# 32-я Летняя Многопредметная Школа

**7 класс**

КИРОВСКАЯ ЛЕТНЯЯ МНОГОПРЕДМЕТНАЯ ШКОЛА, с. ВИШКИЛЬ, 3-28 июля 2016 г.,

32

Л М

Ш

Александр Голованов
Алексей Ильин
Вера Катякова
Николай Крохмаль
Леонид Попов
Анна Рогозина
Вадим Русаков
Полина Святокум

## Вместо предисловия

Доброго времени суток, неведомый читатель!

Если Вы держите эту книгу в руках, или пролистываете её электронный вариант, значит, Вам стало интересно, как проходила 32 смена Кировской Летней Многопредметной Школы 2016 у самой многочисленной её параллели Математиков 7 класса, а точнее, у её непрофи-групп. Пытаетесь ли Вы вспомнить, какой она была, или просто штудируете материал в поисках интересных задачек, мы рады, что наше творчество привлекло Ваше внимание. Здесь вы можете найти все задачки, которые пытались решить наши ученики на протяжении всей смены.

Основную сложность организации учебного процесса составляло количество ребят в непрофи группах, и во всей параллели в целом (74 человека всё-таки). В связи с этим, в некоторых темах задач довольно много, так как у некоторых листочков есть несколько вариаций, зависящих от уровня учеников, коим данный листочек выдавался. В книжке представлено объединение всех этих версий воедино.

Но раз Вы читаете это, значит мы (преподаватели М7) преодолели все трудности и сумели научить детей чему-то новому.

Теперь же, нам хотелось бы обратиться к тем, кто вдохновил нас на создание этой книжки.

Дорогие, любимые и обожаемые дети М7! Нам было очень приятно провести с вами эти 25 ярких дней. Спасибо вам за оригинальность мыслей, любознательность, невероятную заинтересованность в жизни лагеря и неподдельную тягу к знаниям! Мы надеемся, что ещё не раз увидимся с вами меж Вишкльских сосен. Удачи на грядущих олимпиадах, и до скорых встреч.

С любовью,

преподаватели М7

Ищите нас тут: `https://vk.com/lmsh20152019`.

# Оглавление


**Делимость. 4 июля** . . . . . 4
**Вступительная олимпиада. 4 июля** . . . . . 5
**Геометрические неравенства. 5 июля** . . . . . 6
**Сравнения. 5 июля** . . . . . 8
**Инвариант. 6 июля** . . . . . 10
**Двудольные графы. 6 июля** . . . . . 12
**Площади. 7 июля** . . . . . 14
**Классическая комбинаторика. 7 июля** . . . . . 17
**ГМТ. 9 июля** . . . . . 19
**Индукция. 9 июля** . . . . . 20
**Деревья. 10 июля** . . . . . 22
**Малая теорема Ферма. 10 июля** . . . . . 24
**Четвёртый признак «равенства» треугольников. 11 июля** . . . . . 26
**Треугольник Паскаля. 11 июля** . . . . . 27
**Матбой-междусобой. 12 июля** . . . . . 29
**Индукция-2. 14 июля** . . . . . 30
**Симметрия. 14 июля** . . . . . 32
**Алгоритм Евклида. 15 июля** . . . . . 34
**Изоморфизм комбинаторных задач. 15 июля** . . . . . 36
**Перекладывание отрезков. 16 июля** . . . . . 38
**Линейное представление НОД. 16 июля** . . . . . 39
**Дискретная непрерывность. 17 июля** . . . . . 40
**Точки пересечения биссектрис. 19 июля** . . . . . 41
**Индукция в графах. 19 июля** . . . . . 43
**Шары и перегородки. 20 июля** . . . . . 44
**Точка пересечения высот. 20 июля** . . . . . 46
**Теорема Вильсона. 21 июля** . . . . . 47
**Геометрический разнобой. 21 июля** . . . . . 49
**Полуинвариант. 22 июля** . . . . . 50
**Разнобой. 22 июля** . . . . . 52
**Заключительная олимпиада. 24 июля** . . . . . 53
**Программа теоретического зачета.** . . . . . 54

# Делимость

*04.07.16*

*Как зарплату делить будем? Поровну, по-честному, по-братски или по справедливости?*

@shhdup

**1.** Пусть $a$ — чётное число, не кратное 4. Докажите, что разность $a^2 - 4$ делится на 32.

**2.** Известно, что $5x + 8y - 1$ делится на 13.
**a)** Докажите, что $5x + 60y - 1$ делится на 13.
**b)** Найдите остаток от деления $18x - 31y$ на 13.
**c)** Найдите остаток от деления $x - y$ на 13.

**3.** Вася написал на доске два числа, перемножил их и получил четырёхзначное число. После этого он заменил буквы на числа, причём разным числам соответствуют разные буквы. В итоге получилось $AB \cdot CD = EEFF$. Докажите, что Вася ошибся.

**4.** На очень большой и длинной доске записано число $11^{2016}$. Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем снова вместо полученного числа записали сумму его цифр. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется однозначное число. Найдите это число.

**5.** На доске записаны два числа: единица и двойка. Каждую минуту Маша умножает два самых больших числа, написанных на доске, прибавляет к ним 1 и записывает полученное число на доску. Докажите, что Маша никогда не запишет число, делящееся на 4.

**6.** Пусть $k > 2$ — нечётное натуральное число. Докажите, что для любого натурального $n$ число $1^{k^n} + 2^{k^n} + ... + (k-1)^{k^n}$ делится на $k$.

**7.** Может ли $5^n - 1$ делиться на $4^n - 1$ при натуральном $n$?

**8.** В ряд записана последовательность чисел $a_n$, причём оказалось, что для любого числа, начиная с третьего, справедлива формула $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}$. Оказалось, что первые два члена — простые числа. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может еще встретиться после них?

# Вступительная олимпиада

*04.07.16*

**1.** На острове Мадагаскар есть Холм и Озеро. Глория идет от Холма к Озеру, а навстречу ей от Озера бежит Алекс. Известно, что Глория проходит этот путь за 5 часов, а Алекс всего за час. Через 50 минут после встречи Глории и Алекса Марти также прошел от Озера к Холму, причем это расстояние Марти проходил 1 час 40 минут. Через сколько минут после встречи с Глорией Марти дойдет до Холма, если Глория и Алекс начали движение одновременно? Ответ обоснуйте.

**2.** Натуральные числа от 1 до 20 расставили по кругу в некотором порядке, а затем покрасили в красный цвет те из них, которые являются делителями своего правого соседа. Какое наибольшее количество красных чисел могло получиться?

**3.** В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы $ABC$ и $CDE$ равны, $AB = ED$, $BC = CD$. Докажите, что отрезки $AD$ и $BE$ равны.

**4.** Пусть $d_1, d_2, d_3$ и $d_4$ — наименьшие различные делители натурального числа $n$. Оказалось, что $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$. Чему могло быть равно $n$ (укажите все варианты)?

**5.** Если в детектор фальшивых монет опустить 5 монет весом $a, b, c, d, e$ граммов, где $a < b < c < d < e$, то он сбросит монеты весом $b$ и $c$ граммов в правую чашу, а остальные в левую. Есть 50 монет попарно различных по весу, они пронумерованы и легко различаются по внешнему виду. Как при помощи детектора определить самую легкую монету?

**6.** На острове рыцарей (которые говорят только правду) и лжецов (которые всегда лгут) состоялся шахматный фестиваль. 64 любителя шахмат встали по одному на клетки большой шахматной доски. После этого каждый сказал: "*Среди людей, стоящих со мной на одной горизонтали, больше лжецов, чем среди людей, стоящих со мной на одной вертикали*". Докажите, что количество рыцарей делится на 8.

# Геометрические неравенства

*05.07.16*

*По этим причинам Геральт был слабо знаком с местностью в Эмблонии или, в соответствии с более поздними картами, Понтарии и Приречья. Он не имел ни малейшего понятия, до какого из указанных на столбе населённых пунктов ближе и в какую сторону он должен двинуться с перекрестка, чтобы как можно скорее попрощаться с безлюдной пустошью и добраться до какой-либо цивилизации.*

А. Сапковский, "Сезон гроз"

**1. Все должны знать.**
Пусть $ABC$ — треугольник. Тогда для его сторон справедливо неравенство

$$AB + BC > AC > |AB - BC|.$$

В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.

**2. Задача из теста.**
Докажите, что длина медианы меньше полусуммы прилегающих сторон.

**1.** В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа: 1, 2, 2.8, 5, 7.5. Чему равна длина измеренной диагонали?

**2.** а) Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра.
б) Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше полупериметра.

**3.** Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними не превосходит наибольшей стороны треугольника.

**4.** Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними не превосходит полупериметра треугольника.

**5.** а) Точка $M$ расположена внутри треугольника $ABC$. Докажите, что $BM + CM < AB + AC$.
б) Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин меньше периметра.

**6.** Четыре дома находятся в вершинах выпуклого четырехугольника. Где выкопать колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была минимальной?

**7.** а) Коля и Вася живут по одну сторону от дороги. Вася хочет прийти к Коле в гости, купив по пути конфеты. Где нужно построить магазин, чтобы Вася прошел самое маленькое расстояние? (Магазин можно строить только у дороги).
б) Васин дом и школа находятся по разные стороны от большой дороги. Вася примерный мальчик и переходит дорогу только по пешеходному переходу (перпендикулярно дороге). В каком месте дороги нужно сделать пешеходный переход, чтобы Васин путь до школы был минимален?

**8.** Полуостров, на котором живет Коля, представляет из себя острый угол. Коля хочет побывать у двух берегов и вернуться домой таким образом, чтобы длина пути была наименьшей. Как ему это сделать? (Коля ходит по прямой)

**9.** На основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отметили точку $D$, а на продолжении стороны $AC$ за точку $C$ — точку $E$ таким образом, что $AD = CE$. Докажите, что $BD + BE > BA + BC$.

**10.** Точка $D$ — середина основания $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$. Точка $E$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $D$ на сторону $BC$. Отрезки $AE$ и $BD$ пересекаются в точке $F$. Установите, какой из отрезков $BF$ или $BE$ длиннее.

**11.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle BCD = 120°$. Докажите, что $AC + BD \geq AB + BC + CD$.

**12.** Расставьте на сторонах равностороннего треугольника $ABC$ точки $X$, $Y$ и $Z$ ($X$ на $BC$, $Y$ на $CA$ и $Z$ на $AB$) таким образом, чтобы периметр треугольника $XYZ$ был наименьшим.

