

Approximation d'un problème de surface minimale

Guillaume Foucaud

Avril 2024

Ce projet concerne l'étude d'un problème de surface minimale et son approximation par une méthode d'éléments-finis. Il comprend deux parties : la première concerne l'étude théorique du problème. La deuxième concerne son approximation par une méthode de descente de gradient dont l'approximation numérique utilise la méthode des éléments-finis. Le projet est à rendre sous la forme d'un compte rendu au format pdf. Le compte rendu doit contenir les réponses aux questions théoriques ainsi que les résultats numériques. Il est à envoyer à l'adresse suivante : mehdi.badsy@univ-nantes.fr. La date limite est le mercredi 2 Mai 2024.

1 Partie 1 : Étude du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et régulier et $g \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ une fonction donnée. Le problème consiste à trouver une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la surface de \mathbb{R}^3 définie par

$$\mathcal{S} = \{(x, y, u(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

soit d'aire minimale et coïncide au bord de Ω avec la courbe

$$\Gamma = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in \partial\Omega\}$$

Autrement dit, le problème s'énonce ainsi :

Trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle définie par,

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\Omega), \quad J(v) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \|\nabla v\|_2^2} \, d(x, y)$$

sous la contrainte $u|_{\partial\Omega} = g$,

où $\nabla v = (\partial_x v, \partial_y v)^\top$ est l'opérateur gradient usuel.

1.1 Étude de la fonctionnelle

On considère la couronne $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$ où $0 < a < b$ sont fixés. On fait l'hypothèse que la surface recherchée possède une symétrie de révolution :

$$\exists \tilde{u} \in \mathcal{C}^1([a, b]), \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad u(x, y) = \tilde{u}(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Question 1.1.1 Montrer que sous l'hypothèse précédente, $J(u) = 2\pi \int_a^b r \sqrt{1 + \tilde{u}'(r)^2} dr$

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tel que u vérifie l'hypothèse ci-dessus.

Alors, on a :

$$J(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \|\nabla u\|_2^2} d\omega \quad (1)$$

$$\text{où } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Or, étant donné l'hypothèse sur u , les dérivées partielles nous donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tilde{u}'(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tilde{u}'(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 &= \partial_x u^2 + \partial_y u^2 \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \tilde{u}'^2(\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \tilde{u}'^2(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \tilde{u}'^2(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

Par conséquent, $J(u)$ se réécrit :

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + \|\nabla u\|_2^2} d\omega \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + \tilde{u}'^2(\sqrt{x^2 + y^2})} d(x, y) \end{aligned}$$

On va maintenant procéder à un changement de variable pour travailler en coordonnées polaires.

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow [a, b] \times [0, 2\pi[\\ (x, y) \longmapsto (r, \theta) \end{array} \quad \text{tel que } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

alors φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et en particulier $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On utilise cette fonction pour notre changement de variable.

La jacobienne de φ se calcule comme suit :

$$|J_\varphi(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + \tilde{u}'(\sqrt{x^2 + y^2})^2} d(x, y) \\ &= \int_{[a, b] \times [0, 2\pi[} \sqrt{1 + \tilde{u}'(r)^2} |J_\varphi(r, \theta)| d(r, \theta) \\ &= \int_{[a, b] \times [0, 2\pi[} r \sqrt{1 + \tilde{u}'(r)^2} d(r, \theta) \end{aligned}$$

De plus, en appliquant Fubini positif, on obtient :

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{[a, b] \times [0, 2\pi[} r \sqrt{1 + \tilde{u}'(r)^2} d(r, \theta) \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 + \tilde{u}'(r)^2} d\theta dr \\ &= \int_a^b r \sqrt{1 + \tilde{u}'(r)^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_a^b r \sqrt{1 + \tilde{u}'(r)^2} dr \end{aligned}$$

On obtient finalement le résultat escompté.

Question 1.1.2 Justifier que la fonctionnelle donnée formellement par

$$\mathcal{J}(v) = \int_a^b r \sqrt{1 + v'(r)^2} dr$$

est bien définie pour toute fonction $v \in W^{1,1}([a, b])$.

Montrer que la fonctionnelle est bien définie revient à montrer que $|\mathcal{J}(v)| < \infty$ pour tout $v \in W^{1,1}([a, b])$.

Soit $v \in W^{1,1}([a, b])$. On va utiliser la propriété suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{J}(v)| &= \left| \int_a^b r \sqrt{1 + v'(r)^2} dr \right| \\
&\leq \int_a^b r \sqrt{1 + v'(r)^2} dr \quad \text{car l'intégrande est positive} \\
&\leq \int_a^b r(1 + |v'(r)|) dr \quad \text{en utilisant la propriété} \\
&\leq \int_a^b r dr + \int_a^b b |v'(r)| dr \quad \text{car } r < b \\
&\leq \frac{b^2 - a^2}{2} + b \|v'\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Or $v' \in L^1$ puisque $v \in W^{1,1}([a, b])$ d'où $|\mathcal{J}(v)| < \infty$

Question 1.1.3 Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in W^{1,1}([a, b])$,

$$\mathcal{J}(v) \geq C \|v'\|_{L^1([a, b])}$$

Soit $r \in]a, b[$, alors

$$1 + v'(r)^2 \geq v'(r)^2$$

De plus, $0 < a < r < b$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, donc

$$r \sqrt{1 + v'(r)^2} \geq r |v'(r)| \geq a |v'(r)|$$

Donc en intégrant, on obtient :

$$\int_a^b r \sqrt{1 + v'(r)^2} dr \geq a \|v'\|_{L^1}$$

car on rappelle que $v' \in L^1$

Autrement dit, si on pose $C = a$:

$$\mathcal{J}(v) \geq C \|v'\|_{L^1([a, b])}$$

Soit α, β deux nombres réels avec $\alpha < \beta$. Le problème revient donc à chercher $\tilde{u} \in W^{1,1}([a, b])$ qui minimise \mathcal{J} sur le sous-ensemble

$$\mathcal{C} = \{v \in W^{1,1}([a, b]) : v(a) = \alpha, v(b) = \beta\}$$

Question 1.1.4 Justifier que \mathcal{C} est un sous ensemble convexe et fermé de $W^{1,1}([a, b])$.

