Algoritmi e Strutture Dati

Elaborato a.a. 2022-2023

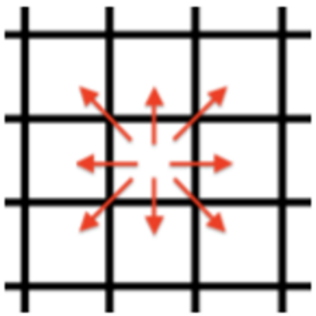
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Prof. Alessandro Saetti
Prof.ssa Marina Zanella

PROBLEMA

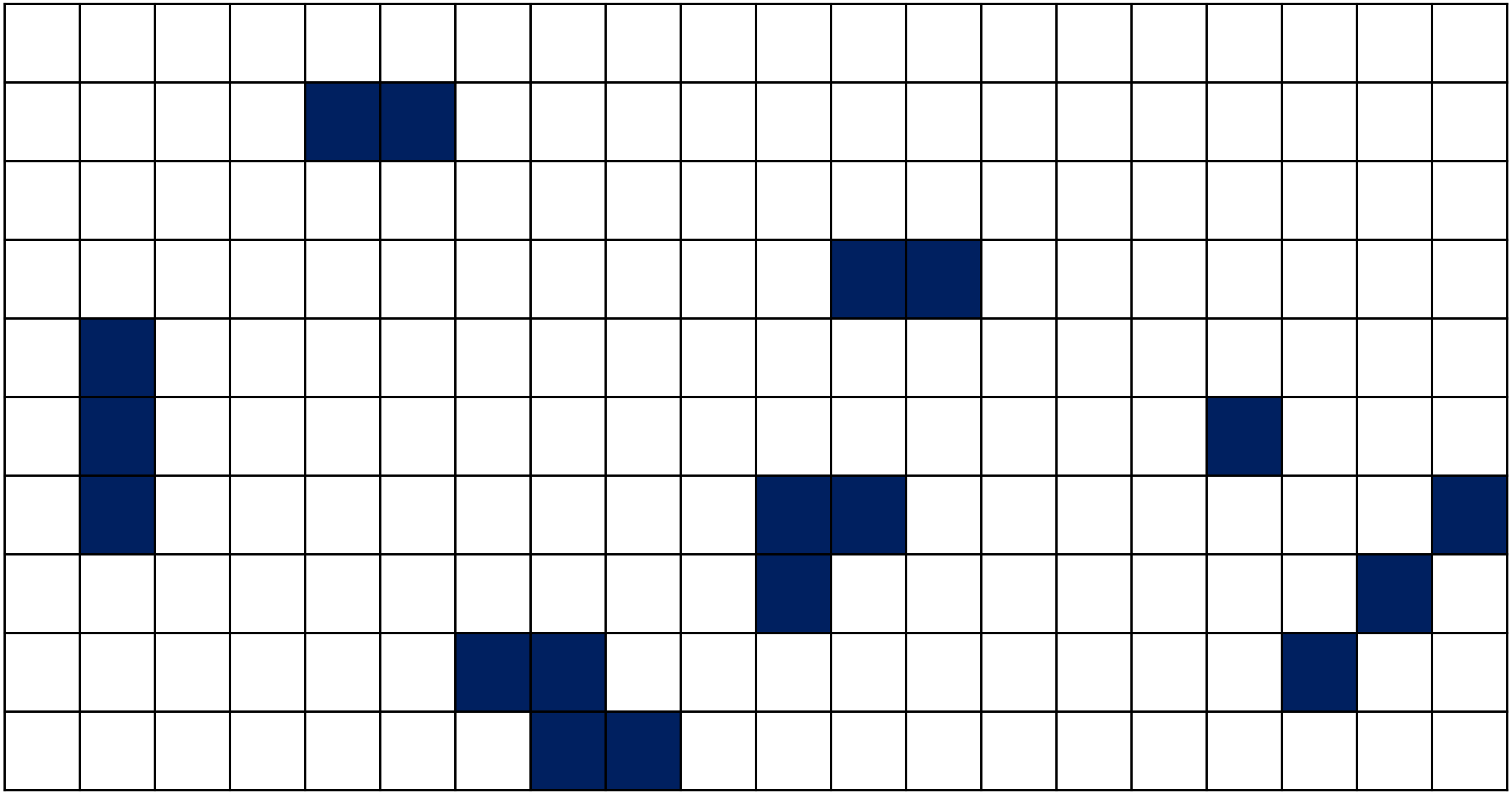
Griglia (8-connected gridmap)

- È uno spazio bidimensionale entro cui si possono muovere uno o più agenti



- Ogni mossa cardinale (N,S,E,W) ha costo 1
- Ogni mossa diagonale (NE,NW,SE,SW) ha costo $\sqrt{2}$
- Una cella può essere attraversabile oppure non attraversabile, nel qual caso è un ostacolo (agli spostamenti degli agenti)
- È possibile attraversare gli spigoli degli ostacoli (con le mosse diagonali)

Griglia bidimensionale finita dotata di ostacoli



La figura contiene un ostacolo costituito da una singola cella non attraversabile (in blu) e cinque ostacoli che sono agglomerati di 2, 3 o 4 celle non attraversabili. Un ulteriore ostacolo (quello più a destra) non è propriamente un agglomerato perché le celle non attraversabili si toccano solo sugli spigoli

Grafo

- Ciascuna griglia induce un grafo orientato pesato G dove
  - Le celle attraversabili sono i vertici di G
  - Le adiacenze tra celle attraversabili sono gli archi di G
  - Il peso $w(v_1, v_2)$ di un arco (v_1, v_2) di G è il costo della mossa per passare dalla cella attraversabile rappresentata da v_1 alla cella adiacente attraversabile rappresentata v_2
  - Per ciascun vertice v di G vi è un cappio (v, v) con peso 1 (cioè ogni vertice/cella è adiacente a se stesso)

Percorso

- Un agente può seguire un percorso entro la griglia
- Un percorso π è una sequenza di archi/mosse $(n_0, n_1), (n_1, n_2), \dots, (n_{k-1}, n_k)$. Convenzionalmente, First(π) = n_0 e Last(π) = n_k
- Si assume che ogni mossa (cioè lo spostamento di un agente da una cella a una cella/vertice adiacente) avvenga in un tempo unitario
- Per lunghezza/durata di un percorso, indicata con $|\pi|$, si intende il numero di mosse in π (cioè k)
- Il peso/costo del percorso π è $\sum_{i=0}^{k-1} w(n_i, n_{i+1})$

Mosse: vincoli

$$l_t(\alpha_i) = l_{t+1}(\alpha_i) \text{ oppure}$$
$$(l_t(\alpha_i), l_{t+1}(\alpha_i)) \in E[G]$$

- Cioè, nell'intervallo di tempo unitario $(t, t+1]$, un agente α_i può (solamente)
    - non cambiare la cella (l) in cui è posizionato – questo equivale a eseguire una mossa lungo un cappio (mossa wait), oppure
    - spostarsi tra due celle adiacenti distinte – questo equivale a eseguire una mossa lungo un arco che non è un cappio

Più percorsi nella medesima griglia: vincoli

1. La medesima cella non può essere occupata contemporaneamente da due agenti distinti (formalmente $l_t(\alpha_i) \neq l_t(\alpha_j), \forall t$ istante temporale, $i \neq j$)

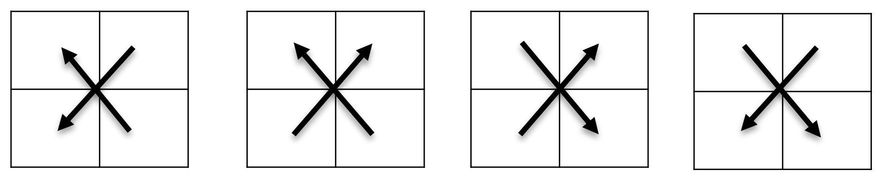
2. Due agenti che occupano celle adiacenti non possono scambiarsi il posto (formalmente, se $l_t(\alpha_i) = v \wedge l_{t+1}(\alpha_i) = u$ allora $l_t(\alpha_j) \neq u \vee l_{t+1}(\alpha_j) \neq v, \forall t$ istante temporale, $v, u \in V[G], i \neq j$)

- Se i percorsi di due agenti distinti α_i e α_j infrangono il vincolo 1 oppure il vincolo 2, si dice che tali percorsi entrano in collisione (o conflitto)

- È consentito che gli agenti si seguano, cioè l'agente α_i può muoversi da v a u anche se, nello stesso intervallo di tempo unitario, l'agente α_j si muove da u a z

Più percorsi nella medesima griglia: vincoli (opzionali)

È ragionevole vietare anche mosse come



in cui le traiettorie degli agenti si incrociano diagonalmente
(oltre che in direzione cardinale)

Pathfinding for an entry agent (PF4EA)

- Un'istanza del problema PF4EA è una tupla $\langle G, w, \{\pi_i\}_{i\ =\ 1..n}, init, goal, max \rangle$ dove
  - G è il grafo orientato pesato corrispondente a una griglia dotata di ostacoli (i vertici rappresentano le celle attraversabili, gli archi rappresentano le connessioni tra celle attraversabili)
  - $w: E[G] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione peso (il peso di un arco rappresenta il costo di una mossa)
  - $\{\pi_i\}_{i\ =\ 1..n}$ è un insieme di percorsi di *n* (*n*≥0) agenti α_i su tale griglia/grafo che rispettano i vincoli enunciati relativi a mosse e percorsi; si assume che, una volta terminato il percorso π_i, l'agente α_i resti fermo (senza compiere alcuna mossa) nella cella finale dello stesso
  - $init \in V[G]$ è il vertice che rappresenta la cella iniziale dell'agente aggiuntivo α_{n+1}
  - $goal \in V[G]$ è il vertice che rappresenta la cella finale dell'agente aggiuntivo α_{n+1}
  - max è un limite superiore per la lunghezza/durata di ciascun percorso entro la griglia, assumendo che tutti i percorsi inizino all'istante 0

PF4EA

- L'assunzione che tutti i percorsi degli *n* agenti inizino all'istante 0 comporta che la cella iniziale di ciascuno di tali percorsi sia distinta (altrimenti verrebbe infranto il vincolo 1)
- Analogamente, l'assunzione che, terminato il suo percorso, un agente resti fermo nella cella finale dello stesso comporta che la cella finale di ciascun percorso sia distinta (altrimenti verrebbe infranto il vincolo 1)
- Il valore di max non deve superare la somma tra il numero di celle attraversabili della griglia e la lunghezza massima dei percorsi degli agenti preesistenti

Compito 1

- Progettare e realizzare un generatore di griglie, che dati opportuni parametri (quali dimensioni della griglia, percentuale di celle attraversabili, fattore di agglomerazione degli ostacoli) costruisca la griglia e posizioni in modo semi-casuale gli ostacoli entro la stessa. Ogni invocazione deve portare alla creazione dei primi due elementi (cioè G e w) di una istanza del problema PF4EA
- Si noti che i primi due elementi di un'istanza (G e w) costituiscono in realtà una struttura dati unica (grafo pesato), producibile senza necessariamente creare prima una rappresentazione topologica della griglia

Compito 1

- In alternativa a quanto richiesto nella pagina precedente, progettare e realizzare un generatore di istanze che, a ogni invocazione, produca non solo i primi due elementi bensì un'intera istanza del problema PF4EA, secondo cui i percorsi π_i degli *n* agenti sono definiti in modo semi-casuale (nel rispetto delle adiacenze delle celle e dei vincoli relativi a mosse e percorsi multipli). Nell'ambito della creazione dei percorsi degli agenti preesistenti, si potrebbe sfruttare (se ritenuto opportuno) l'algoritmo di controllo dell'assenza di collisioni (cfr. Compito 3, pag. 60)
- Si noti che il generatore di istanze sussume il generatore di griglie
- All'utente dei generatori di cui sopra deve essere consentito di configurare dei parametri, ritenuti significativi (anche ai fini della sperimentazione di cui si parlerà più avanti), che guidino i generatori stessi nelle scelte non totalmente casuali

Soluzione di PF4EA

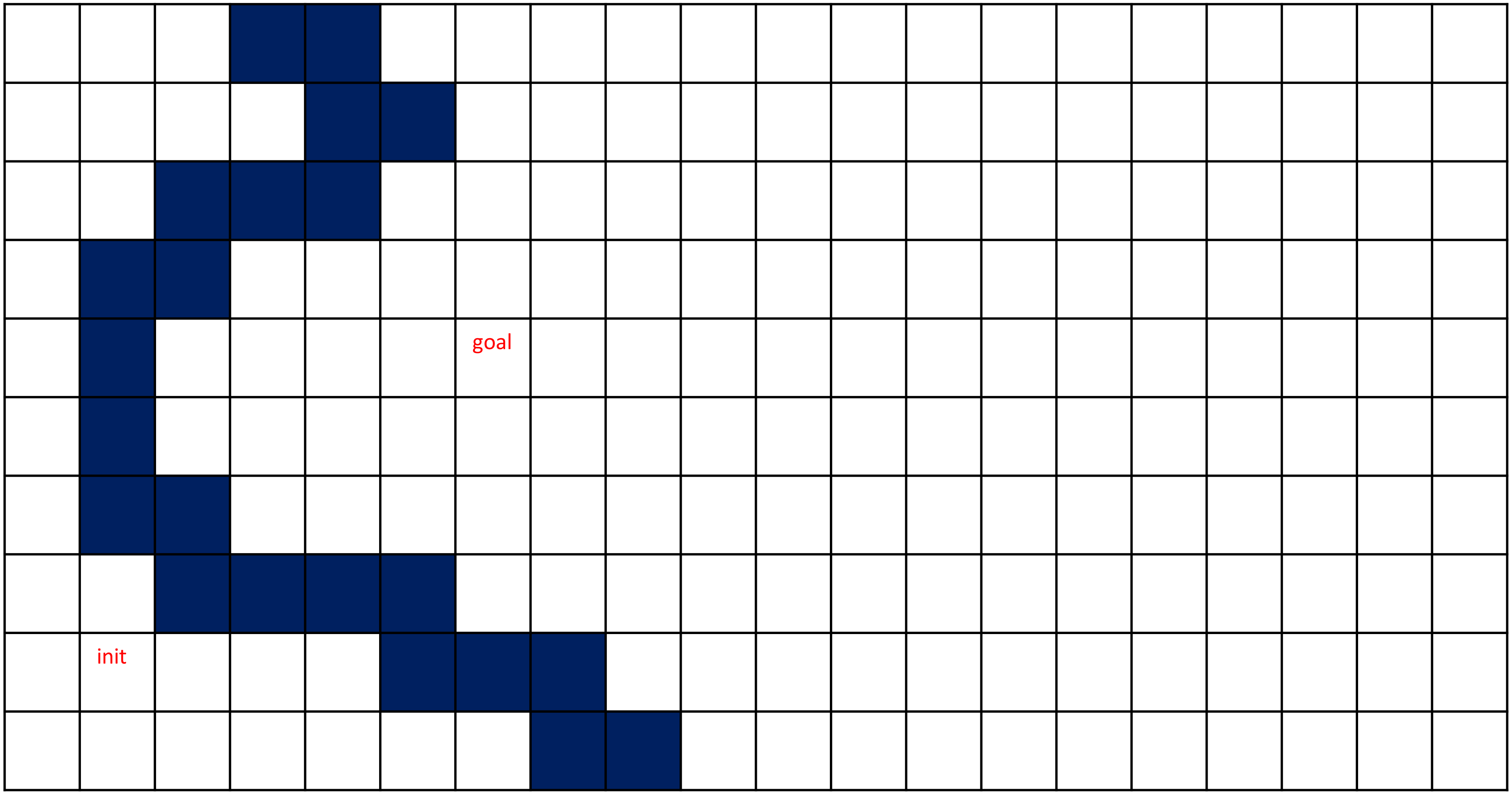
La soluzione relativa a un'istanza di PF4EA è un percorso π_{n+1} (se esiste) per il nuovo agente α_{n+1} tale che

- $\text{First}(\pi_{n+1}) = init$
- $\text{Last}(\pi_{n+1}) = goal$
- $|\pi_{n+1}| \leq max$
- π_{n+1} evita collisioni con i percorsi degli altri *n* agenti, che restano invariati
- $w(\pi_{n+1})$ è il costo minimo fra i costi dei percorsi che iniziano in $init$, terminano in $goal$, evitano collisioni e hanno una lunghezza al più uguale a max