# Сравнения

*05.07.16*

> *Посмотрите на своего мужчину, а теперь на меня. И снова на своего мужчину, и снова на меня.*
>
> Реклама Old Spice

**Определение.** Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число $n$, то говорят, что они сравнимы по модулю $m$. Записывают это так: $a \underset{m}{\equiv} b$ или $a \equiv b\,(mod\,m)$.

**Упражнение 1.** Числа $a$ и $b$ сравнимы по модулю $n$ тогда и только тогда, когда число $a-b$ сравнимо с 0 по модулю $n$.

**Свойства сравнений:**

a) если $a \underset{m}{\equiv} b$, $b \underset{m}{\equiv} c$, то $a \underset{m}{\equiv} c$; b) $a \underset{m}{\equiv} a+km$, где $k$ — целое число;

c) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a+c \underset{m}{\equiv} b+c$; d) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a+c \underset{m}{\equiv} b+d$;

e) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $ac \underset{m}{\equiv} bc$; f) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $ac \underset{m}{\equiv} bd$;

**1.** Доказать упражнение и все свойства сравнений.

**2.** Докажите, что:

**a)** если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^k \underset{m}{\equiv} b^k$, где $k$ — натуральное число;

**b)** привести пример, когда $ac \underset{m}{\equiv} bc$, но не выполняется $a \underset{m}{\equiv} b$.

**c)** сформулируйте, когда можно сокращать на одно и то же число обе части сравнения, и докажите это свойство.

**3.** Найдите остаток от деления:
**a)** $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11.
**b)** $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000.
**c)** $2015 \cdot 2014 \cdot 2013 + 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 2016.

**4.** Найдите остаток от деления:
**a)** $9^{2016} + 13^{2016}$ на 11.
**b)** $9^{2015} + 13^{2015}$ на 11.

**5.** Докажите, что **a)** $2^{2016} \underset{5}{\equiv} 3^{2016}$; **b)** $2^{2016} \underset{13}{\equiv} 3^{2016}$; **c)** найдите еще хотя бы одно простое число $p$, для которого $2^{2016} \underset{p}{\equiv} 3^{2016}$.

**6.** Пусть $A$ — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2017, а $B$ — произведение всех чётных чисел от 2 до 2018. Докажите, что $A+B$ делится на 2019.

### На подумать

**7.** Докажите, что число $(5^n - 1)^n - 6$ делится на $5^n - 6$.

**8.** Радиолампа имеет 1001 контакт, расположенных по кругу и включаемых в штепсель, имеющий 1001 отверстие. Можно ли так занумеровать контакты лампы и отверстия штепселя, чтобы при любом включении лампы хотя бы один контакт попал на свое место (т.е. в отверстие с тем же номером)?

**9.** Первоклассник Петя знает только цифры 1 и 2. Докажите, что он может написать число, делящееся на 123456789.

**10.** Число $1\underbrace{33...33}_{k}$ — простое. Докажите, что $k$ — нечетное.

# Инвариант

*06.07.16*

*А вы, друзья, как ни садитесь,*
*Всё в музыканты не годитесь.*

И. А. Крылов, “Квартет”

**Задачи на разбор.**

**1.** На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке - по чижу. Елки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке?

**2.** На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

**3.** В пробирке находятся марсианские амебы трех типов:$A$, $B$ и $C$. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа $A$ было 20 штук, типа $B$ – 21 штука и типа $C$ – 22 штуки?

**Задачи для самостоятльного решения.**

**1.** На площадке возле девятого корпуса шишками выложены три числа 1000, 1111 и 2016. Каждую минуту Аня заменяет

а) имеющиеся три числа $a$, $b$, $c$ на числа $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$.

б) произвольные два числа $a$ и $b$ на $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{a}$

в) произвольные два числа $a$ и $b$ на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$

Могут ли получиться числа $2015,\ 2016,\ 2017$?

**2.** На сосне растут 8 бананов и 7 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то на сосне тут же вырастет один банан, а если сорвать два разных – вырастет один апельсин. Срывать фрукты по одному нельзя. В конце концов на сосне остался один фрукт. Какой?

**3.** Клетки доски $10 \times 10$ покрашены в белый цвет. За один ход разрешается перекрасить все клетки квадрата $6 \times 6$ в противоположный цвет. Можно ли за конечное число ходов получить шахматную раскраску доски?

**4.** Круг разделен на 6 секторов. Разрешается добавлять по одному камешку в любые два соседних сектора. Можно ли добиться, чтобы во всех секторах было поровну камешков, если в начале в двух секторах, расположенных через один, лежит по камешку

**5.** На столе лежит куча из 2017 камней. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трех камней?

**6.** В квадрате $n \times n$ верхний правый угол покаршен в белый цвет, а все остальные клетки в чёрный. Разрешается в столбце или строке перекрасить все клетки в противоположный цвет. Можно ли добиться того, что весь квадрат будет белый?

**7.** В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в действительности попарные расстояния не изменились.

**8.** Камни лежат в трёх кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

**9.** На доске были записаны числа 2, 5 и 8. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых равно 2016. Найдите остальные числа.

# Двудольные графы

*06.07.16*

*Дало две доли провидение*
*На выбор мудрости людской:*
*Или надежду и волнение,*
*Иль безнадежность и покой.*

Е. А. Боратынский, “Две доли”

Граф — *двудольный,* если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет рёбер с концами одинакового цвета.

**1.** Пусть Г — двудольный граф с чёрными и белыми вершинами. Докажите, что
а) Все циклы в графе Г имеют чётную длину.
б) Если в Г есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
в) Если в Г есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.

**2.** Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 8 | 9 |
| 2 | 3 | 6 | 7 | 10 |

Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?

**3.** Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

**4.** а) Докажите, что следующий граф — двудольный: Вершины графа — расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.
б) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

**5.** а) 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек, либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

б) Возможно ли это при другом первоначальном количестве кружковцев?

**6.** На клетчатой доске $11 \times 11$ отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

# Площади

*07.07.16*

*Я никогда не читаю, я просто смотрю на картинки.*

Энди Уорхол

**Определение.** Каждой фигуре $M$ на плоскости ставится в соответствие число $S_M$, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:

1. $S_M > 0$;
2. Площади равных фигур равны;
3. Если фигура $M$ состоит из фигур $A$ и $B$, не имеющих общих точек, то $S_M = S_A + S_B$;

**1.** (*Рельсы Евклида*) Дан прямоугольник $ABCD$.
а) На $BC$ взята точка $K$. Докажите, что $S_{ABCD} = 2S_{AKD}$.
б) На $BC$ взяты точки $K$ и $L$. Докажите, что $S_{AKD} = S_{ALD}$.
в) Будут ли верны эти результаты, если точки $K$ и $L$ взять на прямой $BC$?

**2.** Докажите, что закрашенные параллелограммы равны по площади.

**3.** Докажите, что закрашена половина площади параллелограмма (точка — произвольная внутренняя точка параллелограмма).

**4.** (*Лемма о линолеуме*) Если пол в комнате площадью $S$ надо покрыть линолеумом общей площадью также $S$ так, чтобы не было участков, покрытых более чем в два слоя, то площадь пола, покрытая дважды, равна площади пола, не покрытой ни разу. Докажите лемму.

**5.** Докажите, что сумма площадей незакрашенных фигур равна сумме площадей фигур, закрашенных тёмным.

**6.** Докажите, что а) медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади;
б) пусть чевиана (то есть отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне) делит сторону в отношении $m : n$. Тогда площади получившихся треугольников относятся как $m : n$.

**7.** Выразите $X$ через $S$ ($X = S_{ABC}$).

**8.** В пятиугольнике $ABCDE$ стороны $BC$ и $CD$ параллельны соответственно диагоналям $AD$ и $BE$. Докажите, что треугольники $ABC$ и $CDE$ равновелики.

**9.** Через точку $D$, лежащую на стороне $BC$ треугольника $ABC$, проведены прямые параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны $AB$ и $AC$ соответственно в точках $E$ и $F$. Докажите, что треугольники $CDE$ и $BDF$ равновелики.

**10.** Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли произвольную точку $M$. Прямая $BM$ пересекает $AD$ в точке $E$. Докажите что площади треугольников $AMD$ и $CME$ равны.

**11.** (*Теорема Пифагора*) Докажите, что сумма площадей квадратов построенных на катетах, равна площади квадрата построенного на гипотенузе, используя рельсы Евклида.

**12.** В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка — вершина $A$ соединена с серединой стороны $BC$, вершина — $B$ с серединой стороны $CD$, вершины $C$ и $D$ — с серединами сторон $AD$ и $AB$ (соответственно). Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками — параллелограмм, и что его площадь в пять раз меньше площади данного параллелограмма.

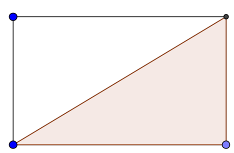


Рис. 1: 1a)

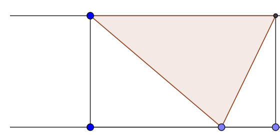


Рис. 2: 1a)

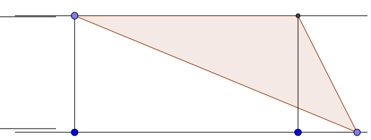


Рис. 3: 1c)

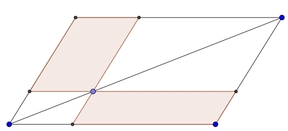


Рис. 4: 2)

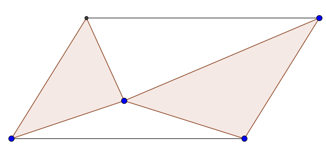


Рис. 5: 3)

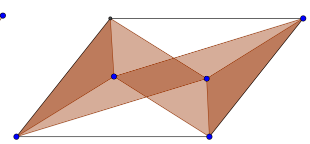


Рис. 6: 5a)

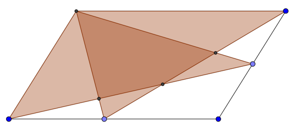


Рис. 7: 5b)

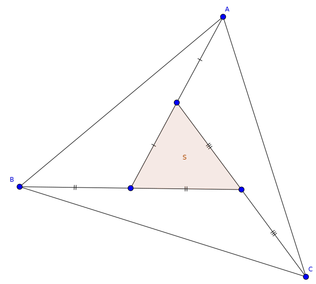



Рис. 8: 7a)