Montrons que \mathcal{C} est convexe :

Soient $u, v \in \mathcal{C}$ et $t \in [0, 1]$.

$$ut + v(1 - t) \in W^{1,1}([a, b])$$

puisque $W^{1,1}([a, b])$ est un espace vectoriel.

Vérifions les conditions de bords.

$$(ut + v(1 - t))(a) = u(a)t + v(a)(1 - t) = \alpha t + \alpha(1 - t) = \alpha$$

et

$$(ut + v(1 - t))(b) = u(b)t + v(b)(1 - t) = \beta t + \beta(1 - t) = \beta$$

donc $ut + v(1 - t) \in \mathcal{C}$ donc \mathcal{C} est convexe.

Montrons que \mathcal{C} est un fermé de $W^{1,1}([a, b])$:

Soit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v \in W^{1,1}$. L'objectif est de montrer que $v \in \mathcal{C}$.

Conditions de bords :

On a $v_n(a) = \alpha$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$, donc si v est le représentant continu, alors par unicité de la limite :

$$v_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

De même avec b , l'autre condition de bord.

Aussi, on a :

$$\|v - v_n\|_{W^{1,1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc

$$\|v - v_n\|_{L^1} + \|v' - v'_n\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

dont on déduit que :

$$\|v - v_n\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Si v le représentant continu, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ presque partout.

On en conclut que $v \in \mathcal{C}$. D'où \mathcal{C} fermé de $W^{1,1}[a, b]$

Question 1.1.5 Soit $W_0^{1,1}[a, b] := \{v \in W^{1,1}([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}$. Montrer que sur $W_0^{1,1}[a, b]$, la semi norme $v \in W_0^{1,1}[a, b] \mapsto |v|_1 = \|v'\|_{L^1([a, b])}$ est une norme équivalente la norme $W^{1,1}([a, b])$. On rappelle que la norme $W^{1,1}$ est donnée par

$$\forall v \in W^{1,1}([a, b]), \quad \|v\|_{W^{1,1}([a, b])} = \|v\|_{L^1([a, b])} + \|v'\|_{L^1([a, b])}.$$

Pour montrer l'équivalence de ces deux normes, on veut montrer qu'il existe une constante C_1 et une constante C_2 tel que $\forall u \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} |u|_1 &\leq C_1 \|u\|_{W^{1,1}([a,b])} \\ \|u\|_{W^{1,1}([a,b])} &\leq C_2 |u|_1 \end{aligned}$$

Soit $u \in W_0^{1,1}$

$$|u|_1 = \|u'\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1} + \|u'\|_{L^1} = \|u\|_{W^{1,1}}$$

On pose $C_1 = 1$

On veut montrer l'autre sens.

Directement, on a:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,1}([a,b])} &= \|u\|_{L^1} + \|u'\|_{L^1} \\ &= \|u\|_{L^1} + |u|_1 \end{aligned}$$

Il faut donc montrer qu'il existe K tel que:

$$\|u\|_{L^1} \leq K |u|_1$$

Et poser $C_2 = 1 + K$

Lemme 1 (Signe constant) Soit $[s, t] \subseteq [a, b]$ tel que u soit de signe constant sur $[r, s]$ et tel que $u(s) = u(t) = 0$. Alors :

$$\int_s^t |u(r)| \, dr \leq b \int_s^t |u'(r)| \, dr$$

Preuve 1 (Signe constant)

$$\begin{aligned} \int_s^t |u(r)| \, dr &= \left| \int_s^t u(r) \, dr \right| \\ &= \left| [ru(r)]_s^t - \int_s^t ru'(r) \, dr \right| \\ &= \left| - \int_s^t ru'(r) \, dr \right| \quad \text{car } u \text{ s'annule aux bords} \\ &= \left| \int_s^t ru'(r) \, dr \right| \\ &\leq \int_s^t |ru'(r)| \, dr \\ &\leq b \int_s^t |u'(r)| \, dr \quad \text{car } 0 < s \leq r \leq t < b \end{aligned}$$

Si u est le représentant continu, alors on peut décomposer :

$$u = \sum_i u_i$$

où u_i a comme support $[s_i, t_i]$ et u_i est de signe constant sur ce support. Chaque support est disjoint des autres.

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(r)| \, dr &= \sum_i \int_{s_i}^{t_i} |u_i(r)| \, dr \\ &= \sum_i b \int_{s_i}^{t_i} |u'_i(r)| \, dr \quad \text{en appliquant le lemme} \\ &= b \sum_i \int_{s_i}^{t_i} |u'_i(r)| \, dr \\ &= b \int_a^b \left| \sum_i u'_i(r) \right| \, dr \\ &= b \int_a^b \left| \left(\sum_i u_i \right)'(r) \right| \, dr \\ &= b \int_a^b |u'(r)| \, dr \end{aligned}$$

On obtient :

$$\int_a^b |u(r)| \, dr \leq b \int_a^b |u'(r)| \, dr$$

C'est à dire :

$$\|u\|_{L^1} \leq b |u|_1$$

On prend $K = b$ et donc $C_2 = 1 + b$. Et on peut conclure que les deux normes sont équivalentes.