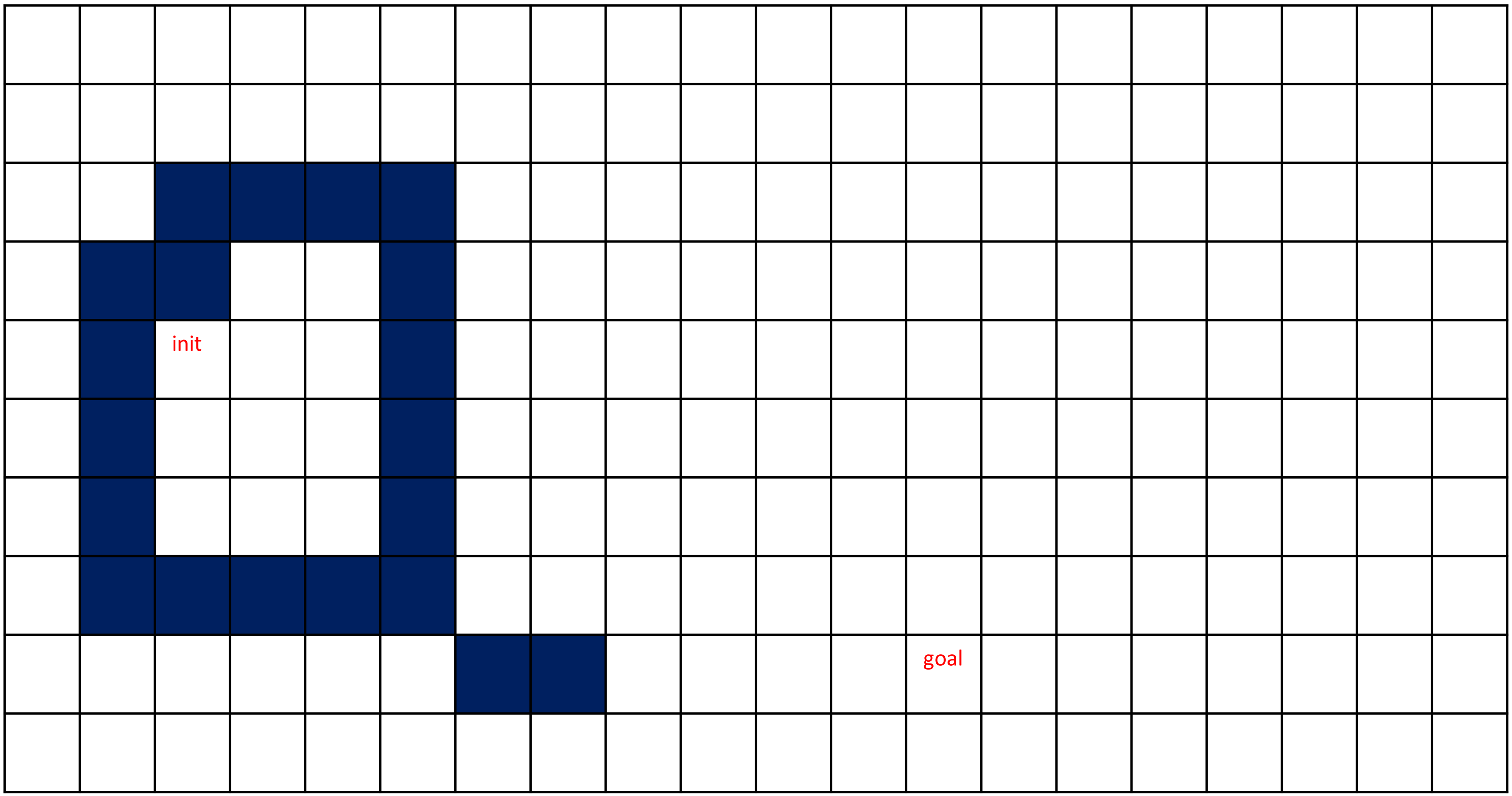
Soluzione di PF4EA (cont.)

- Il percorso π_{n+1} può non esistere per le seguenti ragioni:
  - la cella $init/goal$ coincide con la cella di partenza/arrivo del percorso di un agente preesistente
  - le celle $init$ e $goal$ sono reciprocamente irraggiungibili data la griglia corrente
  - l'orizzonte temporale max considerato è troppo breve per qualsiasi percorso (privo di conflitti) da $init$ a $goal$
  - le celle occupate dagli agenti preesistenti costituiscono una barriera insormontabile per il raggiungimento della cella $goal$ a partire dalla cella $init$ da parte dell'agente *entry*

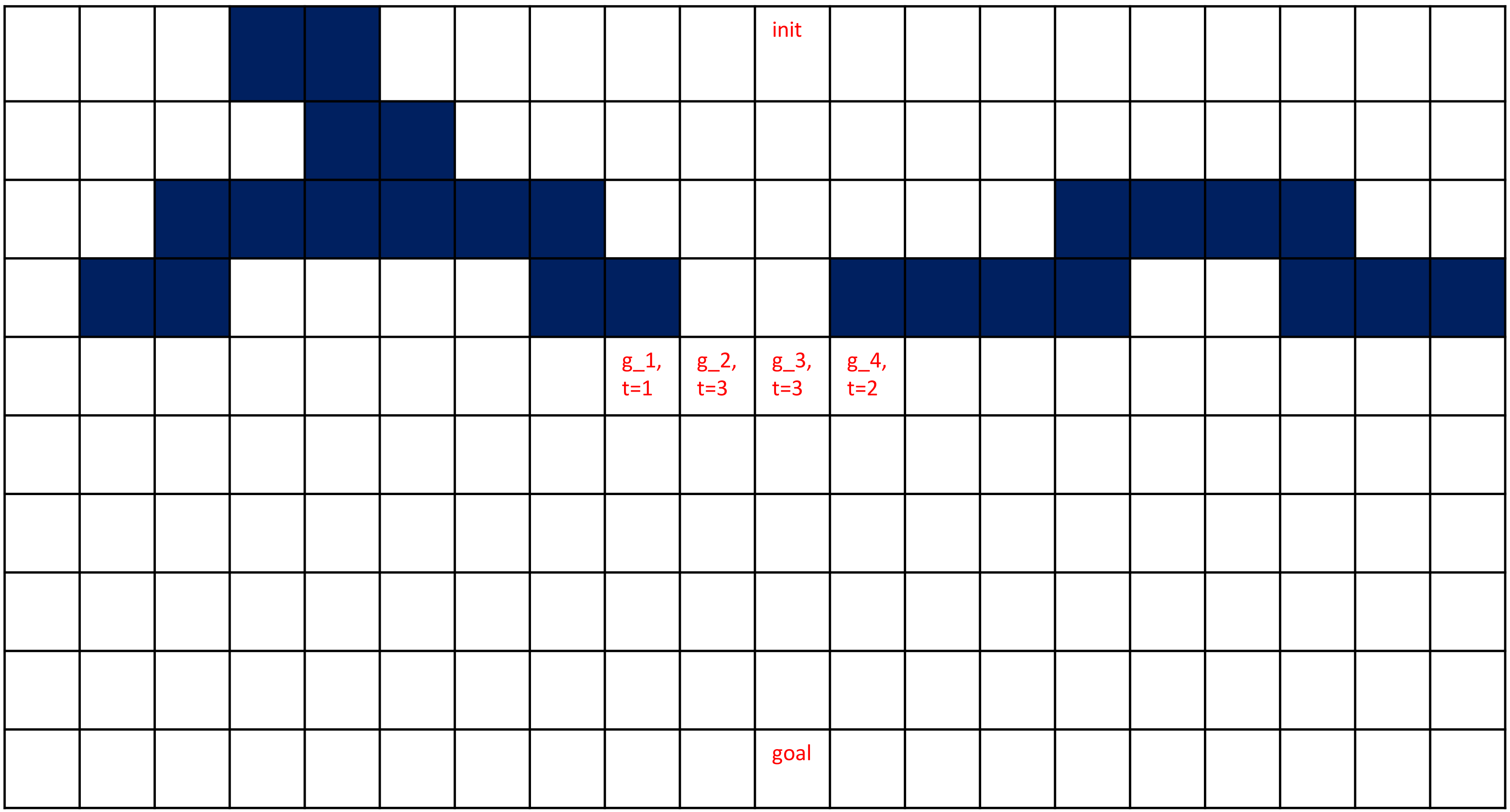
Esempio di celle reciprocamente irraggiungibili



Altro esempio di celle reciprocamente irraggiungibili



Esempio di barriera



g_i, t = cella goal dell'agente (preesistente) α_i e istante di raggiungimento della stessa

ALGORITMO RISOLVENTE

Algoritmo ReachGoal

- Acquisisce in ingresso una istanza del problema PF4EA
- Esegue una ricerca A* nello spazio $V \times \mathbb{N}$ (il tempo ha come dominio l'insieme dei numeri naturali)
- Usa due liste di stati, dove uno stato è una coppia $\langle$vertice, istante temporale$\rangle$
  - $Open$, che contiene gli stati da espandere
  - $Closed$, che contiene gli stati già espansi
- Mantiene due strutture dati
  - $g(\langle v, t \rangle)$, il costo più basso sinora calcolato per raggiungere il vertice v all'istante t partendo da $init$ all'istante 0
  - $P(\langle v, t \rangle)$, lo stato genitore di $\langle v, t \rangle$ nell'albero dei cammini minimi (cioè di costo minimo)
- Produce in uscita un percorso di costo minimo compatibile coi percorsi degli altri agenti, da $init$ a $goal$, di durata non superiore a max per l'agente α_{n+1} (new entry) a partire dall'istante 0 oppure produce un «fallimento»

Algoritmo ReachGoal (cont.)

- Nello pseudocodice di ReachGoal di cui alle pagine successive
  - la funzione euristica $h(v, goal)$ è la stima del costo minimo di un percorso dal vertice v al vertice $goal$. Il valore di $h(v, goal)$ non cambia mai durante l'esecuzione
  - la funzione score $f(\langle v, t\rangle)$, che è data dalla somma $g(\langle v, t\rangle) + h(v, goal)$, rappresenta la stima del costo minimo di un percorso da $init$ a $goal$ passando per il vertice v all'istante t. Il valore $f(\langle v, t\rangle)$ può decrescere durante l'esecuzione in seguito alla diminuzione del valore di $g(\langle v, t\rangle)$
  - Σ è l'insieme degli *n* agenti il cui percorso (sempre di lunghezza minore o uguale a max) è noto a priori

Algoritmo (parte 1)

Inizializza le strutture dati

$\textbf{\textit{ReachGoal}}(G, w, \{\pi_i\}_{i=1}^{n}, init, goal, max)$

$\quad Closed \leftarrow \emptyset;$

$\quad Open \leftarrow \{\langle init, 0\rangle\};$

$\quad \textbf{for } t = 0 \textbf{ to } max \textbf{ do}$

$\quad\quad \textbf{foreach } \textit{vertex } v \in V[G] \textbf{ do}$

$\quad\quad\quad g(\langle v, t\rangle) \leftarrow \infty;$

$\quad\quad\quad P(\langle v, t\rangle) \leftarrow nil;$

$\quad\quad \textbf{end}$

$\quad \textbf{end}$

$\quad g(\langle init, 0\rangle) \leftarrow 0;$

$\quad f(\langle init, 0\rangle) \leftarrow h(init, goal);$

Lo pseudocodice omette di controllare se altri agenti partono da $init$

Algoritmo (parte 2)

Estrae uno stato da $Open$ e controlla l'eventuale raggiungimento di $goal$

while $Open \neq \emptyset$ **do**
    $\langle v, t \rangle \leftarrow$ the state in $Open$ with the lowest f-score;
    $Open \leftarrow Open \setminus \{\langle v, t \rangle\}$;
    $Closed \leftarrow Closed \cup \{\langle v, t \rangle\}$;
    if $v = goal$ **then**
        return $\mathsf{RecostructPath}(init, goal, P, t)$;
    end

STRATEGIA ALTERNATIVA

Algoritmo (parte 3)

Verifica che non si oltrepassi l'orizzonte temporale e che non si presentino collisioni

if $t < max$ **then**
    foreach $n \in Adj[v]$ **do**
        if $\langle n, t+1 \rangle \notin Closed$ **then**
            $traversable \leftarrow true;$
            foreach *agent* $a \in \Sigma$ **do**
                if $l_{t+1}(a) = n \vee (l_{t+1}(a) = v \wedge l_t(a) = n)$ **then**
                    $traversable \leftarrow false$
                end
            end

Lo pseudocodice omette di controllare se si entri in collisione con un agente preesistente fermo nella sua cella finale (negli istanti successivi al raggiungimento della stessa)

Algoritmo (parte 4)

Aggiorna P e g e inserisce il nuovo stato in $Open$; restituisce «fallimento» nel caso la lista $Open$ si svuoti

if $traversable = true$ **then**
    if $g(\langle v, t \rangle) + w(v, n) < g(\langle n, t+1 \rangle)$ **then**
        $P(\langle n, t+1 \rangle) \leftarrow \langle v, t \rangle$;
        $g(\langle n, t+1 \rangle) \leftarrow g(\langle v, t \rangle) + w(v, n)$;
        Compute the heuristic distance $h(n, goal)$;
        $f(\langle n, t+1 \rangle) \leftarrow g(\langle n, t+1 \rangle) + h(n, goal)$;
    end
    if $\langle n, t+1 \rangle \notin Open$ **then**
        $Open \leftarrow Open \cup \{\langle n, t+1 \rangle\}$;
    end
end
end
end
end
end
return *failure*;

Compito 2

- Progettare e implementare l'algoritmo ReconstructPath($init, goal, P, t$) – di cui deve essere scritto lo pseudocodice – per ricostruire il percorso di costo minimo, di lunghezza t, dal vertice $init$ al vertice $goal$ secondo le indicazioni contenute nella struttura dati P (albero dei cammini minimi)
- Sviluppare l'algoritmo ReachGoal per la risoluzione di PF4EA nella versione priva delle righe 19-22 dello pseudocodice, prestando particolare attenzione alla definizione di strutture dati appropriate, in modo da limitare l'occupazione di memoria all'aumentare
  - della dimensione della griglia
  - dell'orizzonte temporale max
  - della lunghezza della soluzione

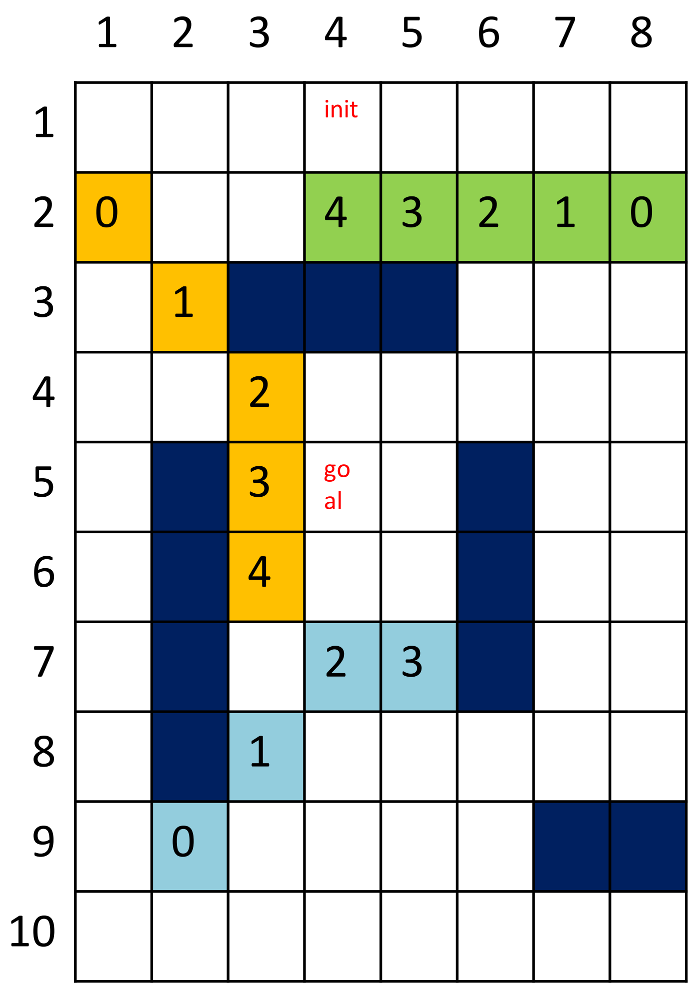
Compito 2 (cont.)

