NitscheSahoo - AD Praktikum für 5.11.13

Aufgabe 4 – Rekurrenz

Aufgabe 4.1:

Vermutung der expliziten Form:
Die ersten Werte von `f(n)` lauten:
`[2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, ...]`
Wir vermuten wegen der wiederholten Multiplikation mit 3, dass wir eine Art Exponantialfunktion zur Basis 3 haben:

Sei $a(n) = 3^n$, dann bekommen wir folgenden Vergleich:
`[(2, 1), (8, 3), (26, 9), (80, 27), (242, 81), (728, 243), (2186, 729), (6560, 2187), ...]`

Es scheint, dass `a(n)` einen Rekursionsaufruf zu wenig zu haben scheint.
Daher betrachten wir nun $b(n) = 3^{n+1}$:
`[(2, 3), (8, 9), (26, 27), (80, 81), (242, 243), (728, 729), (2186, 2187), (6560, 6561), ...]`

Unsere explizite Variante unterscheidet sich nun nur noch um einen Versatz von 1. Sei $c(n) = 3^{n+1} - 1$, dann
`[(2, 2), (8, 8), (26, 26), (80, 80), (242, 242), (728, 728), (2186, 2186), (6560, 6560), ...]`

Also vermuten wir nun: $f(n) = c(n) = \ 3^{n+1} - 1$

Induktionsbeweis:
Sei $f(0) = 2$ und $f(n) = 3 * f(n-1) + 2$ und $c(n) = 3^{n+1} - 1$
Zeige $f(n) = c(n)$ für alle $n \geq 0$.

Induktionsanfang: Zeige $f(0) = c(0)$.
$f(0) = 2 = 3 - 1 = 3^{0+1} - 1 = c(0)$.

Induktionsbehaupung:
Angenommen für ein festes aber beliebiges n gelte: $f(n) = c(n)$.

Induktionsschritt: Zeige, dass $f(n+1) = c(n+1)$ folgt:

$$f(n+1)$$

Definition von $f(n)$:
$$= 3 * f(n) + 2$$

Definition von $c(n)$:
$$= 3 * (3^{n+1} - 1) + 2$$
$$= 3^{n+2} - 3 + 2$$
$$= 3^{(n+1)+1} - 1$$

Definition von $c(n)$:
$$= c(n+1)$$

Damit ist die Aussage bewiesen.