Question 1.1.6 *En déduire que la fonctionnelle \mathcal{J} est coercive sur \mathcal{C} et montrer que les suites minimisantes de \mathcal{J} sur \mathcal{C} sont bornées.*

On montre que \mathcal{J} est coercive sur \mathcal{C} :

D'après la question 1.1.3

$$\mathcal{J}(v) \geq C \|v'\|_{L^1([a,b])}$$

Mais comme $|v|_1 = \|v'\|_{L^1([a,b])}$, on a :

$$\mathcal{J}(v) \geq C |v|_1$$

Or d'après la question 1.1.5, la norme $|\cdot|_1$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W^{1,1}([a,b])}$, donc il existe une constante C' tel que :

$$\mathcal{J}(v) \geq C |v|_1 \geq C' \|v\|_{W^{1,1}([a,b])}$$

Enfin, $\mathcal{C} \subseteq W^{1,1}([a,b])$ et

$$\mathcal{J}(v) \xrightarrow{\|v\|_{W^{1,1}} \rightarrow \infty} \infty$$

Donc \mathcal{J} est coercive sur \mathcal{C}

On montre que les suites minimisantes de \mathcal{J} sur \mathcal{C} sont bornées :

Soit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ tq $\mathcal{J}(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{v \in \mathcal{C}} \mathcal{J}(v)$

D'après ce qui précède, pour chaque v_n il existe une constante C tel que

$$\mathcal{J}(v_n) \geq C \|v_n\|_{W^{1,1}([a,b])}$$

Par conséquent,

$$\|v_n\|_{W^{1,1}([a,b])} \leq \frac{1}{C} \mathcal{J}(v_n)$$

Or $\mathcal{J}(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{v \in \mathcal{C}} \mathcal{J}(v)$, donc $\exists N \forall n \geq N \quad \mathcal{J}(v_n) \leq \mathcal{J}(v_N)$

On note $M := \max_{0 \leq n \leq N} \mathcal{J}(v_n)$ et on a

$$\forall n \quad \|v_n\|_{W^{1,1}([a,b])} \leq \frac{M}{C}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien bornée.

Question 1.1.7 Montrer que la fonctionnelle \mathcal{J} est strictement convexe sur \mathcal{C} . En déduire que si \mathcal{J} admet un minimum sur \mathcal{C} alors il est unique.

Lemme 2 Soit la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$

Alors F est strictement convexe sur \mathbb{R}

Preuve 2 (Lemme 1) On a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on calcule F'

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0, \quad \text{si } x > 0$$

De plus $F' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, donc on peut calculer F'' :

$$F''(x) = \frac{F(x) - xF'(x)}{F(x)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{F(x)^3} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où F strictement convexe sur \mathbb{R} .

Lemme 3 Si $u' = v'$ presque partout avec $u, v \in \mathcal{C}$, alors $u = v$ presque partout.

Preuve 3 (Lemme 2) Soient $u, v \in \mathcal{C}$ tel que $u' = v'$ presque partout. Alors $u - v = C$ avec C une constante. Or on a $u(a) - v(a) = 0$, donc $C = 0$ d'où $u = v$ presque partout.

Désormais, on montre que la fonctionnelle \mathcal{J} est strictement convexe sur \mathcal{C} .

On rappelle que pour $u \in \mathcal{C}$:

$$\mathcal{J}(u) = \int_a^b rF(u'(r)) dr$$

Soit $u, v \in \mathcal{C}$ et $t \in]0, 1[$, et on suppose que $u' \neq v'$ presque partout. D'après le lemme 1, on a pour presque tout $r \in [a, b]$:

$$tF(u'(r)) + (1-t)F(v'(r)) - F(tu'(r) + (1-t)v'(r)) \geq 0$$

On a l'égalité si $u' = v'$ presque partout. Mais ce n'est pas le cas puisqu'on suppose le contraire et d'après le lemme 2, on a $u \neq v$ presque partout.

Donc

$$tF(u'(r)) + (1-t)F(v'(r)) - F(tu'(r) + (1-t)v'(r)) > 0$$

En multipliant par r et en intégrant, on obtient :

$$t\mathcal{J}(u) + (1-t)\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(tu + (1-t)v) > 0$$

Donc \mathcal{J} est bien strictement convexe sur \mathcal{C} .

On veut maintenant montrer que si \mathcal{J} admet un minimum sur \mathcal{C} , alors il est unique.

Soient u et v deux minimums globaux non égaux sur \mathcal{C} . On a $\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}(v)$.

Or $\frac{u+v}{2} \in \mathcal{C}$ et on sait que \mathcal{J} est strictement convexe, d'où

$$\mathcal{J}\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{\mathcal{J}(u) + \mathcal{J}(v)}{2} = \mathcal{J}(u)$$

Ce qui contredit le fait que u soit un minimum global. Et donc par l'absurde, on déduit que si u existe, il est unique.

On admet l'existence d'un minimiseur de \mathcal{J} sur \mathcal{C} . On souhaite à présent proposer un algorithme pour calculer ce minimiseur.

1.2 Une méthode de descente de gradient

Question 1.2.1 Soit $u \in \mathcal{C}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([a, b])$ montrer que

$$\int_a^b \frac{r |\varphi'(r)|^2}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr = o(\|\varphi'\|_{L^\infty}) \quad \text{lorsque } \|\varphi'\|_{L^\infty} \rightarrow 0$$

On commence par estimer cette intégrale :

$$\int_a^b \frac{r}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr \leq \int_a^b r dr = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

car

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On remarque que $\frac{r}{\sqrt{1+u'(r)^2}} \geq 0 \quad \forall r \in [a, b]$.

En utilisant l'inégalité de Holder avec la convention $1 = 1 + \frac{1}{\infty}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{r |\varphi'(r)|^2}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr &\leq \int_a^b \frac{r}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([a, b])} |\varphi'(r)|^2 \\ &\leq \frac{b^2 - a^2}{2} \|\varphi'\|_{L^\infty}^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

d'où $\int_a^b \frac{r |\varphi'(r)|^2}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr = o(\|\varphi'\|_{L^\infty}) \quad \text{lorsque } \|\varphi'\|_{L^\infty} \rightarrow 0$

Question 1.2.2 Montrer que pour tout $u \in \mathcal{C}$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([a, b])$ alors $u + \varphi \in \mathcal{C}$ et

$$\mathcal{J}(u + \varphi) = \mathcal{J}(u) + \int_a^b r \frac{u'(r)\varphi'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr + o(\|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On reprend la fonction F de la question 1.1.7. On sait que cette fonction est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on applique donc un développement de Taylor-Lagrange sur cette fonction.