- Come funzione h utilizzare una euristica (ad esempio, una fra quelle presentate a lezione) che sia ammissibile (altrimenti il percorso trovato non è ottimo) e consistente (per visitare - cioè espandere - ogni stato al più una volta)
  - DISTANZA DIAGONALE
  - LUNGHEZZA DEL CAMMINO MINIMO (SENZA ALTRI AGENTI)
  - COSTO DEL CAMMINO MINIMO (SENZA ALTRI AGENTI)

Compito 2: osservazioni

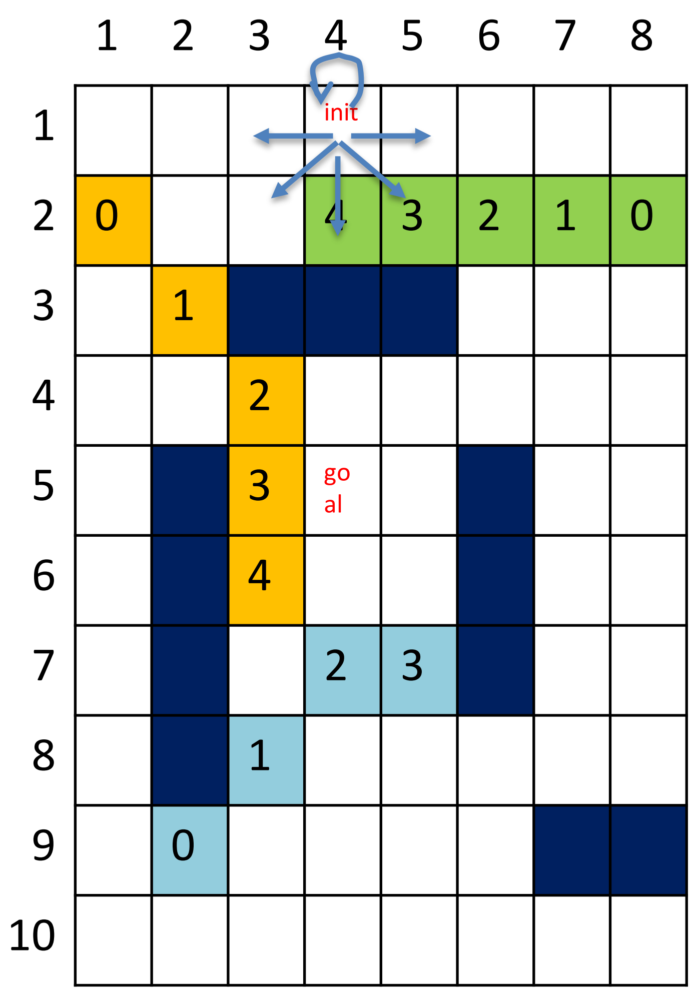
- L’ultima euristica citata nell’elenco della pagina precedente - COSTO DEL CAMMINO MINIMO (SENZA ALTRI AGENTI) - prende il nome di «euristica del cammino rilassato» (di cui si parlerà anche più avanti)
- Nel caso si adottasse tale euristica o quella della LUNGHEZZA DEL CAMMINO MINIMO (SENZA ALTRI AGENTI), anziché calcolare $h(n, goal)$ per ogni vertice n (riga 36 dello pseudocodice), si potrebbe *pre*calcolare (con una sola esecuzione di un apposito algoritmo effettuata a priori) il costo minimo o la lunghezza minima dei percorsi rilassati da $goal$ a tutti i vertici del grafo, utilizzando poi in ReachGoal i valori così calcolati

Esempio di istanza di PF4EA



- max = 15
- Si suppone che h sia la distanza diagonale
- Le celle verdi, arancioni e azzurre indicano i percorsi dei tre (n=3) agenti preesistenti (ogni cella contiene l'istante temporale in cui viene raggiunta)

Simulazione di ReachGoal



- $Open$: $\{\langle(1,4),0\rangle\}$
- $Closed$: $\varnothing$

Valore di g

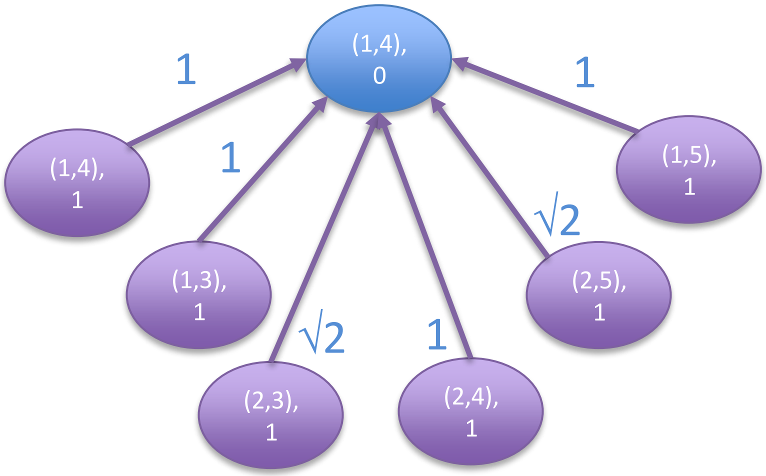
Valore di h

- $Open$:
  $\{\langle(1,4),1\rangle$, $f=1+4$
  $\langle(1,3),1\rangle$, $f=1+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,3),1\rangle$, $f=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(2,4),1\rangle$, $f=1+3$
  $\langle(2,5),1\rangle$, $f=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),1\rangle\}$ $f=1+(3+\sqrt{2})$
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle\}$

Valore minimo di f

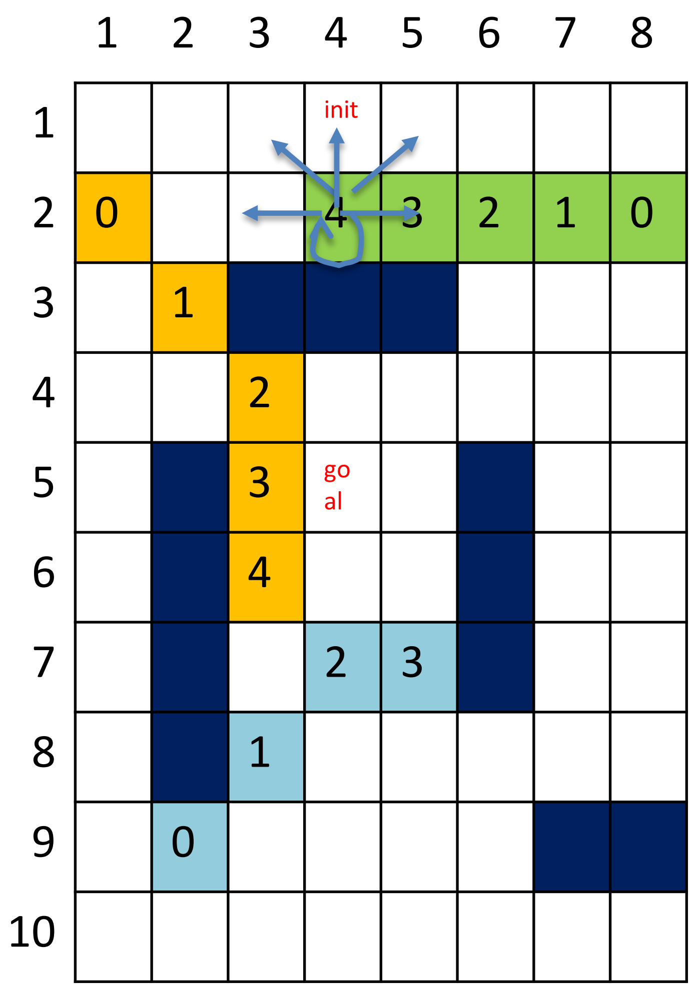
Albero dei cammini minimi (P)

- $Open$:
  $\{\langle(1,4),1\rangle$, f =1+4
  $\langle(1,3),1\rangle$, f =1+(3+√2)
  $\langle(2,3),1\rangle$, f =√2+(2+√2)
  $\langle(2,4),1\rangle$, f =1+3
  $\langle(2,5),1\rangle$, f =√2+(2+√2)
  $\langle(1,5),1\rangle\}$ f =1+(3+√2)
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle\}$



In viola sono evidenziati gli elementi aggiunti. Le frecce indicano il puntatore allo stato padre. Accanto a ogni freccia è riportato il costo dell'arco del grafo dal vertice di cui allo stato padre al vertice di cui allo stato figlio. La somma dei costi lungo il cammino da uno stato alla radice è il valore g di tale stato

Simulazione di ReachGoal

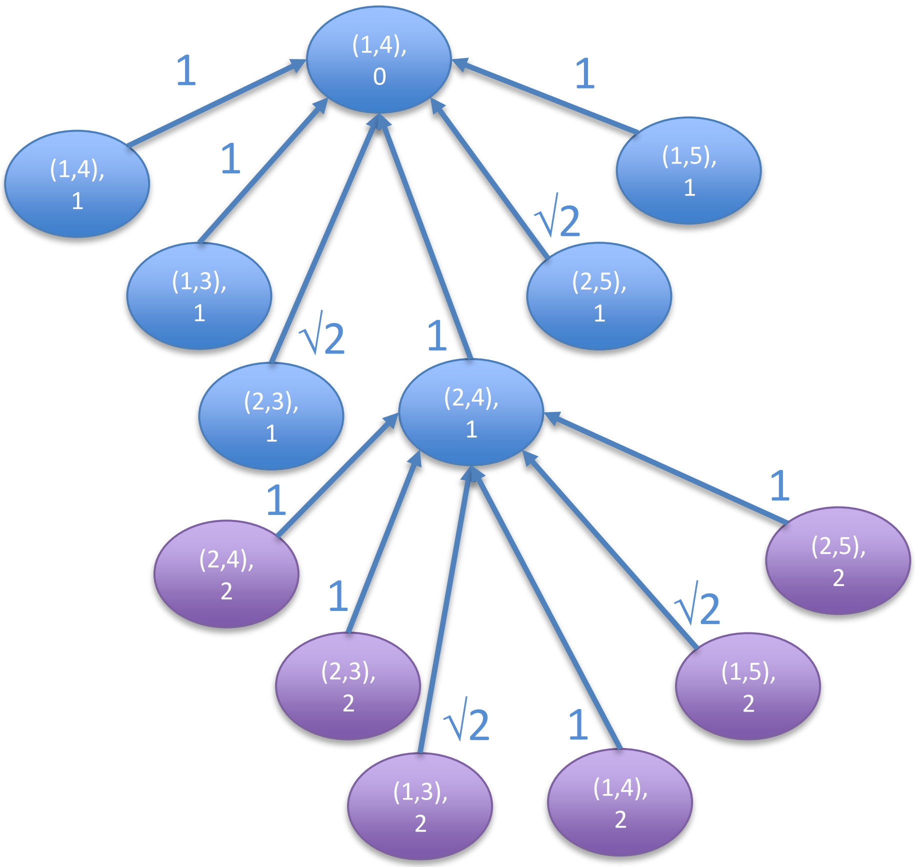


- $Open$:
  $\{\langle(1,4),1\rangle,$ $f=1+4$
  $\langle(1,3),1\rangle,$ $f=1+(3+\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(2,3),1\rangle,\ f=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})}$
  $\langle(2,5),1\rangle,$ $f=\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),1\rangle,$ $f=1+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,4),2\rangle,$ $f=2+3$
  $\langle(2,3),2\rangle,$ $f=2+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),2\rangle,$ $f=1+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),2\rangle,$ $f=2+4$
  $\langle(1,5),2\rangle,$ $f=1+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,5),2\rangle\}$ $f=2+(2+\sqrt{2})$
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle\}$

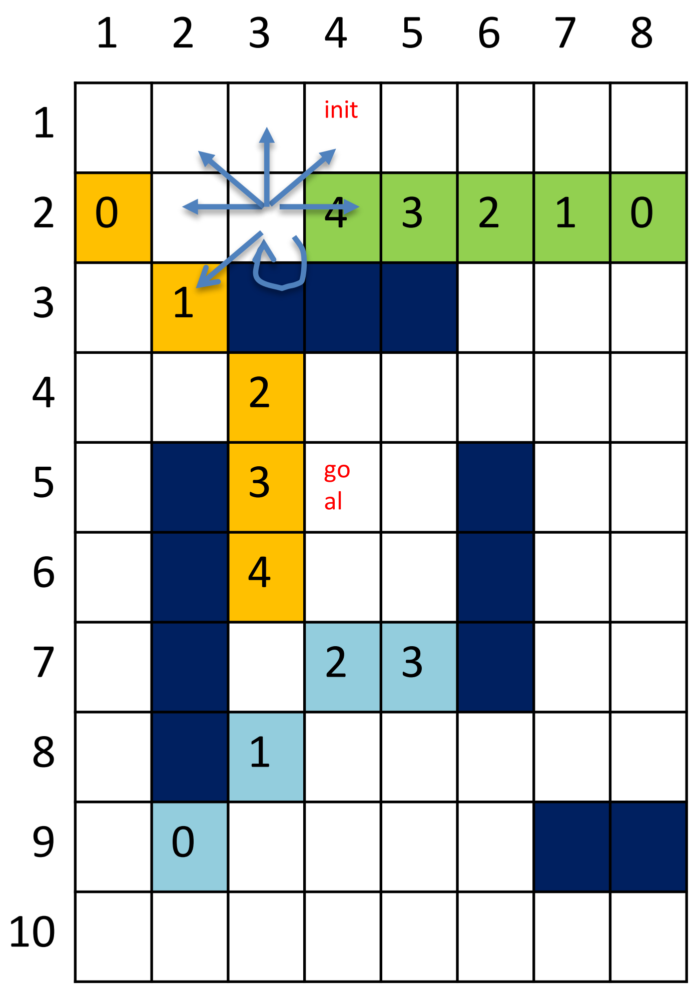
Albero dei cammini minimi

- $Open$:
  {…
  ⟨(2,4),2⟩, f =2+3
  ⟨(2,3),2⟩, f =2+(2+√2)
  ⟨(1,3),2⟩, f =1+√2+(3+√2)
  ⟨(1,4),2⟩, f =2+4
  ⟨(1,5),2⟩, f =1+√2+(3+√2)
  ⟨(2,5),2⟩} f =2+(2+√2)

- $Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩}



Simulazione di ReachGoal



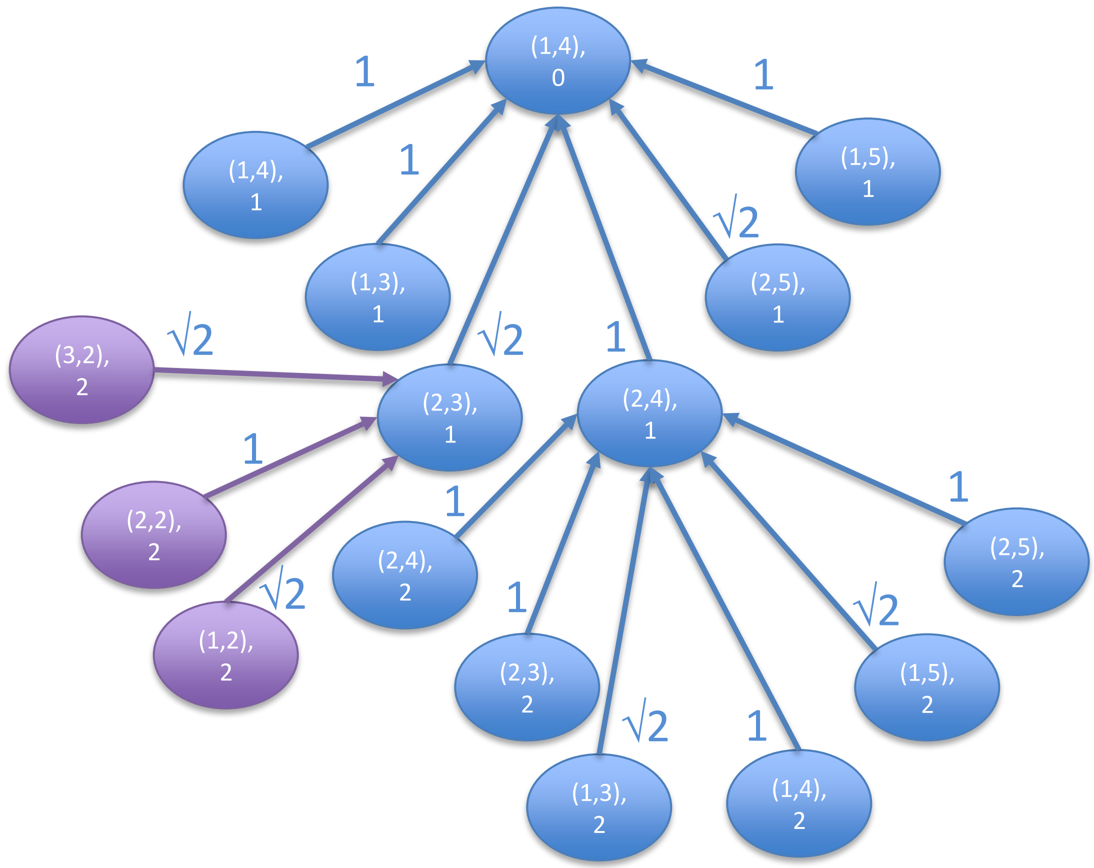
- $Open$:
  $\{\langle(1,4),1\rangle,\ f = 1+4$
  $\langle(1,3),1\rangle,\ f = 1+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,5),1\rangle,\ f = \sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),1\rangle,\ f = 1+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,4),2\rangle,\ f = 2+3$
  $\langle(2,3),2\rangle,\ f = 2+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),2\rangle,\ f = 1+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),2\rangle,\ f = 2+4$
  $\langle(1,5),2\rangle,\ f = 1+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,5),2\rangle,\ f = 2+(2+\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(2,3),2\rangle,}\ \cancel{\sqrt{2}+1>2}$
  $\langle(3,2),2\rangle,\ f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(2,2),2\rangle,\ f = \sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,2),2\rangle,\ f = 2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(1,3),2\rangle,}\ \cancel{\sqrt{2}+1=1+\sqrt{2}}$
  $\cancel{\langle(1,4),2\rangle,}\ \cancel{2\sqrt{2}>2}$
  $\cancel{\langle(2,4),2\rangle\}}\ \cancel{\sqrt{2}+1>2}$
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle\}$

Gli stati qui barrati non vengono inseriti in $Open$ perché infrangono la condizione alla riga 33 dello pseudocodice

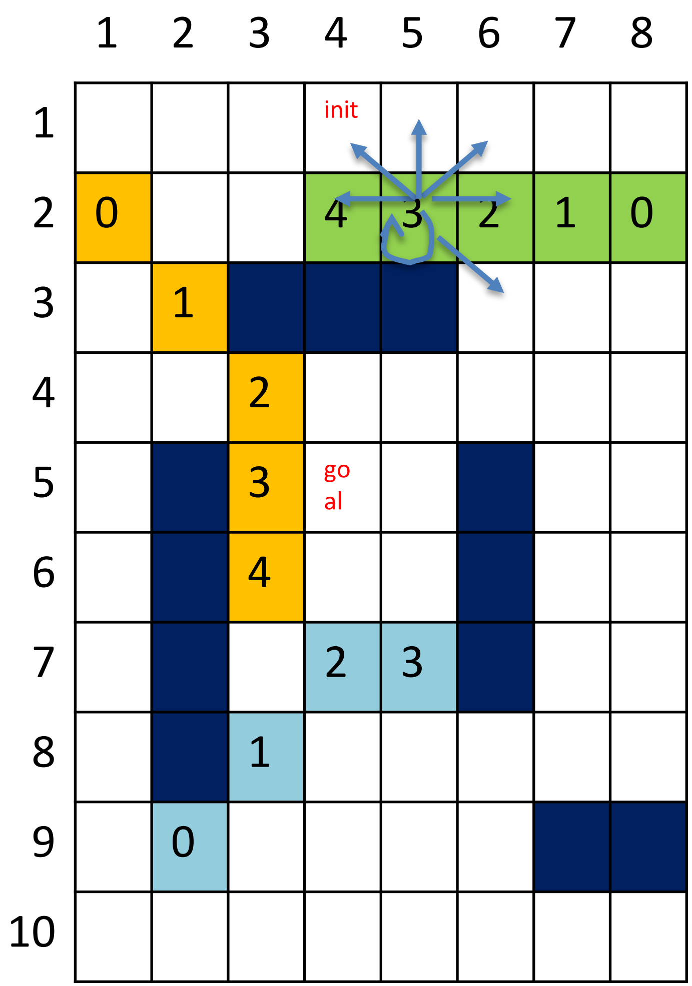
Albero dei cammini minimi

- $Open$:
  {…
  ⟨(3,2),2⟩, $f = 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),2⟩, $f = \sqrt{2} + 1 + (1 + 2\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),2⟩} $f = 2\sqrt{2} + (2 + 2\sqrt{2})$

