

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Архипов, А.С. Усанина

ДВИЖЕНИЕ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ

Учебное пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2013

УДК 532.529
ББК 22.253.3я73
A877

Архипов В.А., Усанина А.С.
A877 Движение аэрозольных частиц в потоке : учеб. пособие. – Томск :
Издательский Дом Томского государственного университета,
2013. – 92 с.

ISBN 978-5-9462-1420-9

Учебное пособие посвящено изложению физических основ процессов, связанных с движением одиночных частиц дисперсной фазы в несущей среде. Даны классификация гетерогенных систем и методы измерения дисперсных характеристик частиц. Рассмотрены основные уравнения движения частицы при различных режимах течения. Описаны основные безразмерные критерии подобия, используемые при моделировании гидродинамических процессов, связанных с движением частиц дисперсной фазы.

Пособие написано по материалам дисциплины «Закономерности движения дисперсных систем», читаемой в Томском государственном университете, для студентов, обучающихся по направлению 161700 – «Баллистика и гидроаэродинамика».

Для аспирантов вузов, научных и инженерно-технических работников, специализирующихся в области гидрогазодинамики гетерогенных потоков.

УДК 532.529
ББК 22.253.3я73

Рецензент И.М. Васенин,
д-р физ.-мат. наук, проф.

ISBN 978-5-9462-1420-9

© Томский государственный университет, 2013
© В.А. Архипов, А.С. Усанина, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список основных обозначений	4
Введение	5
ГЛАВА 1. Области применения и классификация аэрозольных систем	6
1.1. Гетерогенные течения в природе, технологических процессах и технических устройствах	6
1.2. Классификация и основные характеристики аэрозольных систем	8
ГЛАВА 2. Распределение частиц по размерам	16
2.1. Представление распределения частиц по размерам	16
2.2. Унимодальные функции распределения	20
2.3. Определение параметров распределений по их геометрическим характеристикам	24
2.4. Средние размеры и удельная поверхность частиц	26
ГЛАВА 3. Критерии подобия при описании динамики аэрозольных систем	28
3.1. Основное правило моделирования	28
3.2. Подobie явлений	31
3.3. Метод анализа размерностей	33
3.4. П-теорема	37
3.5. Основные критерии подобия в динамике аэрозольных систем	40
3.6. Критерии подобия в специальных задачах механики двухфазных потоков	48
ГЛАВА 4. Движение одиночной частицы	53
4.1. Основные подходы к математическому описанию движения гетерогенных сред	53
4.2. Режимы движения частицы	54
4.3. Коэффициент сопротивления	57
4.4. Влияние формы частиц на их движение	58
4.5. Уравнение движения частицы дисперсной фазы	62
ГЛАВА 5. Движение частицы в несущем потоке	66
5.1. Движение частицы в Стоксовском режиме	66
5.2. Движение частицы в промежуточном режиме	70
5.3. Движение частицы в автомодельном режиме	73
ГЛАВА 6. Движение частицы в поле силы тяжести	76
6.1. Движение частицы в Стоксовском режиме	77
6.2. Влияние силы, связанной с присоединенной массой	81
6.3. Расчет скорости стационарного осаждения частицы по критериальному уравнению	84
Приложения	87
Литература	89

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

C_D – коэффициент сопротивления;
 C_m , C_n , C_V – массовая, счетная и объемная концентрация частиц;
 D , R – диаметр и радиус сферической частицы;
 D_0 – модальный диаметр частиц;
 $f(D)$, $F(D)$ – дифференциальная и интегральная функции счетного распределения частиц по размерам;
 F_A – сила Архимеда;
 F_g – сила тяжести;
 F_m – сила сопротивления, связанная с присоединенной массой;
 F_s – сила вязкого сопротивления;
 F_S – сила Саффмена;
 F_ω – сила Магнуса;
 g – ускорение свободного падения;
 $g(D)$, $G(D)$ – дифференциальная и интегральная функции массового распределения частиц по размерам;
 m – масса частицы;
 \vec{u} – вектор скорости дисперсионной среды;
 \vec{u}_p – вектор скорости частицы дисперсной фазы;
 μ , μ_p – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды и материала частицы дисперсной фазы;
 ρ , ρ_p – плотность дисперсионной среды и материала частицы дисперсной фазы;
 σ – коэффициент поверхностного натяжения;
 Ω – безразмерный момент вращения.

Критерии подобия

Ar – число Архимеда;	Mo – число Мортонга;
Bo – число Бонда;	Oh – число Онезорге;
Ca – Число капиллярности;	Re – число Рейнольдса;
Fr – число Фруда;	Stk – число Стокса;
Lp – Число Лапласа	We – число Вебера.

Сокращения

АСД – алюминий сферический дисперсный;
 ГР – гамма-распределение;
 ЛНР – логарифмически нормальное распределение.

ВВЕДЕНИЕ

Дисперсное состояние является одним из основных состояний материи, так как большая часть вещества во Вселенной находится в виде пыли. В земных условиях человеку приходится сталкиваться с большим разнообразием аэрозольных (дисперсных) систем – атмосферные аэрозоли (облака, туманы), от которых зависит погода и климат на Земле, аэрозоли в различных сферах производства (порошковая металлургия, угольная промышленность, технология лакокрасочного производства и т.д.), а также бытовые аэрозоли, образующиеся при распыливании различных пестицидов, освежителей воздуха, парфюмерных жидкостей и т.д.

При исследовании двухфазных потоков, содержащих взвесь аэрозольных частиц (дисперсная фаза) в несущей среде (дисперсионная среда) важно правильно выбрать основные параметры, определяющие систему, и адекватно описать реальный процесс при помощи математической модели. В связи с этим, глубокое знание принципов и законов, определяющих физику динамического поведения двухфазных систем с учетом свойств дисперсной и дисперсионной фаз, является необходимым для специалиста в области механики двухфазных потоков. Фундаментальные основы динамики многофазных сред достаточно подробно изложены в монографиях [1-8] и обзорных статьях [9, 10]. Среди учебной литературы можно отметить пособия [11-13], в которых рассмотрены основные характеристики двухфазных течений.

Целью настоящего учебного пособия является лаконичное изложение основных закономерностей движения одиночных частиц дисперсной фазы в дисперсионной среде с учетом физических процессов, протекающих на границе раздела фаз. Задачей пособия является освоение общих принципов и законов, определяющих динамику частиц дисперсной фазы в несущем потоке.

В пособии приведены основные понятия и терминология, рассмотрены основные физико-математические модели, применяемые в физике дисперсных систем.

Авторы надеются, что учебное пособие будет полезным не только для учебных целей, но и в практической работе инженеров и исследователей, специализирующихся в области механики дисперсных сред.

1. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ СИСТЕМ

Гетерогенные (многофазные) системы, представляющие собой совокупность двух и более фаз с четко выраженной поверхностью раздела, широко распространены в природе, в повседневной техногенной деятельности человека, а также играют исключительную роль в большинстве промышленных процессов. Предметом изучения в настоящем курсе являются системы, состоящие из двух фаз, одна из которых образует непрерывную дисперсионную среду, а вторая – дисперсную фазу, распределенную в дисперсионной среде в виде твердых частиц, капель или пузырьков.

1.1. ГЕТЕРОГЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПРИРОДЕ, ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ И ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

К числу аэрозольных (дисперсных) систем относятся столь резко различающиеся по химическому и фазовому составам, физическим свойствам, областям существования и применения объекты, как аэрозоли (туманы, дымы, космическая пыль), золи металлов и природных минералов, донные отложения рек, морей и океанов, грунты и почвы, мелкие пески, сырая нефть и природные битумы, пигменты и высокодисперсные наполнители для композиционных материалов, керамические массы, водоугольные суспензии и золы от сжигания твердых топлив, водные суспензии целлюлозных волокон для производства бумаги, катализаторные массы, сырьевые шламы многих химических производств. К дисперсным системам относятся также все многообразные виды пен и эмульсий. Перечисленные примеры свидетельствуют о широком распространении и большом значении дисперсных сред как в природных явлениях, так и при проведении разнообразных технологических процессов, осуществляемых с их участием.

Многие виды дисперсных систем являются основой для получения дисперсных материалов, таких, как бетоны, лакокрасочные материалы, высоконаполненные резины и пластики, гетерогенные твердые ракетные топлива, керамические и металлокерамические материалы, бумага и картон, искусственные кожи и множество других материалов.

Дисперсные системы могут приносить как пользу человеку в отдельных областях его жизни, так и в ряде случаев могут наносить существенный урон. Несомненно, что на сегодняшний день одной из основных проблем дисперсных сред рассматривается экологическая проблема.

Первопричина загрязнения атмосферы связана с активной деятельностью промышленных предприятий, выбрасывающие в природу вредные вещества, такие как сероводород и сероуглерод, сернистый ангидрид, оксид углерода, окислы азота, соединения хлора и фтора, что приводит к усугублению и гибели окружающей нас фауны и флоры, а также жизни на планете в целом. В частности, выбросы оксида углерода, попадающие в атмосферу в результате сжигания твердых отходов, способствует повышению температуры на планете и созданию парникового эффекта.

Тем не менее, в большинстве случаев дисперсные системы играют положительную роль. Приведем примеры применения дисперсных систем в некоторых технологических процессах и устройствах:

- Дисперсные системы широко используются в процессе обогащения полезных ископаемых, предназначенном для разделения исходных минеральных частиц на соответствующие продукты. В зависимости от плотности разделяемых минералов частицы помещаются либо в водную, либо в воздушную среду, где они движутся под действием гравитационных или центробежных сил. При флотационном методе обогащения помимо твердых минеральных частиц флотационная дисперсная среда состоит из пузырьков газа или капель масла, которые прилипают к плохо смачиваемым частицам и поднимают их к поверхности.

- Важную роль дисперсные среды имеют в ракетной технике. В частности, в жидкостных ракетных двигателях топливо из центробежной форсунки выходит в виде полой конической пелены, состоящей из мелких капель, тем самым позволяя повысить полноту сгорания, эффективность процессов горения и время пребывания компонентов жидкого рабочего тела в объеме камеры сгорания.

- Дисперсные среды успешно применяются в современных порошковых средствах пожаротушения. В качестве огнетушащего вещества используется аэрозоль, состоящий из высокодисперсных твердых частиц и инертного газа. Процесс тушения основывается на сжигании вещества особого химического состава в твердом виде. После сгорания вещества образуется струя пара и твердых частиц. Она блокирует доступ кислорода и гасит огонь. Данный метод локализации пожаров является экологически безвредным и не токсичен.

- Кроме перечисленных примеров применения дисперсных сред в отдельных технологиях можно привести процесс центрифугирования, используемый в атомной, пищевой, нефтяной и химической отраслях промышленности. Центрифугирование применяется для разделения разнотелных систем на фракции, например, жидкость – твердые частицы. Ме-

тод центрифугирования часто используется в биологии для отделения макромолекул в физиологических растворах.

- Одной из бурно развивающихся областей применения дисперсных систем является технология получения порошков с заданными свойствами. В частности, в основе плазмохимического синтеза керамических порошков заложен высокочастотный способ генерации теплоносителя, подаваемого в реакторную часть установки совместно с жидкими каплями реагента в условиях закрученного потока. Эффективность данной технологии во многом определяется закономерностями движения и эволюции жидких частиц распыленного реагента при их взаимодействии с несущей газовой фазой и явлениями, происходящими в капле реагента.

Это далеко не весь перечень областей применения дисперсных систем. Однако даже из приведенных примеров является очевидным, что для повышения эффективности отдельных технологических процессов, снижения энергозатрат и получения целевого продукта или результата необходимы адекватные физико-математические модели динамического взаимодействия частиц дисперсной фазы с несущей средой с учетом конкретных условий.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЭРОЗОЛЬНЫХ СИСТЕМ

В природе и в технологических процессах встречаются дисперсные системы, характеристики которых могут изменяться в широких пределах. Многочисленные дисперсные системы можно классифицировать по различным признакам. Существуют общие признаки, которые характерны для всех дисперсных систем, и частные, распространяющиеся лишь на отдельные виды аэрозолей. Рассмотрим классификацию дисперсных систем на основе следующих общих признаков [14, 15].

- Агрегатное состояние частиц и несущей среды.
- Вид дисперсной фазы.
- Размер частиц.
- Концентрация частиц.

Классификация дисперсных систем по агрегатному состоянию

Дисперсионной средой может быть жидкость (Ж) или газ (Г), дисперсной фазой могут быть твердые частицы (Т), капли жидкости (Ж) или газовые пузырьки (Г). Каждая система имеет свое обозначение в виде дроби, где в числителе указывается агрегатное состояние дисперсной

фазы, а в знаменателе – дисперсионной среды. Система Т/Ж, например – это взвесь твердых частиц в жидкости; система Ж/Г – жидкие капли в газе и т.д. Классификация дисперсных систем по агрегатному состоянию приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Классификация аэрозольных систем по агрегатному состоянию

Дисперсионная среда	Дисперсная фаза		
	твердая	жидкая	газообразная
Жидкая	Т/Ж (гидрозоли, суспензии, гели)	Ж/Ж (эмульсии, кремы)	Г/Ж (газовые эмульсии, пены, кипящая жидкость)
Газовая	Т/Г (аэрозоли, пыль)	Ж/Г (туман, облака)	Г/Г (маловероятны)

Вследствие растворимости газов системы типа Г/Г практически не встречаются. В газовой среде, однако, возможны гетерогенные образования из-за флуктуации плотности. Каждая из рассматриваемых дисперсных систем имеет свое название (табл. 1.1). Систему Ж/Ж, например, называют эмульсией, а системы с газовой дисперсионной средой – аэрозолями.

Таблица 1.2

Характеристики практического использования аэрозольных систем

Тип системы	Представители	Отрасли и сферы
Т/Ж	Естественные водоемы, краски, красители для ткани, гидрозоли металлов.	Акватории Земли, лакокрасочная и текстильная промышленность, добыча золота.
Ж/Ж	Нефть, молоко, майонез, краски, лаки, латекс, средства защиты растений.	Нефтеперерабатывающая, пищевая, резиновая, лакокрасочная промышленность.
Г/Ж	Пена для флотации, мыльная пена, игристые вина, газированная вода.	Обогащение минералов, пищевая промышленность, применение моющих средств.
Т/Г	Мука и сыпучие пищевые продукты; порошкообразные цемент, алебастр, бетон, пыль; дым в атмосфере.	Текстильная, легкая, пищевая промышленность, сельское хозяйство, строительство, Земля и ее атмосфера.
Ж/Г	Туман, бытовые средства в аэрозольном состоянии.	Автомобильная промышленность, атмосферные процессы.

Приведенная классификация является общей и характеризует возможные виды дисперсных систем. На ее основе можно представить ха-

рактеристики некоторых практически важных дисперсных систем и областей их применения (табл. 1.2).

Сведения, приведенные в табл. 1.2, свидетельствуют о широком распространении аэрозольных систем, как в природе, так и в разнообразных сферах человеческой деятельности.

Классификация аэрозольных систем по форме частиц

Для упрощения анализа процессов, происходящих в дисперсных системах, удобно все частицы принимать за сферические. Однако, за исключением жидких капель, которые чаще всего являются сферами или сфероидами, частицы дисперсной фазы могут иметь самую разную форму. Их можно разделить на три основных класса (рис. 1.1).

- Изометрические частицы, для которых в первом приближении все три размера по осям x , y , z совпадают. К этому классу относятся сферы, правильные многогранники или частицы близкие к ним по форме. Большинство исследований поведения дисперсных сред посвящено изометрическим частицам (оптика аэрозолей, движение капель и пузырьков, испарение и горение частиц).

- Пластинки – частицы, имеющие два длинных размера и один короткий. К этому классу относятся лепестки, пленки, мембраны, чешуйки, диски.

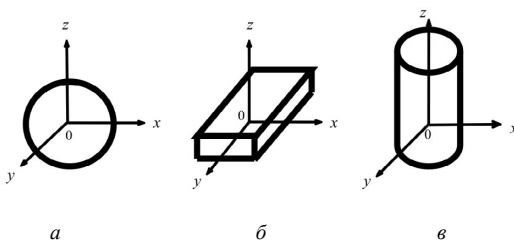


Рис. 1.1. Основные формы частиц:
 a – изометрическая частица; b – пластинка; v – волокно

- Волокна – частицы протяженные в одном направлении и имеющие сравнительно небольшие размеры – в двух других. К их числу относятся призмы, иглы, нити или минеральные волокна, например асбест. Выяснение опасности для здоровья при дыхании асбестовой пыли побудило к изучению поведения волокон в воздухе. Однако сведений о волокнах как об аэродисперсных системах получено очень мало по сравнению с данными об изометрических частицах.

Форма частиц зависит от способа их получения и природы материала. Частицы, образующиеся, при конденсации молекул пара имеют обычно сферическую форму, особенно если конденсация проходит через стадию образования жидкости. Частицы, образующиеся при измельчении больших образцов, редко бывают сферическими. Исключение – дробление жидких капель под воздействием потока воздуха.

На рис. 1.2 приведены микрофотографии порошков алюминия, полученных разными способами. Порошок алюминия марки АСД-4 (рис. 1.2а) получен методом плазменной конденсации и имеет среднемассовый диаметр частиц $D_{43}=7.34$ мкм. Порошок ALEX получен методом электрического взрыва проволоочек и имеет величину $D_{43}=0.18$ мкм. Этот порошок относится к классу высокодисперсных. Как видно из приведенных фотографий форма частиц сферическая.

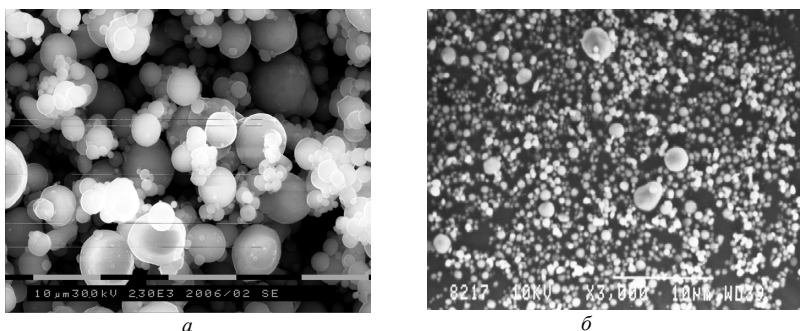


Рис. 1.2. Микрофотографии порошков алюминия [4]:
а – порошок АСД-4; б – порошок ALEX

Приведем некоторые геометрические характеристики изометрических частиц разной формы (табл. 1.3). В таблице обозначены: D – диаметр сферы; a – длина ребра правильного многогранника.

Таблица 1.3
Геометрические характеристики частиц разной формы

Форма частицы	Сфера	Куб	Тетраэдр	Октаэдр
Площадь поверхности	πD^2	$6 a^2$	$1.73 a^2$	$3.46 a^2$
Объем	$\pi D^3/6$	a^3	$0.12 a^3$	$0.47 a^3$

Классификация частиц по размерам

Поскольку аэрозольные частицы, как правило, очень мелкие по сравнению с привычными предметами, для их описания используются специальные единицы измерения – микрометры, нанометры и ангстремы. Приведем соотношения этих единиц измерений.

$$1 \overset{\circ}{A} = 0,1 \text{ нм} = 10^{-4} \text{ мкм} = 10^{-8} \text{ см} = 10^{-10} \text{ м};$$

$$1 \text{ нм} = 10 \overset{\circ}{A} = 10^{-3} \text{ мкм} = 10^{-7} \text{ см} = 10^{-9} \text{ м};$$

$$1 \text{ мкм} = 10^4 \overset{\circ}{A} = 10^3 \text{ нм} = 10^{-4} \text{ см} = 10^{-6} \text{ м}.$$

При практических расчетах необходимо использовать одну и ту же систему единиц, то есть все размеры, входящие в расчетные формулы, должны быть выражены одной и той же единицей, например, в метрах, микронах, ангстремах и т.д.