Soit $x, \varepsilon \in \mathbb{R}$, on pose $x_0 \in [0, \varepsilon[$ tel que :

$$F(x + \varepsilon) = F(x) + \varepsilon F'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} F''(x + x_0) \quad (2)$$

En prenant $x = u'(r)$ et $\varepsilon = \varphi'(r)$, on a :

$$F(u'(r) + \varphi'(r)) = F(u'(r)) + \varphi'(r) F'(u'(r)) + \frac{\varphi'(r)^2}{2} F''(u'(r) + x_0)$$

En multipliant par r , en intégrant sur $[a, b]$ et en remplaçant F , F' et F'' par leur expression calculée en question 1.1.7, on obtient :

$$\mathcal{J}(u + \varphi) = \mathcal{J}(u) + \int_a^b r \frac{u'(r)\varphi'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr + \int_a^b r \frac{\varphi'(r)^2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(u'(r)+x_0)^2}^3} dr$$

Or,

$$\int_a^b \frac{r\varphi'(r)^2}{\sqrt{1+(u'(r)+x_0)^2}^3} dr \leq \int_a^b \frac{r\varphi'(r)^2}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr$$

car $u'(r) + x_0 \geq u'(r)$, et

$$\frac{1}{\sqrt{1+u'(r)^2}^3} = \frac{1}{(1+u'(r)^2)\sqrt{1+u'(r)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+u'(r)^2}}$$

et d'après la question 2.0.1,

$$\int_a^b \frac{r\varphi'(r)^2}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr = o(\|\varphi'\|_{L^\infty}) \quad \text{lorsque } \|\varphi'\|_{L^\infty} \rightarrow 0$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{2} \int_a^b \frac{r\varphi'(r)^2}{\sqrt{1+(u'(r)+x_0)^2}^3} dr = o(\|\varphi'\|_{L^\infty}) \quad \text{lorsque } \|\varphi'\|_{L^\infty} \rightarrow 0$$

D'où finalement :

$$\mathcal{J}(u + \varphi) = \mathcal{J}(u) + \int_a^b r \frac{u'(r)\varphi'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr + o(\|\varphi'\|_{L^\infty}) \quad \text{lorsque } \|\varphi'\|_{L^\infty} \rightarrow 0$$

Question 1.2.3 Soit $u \in \mathcal{C}$ fixé. Montrer que l'application linéaire $d\mathcal{J}(u) : W_0^{1,\infty}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall \varphi \in W_0^{1,\infty}[a, b], \quad d\mathcal{J}(u)(\varphi) = \int_a^b r \frac{u'(r)\varphi'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr$$

est continue sur $W_0^{1,\infty}[a, b] := \{v \in W^{1,\infty}[a, b] : v(a) = v(b) = 0\}$.

Puisque $d\mathcal{J}(u)$ est linéaire. Il nous suffit de montrer qu'il existe C une constante tel que

$$\forall \varphi \in W_0^{1,\infty}[a, b] \quad |d\mathcal{J}(u)(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}$$

Soit $\varphi \in W_0^{1,\infty}[a, b]$,

$$\begin{aligned}
|d\mathcal{J}(u)(\varphi)| &\leq \int_a^b r \frac{|u'(r)\varphi'(r)|}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr \\
&\leq \int_a^b \frac{r}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr \|u'\varphi'\|_{L^\infty} \quad \text{en utilisant l'inégalité de Holder avec } 1 = 1 + \frac{1}{\infty} \\
&\leq \frac{b^2 - a^2}{2} \|u'\varphi'\|_{L^\infty} \quad \text{en utilisant la question 1} \\
&\leq \frac{b^2 - a^2}{2} \|u'\|_{L^\infty} \|\varphi'\|_{L^\infty} \quad \text{en utilisant l'inégalité de Holder avec } \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}
\end{aligned}$$

De plus, $\|\varphi'\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}$. On pose $C = \frac{b^2 - a^2}{2} \|u'\|_{L^\infty}$.
On a donc :

$$|d\mathcal{J}(u)(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}$$

d'où $d\mathcal{J}(u)$ continue.

Question 1.2.4 Soit $u \in \mathcal{C}$ fixé. Montrer que l'application linéaire précédente est aussi continue sur $H_0^1[a, b]$. En déduire que le problème variationnel,

Trouver $w(u) \in H_0^1[a, b]$ telle que pour tout $\varphi \in H_0^1[a, b]$

$$\int_a^b w(u)'(r)\varphi'(r) dr = d\mathcal{J}(u)(\varphi)$$

admet une unique solution.

Soit $\varphi \in H_0^1[a, b]$. On repart de :

$$|d\mathcal{J}(u)(\varphi)| \leq \int_a^b r \frac{|u'(r)\varphi'(r)|}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr$$

Puis, on utilise cette fois l'inégalité de Holder avec $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
|d\mathcal{J}(u)(\varphi)|^2 &\leq \int_a^b \frac{r^2 |u'(r)|^2}{1+u'(r)^2} dr \int_a^b \frac{|\varphi'(r)|^2}{1+u'(r)^2} dr \\
&\leq \int_a^b \frac{r^2 |u'(r)|^2}{1+u'(r)^2} dr \int_a^b |\varphi'(r)|^2 dr \quad \text{car } \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\leq \int_a^b r^2 dr \int_a^b |\varphi'(r)|^2 dr \quad \text{car } \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\leq \frac{b^3 - a^3}{3} \|\varphi'\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{b^3 - a^3}{3} \|\varphi\|_{H^1}^2 \quad \text{car } \|\varphi'\|_{L^2}^2 \leq \|\varphi'\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{H^1}^2
\end{aligned}$$

En posant $C = \sqrt{\frac{b^3-a^3}{3}}$, on a bien que

$$|d\mathcal{J}(u)(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{H^1}$$

et donc que $d\mathcal{J}(u)$ est continu sur H_0^1

On veut maintenant montrer que le problème variationnel admet une unique solution.

Soient les fonctions :

$$a : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vartheta, \varphi \longmapsto \int_a^b \vartheta'(r) \varphi'(r) dr$$

$$l : H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto d\mathcal{J}(u)(\varphi) = \int_a^b r \frac{u'(r) \varphi'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr$$

On cherche à appliquer le théorème de Lax-Milgram de sorte à montrer qu'il existe un unique $\vartheta \in H_0^1$ tel que $a(\vartheta, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1$.

