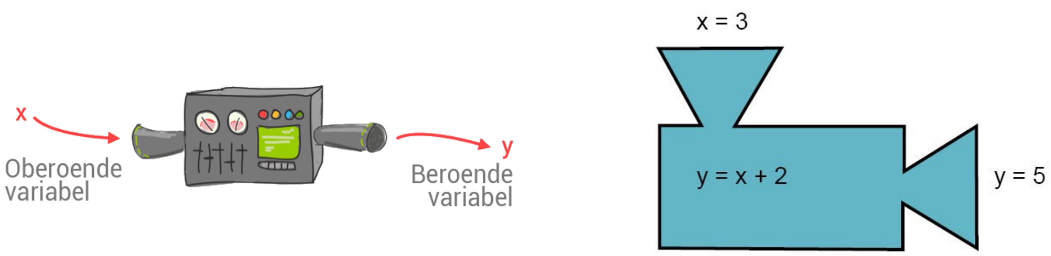
Om vi vill skriva sambandet $y = 2x + 3$ som en funktion skriver vi alltså
$f(x) = 2x + 3$

Om vi skulle rita grafen till $f(x) = 2x + 3$ skulle det bli en rät linje (jämför med $y = kx + m$). Detta kallas därför en **linjär funktion**.

Om vi vill ta reda på funktionsvärdet när $x = 5$ skriver vi $f(5)$ och beräknar det genom att ersätta x med 5 i vårt samband.
$f(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 10 + 3 = 13$

Så $f(5) = 13$.

Funktionen brukar liknas vid en maskin eller en regel. Vi stoppar in ett värde i maskinen/regeln och så ger det ett nytt värde. I funktionen ovan stoppade vi in värdet 5 som bearbetades enligt “regeln” $2x + 3$ och vi fick ut värdet 13.



Vi stoppar in den oberoende variabeln x = 3 i funktionsmaskinen f(x) = x + 2 och får ut den beroende variabeln y = 5.

Precis som att vi kan beteckna variabler med olika bokstäver, t.ex. x, y, z, …, så kan funktioner betecknas med olika bokstäver, vanligtvis f, g, h, …

$f(x) = 2x + 3$ betyder alltså samma sak som $g(x) = 2x + 3$.

Ex. Låt $f(x) = 5x - 3$. Bestäm

a) $f(4)$ b) $f(-2)$ c) $f(3a)$ d) $f(7) - f(6)$

a) För att beräkna $f(4)$ ersätter vi alla x med 4 i funktionen $f(x) = 5x - 3$.

$f(4) = 5 \cdot 4 - 3 = 20 - 3 = 17$

Svar: 17

b) Vi gör på motsvarande sätt som i a-uppgiften.

$f(x) = 5x - 3$

$f(-2) = 5 \cdot (-2) - 3 = -10 - 3 = -13$

Svar: −13

c) Ibland kan vi sätta in variabler i vår funktion. Principen är dock densamma. När vi beräknar $f(3a)$ byter vi ut alla x mot $3a$ och förenklar sedan som vanligt.

$f(x) = 5x - 3$

$f(3a) = 5 \cdot 3a - 3 = 15a - 3$

Svar: $15a - 3$

d) Ibland kan vi ha uttryck med flera funktioner. Då beräknar vi dem var och en för sig för att sedan lägga ihop dem eller så räknar vi ut dem tillsammans på en gång.

$f(x) = 5x - 3$

Metod 1: Var och en för sig

$f(7) = 5 \cdot 7 - 3 = 35 - 3 = 32$

$f(6) = 5 \cdot 6 - 3 = 30 - 3 = 27$

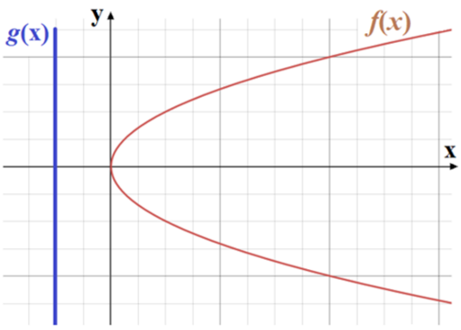
$f(7) - f(6) = 32 - 27 = \mathbf{5}$

Metod 2: Tillsammans på en gång

$f(7) - f(6) = 5 \cdot 7 - 3 - (5 \cdot 6 - 3) = 35 - 3 - (30 - 3) = 32 - 27 = \mathbf{5}$

