32-я Летняя Многопредметная Школа

7 класс

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Будимир Баев
Владимир Брагин
Надежда Власова
Александр Смирнов

На краю
Пучины дикой — зыбки, а быть может —
Могилы Мирозданья, где огня
И воздуха, материков, морей
В помине даже нет, но все они
В правеществе зачаточно кишат,
Смесившись и воюя меж собой,
Пока Творец Всевластный не велит
Им новые миры образовать;
У этой бездны осторожный Враг,
С порога Ада созерцая даль,
Обмысливал свой предстоящий путь...

Оглавление

Делимость

04.07.16

Как зарплату делить будем?
Поровну, по-честному,
по-братски или по
справедливости?

@shhdup

1. Пусть a — чётное число, не кратное 4. Докажите, что разность $a^2 - 4$ делится на 32.

2. Известно, что $5x + 8y - 1$ делится на 13.
a) Докажите, что $5x + 60y - 1$ делится на 13.
b) Найдите остаток от деления $18x - 31y$ на 13.
c) Найдите остаток от деления $x - y$ на 13.

3. Вася написал на доске два числа, перемножил их и получил четырёхзначное число. После этого он заменил буквы на числа, причём разным числам соответствуют разные буквы. В итоге получилось $AB \cdot CD = EEFF$. Докажите, что Вася ошибся.

4. На очень большой и длинной доске записано число 11^{2016}. Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем снова вместо полученного числа записали сумму его цифр. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется однозначное число. Найдите это число.

5. На доске записаны два числа: единица и двойка. Каждую минуту Маша умножает два самых больших числа, написанных на доске, прибавляет к ним 1 и записывает полученное число на доску. Докажите, что Маша никогда не запишет число, делящееся на 4.

6. Пусть $k > 2$ — нечётное натуральное число. Докажите, что для любого натурального n число $1^{k^n} + 2^{k^n} + ... + (k-1)^{k^n}$ делится на k.

7. Может ли $5^n - 1$ делиться на $4^n - 1$ при натуральном n?

8. В ряд записана последовательность чисел a_n, причём оказалось, что для любого числа, начиная с третьего, справедлива формула $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$. Оказалось, что первые два члена — простые числа. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может еще встретиться после них?

Вступительная олимпиада

04.07.16

1. На острове Мадагаскар есть Холм и Озеро. Глория идет от Холма к Озеру, а навстречу ей от Озера бежит Алекс. Известно, что Глория проходит этот путь за 5 часов, а Алекс всего за час. Через 50 минут после встречи Глории и Алекса Марти также прошел от Озера к Холму, причем это расстояние Марти проходил 1 час 40 минут. Через сколько минут после встречи с Глорией Марти дойдет до Холма, если Глория и Алекс начали движение одновременно? Ответ обоснуйте.

2. Натуральные числа от 1 до 20 расставили по кругу в некотором порядке, а затем покрасили в красный цвет те из них, которые являются делителями своего правого соседа. Какое наибольшее количество красных чисел могло получиться?

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны, $AB = ED$, $BC = CD$. Докажите, что отрезки AD и BE равны.

4. Пусть d_1, d_2, d_3 и d_4 — наименьшие различные делители натурального числа n. Оказалось, что $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$. Чему могло быть равно n (укажите все варианты)?

5. Если в детектор фальшивых монет опустить 5 монет весом a, b, c, d, e граммов, где $a < b < c < d < e$, то он сбросит монеты весом b и c граммов в правую чашу, а остальные в левую. Есть 50 монет попарно различных по весу, они пронумерованы и легко различаются по внешнему виду. Как при помощи детектора определить самую легкую монету?

6. На острове рыцарей (которые говорят только правду) и лжецов (которые всегда лгут) состоялся шахматный фестиваль. 64 любителя шахмат встали по одному на клетки большой шахматной доски. После этого каждый сказал: “*Среди людей, стоящих со мной на одной горизонтали, больше лжецов, чем среди людей, стоящих со мной на одной вертикали*”. Докажите, что количество рыцарей делится на 8.