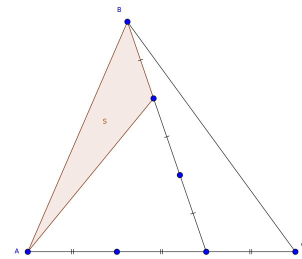



Рис. 9: 7b)

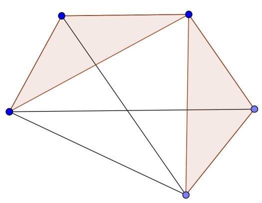


Рис. 10: 8)

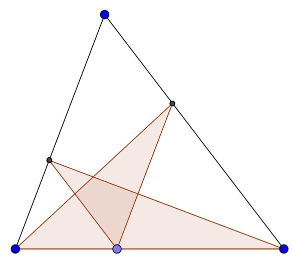


Рис. 11: 9)

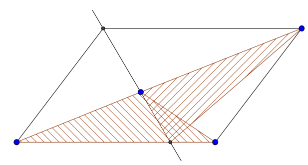


Рис. 12: 10)

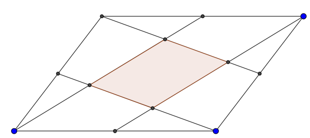


Рис. 13: 12)

# Классическая комбинаторика

*07.07.16*

*Это знать надо! Это классика!*

Товарищ капитан

*Материалы для работы по группам на второй паре. Цель работы — доказать следующие равенства комбинаторно. У разных групп разные наборы неравенств.*

**1.** $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

**2.** $C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 + \cdots + C_n^n \cdot 2^n = 3^n$

**3.** $C_n^0 C_n^m + C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + \cdots + C_n^m C_{n-m}^{n-m} = 2^m C_n^m$

**4.** $C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$

**5.** $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$

---

**1.** $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

**2.** $C_p^0 C_q^k + C_p^1 C_q^{k-1} + \cdots + C_p^{k-1} C_q^1 + +C_p^k C_q^0 = C_{p+q}^k$

**3.** $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \cdots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$

**4.** $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$

**5.** $1 + 14C_n^1 + 36C_n^2 + 24C_n^3 = (n+1)^4 - n^4$

---

**1.** $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$

**2.** $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}$

**3.** $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

**4.** $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$

**5.** $C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 = n^4$

---

**1.** Сколькими способами могут выпасть три различные игральные кости?

a. Во скольких случаях хотя бы на одной кости будет 6 очков?

b. Ровно на одной будет 6 очков?

c. Ровно на одной 6, а ровно на одной другой 3 очка?

**2.** Имеется $n$ абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить 3 пары абонентов?

**3.** Сколькими способами можно выстроить в шеренгу 5 футболистов, 5 бегунов и 5 боксёров так, чтобы никакие два боксёра не стояли рядом (отличить двух спортсменов, занимающихся одним видом спорта, невозможно).

**4.** В выпуклом $n$-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Найдите количество точек пересечения диагоналей.

**5.** Пусть $p > 2$ — простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного $p$-угольника в $a$ цветов? (раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.)

**6.** Пусть $p > 2$ — простое число. Сколькими способами можно провести через вершины правильного $p$-угольника замкнутую ориентированную $p$-звенную ломаную? (ломаные, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.)

# ГМТ

*09.07.16*

> *В общем случае, геометрическое место точек формулируется параметрическим предикатом, аргументом которого является точка данного линейного пространства.*
>
> Википедия

**Обозначение.** *Геометрическим местом точек (ГМТ)* называется фигура, состоящая из все точек плоскости, которые удовлетворяют какому-либо определенному условию.

**1.** a) Найдите ГМТ, равноудаленных от точек $A$ и $B$;
b) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух заданных прямых;
c) Найдите ГМТ, равноудаленных от сторон заданного угла;
d) Дан отрезок $AB$. Найдите ГМТ таких, что $AM < BM$.

**2.** Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что существуют две такие точки $O$, что $AO = DO$ и $BO = CO$. Докажите, что $AD$ и $BC$ параллельны.

**3.** Дан отрезок $AB$. Найдите ГМТ $M$ таких, что $AM$ — наименьшая сторона треугольника $ABM$ (ответ дайте в виде заштрихованной области).

**4.** Даны точки $A$ и $B$. Найдите ГМТ $M$ таких, что угол $\angle BAM < \angle AMB < \angle ABM$.

**5.** На прямой выбран отрезок $AB$. Из точки $D$ на этой прямой, но вне отрезка, восстановлен перпендикуляр $CD$ такой, что $AB = CD$. Сколько существует точек $M$ таких, что треугольники $ABM$ и $CDM$ равны?

**6.** Диагонали четырехугольника равны. Известно, что серединный перпендикуляр к одной его стороне пересекает противоположную сторону. Докажите, что это верно и для противоположной стороны.

**7.** Дан шестиугольник, никакие стороны которого не параллельны. Стороны покрашены в черный и белый цвет по очереди. Сколько существует точек, которые равноудалены от всех черных сторон?

**8.** Пусть $O$ — центр правильного треугольника $ABC$. Найдите ГМТ $M$, удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку $M$, пересекает либо отрезок $AB$, либо отрезок $CO$.

**9.** На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ берутся точки $D$ и $E$ (по одной на каждой). Найдите геометрическое место середин отрезков $DE$.

**10.** Найдите геометрическое место точек $M$, лежащих внутри ромба $ABCD$ и обладающих тем свойством, что $\angle AMD + \angle BMC = 180°$.

# Индукция

*09.07.16*


http://xkcd.ru/1516/

**1.** Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на уголки из трёх клеток.

**2.** На сколько частей делят плоскость $n$ прямых, среди которых нет параллельных, и никакие три не пересекаются в одной точке?

**3.** Докажите, что $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

**Задачи для самостоятельного решения.**

**1.** Докажите, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**2.** Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

**3.** Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

**4.** У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи (никакие три прямые не проходят через одну точку).

**5.** Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета.

**6.** Докажите, что если клетчатая доска $n \times n$ покрашена в 4 цвета так, что любой квадрат $2\times 2$ содержит все четыре цвета, то: если $n$ — чётно, то в углах квадрата стоят разные цвета; если $n$ — нечётно, то клетки в углах раскрашены не более, чем в 2 цвета.

**7.** Пусть $x$ — такое, что $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — целое для любого натурального $n$.

**8.** Доказать, что для любого натурального $n$ существует $n$-значное число, составленное из цифр 1 и 2, которое делится на $2^n$.

**9.** В выпуклом многоугольнике некоторые стороны и диагонали окрашены в красный цвет так, что никакие две красные диагонали не пересекаются внутри многоугольника, а любые две вершины многоугольника соединены ломаной из красных отрезков. Докажите, что сумма длин всех красных отрезков больше полупериметра многоугольника.

**10.** Есть два квадрата со стороной $25 \cdot 2^n$. В одном Василий Иванович отмечает одну клетку. Петька должен разрезать свой квадрат на части так, что:

(a) среди них есть квадратик со стороной 1;

(b) какую бы клетку Василий Иванович не отметил бы, Петька сможет закрыть своими фигурками все клетки квадрата Чапаева, кроме отмеченной.

Докажите, что Петьке достаточно разбить квадрат на $6 + n$ деталей.

# Деревья

*10.07.16*

*Дуров, верни стену!*

Довольные клиенты ВКонтакте после введения микроблога.

**Определение.** Будем давать несколько определений дерева:
1. Связный граф без циклов.
2. Граф, между любыми двумя вершинами которого существует единственный путь.
3. Связный граф, который при удалении любого ребра перестает быть связным.
4. Связный граф, количество ребер которого на 1 меньше количества вершин.

**Определение.** Листом (висячей вершиной) называется вершина дерева, которая имеет степень 1.

### Теоретические задачи

**1.** Докажите, что первое и второе определения дерева эквивалентны.

**2.** Докажите, что первое и третье определения дерева эквивалентны.

**3.** а) Докажите, что в каждом дереве (по первому определению) из более чем одной вершины есть лист.
б) Докажите, что в каждом дереве (по первому определению) из более чем одной вершины есть хотя бы два листа.

**4.** Докажите, что первое и четвертое определения дерева эквиваленты.

**5.** **Лемма о существовании остовного дерева (скелета).** Докажите, что из каждого связного графа можно удалить некоторое число ребер так, чтобы получилось дерево.

### Практические задачи

**1.** Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?

**2.** Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

**3.** Невод браконьера представляет собой прямоугольную сетку $100 \times 100$ клеток. После каждой поимки инспектор рыбоохраны обрезает в неводе одну веревочку (указанную браконьером), так, чтобы невод не распался на части. Сколько задержаний может выдержать браконьер до разрушения своего инструмента?

**4.** Имеется связный граф. Докажите, что в нем можно выбрать одну из вершин так, чтобы после ее удаления вместе со всеми ведущими из нее ребрами останется связный граф.

**5.** В доску вбито 2016 гвоздей. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход можно соединить два еще не соединенных между собой гвоздя ниткой. Кто выиграет при правильной игре, если получивший замкнутую цепь

а) проигрывает;

б) выигрывает?

**6.** В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перёлетов; б) 196 перелётов.

### Стена

**7.** а) В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество листов больше половины общего количества вершин.
б) Пусть $d$ — наибольшая степень вершины дерева. Докажите, что в этом дереве есть хотя бы $d$ листов.

**8.** В графе на 31 вершине все ребра покрашены в один из трех цветов так, что при удалении всех ребер любого цвета граф остается связным. Какое минимальное количество ребер может быть в этом графе?

**9.** В стране Летняя есть $n$ городов, которые соединены дорогами так, что из каждого города можно добраться до каждого. У каждой дороги есть прочность (у всех дорог разная), то есть максимальный вес автомобиля, который может по ней проехать. Каждый житель страны знает прочность каждой дороги, но не вес собственного автомобиля, потому планирует свое путешествие из одного города в другой так, чтобы минимальная прочность дороги, по которой он проедет, была максимальна. Правительство заметило, что в таком случае некоторыми дорогами никогда не воспользуется ни один житель, а потому было решено снести все неиспользуемые дороги и посадить на их месте кукурузу. Сколько дорог осталось в стране Летняя?