- $Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩}



Simulazione di ReachGoal

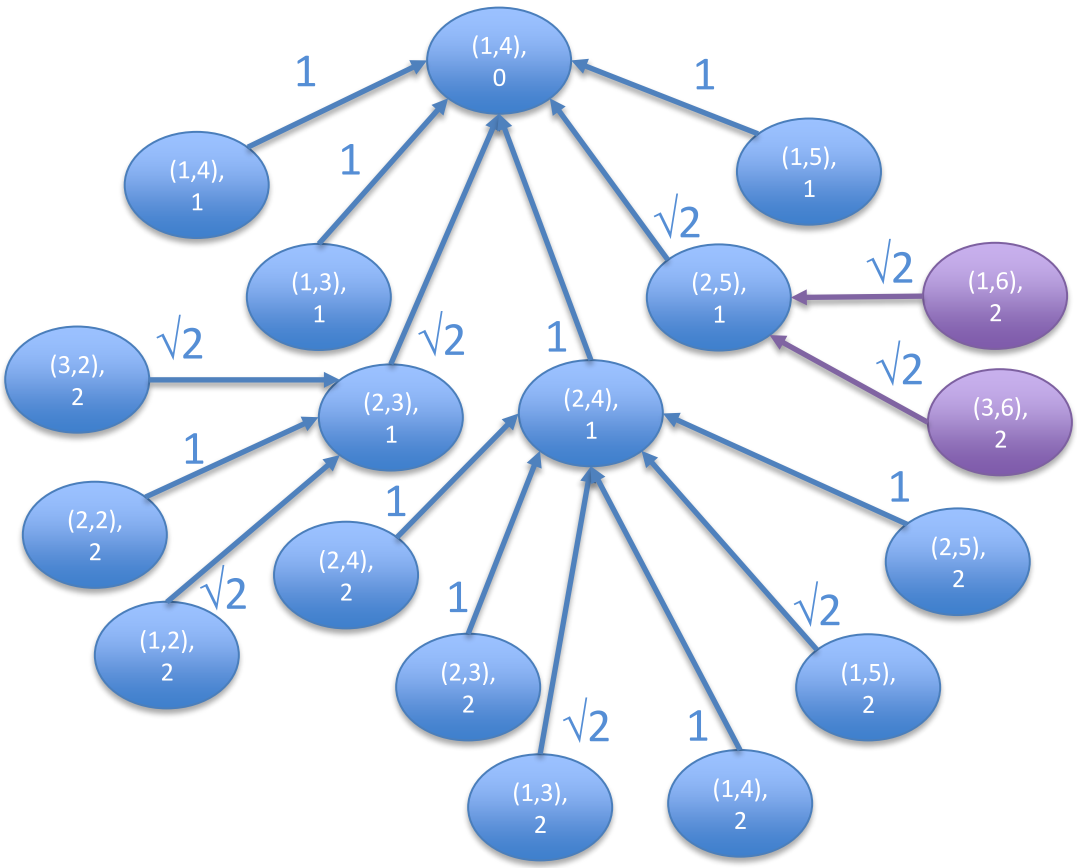


- $Open$:
  {⟨(1,4),1⟩, f =1+4
  ⟨(1,3),1⟩, f =1+(3+√2)
  ⟨(1,5),1⟩, f =1+(3+√2)
  ⟨(2,4),2⟩, f =2+3
  ⟨(2,3),2⟩, f =2+(2+√2)
  ⟨(1,3),2⟩, f =1+√2+(3+√2)
  ⟨(1,4),2⟩, f =2+4
  ⟨(1,5),2⟩, f =1+√2+(3+√2)
  ⟨(2,5),2⟩, f =2+(2+√2)
  ⟨(3,2),2⟩, f =2√2+(2√2)
  ⟨(2,2),2⟩, f =√2+1+(1+2√2)
  ⟨(1,2),2⟩, f =2√2+(2+2√2)
  ~~⟨(2,5),2⟩, √2+1>2~~
  ~~⟨(2,4),2⟩, √2+1>2~~
  ~~⟨(1,4),2⟩, 2√2>2~~
  ~~⟨(1,5),2⟩, √2+1=1+√2~~
  ⟨(1,6),2⟩, f =2√2+(2+2√2)
  ~~⟨(2,6),2⟩,~~ collisione
  ⟨(3,6),2⟩} f =2√2+(2√2)
- $Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩}

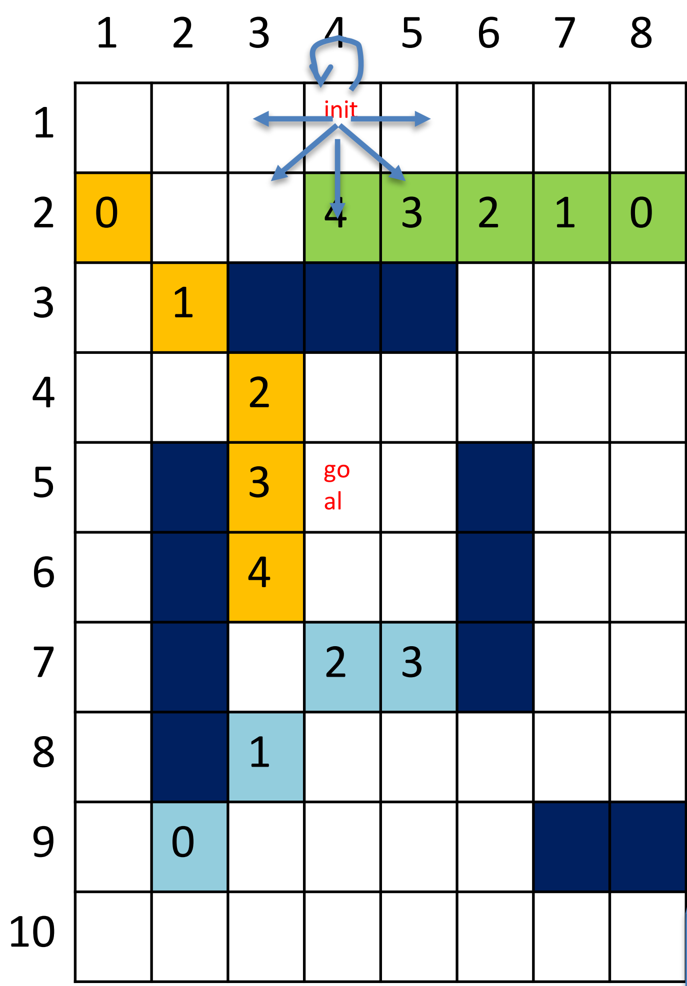
Questo stato barrato non viene inserito in $Open$ perché infrange la condizione alla riga 28 dello pseudocodice

Albero dei cammini minimi

- $Open$:
  {…
  ⟨(1,6),2⟩, f =2√2+(2+2√2)
  ⟨(3,6),2⟩} f =2√2+(2√2)
- $Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩}



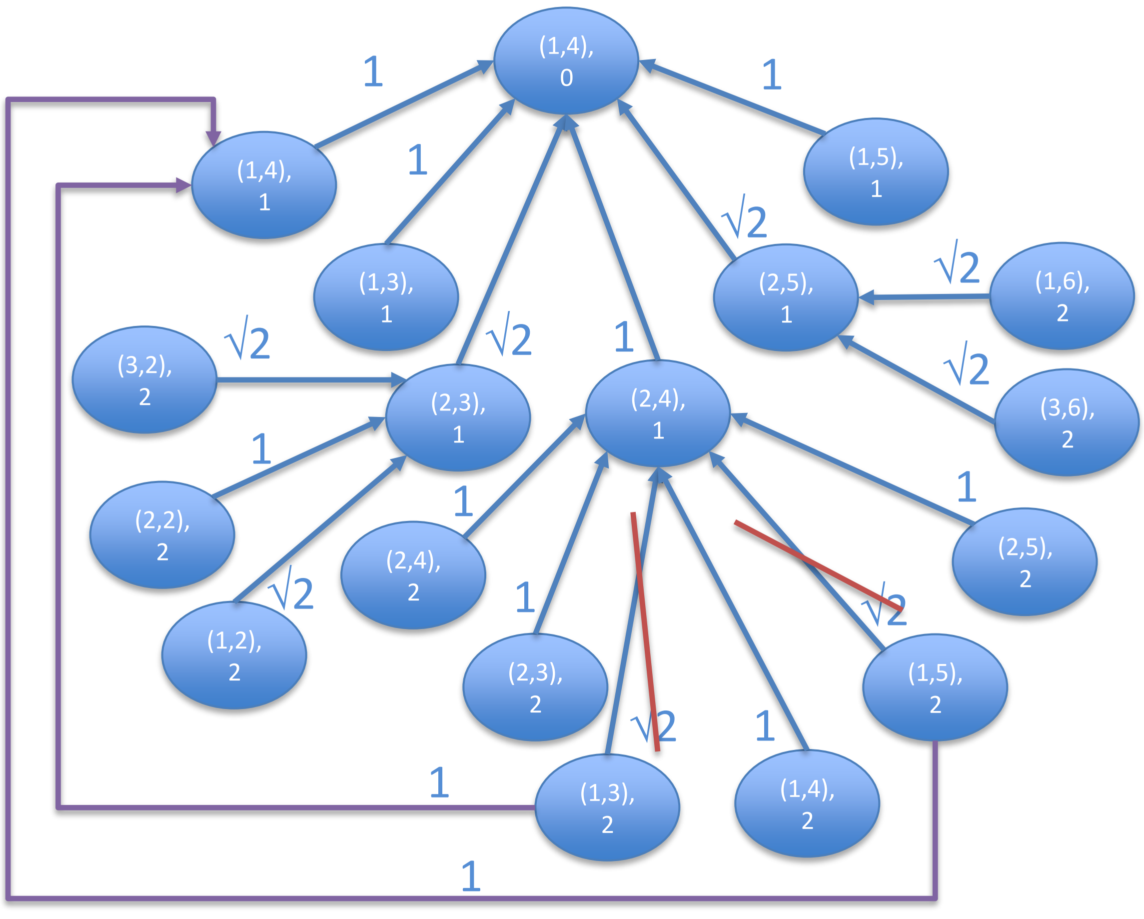
Simulazione di ReachGoal



- *Open*:
  {⟨(1,3),1⟩, $f = 1+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,5),1⟩, $f = 1+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(2,4),2⟩, $f = 2+3$
  ⟨(2,3),2⟩, $f = 2+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),2⟩, $\cancel{f = 1+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})}$
  ⟨(1,4),2⟩, $f = 2+4$
  ⟨(1,5),2⟩, $\cancel{f = 1+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})}$
  ⟨(2,5),2⟩, $f = 2+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(3,2),2⟩, $f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),2⟩, $f = \sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),2⟩, $f = 2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,6),2⟩, $f = 2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(3,6),2⟩} $f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ~~⟨(1,4),2⟩, 1+1=2~~
  ⟨(1,3),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
  ~~⟨(2,3),2⟩, 1+√2>2~~
  ~~⟨(2,4),2⟩, 1+1=2~~
  ~~⟨(2,5),2⟩, 1+√2>2~~
  ⟨(1,5),2⟩} $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
- *Closed*: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩}

I vecchi valori di g degli stati ⟨(1,3),2⟩ e ⟨(1,5),2⟩ vengono sovrascritti dai nuovi (inferiori), secondo la riga 35 dello pseudocodice

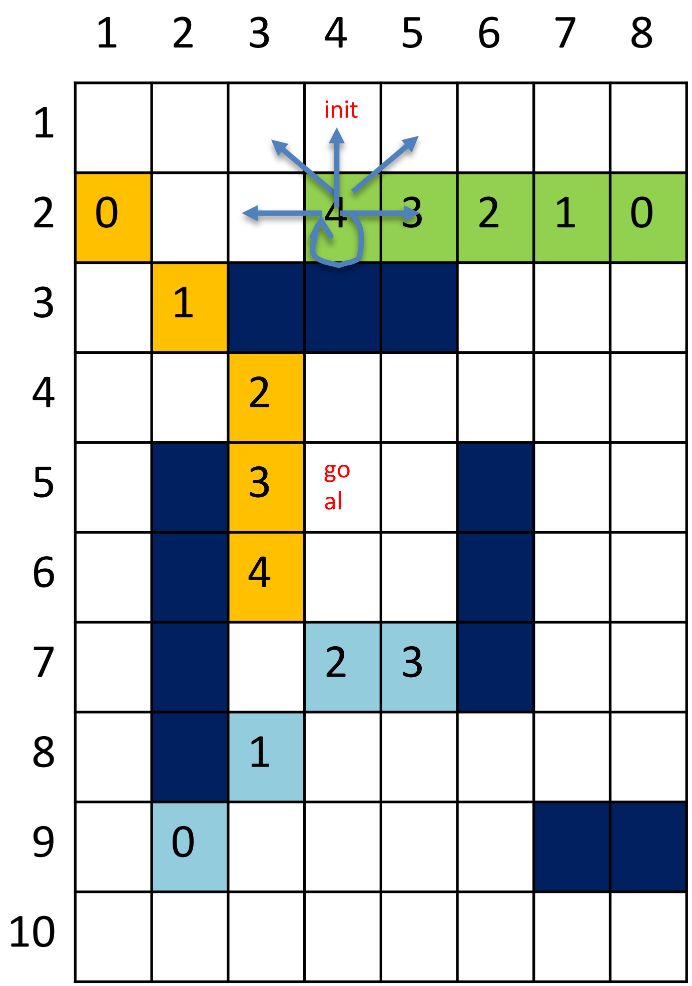
Albero dei cammini minimi



$Open$:
{…
⟨(1,3),2⟩, 1+1 < 1+√2 f =2+(3+√2)
⟨(1,5),2⟩} 1+1< 1+√2 f =2+(3+√2)

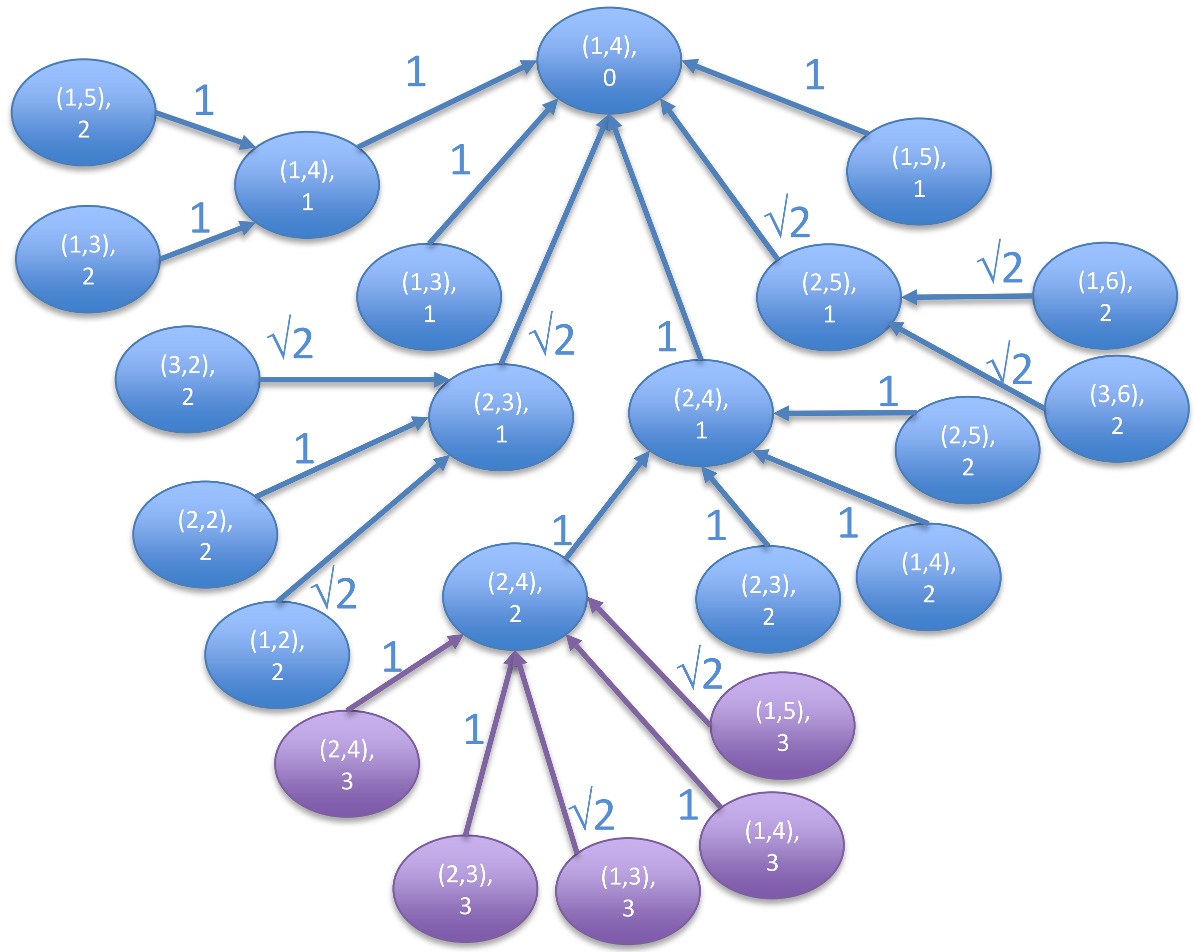
$Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩}