On a d'après l'énoncé que l est linéaire et on a montré que cette fonction était continue sur $H_0^1[a,b]$. On va maintenant montrer que a est une forme bilinéaire continue et coercive.

Soient $\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi \in H_0^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a(\vartheta_1 + \lambda \vartheta_2, \varphi) &= \int_a^b (\vartheta_1 + \lambda \vartheta_2)'(r) \varphi'(r) dr \\ &= \int_a^b \vartheta_1'(r) \varphi'(r) dr + \lambda \int_a^b \vartheta_2'(r) \varphi'(r) dr \\ &= a(\vartheta_1, \varphi) + \lambda a(\vartheta_2, \varphi) \end{aligned}$$

donc a est linéaire en sa première variable et de plus a est symétrique puisque $a(\vartheta, \varphi) = a(\varphi, \vartheta)$ donc a est bilinéaire.

Soient $\vartheta, \varphi \in H_0^1$

$$\begin{aligned} a(\vartheta, \varphi) &= \int_a^b \vartheta'(r) \varphi'(r) dr \\ &\leq \int_a^b |\vartheta'(r) \varphi'(r)| dr \\ &\leq \|\vartheta'\|_{L^2} \|\varphi'\|_{L^2} \quad \text{en utilisant l'inégalité de Cauchy-Swchartz} \\ &\leq \|\vartheta\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} \quad \text{car} \quad \|\varphi'\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

donc a est continue.

Soit $\varphi \in H_0^1$

$$\begin{aligned} |a(\varphi, \varphi)| &= \int_a^b \varphi'(r)^2 dr \quad \text{car l'intégrande est positive} \\ &= \|\varphi'\|_{L^2}^2 = |\varphi|_2^2 \\ &\geq C \|\varphi\|_{H^1}^2 \quad \text{car les normes } |\cdot|_2 \text{ et } \|\cdot\|_{H^1} \text{ sont équivalentes.} \end{aligned}$$

donc a est coercive.

Remarque : Pour l'équivalence des normes $|\cdot|_2$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ similaire aux normes de la question 1.1.5, on utilise une propriété de cours.

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $\vartheta \in H_0^1$ tel que $a(\vartheta, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1$.

Or puisque l'on fixe u et que $\vartheta = \omega(u)$, il existe une unique solution $\omega(u) \in H_0^1$ au problème variationnel.

On notera par la suite $w(u) = \nabla \mathcal{J}(u)$. C'est le gradient de \mathcal{J} en u pour le produit scalaire H_0^1 . La méthode de gradient à pas constant est définie par la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$(G) : \begin{cases} u^0 \in \mathcal{C}, \\ u^{n+1} = u^n - \rho \nabla \mathcal{J}(u^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3)$$

où $\rho > 0$ est fixé.

Question 1.2.5 Justifier que la méthode de gradient à pas constant préserve les conditions aux bords.

On procède par récurrence.

Puisque $u^0 \in \mathcal{C}$, on a $u^0(a) = u^0(b) = 0$.

Maintenant supposons que pour n fixé, on ait $u^n(a) = u^n(b) = 0$.

On sait que $\nabla \mathcal{J}(u^n) = w(u^n) \in H_0^1[a, b]$, donc $\nabla \mathcal{J}(u^n)(a) = \nabla \mathcal{J}(u^n)(b) = 0$

Et donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u^{n+1}(a) &= u^n(a) - \rho \nabla \mathcal{J}(u^n)(a) = 0 \\ u^{n+1}(b) &= u^n(b) - \rho \nabla \mathcal{J}(u^n)(b) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u^n(a) = u^n(b) = 0$$

Autrement dit, la méthode préserve les conditions de bords.

2 Partie 2 : Approximation

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{b-a}{N+1}$. On considère un maillage uniforme de l'intervalle $[a, b]$. On définit donc les sommets $x_i = a + ih$ pour tout $i = 0, \dots, N+1$, et on pose

$$V_h := \{v \in \mathcal{C}^0([a, b]) : v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall i = 0, \dots, N\}$$

$$V_{h,0} := \{v \in V_h : v(a) = v(b) = 0\}.$$

Question 2.0.1 Montrer que V_h est un espace d'approximation conforme de $W^{1,1}[a, b]$ et que $V_{h,0}$ est un espace d'approximation conforme de $H_0^1[a, b]$.

Soit $v \in V_h$, alors $v \in \mathcal{C}^0([a, b])$, en particulier $v \in L^1[a, b]$, et de plus $v \in \mathcal{C}^1\left(\bigcup_{i=0}^N]x_i, x_{i+1}[\right)$. Donc v' est continue par morceau et en particulier $v' \in L^1$. On en déduit que $v \in W^{1,1}$. D'où $V_h \subseteq W^{1,1}$, autrement dit V_h est un espace conforme de $W^{1,1}$.

Par des raisonnements analogues, on peut montrer que $V_{h,0} \subseteq H_0^1$ si de plus on vérifie que $v(a) = v(b) = 0$ ce qui est le cas pour $v \in V_{h,0}$. Donc $V_{h,0}$ est un espace d'approximation conforme de $H_0^1[a, b]$.

Question 2.0.2 Rappeler la dimension de l'espace V_h et l'expression des fonctions chapeaux. Quelle est la dimension de $V_{h,0}$?