Размеры частиц, представляющих интерес для науки об аэрозолях, лежат в интервале, охватывающем четыре порядка величин от 10^{-2} до 10^2 мкм. Нижняя граница лежит в области перехода от размера молекулы к макроскопической частице. Частицы крупнее 100 мкм не способны длительное время оставаться взвешенными в воздухе. С течением времени они осаждаются на поверхность расположенных ниже предметов или уносятся ветром. Частицы диаметром более (5÷10) мкм обычно задерживаются в верхних дыхательных путях, а диаметром менее 5 мкм – могут проникать в альвеолярное пространство легких. Таким образом, величину (5÷10) мкм часто принимают как верхний предел размеров аэрозолей, представляющих интерес для медицины.

Линейные размеры ряда физических величин, которые оказывают существенное влияние на свойства частиц, лежат в интервале (0.01÷100) мкм. Например, средняя длина свободного пробега молекул воздуха составляет 0.07 мкм. При этом газовая система, в которой взвешены частицы, может приобретать различные новые свойства в зависимости от размера частиц. Длина волны видимого света лежит в диапазоне (0.4÷0.7) мкм. Частицы, размер которых меньше длины волны излучения, рассеивают свет существенно иначе, чем более крупные частицы. Таким образом, размер частиц – наиболее важный параметр при изучении и анализе поведения аэрозолей. Классификация дисперсных систем по этому признаку приведена в табл. 1.4.

Таблица 1.4

**Классификация аэрозольных систем
в зависимости от размера частиц дисперсной фазы**

Тип системы	D , мкм
Высокодисперсные системы	$0.001 \div 0.1$
Среднедисперсные системы	$0.1 \div 10$
Грубодисперсные системы	более 10

Типичные размеры частиц некоторых аэрозольных систем приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Типичные размеры частиц

Тип аэрозоля	D , мкм
Табачный дым	$0.1 \div 1.0$
Туман серной кислоты	$0.3 \div 0.5$
Топочный дым	$0.1 \div 10$
Растворимый кофе, сажа, сахарная пудра	$0.1 \div 10$
Слоистые облака	$1 \div 10$
Факел распыла аэрозольного баллончика	$1 \div 100$
Атмосферный туман	$2 \div 50$
Тальк	$10 \div 50$
Дождевые облака	$10 \div 100$
Цветочная пыльца	$15 \div 20$
Крупа, дождевые капли	более $50 \div 100$

Структура частиц дисперсной фазы

Частицы дисперсной среды могут существовать сами по себе и объединяться в цепочки, которые называют агломератами. Агломераты обычно образуются из электрически заряженных мелких частиц, которые находятся в плотных дымах. Дисперсные системы могут состоять из полых капелек, заполненных газом или полых частиц, содержащих вещество – наполнитель (летучая зола, частицы оксида алюминия в продуктах сгорания твердых ракетных топлив, например). Таким образом, плотность частицы может значительно отличаться от плотности исходного материала за счет наличия в ней полостей.

Дисперсные системы делятся на монодисперсные, которые состоят из частиц одного и того же размера и полидисперсные – состоящие из частиц разных размеров. Монодисперсные системы на практике встречаются очень редко. Дисперсные системы бывают гомогенные и гетероген-

ные. Гомогенная система состоит из химически одинаковых частиц. В негомогенной (гетерогенной) системе частицы имеют различные химические составы.

Концентрация частиц дисперсной фазы

Концентрация дисперсных частиц также является одной из важнейших характеристик, от которой зависит поведение дисперсной системы в различных физико-химических процессах. Различают счетную C_n , объемную C_V и массовую C_m концентрацию частиц:

C_n – количество частиц в единице объема двухфазной среды;

C_m – суммарная масса частиц в единице объема двухфазной среды;

C_V – суммарный объем частиц в единице объема двухфазной среды.

Дисперсные системы делятся на высококонцентрированные и разреженные в зависимости от объемной концентрации частиц:

$$C_V = \frac{\sum V_p}{V},$$

где $\sum V_p$ – суммарный объем частиц в аэрозольной системе; V – объем аэрозольной системы.

При $C_V > 0.02$ система называется высококонцентрированной, при $C_V < 0.02$ – разреженной [3].

Кроме того, для характеристики содержания частиц в дисперсной системе используется массовая (или весовая) доля частиц в двухфазной среде:

$$z = \frac{C_m}{C_m + \rho},$$

где ρ – плотность несущей среды (газ или жидкость).

В табл. 1.6 приведены соотношения между счетной C_n , массовой C_m и объемной C_V концентрациями частиц ($m_p = V_p \rho_p$ – масса частицы; ρ_p – плотность материала частицы).

Соотношения между C_n , C_m , C_V можно распространить и на полидисперсные системы, состоящие их частиц разных размеров (табл. 1.7). Для таких систем дисперсный состав характеризуется дифференциальной функцией счетного распределения частиц по размерам $f(D)$.

Т а б л и ц а 1.6

Соотношения между концентрациями для монодисперсных сред

	C_n	C_m	C_V
C_n	C_n	$C_m \cdot \frac{1}{m_p} = C_m \cdot \frac{6}{\pi D^3 \rho_p}$	$C_V \cdot \frac{6}{\pi D^3}$
C_m	$C_n \cdot \frac{\pi D^3}{6} \rho_p$	C_m	$C_V \cdot \rho_p$
C_V	$C_n \cdot \frac{\pi D^3}{6}$	$C_m \cdot \frac{1}{\rho_p}$	C_V

Т а б л и ц а 1.7

Соотношения между концентрациями для полидисперсных сред

	C_n	C_m	C_V
C_n	C_n	$C_m \left[\frac{\pi \rho_p}{6} \int_0^\infty D^3 f(D) dD \right]^{-1}$	$C_V \left[\frac{\pi}{6} \int_0^\infty D^3 f(D) dD \right]^{-1}$
C_m	$C_n \cdot \frac{\pi \rho_p}{6} \int_0^\infty D^3 d(D) dD$	C_m	$C_V \cdot \rho_p$
C_V	$C_n \cdot \frac{\pi}{6} \int_0^\infty D^3 d(D) dD$	$C_m \cdot \frac{1}{\rho_p}$	C_V

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

Многообразие встречающихся в природе и технических устройствах дисперсных систем обладает рядом характеристик, к которым относятся химический и гранулометрический состав, смачивающие и оптические свойства и т.д. При изучении конкретных явлений и процессов важно знание определенных характеристик. Однако есть такие характеристики, которые являются общими для любых процессов в дисперсных системах. Основными характеристиками частиц дисперсной фазы являются размер, плотность, форма, структура, химический состав. Рассмотрим более подробно размеры частиц.

Монодисперсные системы, которые состоят из частиц одинакового размера, встречаются в природе очень редко, и когда они образуются, то существуют в течение короткого промежутка времени. Например, некоторые высоко расположенные облака состоят из монодисперсных капель.

Дисперсные системы, состоящие из частиц различных размеров, называются полидисперсными. Как правило, в природе и в технических устройствах встречаются только полидисперсные системы. Если рассмотреть через лупу или микроскоп опилки, песок или другие порошки, то можно обнаружить частицы разных размеров. При образовании дождевых капель в результате конденсации и коагуляции при столкновении друг с другом, а также при дроблении в воздушном потоке образуется полидисперсная система. Для описания размеров частиц в монодисперсной системе достаточно указать единственное число – размер отдельной частицы (например, диаметр или радиус для сферических частиц). Для полидисперсных систем этого оказывается недостаточно. Рассмотрим основные способы описания полидисперсных систем.

2.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

Распределение частиц по размерам может быть предоставлено в виде таблиц, линейных диаграмм, гистограмм, а также математических формул. Рассмотрим эти способы представления распределений на примере.

Табличное задание распределения

Пусть в результате каких-либо измерений (например, при обработке микрофотографии образца пробы аэрозоля) получены данные по размерам частиц, например по их диаметрам D . Эти данные можно предста-

вить в табличном виде (табл. 2.1). При этом весь диапазон размеров частиц разбивается на k интервалов (в рассмотренном примере $k=5$). Для каждого i -го интервала в таблицу заносятся следующие значения: левая и правая границы интервала D_{i1}, D_{i2} ; средняя точка интервала $D_i=0.5 (D_{i1} + D_{i2})$; ширина интервала $\Delta D_i = D_{i2} - D_{i1}$ и количество частиц n_i в этом интервале.

Т а б л и ц а 2.1

Данные по размерам частиц

i	$D_{i1}, \text{мкм}$	$D_{i2}, \text{мкм}$	$D_i, \text{мкм}$	$\Delta D_i, \text{мкм}$	n_i	$n_i/\Delta D_i, \text{мкм}^{-1}$
1	1	2	1.5	1	30	30
2	2	3	2.5	1	90	90
3	3	5	4.0	2	50	25
4	5	10	7.5	5	20	4
5	10	20	15	10	10	1

В зависимости от количества интервалов k , на которое разбивается диапазон измеренных размеров частиц, можно получить более или менее подробные таблицы, которые полностью определяют распределение частиц по размерам в данной аэрозольной системе.

Линейная диаграмма

Табличное задание распределения частиц по размерам громоздко и обладает малой наглядностью, особенно при большом количестве интервалов k . Поэтому удобно использовать графический способ изображения распределения, например, в виде линейной диаграммы. Линейная диаграмма представляет собой график, по оси абсцисс которого нанесены значения средних точек интервалов D_i , а по оси ординат – количество частиц n_i в каждом интервале. Линейная диаграмма для рассмотренного выше примера (табл. 2.1) приведена на рис. 2.1.

Линейная диаграмма дает представление о виде распределения, то есть об относительном содержании частиц каждой фракции в аэрозольной системе, однако она не позволяет оценить количественные характеристики распределения. При увеличении числа разбиения k , линейная диаграмма будет представлять собой плавную кривую, качественно отражающую распределение частиц по размерам.

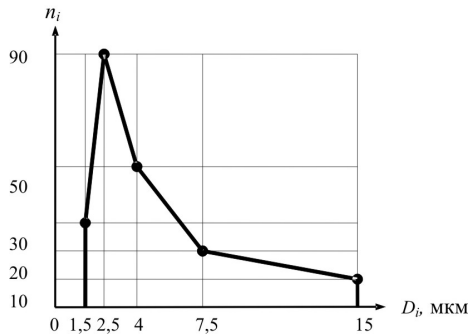


Рис. 2.1. Линейная диаграмма распределения

Гистограмма

Более точно распределение частиц по размерам можно представить в виде гистограммы – зависимости количества частиц n_i в i -м интервале, отнесенного к длине этого интервала ΔD_i , от размера частиц. На рис. 2.2 приведена гистограмма для приведенного выше распределения (табл. 2.1).

Гистограмма представляет собой совокупность смежных прямоугольников. Площадь каждого прямоугольника равна числу частиц, размеры которых попадают в данный интервал. Общая площадь гистограммы равна общему числу частиц в измеренном образце аэрозоля.

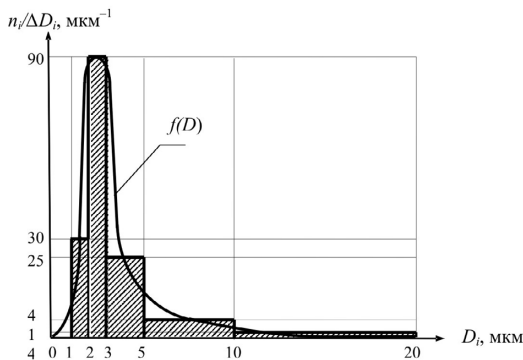


Рис. 2.2. Гистограмма распределения

Математическое представление распределений

Если интервалы размеров частиц ΔD_i становятся очень малыми, то гистограмма будет приближаться к плавной кривой, которая может быть аппроксимирована некоторой функциональной зависимостью. Содержание частиц различных размеров в полидисперсной системе полностью определяется заданием ее дифференциальной функции счетного $f(D)$ или массового $g(D)$ распределения [16]. Отметим, что вместо диаметра частиц D можно использовать любой параметр, характеризующий размер индивидуальной частицы (радиус, объем, масса, некоторый эквивалентный размер для несферической частицы и т.д.).

При этом

$$df(D) = f(D)dD$$

– доля количества частиц, диаметры которых лежат в диапазоне $(D, D+dD)$;

$$dg(D) = g(D)dD$$

– доля массы (или объема) частиц, диаметры которых лежат в диапазоне $(D, D+dD)$.

Дифференциальные функции распределения имеют смысл плотности распределения вероятности, то есть нормированы на единицу:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(D)dD &= 1, \\ \int_0^{\infty} g(D)dD &= 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выражения (2.1) означают, что вероятность того, что диаметры или массы частиц лежат в диапазоне $(0, \infty)$, равна единице (или 100%).

Связь между счетной и массовой функциями распределения определяется исходя из смысла этих функций уравнениями

$$g(D) = a_1 D^3 f(D),$$

$$f(D) = a_2 D^{-3} g(D),$$

где коэффициенты a_1 , a_2 определяются из условий нормировки (2.1):

$$a_1 = \left(\int_0^{\infty} D^3 f(D)dD \right)^{-1}, \quad a_2 = \left(\int_0^{\infty} D^{-3} g(D)dD \right)^{-1}.$$

Если размерность диаметра частиц $[D]=\text{мкм}$, то размерность дифференциальных функций распределения $[f]=[g]=\text{мкм}^{-1}$.

Наряду с дифференциальными функциями распределения $f(D)$, $g(D)$ для описания содержания частиц различных размеров в полидисперсной системе используются интегральные функции распределения $F(D)$, $G(D)$. Счетная функция распределения $F(D)$ равна отношению количества частиц, размер которых меньше D , к общему количеству частиц. Массовая функция распределения $G(D)$ равна отношению массы всех частиц, размер которых меньше D , к общей массе дисперсного материала. Предполагается, что $F(D)$, $G(D)$ являются непрерывными монотонными функциями, всюду дифференцируемыми и обладающими непрерывными производными.

Связь между дифференциальными и интегральными функциями распределения устанавливается следующими формулами:

$$F(D) = \int_0^D f(D) dD, \quad G(D) = \int_0^D g(D) dD.$$

Функции $F(D)$, $G(D)$ безразмерны и при $D \rightarrow \infty$ стремятся к единице.

2.2. УНИМОДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Практически все природные и искусственно получаемые аэрозоли с унимодальной (одновершинной) функцией распределения могут быть описаны с помощью двух аналитических зависимостей: обобщенного гамма-распределения (ОГР) и логарифмически нормального распределения (ЛНР) [17].

Обобщенное гамма-распределение определяется формулой

$$f(D) = aD^\alpha \exp(-bD^\beta), \quad (2.2)$$

где a – нормирующий множитель; b , α , β – параметры распределения ($a > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$).

При значении параметра $\beta=1$ обобщенное гамма-распределение переходит в гамма-распределение (ГР), определяемое формулой

$$f(D) = aD^\alpha \exp(-bD). \quad (2.3)$$

Выражение для логарифмически нормального распределения (ЛНР) имеет вид:

$$f(D) = aD^{-1} \exp[-b \cdot \ln^2(\beta D)], \quad (2.4)$$

где $a > 0$ – нормирующий множитель; b , β – параметры распределения.

Нормирующие множители для этих распределений находятся из условия нормировки (2.1) путем интегрирования.

Для обобщенного гамма-распределения нормирующий множитель равен

$$a = \frac{\beta b^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})}. \quad (2.5)$$

Для гамма-распределения

$$a = \frac{b^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (2.6)$$

Для логарифмически нормального распределения

$$a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}. \quad (2.7)$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма функция, которая при целых положительных значениях x равна

$$\Gamma(x) = (x-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x-1.$$

Значение гамма-функции для произвольных значений x приведены в *Приложении 1*.

При практической работе, связанной с анализом дисперсных систем, удобно оценивать форму распределения с помощью геометрических характеристик функции плотности вероятности (рис. 2.3).

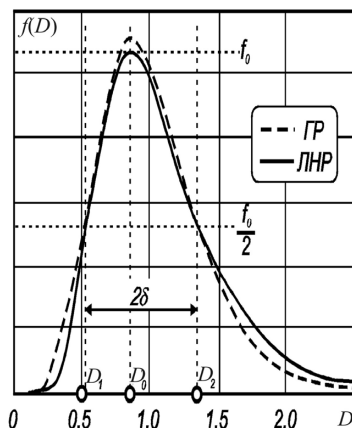


Рис. 2.3. Геометрические характеристики распределения

В качестве геометрических характеристик дифференциальной функции счетного распределения частиц по размерам $f(D)$ используются следующие параметры.

Модальный размер или мода распределения D_0 – диаметр частиц, соответствующий максимуму плотности распределения вероятности:

$$f_0 = f(D_0) = f_{\max}(D).$$

Полуширина распределения δ :

$$\delta = \frac{D_2 - D_1}{2}.$$

Асимметрия распределения ε :

$$\varepsilon = \frac{D_0 - D_1}{D_2 - D_1} = \frac{D_0 - D_1}{2\delta}.$$

Здесь D_1 и D_2 – значения диаметров частиц, соответствующих половине максимального значения функции распределения:

$$f(D_1) = f(D_2) = 0.5 f_0.$$

Выражение геометрических характеристик плотности вероятности через параметры гамма-распределения и логарифмически нормального распределения приведены в табл. 2.2.

Т а б л и ц а 2.2

**Выражение геометрических характеристик плотности вероятности
через параметры распределений**

Параметр	ГР	ЛНР
D_0	$\frac{\alpha}{b}$	$\left(\frac{1}{\beta}\right) \exp\left[-\frac{1}{2b}\right]$
f_0	$a\left(\frac{\alpha}{b}\right)^\alpha \exp(-\alpha)$	$a\beta \exp\left(\frac{1}{4b}\right)$
2δ	$\frac{2.34}{\sqrt{\alpha} D_0}$	$2D_0 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{0.693}{b}}\right)$
ε	$0.304\alpha^{0.125}$	$\left(1 + \exp\left(\sqrt{\frac{0.693}{b}}\right)\right)^{-1}$

В качестве примера рассмотрим дифференциальные функции счетного и массового распределений (рис. 2.4) и интегральную функцию массового распределения частиц по размерам (рис. 2.5), полученные экспериментально при распыливании жидкости двумя эжекционными форсунка-

ми (1, 2) разных конструкций. При аппроксимации гамма-распределением дифференциальные функции счетного распределения капель по размерам для этих форсунок имеют вид:
для первой форсунки

$$f_1(D) = 0.27D^{5.1} \exp(-1.82D),$$

для второй форсунки

$$f_2(D) = 0.28D^{0.9} \exp(-0.53D),$$

где $[D]=\text{мкм}$, $[f(D)]=\text{мкм}^{-1}$.

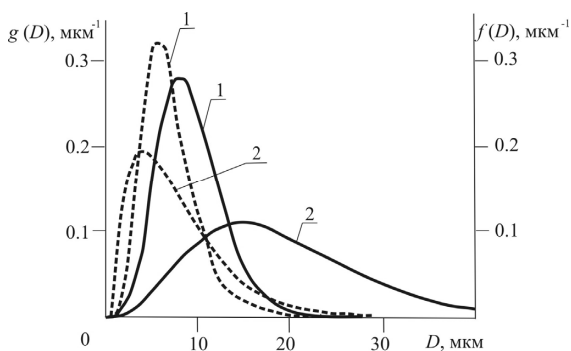


Рис. 2.4. Дифференциальные функции счетного (пунктирная линия) и массового (сплошная линия) распределения капель по размерам для форсунок 1 и 2

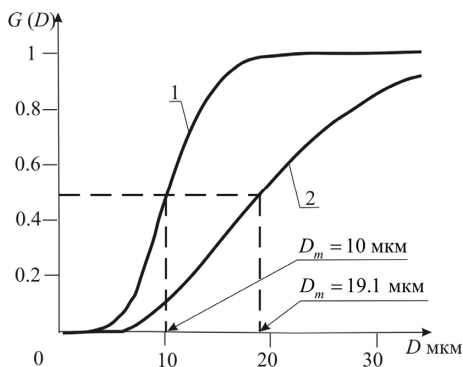


Рис. 2.5. Интегральные функции массового распределения

В порошковой металлургии для оценки дисперсности частиц обычно используется медианный диаметр D_m . Медианный диаметр соответствует

суммарной доле 50 % массы частиц, диаметры которых равны или меньше D_m , от общей массы частиц в порошке.

