

ZESTAW 3 (macierze , izomorfizmy)

Zad. 1

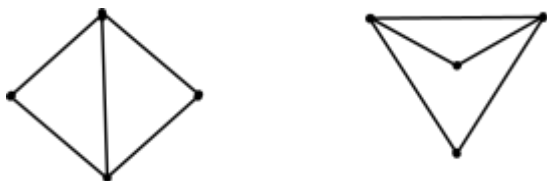
Sprawdzić czy funkcja $f: X \rightarrow Y$, jest bijekcją

- a) $X = \mathbb{R} \setminus \{-2/5\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{1/5\}$, $f(x) = x/(5x + 2)$,
- b) $X = (0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$,
- c) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x} + x^2 \cos(x)$.

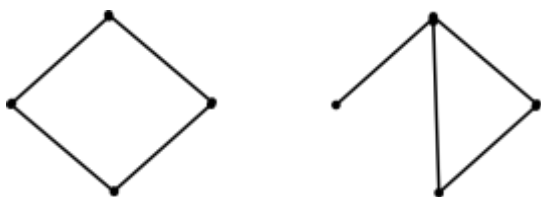
Zad. 2

Sprawdzić czy grafy pokazane na rysunku są izomorficzne.

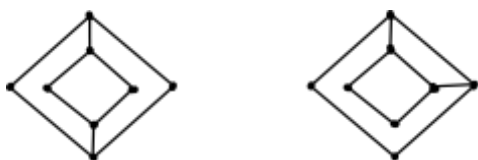
a)



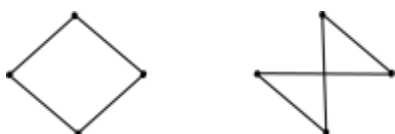
b)



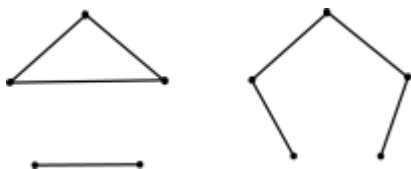
c)



d)



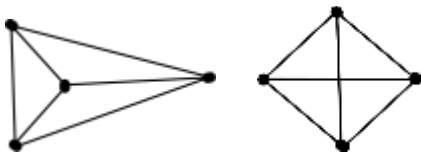
e)



f)



g)



Zad. 3

Narysować wszystkie nieizomorficzne grafy proste rzędu 4.

Zad. 4

Narysować graf prosty rzędu 4 izomorficzny ze swoim dopełnieniem.

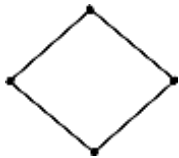
Zad. 5

Pokazać, że jeśli w grafie stopień minimalny $\delta(G) \geq 2$ to w grafie istnieje cykl.

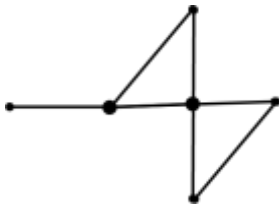
Zad 6

Napisać macierz sąsiedztwa grafu z rysunku. Podać stopnie wierzchołków, rząd oraz rozmiar grafu.

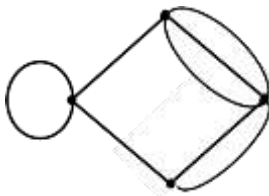
a)



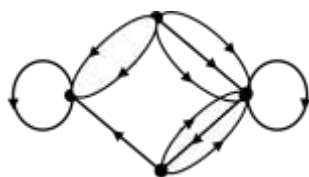
b)



c)



d)



Zad 7

Na podstawie macierzy sąsiedztwa podać rząd grafu, stopnie wierzchołków, typ grafu. Narysować graf.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zad 8

Dla grafów G oraz G' z zadania 2 (przykład d) wyznaczyć macierz permutacji, która przekształca macierz sąsiedztwa jednego grafu w macierz sąsiedztwa drugiego grafu.

Zad 9

Dla grafów G oraz G' z zadania 2 (przykład a) wyznaczyć macierz permutacji, która przekształca macierz sąsiedztwa jednego grafu w macierz sąsiedztwa drugiego grafu.

Zad 10

Wiadomo, że macierz permutacji przekształcająca macierz sąsiedztwa grafu z rysunku



w macierz grafu izomorficznego ma postać:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zapisać macierz sąsiedztwa grafu izomorficznego.

Zad 11

Pokazać, że jeśli grafy są izomorficzne to

- wyznaczniki macierzy sąsiedztwa obu grafów są sobie równe,
- ślady macierzy sąsiedztwa obu grafów są sobie równe.

Zad 12

Na podstawie listy sąsiedztwa narysować i opisać graf.

a)

$$v_1 \rightarrow v_2, v_3$$

$$v_2 \rightarrow v_1, v_3, v_4, v_6$$

$$v_3 \rightarrow v_1, v_2, v_5, v_6$$

$$v_4 \rightarrow v_2, v_6$$

$$v_5 \rightarrow v_3, v_6$$

$$v_6 \rightarrow v_2, v_3, v_4, v_5$$

b)

$$v_1 \rightarrow v_1, v_2, v_3$$

$$v_2 \rightarrow v_1, v_3, v_4$$

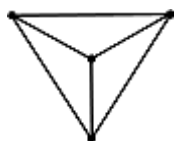
$$v_3 \rightarrow v_1, v_2, v_4$$

$$v_4 \rightarrow v_2, v_3, v_4$$

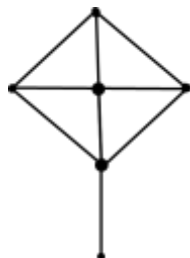
Zad. 13

Napisać macierz incydencji dla grafu z rysunku.

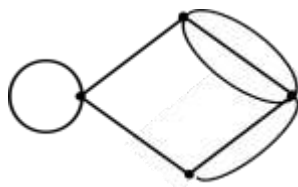
a)



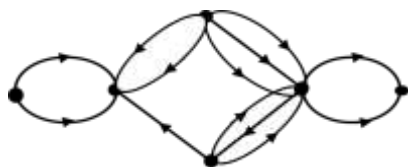
b)



c)



d)



Zad 14

Na podstawie macierzy incydencji B narysować i opisać graf.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$