# Малая теорема Ферма

*10.07.16*

*Чем отличается ученик математического класса от ученика географического, экономического, политологического класса? Тем, что он больше размышляет над задачами? Да, и этим тоже. Но не только. Ещё он знает малую теорему Ферма...*

В. Сендеров, А. Спивак, "Малая теорема Ферма" (журнал "Квант", 2000, №1)

**1.** Пусть $a$ — некоторое число, которое не делится на простое число $p$.

**a)** Докажите, что в последовательности $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю $p$.

**b)** Докажите, что $(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \cdot a) \underset{p}{\equiv} (p-1)!$.

**c)** (Малая теорема Ферма) Докажите, что $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$.

**2.** Найдите остаток от деления $23^{1600}$ на 41.

**3.** Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

**4.** Докажите, что $n^7 - n$ делится на 42.

**5.** Докажите, что либо $n^{18} - 1$, либо $n^{18} + 1$ делится на 37.

**6.** Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

**7.** Пусть $p$ — простое число.
**a)**Докажите, что для любых чисел $a$ и $b$ верно, что $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$.

**b)** Выведите из этой задачи малую теорему Ферма.

**8.** Математические хулиганы Гриша и Андрей катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером $n$, и едут на этаж, номер которого равен остатку от деления на 17. После этого они умножают на n номер этажа, на котором оказались, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления на 17 полученного произведения. На каком этаже может закончиться пятнадцатая поездка?

**9.** Андрею и Грише надоело вспоминать, с какого этажа они начали путешествие, и теперь они просто возводят в квадрат номер этажа, на котором находятся, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления результата на 17. Какое максимальное количество поездок удастся им совершить таким способом?

### Задачи на подумать

**10.** Отметим на бумаге произвольным образом $p-1$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на $p$. Проведём из остатка $k$ стрелочку в остаток $ka$.
**а)** Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в каждую точку входит одна стрелочка.
**б)** Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
**в)** Докажите, что у всех циклических маршртутов одна и та же длина, и она делит $p-1$.
**г)** Выведите отсюда малую теорему Ферма.

**11.** Пусть $p$ и $q$ различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p + q$.

**12.** Докажите, что для любого простого $p > 5$ справедливо, что
**а)** число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ делится на $p$;
**b)** число $\underbrace{111\ldots11}_{p}$ не делится на $p$.

**13.** Найти все такие простые числа $p$, что число $5^{p^2} - 1$ делится на $p$.

**14.** Докажите, что для любого простого $p$ число $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.

**15.** Может ли число $2^{1260} + 3^{1260} - 1$ быть точной десятой степенью?

# Четвёртый «признак равенства» треугольников

*11.07.16*

> *Дело в том, что пока ты боишься высоты — она сильнее тебя.*
>
> О. Тищенков, "Кот"

**1.** В треугольнике $ABC$ $\angle BAC = 15°$. Можно ли однозначно найти сторону $AC$, если
а) $AB = 3$, $BC = 4$;
б) $AB = 4$, $BC = 3$?

**2.** В треугольниках $ABC$ и $A'B'C'$ $AB = A'B'$ и $\angle BAC + \angle B'A'C' = 180°$. Докажите, что равенство сторон $BC$ и $B'C'$ равносильно равенству углов $\angle BCA$ и $\angle B'C'A'$.

**3.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

**4.** Пусть $K$ — середина стороны $BC$ треугольника $ABC$. На лучах $AB$ и $AC$ взяты точки $X$ и $Y$ соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка $K$ лежит на отрезке $XY$. Докажите, что $BX = CY$.

**5.** В четырехугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине $A$ равен углу $BCD$, $AD = CD$. Докажите, что $BD$ — биссектриса угла $ABC$.

**6.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах $AB$ и $CD$ выбраны точки $K$ и $M$ соответственно. Оказалось, что $AM = KC, BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми $AB$ и $KM$ равен углу между прямыми $KM$ и $CD$.

**7.** В неравнобедренном треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $I$. Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.

**8.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C$. На продолжении $BA$ за точкой $A$ выбрали точку $E$ такую, что $BC = AE$. Оказалось, что $\angle BDC = \angle ADE$ и $\angle ABD = \angle CAD$. Докажите, что $AC \perp BD$.

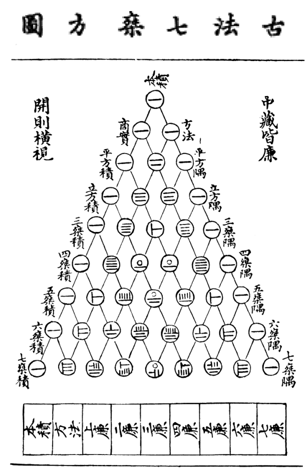
**9.** На стороне $BC$ равностороннего треугольника $ABC$ взята точка $M$, а на продолжении стороны $AC$ за точку $C$ — точка $N$, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

**10.** Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка $P$, а на его сторонах $BC$ и $CD$ — точки $K$ и $L$ соответственно таким образом, что $PK = PL$. Точка $Q$ отрезка $BK$ такова, что $BP < PQ = DL$, а углы $BKP$ и $DPL$ равны. Докажите, что $PQ$ перпендикулярно $DP$.

**11.** На сторонах $BC$ и $AB$ треугольника $ABC$ выбраны точки $A'$ и $C'$ соответственно. Прямые $AA'$ и $CC'$ пересекаются в точке $K$. Оказалось, что $AC' = CA'$ и $\angle ABC = \angle A'KC$. На отрезке $KC'$ выбрана точка $P$ такая, что $2PK = A'K + KC'$. Докажите, что $\angle APC = 90°$.

# Треугольник Паскаля

*11.07.16*




Треугольник Яна Хуэя, 1303

**Задача.** Черепашка Пося находится в нижнем левом углу таблицы $(n+1)\times(m+1)$. За один ход Пося может переползти на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Сколько существует способов добраться до верхнего правого угла таблицы?

**1.** а) Пронумеруем строки от 1 до $(n+1)$, столбцы от 1 до $(m+1)$. Пусть черепашка начинает движение из клетки $(1,1)$. Докажите, что количество способов добраться до клетки $(x,y)$ равно количеству способов добраться до клетки $(x-1,y)$ плюс количество способов добраться до клетки $(x,y-1)$.
б) Решите задачу про черепашку для $n=m=5$.

**2.** а) Мы выдрессировали черепашку. Теперь мы ей говорим, когда ползти вверх, а когда ползти вправо. Чтобы запомнить как именно черепашка ползёт, мы записываем очередность наших команд. Сколько вариантов записей могло получиться, если черепашка в итоге оказалась в клетке $(n+1,2)$?
б) Решите задачу про черепашку Посю.

**3.** Посмотрите, куда черепашка может доползти за $n$ шагов и докажите тождество:

$$C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^n=2^n.$$

**4.** Пока мальчик Вова командует черепашкой, мальчик Лёня начал раскрывать скобки выражения:

$$(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots(a+b).$$

Но получилось так, что когда Лёня умножал слагаемое на $a$, то Вова говорил черепашке ползти вверх, а если Лёня умножал слагаемое на $b$, то Вова говорил черепашке ползти вправо. В конце концов Лёня привел подобные слагаемые. Выразите получившиеся коэффициенты.

Запишем в каждую клетку таблицы число, равное количеству способов добраться до этой клетки. Повернем нашу таблицу так, чтобы все числа, отвечающие за одинаковое количество ходов, были на одном уровне. Результат называется **треугольником Паскаля**.

На краях этого треугольника стоят единицы, а каждое число внутри является суммой двух, стоящих над ним. $k$-е число $n$-й строки треугольника Паскаля равно $C_n^k$ (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Коэффициенты разложения из 4 задачи называются **бином Ньютона.**

**5.** Вычислите выражение $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots \pm C_n^n$
а) используя треугольник Паскаля;
б) используя бином Ньютона.

**6.** У Тома Сойера есть забор из $2n$ досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе четное число досок?

**7.** Чему равно $C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_n^k$?

**8.** а) Для каждой из первых 4 строчек треугольника Паскаля сложите квадраты стоящих в ней чисел и найдите полученное число в треугольнике Паскаля. Запишите полученное тождество.
б) Докажите это тождество.

**Числа Фибоначчи** — последовательность чисел:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \ldots,$$

удовлетворяющая условию $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

**9.** Используя треугольник Паскаля докажите тождество:

$$F_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots .$$

# МеждусоБой

*12.07.16*

1. Через вершину $A$ параллелограмма $ABCD$ провели прямую $\ell$, пересекающую сторону $BC$. Докажите, что расстояние от точки $D$ до прямой $\ell$ равно сумме расстояний от точек $B$ и $C$ до этой же прямой.

2. В 10 коробках лежат камни: в $k$-ой коробке лежит $2016 + k$ камней ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Двое играют в такую игру: один из игроков выбирает любые 5 коробок и вынимает из них некоторое ненулевое количество камней (возможно, для разных коробок число вынутых камней различается, но для каждой из этих пяти коробок оно ненулевое). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

3. На сторонах $AB$ и $BC$ равностороннего треугольника $ABC$ взяты точки $D$ и $E$ такие, что $AD = BE$. Отрезки $CD$ и $AE$ пересекаются в точке $O$. Серединный перпендикуляр к отрезку $CO$ пересекает прямую $AO$ в точке $K$. Докажите, что $BK$ и $CO$ параллельны.

4. По окружности расставлены в некотором порядке числа от 1 до 100. Назовем пару чисел *хорошей*, если эти два числа не стоят рядом, и хотя бы на одной из двух дуг, на которые они разбивают окружность, все числа меньше каждого из них. Чему может равняться общее количество хороших пар?

5. На доске написано число 2000. Разрешается переставить в нем произвольным образом первые три цифры (ставить цифру 0 на первое место нельзя) или прибавить 361. Через 100 таких операций вновь получили 2000. Сколько раз прибавляли 361, если известно, что это сделали хотя бы один раз?

6. Клетки шахматной доски $8 \times 8$ раскрашены в белый и черный цвета таким образом, что в каждом квадрате $2 \times 2$ половина клеток черные и половина белые. Сколько существует таких раскрасок?

7. В ряд выписано 25 цифр. Разрешается ставить между ними плюс, минус, умножить и скобки (склеивать цифры нельзя). Докажите, что всегда можно получить ноль.

8. Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

# Индукция-2

*14.07.16*

*Элемент тока длины dl создаёт поле с магнитной индукцией* $dB = k\frac{Idl}{r^2}$.

Закон Био-Савара-Лапласа

## Задачи на разбор

**1.** Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета.

**2.** У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи (никакие три прямые не проходят через одну точку).

**3.** Докажите, что $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

**4.** Докажите, что любое число можно представить в виде суммы степеней двоек единственным образом.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Докажите равенство

$$3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots33}_{n} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}.$$

**2.** Числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма. Докажите, что десятичная запись числа $F_n$ при $n \geqslant 2$ оканчивается цифрой 7.