Для полимодальных распределений дифференциальные функции распределения представляют собой сумму унимодальных распределений с соответствующими модальными диаметрами $D_{01}, D_{02}, \dots, D_{0n}$ [17].

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Геометрические характеристики функции распределения $f(D)$ или $g(D)$ могут быть использованы для нахождения параметров распределений. Рассмотрим алгоритм нахождения этих параметров.

– По результатам измерений строится таблица значений $\Delta D_i, n/\Delta D_i$ (табл. 2.1).

– Строится гистограмма распределения (рис. 2.2).

– Через середины столбцов гистограммы проводится плавная кривая $f(D)$, исходящая от нуля и плавно уходящая в нуль при увеличении D (рис. 2.2).

– С помощью этой кривой находят значения D_0, δ, ε в соответствии с рис. 2.3.

– Для найденных значений D_0, δ, ε рассчитываются параметры распределения по формулам, приведенным в табл. 2.3.

– Рассчитывается нормирующий множитель по формулам (2.5)–(2.7) и получается искомая зависимость.

Таблица 2.3

**Выражение параметров распределений через
геометрические характеристики функции плотности вероятности**

Параметр	ГР	ЛНР
\square	$\left(\frac{1.17}{\delta} D_0\right)^2$	—
b	$D_0 \left(\frac{1.17}{\delta}\right)^2$	$0.693 \left(\operatorname{Arsh} \left(\frac{\delta}{D_0} \right) \right)^{-2}$
β	—	$\frac{1}{D_0} \exp \left(-0.721 \left(\operatorname{Arsh} \left(\frac{\delta}{D_0} \right) \right)^2 \right)$

Пример. Дана гистограмма распределения частиц порошка алюминия марки ALEX (рис. 2.6). Определить дифференциальную функцию счетного распределения при ее аппроксимации гамма-распределением.

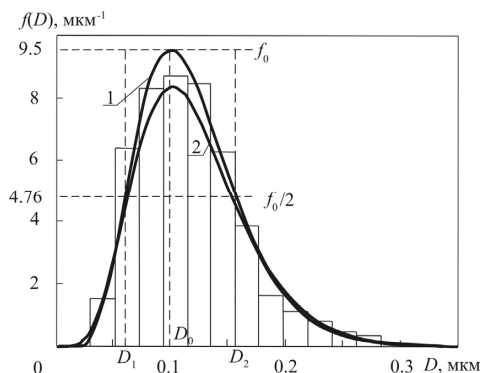


Рис. 2.6. Гистограмма и функция распределения

1. Проводим плавную кривую через середины столбцов гистограммы (кривая 1 на рис. 2.6), по которой определяем значения геометрических характеристик: $D_0 = 0.1$ мкм, $D_1 = 0.06$ мкм; $D_2 = 0.16$ мкм; $f_0 = 9.5$ мкм⁻¹.

2. Находим значения δ , ε :

$$\delta = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{0.16 - 0.06}{2} = 0.05 \text{ мкм},$$

$$\varepsilon = \frac{D_0 - D_1}{2\delta} = \frac{0.1 - 0.06}{2 \cdot 0.05} = 0.4.$$

3. Рассчитываем параметры распределения α , b :

$$\alpha = \left(\frac{1.17}{\delta} D_0 \right)^2 = \left(\frac{1.17 \cdot 0.1}{0.05} \right)^2 = 5.5;$$

$$b = D_0 \left(\frac{1.17}{\delta} \right)^2 = 0.1 \left(\frac{1.17}{0.05} \right)^2 = 54.7.$$

4. Определяем нормирующий множитель a :

$$a = \frac{b^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cong \frac{54.7^{5.5+1}}{\Gamma(5.5+1)} \approx 6.3 \cdot 10^8.$$

Зависимость для гамма-распределения записывается в виде:

$$f(D) \cong 6.3 \cdot 10^8 D^{5.5} \exp(-54.7D).$$

График полученной функции (кривая 2 на рис. 2.6) достаточно хорошо согласуется с экспериментальной гистограммой распределения для данного порошка.

2.4. СРЕДНИЕ РАЗМЕРЫ И УДЕЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЧАСТИЦ

Наряду с функцией распределения для описания дисперсных сред широко используются осредненные характеристики, большинство из которых определяется следующим выражением [16,17]:

$$D_{mn} = \left(\frac{\int_0^{\infty} D^m f(D) dD}{\int_0^{\infty} D^n f(D) dD} \right)^{\frac{1}{m-n}}, \quad (2.8)$$

где m, n – целые числа, означающие порядок момента функции распределения.

Наиболее распространенными из них являются следующие средние диаметры:

D_{10} – среднеарифметический;

D_{20} – среднеквадратический;

D_{30} – среднекубический (среднеобъемный);

D_{32} – средний объемно-поверхностный;

D_{43} – среднемассовый.

Подставляя в (2.8) выражения для гамма-распределения (2.3) и логарифмически нормального распределения (2.4), получим формулы для нахождения средних размеров частиц (табл. 2.4).

Т а б л и ц а 2.4

Выражение средних размеров частиц через параметры распределения

Параметр	ГР	ЛНР
D_{10}	$\frac{1 + \alpha}{b}$	$\frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{1}{4b}\right)$
D_{32}	$\frac{3 + \alpha}{b}$	$\frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{5}{4b}\right)$
D_{43}	$\frac{4 + \alpha}{b}$	$\frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{7}{4b}\right)$

Одной из характеристик дисперсности порошка является его удельная поверхность $S_{y\partial}$, определяемая как отношение суммарной поверхности частиц к их массе [16]. Для частиц сферической формы диаметром D величина $S_{y\partial}$ рассчитывается по формуле:

$$S_{y\partial} = \frac{\int_0^{\infty} \pi D^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} \rho_p \frac{\pi D^3}{6} f(D) dD} = \frac{6}{\rho_p} \frac{\int_0^{\infty} D^2 f(D) dD}{\int_0^{\infty} D^3 f(D) dD}.$$

В соответствии с выражением для средних размеров (2.8), получим

$$S_{y\partial} = \frac{6}{\rho_p D_{32}}$$

Для монодисперсных систем с частицами диаметром D

$$S_{y\partial} = \frac{6}{\rho_p D}.$$

Т а б л и ц а 2.5

Марка порошка	АСД-1	АСД-4	АСД-6	АСД-8	ALEX
D_{32} , мкм	17.4	4.34	3.01	1.60	0.16
$S_{y\partial}$, м ² /г	0.13	0.51	0.74	1.39	13.9

В табл. 2.5 приведены значения $S_{y\partial}$ для некоторых широко используемых в составе высокоэнергетических материалов марок порошков алюминия (плотность алюминия $\rho_p=2700$ кг/м³). Микрофотографии порошков АСД-4 и ALEX приведены на рис. 1.2.

3. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ПРИ ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ АЭРОЗОЛЬНЫХ СИСТЕМ

В основу моделирования процессов движения частиц дисперсной фазы положены метод анализа размерностей и теория подобия. Поэтому прежде, чем перейти к рассмотрению вопросов, непосредственно связанных с моделированием конкретных процессов, приведем основные положения анализа размерностей и подобия [18, 19].

Если изучение того или иного сложного физического процесса связано с большими трудностями, то часто имеет смысл провести эксперимент в увеличенном или уменьшенном масштабе на модельной системе, свойства и размеры которой можно легко изменять. Замена реальной физической системы моделью основана на так называемых законах подобия, которые позволяют перенести данные, полученные на модели, на исходную физическую систему.

Было бы большой ошибкой думать, что на модели видно то же самое, что и с вертолета, находящегося на большой высоте над изучаемым крупным объектом, или в микроскоп – при наблюдении мелкого объекта. Модельный объект существенно отличен от реального. Например, через модель участка реки вода протекает значительно быстрее, чем через соответствующий участок реальной реки. Для корректного переноса результатов модельных опытов на процессы в реальных системах необходимо посредством выполнения определенных правил моделирования добиться, чтобы параметры модельного процесса находились в определенных масштабных соотношениях, определяемых из теории подобия.

3.1. ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании физических процессов одноименные характеристики реального объекта и модели должны отличаться друг от друга постоянным множителем – быть подобными. Простейшим аналогом такого условия является геометрическое подобие, например подобие треугольников, при котором стороны треугольников отличаются одна от другой по длине соответственно в n раз (рис. 3.1):

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = n.$$

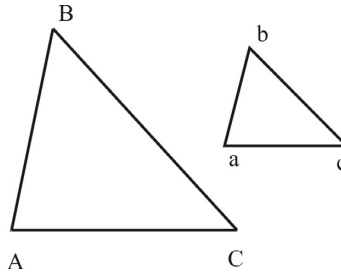


Рис. 3.1. Подобие треугольников

Основное правило моделирования сформулировано впервые М.В. Кирпичевым и А.А. Гухманом в виде теоремы (ее называют третьей теоремой подобия или теоремой Кирпичева–Гухмана).

Теорема

Подобны те явления, процессы или системы, которые описываются одинаковыми уравнениями связи и условия однозначности которых подобны.

Подобие условий однозначности (начальные и граничные условия) обеспечивается равенством определяющих критериев подобия в случае, если явления или процессы качественно одинаковы (аналогичны). Качественно одинаковыми будут процессы, математическое описание которых одинаково. Эта теорема формулирует необходимые и достаточные условия для подобия явлений, процессов или систем.

Исходя из этой теоремы, полное подобие модели реальному объекту определяется выполнением пяти условий:

1. Процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений.
2. Эти процессы описываются одними и теми же уравнениями.
3. Соблюдается геометрическое подобие.
4. Безразмерные краевые условия численно равны.
5. Определяющие критерии подобия численно равны.

Точное воспроизведение в модели численных значений всех определяющих критериев при большом их числе и при условии геометрического подобия практически невозможно.

На практике, как правило, условия полного подобия не выполняются, что вынуждает переходить на приближенное моделирование, при котором в модели воспроизводится тот же физический процесс, что и в реальном объекте, при частичном нарушении некоторых из пяти условий полного моделирования.

Как правило, прямое моделирование гидродинамических процессов, например, можно проводить с учетом одного определяющего критерия. Так, например, для задачи определения коэффициента гидравлического сопротивления пучка труб в воздушном потоке таким критерием является число Рейнольдса. В этом случае моделирование можно проводить как на воздухе, так и на жидкости. Если же необходимо определить и теплообменные характеристики данной системы, то вторым определяющим критерием будет число Прандтля, значения которого для воздуха и жидкости сильно отличаются, и применение жидкости в качестве моделирующей среды для данной задачи неприемлемо. Так обстоит дело в случае двух определяющих критериев. При увеличении их числа задача еще больше усложняется.

Возможна также ситуация, когда воспроизводится только часть физического процесса (локальное тепловое или локальное аэродинамическое моделирование). Применяют также моделирование по аналогии, когда в модели воспроизводится процесс другой физической природы, чем в образце, но описываемый одинаковыми безразмерными уравнениями (например, моделирование процесса теплопроводности и потенциального обтекания идеальной жидкостью процессом электропроводности).

Дадим некоторые определения, которые используются в теории подобия.

Симплекс (simplex) – это отношение одноименных (однородных величин), которые могут быть геометрическими, физическими или другими. Очевидно, симплекс является безразмерной величиной, то есть отвлеченным числом. Например, отношение длины L к диаметру D реактора:

$$\frac{L}{D} = K.$$

Комплекс (complex) – это безразмерная величина, составленная из разнородных величин с разной размерностью, описывающих процесс или систему.

Например, число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu},$$

где ρ (кг/м^3), μ ($\text{Па}\cdot\text{с}$) – плотность и коэффициент динамической вязкости обтекающего потока; u (м/с) – характерная скорость; D (м) – характерный размер обтекаемого тела.

Для внутренних течений в качестве D обычно выбирается диаметр канала, для задач внешнего обтекания характерным размером является диаметр миделева сечения (для сферических тел – их диаметр).

Критерий подобия (similarity criterion) – это симплекс или безразмерный комплекс (иногда его называют инвариант подобия), численное значение которого одинаково для модели и натурального объекта.

Например, для модельного и натурального реакторов отношения их длины к диаметру должны быть одинаковыми:

$$\frac{L}{D} = \frac{l}{d} = K = \text{idem},$$

где L, l – длина натурального и модельного реакторов, соответственно; D, d – диаметр натурального и модельного реакторов, соответственно.

Критерии подобия на практике определяются или в результате анализа размерностей параметров или в результате анализа дифференциальных уравнений, описывающих процесс.

3.2. ПОДОБИЕ ЯВЛЕНИЙ

В большинстве случаев, перед изготовлением дорогостоящего крупного объекта (самолет, корабль, ракетный двигатель, химический или атомный реактор, плотина и т.д.) для получения наилучших его характеристик проводятся испытания на моделях – физическое моделирование. При этом надо знать, как пересчитать результаты моделирования на натурное изделие. Если этого не знать – моделирование бесполезно. Для целей рационального моделирования основным является понятие подобных явлений.

Определение

Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих размерных параметров и притом так, что для них соответствующие безразмерные критерии подобия $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ совпадают.

Рассмотрим два подобных явления – натурное и модельное. Пусть для этих явлений имеется некоторая зависимость определяемой a и n определяющих a_1, a_2, \dots, a_n размерных величин:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (3.1)$$

Зависимость (3.1) выполняется как для натурального, так и для модельного явлений, но численные значения определяющих параметров a_1, a_2, \dots, a_n у них разные.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} a^{(H)} &= f(a_1^{(H)}, \dots, a_n^{(H)}), \\ a^{(M)} &= f(a_1^{(M)}, \dots, a_n^{(M)}), \end{aligned} \right\}$$

где индексы (H) относятся к натурному явлению, а индексы (M) – к модельному.

Поскольку зависимость (3.1) выражает определенную физическую закономерность, то функция f не должна зависеть от произвола выбора единиц измерения. Разобьем параметры a_1, a_2, \dots, a_n на две группы. В первую группу a_1, a_2, \dots, a_k ($k \leq n$) включаются величины с независимыми размерностями. Во вторую группу $a, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ входят остальные величины с размерностями, выражаемыми через размерности величин первой группы. При этом зависимость (3.1) можно представить в виде:

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

В соответствии со сформулированной ниже П–теоремой количество безразмерных критериев подобия равно

$$m = n - k,$$

то есть меньше числа размерных определяющих параметров на число параметров с независимой размерностью.

Используя П–теорему, находим для обоих явлений

$$\left. \begin{aligned} \Pi^{(H)} &= \Phi(\Pi_1^{(H)}, \dots, \Pi_m^{(H)}), \\ \Pi^{(M)} &= \Phi(\Pi_1^{(M)}, \dots, \Pi_m^{(M)}), \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где безразмерная функция Φ для модельного и натурального явлений должна быть одна и та же. Поскольку по определению подобных явлений

$$\Pi_1^{(M)} = \Pi_1^{(H)}, \Pi_2^{(M)} = \Pi_2^{(H)}, \dots, \Pi_m^{(M)} = \Pi_m^{(H)},$$

то из (3.2) следует:

$$\Pi^{(M)} = \Pi^{(H)}. \quad (3.3)$$

Соответствующая физической закономерности (3.1) зависимость между безразмерными параметрами может быть представлена в виде:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m) = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (3.4)$$

Возвращаясь снова к размерным переменным, получим из соотношения (3.3)

$$a^{(H)} = a^{(M)} \left[\frac{a_1^{(H)}}{a_1^{(M)}} \right]^\alpha \cdot \left[\frac{a_2^{(H)}}{a_2^{(M)}} \right]^\beta \dots \left[\frac{a_k^{(H)}}{a_k^{(M)}} \right]^\gamma. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) – представляет собой правило пересчета результатов измерений с подобного модельного явления на натурное, для которого непосредственные измерения могут быть затруднены. Алгоритм определения значений показателей степеней $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ приведен ниже.

Условия подобия модельного явления натурному (равенство соответствующих критериев подобия $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$ для обоих явлений) указывает, как надо выбирать определяющие размерные параметры модели $a_{k+1}^{(M)}, \dots, a_n^{(M)}$, чтобы обеспечить ее подобие натурному явлению:

$$\left. \begin{aligned} a_{k+1}^{(M)} &= a_{k+1}^{(H)} \left[\frac{a_1^{(M)}}{a_1^{(H)}} \right]^{\alpha_{k+1}} \cdot \left[\frac{a_2^{(M)}}{a_2^{(H)}} \right]^{\beta_{k+1}} \dots \left[\frac{a_k^{(M)}}{a_k^{(H)}} \right]^{\gamma_{k+1}} \\ &\dots \dots \dots \\ a_n^{(M)} &= a_n^{(H)} \left[\frac{a_1^{(M)}}{a_1^{(H)}} \right]^{\alpha_n} \cdot \left[\frac{a_2^{(M)}}{a_2^{(H)}} \right]^{\beta_n} \dots \left[\frac{a_k^{(M)}}{a_k^{(H)}} \right]^{\gamma_n} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Параметры модели $a_1^{(M)}, a_2^{(M)}, \dots, a_k^{(M)}$, имеющие независимую размерность, могут быть выбраны произвольно.

3.3. МЕТОД АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

В ряде случаев из-за сложности процесса невозможно составить его полное математическое описание в виде системы дифференциальных уравнений, а возможно лишь в самом общем виде представить зависимость между физическими величинами и геометрическими параметрами, характеризующими процесс.

Вид такой зависимости можно найти на основе анализа размерностей физических величин, входящих в уравнения. Этот метод основан на том факте, что решение физических задач не должно зависеть от выбора си-

системы единиц, которая отражается только на численных значениях коэффициентов уравнений (но не на их структуре) [18, 19].

Единицы измерений

Физические величины всегда выражаются некоторыми числами, которые получаются путем измерения – прямого или косвенного. Измерение – это сравнение физической величины с соответствующей единицей измерения. Единицы измерения разделяют на основные и производные. Основные единицы измерения задаются произвольно в виде тех или иных эталонов (искусственных или природных). Производные единицы измерения получаются из основных в соответствии с определением физической величины, которое всегда является указанием способа (алгоритма) ее измерения.

Например, скорость u , по определению, есть отношение расстояния L , пройденного за определенный промежуток времени t , к величине этого промежутка: $u=L/t$. Поэтому за единицу скорости можно выбрать отношение единицы длины к единице времени в данной системе.

Плотность, по определению, есть отношение массы m к заключающему ее объему $V \sim L^3$. Поэтому за единицу плотности можно выбрать отношение единицы массы к единице объема $\rho = m / L^3$.

Совокупность основных единиц измерения, достаточных для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений называется системой единиц измерений. Например, в механике применяется система единиц измерения СГС, в которой за единицу массы принят 1 г (1/1000 массы тщательно сохраняемого эталона из специального сплава), за единицу длины принят 1 см (1/100 длины другого эталона), за единицу времени принята 1 с (1/86400 длительности средних солнечных суток). Единицей скорости в этой системе является (см/с), единицей ускорения – (см/с²), единицей силы – (г·см/с²) или дина и т.д.

Отметим, что в определении системы единиц измерения не содержится требования ее минимальности (то есть минимальной совокупности основных единиц измерения) – требуется только достаточность. Поэтому можно рассматривать экзотические системы, например, систему единиц измерения, в которой основные единицы:

$$[m]=\text{г}, \quad [L]=\text{дм}, \quad [t]=\text{мин}, \quad [u]=\text{км/час}.$$

В принципе допускается для всех возможных величин ввести свои основные единицы измерений (энергия, сила, давление, импульс и т.д.).

Определим понятие: класс систем единиц измерения как совокупность систем единиц измерения, отличающихся между собой только величиной основных единиц измерения (но не их набором).

Система СГС, например, входит в класс систем единиц измерения, в котором основными единицами измерения являются

$$\frac{\text{г}}{M}, \frac{\text{см}}{L}, \frac{\text{с}}{T},$$

где M, L, T – отвлеченные числа, показывающие, во сколько раз уменьшаются основные единицы массы, длины, времени при переходе от исходной системе СГС к другой системе данного класса.

