Aufgabe 4.2:

$$Teil\,1: Schema\ abwickeln\ und\ Vermutung\ stellen:$$
$$Sei\ f(1)=a\ und\ f(n)=c*f(n/d)+an\ mit\ n=d^k$$

$$Einsetzten\ von: n=d^0, d^1, d^1, \ldots\ zum\ Erkennen\ eines\ Musters$$
$$f(d^0)=f(1)=a$$
$$f(d^1)=c*f(d/d)+ad$$
$$=ac+ad$$
$$=a(c+d)$$
$$f(d^2)=c*f(d^2/d)+ad^2$$
$$=c*f(d)+ad^2$$
$$=ca(c+d)+ad^2$$
$$=a(c^2+cd)+ad^2$$
$$=a(c^2+cd+d^2)$$
$$=a(c+d)^2$$
$$f(d^3)=c*f(d^3/d)+ad^3$$
$$=c*f(d^2)+ad^3$$
$$=ca(c+d)^2+ad^3$$
$$=a(c^3+cd^2+c+d^2+d^3)$$
$$=a(c+d)^3$$

$$Vermutung:$$
$$f(d^k)=a(c+d)^k=f(n)=a(c+d)^{\log_d(n)}\ mit\ n=d^k(k=\log_d(n))$$

$$Teil\,2: Vermutung\ mit\ Vollständiger\ Induktion\ beweisen.$$
$$Mit\ f(1)=a\ und\ f(n)=cb(n/d)+an\ sowie\ g(n)=a(c+d)^{\log_d(n)}$$
$$Zeige, dass\ für\ alle\ n\geq 1\ mit\ n=d^k(n,k\in N)\ gilt\ f(n)=g(n).$$
$$Induktionsanfang: f(1)=a=a(c+d)^0=a(c+d)^{\log_d(1)}=g(1)$$
$$Iduktionsbehauptung: Angenommen, für\ ein\ neutrales\ k\ gelte\ f(n)=g(n)\ mit\ n=d^k$$
$$Induktionsschritt: Zeige\ f(d^{k+1})=g(d^{k+1})\ mit\ n'=d^{k+1}.$$
$$f(n')=f(d^{k+1})$$
$$=c*f(d^{k+1}/d)+ad^{k+1}$$
$$=c*f(d^k)+ad^{k+1}$$
$$=c*f(n)+ad^{k+1}$$
$$=c*g(n)+ad^{k+1}$$
$$=c*g(d^k)+ad^{k+1}$$
$$=ca(c+d)^{\log_d(d^k)}+ad^{k+1}$$
$$=a(c(c+d)^k+d^{k+1})$$
$$=a(c^{k+1}+c^k d+\ldots+c^2 d^{k-1}+cd^k+d^{k+1})$$
$$=a(c+d)^{k+1}$$
$$=a(c+d)^{\log_d(d^{k+1})}$$
$$=a(c+d)^{\log_d(n')}$$
$$=g(n')$$

$$Damit\ ist\ f(n)=g(n)\ bewiesen.$$

Teil 3: Mastertheorem:

Mit `c=d` vereinfacht sich die Funktion zu `f(n)=d*f(n/d) + a*n.` Das Mastertheorem kann angewandt werden. Es handelt sich dabei um Fall 2, da der Overhead, welcher jeden Rekursionsaufruf dazukommt, `Overhad(n)=a*n` in `Theta(n)` ist. Nach dem Mastertheorem liegt damit unsere Funktion `f(n)` in `Theta(n*log(n))`.

Teil 4: Geschlossenen Form der vereinfachten Variante:

Mit `c=d` vereinfacht sich `f(n)=a*(c+d)^log_d(n) zu f(n)=a*(2d)^log_d(n).`

`Umwandlung zur einfacheren O-Klassen-Kategorisierung:`

$$
\begin{aligned}
f(n) &= a(2\mathrm{d})^{\log_d(n)} \\
&= a\left(d^{\log_d(2)} * d\right)^{\log_d(n)} \\
&= a\left(d^{\log_d(2)+1}\right)^{\log_d(n)} \\
&= ad^{\log_d(2)*\log_d(n)+\log_d(n)} \\
&= ad^{\log_d(2)*\log_d(n)} * d^{\log_d(n)} \\
&= a*n*d^{\log_d(2)*\log_d(n)} \\
&= a*n*\left(n^{\log_d(2)}\right)
\end{aligned}
$$

Laut dieser Form liegt f(n) in P. Der erste von n abhängige-Faktor legt diese Funktion in mindestens O(n) ab. Der zweite Term ist ein Polynom, dessen Grad von der Konstante d abhängt. Log_d(2) ist für alle d>1 eine Zahl größer als 1.

Vergleich mit dem Ergebnis des Mastertheorems:

Wir haben leider einen Widerspruch. Laut dem Mastertheorem liegt die Funktion in Theta(n*log(n)). Jedoch ist die O-Klasse unserer (mit Induktion bewiesenen) geschlossenen Form der Funktion nicht in Theta(n*log(n)). Das liegt daran, dass n^(log_d(2)) keine Logarithmus-Funktion wie log(n) ist und daher anders(nämlich schneller) wächst.