**3.** Треугольник разбит на несколько частей несколькими прямыми. Докажите, что хотя бы одна из частей является треугольником.

**4.** Доказать, что монетами по 3 и 5 рублей можно выдать любую сумму больше 8 рублей?

**5.** Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

**6.** Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, $\ldots$ делятся на 53.

**7.** На столе стоят $2^n$ стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

**8.** Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или на 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с шести.

**9.** Докажите, что любое число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи. Единственно ли такое представление?

**10.** На кольцевой дороге стоят $n$ машин. При этом, суммарное количество топлива у машин равно количеству топлива чтобы проехать один круг. Докажите, что существует машина, которая может проехать весь круг, забирая топливо у других машин.

**11.** Докажите, что $3^{2^n} - 1$ делится на $2^{n+2}$, но не делится на $2^{n+3}$.

**12.** Докажите, что $3^{2^n} - 1$ делится на $2^{n+2}$, но не делится на $2^{n+3}$.

**13.** Докажите, что любое количество квадратов можно разрезать на несколько частей, из которых можно составить квадрат.

**14.** Даны два взаимнопростых числа $m$ и $n$, а также число 0. Имеется калькулятор, который умеет выполнять лишь одну операцию: вычислять среднее арифметическое двух чисел одной чётности. Докажите, что с помощью этого калькулятора можно получить все числа от 1 до $n$.

**15.** На окружности взяли $n$ точек и соединили их всевозможными отрезками. Оказалось, что никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей они делят круг?

# Симметрия

*14.07.16*

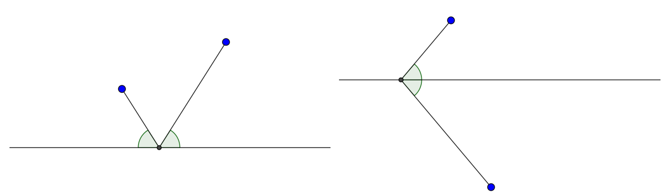
*Неочевидное,*
*Невероятное,*
*Но явно что-то неземной красоты...*

Л. Агутин, “Мир зелёного цвета”

**1.** Внутри острого угла с вершиной $O$ взяли произвольную точку $A$. Её отразили относительно сторон угла и получили точки $A_1$ и $A_2$. Докажите, что угол $A_1OA_2$ не зависит от выбора точки.

**2.** а) Точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой. Постройте на этой прямой такую точку $M$, чтобы отрезки $AM$ и $BM$ образовывали с данной прямой равные углы.

б) То же самое, но $A$ и $B$ должны лежать по разные стороны от прямой.



**3.** а) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол $A = 30°$. Докажите, что $AC \leqslant BC + CD + DB$.

б) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол $A$ прямой. Докажите, что $2AC \leqslant BC + CD + DB$.

**4.** Точка $M$ — середина гипотенузы $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$, угол $B$ которого равен $30°$. На его катете $BC$ выбирают такую точку $K$, что $AK + KM = BC$. Докажите, что $MK \perp AB$.

**5.** На гипотенузе $AB$ и катете $BC$ прямоугольного равнобедренного треугольника $ABC$ соответственно взяли произвольные точки $M$ и $K$. Докажите, что $AK + KM \geqslant AB$.

**6.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Кроме этого

$$\angle BAC : \angle ADC : \angle BCA = 3 : 2 : 1.$$

При этом $BC = 19, AB = 13$. Найдите $AD$.

**7.** В прямоугольнике $ABCD$ точка $M$ — середина стороны $BC$, точка $N$ — середина стороны $CD$, $P$ — точка пересечения отрезков $DM$ и $BN$. Докажите, что угол $MAN$ равен углу $BPM$.

**8.** Биссектриса $AE$ равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$) пересекает биссектрису его угла $B$ в точке $O$. На боковой стороне $AB$ взяли точку $M$ так, что $AM = AC$. Прямая $MO$ пересекает основание $AC$ в точке $K$. Докажите, что $AK = EC$.

# Алгоритм Евклида

*15.07.16*

*То, что принято без доказательства, может быть отвергнуто без доказательства.*

Евклид

**Определение 1.** *Наибольшим общим делителем* двух целых чисел называется такой их общий делитель, который больше всех остальных общих делителей.
**Определение 2.** *Наименьшим общим кратным* двух целых чисел называется наименьшее положительное число, делящееся на оба этих числа.
**Обозначение.** НОД$(a, b) = (a, b)$, НОК$(a, b)$=$[a, b]$.
**Определение 3.** Если $(a, b) = 1$, то числа $a$ и $b$ называются *взаимно простыми.* **Алгоритм Евклида.**
Пусть $a$ и $b$ – целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > ... > r_n$ определена тем, что каждое $r_k$ – это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть

$$a = b \cdot q_0 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$$

$$\cdots$$

$$r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_{k-1} + r_k$$

$$\cdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n$$

Тогда $(a, b) = r_n$.
**Упражнение.** Найдите **a)** (1333, 372); **b)** (561, 4301); **c)** (9163, 3311).

**1.** Докажите следующий свойства НОД и НОК:
**a)** если $m$ делится на $n$, то $(m, n) = n$, $[m, n] = m$;
**b)** $(a \cdot m, a \cdot n)$=$a \cdot (m, n)$;
**c)** если $(m, n) = d$, то $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$;
**d)** для любого целого числа $a$ справедливо, что $(m, n)$=$(m - a \cdot n, n)$;
**e)** $(m, n) \cdot [m, n] = m \cdot n$.

**2.** **a)** Докажите, что $(n+3, 5n+14)$ взаимно просты при любом целом $n$.
**b)** Какие значения может принимать $(3n + 2, 10n + 23)$.

**3.** Вася посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Петя – всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

**4.** Пусть $m, n$ – целые взаимнопростые числа. Найдите наибольшее возможное значение $(n + 2016m,\ m + 2016n)$.

**5.** Пусть $a$ и $b$ – натуральные числа. Докажите, что среди чисел $a, 2a, 3a, ..., ba$ ровно $(a,\ b)$ чисел делится на $b$.

**6.** Изначально на доске записаны числа $m$ и $n$. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

**7.** Пусть $a$ и $b$ — взаимно простые натуральные числа. В доме есть лифт с двумя кнопками, одна из которых поднимает лифт на $a$ этажей вверх, а вторая опускает на $b$ этажей вниз, если это возможно (например, на последнем этаже первая кнопка не работает). Докажите, что на этом лифте можно попасть с любого этажа на любой другой, если высота дома не меньше **а)** $2ab$; **б)** $a + b$.

### Перегородка

**8.** На доске написаны взаимнопростые числа $m$ и $n$. Каждую минуту модуль разности этих чисел записывается вместо наибольшего из них. Докажите, что в какой-то момент на доске будут написаны две единицы.

**9.** Пусть $p$ — простое число. Сколько существует пар взаимнопростых натуральных чисел $(m, n)$ таких, что $p = m + n$?

**10.** Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала).
**a)** Сколько раз она выписала простое число $p$?
**b)** Сколько раз она выписала произвольное число $n$?

# Изоморфизм комбинаторных задач

*15.07.16*

*Если* 666 — *это зло, то*
25.807 — *корень зла.*

Народная мудрость

Не решая задач, разбейте их на группы «одинаковых задач». Объясните, как установить соответствие между задачами одной группы.

**1.** Зуб может быть здоровым, больным, отсутствующим, растущим, искусственным и сломанным. У шушканчиков 6 рядов по 6 зубов. К черепашке Посе пришли в гости несколько шушканчиков с различными наборами зубов. Каково могло быть максимальное число гостей-шушканчиков?

**2.** Сколькими способами можно поставить на доску $6 \times 6$ шесть ладей?

**3.** Сколько существует способов расставить 36 человек в шеренгу?

**4.** Сколькими способами можно на доске $36 \times 36$ расставить 36 ладей, не бьющих друг друга?

**5.** Есть 36 человек. Сколькими способами можно разбить их на 6 команд по 6 человек, если команды будут участвовать в разных соревнованиях?

**6.** Producing Producing Producing 

**7.** В магазине продаются чашки 6 видов и блюдца 6 видов. Сколькими способами можно выбрать 6 различных наборов из чашки и блюдца?

**8.** Имеется 30 ёжиков и 6 дикобразов. Сколько существует способов отправить по одному зверьку в 36 зоопарков?

**9.** Сколькими способами можно расставить на доске $6 \times 6$ числа от 1 до 36?

**10.** У Поси есть 6 револьверов, каждый из которых содержит по 6 пуль. Пули в первом револьвере отравляют, во втором — разрывают, в третьем — пронзают насквозь, в четвёртом — поджигают, в пятом — отчисляют из лагеря, а в шестом — расщепляют на молекулы. Пося хочет расстрелять 36 черепах по очереди: сначала первую, затем вторую, и так далее. Каждый выстрел можно делать из любого револьвера, в котором на этот момент есть хотя бы одна пуля. Сколькими способами Пося может это сделать?

**11.** В алфавите ЛМШ есть 6 букв: «л», «м», «ш» и «ф», «х», «б». Сколько различных слов длины 36 есть в ЛМШ (любая последовательность букв в ЛМШ считается осмысленной)?

**12.** Сколько существует способов раскраски доски $6 \times 6$ в 6 цветов?

**13.** Есть 6 видов конфет, по мешку каждого вида. Сколько существует способов угостить ими 6 девочек так, чтобы ни одной не попалось более пяти одинаковых конфет?

**14.** Есть 36-угольник, сколько существует шестиугольников с вершинами в вершинах 36-угольника?

**15.** Есть 36 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их 36 девочкам по одной?

**16.** В стране черепашки Поси 117649 городов: Вишкиль-000000, Вишкиль-000001, и так далее до Вишкиля-666666 (в записи каждого используются только цифры от 0 до 6). Дорогой соединены ровно те пары городов, которые отличаются ровно в одной цифре на 1. Нося вышла из города Вишкиль-000000 и, двигаясь только по дорогам, посетила некоторые города в порядке возрастания номеров и остановилась в Вишкиле-666666. Сколькими способами она могла это сделать?