Этот класс систем единиц измерения обозначается MLT . Обозначение класса систем единиц измерения получается последовательной записью символов величин, единицы измерения которых приняты за основные. Одновременно эти символы обозначают кратность – во сколько раз уменьшается соответствующая единица измерения при переходе от исходной системы к другой системе данного класса.

С 1960 года введена Международная система единиц СИ (SI) – System International d’Unites в которой основными единицами измерения являются 1 кг=1000 г (полная масса эталона); единицей длины – 1 м=100 см (полная длина эталона), единицей времени – 1 с.

Таким образом, при переходе от системы СИ к системе СГС:

$$M=1000; L=100; T=1.$$

Ввиду широкого распространения системы СИ, рекомендуется при проведении измерений и расчетов использовать ее для записи всех размерных физических величин.

В технике также используется система FLT , в которой основные единицы измерения имеют вид:

$$\frac{\text{кгс}}{F}, \frac{\text{м}}{L}, \frac{\text{с}}{T},$$

где кгс или кГ – килограмм-сила (единица силы или веса).

Размерность физической величины

Различные физические величины связанными между собой определенными соотношениями, которые следуют из определения соответствующей физической величины. Например:

$$\text{плотность} = \frac{\text{масса}}{\text{объем}},$$

$$\text{скорость} = \frac{\text{расстояние}}{\text{время}},$$

$$\text{сила} = \text{масса} \cdot \text{ускорение}.$$

Если некоторые из этих величин принять за основные и установить для них какие-то единицы измерения (эталоны), то единицы измерения остальных величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения основных величин. Таким образом, все единицы измерения делятся на основные (эталоны) и производные.

На практике достаточно установить единицы измерения для трех величин. В механике удобно взять единицы длины, времени и массы. При этом единицы измерения других механических величин (сила, энергия, ускорение, скорость и т.д.) получаются автоматически из их определения.

Размерностью единицы измерения – называется выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения. Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы длины обозначается буквой L , символ единицы массы – буквой M , символ единицы времени – буквой T .

О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц.

Для определения размерности физической величины a используют символ $[a]$, введенный Максвеллом. Например, для размерности силы F будем писать

$$[F] = \frac{ML}{T^2}.$$

В системе СИ

$$[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Размерная физическая величина (dimensional physical quantity) – это физическая величина, числовое значение которой зависит от выбора системы единиц, то есть от выбора эталонов.

Размерная физическая величина выражается произведением числового значения на единицу измерения.

Безразмерная физическая величина (dimensionless physical quantity) – это физическая величина, числовое значение которой не зависит от выбора системы единиц, то есть от выбора эталонов.

Безразмерная физическая величина выражается только числом.

Отметим, что во всех приведенных примерах размерность физической величины представляется степенным одночленом. И это не случайно.

Размерность любой физической величины a всегда представляет степенной одночлен (формула Фурье)

$$[a] = P^\alpha Q^\beta R^\gamma S^\delta \dots, \quad (3.7)$$

где $PQRS\dots$ – система единиц измерения, α, β, γ – безразмерные величины.

Соотношение (3.7) строго доказывается в теории размерностей. Оно следует из естественно формулируемого утверждения: внутри данного класса все системы равноправны, то есть, среди них нет избранных, чем-то выбранных систем. Таким образом, выбор исходной системы для характеристики данного класса не имеет значения.

Это утверждение глубоко и по сути является следствием фундаментального общезначимого принципа ковариантности. Естественно возникает вопрос: имеются ли физические величины, для которых размерность не удовлетворяет формуле (3.7), то есть их размерность, например, в классе MLT выражается в виде $L \sin M$, $M \ln T$, $\exp(L/M)$ и т.д. В действительности таких величин нет, и размерность любой физической величины всегда представляет собой степенной одночлен.

Размерности наиболее часто используемых физических величин при моделировании процессов тепломассообмена (в системе СИ) приведены в Приложении 2.

3.4. II-ТЕОРЕМА

Говорят, что величины a_1, a_2, \dots, a_k имеют независимую размерность, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин (3.7).

Закономерности, определяемые в физической теории или в эксперименте, всегда можно представить в виде

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (3.8)$$

где a – определяемый параметр; a_1, \dots, a_n – определяющие параметры.

Любое исследование, в конце концов, сводится к нахождению одной или нескольких зависимостей вида (3.8).

Практическое применение теории подобия и анализа размерностей к экспериментальному и теоретическому исследованию физических процессов основано на сформулированной выше теореме Кирпичева–Гухмана, теореме Бэкингема–Федермана (вторая теорема подобия) и теореме Бэкингема (I-теорема).

Теорема Бэкингема–Федермана формулируется следующим образом.

Теорема

Любая зависимость между физическими величинами, характеризующими процесс, может быть представлена в виде взаимной зависимости между критериями подоби́я, то есть в виде обобщенного критериального уравнения типа

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n) = 0. \quad (3.9)$$

Эта теорема показывает, как обрабатывать полученные экспериментальные данные, или в какой форме можно получить решение системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс, с помощью методов теории подоби́я.

Следует отметить, что критерии подоби́я, входящие в (3.9), неравноценны. Критерии подоби́я, составленные из физических величин, входящих в краевые условия (в условия однозначности) – называются определяющими. Критерии, составленные из физических величин, не являющихся необходимыми для однозначной характеристики данного процесса и, в свою очередь, зависящие от этих условий, называются определяемыми.

Функциональную зависимость (3.9) удобнее представить в таком виде, чтобы после нахождения значений определяющих критериев можно было бы найти значение определяемого критерия и затем из него – значение искомой физической величины. Таким образом, если определяемый критерий обозначим через Π_1 , то

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n), \quad (3.10)$$

где $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n$ – определяющие критерии подоби́я.

Частным случаем второй теоремы подоби́я является Π –теорема – центральное (и по существу, единственное содержательное) утверждение анализа размерностей.

Теорема

Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной, вообще говоря, величины от размерных же определяющих параметров. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа размерных определяющих параметров на количество определяющих параметров с независимой размерностью.

Таким образом, зависимость (3.8) можно представить в виде уравнений (3.9) или (3.10), которые можно привести к виду:

$$\Pi = \Phi(\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n), \quad (3.11)$$

где Π – определяемый критерий подобия; $\Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n$ – определяющие критерий подобия.

Замена параметров с зависимыми размерностями a, a_{k+1}, \dots, a_n в уравнении (3.8) на безразмерные критерии $\Pi, \Pi_{k+1}, \Pi_{k+2}, \dots, \Pi_n$ производится в соответствии с формулой размерности (3.7), которая для физической закономерности (3.8) имеет вид:

$$[a] = [a_1]^\alpha \cdot [a_2]^\beta \cdot \dots \cdot [a_k]^\gamma.$$

При этом критерии подобия рассматриваемого процесса определяют следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{a}{a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \cdot \dots \cdot a_k^\gamma}, \\ \Pi_{k+1} &= \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_{k+1}} \cdot a_2^{\beta_{k+1}} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_{k+1}}}, \\ \Pi_{k+i} &= \frac{a_{k+i}}{a_1^{\alpha_{k+i}} \cdot a_2^{\beta_{k+i}} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_{k+i}}}, \dots, \\ \Pi_n &= \frac{a_n}{a_1^{\alpha_n} \cdot a_2^{\beta_n} \cdot \dots \cdot a_k^{\gamma_n}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с Π -теоремой число аргументов в искомой зависимости (3.8), записанной в безразмерном виде (3.11), сокращается на число, равное числу определяющих размерных параметров с независимой размерностью.

На практике число параметров с независимой размерностью обычно совпадает с числом основных единиц используемой системы. Для систем класса *MLT* это число равно трем. Для тепловых задач добавляется еще один параметр – градус Кельвина (К).

Π -теорема имеет большое значение при проведении экспериментальных исследований. При этом число переменных уменьшается на число использованных единиц измерения (1, 2, 3, 4 и более), что существенно упрощает условия проведения эксперимента.

Например, для нахождения зависимости некоторой величины a от одного определяющего параметра $f(a_i)$ необходимо провести измерения функции $f(a_i)$ для нескольких значений аргумента в заданном диапазоне его изменения (рис. 3.2). Если количество необходимых значений a_i рав-

но 10, то необходимо провести 10 измерений. Если величина a зависит от n параметров, то для полного исследования функции $a=f(a_1, \dots, a_n)$ необходимо провести 10^n измерений. Согласно П-теореме, решение задачи сводится к нахождению функции $m=n-k$ безразмерных аргументов, для решения которой достаточно провести 10^{n-k} измерений (в 10^k раз меньше).

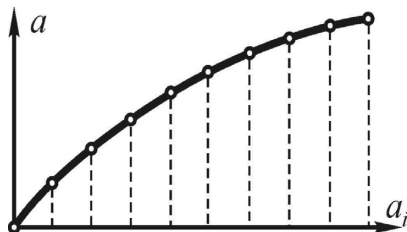


Рис. 3.2. Экспериментальное определение зависимости $a=f(a_i)$

Трудоемкость определения искомой функции сокращается на столько порядков, сколько среди определяющих параметров имеется величин с независимыми размерностями.

3.5. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ В ДИНАМИКЕ АЭРОЗОЛЬНЫХ СИСТЕМ

Систему критериев подобия, описывающих исследуемый процесс, можно получить двумя способами — анализом дифференциальных уравнений процесса или методом анализа размерностей [18, 19].

Метод анализа дифференциальных уравнений

Использование метода анализа дифференциальных уравнений для получения критериев подобия возможно, если известен рассматриваемый физический процесс (который, собственно, и описывается соответствующими условиями).

Выведем критерий механического подобия методом анализа дифференциальных уравнений. Рассмотрим две подобные механические системы — движущиеся тела. Их движение подчиняется второму закону Ньютона, выраженному в форме дифференциального уравнения

$$F = m \frac{du}{dt}, \quad (3.12)$$

где m — масса тела; F — движущая сила; u — скорость тела.

Запишем это уравнение для двух подобных систем:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 \frac{du_1}{dt_1}, \\ F_2 &= m_2 \frac{du_2}{dt_2}. \end{aligned} \right\}$$

По условию подобия физические величины одной системы можно выразить через величины другой (для соответствующих точек) с помощью констант подобия:

$$C_F = \frac{F_2}{F_1}, \quad C_m = \frac{m_2}{m_1}, \quad C_u = \frac{u_2}{u_1}, \quad C_t = \frac{t_2}{t_1}. \quad (3.13)$$

Выражая переменные второй системы через соответствующие переменные первой системы, и подставляя в исходное уравнение, получим:

$$C_F F_1 = C_m \frac{C_u}{C_t} m_1 \frac{du_1}{dt_1}.$$

Уравнение будет тождественно исходному только при условии равенства коэффициентов:

$$C_F = C_m \frac{C_u}{C_t} \quad \text{или} \quad \frac{C_F C_t}{C_m C_u} = 1.$$

Заменяя константы подобия соотношениями (3.13), получим:

$$\frac{F_1 t_1}{m_1 u_1} = \frac{F_2 t_2}{m_2 u_2} = \frac{F t}{m u} = \text{idem} = \text{Ne},$$

где Ne – критерий механического подобия (критерий Ньютона).

Формально метод анализа дифференциальных уравнений сводится к обезразмериванию системы уравнений. Приведем уравнение движения (3.12) к безразмерному виду. Для этого введем масштабы силы F_* , массы m_* , скорости u_* и времени t_* . Уравнение (3.12) в безразмерных переменных $\bar{F} = F / F_*$, $\bar{m} = m / m_*$, $\bar{u} = u / u_*$, $\bar{t} = t / t_*$ имеет вид:

$$F_* \bar{F} = m_* \bar{m} \frac{u_*}{t_*} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} \quad \text{или} \quad \bar{F} = A \bar{m} \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}}.$$

Безразмерный коэффициент при производной

$$A = \frac{m_* u_*}{t_* F_*}$$

является искомым критерием подобия (критерием Ньютона):

$$Ne = A^{-1} = \frac{Ft}{\mu u}.$$

Критерий Ньютона можно представить в другой форме при замене времени t отношением характерного размера D к скорости u :

$$Ne = \frac{FD}{\mu u^2}.$$

Этот критерий является основным критерием механического подобия, который применим и для оценки критериев подобия гидромеханических процессов. При этом в качестве общей силы F , действующей на систему, необходимо подставить выражение для силы тяжести, трения, давления, сопротивления среды и т.д.

Частные выражения, соответствующие различным критериям гидромеханического подобия, можно получить следующим образом.

- Для процессов, идущих при действии силы тяжести, в критерий Ньютона подставляем вместо F выражение для силы тяжести $F = mg$:

$$\Pi_1 = \frac{mgD}{\mu u^2} = \frac{gD}{u^2}.$$

Таким образом, получили критерий Фруда

$$Fr = \frac{1}{\Pi_1} = \frac{u^2}{gD},$$

который характеризует соотношение сил инерции и тяжести.

- В случае движения вязкой жидкости в потоке возникает сила трения, которая по закону Ньютона равна:

$$F = \mu D^2 \frac{du}{dD},$$

где μ – коэффициент динамической вязкости; D^2 – площадь трения; du/dD – градиент скорости.

Подставим выражение для силы трения в критерий Ne , а также выразим массу m через объем D^3 и плотность ρ среды ($m = \rho D^3$):

$$\Pi_2 = \frac{\mu D^2 (du/dD) D}{\rho D^3 u^2} = \frac{\mu}{\rho u^2} \cdot \frac{du}{dD}.$$

В результате интегрирования уравнения

$$\Pi_2 \int_0^D dD = \frac{\mu}{\rho} \int_0^u \frac{du}{u^2}$$

получим

$$\Pi_2 D = \frac{\mu}{\rho u} \text{ или } \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho u D} = \text{Re}^{-1},$$

где Re – число Рейнольдса, которое определяет соотношение между силами инерции и трения в движущейся жидкости (или газе).

• При движении потока под действием разности давления между двумя некоторыми точками силу F в критерии Ньютона можно заменить силой гидростатического давления Δp , действующий на площадку D^2 , а массу – соотношением $m = D^3 \rho$:

$$\Pi_3 = \frac{\Delta p \cdot D^2 \cdot D}{\rho D^3 u^2} = \frac{\Delta p}{\rho u^2} = \text{Eu},$$

где Eu – число Эйлера, которое характеризует соотношение сил давления и сил инерции в подобных потоках.

Алгебраический метод Рэлея (метод анализа размерностей)

При исследовании сложных или новых процессов и явлений, для которых полную систему дифференциальных уравнений получить не всегда представляется возможным, используют метод анализа размерностей. Данный метод позволяет выразить общую функциональную зависимость для любого исследуемого процесса в виде уравнения связи между строго определенным числом безразмерных комплексов (критериев подобия), состоящих из физических величин с определенными размерностями. Метод анализа размерностей является универсальным и может быть применим также и к задачам, для которых система дифференциальных уравнений известна.

При использовании метода анализа размерностей основным и первоначальным этапом в постановке задачи является выбор модели и схематизация свойств искомого решения. Опыт показывает, что постановка задачи и выбор существенных определяющих размерных параметров представляют собой наибольшую трудность.

Успешное решение задачи зависит от правильного выбора физических величин, влияющих на процесс, что полностью определяется физи-

ческой интуицией и опытом инженера–исследователя. Не пропустить важные определяющие параметры и не включить в их число малосущественные параметры – вот главная цель анализа задачи.

Неучет, например, какой-либо существенной величины (ориентация трубы при течении тяжелой жидкости, например) может привести к неверным критериальным уравнениям. То же самое будет и при выборе несущественных величин (учет силы тяжести при течении легкого газа в трубе, например). Отметим, что при большом числе размерных параметров задачи трудно выбрать безразмерные комплексы, имеющие ясный физический смысл.

Для оценки значимости некоторой размерной величины при описании конкретного физического процесса можно рекомендовать следующий прием. Как правило, удачно составленные критерии подобия представляют собой отношения конкурирующих сил. Если величина критерия подобия стремится к нулю (или к бесконечности), то соответствующими силами можно пренебречь.

Например, число Рейнольдса определяет соотношение между силами инерции и силами трения в движущейся жидкости. При $Re \rightarrow 0$ силами инерции можно пренебречь (ползущее течение), а при $Re \rightarrow \infty$ можно не учитывать силы трения, то есть коэффициент динамической вязкости (течение идеальной жидкости).

Рассмотрим алгоритм получения системы критериев подобия методом Рэлея на примере гравитационного осаждения деформируемой частицы (капли или пузырька) в вязкой среде. Эта задача формулируется как определение скорости движения частицы u_p в зависимости от характеристик частицы и среды.

Физический анализ рассматриваемой задачи показывает, что на скорость осаждения u_p частицы влияют следующие размерные параметры:

- ускорение свободного падения g ;
- размер частицы D , плотность ρ_p , коэффициент динамической вязкости μ_p и коэффициент поверхностного натяжения σ вещества частицы;
- плотность ρ , коэффициент динамической вязкости μ и скорость u несущей среды.

Размерности этих величин в системе СИ следующие:

$$[D]=\text{м}; [\rho_p]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; [\rho]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; [\mu_p]=\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}; [\mu]=\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}; [u_p]=\text{м/с};$$

$$[u]=\text{м/с}; [g]=\text{м/с}^2; [\sigma]=\text{кг/с}^2.$$

Поскольку взаимодействие частицы с несущей средой определяется относительной скоростью движения частицы, а не значениями скоростей u и u_p по отдельности, то заменим скорости частицы u_p и среды u на величину $\Delta u = u - u_p$, $[\Delta u] = \text{м/с}$.

Таким образом, имеем восемь размерных параметров, описывающих процесс. Число первичных размерностей равно трем (κ_2 , m , c). Согласно П-теореме, число безразмерных комплексов, характеризующих процесс, равно пяти:

$$k = m - n = 8 - 3 = 5.$$

Искомую величину скорости осаждения частицы можно представить в виде степенного одночлена:

$$\Delta u = C \cdot D^{x_1} \rho^{x_2} \rho_p^{x_3} \mu^{x_4} \mu_p^{x_5} g^{x_6} \sigma^{x_7}, \quad (3.14)$$

где C – безразмерная константа.

Подставим размерности соответствующих величин в (3.14):

$$\left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right] = [\text{м}]^{x_1} \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]^{x_2} \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]^{x_3} \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right]^{x_4} \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right]^{x_5} \cdot \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]^{x_6} \cdot \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}^2} \right]^{x_7}$$

Поскольку размерности левой и правой частей уравнения (3.14) должны быть одинаковы, суммы степеней основных единиц в левой и правой частях должны быть одинаковы. При этом получается система алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [\text{м}]: 1 &= x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + x_6, \\ [\text{с}]: -1 &= x_4 - x_5 - 2x_6 - 2x_7, \\ [\kappa_2]: 0 &= x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7. \end{aligned} \right\}$$

Совместное решение этой системы дает следующие соотношения между показателями степеней

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + x_7 + 3x_6, \\ x_2 &= -1 - x_3 + x_7 + 2x_6, \\ x_4 &= 1 - x_5 - 2x_6 - 2x_7. \end{aligned} \quad (3.15)$$

После подстановки связей (3.15) в уравнение (3.14), получим:

$$\frac{\rho(\Delta u)D}{\mu} = C \cdot \left(\frac{\rho_p}{\rho} \right)^{x_3} \cdot \left(\frac{\mu_p}{\mu} \right)^{x_5} \cdot \left(\frac{D^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right)^{x_6} \cdot \left(\frac{D \rho \sigma}{\mu^2} \right)^{x_7}. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) можно представить в следующем виде, переобозначив показатели степеней:

$$\Pi_0 = C \cdot \Pi_1^{Y_1} \Pi_2^{Y_2} \Pi_3^{Y_3} \Pi_4^{Y_4}.$$

В уравнение (3.16) входят следующие безразмерные комплексы и симплексы.

- Число Рейнольдса относительного движения частицы и несущей среды

$$\Pi_0 = \frac{\rho |\Delta u| D}{\mu} = \text{Re},$$

характеризующее отношение сил инерции сил трения в движущейся среде.

