Exponentialekvationer och tiologaritmer

Kom ihåg:

Skriva ett tal med basen 10
$a = 10^{\lg a}$ där $a > 0$

För att lösa exponentialekvationer med hjälp av tiologaritmer använder vi principen att om två potenser med samma bas är lika, så måste också deras exponenter vara lika. Exempelvis, om $2^x = 2^7$, så måste $x = 7$.

Lösa exponentialekvationer med tiologaritmer
1. Skriv om båda led med basen 10 enligt principen $a = 10^{\lg a}$.
2. Förenkla med potenslagarna.
3. Sätt exponenterna lika och lös ekvationen.

En ekvation där variabeln finns i logaritmen, t.ex. $\lg x = 3$, kallas **logaritmekvation**. Dessa löser vi enklast genom att skriva om ekvationen från logaritmform till potensform och sedan lösa ekvationen enligt tidigare metoder.

Lösa logaritmekvationer
$\lg x = a$ (logaritmform) $\Leftrightarrow$ $10^a = x$ (potensform)

Omskrivning från logaritmform till potensform med ord: "10 upphöjt till det som står i högra ledet är lika med det vi har logaritmen för."

Ex. Lös ekvationerna nedan. Svara exakt och med två decimaler.
a) $10^x = 53$ b) $2^x = 37$ c) $5 \cdot 3^{2x} - 4 = 31$

a) Vi skriver om HL till basen 10 och sätter sedan exponenterna lika.
$10^x = 10^{\lg 53}$
$x = \lg 53$
$x \approx 1{,}72$

(Om du direkt från ekvationen $10^x = 53$ ser att $x = \lg 53$, utifrån definitionen, går det bra att skriva det direkt, utan mellanled.)

Svar: $x = \lg 53 \approx 1{,}72$

b) $2^x = 37$

Vi skriver om båda led till basen 10 och förenklar med potenslagar.
$(10^{\lg 2})^x = 10^{\lg 37}$
$10^{x \cdot \lg 2} = 10^{\lg 37}$

Vi kan nu sätta exponenterna lika och får

$x \cdot \lg 2 = \lg 37$

$\frac{x \cdot \lg 2}{\mathbf{\lg 2}} = \frac{\lg 37}{\mathbf{\lg 2}}$

$x = \frac{\lg 37}{\lg 2} \approx 5{,}21$

Svar: $x = \frac{\lg 37}{\lg 2} \approx 5{,}21$

c) $5 \cdot 3^{2x} - 4 = 31$

Vi börjar med att lösa ut potensen 3^{2x}.

$5 \cdot 3^{2x} - 4 \mathbf{+ 4} = 31 \mathbf{+ 4}$

$5 \cdot 3^{2x} = 35$

$\frac{5 \cdot 3^{2x}}{\mathbf{5}} = \frac{35}{\mathbf{5}}$

$3^{2x} = 7$

Skriver om båda led till basen 10 och förenklar med logaritmlagar.

$(10^{\lg 3})^{2x} = 10^{\lg 7}$

$10^{2x \cdot \lg 3} = 10^{\lg 7}$

Sätter exponenterna lika och löser ekvationen.

$2x \cdot \lg 3 = \lg 7$

$\frac{2x \cdot \lg 3}{\mathbf{2 \cdot \lg 3}} = \frac{\lg 7}{\mathbf{2 \cdot \lg 3}}$

$x = \frac{\lg 7}{2 \cdot \lg 3} \approx 0{,}89$

Svar: $x = \frac{\lg 7}{2 \cdot \lg 3} \approx 0{,}89$

Ex. Lös

a) $\lg x = 3$ b) $\lg 5x = 2{,}7$

a) $\lg x = 3$

Vi skriver om ekvationen till potensform. “10 upphöjt till det som står i högra ledet, ska bli det vi har logaritmen för.”

$10^3 = x$

$x = 1\ 000$

(Om du direkt från ekvationen ser att x = 1 000 eftersom lg 1 000 = 3, går det bra att skriva det direkt, utan mellanled.)

Svar: x = 1 000

b) lg 5x = 2,7

Vi skriver om ekvationen till potensform. Kom ihåg: "10 upphöjt till det som står i högra ledet, ska bli det vi har logaritmen för."

$10^{2,7} = 5x$

$\frac{10^{2,7}}{5} = \frac{5x}{5}$

$100,24 \approx x$

Svar: $x \approx 100,24$