# Перекладывание отрезков

*16.07.16*

> *Выживает только сильнейший.*
>
> Ч. Дарвин

**1.** На катетах $AC$ и $BC$ равнобедренного прямоугольного треугольника отметили точки $M$ и $L$ соответственно так, что $MC = BL$. Точка $K$ — середина гипотенузы $AB$. Докажите, что треугольник $MKL$ также является прямоугольным равнобедренным.

**2.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $AE$ равна по длине отрезку $EC$. Причем $2AB = AC$. Найдите углы треугольника $ABC$.

**3.** В равнобедренном прямоугольном треугольнике $ABC$ на гипотенузе $AB$ взяты точки $M$ и $N$ ($N$ между $M$ и $B$) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что из отрезков $MN, AM, NB$ можно составить прямоугольный треугольник.

**4.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) на боковую сторону $BC$ опущена высота $AH$. Точка $L$ — основание перпендикуляра из $H$ на сторону $AB$. Оказалось, что $AL = AB/4$. Найдите углы треугольника $ABC$.

**5.** На боковых сторонах $AB$ и $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отметили соответственно точки $K$ и $L$ так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60°$. Докажите, что $KL = BC$.

**6.** На гипотенузе $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$ выбрали точку $D$ такую, что $BC = CD$. На катете $BC$ выбрали такую точку $E$, что $DE = CE$. Докажите, что $AD + BE = DE$.

**7.** В квадрате $ABCD$ точки $K$ и $M$ принадлежат сторонам $BC$ и $CD$ соответственно, причем $AM$ — биссектриса угла $\angle KAD$. Докажите, что $AK = DM + BK$.

**8.** На медиану $BM$ треугольника $ABC$ опустили перпендикуляр $AL$ и перпендикуляр $DK$ из некоторой точки $D$ на стороне $AB$ ($L$ и $K$ — различные точки, лежащие внутри $BM$). Оказалось, что $BK = LM$. Докажите, что $CD = BD + BA$.

# Линейное представление НОД

*16.07.16*

*Не всё в жизни смешно.*

Р. Л. Асприн

**1.** Натуральные числа $a$ и $b$ взаимно просты. По окружности длины $a$ катится колесо длины $b$, в обод которого вбит гвоздь, оставляющий на окружности отметины.
**a)** Докажите, что в какой-то момент новые отметины перестанут появляться.
**b)** Докажите, что в этот момент отметины делят обод неподвижного колеса на равные части.
**c)** Пусть $c$ — длина отрезка между двумя соседними отметинами. Докажите, что $c = 1$.
**d) (Линейное представление НОД)** Докажите, что существуют целые числа $m$ и $n$ такие, что $ma + nb = 1$.
**e)** Докажите, что для произвольных чисел $a$ и $b$ (не обязательно взаимнопростых) существуют целые числа $m$ и $n$, такие что $am+bn = (a, b)$.

**2.** В государстве имеют хождение монеты достоинством $a$ и $b$ золотых, где $a$ и $b$ – взаимнопростые натуральные числа. Докажите, что такими монетами можно (возможно, со сдачей) набрать любую сумму.

**3.** Докажите, что угол в $17^\circ$ можно разделить с помощью циркуля и линейки на 17 равных частей.

**4.** В классе химии имеются 25 пробирок объема 1, 2, …, 25 мл. Когда химики стали собираться в ЛМШ, оказалось, что у них осталось мало места, и они могут взять только набор из 10 пробирок. Химики хотят, чтобы с помощью любых двух пробирок из набора можно было отмерить 1 мл. Сколькими способами можно составить такой набор?

**5.** Петя произвольным образом разложил некоторое количество монет по 30 коробкам. Вася может выбрать любые $k$ коробок и добавить в каждую из них по монете. При каких $k$ Вася такими операциями сможет при любом исходном раскладе уравнять число монет во всех коробках?

**6.** **a)** Числа $a$, $b$ и $c$ взаимнопросты в совокупности, то есть $(a, b, c) = 1$. Докажите, что любое число $d$ можно представить в виде $d = ax + by + cz$, где $x$, $y$, $z$ — целые.
**b)** Сформулируйте и докажите аналогичную задачу, если изначально дано $n$ чисел, взаимнопростых в совокупности.

**7.** Докажите, что для любых натуральных чисел $a$ и $b$ существуют такие натуральные числа $c$ и $d$, что числа $an+c$ и $bn+d$ взаимнопросты при всех натуральных $n$.

# Дискретная непрерывность

*17.07.16*

*— Я ранее бывал в этом городе, тогда даже ни одной гостиницы не было. А теперь сразу две и с интересными названиями!*

С. Карамов, "Бег на месте, или замкнутый круг"

Разбор. В ряд выложены 100 черных и 100 красных шаров, причём самый левый и самый правый шары чёрные. Докажите, что можно выбрать слева подряд несколько шаров (но не все!) так, чтобы среди них количество красных равнялось количеству чёрных.

**1.** Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде "налево" некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

**2.** За круглым столом сидит 10 мальчиков и 10 девочек. Докажите, что найдётся группа из 10 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков поровну.

**3.** Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

**4.** За круглым столом сидит чётное количество гномов. У каждого на колпаке по несколько помпонов. Причём у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не более чем на 1. Докажите, что найдётся пара гномов, сидящих друг напротив друга, количества помпонов на колпаках которых отличаются не больше, чем на 1.

**5.** В зале находятся $n$ юношей и $n$ девушек, причём никакие трое не находятся на одной прямой. Всегда ли можно провести по полу прямую черту так, чтобы в каждой из образовавшихся частей зала юношей и девушек было поровну (но не ноль)?

**6.** Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб со стороной 2, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.

**7.** В ряд стоят $n$ шаров, известно, что среди этих шаров могут быть шары только двух цветов: чёрного и белого. Если в автомат отправить запрос $(a, b)$, то он проверит шары на местах с номерами $a$ и $b$ и если первый чёрный, а второй — белый, то поменяет их местами. Паша утверждает, что может, не зная исходного набора, написать такой список запросов, что потом на двух, известных ему позициях, будут шары одного цвета. Докажите, что Паша хвастается безосновательно.

# Точки пересечения биссектрис

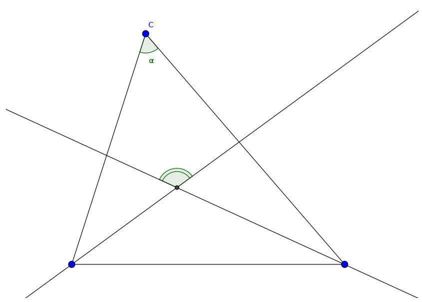
*19.07.16*

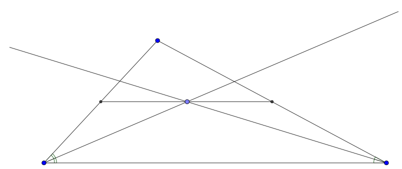
*две параллельные прямые*
*живут в евклидовом мирке*
*и бегают пересекаться*
*в мир лобачевского тайком*

Пирожок

**1.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = \alpha$. Найдите угол между биссектрисами $BB_1$ и $CC_1$.

**2.** Может ли точка пересечения биссектрис лежать на средней линии треугольника?





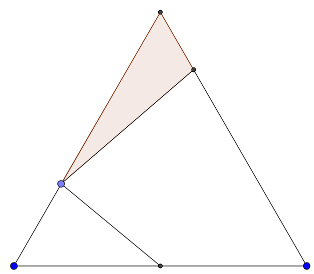
**3.** В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 146°$. Биссектриса угла $D$ пересекает серединный перпендикуляр к стороне $BC$ в точке $O$. Найдите $\angle AOD$.

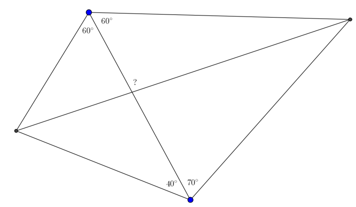
**4.** В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$, все углы которого тупые, $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к его сторонам $AB, CD, EF$ пересекаются в одной точке.

**5.** Биссектрисы двух соседних углов четырехугольника пересекаются в середине его стороны. Докажите, что либо у этого четырехугольника равны два угла, либо две стороны параллельны.

**6.** От угла равностороннего треугольника со стороной 1 отрезали меньший треугольник так, что биссектриса его внешнего угла делит пополам сторону исходного треугольника, противоположную данному углу. Найдите периметр отрезанного треугольника.

**7.** Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABD = \angle DBC = 60°$, $\angle ADB = 40°$, а $\angle BDC = 70°$. Найдите угол между его диагоналями.






**8.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $60°$. На сторонах $AB$ и $AC$ выбраны точки $K$ и $L$ соответственно так, что $BK = KL = LC$. Докажите, что угол $KLC$ в два раза больше угла $ABC$.

# Индукция в графах

*19.07.16*

*...и, когда он уснул, взял одно из ребр его...*

Книга Бытия

Разбор. Докажите по индукции, что в дереве с $n$ вершинами $n-1$ ребро.

**1.** Усадьбы любых двух джентльменов в графстве Вишкиль соединены либо водным (лодочка), либо сухопутным (карета) сообщением. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы любой джентльмен мог по-прежнему добраться до любого другого.

**2.** В одном государстве 100 городов, и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения не более, чем на одной дороге, так, чтобы от каждого города можно было доехать до любого другого.

**3.** В графе степень каждой вершины не превосходит $d$. Докажите, что все вершины графа можно покрасить в $d+1$ цвет так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, имели разный цвет.

**4.** а) Докажите, что в турнире (полном ориентированном графе) найдётся путь, который проходит по каждой вершине ровно один раз.
б) В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по партии. Докажите, что участников можно перенумеровать так, что участник с номером $n$ не проиграл участнику с номером $n+1$.

**5.** Докажите, что граф двудольный, если в нем нет циклов нечётной длины, используя:
а) индукцию по количеству вершин;
б) индукцию по количеству ребер.

**6.** На конференцию приехали учёные, каждый из них знает несколько языков. Оказалось, что любые трое человек могут поговорить друг с другом (возможно, одному из них придётся переводить для остальных). Докажите, что учёные могут разбиться на пары, говорящие на одном языке, если общее число учёных чётное.

**7.** В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

# И снова комбинаторика

*20.07.16*

*Двумерная сфера — это граница трёхмерного шара, но гомотопически трёхмерный шар примитивен, он стягивается в точку, а сфера являет собой все тайны гомотопического хаоса.*

Роман Михайлов

**1.** (a) Есть буквы Ш (12 штук) и П (5 штук). Сколькими способами можно их расставить?

(b) Есть Шары (12 штук) и Перегородки (5 штук). Сколькими способами можно их переставить?