- Отношение плотностей

$$\Pi_1 = \frac{\rho_p}{\rho} = \bar{\rho}.$$

- Отношение коэффициентов динамической вязкости

$$\Pi_2 = \frac{\mu_p}{\mu} = \bar{\mu}.$$

Безразмерные комплексы Π_3 , Π_4 представляют собой комбинации известных критериев подобия:

$$\Pi_3 = \frac{D^3 \rho^2 g}{\mu^2} = \frac{D^3 \rho^2 g}{\mu^2} \cdot \frac{(\Delta u)^2}{(\Delta u)^2} = \left(\frac{\rho (\Delta u) D}{\mu} \right)^2 \left(\frac{g D}{(\Delta u)^2} \right) = \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}},$$

$$\Pi_4 = \frac{D \rho \sigma}{\mu^2} = \frac{D \rho \sigma}{\mu^2} \cdot \frac{(\Delta u)^2 \rho D}{(\Delta u)^2 \rho D} = \left(\frac{\rho (\Delta u) D}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\sigma}{\rho (\Delta u)^2 D} \right) = \frac{\text{Re}^2}{\text{We}}.$$

Таким образом, комплексы Π_3 , Π_4 наряду с Re содержат еще два критерия подобия – число Фруда и число Вебера.

- Число Фруда

$$\text{Fr} = \frac{(\Delta u)^2}{g D},$$

характеризующее отношение сил инерции и сил тяжести.

- Число Вебера

$$\text{We} = \frac{\rho (\Delta u)^2 D}{\sigma},$$

характеризующее отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

Число Вебера играет важнейшую роль при анализе деформации и дробления капель и пузырьков в двухфазных потоках. При движении капель жидкости в потоке газа в качестве характерной плотности при записи числа Вебера используется плотность газовой фазы.

При движении пузырьков газа в жидкости формально в критерий Вебера должна входить плотность несущей среды, то есть плотность жидкости. Однако в ряде работ при записи числа Вебера также используется плотность газовой фазы. Как отмечает Р.И. Нигматулин, для случая капель это вполне понятно, но для случая пузырьков кажется на первый взгляд парадоксальным [8]. Тем не менее, данный факт подтверждается экспериментально большей устойчивостью в ударных волнах водородных и гелиевых пузырьков по сравнению с пузырьками азота и воздуха.

Таким образом, уравнение (3.16) представляет собой критериальное уравнение вида:

$$Re = C \cdot (\bar{\rho})^{z_1} (\bar{\mu})^{z_2} (Fr)^{z_3} (We)^{z_4},$$

где C, z_1, z_2, z_3, z_4 – константы, которые определяются при проведении соответствующих экспериментов.

Полученная система, включающая пять критериев подобия, является необходимой и достаточной для анализа движения деформируемых частиц дисперсной фазы в поле массовых сил.

В литературе используют и другие критерии подобия рассматриваемого процесса, которые получаются путем комбинирования рассмотренных выше критериев подобия.

- Число Бонда

$$Bo = \frac{gD^2|\rho_p - \rho|}{\sigma} = \frac{We}{Fr}|\bar{\rho} - 1|,$$

где g – ускорение частицы, в частности, ускорение свободного падения.

Число Бонда определяет соотношение между силами инерции и силами поверхностного натяжения.

- Число Архимеда

$$Ar = \frac{gD^3\rho(\rho - \rho_p)}{\mu^2} = \frac{Re^2}{Fr}(\bar{\rho} - 1),$$

используемое в задачах движения частиц жидкости и газа в неоднородной среде.

- Число Лапласа

$$La = \frac{\sigma \rho D}{\mu^2} = \frac{Re^2}{We},$$

характеризующее отношение сил поверхностного натяжения и диссипативных сил (сил трения).

- Число Онезорге

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma \rho D}} = \frac{1}{\sqrt{La}},$$

характеризующее отношение сил поверхностного натяжения и диссипативных сил (сил трения).

- Число Моргана

$$Mo = \frac{g \mu^4 (\rho - \rho_p)}{\rho^2 \sigma^3} = \frac{We^3}{Fr^2 \cdot Re^4},$$

характеризующее форму пузырьков и капель, движущихся внутри жидкости.

3.6. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

С использованием рассмотренных выше методов можно получить критерии подобия для более сложных задач динамики аэрозольных систем.

Растекание капли по поверхности

После помещения капли жидкости на горизонтальную поверхность происходит ее растекание, сопровождающееся динамическими процессами, в ходе которых меняется скорость движения линии трехфазного контакта (газ – жидкость – твердое тело), форма капли и краевой угол смачивания θ (рис. 3.3).



Рис. 3.3. Растекание капли по твердой поверхности

В зависимости от скорости столкновения капли с поверхностью, в общем случае, возможны два сценария развития процесса – растекание капли по твердой поверхности с образованием тонкой пленки жидкости (при малых скоростях столкновения), или разрушение капли с образованием и выбросом вторичных более мелких капель (при больших скоростях столкновения).

Процесс динамического взаимодействия капли с твердой поверхностью определяют следующие критерии подобия.

- Число Рейнольдса, включающее скорость движения линии трехфазного контакта u_l :

$$Re = \frac{\rho u_l D}{\mu},$$

где μ , ρ – коэффициент динамической вязкости и плотность жидкости; D – диаметр эквивалентной сферической капли.

- Число капиллярности

$$Ca = \frac{\mu u_l}{\sigma},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость – газ.

- Число Вебера, включающее скорость столкновения капли с твердой поверхностью u :

$$We = \frac{\rho u^2 D}{\sigma}.$$

- Число Фруда

$$Fr = \frac{u_l^2}{gD},$$

где g – ускорение свободного падения.

Столкновение частицы с преградой

В гидродинамике газозвесей для определения коэффициента захвата при обтекании преграды дисперсным потоком вводится следующий критерий подобия – число Стокса, который является соотношением между кинетической энергией взвешенных частиц (диаметром D , плотностью ρ_p и скоростью u) и энергией их взаимодействия с дисперсионной средой:

$$\text{Stk} = \frac{\rho_p D^2 u}{18\mu d}, \quad (3.17)$$

где d – диаметр сферической преграды; μ – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды.

Выражение (3.17) применимо для совокупности монодисперсных частиц. Для полидисперсных частиц используется осредненное число Стокса:

$$\bar{\text{Stk}} = \frac{\rho_p u}{18\mu d} \int_0^\infty D^2 f(D) dD = \frac{\rho_p u}{18\mu d} D_{20}^2,$$

где $f(D)$ – дифференциальная функция счетного распределения частиц по размерам; D_{20}^2 – среднеквадратичный диаметр частиц, определяемый уравнением:

$$D_{20} = \left(\int_0^\infty D^2 f(D) dD \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Число Стокса позволяет предсказать поведение частиц взвеси, когда дисперсионная среда будет огибать преграду (рис. 3.4). Если $\text{Stk} \gg 1$, то частицы взвеси будут двигаться прямолинейно, сталкиваясь с преградой, а при $\text{Stk} \ll 1$ частицы будут огибать преграду вместе с потоком дисперсионной среды.

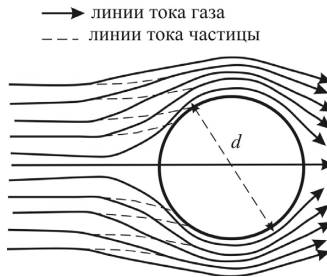


Рис. 3.4. Обтекание сферической преграды потоком газовой взвеси

Взаимодействие капель при взаимных столкновениях

При движении полидисперсных капель в двухфазном потоке происходят их взаимные столкновения, поскольку частицы разных размеров движутся с разными скоростями. Схема столкновения двух капель при-

ведена на рис. 3.5. Назовем крупную каплю диаметром D_1 «мишенью», а мелкую каплю диаметром D_2 – «снарядом».

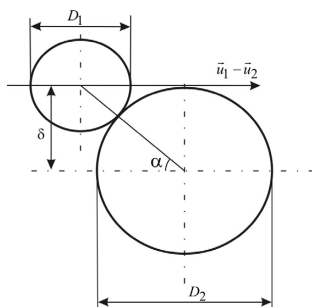


Рис. 3.5. Схема столкновения капель

При столкновениях капли могут сливаться с образованием общей крупной кали, дробиться на более мелкие фрагменты, а также приобретать вращательное движение.

Процесс взаимодействия определяется следующими размерными параметрами:

- диаметры капель D_1 , D_2 (предположим, что $D_1 < D_2$);
- скорости капель \vec{u}_1 , \vec{u}_2 ;
- прицельное расстояние (эксцентриситет столкновения) $\delta = 0.5(D_1 + D_2) \sin \alpha$ (рис. 3.5);
- коэффициент динамической вязкости жидкости μ (предположим, что капли состоят из одной и той же жидкости);
- коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ .

При нецентральных столкновениях система двух взаимодействующих капель обладает моментом импульса:

$$|\vec{M}| = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| \delta,$$

где m_1 , m_2 – массы капель.

Для данного процесса можно получить два критериальных уравнения

$$\Phi = C_1 \cdot (\gamma)^{x_1} (\text{Re})^{x_2} (\text{We})^{x_3},$$

$$\Omega = C_2 \cdot (\gamma)^{y_1} (\text{Re})^{y_2} (\text{We})^{y_3},$$

в которых константы C_1 , C_2 и показатели степеней определяются в результате экспериментов.

В этих уравнениях определяемыми критериями подобия являются параметр коагуляции и дробления Φ и нормализованный момент импульса Ω .

Параметр коагуляции и дробления представляет собой математическое ожидание отношения изменения массы капли – «мишени», вызванного взаимодействием капель диаметрами D_1 и D_2 , к общей массе столкнувшихся с ней капель – «снарядов».

Нормализованный момент импульса определяет условия дробления за счет центробежных сил вращающейся системы капель, образовавшейся при столкновении. Нормализованный момент импульса Ω определяется уравнением:

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{(D_e/2)^{3.5} \sqrt{\rho \sigma}},$$

где $D_e = \sqrt[3]{D_1^3 + D_2^3}$ – диаметр эквивалентной сферической капли, объем которой равен сумме объемов взаимодействующих капель.

Определяющими процесс взаимодействия капель при столкновении являются следующие критерии подобия.

- Отношение диаметров капель

$$\gamma = \frac{D_2}{D_1}.$$

- Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho_p |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| D_1}{\mu}.$$

- Число Вебера

$$\text{We} = \frac{\rho_p |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| D_1}{\sigma}.$$

Число Рейнольдса и Вебера для данной задачи определены для процесса движения капли – «мишени» в объеме капли – «снаряда».

4. ДВИЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ЧАСТИЦЫ

Частицы дисперсной фазы всегда находятся в некоторой несущей среде. В частности, аэрозоль – это взвесь твердых или жидких частиц в газообразной среде, гидрозоль – это взвесь твердых частиц в жидкости. Если несущая среда движется, то частицы аэрозоля или гидрозоля также будут двигаться, увлекаясь этой средой. В качестве примеров можно привести движение частиц пыли в организме человека (нос, носоглотка, легкие), распространение автомобильных выхлопных газов, содержащих аэрозоли, под действием ветровой нагрузки, осаждение облака токсичных капель при авариях ракет, движение капель из аэрозольного баллончика и т.д. Однако частицы дисперсной фазы могут двигаться и в неподвижной среде под действием силы тяжести, силы Архимеда, электрических и магнитных сил.

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

В практических задачах рассматриваются, как правило, не отдельные частицы, а облако частиц дисперсной фазы, включающее сотни и миллионы отдельных частиц. Однако в случае их малой концентрации движение каждой частицы не зависит от соседних частиц. И тогда, зная траекторию и скорости отдельных частиц, можно рассчитать поведение всей дисперсной системы. Условием применимости данного подхода является низкое значение объемной концентрации частиц ($C_v < 0.02$) [1].

При движении высококонцентрированных дисперсных систем частицы взаимодействуют друг с другом, и их суммарное движение будет отличаться от движения индивидуальной частицы. В качестве примера можно привести резкое ускорение гравитационного осаждения облака частиц при их сгущении. Этот эффект используется, в частности, при очистке воды от угольной взвеси на открытых разрезах.

Гидрогазодинамика гетерогенных сред отличается от классической механики “чистого” газа наличием в газовом потоке жидких или твердых (конденсированных) частиц различных размеров, которые могут обмениваться с газом кинетической и тепловой энергией. Массовый расход конденсированных частиц может в несколько раз превосходить расход газа и существенно меняться по тракту течения за счет перехода их из одного агрегатного состояния в другое (испарение, конденсация, горение частиц). Поскольку механизм движения многофазных сред заключается в

увлечении вязкими силами газа инертных частиц и сопровождается теплообменом между газом и частицами, образованием новых частиц, их ростом, коагуляцией, дроблением, то решение задачи о движении двухфазных течений является весьма сложной проблемой.

При теоретическом исследовании двухфазных потоков в зависимости от массовой концентрации и дисперсности частиц конденсированной фазы используются, в основном, два подхода:

Первый (упрощенный) подход состоит в том, что не учитывается влияние динамического и теплового запаздывания частиц на параметры несущего потока. При этом по заранее рассчитанным параметрам потока в исследуемом поле течения рассчитываются траектории частиц с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений движения последних (*траекторный подход*). Данный подход применяется для невысоких значений объемной концентрации частиц в потоке $C_v < 0.02 \div 0.05$.

Второй подход основан на введении понятия многоскоростной многотемпературной взаимопроникающей среды, то есть среды, в каждой точке которой имеется столько скоростей и температур, из какого количества фаз состоит среда [7]. Двухфазная среда при этом рассматривается как совокупность двух взаимопроникающих континуумов – “чистого” газа и “газа” частиц, имеющего собственные значения скорости, температуры, “плотности” (концентрации частиц), но не имеющего давления. Такая схематизация в настоящее время является основой большинства современных моделей расчета многофазных потоков [6-10].

4.2. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

При движении тела в жидкости или газе оно всегда испытывает сопротивление со стороны среды, то есть ускоряется или замедляется под действием относительного движения тела и среды. Сила сопротивления зависит как от свойств среды (плотности, вязкости), так и от скорости и формы тела.

Впервые закон сопротивления для движущихся тел был получен Ньютоном в виде

$$\vec{F}_s = -C_D S_m \frac{\rho |U| \vec{U}}{2}, \quad (4.1)$$

где \vec{F}_s – сила сопротивления;

ρ – плотность потока;
 S_m – площадь миделева сечения тела (максимальная площадь сечения тела в плоскости, перпендикулярной направлению его движения);

$\vec{U} = \vec{u}_p - \vec{u}$ – вектор скорости относительного движения тела и среды;

\vec{u}_p, \vec{u} – векторы скорости тела и несущей среды;

C_D – безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела и режима движения.

Ньютон предположил, что лобовая часть движущегося тела испытывает множество ударов со стороны жидкости или газа, непрерывно тормозящих его движение. Отсюда ясно, что сопротивление пропорционально числу и массе частиц, набегающих на тело, то есть пропорционально плотности среды и поперечному размеру тела. Скорость же отражает как число ударов о тело, так и силу каждого удара, то есть сопротивление должно быть пропорциональным квадрату скорости.

Многочисленные исследования закона сопротивления проводились в течение ряда лет в разных странах ввиду важности этого закона (в частности, для баллистики и механики). Оказалось, что универсальную константу C_D получить не удастся, так как она должна зависеть от скорости движения и вязкости несущей среды. Впервые разрешил эту проблему английский ученый Рейнольдс (1883 г.), введя в практику критерий – число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho |U| D}{\mu}, \quad (4.2)$$

где D – характерный размер тела,

μ – коэффициент динамической вязкости несущей среды.

Число Рейнольдса – это основной безразмерный критерий подобия в гидромеханике и представляет собой отношение инерционных сил, связанных с ускорением или замедлением текущей среды вблизи тела, к силам трения, возникающим за счет вязкости среды. Число Рейнольдса полностью определяет характер течения вокруг тела и, следовательно, закон сопротивления. В зависимости от величины Re можно выделить три режима течения – ламинарный ($Re=0 \div 1$), переходный ($Re=1 \div 700$) и турбулентный ($Re>700$). Для шарообразной частицы картины обтекания при этих режимах приведены на рис. 4.1.

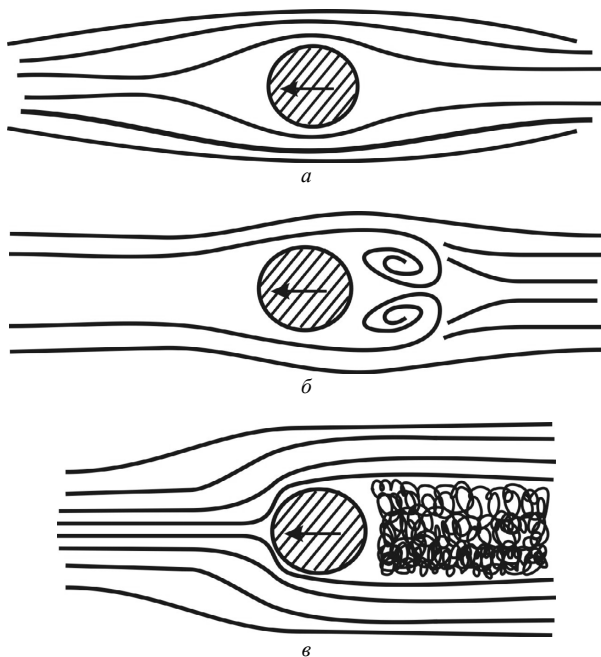


Рис. 4.1. Режимы обтекания сферической частицы:
 $a - Re < 1$; $б - Re = 1 \div 700$; $в - Re > 700$

Если выразить коэффициент динамической вязкости μ через коэффициент кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

то число Рейнольдса примет вид

$$Re = \frac{|U|D}{\nu}.$$

Приведем значения ρ , μ , ν для воды и воздуха при температуре $+20^\circ\text{C}$.

Т а б л и ц а 4.1

Физические свойства воды и воздуха

Параметр	Вода	Воздух
ρ , $\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$	10^3	1.205
μ , $\text{Па}\cdot\text{с}$	10^{-3}	$1.81 \cdot 10^{-5}$
ν , $\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$	10^{-6}	$1.5 \cdot 10^{-5}$

4.3. КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Уравнение, описывающее сопротивление среды движению частиц, зависит от типа потока и, следовательно, от числа Рейнольдса. Обработка многочисленных опытных данных по коэффициенту сопротивления твердой сферы C_D в уравнении Ньютона (4.1) была проведена Рэлеем и представлена в виде так называемой стандартной кривой сопротивления на рис. 4.2. В некотором диапазоне Re зависимость $C_D(Re)$ можно определить аналитически ($Re < 1$), в других случаях C_D рассчитывается по эмпирическим формулам, полученным аппроксимацией опытных данных.

При числах Рейнольдса $Re < 1$ (ламинарный режим течения) коэффициент сопротивления твердой сферической частицы определяется формулой

$$C_D = \frac{24}{Re}. \quad (4.3)$$

Эта формула носит название Стоксовской зависимости для коэффициента сопротивления. Формула Стокса получена аналитически; частицы, подчиняющиеся ей, называются Стоксовскими (малые частицы, которые движутся с малой скоростью в сильновязкой среде). Сила сопротивления для таких частиц получается подстановкой (4.3) в (4.1):

$$F_s = 3\pi\mu UD. \quad (4.4)$$

В диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 1 \div 700$ реализуется режим, который называется переходным. Для описания зависимости $C_D(Re)$ в этом режиме используется целый ряд эмпирических зависимостей (аппроксимаций кривой Рэлея):

– формула Аллена:

$$C_D = \frac{13}{\sqrt{Re}};$$

– формула Клячко:

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}};$$

– формула Аэрова – Годеса:

$$C_D = \left(0.325 + \sqrt{0.124 + \frac{24}{Re}}\right)^2.$$

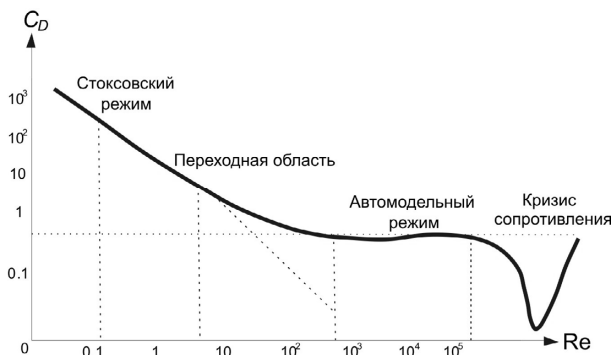


Рис. 4.2. Стандартная кривая для коэффициента сопротивления твердой сферы

Известно множество других выражений для коэффициента сопротивления C_D [10] в переходном режиме, которые практически дают одинаковые результаты.