Puisqu'il y a N intervalles sur lesquels on a restreint $v \in V_h$. On en déduit que $\dim V_h = N + 2$

On rappelle que les fonctions chapeaux sont définies comme ceci :

$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisqu'on a fixé deux conditions de bords, on a $\dim V_{h,0} = \dim V_h - 2 = N$

Question 2.0.3 Le problème variationnel discret associé à la méthode de gradient est défini par la suite $(u_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$(G) : \begin{cases} u_h^0 \in \mathcal{C}, \\ u_h^{n+1} = u_h^n - \rho \nabla_h \mathcal{J}(u_h^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où $\nabla_h \mathcal{J}(u_h^n) \in V_{h,0}$ vérifie le problème variationnel discret :

$$\int_a^b \nabla_h \mathcal{J}(u_h^n)(r) \varphi'(r) dr = d\mathcal{J}(u_h^n)(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_{h,0}.$$

Montrer que la suite $(u_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, i.e., $u_h^n \in \mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de la méthode, $u_h^0 \in \mathcal{C}$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $u_h^n \in \mathcal{C}$. On veut montrer que $u_h^{n+1} \in \mathcal{C}$:

D'après la question 1.2.5, la méthode préserve les conditions de bords. De plus, on sait de la question 1.2.4 que $\nabla_h \mathcal{J}(u_h^n) \in H_0^1$

Lemme 4 *Soit $u \in H^1[a, b]$, alors $u \in W^{1,1}[a, b]$*

On peut le montrer car $[a, b]$ est de mesure finie et on peut appliquer une inégalité de Cauchy Schwartz.

D'après ce lemme, $\nabla_h \mathcal{J}(u_h^n) \in W^{1,1}[a, b]$

Or $W^{1,1}[a, b]$ est un espace vectoriel, donc pour $\rho \in \mathbb{R}$:

$$u_h^n - \rho \nabla_h \mathcal{J}(u_h^n) \in W_0^{1,1}[a, b]$$

d'où $u_h^{n+1} \in W^{1,1}[a, b]$, et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_h^n \in W^{1,1}[a, b]$.
Puisqu'on a préservation des conditions de bord, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_h^n \in \mathcal{C}$.

Question 2.0.4 *Écrire la forme matricielle du problème discret pour le calcul du gradient. On précisera les expressions de la matrice de rigidité et du second membre.*

On se place dans $V_n \subseteq V$. On note $d_n = \dim V_n$. Les fonctions chapeaux w_i forment une base de V_n avec $1 \leq i \leq d_n$, par conséquent on peut écrire la solution approximée qui nous intéresse comme :

$$u_n = \sum_{i=1}^{d_n} \lambda_i \omega_i$$

Le problème discret peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$A_n \bar{u}_n = b_n$$

avec $\forall i, j \in [1, N]$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{d_n})^T \\ (A_n)_{i,j} &= a(\omega_j, \omega_i) \\ (b_n)_i &= l(\omega_i) \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} a(\omega_j, \omega_i) &= \int_a^b \omega_j'(r) \omega_i'(r) dr \\ l(\omega_i) &= d\mathcal{J}(u)(\omega_i) = \int_a^b r \frac{u'(r) \omega_i'(r)}{\sqrt{1 + u'(r)^2}} dr \end{aligned}$$

Aussi, ω_i a une dérivée faible que l'on peut écrire :

$$\omega'_i = \frac{1}{h} 1_{[x_{i-1}, x_i]} - \frac{1}{h} 1_{[x_i, x_{i+1}]} \quad \text{donc} \quad |\omega'_i|^2 = \frac{1}{h^2} 1_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}$$

avec $h = x_{i+1} - x_i \quad \forall 1 \leq i \leq d_n$

Calculons la matrice de rigidité :

A_n est symétrique car a est bilinéaire symétrique. De plus, $\omega'_j(r)\omega'_i(r) = 0$ si $|i - j| > 1$ pour presque tout r , donc $(A_n)_{i,j} = 0$ si $|i - j| > 1$. Puisque A_n est symétrique, il reste deux cas à calculer : la diagonale et la sous-diagonale.

Cas de la diagonale, quand $i = j$:

$$\begin{aligned} a(\omega_i, \omega_i) &= \int_a^b |\omega'_i(r)|^2 dr \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |\omega'_i(r)|^2 dr \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} 1_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} dr \\ &= \frac{1}{h^2} 2h = \frac{2}{h} \end{aligned}$$

Cas de la sous-diagonale, quand $i - 1 = j$:

$$\begin{aligned} a(\omega_{i-1}, \omega_i) &= \int_a^b \omega'_{i-1}(r)\omega'_i(r) dr \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega'_{i-1}(r)\omega'_i(r) dr \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega'_{i-1}(r) dr - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega'_{i-1}(r) dr \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega'_{i-1}(r) dr \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h} dr \\ &= \frac{-1}{h} \quad \forall 2 \leq i \leq d_n \end{aligned}$$

Calculons le vecteur en second membre :

$$\begin{aligned}
l(w_i) &= d\mathcal{J}(u)(w_i) \\
&= \int_a^b r \frac{u'(r)w'_i(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} r \frac{u'(r)w'_i(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr \quad \text{car } \text{supp}(\omega_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}] \\
&= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r \frac{u'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r \frac{u'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} dr \\
&\approx \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r \frac{u_i - u_{i-1}}{h \sqrt{1 + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}^2}} dr - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r \frac{u_{i+1} - u_i}{h \sqrt{1 + \frac{u_{i+1} - u_i}{h}^2}} dr \\
&= \frac{1}{h^2} \frac{u_i - u_{i-1}}{\sqrt{1 + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}^2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r dr - \frac{1}{h^2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\sqrt{1 + \frac{u_{i+1} - u_i}{h}^2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r dr \\
&= \frac{1}{h^2} \frac{u_i - u_{i-1}}{\sqrt{1 + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}^2}} \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} - \frac{1}{h^2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\sqrt{1 + \frac{u_{i+1} - u_i}{h}^2}} \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} \\
&= \frac{1}{h} \frac{u_i - u_{i-1}}{\sqrt{1 + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}^2}} \frac{x_i + x_{i-1}}{2} - \frac{1}{h} \frac{u_{i+1} - u_i}{\sqrt{1 + \frac{u_{i+1} - u_i}{h}^2}} \frac{x_{i+1} + x_i}{2}
\end{aligned}$$

Question 2.0.5 Proposer un critère d'arrêt pour l'algorithme de gradient discret.

On décide de choisir $\|\nabla_h \mathcal{J}(u_h^n)\|_{L^1} < \varepsilon$ comme critère d'arrêt, car lorsque $\nabla_h \mathcal{J}(u_h^n) = 0$, l'algorithme ne progresse plus, c'est à dire $\exists N \in \mathbb{N}^* \quad u_h^{n+1} = u_h^n \quad \forall n \geq N$.