Simulazione di ReachGoal



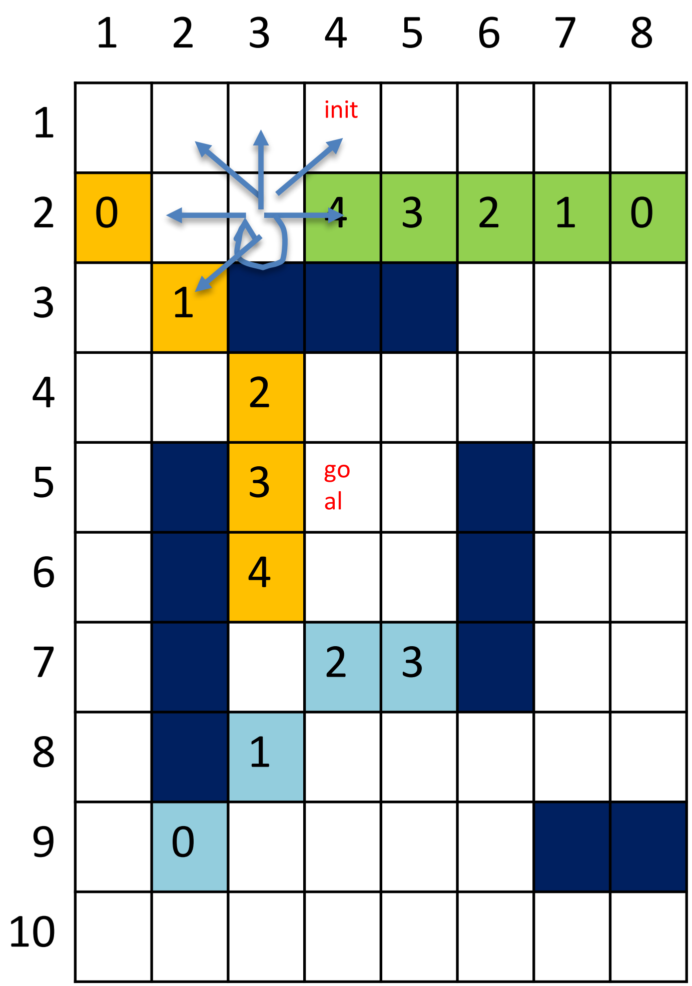
- $Open$:
  $\{\langle(1,3),1\rangle,\quad f = 1+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),1\rangle,\quad f = 1+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,3),2\rangle,\quad f = 2+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),2\rangle,\quad f = 2+4$
  $\langle(2,5),2\rangle,\quad f = 2+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(3,2),2\rangle,\quad f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(2,2),2\rangle,\quad f = \sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,2),2\rangle,\quad f = 2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,6),2\rangle,\quad f = 2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(3,6),2\rangle\}\quad f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),2\rangle,\ 1+1<1+\sqrt{2}\quad f = 2+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),2\rangle,\ 1+1<1+\sqrt{2}\quad f = 2+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,4),3\rangle,\quad f = 3+3$
  $\langle(2,3),3\rangle,\quad f = 3+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),3\rangle,\quad f = 2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),3\rangle,\quad f = 3+4$
  $\langle(1,5),3\rangle,\quad f = 2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(2,5),3\rangle}\}$ collisione
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle, \langle(2,5),1\rangle, \langle(1,4),1\rangle, \langle(2,4),2\rangle\}$

Albero dei cammini minimi



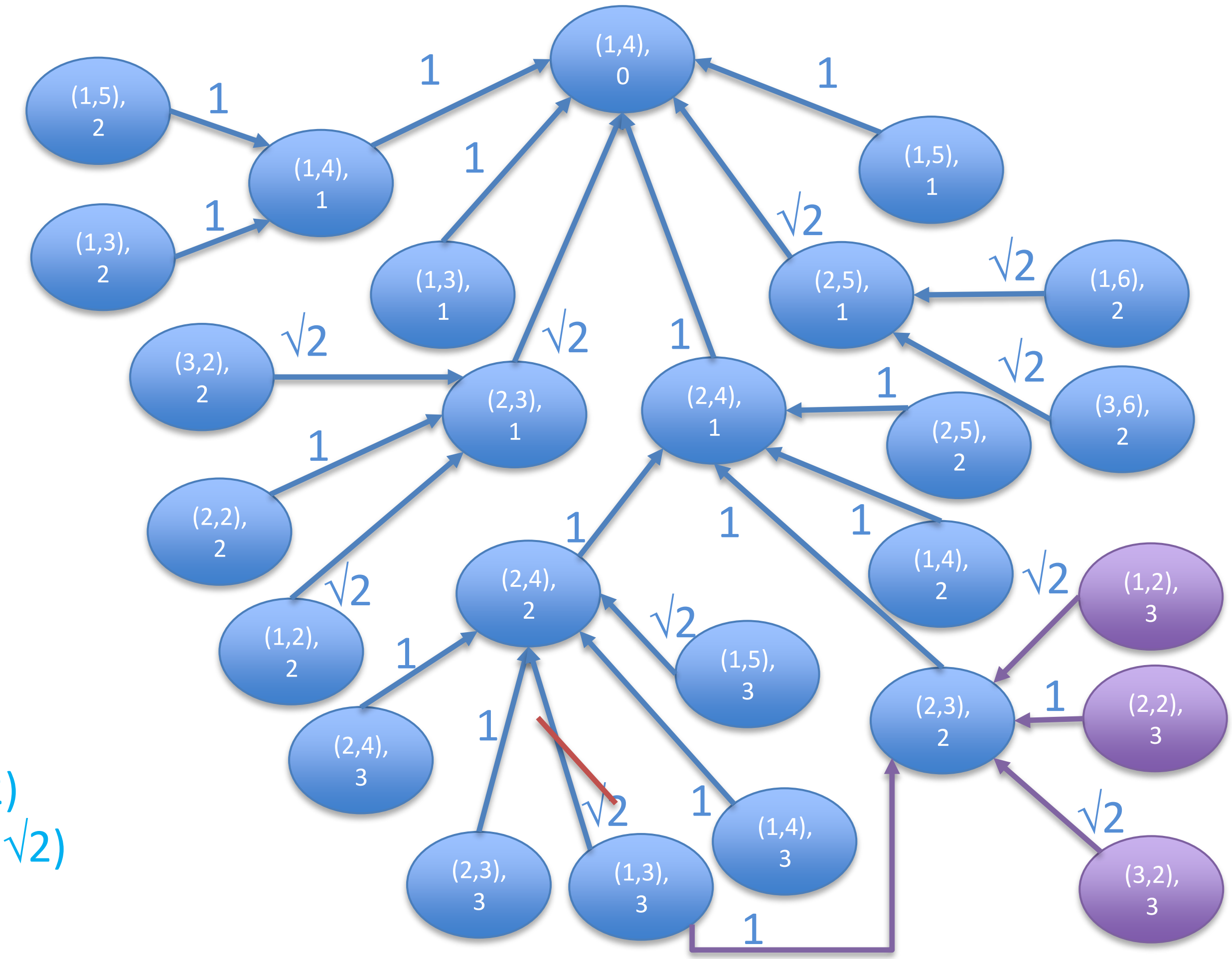
- $Open$:
  {…
  $\langle(2,4),3\rangle$, $f = 3+3$
  $\langle(2,3),3\rangle$, $f = 3+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),3\rangle$, $f = 2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),3\rangle$, $f = 3+4$
  $\langle(1,5),3\rangle\}$ $f = 2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle, \langle(2,5),1\rangle, \langle(1,4),1\rangle, \langle(2,4),2\rangle\}$

Simulazione di ReachGoal



- *Open*:
  {⟨(1,3),1⟩, $f=1+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,5),1⟩, $f=1+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,4),2⟩, $f=2+4$
  ⟨(2,5),2⟩, $f=2+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(3,2),2⟩, $f=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),2⟩, $f=\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),2⟩, $f=2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,6),2⟩, $f=2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(3,6),2⟩} $f=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,5),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(2,4),3⟩, $f=3+3$
  ⟨(2,3),3⟩, $f=3+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),3⟩, $\cancel{f=2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})}$
  ⟨(1,4),3⟩, $f=3+4$
  ⟨(1,5),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  ~~⟨(2,3),3⟩,~~ $\cancel{3=3}$
  ⟨(3,2),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),3⟩, $f=3+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),3⟩, $3<2+\sqrt{2}$ $f=3+(3+\sqrt{2})$
  ~~⟨(1,4),3⟩,~~ $\cancel{2+\sqrt{2}>3}$
  ~~⟨(2,4),3⟩}~~ $\cancel{3=3}$
- *Closed*: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩, ⟨(2,4),2⟩, ⟨(2,3),2⟩}

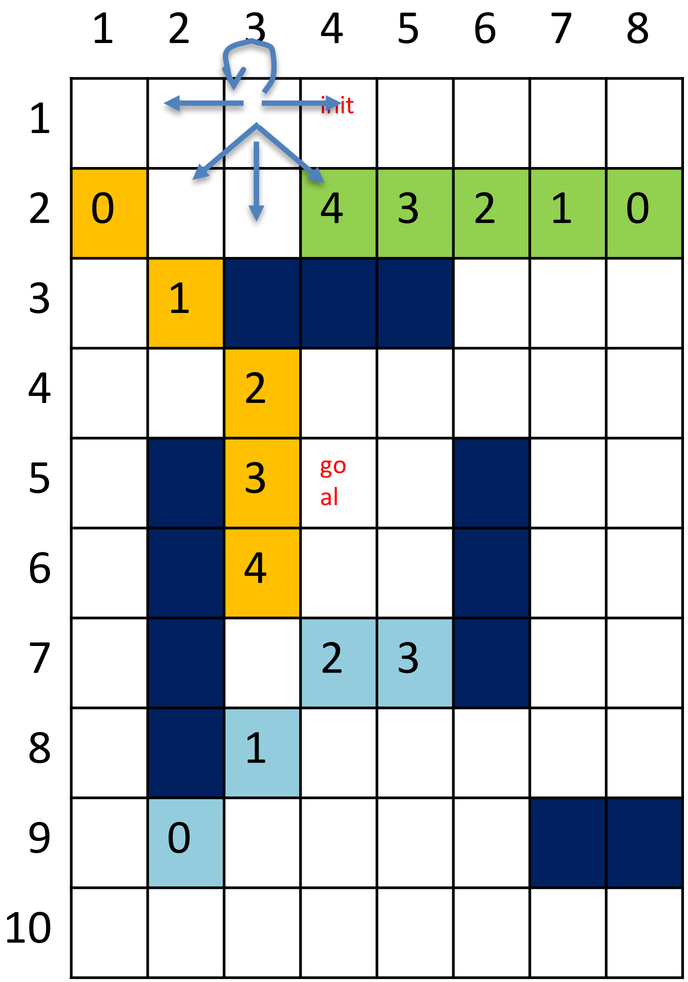
Albero dei cammini minimi



- $Open$:
  {…
  $\langle(3,2),3\rangle$, $f = 2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(2,2),3\rangle$, $f = 3+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,2),3\rangle$, $f = 2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),3\rangle$} $3<2+\sqrt{2}$ $f = 3+(3+\sqrt{2})$

- $Closed$: {$\langle(1,4),0\rangle$, $\langle(2,4),1\rangle$, $\langle(2,3),1\rangle$, $\langle(2,5),1\rangle$, $\langle(1,4),1\rangle$, $\langle(2,4),2\rangle$, $\langle(2,3),2\rangle$}

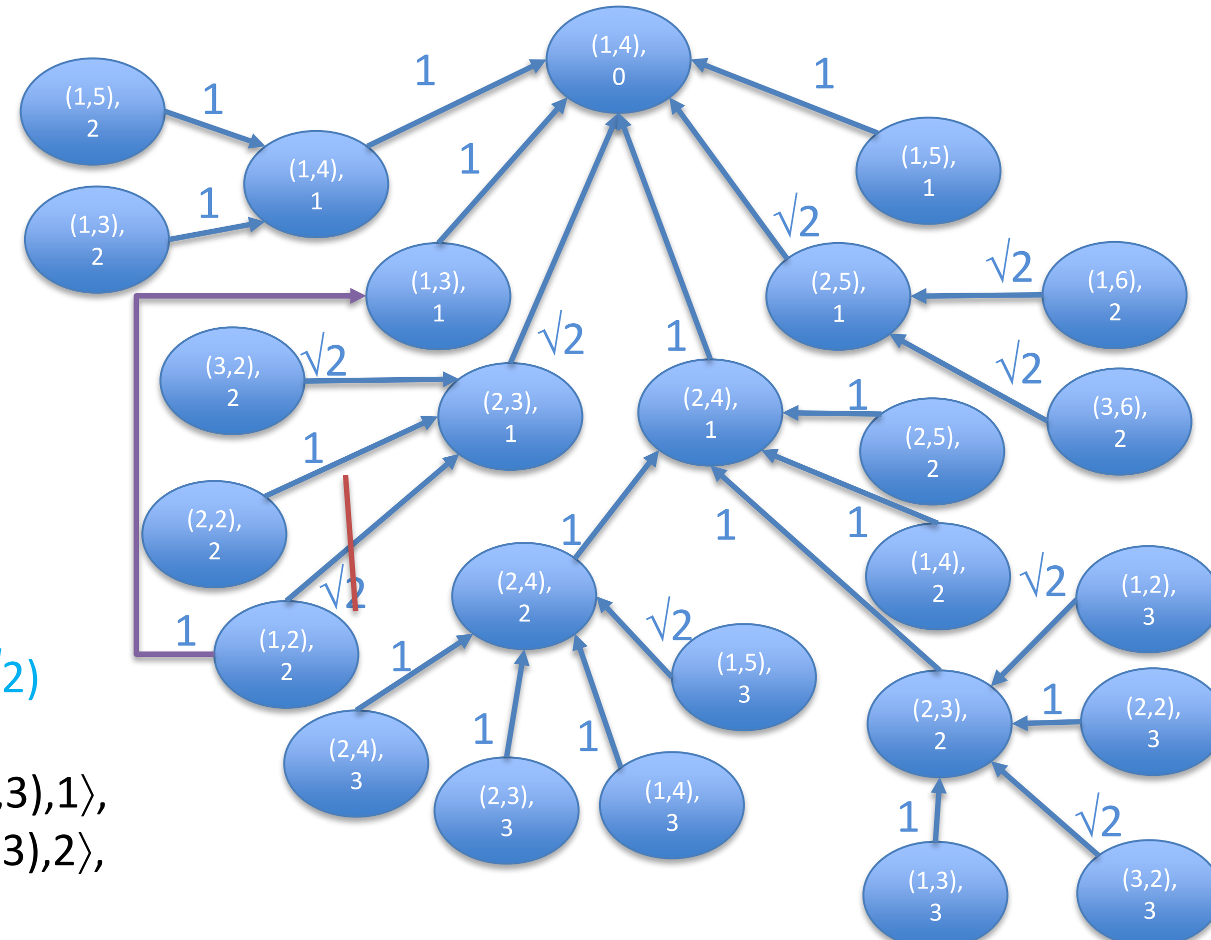
Simulazione di ReachGoal



- $Open$:
  $\{\langle(1,5),1\rangle,$ $f=1+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),2\rangle,$ $f=2+4$
  $\langle(2,5),2\rangle,$ $f=2+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(3,2),2\rangle,$ $f=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(2,2),2\rangle,$ $f=\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,2),2\rangle,$ $\cancel{f=2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})}$
  $\langle(1,6),2\rangle,$ $f=2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(3,6),2\rangle\}$ $f=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),2\rangle,$ $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),2\rangle,$ $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,4),3\rangle,$ $f=3+3$
  $\langle(2,3),3\rangle,$ $f=3+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),3\rangle,$ $f=3+4$
  $\langle(1,5),3\rangle,$ $f=2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(3,2),3\rangle,$ $f=2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(2,2),3\rangle,$ $f=3+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,2),3\rangle,$ $f=2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),3\rangle,$ $3<2+\sqrt{2}$ $f=3+(3+\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(1,3),2\rangle,\ 2=2}$
  $\langle(1,2),2\rangle,$ $2<2\sqrt{2}$ $f=2+(2+2\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(2,2),2\rangle,\ 1+\sqrt{2}=\sqrt{2}+1}$
  $\cancel{\langle(2,3),2\rangle,\ \in \text{Closed}}$
  $\cancel{\langle(2,4),2\rangle\ \in \text{Closed}}$
  $\cancel{\langle(1,4),2\rangle\}\ 2=2}$
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle, \langle(2,5),1\rangle,$ $\langle(1,4),1\rangle, \langle(2,4),2\rangle, \langle(2,3),2\rangle, \langle(1,3),1\rangle\}$

Gli stati $\langle(2,3),2\rangle$ e $\langle(2,4),2\rangle$ non vengono inseriti in $Open$ perché infrangono la condizione alla riga 25 dello pseudocodice