При $Re=700 \div 3 \cdot 10^5$ (турбулентный режим течения) коэффициент сопротивления $C_D = \text{const}$. В частности, для твердой сферы $C_D = 0.44$. Этот режим обтекания называют также автомоделным.

При $Re > 3 \cdot 10^5$ коэффициент сопротивления резко уменьшается почти в пять раз (эффект Эйфеля), что связано с турбулизацией пограничного слоя на поверхности тела. Это явление падения коэффициента сопротивления называется кризисом сопротивления.

4.4. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЧАСТИЦ НА ИХ ДВИЖЕНИЕ

Форма частиц дисперсной фазы может отличаться от сферической (снежинки, многогранники, эллипсоиды, пластины, волокна и так далее). Для расчета движения таких частиц вводится эквивалентный диаметр, который равен диаметру сферы с объемом V_p , равным объему данной частицы:

$$D_e = \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}}.$$

В частности, для частицы в форме куба со стороной a :

$$D_e = \sqrt[3]{\frac{6a^3}{\pi}} = 1.24a.$$

Для стержня диаметром d и длиной l :

$$D_e = \sqrt[3]{\frac{6\pi d^2 l}{4\pi}} = 1.145 \sqrt[3]{d^2 l}.$$

При расчете движения несферических частиц в соответствующие уравнения вместо D подставляется D_e . Следует отметить, что при обтекании частиц, форма которых отличается от сферической, данный подход дает только оценочный результат. Для уточнения необходимо проводить эксперименты со сферической и заданной частицей (например, по гравитационному осаждению в вязкой жидкости) и вводить поправочный множитель (коэффициент геометрической формы).

При движении капель (или пузырьков), особенно крупных, возможна их деформация за счет ускорения и взаимодействия с набегающим потоком. В результате они теряют сферическую форму (сплющиваются) и при определенных условиях дробятся на более мелкие фрагменты. В результате сплющивания частиц возрастает сопротивление среды, и капли имеют более низкую скорость, чем сферические частицы. Этим эффектом можно пренебречь для свободно падающих капель диаметром менее 100 мкм. На рис. 4.3 приведены опытные данные по стационарной скорости гравитационного осаждения дождевых капель разных размеров и расчетные данные для твердых сфер той же плотности.

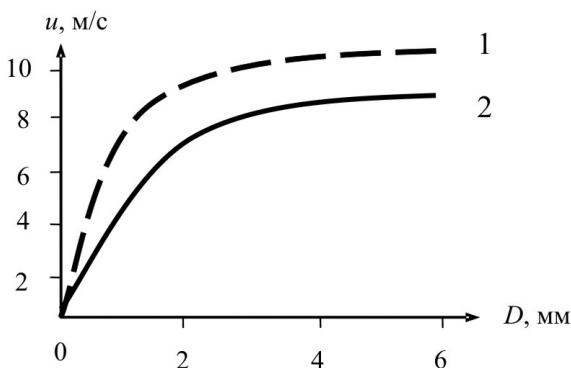


Рис. 4.3. Зависимость скорости осаждения капель от их размера:
1 — твердая сфера; 2 — капля

Капли воды диаметром свыше 6 мм во время падения дробятся на более мелкие. Критерием степени деформации и дробления капель в потоке является безразмерное число Вебера:

$$We = \frac{\rho U^2 D}{\sigma},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Для воды при температуре $+20^\circ\text{C}$ величина $\sigma = 72.53 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Физический смысл числа Вебера – отношение сил динамического напора к силам поверхностного натяжения.

Зависимость степени деформации капли от We имеет вид [6]

$$\frac{D_m}{D_0} = 1 + 0.03 We,$$

где D_m – диаметр миделева сечения деформированной капли, D_0 – диаметр исходной капли (рис. 4.4).

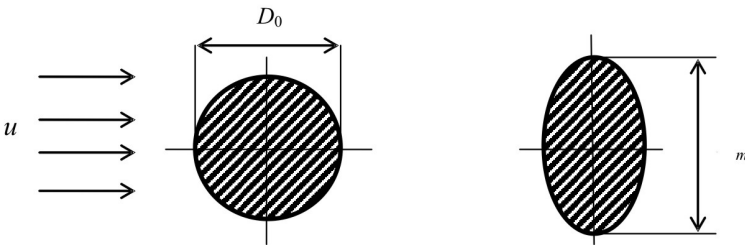


Рис. 4.4. Схема деформации капли в потоке

При числах Вебера, превышающих некоторое критическое значение $We \geq We_{кр}$, капли дробятся. Значения $We_{кр}$ варьируются в широком диапазоне: $We_{кр} = (2 \div 60)$ [9, 10].

Для капель жидкости существенное значение может иметь циркуляция жидкости при движении их в среде (рис. 4.5). Эта циркуляция снижает трение на поверхности капли, в результате чего уменьшается сопротивление, оказываемое средой движению частицы.

Коэффициент сопротивления для капли при $Re < 1$ определяется формулой Адамара-Рыбчинского [20]

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(\frac{3\mu_* + 2}{3 + 3\mu_*} \right), \quad (4.5)$$

где $\mu_* = \mu_p / \mu$ – отношение коэффициентов динамической вязкости дисперсной μ_p и дисперсионной μ фаз.

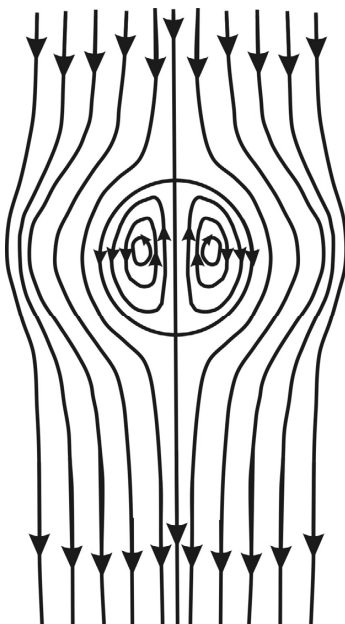


Рис. 4.5. Картина линий тока при $Re < 1$

Рассмотрим предельные случаи для коэффициента сопротивления C_D .

- Для случая движения твердых сфер или капель жидкости в воздухе $\mu_* \rightarrow \infty$ ($\mu_p \gg \mu$). При этом коэффициент сопротивления и сила сопротивления соответствуют закону Стокса (4.4), (4.5).

- Для случая движения пузырьков в жидкости $\mu_* \rightarrow 0$ ($\mu_p \ll \mu$). При этом коэффициент сопротивления и сила сопротивления определяются формулами

$$C_D = \frac{16}{Re}, \quad \vec{F}_s = -2\pi\mu\vec{U}D. \quad (4.6)$$

- Для случая движения разреженной совокупности частиц дисперсной фазы («продуваемое облако») $\mu_* \rightarrow 1$ ($\mu_p \approx \mu$). При этом коэффициент сопротивления и сила сопротивления определяются формулами

$$C_D = \frac{20}{Re}, \quad \vec{F}_s = -\frac{5}{2}\pi\mu\vec{U}D. \quad (4.7)$$

4.5. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Общее векторное уравнение движения частицы дисперсной фазы (твердой частицы, капли или пузырька) имеет вид второго закона Ньютона

$$m \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (4.8)$$

где m – масса частицы;

\vec{u}_p – вектор скорости частицы;

\vec{F}_i – векторы сил, действующих на частицу.

Для частицы сферической формы диаметром D

$$m = \frac{\pi D^3}{6} \rho_p,$$

где ρ_p – плотность материала частицы.

Рассмотрим основные силы, действующие на частицу дисперсной фазы.

• В гравитационном поле на частицу (как покоящуюся, так и движущуюся) действует сила тяжести

$$\vec{F}_g = \rho_p V_p \vec{g} \quad (4.9)$$

и сила Архимеда

$$\vec{F}_A = -\rho V_p \vec{g}, \quad (4.10)$$

где V_p – объем частицы; \vec{g} – вектор ускорения свободного падения; ρ – плотность дисперсионной среды.

Иногда под силой Архимеда понимают сумму сил (4.9) и (4.10)

$$\vec{F}_A = (\rho_p - \rho) V_p \vec{g}. \quad (4.11)$$

• Сила вязкого сопротивления в прямолинейном однородном потоке (как стационарном, так и нестационарном) определяется формулой (4.1), которая для сферической частицы принимает вид

$$\vec{F}_s = -C_D \frac{\pi D^2}{8} \rho U \vec{U}. \quad (4.12)$$

Конкретный вид выражения для \vec{F}_s определяется режимом движения, от которого зависит коэффициент сопротивления C_D .

- При нестационарном движении частицы ($d\vec{u}_p/dt \neq 0$) на нее действует дополнительная сила сопротивления, связанная с необходимостью сообщить ускорение движению вытесненной частицей массы несущей среды:

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{2}\rho V_p \frac{d\vec{u}_p}{dt}. \quad (4.13)$$

Эта сила, называемая силой присоединенных масс [7], направлена противоположно вектору ускорения частицы и действует на частицу, как в вязкой, так и в идеальной жидкости.

Коэффициент при $d\vec{u}_p/dt$ в уравнении движения (4.8) можно рассматривать как некоторую эффективную массу m_e , равную сумме массы частицы $m = \rho_p V_p$ и присоединенной массы m_m , которая равна половине массы дисперсионной среды, вытесненной частицей:

$$m_e = \rho_p V_p + \frac{1}{2}\rho V_p.$$

- При нестационарном движении частицы ($d\vec{u}_p/dt \neq 0$) на нее действует еще одна дополнительная сила сопротивления, связанная с предысторией движения – «наследственная» сила Бассе [7].

Для Стоксовского режима течения при $Re < 1$ сила Бассе определяется уравнением

$$\vec{F}_B = -\frac{3}{2}D^2\sqrt{\pi\mu\rho} \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{U}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (4.14)$$

где t – время движения частицы.

Сила Бассе возникает за счет нестационарного процесса формирования пограничного слоя вокруг частицы и действует только в вязкой несущей среде ($\mu \neq 0$).

- При движении частицы в сдвиговом потоке (с неравномерным профилем скорости несущей среды) на нее действует сила Саффмена (подъемная сила), направленная перпендикулярно вектору движения частицы [7]. При малых числах Рейнольдса и в отсутствие вращательного движения частицы сила Саффмена определяется уравнением

$$\vec{F}_S = C_S D^2 (\vec{u} - \vec{u}_p) \sqrt{\rho\mu \left| \frac{d\vec{u}}{dy} \right|} \operatorname{sgn} \left(\frac{d\vec{u}}{dy} \right), \quad (4.15)$$

где коэффициент $C_s = 1.615$, \vec{u} – скорость несущей среды в точке, соответствующей центру масс частицы; $d\vec{u}/dy = 0$ – поперечный градиент скорости.

Сила Саффмена действует только при движении частицы в вязкой жидкости ($\mu \neq 0$) несущего сдвигового потока и направлена в сторону увеличения скорости несущего потока (рис. 4.6).

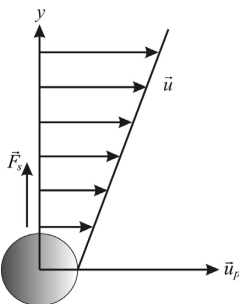


Рис. 4.6. Движение частицы в сдвиговом потоке

По оценкам А.А. Шрайбера [10], в дисперсном потоке при малых скоростях его движения, для частиц диаметром менее 100 мкм сила Саффмена незначительна по сравнению с силой вязкого сопротивления.

• Частицы дисперсной фазы в двухфазном потоке могут приобретать вращательное движение за счет взаимных нецентральных столкновений [6] или при отскоке от стенок канала. На частицу, вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega}$, действует сила Магнуса [7], направленная перпендикулярно вектору скорости обтекающего частицу потока (рис. 4.7).

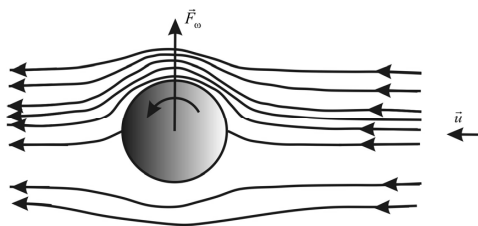


Рис. 4.7. Действие силы Магнуса на вращающуюся частицу

Вращение увеличивает скорость обтекания частицы сверху и уменьшает снизу. При этом в верхней окрестности частицы в соответствии с уравнением Бернулли давление будет меньше, чем в нижней. Перепад

давлений вызывает подъемную силу Магнуса \vec{F}_ω , направленную вверх (рис. 4.7).

При стационарном обтекании сферы, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ поступательным (вдали) потоком со скоростью \vec{u} при малых числах Рейнольдса

$$Re_u = \frac{\rho D |\vec{u}|}{\mu} \ll 1, \quad Re_\omega = \frac{\rho |\vec{\omega}| D}{4\mu} \ll 1$$

сила Магнуса определяется формулой [7]

$$\vec{F}_\omega = \pi \frac{D^3}{8} \rho [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \quad (4.16)$$

В другом предельном случае, при больших числах Рейнольдса

$$Re_u = \frac{\rho D |\vec{u}|}{\mu} \gg 1, \quad Re_\omega = \frac{\rho |\vec{\omega}| D}{4\mu} \gg 1$$

сила Магнуса определяется формулой [7]

$$\vec{F}_\omega = \pi \frac{D^3}{3} \rho [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \quad (4.17)$$

Отметим, что в (4.16) и (4.17) не входит вязкость несущей среды. Роль вязкости сводится к тому, чтобы передать циркуляцию жидкости от вращающейся частицы, а возникающая при этом сила Магнуса не зависит от вязкости.

Формулы (4.16), (4.17) для поперечной силы Магнуса можно представить в виде

$$\vec{F}_\omega = C_\omega \rho V_p [\vec{u} \times \vec{\omega}],$$

где $C_\omega = C_\omega(Re_u, Re_\omega)$ – безразмерный коэффициент силы Магнуса, который определяется экспериментально. В предельных режимах он равен

$$\lim_{\substack{Re_u \rightarrow 0 \\ Re_\omega \rightarrow 0}} C_\omega(Re_u, Re_\omega) = \frac{3}{4}, \quad \lim_{\substack{Re_u \rightarrow 0 \\ Re_\omega \rightarrow 0}} C_\omega(Re_u, Re_\omega) = 2.$$

Кроме рассмотренных выше основных сил механического происхождения, на частицу дисперсной фазы в определенных условиях могут действовать и другие силы (силы турбофореза, термофореза, фотофореза, диффузиофореза, электрические силы и др. [12]).

Подставляя все значащие для рассматриваемой задачи силы в уравнение (4.8), можно получить дифференциальное уравнение движения частицы для каждой конкретной задачи.

5. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В НЕСУЩЕМ ПОТОКЕ

Рассмотрим одномерное стационарное движение несущей среды в направлении оси Ox , причем распределение скорости среды $u(x)$, задано (в простейшем случае $u(x)=\text{const.}$) В некотором сечении $x=0$ в поток попадает сферическая частица диаметром D и плотностью ρ_p с начальной скоростью u_{p0} .

Требуется найти зависимость скорости частицы от длины $u_p(x)$ и от времени $u_p(t)$. В данном случае на частицу действует только сила сопротивления (несущая сила), которая равна:

$$\vec{F}_s = C_D \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho |\vec{u} - \vec{u}_p|}{2} (\vec{u} - \vec{u}_p), \quad (5.1)$$

где C_D – коэффициент сопротивления; ρ – плотность несущей среды. Тогда с учетом (5.1) уравнение движения частицы записывается в виде

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = C_D \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho |\vec{u} - \vec{u}_p|}{2} (\vec{u} - \vec{u}_p). \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.2) для произвольной зависимости $u(x)$ возможно только численными методами. Рассмотрим некоторые аналитические решения этого уравнения, которые можно получить при постоянном значении скорости несущего потока ($u=\text{const.}$).

5.1. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СТОКСОВСКОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим Стоксовский режим течения ($Re < 1$), для которого число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho |\vec{u} - \vec{u}_p| D}{\mu} < 1.$$

Для данного режима коэффициент сопротивления равен

$$C_D = \frac{24}{Re} = \frac{24\mu}{\rho |\vec{u} - \vec{u}_p| D}, \quad (5.3)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости дисперсионной среды.

Подставляя (5.3) в уравнение движения (5.2), получим

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_p \frac{d\bar{u}_p}{dt} = \frac{24\mu}{\rho|\bar{u} - \bar{u}_p|D} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho|\bar{u} - \bar{u}_p|}{2} (\bar{u} - \bar{u}_p). \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) можно привести к виду

$$\frac{D^2 \rho_p}{18\mu} \cdot \frac{d\bar{u}_p}{dt} = (\bar{u} - \bar{u}_p). \quad (5.5)$$

Коэффициент перед производной $D^2 \rho_p / 18\mu$ в уравнении (5.5), имеющий размерность времени, обозначим через t_* :

$$t_* = \frac{D^2 \rho_p}{18\mu}. \quad (5.6)$$

Величина t_* называется временем динамической релаксации частицы, которое дает оценку времени разгона частицы до скорости несущей среды.

Вводя в качестве масштабов времени t_* из уравнения (5.6) и скорости $u_* = u$, уравнение (5.5) можно представить в безразмерном виде:

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - y, \quad (5.7)$$

где $y = u_p / u_*$, $\tau = t / t_*$, $y_0 = u_{p0} / u_*$ (u_{p0} – начальная скорость частицы, вводимой в поток).

Решение уравнения (5.7) при начальном условии ($\tau = 0$: $y = y_0$) имеет вид:

$$y = 1 - (1 - y_0) \exp(-\tau). \quad (5.8)$$

На рис. 5.1 приведены графики зависимости $y(\tau)$ для разных значений y_0 . При $y_0 > 1$ – частица замедляется (начальная скорость частицы превышает скорость потока), при $y_0 < 1$ – частица ускоряется в потоке несущей среды. При $\tau \rightarrow \infty$ частица приобретает скорость несущей среды.

Для нахождения зависимости скорости частицы от координаты преобразуем уравнение (5.4) с учетом того, что

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{du_p}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{du_p}{dx} \cdot u_p.$$

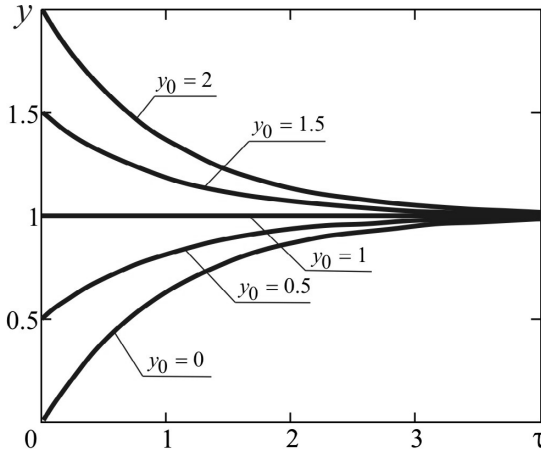


Рис. 5.1. Зависимость скорости частицы от времени (Стоксовский режим)

При этом из уравнения (5.5) получим

$$u_p \frac{D^2 \rho_p}{18\mu} \frac{du_p}{dx} = (u - u_p). \quad (5.9)$$

Вводя дополнительную безразмерную переменную $\xi = x/x^*$, где

$$x^* = u_* t_* = u \frac{\rho_p D^2}{18\mu}, \quad (5.10)$$

уравнение (5.9) можно представить в безразмерном виде:

$$y \frac{dy}{d\xi} = 1 - y. \quad (5.11)$$

При заданном граничном условии ($\xi=0$: $y=y_0$) уравнение (5.11) имеет следующее решение:

$$\xi = (y_0 - y) + \ln \left| \frac{1 - y_0}{1 - y} \right|. \quad (5.12)$$

На рис. 5.2 приведены графики зависимости $y(\xi)$ для разных значений y_0 .