Question 2.0.6 Choisir $\rho > 0$ assez petit et tracer le graphe de la fonction u_h^n pour n fixé assez grand.

On choisit $\rho = 0.5$ pour notre simulation.
Avec les paramètres de modèle suivant :

- Nombre d'itérations maximal : 2000
- Tolérance : 10^{-8}
- $[a, b] = [1.1, 2.0]$

Voici le résultat obtenu :

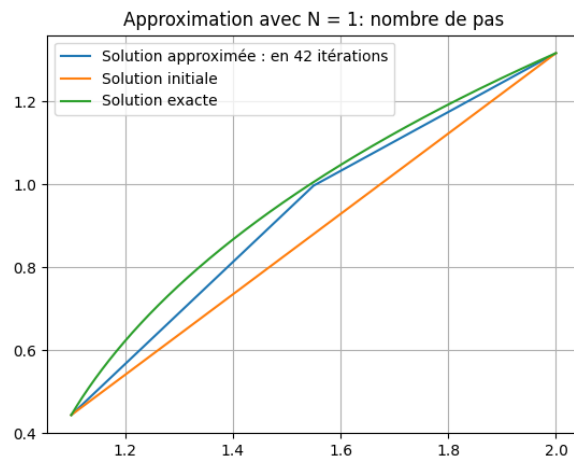


Figure 1: Approximation avec N = 1

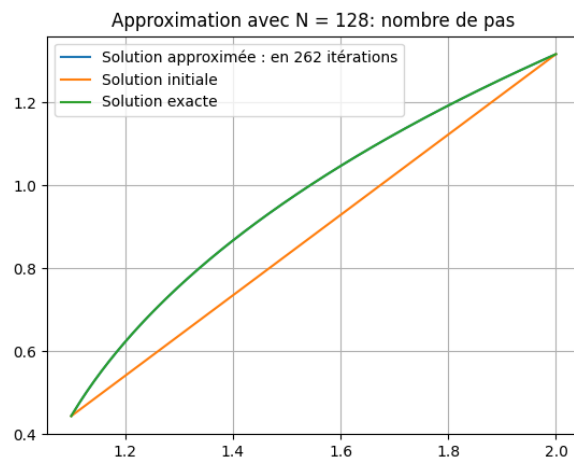


Figure 2: Approximation avec N = 128

Remarque : Avec le code utilisé, n est déterminé une fois que l'erreur est suffisamment petite, ce qui dépend de notre tolérance.

Question 2.0.7 On prend $\alpha = 0$, $a = 1$ et $\beta = \operatorname{argch}(b)$. Montrer que la fonction $u_{ex} : r \in [a, b] \rightarrow \operatorname{argch}(r)$ est bien solution du problème de minimisation de \mathcal{J} sur \mathcal{C} .

On travaille sur l'ensemble :

$$\mathcal{C}_{\text{test}} := \{v \in W^{1,1}([1, b]) : v(1) = 0, v(b) = \text{argch}(b)\}$$

On veut montrer que $d\mathcal{J}(u_{\text{ex}})(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,1}[a, b]$

C'est à dire :

$$\int_a^b r \frac{u'_{\text{ex}}(r) \varphi'(r)}{\sqrt{1 + u'_{\text{ex}}(r)^2}} dr = 0$$

On calcule u'_{ex} :

$$u'_{\text{ex}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Soit $\varphi \in W_0^{1,1}[a, b]$

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}(u_{\text{ex}})(\varphi) &= \int_a^b r \frac{u'_{\text{ex}}(r) \varphi'(r)}{\sqrt{1 + u'_{\text{ex}}(r)^2}} dr \\ &= \int_a^b \frac{r \varphi'(r)}{\sqrt{r^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{r^2 - 1}}^2} dr \\ &= \int_a^b \frac{r \varphi'(r)}{\sqrt{r^2 - 1} + 1} dr \\ &= \int_a^b \varphi'(r) dr \\ &= \varphi(b) - \varphi(a) \\ &= 0 \quad \text{car } \varphi(a) = 0 \text{ et } \varphi(b) = 0 \end{aligned}$$

Donc u_{ex} est bien solution du problème.

Question 2.0.8 Étudier l'erreur en fonction de h en norme L^1 et en norme $W^{1,1}$ entre u_h^n et u_{ex} pour n fixé assez grand. Que semble être l'ordre de la méthode en h ?

Avec les mêmes paramètres qu'à la question 2.0.6 :

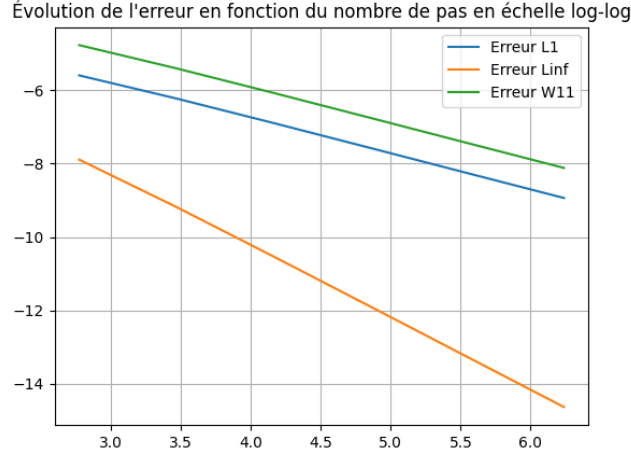


Figure 3: Erreurs avec $N = 16, 32, \dots, 512$

Remarque : On a décidé de prendre en abscisse le nombre de pas, plutôt que h la finesse. Mais c'est en réalité équivalent puisque le nombre de pas est inversement proportionnel à la finesse du maillage. Donc en échelle logarithmique, cela ne change que le signe.

Résultats du modèle :

- Pente de l'erreur L^1 : 0.9862943239012876
- Pente de l'erreur L^∞ : 1.9856410345335198
- Pente de l'erreur $W^{1,1}$: 0.9873503213327378

L'ordre de la méthode semble être 1 avec les normes L^1 et $W^{1,1}$.