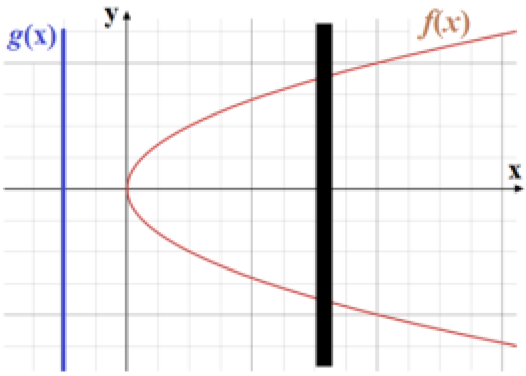
Svar: 5

Ex. Är $f(x)$ och $g(x)$, som är uppritade nedan, funktioner? Motivera ditt svar.



För att graferna ska vara funktioner ska varje giltigt *x*-värde ge <u>ett enda</u> *y*-värde. Grafen till *g*(*x*) har oändligt många *y*-värden för *x* = −2 (om varje ruta motsvarar 1) och är därför inte någon funktion.

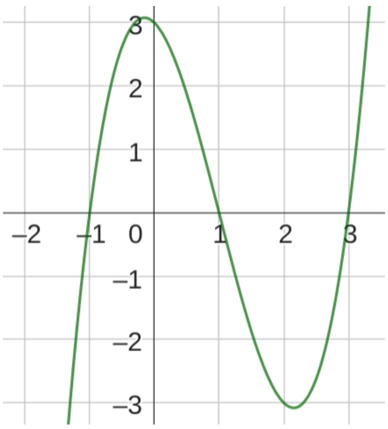
Vi lägger en penna lodrätt över grafen till *f*(*x*) …



… och ser att den skär grafen mer än en gång (två gånger). *f*(*x*) är alltså inte heller en funktion.

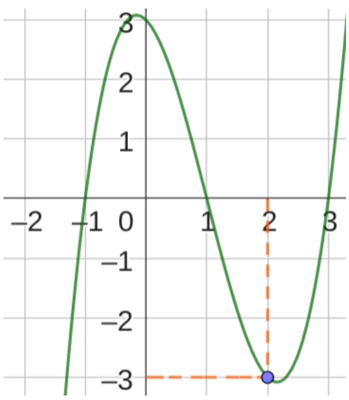
Svar: Nej, de är inte funktioner eftersom ett *x*-värde kan ge flera *y*-värden.

Ex. Grafen till funktionen *f* är uppritad.



a) Bestäm *f*(2)   b) Bestäm *f*(0)   c) Lös ekvationen *f*(*x*) = 0

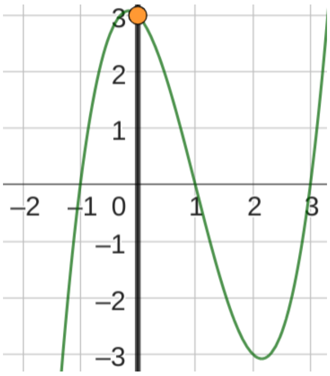
a) *f*(2) motsvarar funktionsvärdet (*y*-värdet) då *x* = 2.



Vi läser av grafen vid $x = 2$ och ser att y-koordinaten där är −3. Så $f(2) = -3$.

Svar: −3

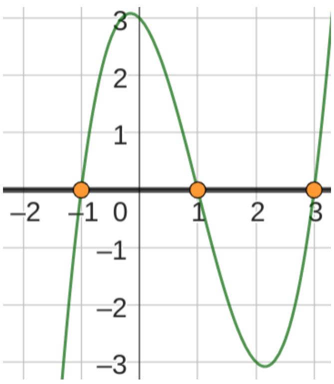
b) $f(0)$ motsvarar funktionsvärdet (y-värdet) då $x = 0$.



Vi läser av grafen vid $x = 0$ (vilket motsvarar skärningen med y-axeln) och ser att y-koordinaten där är 3. Så $f(0) = 3$.

Svar: 3

c) $f(x) = 0$ motsvarar att funktionsvärdet (y-värdet) är lika med 0.



Vi läser av grafen vid $y = 0$ (vilket motsvarar skärningarna med x-axeln) och ser att det gäller när $x = -1$, $x = 1$ och $x = 3$. Ekvationen har alltså tre lösningar.

Svar: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 3$