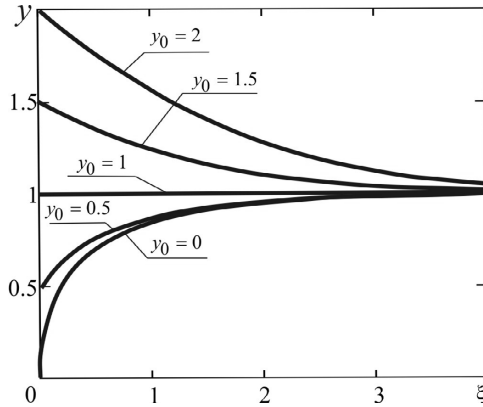


Рис. 5.2. Зависимость скорости частицы от расстояния (Стоксовский режим)

Пример расчета

Определим значения времени и расстояния, при которых скорость вольфрамового шарика ($D=4$ мм, $\rho_p=19340$ кг/м³), введенного с нулевой скоростью в поток вязкой жидкости ($u=0.5$ м/с, $\rho=890$ кг/м³, $\mu=2$ Па·с), достигнет 50 % от скорости потока.

1. Проведем оценку режима течения. При $\tau \rightarrow \infty$, $u_p = u$, и значение числа Рейнольдса равно:

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{890 \cdot 0.5 \cdot 0.004}{2} = 0.89 < 1.$$

При $Re < 1$ режим движения – Стоксовский.

2. Находим из уравнений (5.8) и (5.12) значения τ и ξ , при которых $y = 0.5$ (для $y_0 = 0$):

$$\tau = \ln \left| \frac{1 - y_0}{1 - y} \right| = \ln \left(\frac{1}{0.5} \right) = 0.693;$$

$$\xi = (y_0 - y) + \ln \left| \frac{1 - y_0}{1 - y} \right| = -0.5 + \ln \left(\frac{1}{0.5} \right) = 0.193.$$

3. Находим значения масштабов из уравнений (5.6), (5.10):

$$t_* = \frac{D^2 \rho_p}{18\mu} = \frac{0.004^2 \cdot 19340}{18 \cdot 2} = 8.59 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$x_* = \frac{\mu \rho_p D^2}{18\mu} = \frac{0.5 \cdot 19340 \cdot 0.004^2}{18 \cdot 2} = 4.29 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

4. Переходим к размерным переменным

$$t = \tau \cdot t_* = 0.693 \cdot 8.59 \cdot 10^{-3} = 5.9 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 5.9 \text{ мс};$$

$$x = \xi \cdot x_* = 0.193 \cdot 4.29 \cdot 10^{-3} = 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0.8 \text{ мм.}$$

5.2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПРОМЕЖУТОЧНОМ РЕЖИМЕ

Коэффициент сопротивления в промежуточном режиме обтекания задается формулой Клячко:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\text{Re}}}. \quad (5.13)$$

Относительное отклонение коэффициента сопротивления, рассчитанного по формуле Клячко (5.13), от Стоксовского (5.3) определяется соотношением:

$$\delta = \frac{\left(\frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\text{Re}}} \right) - \left(\frac{24}{\text{Re}} \right)}{\left(\frac{24}{\text{Re}} \right)} = \frac{4 \text{ Re}}{24 \sqrt[3]{\text{Re}}} = \frac{1}{6} \text{ Re}^{2/3}.$$

При относительном отклонении $\delta = 0.01$ (1%) граничное значение числа Рейнольдса составляет $\text{Re} = 0.015$. Поэтому можно считать, что промежуточный режим обтекания частицы дисперсной фазы реализуется в диапазоне чисел Рейнольдса:

$$\text{Re} = 0.015 \div 700.$$

Уравнение движения частицы (5.2) с учетом коэффициента сопротивления (5.13) имеет вид:

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \left(\frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\text{Re}}} \right) \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho |\vec{u} - \vec{u}_p|^2}{2}.$$

Вводя в качестве безразмерной переменной число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho |\vec{u} - \vec{u}_p| D}{\mu},$$

это уравнение можно представить в виде:

$$\frac{d \text{ Re}}{dt} = -A \text{ Re}^2 \left(\frac{6}{\text{Re}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Re}}} \right), \quad (5.14)$$

где $A = \frac{3\mu}{\rho_p D^2}$ – константа, $[A] = c^{-1}$.

Для интегрирования уравнения (5.14) введем новую безразмерную переменную:

$$z = \sqrt[3]{\text{Re}}. \quad (5.15)$$

С учетом (5.15) уравнение движение примет вид:

$$\frac{dz}{dt} = -Cz(6 + z^2), \quad (5.16)$$

где $C = \frac{A}{3} = \frac{\mu}{\rho_p D^2}$ – константа, $[C] = c^{-1}$.

Вводя в качестве масштаба времени

$$t_* = \frac{1}{C} = \frac{\rho_p D^2}{\mu},$$

уравнение (5.16) представим в безразмерном виде:

$$\frac{dz}{d\tau_1} = -z(6 + z^2),$$

где $\tau_1 = t / t_* = t \cdot C$.

Интеграл этого уравнения при начальном условии ($\tau = 0$: $z = z_0$) имеет вид:

$$z = \left[\frac{6 \frac{z_0^2}{z_0^2 + 6} \exp(-12\tau_1)}{1 - \frac{z_0^2}{z_0^2 + 6} \exp(-12\tau_1)} \right]^{1/2}$$

или

$$z = \sqrt{6} \left[\left(1 + \frac{6}{z_0^2} \right) \exp(-12\tau_1) - 1 \right]^{-1/2}. \quad (5.17)$$

Переходя в (5.17) к новым безразмерным переменным:

$$y = \frac{u p}{u}, \quad \tau = 12\tau_1 = \frac{t}{(\rho_p D^2 / 12\mu)},$$

получим решение для зависимости безразмерной скорости частицы от безразмерного времени:

$$y = 1 - 6\sqrt{6} \frac{(1 - y_0)}{\text{Re}_0} \left[\left(1 + \frac{6}{\text{Re}_0^{2/3}} \right) \exp(\tau) - 1 \right]^{-3/2}, \quad (5.18)$$

где $\text{Re}_0 = \frac{\rho u D}{\mu} (1 - y_0)$, $\tau = \frac{12\mu}{\rho_p D^2} t$.

Вводя в качестве параметра задачи значение числа Рейнольдса для несущего потока

$$\text{Re}_e = \frac{\rho u D}{\mu},$$

зависимость (5.18) можно представить в виде:

$$y = 1 \pm \frac{6\sqrt{6}}{\text{Re}_e} \left[\left(1 + \frac{6}{(\text{Re}_e |1 - y_0|)^{2/3}} \right) \exp(\tau) - 1 \right]^{-3/2}. \quad (5.19)$$

Анализ уравнения (5.19) показывает, что зависимость скорости частицы от времени определяется ее начальным значением y_0 , а также параметром задачи Re_e (числом Рейнольдса, рассчитанным для параметров несущей среды). В уравнении (5.19) знак «+» соответствует случаю $u_p > u$, а знак «-» случаю $u_p < u$. На рис. 5.3 приведены графики зависимости $y(\tau)$ для разных значений y_0 при $\text{Re}_e = 50$ и $\text{Re}_e = 500$.

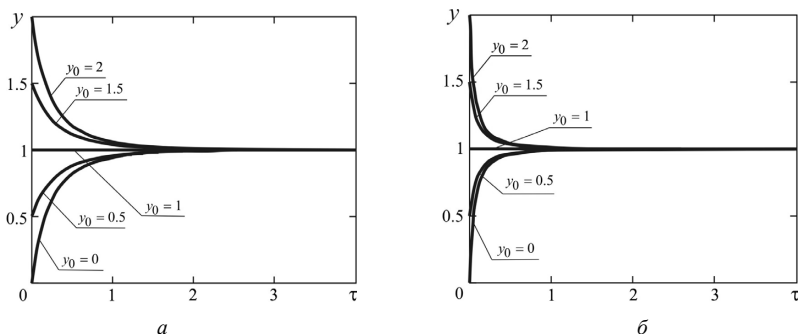


Рис. 5.3. Зависимость скорости частицы от времени (промежуточный режим):
а – $\text{Re}_e = 50$; б – $\text{Re}_e = 500$

5.3. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим автомодельный режим движения частицы, который реализуется в диапазоне чисел Рейнольдса $Re=600 \div 3 \cdot 10^5$. Коэффициент сопротивления в данном режиме равен $C_D = \text{const} = 0.44$.

Уравнение движения частицы (5.2) при $C_D = \text{const}$ можно представить в виде

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{\rho_p C_D} \cdot \frac{d\bar{u}_p}{dt} = |\bar{u} - \bar{u}_p|^2. \quad (5.20)$$

Коэффициент перед производной в уравнении (5.20), имеющий размерность расстояния, обозначим через x^* :

$$x^* = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{\rho_p C_D}. \quad (5.21)$$

Вводя в качестве масштабов расстояния x^* из уравнения (5.21), скорости $u^* = u$ и времени t^* :

$$t^* = \frac{x^*}{u^*} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{u \rho_p C_D}, \quad (5.22)$$

уравнение (5.20) можно представить в безразмерном виде:

$$\frac{dy}{d\tau} = (1 - y)^2, \quad (5.23)$$

где $y = u_p / u^*$, $\tau = t / t^*$.

Решение уравнения (5.23) с начальным условием ($\tau = 0$: $y = y_0$) имеет вид:

$$y = \frac{y_0 + \tau|1 - y_0|}{1 + \tau|1 - y_0|}. \quad (5.24)$$

Графики зависимостей $y(\tau)$ для разных значений y_0 приведены на рис. 5.4.

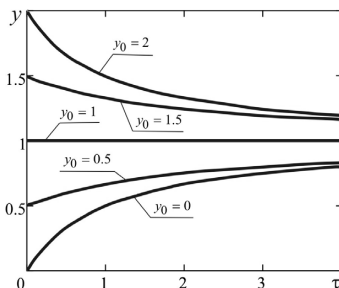


Рис. 5.4. Зависимость скорости частицы от времени (автомодельный режим)

Для нахождения зависимости скорости частицы от координаты, вводя дополнительную безразмерную переменную $\xi = x/x_*$, по аналогии с уравнением (5.11) получим следующее уравнение в безразмерных переменных:

$$y \frac{dy}{d\xi} = (1 - y)^2. \quad (5.25)$$

Решение этого уравнения с граничным условием ($\xi=0$: $y=y_0$) имеет вид:

$$\xi = \left(\frac{1}{1-y} \right) - \left(\frac{1}{1-y_0} \right) + \ln \left| \frac{1-y}{1-y_0} \right|. \quad (5.26)$$

Графики зависимостей $y(\xi)$ для разных значений y_0 приведены на рис. 5.5.

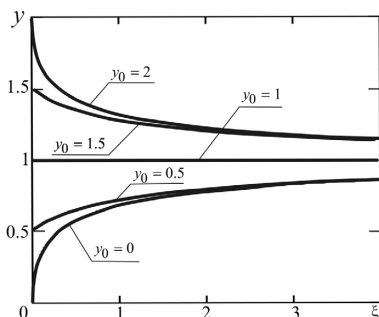


Рис 5.5. Зависимость скорости частицы от расстояния (автомодельный режим)

Пример расчета

Определим значения времени и расстояния, при которых скорость стеклянного шарика ($D=7$ мм, $\rho_p=2200$ кг/м³), введенного с нулевой скоростью в поток воды ($u = 1$ м/с, $\rho=10^3$ кг/м³, $\mu=10^{-3}$ Па·с), достигнет 50% от скорости потока.

1. Проведем оценку режима течения. При $\tau \rightarrow \infty$, $u_p = u$, и значение числа Рейнольдса равно: $Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 0.007}{0.001} = 7000$.

Следовательно, частица движется в автомодельном режиме.

2. Находим из уравнений (5.24) и (5.26) значения τ и ξ , при которых $y = 0.5$ (для $y_0 = 0$):

$$\tau = \frac{y - y_0}{(1 - y_0)(1 - y)} = \frac{0.5}{1 - 0.5} = 1:$$

$$\xi = \frac{1}{1 - y} - \frac{1}{1 - y_0} + \ln \left| \frac{1 - y}{1 - y_0} \right| = \frac{1}{0.5} - 1 + \ln |0.5| = 0.3.$$

3. Находим значения масштабов из уравнений (5.21), (5.22):

$$t_* = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{\mu \rho_p C_D} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0.007}{3 \cdot 1 \cdot 2200 \cdot 0.44} = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$x_* = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho D}{\rho_p C_D} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0.007}{3 \cdot 2200 \cdot 0.44} = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

4. Переходим к размерным переменным

$$t = \tau \cdot t_* = 1 \cdot 9.6 \cdot 10^{-3} = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 9.6 \text{ мс};$$

$$x = \xi \cdot x_* = 0.3 \cdot 9.6 \cdot 10^{-3} = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2.9 \text{ мм}.$$

6. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Поведение дисперсных частиц (твердых частиц, капель, пузырьков) при их гравитационном осаждении (или всплытии) представляет интерес для решения различных практических задач. Процессы гравитационного осаждения важны для описания атмосферных осадков, поведения облаков, туманов, а также при расчете распространения капель токсичных компонентов при авариях ракет. При этом надо учитывать параметры атмосферы в зависимости от высоты H над уровнем моря. Данные для стандартной атмосферы приведены в табл. 6.1.

Т а б л и ц а 6.1

Параметры стандартной атмосферы

H , м	T , К	p , Па	ρ , кг/м ³	$\mu \cdot 10^5$, Па·с
0	288.2	101330	1.23	1.79
1000	281.7	89880	1.11	1.76
2000	275.1	79490	1.01	1.73
3000	268.6	70130	0.909	1.69
4000	262.1	61660	0.819	1.66
5000	255.6	54050	0.737	1.63
6000	249.1	47210	0.660	1.60
7000	242.6	41090	0.590	1.56
8000	236.1	35650	0.526	1.53
10000	223.2	26490	0.414	1.46
15000	216.7	12110	0.195	1.42
20000	216.7	5530	0.0889	1.42
25000	216.7	2530	0.0406	1.42
30000	230.4	1200	0.0179	1.49
40000	257.7	296	0.00400	1.57
50000	274.0	84.6	0.00108	1.72
60000	253.4	44.1	0.000332	1.62
70000	219.2	5.83	0.0000927	1.44

В табл. 6.2 приведены физические свойства воды (плотности ρ , коэффициента динамической вязкости μ , коэффициента поверхностного натяжения σ), как наиболее часто используемой жидкости в практических расчетах.

Т а б л и ц а 6.2

Физические свойства воды ($T=20^\circ\text{C}$)

ρ , кг/м ³	μ , Па·с	σ , Н/м ²
1000	0.001	$72.53 \cdot 10^{-3}$

6.1. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СТОКСОВСКОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим движение сферической частицы дисперсной фазы в поле силы тяжести \vec{g} . В проекции на ось Oz, направленную вертикально вниз, на частицу действуют следующие силы:

$F_g = mg$ – сила тяжести;

$F_A = -\rho V_p g = -m \frac{\rho}{\rho_p} g$ – сила Архимеда;

$F_s = -C_D \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_p^2}{2}$ – сила сопротивления.

Для Стоксовского режима ($Re < 1$, $C_D = 24 / Re$) уравнение гравитационного осаждения сферической частицы с учетом рассмотренных сил примет вид:

$$\frac{du_p}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right) - \frac{18\mu}{\rho_p D^2} u_p. \quad (6.1)$$

В стационарном режиме ($du_p / dt = 0$) скорость осаждения частицы определяется формулой:

$$u_* = \frac{(\rho_p - \rho) D^2}{18\mu} g. \quad (6.2)$$

Обезразмерим уравнение (6.1), приняв за масштаб скорости величину u_* (6.2), а за масштаб времени величину t_* :

$$t_* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu}. \quad (6.3)$$

Обозначив $y = u_p / u_*$, $\tau = t / t_*$, получим уравнение в безразмерном виде:

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - y. \quad (6.4)$$

Решение уравнения (6.4) при начальном условии ($\tau = 0$: $y = 0$) имеет вид:

$$y = 1 - e^{-\tau}. \quad (6.5)$$

Зависимость скорости частицы от времени в безразмерном виде приведена на рис. 6.1.

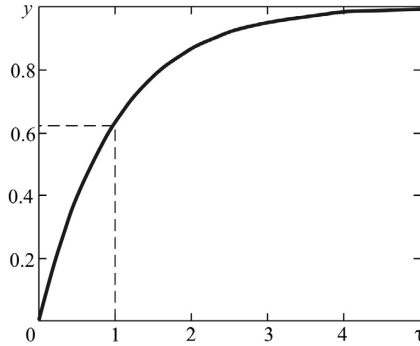


Рис. 6.1. Зависимость скорости гравитационного осаждения частицы от времени

В табл. 6.3 приведены значения скорости осаждения частицы для некоторых значений τ . За время, равное времени динамической релаксации частицы ($\tau = 1$), ее скорость достигает 63.2% от стационарного значения u_* . Из табл. 6.3 видно, что при $\tau = 4.6$ отклонение скорости осаждения от стационарной не превышает 1%.

Таблица 6.3

Зависимость скорости осаждения частицы от времени

τ	1	2	3	4	4.6	5
y	0.632	0.865	0.950	0.982	0.99	0.993

Найдем зависимость скорости частицы от пройденного ею расстояния (высоты падения). Вводя масштаб расстояния

$$x_* = u_* t_* = \rho_p (\rho_p - \rho) \left(\frac{D^2}{18\mu} \right)^2 g, \quad (6.6)$$

уравнение (6.1) можно представить в безразмерном виде:

$$y \frac{dy}{d\xi} = 1 - y, \quad (6.7)$$

где $\xi = x / x_*$. Решение уравнения (6.7) с граничным условием ($\xi = 0 : y = 0$) имеет вид:

$$\xi = -[y + \ln(1 - y)]. \quad (6.8)$$

График зависимости скорости осаждения частицы от расстояния в безразмерном виде приведен на рис. 6.2.

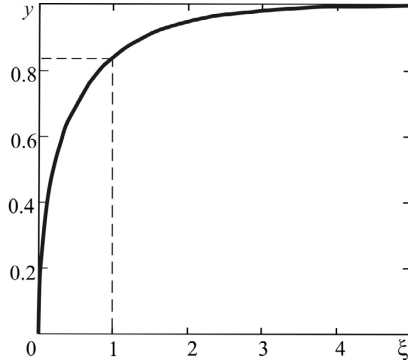


Рис. 6.2. Зависимость скорости гравитационного осаждения частицы от расстояния

В табл. 6.4 приведены значения скорости осаждения частицы для некоторых значений ξ . На расстоянии $\xi = 1$ скорость частицы достигнет 84% от стационарного значения u_* . Из табл. 6.4 видно, что при $\xi = 3.62$ отклонение скорости от стационарной не превышает 1%.

Таблица 6.4

Зависимость скорости осаждения частицы от расстояния

ξ	1	2	3	3.62	4	5
y	0.842	0.948	0.981	0.99	0.994	0.997

Расчетные формулы

При расчете осаждения частицы дисперсной фазы под действием силы тяжести ($\rho_p > \rho$) выделяют два режима.

1. Режим ускоренного движения, при котором скорость частицы плавно возрастает от нуля до некоторого постоянного значения u_* . Поскольку $u_p = u_*$ достигается при $\tau \rightarrow \infty$, примем за границы первого режима значения $\tau = 4.6$, $\xi = 3.62$ (отклонение скорости осаждения от стационарной не превышает 1%). При этом размерные значения этих границ определяются формулами:

$$t_1 = 4.6t_* = 4.6 \frac{\rho_p D^2}{18\mu} = 4.6 \frac{\rho_p D^2}{18\mu}, \quad x_1 = 3.62x_* = 3.62\rho_p(\rho_p - \rho) \left(\frac{D^2}{18\mu} \right)^2 g.$$

Скорость осаждения частицы в режиме ускоренного движения в размерном виде определяется формулой:

$$u_p(t) = \frac{D^2 g (\rho_p - \rho)}{18\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{18\mu}{\rho_p D^2} t\right) \right]. \quad (6.9)$$

2. Режим движения с постоянной скоростью u_* .