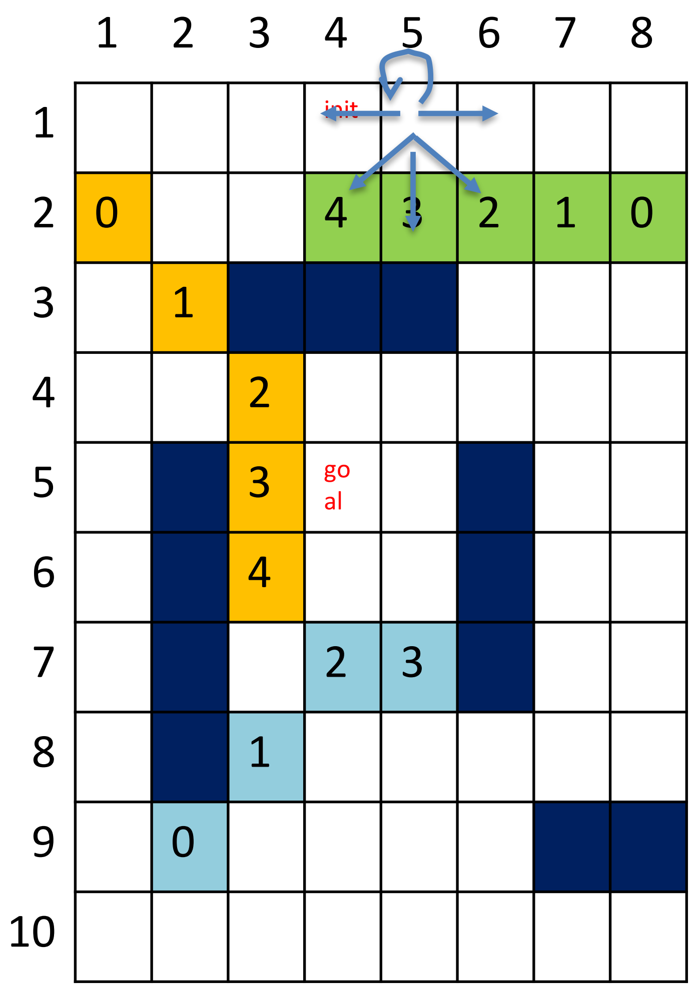
Albero dei cammini minimi



$Open$:
{…
⟨(1,2),2⟩} 2<2√2 f =2+(2+2√2)

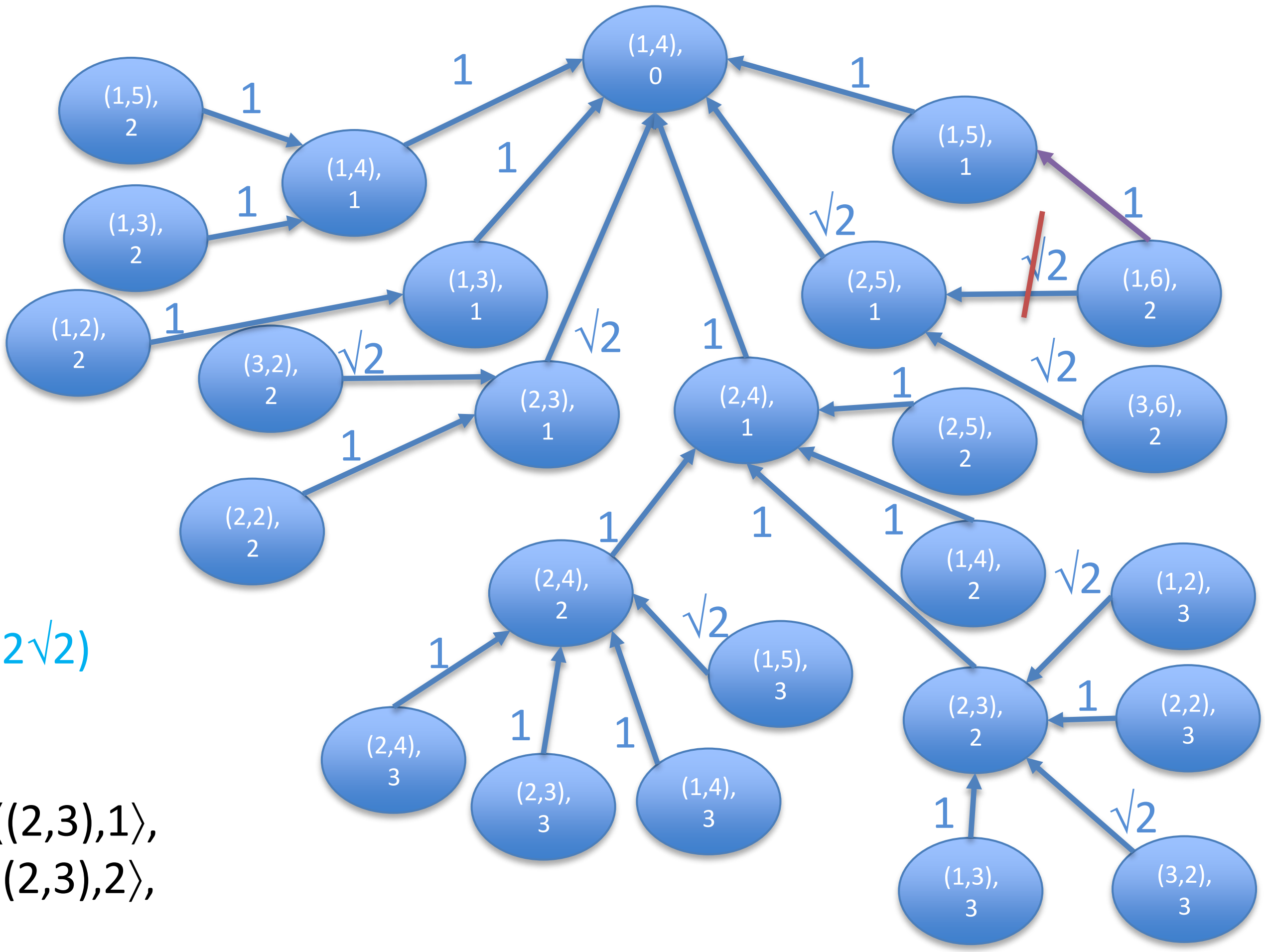
$Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩, ⟨(2,4),2⟩, ⟨(2,3),2⟩, ⟨(1,3),1⟩}

Simulazione di ReachGoal



- *Open*:
  {⟨(1,4),2⟩, $f=2+4$
  ⟨(2,5),2⟩, $f=2+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(3,2),2⟩, $f=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),2⟩, $f=\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,6),2⟩, ~~$f=2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$~~
  ⟨(3,6),2⟩} $f=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,5),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(2,4),3⟩, $f=3+3$
  ⟨(2,3),3⟩, $f=3+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(1,4),3⟩, $f=3+4$
  ⟨(1,5),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(3,2),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),3⟩, $f=3+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),3⟩, $3<2+\sqrt{2}$ $f=3+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),2⟩, $2<2\sqrt{2}$ $f=2+(2+2\sqrt{2})$
  ~~⟨(1,5),2⟩, 2=2~~
  ~~⟨(1,4),2⟩, 2=2~~
  ~~⟨(2,4),2⟩ ∈ Closed~~
  ~~⟨(2,5),2⟩, 2=2~~
  ~~⟨(2,6),2⟩, collisione~~
  ⟨(1,6),2⟩ $2<2\sqrt{2}$ $f=2+(2+2\sqrt{2})$
- *Closed*: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩, ⟨(2,4),2⟩, ⟨(2,3),2⟩, ⟨(1,3),1⟩, ⟨(1,5),1⟩}

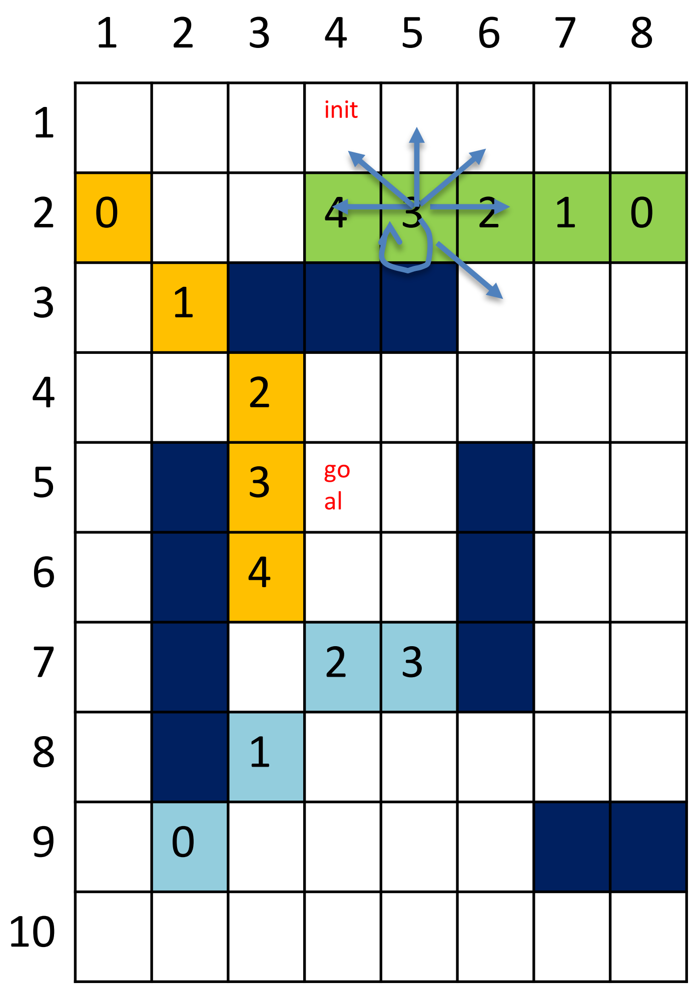
Albero dei cammini minimi



$Open$:
{...
⟨(1,6),2⟩} 2<2√2 f =2+(2+2√2)

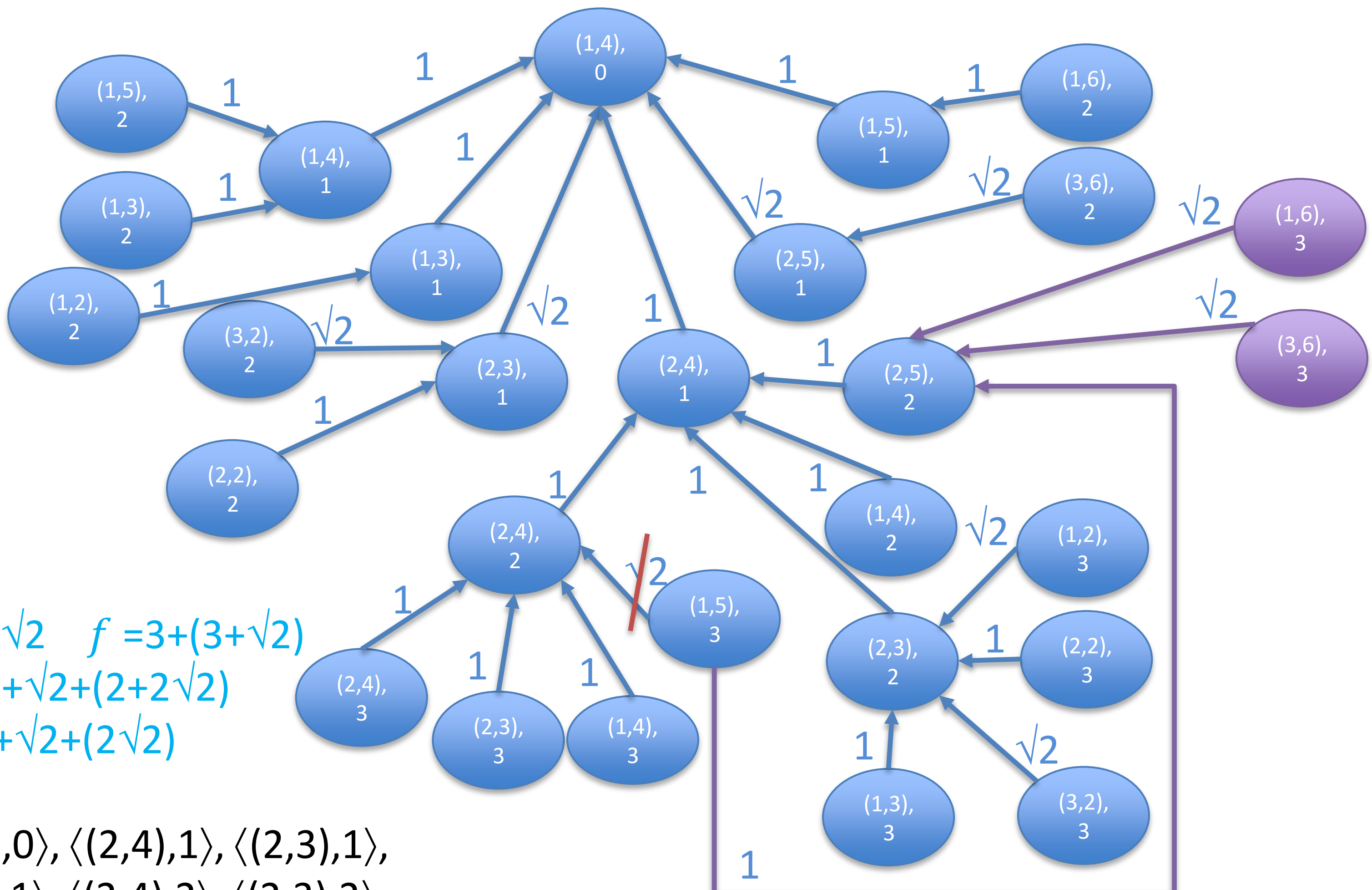
$Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩, ⟨(2,4),2⟩, ⟨(2,3),2⟩, ⟨(1,3),1⟩, ⟨(1,5),1⟩}

Simulazione di ReachGoal



- *Open*:
  {⟨(1,4),2⟩, $f = 2+4$
  ⟨(3,2),2⟩, $f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),2⟩, $f = \sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(3,6),2⟩} $f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,5),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(2,4),3⟩, $f = 3+3$
  ⟨(2,3),3⟩, $f = 3+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(1,4),3⟩, $f = 3+4$
  ⟨(1,5),3⟩, $\cancel{f = 2+\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})}$
  ⟨(3,2),3⟩, $f = 2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),3⟩, $f = 3+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),3⟩, $f = 2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),3⟩, $3<2+\sqrt{2}$ $f = 3+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),2⟩, $2<2\sqrt{2}$ $f = 2+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,6),2⟩ $2<2\sqrt{2}$ $f = 2+(2+2\sqrt{2})$
  ~~⟨(2,5),3⟩ collisione~~
  ~~⟨(2,4),3⟩, 3=3~~
  ~~⟨(1,4),3⟩, 2+√2>3~~
  ⟨(1,5),3⟩, $3<2+\sqrt{2}$ $f = 3+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,6),3⟩, $f = 2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ~~⟨(2,6),3⟩ collisione~~
  ⟨(3,6),3⟩} $f = 2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
- *Closed*: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩, ⟨(2,4),2⟩, ⟨(2,3),2⟩, ⟨(1,3),1⟩, ⟨(1,5),1⟩, ⟨(2,5),2⟩}

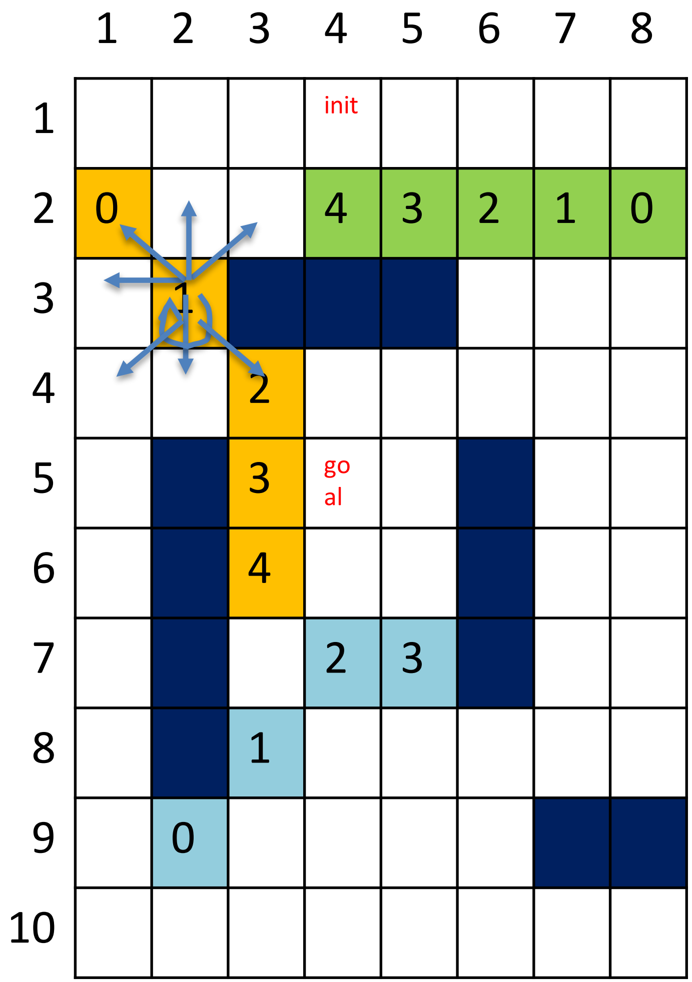
Albero dei cammini minimi



$Open$:
{…
⟨(1,5),3⟩, 3<2+√2 f =3+(3+√2)
⟨(1,6),3⟩, f = 2+√2+(2+2√2)
⟨(3,6),3⟩} f =2+√2+(2√2)