Remarque : En norme L^∞ , on obtient l'ordre 2.

Question 2.0.9 Pour n fixé assez grand, tracer la surface pour différentes valeurs de h , $\mathcal{S}_h = \{(x, y, u_h^n(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$.

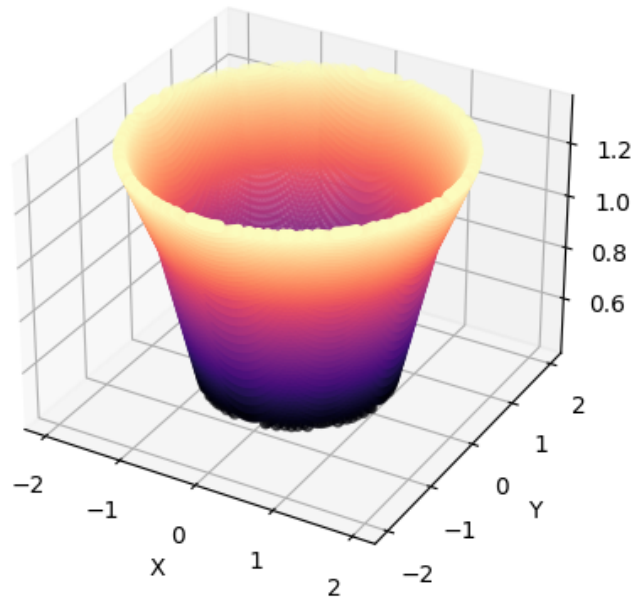


Figure 4: Surface approximée avec $N = 1$

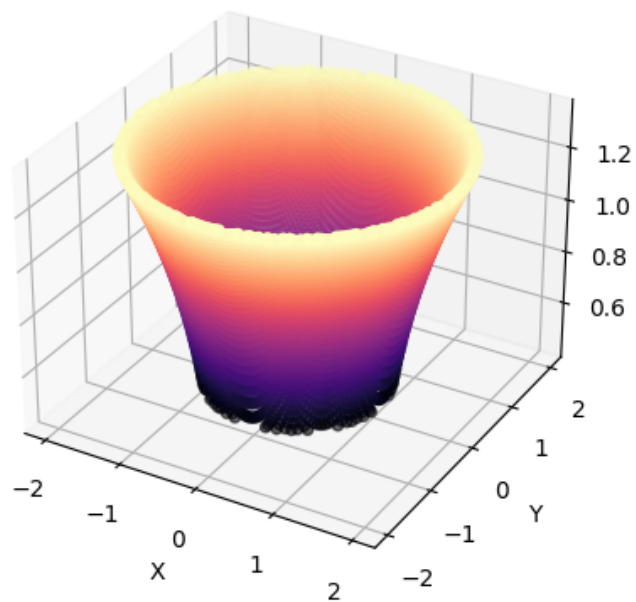


Figure 5: Surface approximée avec $N = 32$

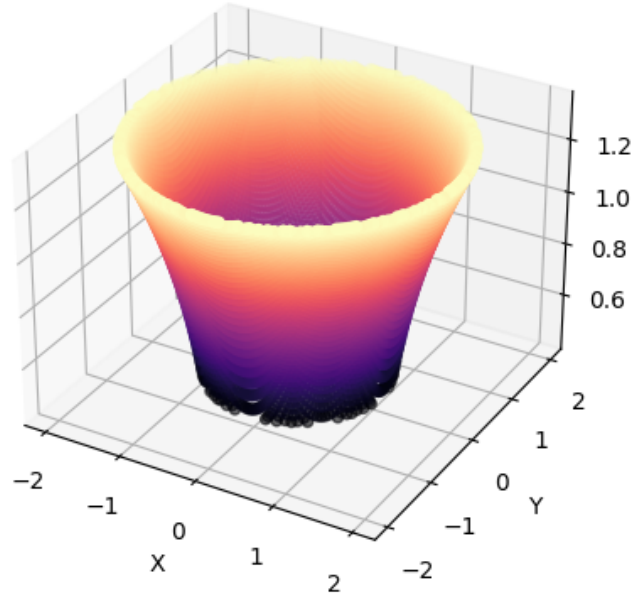


Figure 6: Surface approximée avec $N = 128$

Pour $N = 1$, on peut observer que la surface est composée de deux sections de cônes. Ce qui fait que pour $N = 32$ et $N = 128$, la surface est beaucoup plus lisse et il est difficile de visualiser de grandes différences avec une simple observation. On peut toutefois comparer avec la surface de la solution exacte et valider notre modèle :

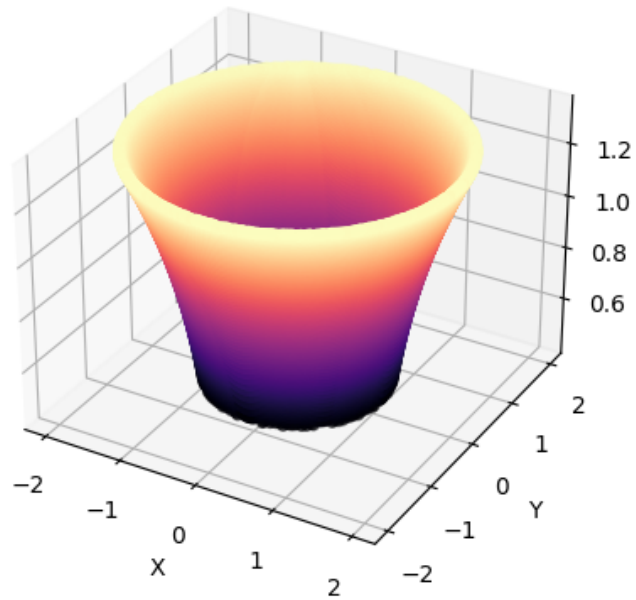


Figure 7: Surface de la solution exacte

Visuellement, le modèle semble bien se rapprocher de la solution, et les erreurs obtenues en question 2.0.8 tendent à le confirmer.