Геометрические неравенства. 05 июля.

1. (тестовая, на знание двух теорем) На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка E такая, что $\angle DEA + \angle DBA = 180°$. Докажите, что $BC + DE > CD$.

Теоретические

2. В треугольнике напротив наибольшей стороны угол равен $60°$. Чему равны два других угла?

3. На плоскости отмечены точки $A_1, A_2, ..., A_n$, где $n \geq 3$. Докажите, что $A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$. Когда достигается равенство?

4. Отрезки AC и BD пересекаются. Докажите, что $AB+CD < AC + BD$.

5. а) Точки M и N расположены по одну сторону от прямой ℓ. Постройте на прямой ℓ такую точку K, чтобы сумма $MK + NK$ была наименьшей.
   б) Точки M и N расположены по разные стороны от пары параллельных прямых. Постройте на прямых точки A и B, так чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямым, а сумма отрезков MA, AB и BK была наименьшей.
   в) Точка M лежит внутри острого угла. Постройте на сторонах этого угла точки A и B, для которых периметр треугольника AMB был бы наименьшим.

6. а) В треугольнике ABC отмечена точка T. Докажите, что $AT + CT < AB + CB$.
   б) Внутри треугольника ABC расположен треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что его периметр меньше периметра треугольника ABC.
   в) Внутри выпуклого многоугольника $A_1A_2...A_n$ расположен выпуклый многоугольник $B_1B_2...B_m$. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра наружного.

7. В треугольнике ABC отмечена произвольная точка T. Докажите, что $AT+BT+CT$ больше полупериметра и меньше периметра треугольника ABC.

Более сложные геометрические неравенства

8. На стороне AB треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AB = CD$. Докажите, что $BC > AD$.

9. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, m_a, m_b, m_c — длины опущенных на эти стороны медиан и $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр данного треугольника. Докажите, что $m_a + m_b + m_c > p$.

10. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точку D, а на продолжении стороны AC за точку C – точку E таким образом, что $AD = CE$. Докажите, что $BD + BE > BA + BC$.

11. Отрезки AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что а) $AB_1 < AB$; б) $A_1B_1 < AB$.

12. В треугольнике ABC провели биссектрису CK, а в треугольнике CKB провели биссектрису KL. Прямые KL и AC пересеклись в точке M. Известно, что $\angle CAB > \angle BCA$. Докажите, что $AK + KC > AM$.

Графы-1. 05 Июля.

1. На банкете встретились 25 бизнесменов. После банкета каждый из них пришел домой и послал по подарку каким-то семи из остальных. Верно ли, что обязательно найдутся два бизнесмена, первый из которых послал подарок второму, а второй первому — нет?

2. Чтобы отвести на завтрак, 100 детей построили парами. На обратном пути из столовой их снова построили парами, возможно, составленными по-другому. При каком наибольшем n наверняка можно выбрать n детей, никакие два из них не были в одной паре?

3. В стране 12 городов, причем любые два из них соединены дорогой. 10 дорог закрыли на ремонт. Докажите, что из любого города можно доехать до любого другого по этим дорогам.

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

5. В стране 96 городов, из которых 24 – областные, некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один областной город. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

6. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

7. На вечеринку пришло 2016 пар гостей (каждая пара состоит из мальчика и девочки). Известно, что каждый гость кроме своего партнера знаком еще хотя бы с одним гостем противоположного пола. Докажите, что организаторы вечеринки могут раздать всем гостям шляпы трех цветов так, что у каждого гостя будет хотя бы два знакомых в шляпах разного цвета.

8. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете меньше 100 столиц.

9. В кружок записались 15 мальчиков и 15 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с тремя девочками. Докажите, что можно выбрать шестерых мальчиков и двух девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.