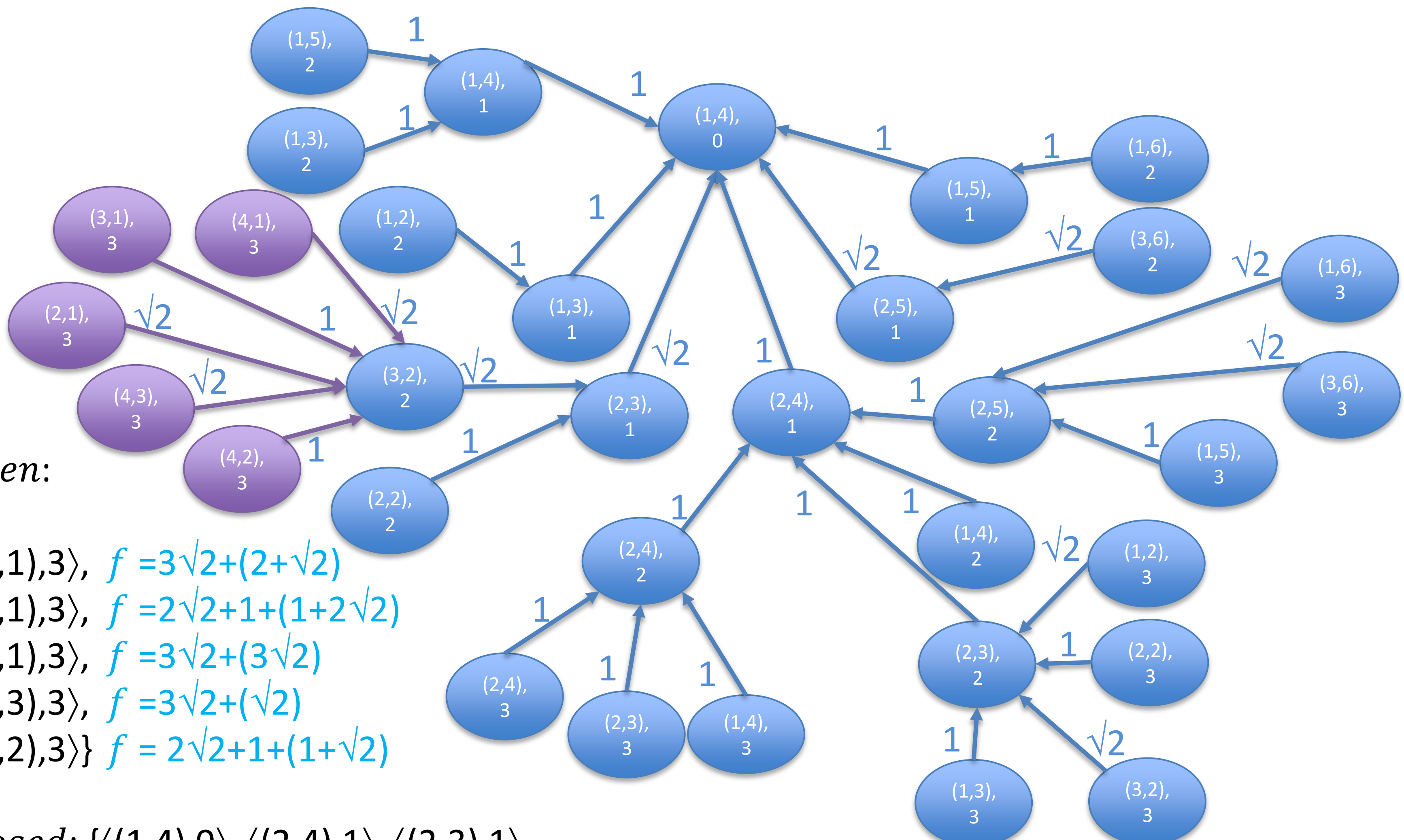
$Closed$: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩, ⟨(2,4),2⟩, ⟨(2,3),2⟩, ⟨(1,3),1⟩, ⟨(1,5),1⟩, ⟨(2,5),2⟩}

Simulazione di ReachGoal



- $Open$:
  $\{\langle(1,4),2\rangle,$ $f = 2+4$
  $\langle(2,2),2\rangle,$ $f = \sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(3,6),2\rangle\}$ $f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),2\rangle,$ $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),2\rangle,$ $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(2,4),3\rangle,$ $f = 3+3$
  $\langle(2,3),3\rangle,$ $f = 3+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(1,4),3\rangle,$ $f = 3+4$
  $\langle(3,2),3\rangle,$ $f = 2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\langle(2,2),3\rangle,$ $f = 3+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,2),3\rangle,$ $f = 2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,3),3\rangle,$ $3<2+\sqrt{2}$ $f = 3+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,2),2\rangle,$ $2<2\sqrt{2}$ $f = 2+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,6),2\rangle$ $2<2\sqrt{2}$ $f = 2+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(1,5),3\rangle,$ $3<2+\sqrt{2}$ $f = 3+(3+\sqrt{2})$
  $\langle(1,6),3\rangle,$ $f = 2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  $\langle(3,6),3\rangle,$ $f = 2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(3,2),3\rangle,\ 2\sqrt{2}+1>2+\sqrt{2}}$
  $\langle(4,1),3\rangle,$ $f = 3\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
  $\langle(3,1),3\rangle,$ $f = 2\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  $\langle(2,1),3\rangle,$ $f = 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})$
  $\cancel{\langle(2,2),3\rangle,\ 2\sqrt{2}+1>3}$
  $\cancel{\langle(2,3),3\rangle,\ 3\sqrt{2}>3}$
  $\langle(4,3),3\rangle,$ $f = 3\sqrt{2}+(\sqrt{2})$
  $\langle(4,2),3\rangle\}$ $f = 2\sqrt{2}+1+(1+\sqrt{2})$
- $Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle, \langle(2,5),1\rangle, \langle(1,4),1\rangle, \langle(2,4),2\rangle, \langle(2,3),2\rangle, \langle(1,3),1\rangle, \langle(1,5),1\rangle, \langle(2,5),2\rangle, \langle(3,2),2\rangle\}$

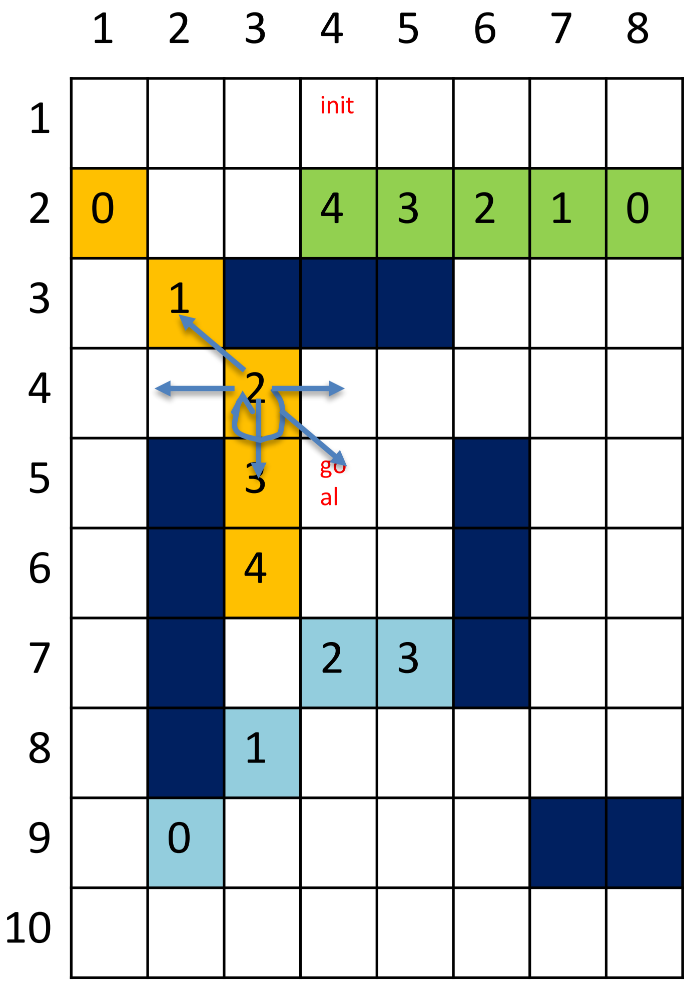
Albero dei cammini minimi



$Open$:
{…
$\langle(4,1),3\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
$\langle(3,1),3\rangle$, $f = 2\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
$\langle(2,1),3\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})$
$\langle(4,3),3\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+(\sqrt{2})$
$\langle(4,2),3\rangle\}$ $f = 2\sqrt{2}+1+(1+\sqrt{2})$

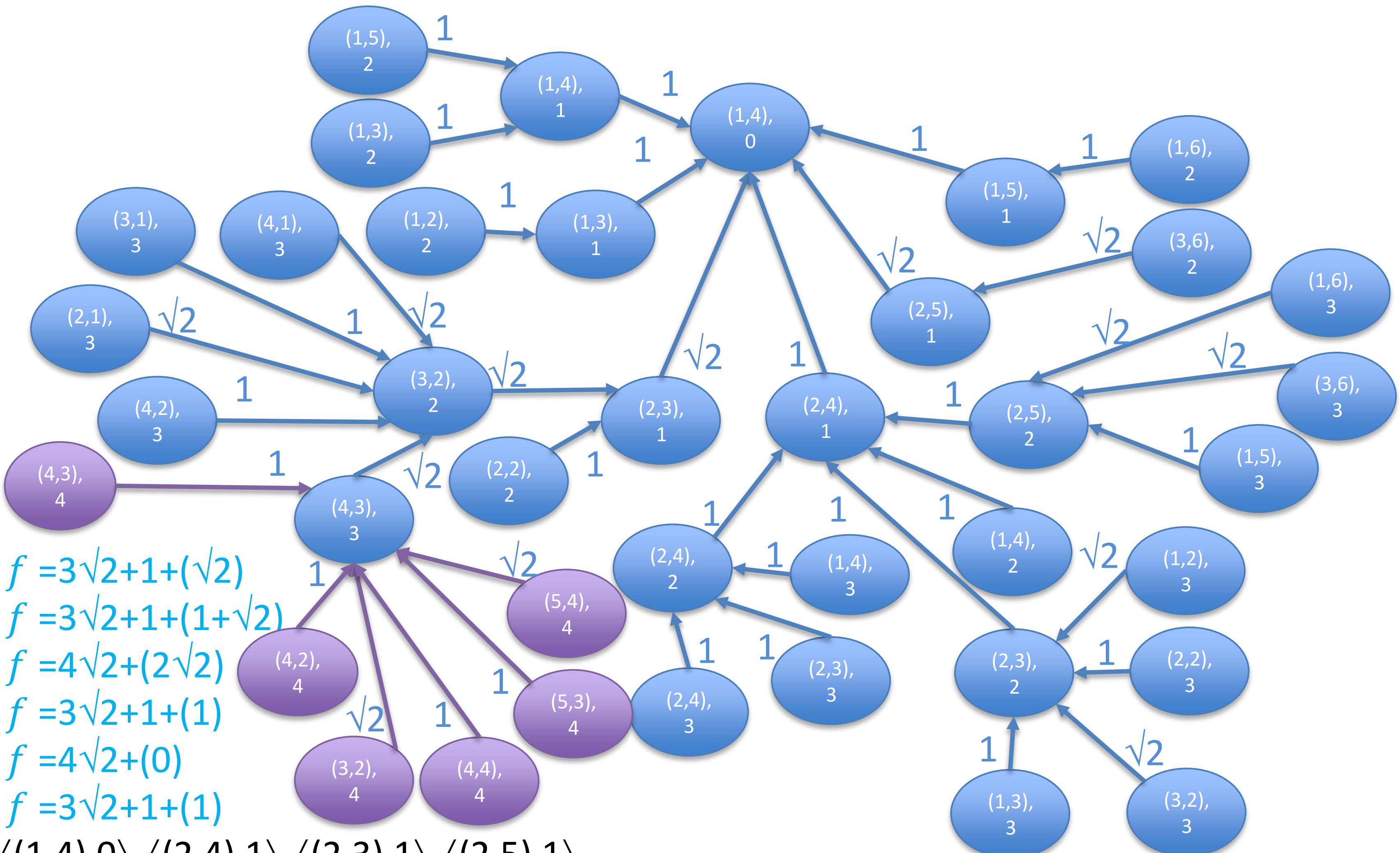
$Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle, \langle(2,5),1\rangle, \langle(1,4),1\rangle, \langle(2,4),2\rangle, \langle(2,3),2\rangle, \langle(1,3),1\rangle, \langle(1,5),1\rangle, \langle(2,5),2\rangle, \langle(3,2),2\rangle\}$

Simulazione di ReachGoal



- *Open*:
$\{\langle(1,4),2\rangle$, $f = 2+4$
$\langle(2,2),2\rangle$, $f = \sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
$\langle(3,6),2\rangle\}$ $f = 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
$\langle(1,3),2\rangle$, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
$\langle(1,5),2\rangle$, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f = 2+(3+\sqrt{2})$
$\langle(2,4),3\rangle$, $f = 3+3$
$\langle(2,3),3\rangle$, $f = 3+(2+\sqrt{2})$
$\langle(1,4),3\rangle$, $f = 3+4$
$\langle(3,2),3\rangle$, $f = 2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
$\langle(2,2),3\rangle$, $f = 3+(1+2\sqrt{2})$
$\langle(1,2),3\rangle$, $f = 2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
$\langle(1,3),3\rangle$, $3<2+\sqrt{2}$ $f = 3+(3+\sqrt{2})$
$\langle(1,2),2\rangle$, $2<2\sqrt{2}$ $f = 2+(2+2\sqrt{2})$
$\langle(1,6),2\rangle$ $2<2\sqrt{2}$ $f = 2+(2+2\sqrt{2})$
$\langle(1,5),3\rangle$, $3<2+\sqrt{2}$ $f = 3+(3+\sqrt{2})$
$\langle(1,6),3\rangle$, $f = 2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
$\langle(3,6),3\rangle$, $f = 2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
$\langle(4,1),3\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
$\langle(3,1),3\rangle$, $f = 2\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
$\langle(2,1),3\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})$
$\langle(4,2),3\rangle$, $f = 2\sqrt{2}+1+(1+\sqrt{2})$
$\langle(4,3),4\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+1+(\sqrt{2})$
$\langle(4,2),4\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+1+(1+\sqrt{2})$
$\langle(3,2),4\rangle$, $f = 4\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
$\langle(4,4),4\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+1+(1)$
$\langle(5,4),4\rangle$, $f = 4\sqrt{2}+(0)$
$\langle(5,3),4\rangle\}$ $f = 3\sqrt{2}+1+(1)$
- *Closed*: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle, \langle(2,5),1\rangle, \langle(1,4),1\rangle, \langle(2,4),2\rangle, \langle(2,3),2\rangle, \langle(1,3),1\rangle, \langle(1,5),1\rangle, \langle(2,5),2\rangle, \langle(3,2),2\rangle, \langle(4,3),3\rangle\}$

Albero dei cammini minimi



$Open$: {…

$\langle(4,3),4\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+1+(\sqrt{2})$

$\langle(4,2),4\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+1+(1+\sqrt{2})$

$\langle(3,2),4\rangle$, $f = 4\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$

$\langle(4,4),4\rangle$, $f = 3\sqrt{2}+1+(1)$

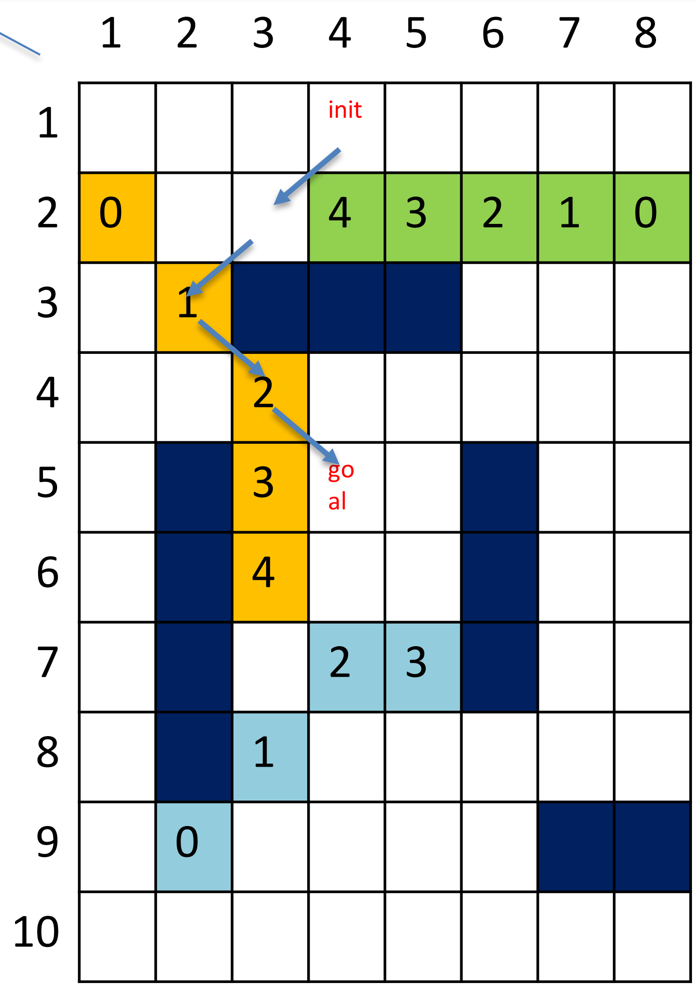
$\langle(5,4),4\rangle$, $f = 4\sqrt{2}+(0)$