(c) Есть 6 коробок и 12 одинаковых кубиков. Сколькими способами можно разложить кубики по коробкам?

(d) Игральную кость подкидывают 12 раз. Сколько различных вариантов есть?

**2.** (a) В магазине 5 касс и всего 10 покупателей. Сколькими способами они могут распределиться по очередям (очередь у любой кассы может быть любой длины, все кассы разные)?

(b) В почтовом отделении продаётся 5 видов открыток. Сколькими способами можно купить 10 открыток?

(c) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение: $x + y + z + a + b = 10$.

**3.** (a) Есть 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами можно раздать цветы трём различным черепашкам?

(b) Оказалось, что букеты предназначены для завтрака этих черепашек. Каждой черепашке важно, в каком порядке она ест цветы. Сколькими способами можно покормить черепашек?

(c) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xyz = 2^{10}3^{14}7^{15}$?

**4.** (a) Сколькими способами можно разместить $n$ различных флагов на $k$ различных мачтах, если все флаги должны быть развешаны, а конфигурации, отличающиеся порядком флагов на матче, считаются одинаковыми?

(b) Тот же вопрос, но конфигурации, отличающиеся порядком флагов на мачте, считаются разными.

(c) Есть $n$ различных букв и $k - 1$ одинаковая буква. Сколько слов можно составить из этого набора, если обязательно использовать все буквы?

**5.** (a) Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 2016 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 сливу, 1 мандарин, 1 грушу, 1 айву и 1 хурму?

(b) Черепашка Пося съела 24 яблок. Сколькими способами можно поровну разделить оставшиеся фрукты между тремя людьми?

# Ортоцентр треугольника

*20.07.16*

*Прожита медиана,*
*Прожита биссектриса,*
*А золотое сечение*
*Прожито даже дважды.*

Деление на ноль — 13000

**1.** Дан прямоугольный треугольник. Впишите в него прямоугольник с общим прямым углом, у которого диагональ минимальна.

**2.** Пусть $M$ — основание перпендикуляра, опущенного из вершины $D$ параллелограмма $ABCD$ на диагональ $AC$. Докажите, что перпендикуляры к прямым $AB$ и $BC$, проведённые через точки $A$ и $C$ соответственно, пересекутся на прямой $DM$.

**3.** В треугольнике $PQR$ $\angle QPR = 46^\circ$. Через вершины $P$ и $R$ проведены перпендикуляры к сторонам $QR$ и $PQ$ соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров находится от вершин $P$ и $Q$ на расстоянии, равном 1. Найдите углы треугольника $PQR$.

**4.** В прямоугольнике $ABCD$ биссектрисы угла $B$ и внешнего угла $D$ пересекают сторону $AD$ и прямую $AB$ в точках $K, M$ соответственно. Докажите что отрезок $KM$ равен и перпендикулярен отрезку $BD$.

**5.** В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ наименьшая. На сторонах $AB$ и $CB$ взяты точки $K$ и $L$ соответственно, причём $KA = AC = CL$. Пусть $M$ — точка пересечения $AL$ и $KC$, а $I$ — точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$. Докажите, что прямая $MI$ перпендикулярна прямой $AC$.

**6.** а) **(Параллелограмм Вариньона)** Докажите, что в произвольном четырехугольнике середины сторон образуют параллелограмм.
б) В четырехугольнике три угла равны $45^\circ$. Докажите, что параллелограмм Вариньона — квадрат.

**7.** Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон $AB$ и $AD$ проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам $CD$ и $CB$ соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая $AC$ имеют общую точку.

**8.** В прямоугольнике $ABCD$ точка $M$ — середина стороны $CD$. Через точку $C$ провели прямую, перпендикулярную прямой $BM$, а через точку $M$ — прямую, перпендикулярную диагонали $BD$. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой $AD$.

# Теорема Вильсона

*21.07.16*

*Теорема впервые была сформулирована Уорингом в 1770 году. Первое доказательство теоремы Вильсона было дано в 1771 году Лагранжем. Гаусс обобщил теорему Вильсона на случай составного модуля.*

Википедия

**1.** Известно, что $x^2-1$ делится на простое число $p$. Какие остатки может давать $x$ при делении на $p$?

**2.** Дано простое число $p$ и его некоторый ненулевой остаток $a$.
**a)** Докажите, что существует и при том единственный остаток $b$, что $ab \underset{p}{\equiv} 1$ (такой остаток $b$ называется *обратным* остатка $a$).
**b)** Какие остатки совпадают со своими обратными остатками?

**3.** **(Теорема Вильсона)** Пусть $p$ — некоторое простое число. Докажите, что $(p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$.

**4.** Докажите, что если $(n-1)! \underset{n}{\equiv} -1$, то число $n$ — простое.

**5.** Найдите обратные остатки:
**a)** 2 и 3 по модулю 11;
**b)** 5 по модулю 23;
**c)** 17 по модулю 37.
**d)** Сопоставьте каждому остатку его обратный по модулю 7.

**6.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что $(p-k)! \cdot (k-1)! \underset{p}{\equiv} (-1)^k$.

**7.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на $p^2$.

**8.** Пусть числа $p$ и $p+2$ являются простыми числами-близнецами. Докажите, что справедливо $4((p-1)!+1)+p \underset{p^2+2p}{\equiv} 0$.

**9.** **a)** На доске написаны числа $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \ldots, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$. Можно ли выбрать какие-то пять из них, произведение которых равняется единице?
**b)** Пусть произведение каких-то $2k+1$ чисел, написанных на доске, равно $\frac{m}{n}$. Докажите, что $m \underset{101}{\equiv} -n$.

**10.** Пусть $a_1, \ldots, a_p$ — конечная арифметическая прогрессия с разницей, не кратной $p$. Докажите, что:
**a)** существует некоторый член последовательности $a_m$, делящийся на $p$;
**b)** существует некоторый член $a_k$, такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится

на $p$;
**c)** существует некоторый член $a_k$, такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на $p^2$.

**11.** **a)** Найдите все простые числа $p$, такие что $(p-2)!$ не делится на $(p-1)$.
**b)** Дано простое число $p$. При каких $n$ число $p^n - 1$ делится на $(p-1)^2$?
**c)** Для каких натуральных $n$ число $(n-1)! + 1$ является точной степенью $n$?

**12.** Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел $k, n > 1$, что $(k! + 1, n! + 1) > 1$;

# Геометрический разнобой

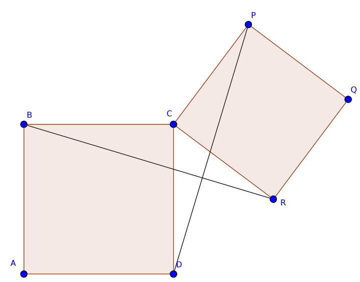
*21.07.16*

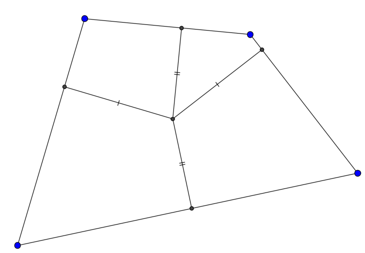
*Искренне не понимаю чьего-либо негодования по поводу третьей геометрии на межнаре*

А. Семченков

**1.** Квадраты $ABCD$ и $CPQR$ одинаково ориентированы (см. рис.) и имеют только одну общую точку (точку $C$). Докажите, что $BR = DP$.

**2.** Дан выпуклый четырёхугольник, у которого нет параллельных сторон. Где находится такая точка, которая одновременно равноудалена от двух пар его противоположных сторон? Сколько может быть таких точек?



**3.** На стороне $BC$ квадрата $ABCD$ выбрана точка $M$. На стороне $CD$ выбрана такая точка $P$, что $AP \perp MD$. На стороне $AB$ выбрана такая точка $Q$, что $DQ \perp MA$. Докажите, что прямая $PQ$ проходит через центр квадрата.

**4.** Бильярд имеет форму остроугольного треугольника $ABC$. Из точки $K$ стороны $AB$ выпустили бильярдный шар, который отразился (по правилу угол падения равен углу отражения) в точках $L, M$ от сторон $BC, CA$, возвратился в точку $K$ и вновь вышел на траекторию $KLM$. Докажите, что точки $K, L, M$ — точки основания высот треугольника $ABC$.

**5.** Внутри острого угла $XOY$ взяты точки $M$ и $N$ так, что $\angle XON = \angle YOM$. На отрезке $OX$ выбирается точка $Q$ так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на отрезке $OY$ выбирается точка $P$ так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных $MPN$ и $MQN$ равны.

**6.** В треугольнике $ABC$ на сторонах $AC$ и $BC$ взяты точки $X$ и $Y$ такие, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника $ABC$.

**7.** На сторонах $AB$ и $AD$ квадрата $ABCD$ выбраны точки $N$ и $P$ соответственно, а на отрезке $AN$ выбрана точка $Q$ так, что $NP = NC$ и $\angle QPN = \angle NCB$. Докажите, что $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle AQP$.

# Легенды о короле Артуре

*22.07.16*

*Всё выше, выше и выше*
*Стремим мы полёт наших птиц,*
*И в каждом пропеллере дышит*
*Спокойствие наших границ.*

Марш авиаторов

**Упражнение 1.**
На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбирают какие-то два из них ($x$ и $y$) и заменяют их на числа $x-2$ и $y+1$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

**Упражнение 2.**
По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

1. При дворе у короля Артура собралась свита из верных рыцарей. Рыцари дружны, однако в любом коллективе есть разногласия. Известно также, что любой рыцарь имеет не более трех врагов. Король Артур собирается в поход, карать мятежных южных баронов. Докажите, что Артур сможет собрать карательный отряд и оставить остальных рыцарей править городом так, чтобы у каждый имел не более одного врага в своей группе?

2. Мерлин предложил королю Артуру, уставшему от походов, поиграть вот в такую игру: есть прямоугольная таблице $m \times n$, в ней записаны какие-то действительные числа. Разрешается менять знак сразу у всех чисел какой-либо строки или столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была неотрицательна.

3. Король Артур устроил пир по поводу перемирия, на который пригласил южных мятежных баронов. У каждого южного мятежного барона есть придворный шут, который хочет спеть песенку. Известно, что каждая песенка оскорбительна не более чем для трех других южных мятежных Баронств. Каждый барон, дослушав своего шута, тут же уезжает и не слышит песенки, прозвучавшие после него. Докажите, что мудрый Мерлин может расположить выступления шутов в таком порядке, что каждый барон услышит не более трех оскорбительных песенок.