Расчет скорости стационарного осаждения частицы проводится по соотношению (6.2).

Пример расчета

Определим значения времени t и расстояния x , на которых скорость гравитационного осаждения капли ртути ($D=3$ мм, $\rho_p=13550$ кг/м³) в глицерине ($\rho=1270$ кг/м³, $\mu=1.4$ Па·с) будет отклоняться от стационарного значения на 1% ($u_p = 0.99u_*$).

1. Определяем значение стационарной скорости осаждения капли по уравнению (6.2):

$$u_* = \frac{(\rho_p - \rho) D^2}{18\mu} g = \frac{(13550 - 1270) \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2}{18 \cdot 1.4} \cdot 9.80665 = 0.043 \text{ м/с}.$$

2. Проведем оценку режима течения. При $u_p = u_*$ значение числа Рейнольдса равно:

$$Re = \frac{\rho u_* D}{\mu} = \frac{1270 \cdot 0.043 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1.4} = 0.117 < 1.$$

При $Re < 1$ режим движения – Стоксовский.

3. Находим из уравнений (6.5) и (6.8) значения τ и ξ , при которых $y = 0.99$:

$$\tau = \ln\left(\frac{1}{1-y}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-0.99}\right) = 4.6;$$

$$\xi = -[y + \ln(1-y)] = -[0.99 + \ln(1-0.99)] = 3.62.$$

4. Находим значения масштабов из уравнений (6.3), (6.6):

$$t_* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu} = \frac{13550 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2}{18 \cdot 1.4} = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 4.8 \text{ мс};$$

$$x_* = \rho_p \Delta \rho \left(\frac{D^2}{18\mu} \right)^2 g = 13550 \cdot (13550 - 1270) \left(\frac{(3 \cdot 10^{-3})^2}{18 \cdot 1.4} \right)^2 9.80665 =$$

$$= 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0.2 \text{ мм.}$$

5. Переходим к размерным переменным

$$t = \tau \cdot t_* = 4.6 \cdot 4.8 \cdot 10^{-3} = 22 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 22 \text{ мс};$$

$$x = \xi \cdot x_* = 3.62 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0.7 \text{ мм.}$$

6.2. ВЛИЯНИЕ СИЛЫ, СВЯЗАННОЙ С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ

При нестационарном движении тела в жидкости с ненулевой плотностью на него действует сила реакции этой жидкости (сила присоединенной массы). В случае равномерного движения тела ($du_p / dt = 0$) эта сила пропадает (парадокс Даламбера). При ускоренном движении реакция жидкости тем больше, чем больше ускорение тела.

В случае сферического тела его движение можно рассматривать как происходящее в пустоте, если только к массе тела присоединить дополнительную массу, равную половине массы жидкости в объеме тела.

Если масса вытесненной жидкости мала по сравнению с массой тела (движение капли в воздухе, например), то присоединенной массой можно пренебречь. В случае же движения твердого тела, и тем более пузырька, в водной среде, роль присоединенной массы оказывается первостепенной.

При нестационарном движении частицы ($du_p / dt \neq 0$) на нее кроме рассмотренных выше сил действует сила, связанная с присоединенной массой [7]:

$$\vec{F}_m = -\frac{\rho V_p}{2} \cdot \frac{d\vec{u}_p}{dt}, \quad (6.10)$$

где V_p – объем частицы.

С учетом этой силы уравнение гравитационного осаждения частицы (6.1) примет вид:

$$(\rho_p + \frac{\rho}{2})V_p \cdot \frac{du_p}{dt} = V_p g (\rho_p - \rho) - C_D \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_p^2}{2}. \quad (6.11)$$

Для случая осаждения твердых частиц или капель жидкости в газе ($\rho_p \gg \rho$) силой F_m можно пренебречь. В случае же всплытия пузырька-

ков газа в жидкости ($\rho_p \ll \rho$) расчет динамики движения пузырька необходимо проводить с учетом F_m .

Рассмотрим процесс всплытия пузырька в жидкости для Стоксовского режима ($Re < 1$, $C_D = 24/Re$). Без учета силы, связанной с присоединенной массой, уравнение движения в проекции на ось, направленную вертикально вверх, следует из (6.1):

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{\rho}{\rho_p} g - \frac{18\mu}{\rho_p D^2} u_p. \quad (6.12)$$

Вводя масштабы скорости u_* и времени t_*

$$u_* = \frac{\rho D^2}{18\mu} g, \quad t_* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu},$$

представим уравнение (6.12) в безразмерном виде

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 - y, \quad (6.13)$$

где $y = u_p / u_*$, $\tau = t / t_*$. Решение этого уравнения имеет вид:

$$u_p(t) = u_* \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t_*}\right) \right]. \quad (6.14)$$

С учетом F_m уравнение движения пузырька можно представить в виде:

$$\frac{du_p}{dt} = 2g - \frac{36\mu}{\rho D^2} u_p. \quad (6.15)$$

Вводя масштабы скорости u_* и времени t_*

$$u_* = \frac{\rho D^2}{18\mu} g, \quad t_* = \frac{\rho D^2}{36\mu},$$

уравнение (6.15) в безразмерном виде сводится к уравнению (6.13), а его решение к виду (6.14). Отличие этих уравнений заключается в разных масштабах времени.

Анализ полученных решений показывает, что скорость стационарного всплытия пузырька одинакова для уравнений (6.12) и (6.15) и определяется формулой

$$u_* = \frac{\rho D^2 g}{18\mu}.$$

Время динамической релаксации для уравнения (6.12) записывается в виде

$$t_* = \frac{\rho_p D^2}{18\mu},$$

а для уравнения (6.15) – в виде

$$t_* = \frac{\rho D^2}{36\mu}.$$

Поскольку $\rho_p \ll \rho$, то время динамической релаксации для процесса всплытия пузырька с учетом присоединенной массы намного превышает соответствующее значение, полученное без учета присоединенной массы.

Формула для определения пройденного пузырьком расстояния в соответствии с (5.12) имеет вид

$$x(t) = x_* \left[\ln \left| \frac{u_*}{u_* - u_p(t)} \right| - \frac{u_p(t)}{u_*} \right],$$

где $x_* = u_* t_*$ – характерное расстояние, пройденное пузырьком.

На рис. 6.3 приведены зависимости скорости всплытия пузырька воздуха ($D=3.2$ мм, $\rho_p=1.205$ кг/м³) в касторовом масле ($\rho=935$ кг/м³, $\mu=0.3$ Па·с) от времени и расстояния, рассчитанные с учетом и без учета силы, связанной с присоединенной массой.

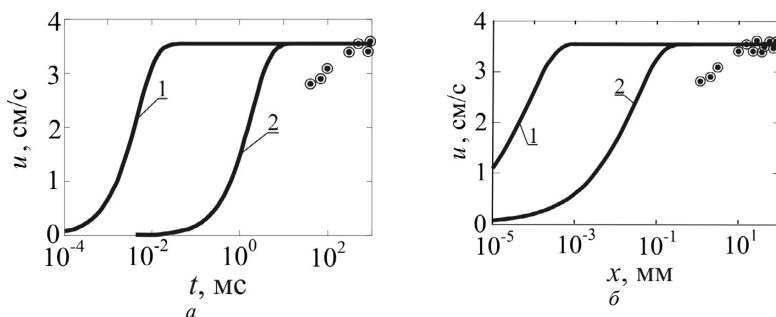


Рис. 6.3. Зависимость скорости всплытия пузырька от времени (а) и расстояния (б) без учета (1) и с учетом (2) силы, связанной с присоединенной массой

Точками на рис.6.3 показаны экспериментальные значения скорости всплытия пузырька.

6.3. РАСЧЕТ СКОРОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ОСАЖДЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО КРИТЕРИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим гравитационное осаждение одиночной сферической частицы в стационарном режиме ($u_p = \text{const}$). При этом сила тяжести и сила Архимеда уравновешены силой сопротивления:

$$(\rho_p - \rho) \frac{\pi D^3}{6} g = C_D \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\rho u_*^2}{2}, \quad (6.16)$$

где u_* – скорость стационарного осаждения частицы.

Введем число Рейнольдса для скорости стационарного осаждения:

$$\text{Re} = \frac{\rho u_* D}{\mu}. \quad (6.17)$$

Выражая из (6.17) скорость u_* и подставляя в (6.16), получим

$$\text{Re}^2 \cdot C_D = \frac{4}{3} \cdot \frac{g(\rho_p - \rho) \rho D^3}{\mu^2}. \quad (6.18)$$

Вводя число Архимеда

$$\text{Ar} = \frac{g(\rho_p - \rho) \rho D^3}{\mu^2}, \quad (6.19)$$

уравнение (6.18) можно представить в виде

$$\text{Re}^2 \cdot C_D = \frac{4}{3} \text{Ar}. \quad (6.20)$$

Из (6.20) следует, то для заданного режима движения частицы числа Рейнольдса и Архимеда связаны однозначной зависимостью или критериальным уравнением (6.20). Это уравнение удобно использовать для определения стационарной скорости частицы.

Рассчитав по заданным параметрам задачи (ρ , ρ_p , D , μ) число Архимеда (6.19), из критериального уравнения (6.20) можно определить число Рейнольдса и по уравнению (6.17) – скорость стационарного осаждения (всплытия) частицы:

$$u_* = \frac{\mu}{\rho D} \text{Re}.$$

Для экспрессной оценки скорости частицы можно использовать график зависимости

$$\text{Re} = f(\text{Ar}) = 2 \sqrt{\frac{\text{Ar}}{3C_D}}. \quad (6.21)$$

На рис. 6.4 приведен график зависимости $Re(Ar)$ для Стоксовского режима ($C_D = 24/Re$). Максимальное значение числа Архимеда для данного режима, соответствующее $Re=1$, равно $Ar=18$.

На рис. 6.5 приведены графики зависимости $Re(Ar)$ для промежуточного ($C_D = 24/Re + (4/\sqrt[3]{Re})$) и автомодельного ($C_D=0.44$) режимов. Граничное значение числа Архимеда, разделяющее эти режимы, равно $Ar=270000$.

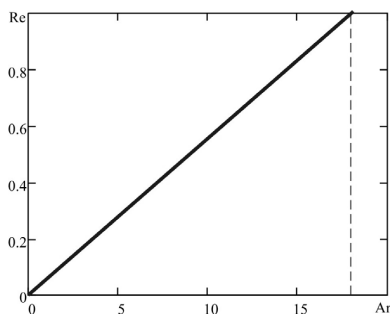


Рис. 6.4. Зависимость $Re(Ar)$ для Стоксовского режима движения частицы

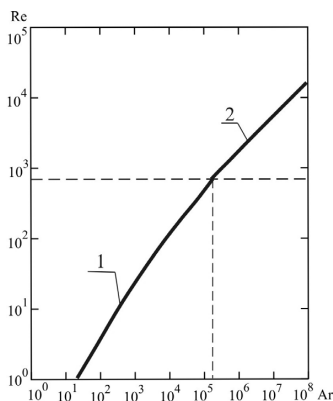


Рис. 6.5. Зависимость $Re(Ar)$ для промежуточного (1) и автомодельного (2) режимов движения частицы

Пример расчета 1

Определить скорость осаждения капли воды ($\rho_p=10^3 \text{ кг/м}^3$, $D=3 \text{ мм}$) в воздухе ($\rho=1.205 \text{ кг/м}^3$; $\mu=1.808 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$).

1. По заданным параметрам задачи рассчитываем число Архимеда:

$$\begin{aligned} \text{Ar} &= \frac{g(\rho_p - \rho) \rho D^3}{\mu^2} = \\ &= \frac{9.80665(1000 - 1.205) \cdot 1.205 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^3}{(1.808 \cdot 10^{-5})^2} = 974880, \end{aligned}$$

2. Определяем режим течения. Поскольку число Архимеда больше граничного значения $\text{Ar} > 270000$, то реализуется автомодельный режим течения.

3. Из (6.21) для найденного значения числа Архимеда находим значение числа Рейнольдса для $C_D = 0.44$:

$$\text{Re} = 2 \sqrt{\frac{\text{Ar}}{3C_D}} = 2 \sqrt{\frac{974880}{3 \cdot 0.44}} = 1718.$$

4. Из (6.17) определяем скорость движения капли

$$u_* = \frac{\mu \text{Re}}{\rho D} = \frac{1.808 \cdot 10^{-5} \cdot 1718}{1.205 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 8.6 \text{ м/с.}$$

Пример расчета 2

Определить скорость всплытия пузырька воздуха ($D = 3$ мм, $\rho_p = 1.205 \text{ кг/м}^3$) в глицерине ($\rho = 1270 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1.4 \text{ Па} \cdot \text{с}$).

1. По заданным параметрам задачи рассчитываем число Архимеда:

$$\text{Ar} = \frac{g(\rho - \rho_p) \rho D^3}{\mu^2} = \frac{9.80665(1270 - 1.205) \cdot 1270 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^3}{(1.4)^2} = 0.2.$$

2. Определяем режим течения. Поскольку число Архимеда $\text{Ar} < 18$, то реализуется Стоксовский режим течения.

3. Из (6.21) для найденного значения числа Архимеда находим значение числа Рейнольдса для $C_D = 24 / \text{Re}$:

$$\text{Re} = 2 \sqrt{\frac{\text{Ar}}{3C_D}} = \frac{\text{Ar}}{18} = \frac{0.2}{18} = 0.01.$$

4. Из (6.17) определяем скорость движения капли

$$u_* = \frac{\mu \text{Re}}{\rho D} = \frac{1.4 \cdot 0.01}{1270 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 3.7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица гамма-функции

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1.00	1.0000	1.25	0.90640	1.50	0.88623	1.75	0.91906
0.1	0.99433	26	0.90440	51	0.88659	76	0.92137
0.2	0.98884	27	0.90250	52	0.88704	77	0.92376
0.3	0.98355	28	0.90072	53	0.88757	78	0.92623
0.4	0.97844	29	0.89904	54	0.88818	79	0.92877
1.05	0.97350	1.30	0.89747	1.55	0.88887	1.80	0.93138
0.6	0.96874	31	0.89600	56	0.88964	81	0.93408
0.7	0.96415	32	0.89464	57	0.89049	82	0.93685
0.7	0.95973	33	0.89338	58	0.89142	83	0.93969
0.9	0.95546	34	0.89222	59	0.89243	84	0.94261
1.10	0.95135	1.35	0.89115	1.60	0.89352	1.85	0.94561
11	0.94740	36	0.89018	61	0.89468	86	0.94869
12	0.94359	37	0.88931	62	0.89592	87	0.95184
13	0.93993	38	0.88854	63	0.89724	88	0.95507
14	0.93642	39	0.88785	64	0.89864	89	0.95838
1.15	0.93304	1.40	0.88726	1.65	0.90012	1.90	0.96177
16	0.92980	41	0.88767	66	0.90167	91	0.96523
17	0.92670	42	0.88636	67	0.90330	92	0.96877
18	0.92373	43	0.88604	68	0.90500	93	0.97240
19	0.92089	44	0.88581	69	0.90678	94	0.97610
1.20	0.91817	1.45	0.88566	1.70	0.90864	1.95	0.97988
21	0.91558	46	0.88560	71	0.91057	96	0.98374
22	0.91311	47	0.88563	72	0.91258	97	0.98768
23	0.91075	48	0.88575	73	0.91467	98	0.99171
24	0.90852	49	0.88595	74	0.91683	99	0.99581
1.25	0.90640	1.50	0.88623	1.75	0.91906	2.00	1.00000

Значения гамма-функции для $x < 1$ и для $x > 2$ могут быть вычислены с помощью формул:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Приложение 2

Размерности основных механических и теплодиффузионных величин в системе СИ

Основные единицы СИ

Величина	Наименование	Обозначение	
		Русское	Intern.
Длина	метр	м	m
Масса	килограмм	кг	kg
Время	секунда	с	s
Сила электрического тока	ампер	А	A
Термодинамическая температура	кельвин	К	K
Количество вещества	моль	моль	mol
Сила света	кандела	кд	cd

Механические величины

Величина	Обозначение		Размерность
	Русское	Intern.	
Скорость	м/с	m/s	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Ускорение	м/с ²	m/s ²	$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Энергия и работа	Дж	J	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность	Вт	W	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$
Сила	Н	N	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Давление	Па	Pa	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Плотность	ρ	ρ	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
Коэффициент динамической вязкости	μ	μ	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент кинематической вязкости	ν	ν	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент поверхностного натяжения	σ	σ	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$

Теплодиффузионные величины

Величина	Обозначение		Размерность
	Русское	Intern.	
Количество теплоты	Дж	J	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$
Тепловой поток	Вт	W	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$
Плотность теплового потока	Вт/м ²	W/m ²	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Удельная теплоемкость	с	c	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$
Коэффициент теплопроводности	λ	λ	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$
Коэффициент теплоотдачи	α	α	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$
Коэффициент температуропроводности	κ	κ	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент диффузии	D	D	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
Коэффициент массоотдачи	α	α	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Газовая постоянная	R	R	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
2. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972. 440 с.
3. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 172 с.
4. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976. 296 с.
5. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. 2-е издание. М.: Энергоиздат, 1981. 472 с.
6. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 264 с.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
9. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред. Итоги науки и техники. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1972. Т. 6. 174 с.
10. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений. Комплексные и специальные разделы механики. М.: ВИНТИ, 1988. Том 3. С. 3-80.
11. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем. Учебное пособие для вузов. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 374 с.
12. Шилияев М.И., Шилияев А.М. Аэродинамика и тепломассообмен газодисперсных потоков. Учебное пособие. Томск: Изд-во Томск. гос. архит.-строит. ун-та, 2003. 272 с.
13. Архипов В.А., Шереметьева У.М. Аэрозольные системы и их влияние на жизнедеятельность: Учебное пособие. Томск: Издательство Томского государственного педагогического университета. 2007. 134 с.
14. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. Л.: Химия, 1969. 428 с.
15. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию. М.: Мир, 1987. 280 с.
16. Коузов П.А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1971. 280 с.
17. Архипов В.А., Бондарчук С.С. Оптические методы диагностики гетерогенной плазмы продуктов сгорания. Учебное пособие. Томск: Томский государственный университет, 2010. 265 с.
18. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
19. Архипов В.А., Березиков А.П. Основы теории инженерно-физического эксперимента. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. 206 с.
20. Бронштейн Б.И., Фишбейн Г.А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 279 с.

Учебное издание

**Владимир Афанасьевич Архипов,
Анна Сергеевна Усанина**

ДВИЖЕНИЕ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ

Издание вышло в свет в авторской редакции

Оригинал-макет К.В. Полькиной

В оформлении обложки использована фотография с сайта <http://www.fon-stola.com>

Подписано к печати 15.10.2013 г. Формат 60х84¹/₁₆

Бумага офсетная. Гарнитура Times

Усл. печ. л. 5,3

Тираж 50 экз. Заказ № 39

Отпечатано на оборудовании

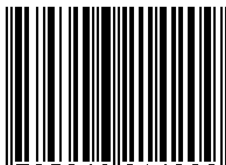
Издательского Дома

Томского государственного университета

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. Корп. 4. Оф. 011

Тел. 8+(382-2)–52-98-49

ISBN 978-5-9462-1420-9



9 785946 214209 >

**ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
Томского государственного университета
создан в 1969 г.**

Почтовый адрес: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

E-mail: rio.tsu@mail.ru

Web-site: <http://www.publish.tsu.ru>

Тел. 8(382-2)-52-98-49

Деятельность Издательского Дома Томского государственного университета началась в 1969 г. с выпуска научной и учебной литературы для вузов г. Томска. В настоящее время основными ее направлениями являются подготовка и выпуск учебных, научных, периодических, рекламно-информационных изданий, а также изданий культурного назначения.

Высокий уровень квалификации специалистов и современное полиграфическое оборудование позволяют оперативно и качественно выполнить самый сложный заказ.