$\langle(5,3),4\rangle\}$ $f = 3\sqrt{2}+1+(1)$

$Closed$: $\{\langle(1,4),0\rangle, \langle(2,4),1\rangle, \langle(2,3),1\rangle, \langle(2,5),1\rangle, \langle(1,4),1\rangle, \langle(2,4),2\rangle, \langle(2,3),2\rangle, \langle(1,3),1\rangle, \langle(1,5),1\rangle, \langle(2,5),2\rangle, \langle(3,2),2\rangle, \langle(4,3),3\rangle\}$

Simulazione di ReachGoal

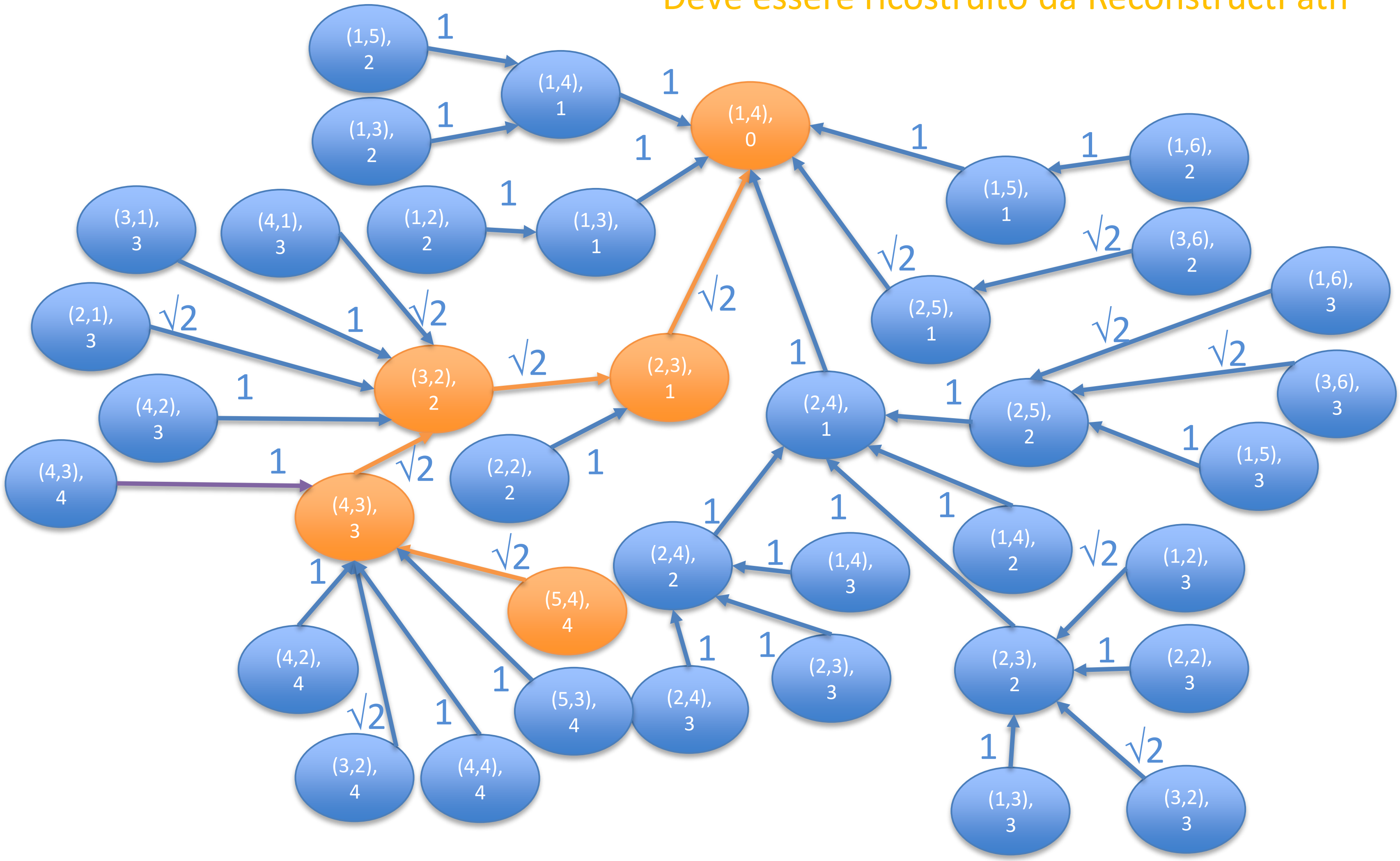
Le frecce indicano il cammino di costo minimo (da *init* a *goal*) calcolato



- *Open*:
  {⟨(1,4),2⟩, $f=2+4$
  ⟨(2,2),2⟩, $f=\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(3,6),2⟩} $f=2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,5),2⟩, $1+1<1+\sqrt{2}$ $f=2+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(2,4),3⟩, $f=3+3$
  ⟨(2,3),3⟩, $f=3+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(1,4),3⟩, $f=3+4$
  ⟨(3,2),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(2,2),3⟩, $f=3+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,3),3⟩, $3<2+\sqrt{2}$ $f=3+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,2),2⟩, $2<2\sqrt{2}$ $f=2+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,6),2⟩ $2<2\sqrt{2}$ $f=2+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(1,5),3⟩, $3<2+\sqrt{2}$ $f=3+(3+\sqrt{2})$
  ⟨(1,6),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})$
  ⟨(3,6),3⟩, $f=2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(4,1),3⟩, $f=3\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})$
  ⟨(3,1),3⟩, $f=2\sqrt{2}+1+(1+2\sqrt{2})$
  ⟨(2,1),3⟩, $f=3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})$
  ⟨(4,2),3⟩, $f=2\sqrt{2}+1+(1+\sqrt{2})$
  ⟨(4,3),4⟩, $f=3\sqrt{2}+1+(\sqrt{2})$
  ⟨(4,2),4⟩, $f=3\sqrt{2}+1+(1+\sqrt{2})$
  ⟨(3,2),4⟩, $f=4\sqrt{2}+(2\sqrt{2})$
  ⟨(4,4),4⟩, $f=3\sqrt{2}+1+(1)$
  ⟨(5,3),4⟩} $f=3\sqrt{2}+1+(1)$
- *Closed*: {⟨(1,4),0⟩, ⟨(2,4),1⟩, ⟨(2,3),1⟩, ⟨(2,5),1⟩, ⟨(1,4),1⟩, ⟨(2,4),2⟩, ⟨(2,3),2⟩, ⟨(1,3),1⟩, ⟨(1,5),1⟩, ⟨(2,5),2⟩, ⟨(3,2),2⟩, ⟨(4,3),3⟩, ⟨(5,4),4⟩}
  FINE (è stato estratto da *Open* uno stato che contiene il vertice *goal*)

Cammino di costo minimo

Deve essere ricostruito da ReconstructPath



Costo del cammino minimo = $4\sqrt{2}$

ReachGoal: osservazioni

- Nella simulazione di cui alle pagine precedenti, il risultato prodotto dipende dallo stato di volta in volta estratto da $Open$ fra tutti quelli che condividono lo stesso valore minimo della funzione f. Esecuzioni diverse possono produrre percorsi diversi, aventi però tutti lo stesso costo (minimo)
- Il cammino minimo calcolato da ReachGoal può contenere dei cicli dal punto di vista dei vertici del grafo che rappresenta la griglia, questo al solo fine di fare passare il tempo così da evitare collisioni
- Le righe 4-9 dello pseudocodice inizializzano tutti gli stati relativi all'intervallo temporale da 0 a max. La creazione di tali stati è importante dal punto di vista teorico ma non deve essere attuata dal punto di vista implementativo per evitare sprechi di memoria. È pertanto opportuno ritenere i valori assegnati a g e P (rispettivamente ∞ e nil) impliciti per tutti gli stati non presenti né in $Open$ né in $Closed$ (si noti che in P è presente l'unione degli stati contenuti in $Open$ e $Closed$)

Strategia alternativa

- Una versione alternativa di ReachGoal si ottiene introducendo le righe seguenti nello pseudocodice

Compute a relaxed path π_R from v to $goal$;
if π_R *is collision-free* **then**
    return $\mathsf{RecostructPath}(init, v, P, t) + \pi_R$;
end

- Un percorso rilassato è un percorso (ottimo dal punto di vista del costo) in cui si tiene conto della presenza degli ostacoli ma si ignora la presenza di altri agenti

Strategia alternativa

- Se il percorso rilassato π_R da v a $goal$ (riga 19 dello pseudocodice) è privo di collisioni (*collision-free*), allora la sequenza del percorso ottimo da $init$ a v registrata entro l'albero dei cammini minimi e di π_R (avendo cura di posporre solidalmente tutti gli istanti temporali relativi a π_R) costituisce un percorso ottimo da $init$ a $goal$, cioè è una soluzione dell'istanza considerata del problema PF4EA (righe 20-22 dello pseudocodice)
- Le righe 19-22 delle pseudocodice introducono un (ulteriore) criterio di terminazione di ReachGoal. Tale criterio può coesistere con l'adozione di qualsivoglia euristica (purché ammissibile e consistente), compresa quella del cammino rilassato

Strategia alternativa + euristica del cammino rilassato: osservazioni

- Se si adotta il criterio di terminazione di cui alle righe 19-22 dello pseudocodice unitamente all'euristica del cammino rilassato, anziché calcolare il percorso rilassato π_R da v a $goal$ (riga 19 dello pseudocodice) e il valore $h(n, goal)$ per ogni vertice n (riga 36 dello pseudocodice), si potrebbe *pre*calcolare (con una sola esecuzione di un apposito algoritmo effettuata a priori) il costo (minimo) dei percorsi rilassati da $goal$ a tutti i vertici del grafo così come l'albero di tali cammini minimi, utilizzando poi in ReachGoal i valori e i percorsi in tal modo calcolati

Compito 3

- Progettare e implementare un algoritmo (sofisticato a piacere) per il calcolo del percorso rilassato (di cui alla riga 19 dello pseudocodice di ReachGoal). Si ricordi l'osservazione di cui alla pagina precedente
- Progettare e implementare un algoritmo che sia in grado di verificare se un cammino dato entri in conflitto con i cammini preesistenti (dati). Esso potrà valutare la condizione di cui alla riga 20 dello pseudocodice di ReachGoal. Inoltre esso potrebbe essere sfruttato per la creazione dei percorsi degli agenti preesistenti entro l'istanza di un problema PF4EA (cfr. Compito 1, pag. 13)
- Sviluppare una seconda versione dell'algoritmo ReachGoal che sfrutti la strategia alternativa descritta e faccia uso dei due suddetti algoritmi, di cui si deve fornire lo pseudocodice

SPERIMENTAZIONE

Consegne

- Si conduca una sperimentazione (cioè si effettuino delle prove di esecuzione) sia con il generatore di griglie o di istanze di PF4EA (cfr. Compito 1) sia con entrambe le versioni di ReachGoal realizzate (cfr. Compito 2 e Compito 3)
- Un fine della sperimentazione è quello di registrare e valutare criticamente le prestazioni temporali e spaziali delle prove condotte

Generatore di istanze alternativo
(per chi sviluppa il solo generatore di griglie)

- È possibile generare istanze in cui la griglia sia creata usando il generatore di griglie e i percorsi degli *n* agenti preesistenti siano prodotti come segue:
  - Il percorso dell'agente α_1 viene determinato dall'algoritmo di calcolo del percorso rilassato (cfr. Compito 3) o dall'esecuzione di ReachGoal assumendo un insieme vuoto di percorsi preesistenti ($init$ e $goal$ sono scelti pseudo-casualmente)
  - Il percorso degli agenti α_i , $2 \leq i \leq n$, viene calcolato attraverso *n-1* invocazioni di ReachGoal, dove l'invocazione relativa ad α_i acquisisce in ingresso i percorsi già calcolati (sono *i-1*) e determina il percorso dell'agente *i*-esimo (considerandolo come entry agent)

Consegne (cont.)

- Per conseguire l'obiettivo di descrivere il comportamento degli algoritmi nell'ambito delle prove, è positivo che l'applicazione sviluppata, per ogni istanza elaborata da ciascuna versione di ReachGoal, produca, oltre al percorso dell'entry agent, alcune informazioni supplementari, quali il numero di stati espansi (cioè il numero di iterazioni del ciclo di cui alla riga 12 dello pseudocodice, che coincide con la lunghezza raggiunta dalla lista $Closed$), il numero di stati inseriti via via (righe 3 e 40 dello pseudocodice) nella lista $Open$ (che coincide col numero di nodi dell'albero dei cammini minimi), la lunghezza e il costo del percorso calcolato, nonché il numero di mosse wait contenute nel percorso calcolato

Consegne (cont.)

- Sarebbe interessante valutare il comportamento di ciascuna versione di ReachGoal al variare di alcuni parametri. Di seguito si fornisce (solo come fonte di ispirazione) un elenco (non esaustivo) di possibili parametri di interesse (gli sperimentatori possono effettuare una selezionare fra questi e/o individuarne altri):
  - dimensione della griglia
  - percentuale di celle traversabili
  - numero di agenti preesistenti
  - lunghezza dei percorsi degli agenti preesistenti
  - valore dell'orizzonte temporale max

Consegne (cont.)

- Si sottoponga ogni volta a entrambe le versioni di ReachGoal realizzate la stessa istanza d’ingresso, confrontando i costi dei percorsi prodotti in uscita (per verificare la correttezza) nonché le prestazioni (spaziali e temporali) riscontrate
- Eventuali discrepanze nei valori di tali costi denunciano la presenza di errori (logici o di programmazione) in uno dei due risolutori o in entrambi

Osservazione

- Ai fini della sperimentazione è solitamente utile fissare una durata massima dell’elaborazione (tempo di CPU) per ciascuna istanza ed eventualmente anche un limite all’occupazione della RAM

RICHIESTE

Gruppi di lavoro

- Ogni gruppo, costituito da <u>due</u> studenti, deve
  - svolgere i tre compiti assegnati (Compito 1, Compito 2 e Compito 3) e condurre la sperimentazione descritta nella sezione precedente. Nel caso *eccezionale* il lavoro venisse affrontato da un <u>unico</u> studente, dovranno essere svolti solo i primi due compiti assegnati (Compito 1, con produzione del generatore di griglie, e Compito 2) e affrontata la sperimentazione a essi relativa
  - redigere una relazione scritta che illustri il lavoro svolto, le scelte implementative compiute, le prove sperimentali eseguite e una valutazione critica delle stesse

Lavoro e relazione

- Particolare attenzione deve essere dedicata alla scelta di strutture dati volte a estendere le dimensioni delle istanze in ingresso e della soluzione nonché di altri accorgimenti aventi lo stesso fine. La relazione deve documentare tali scelte e accorgimenti
- Sono naturalmente apprezzati gli sforzi tesi a ridurre il costo temporale della computazione, che devono anch'essi essere documentati
- La relazione deve contenere ogni indicazione ritenuta utile al fine di consentire l'utilizzo dei programmi realizzati e la conduzione di ulteriori sperimentazioni
- La relazione deve evidenziare tutte le limitazioni riscontrate nelle prove di esecuzione effettuate

Requisiti funzionali

- Per ogni istanza d'ingresso, l'applicazione software sviluppata deve produrre automaticamente un riassunto in cui siano registrate le caratteristiche
  - dell'istanza (natura dei percorsi contenuti entro l'istanza, che chiarisca se tali percorsi sono stati creati in modo pseudocasuale o attraverso più invocazioni di ReachGoal, dimensione della griglia, numero/percentuale di celle attraversabili presenti nella griglia, numero di agenti, lunghezza dei percorsi degli agenti preesistenti, valore dell'orizzonte temporale max , valori di $init$ e $goal$, valori di eventuali altri parametri di configurazione inizializzati dall'utente per creare l'istanza stessa e/o di parametri ritenuti utili ai fini della valutazione sperimentale)

Requisiti funzionali (cont.)

– dell’elaborazione compiuta da ciascuna delle due versioni dell’algoritmo ReachGoal (cfr. Compito 2 e Compito 3) in termini di soluzione prodotta, numero di stati visitati, euristica adottata per la prima versione di ReachGoal, lunghezza e costo del percorso prodotto in uscita oppure registrazione del fatto che l’elaborazione è terminata con un fallimento o non è terminata entro il tempo stabilito o è terminata perché richiedeva una occupazione di memoria superiore al limite stabilito, tempo di esecuzione, eventualmente anche massima occupazione di memoria

Requisiti non funzionali

- Non è richiesta la realizzazione di GUI, l’elaborazione può essere batch (I/O solo da/per file)
- Non è imposto un linguaggio di programmazione, né un ambiente di sviluppo né una piattaforma di destinazione

Consegna del materiale

- Ai fini del superamento della prova orale è necessario consegnare, entro i tempi indicati nelle note relative agli appelli, una cartella elettronica contenente relazione (in formato sia “sorgente”, sia pfd), codice sorgente, eventuale codice eseguibile, tutti i file di ingresso su cui è stata condotta la sperimentazione unitamente ai corrispondenti file di uscita prodotti da ciascuno dei due risolutori e ai relativi riassunti nonché eventuali file (ad es. Excel o Matlab) creati al fine di valutare gli andamenti delle prestazioni
- La consegna deve avvenire inviando via email il link a tale cartella, link creato usando un sistema di condivisione (ad es. dropbox, GDrive), oppure attraverso la piattaforma Moodle
- Il progetto descritto in questo documento deve essere presentato entro la sessione d’esame autunnale di Novembre 2024 (inclusa)