Aufgabe 4.2:

Teil 1: Schema abwickeln und Vermutung stellen:

Sei $f(1)=a$ *und* $f(n)=c*f(n/d)+an$ *mit* $n=d^k$

Einsetzten von: $n=d^0, d^1, d^1, \ldots$ *zum Erkennen eines Musters*

$$f(d^0)=f(1)=a$$

$$f(d^1)=c*f(d/d)+ad$$
$$=ac+ad$$
$$=a(c+d)$$

$$f(d^2)=c*f(d^2/d)+ad^2$$
$$=c*f(d)+ad^2$$
$$=ca(c+d)+ad^2$$
$$=a(c^2+cd)+ad^2$$
$$=a(c^2+cd+d^2)$$
$$=a(c+d)^2$$

$$f(d^3)=c*f(d^3/d)+ad^3$$
$$=c*f(d^2)+ad^3$$
$$=ca(c+d)^2+ad^3$$
$$=a(c^3+cd^2+c+d^2+d^3)$$
$$=a(c+d)^3$$

Vermutung:

$$f(d^k)=a(c+d)^k=f(n)=a(c+d)^{\log_d(n)} \; mit \; n=d^k (k=\log_d(n))$$

Teil 2: Vermutung mit Vollständiger Induktion beweisen.

Mit $f(1)=a$ *und* $f(n)=cb(n/d)+an$ *sowie* $g(n)=a(c+d)^{\log_d(n)}$

Zeige, dass für alle $n\geq 1$ *mit* $n=d^k (n, k\in N)$ *gilt* $f(n)=g(n)$.

Induktionsanfang: $f(1)=a=a(c+d)^0=a(c+d)^{\log_d(1)}=g(1)$

Iduktionsbehauptung: Angenommen, für ein neutrales k gelte $f(n)=g(n)$ *mit* $n=d^k$

Induktionsschritt: Zeige $f(d^{k+1})=g(d^{k+1})$ *mit* $n'=d^{k+1}$.

$$f(n')=f(d^{k+1})$$
$$=c*f(d^{k+1}/d)+ad^{k+1}$$
$$=c*f(d^k)+ad^{k+1}$$
$$=c*f(n)+ad^{k+1}$$
$$=c*g(n)+ad^{k+1}$$
$$=c*g(d^k)+ad^{k+1}$$
$$=ca(c+d)^{\log_d(d^k)}+ad^{k+1}$$
$$=a(c(c+d)^k+d^{k+1})$$
$$=a(c^{k+1}+c^k d+\ldots+c^2 d^{k-1}+cd^k+d^{k+1})$$
$$=a(c+d)^{k+1}$$
$$=a(c+d)^{\log_d(d^{k+1})}$$
$$=a(c+d)^{\log_d(n')}$$
$$=g(n')$$

Damit ist $f(n)=g(n)$ *bewiesen.*

Teil 3: Mastertheorem:

Mit `c=d` vereinfacht sich die Funktion zu `f(n)=d*f(n/d) + a*n.` Das Mastertheorem kann angewandt werden. Es handelt sich dabei um Fall 2, da der Overhead, welcher jeden Rekursionsaufruf dazukommt, `Overhad(n)=a*n` in `Theta(n)` ist. Nach dem Mastertheorem liegt damit unsere Funktion `f(n)` in `Theta(n*log(n))`.

Teil 4: Geschlossenen Form der vereinfachten Variante:

Mit `c=d` vereinfacht sich `f(n)=a*(c+d)^log_d(n) zu f(n)=a*(2d)^log_d(n).`
Umwandlung zur einfacheren O-Klassen-Kategorisierung:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= a(2\mathrm{d})^{\log_d(n)} \\
&= a\left(d^{\log_d(2)} * d\right)^{\log_d(n)} \\
&= a\left(d^{\log_d(2)+1}\right)^{\log_d(n)} \\
&= ad^{\log_d(2)*\log_d(n)+\log_d(n)} \\
&= ad^{\log_d(2)*\log_d(n)} * d^{\log_d(n)} \\
&= an^{\log_d(2)} * n
\end{aligned}
$$

Laut dieser Form liegt f(n) in P. Der erste von n abhängige-Faktor legt diese Funktion in mindestens O(n) ab. Der zweite Term ist ein Polynom, dessen Grad von der Konstante d abhängt. Log_d(2) ist für alle d>1 eine Zahl größer als 1.
Vergleich mit dem Ergebnis des Mastertheorems:
Wir haben leider einen Widerspruch. Laut dem Mastertheorem liegt die Funktion in Theta(n*log(n)). Jedoch ist die O-Klasse unserer (mit Induktion bewiesenen) geschlossenen Form der Funktion nicht in Theta(n*log(n)). Das liegt daran, dass n^(log_d(2)) keine Logarithmus-Funktion wie log(n) ist und daher anders(nämlich schneller) wächst.