4. Король Артур постепенно завоевывает все новые и новые территории.

В n окрестных графствах власть принадлежит либо королю, либо Нзависимому Южному Союзу Графов. Мятежные графы в большинстве своем очень трусливы. Каждый день в одном из графств( назовем его А) может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с А графств власть принадлежит не тому, кто правит в графстве А(т.е., например, если графство А примкнуло к Независимому Союзу, а большинство соседей присягнули Королю Артуру, и наоборот). Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

**5.** После карательного похода рыцари собрались за круглым столом и делят свою добычу. Известно лишь, что изначально у каждого рыцаря четное количество монет. По команде Мерлина каждый передает половину своих монет сидящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество монет, то добрый южный барон, который не хочет, чтобы его повесили, добавляет этому рыцарю еще одну монету. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех рыцарей будет поровну монет.

**6.** Темница короля Артура - длинный-длинный подземный коридор с камерами только по одну сторону, занумерованными числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В камерах находятся 9 узников (в одной камере могут быть заключены несколько узников). Их тюремщики скучают, и поэтому каждый день каких-то двух узников, обитающих в соседних камерах (k-й и (k+1)-й), переселяют соответственно в (k–1)-ю и (k+2)-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней тюремщики не смогут продолжать свою игру.(Узников, заключенных в одной камере, не расселяют.)

**7.** Прогуливаясь однажды по городскому базару инкогнито, Мерли увидел маленьких мошенников, играющих с горожанами в наперстки. Желая проучить мальчишек, Мерлин предложил им одно пари. Пари заключается в следуюшем: берется колода карт. Мальчишки переворачивают часть карт рубашкой вниз. Разрешается вынуть из колоды пачку из нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз (в частности, можно вынуть просто одну карту рубашкой вниз), перевернуть эту пачку как одно целое и вставить в то же место колоды. Мерлин переворачивает ту пачку, на которую укажут мальчики (перевернуть что-то нужно каждым ходом). Мерлин выигрывает, если в колоде все карты лягут рубашкой вверх. Докажите, что в конце концов Мерлин выиграет.

# Разнобой

*22.07.16*

*Дорогие друзья! Пришло время прощаться. Спасибо всем, кто пришёл сюда в этот зимний снежный день! Мы вас любим.*

С. Калугин

**1.** На некоторых белых клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы короли одинакового цвета друг друга не били.

**2.** Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

**3.** В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды. Всегда ли можно организовать 11 дежурств?

**4.** Шах разбил свой квадратный одноэтажный дворец на 64 одинаковые квадратные комнаты, разделил комнаты на семь квартир (проделав двери в некоторых перегородках между комнатами) и в каждой квартире поселил по жене. Жены могут ходить по всем комнатам своей квартиры, не заходя к другим. Какое наименьшее число дверей пришлось проделать во внутренних стенах?

**5.** Назовем крокодилом шахматную фигуру, ход которой заключается в прыжке на $m$ клеток по вертикали или по горизонтали и затем на $n$ клеток в перпендикулярном направлении. Докажите, что для любых $m$ и $n$ можно так раскрасить клетчатую доску $1000000 \times 1000000$ в два цвета (для каждых конкретных $m$ и $n$ своя раскраска), что любые две клетки, соединенные одним ходом крокодила, будут покрашены в разные цвета.

# Заключительная олимпиада

*24.07.16*

**1.** Владимир Алексеевич за обедом съел суп в два раза быстрее, чем Леонид Андреевич, а котлету — в два раза медленнее. При этом он закончил обед раньше. Выясните, пожалуйста, что происходило дольше: Владимир Алексеевич ел суп или Леонид Андреевич ел котлету.

**2.** Числа от 1 до 100 выписаны в ряд в некотором порядке. Сорок из них покрашены в белый цвет, остальные — в черный. Докажите, пожалуйста, что найдутся либо два соседних одноцветных числа, сумма которых нечетна, либо два соседних разноцветных числа, сумма которых четна.

**3.** Решите, пожалуйста, в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + c = a^3.$$

**4.** На сторонах $AB$ и $AC$ равностороннего треугольника $ABC$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно таким образом, что и $AP = CQ$. Точка $M$ — середина $PQ$. Докажите, пожалуйста, что $2AM = CP$.

**5.** Рассмотрим фигуру, образованную всеми клетками диагонали квадрата $20 \times 20$, идущей из правого нижнего угла в левый верхний, а также всеми клетками, лежащими выше этой диагонали. Найдите, пожалуйста, сколькими способами эту фигуру можно разбить на клетчатые прямоугольники с попарно различными площадями?

**6.** Решите, пожалуйста, уравнение в натуральных числах

$$2^a + 3^b + 1 = 6^c.$$

**7.** В чемпионате по волейболу участвовало несколько команд, каждые две из которых сыграли друг с другом ровно один раз. Оказалось, что для каждых двух команд есть ровно 59 команд, у которых они обе выиграли. Докажите, пожалуйста, что количество команд равно 239. Напомним, что ничьих в волейболе не бывает.

**8.** Внутри острого угла $AOB$ дана точка $M$, а на разных сторонах этого угла выбраны точки $P$ и $Q$ таким образом, что $OP + OQ = OM$ и сумма отрезков $MP$ и $MQ$ наименьшая для всех возможных таких пар точек $P$ и $Q$. Докажите, пожалуйста, что $\angle OPM = \angle OQM$.

# Программа теоретического зачета

## *Алгебра и теория чисел*

**1.** Линейное представление НОД. Доказательство линейного представления через катящееся колесо.

**2.** Алгоритм Евклида.

**3.** Линейное представление НОД. Доказательство линейного представления через алгоритм Евклида.

**4.** Сформулируйте и докажите свойства сравнений.

**5.** Докажите, что если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^k \underset{m}{\equiv} b^k$, где $k$ — натуральное число. Сформулируйте, когда можно сокращать на одно и то же число обе части сравнения, и докажите это свойство.

**6.** Пусть $a$ — некоторое число, которое не делится на простое число $p$. Докажите, что в последовательности $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю $p$. Сформулируйте и докажите, используя этот факт, малую теорему Ферма.

**7.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что для любых чисел $a$ и $b$ верно, что $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$. Выведите из этой задачи малую теорему Ферма.

**8.** Отметим на бумаге произвольным образом $p-1$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на $p$. Проведём из остатка $k$ стрелочку в остаток $ka$. Докажите, что все точки разбиваются на циклические маршруты одинаковой длины. Выведите малую теорему Ферма.

**9.** Определение НОК и НОД. Их свойства.

**10.** Обратные остатки.

**11.** Теорема Вильсона. Её доказательство. Теорема, обратная теореме Вильсона.

## *Классическая комбинаторика*

**1.** Докажите комбинаторно и алгебраически: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

**2.** Докажите комбинаторно и алгебраически: $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

**3.** Два определения треугольника Паскаля и их равносильность.

**4.** Бином Ньютона и его связь с треугольников Паскаля.

**5.** Любые два доказательства тождества: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

**6.** Любые два доказательства тождества: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots \pm C_n^n = 0$.

**7.** Докажите, используя треугольник Паскаля: $C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$.

**8.** Докажите, используя треугольник Паскаля: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots +$

$(C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

**9.** Пусть $p > 2$ — простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного $p$-угольника в $a$ цветов (раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми)? Выведите из этого малую теорему Ферма.

**10.** Пусть $p > 2$ — простое число. Сколькими способами можно провести через вершины правильного $p$-угольника замкнутую ориентированную $p$-звенную ломаную (ломаные, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми)? Выведите из этого теорему Вильсона.

### *Геометрия*

**1.** Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними не превосходит наибольшей стороны треугольника.

**2.** **Задача Герона из Александрии.** Точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой. Постройте на этой прямой такую точку $M$, чтобы сумма отрезков $AM + BM$ была минимальна.

**3.** **Рельсы Евклида.** Формулировка и доказательство.

**4.** **Лемма о линолеуме.** Докажите, что если пол в комнате площадью $S$ надо покрыть линолеумом общей площадью также $S$ так, чтобы не было участков, покрытых более чем в два слоя, то площадь пола, покрытая дважды, равна площади пола, не покрытой ни разу.

**5.** ГМТ, равноудаленных от данных точек $A, B$ и $C$. ГМТ, равноудаленных от данных прямых $a, b$ и $c$.

**6.** Четвёртый признак равенства треугольников. Доказательство того, что в треугольниках $ABC$ и $A'B'C'$ с $AB = A'B'$ и $\angle BAC + \angle B'A'C' = 180°$ равенство сторон $BC$ и $B'C'$ равносильно равенству углов $\angle BCA$ и $\angle B'C'A'$.

**7.** Внутри острого угла с вершиной $O$ взяли произвольную точку $A$. Её отразили относительно сторон угла и получили точки $A_1$ и $A_2$. Докажите, что угол $A_1OA_2$ не зависит от выбора точки.

**8.** Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Ортоцентрическая четвёрка.

### *Теория графов*

**1.** Определение двудольного графа.
а) Доказательство того, что все циклы в двудольном графе имеют чётную длину.
б) Доказательство того, что если в двудольном графе есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета поровну.

в) Доказательство того, что если в двудольном графе есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.

**2.** Четыре определения дерева. Эквивалентность трёх из них.

**3.** Доказательство того, что в каждом дереве из более чем одной вершины есть хотя бы два листа.

**4.** Четыре определения дерева. Доказательство, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда у него $n$ вершин и $n-1$ ребро.

**5.** **Лемма о существовании остовного дерева (скелета).** Докажите, что из каждого связного графа можно удалить некоторое число ребер так, чтобы получилось дерево.

**6.** Доказательство того, что в связном графе можно выбрать одну из вершин так, чтобы после ее удаления вместе со всеми ведущими из неё ребрами останется связный граф.

**7.** Докажите, что в турнире (полном ориентированном графе) найдется путь, который проходит по каждой вершине ровно один раз.

**8.** Докажите, что граф двудольный, если в нем нет циклов нечетной длины, используя индукцию по количеству вершин.

**9.** Докажите, что граф двудольный, если в нем нет циклов нечетной длины, используя индукцию по количеству ребер.

**10.** В графе степень каждой вершины не превосходит $d$. Докажите, что все вершины графа можно покрасить в $d+1$ цвет так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, имели разный цвет.