Notions : changement de base et tout le reste.

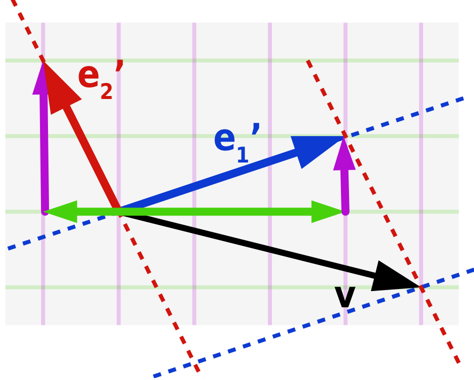
Matrice de passage

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ a pour colonnes les vecteurs de $\mathcal{B}'$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. On la note

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

Changement de base : vecteurs

Si X et X' sont des matrices représentant le même vecteur dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a : **X = PX'**



$$\mathbf{v} = \mathbf{e_1'} - \mathbf{e_2'}$$
$$= (3e_1+e_2) - (-e_1+2e_2)$$
$$= 4e_1 - e_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Représentation matricielle de f

La matrice de passage est un cas particulier de la représentation matricielle de la fonction f de E (base $\mathcal{B}_E$) vers F (base $\mathcal{B}_F$). C'est une matrice qui a pour colonnes les images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ écrits dans la base $\mathcal{B}_F$. On la note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$

Changement de base : applications

Soit f un endomorphisme de E, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases. Avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)P$

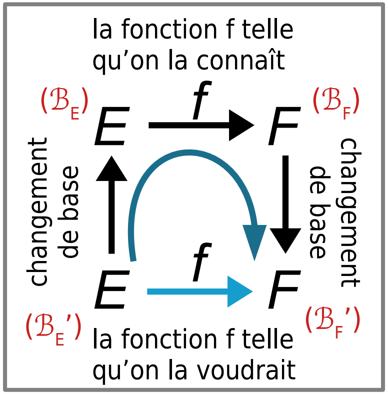
Matrices semblables

Deux matrices A et B sont dites semblables si on peut trouver P telle que $A = P^{-1}BP$, et vice-versa. Les matrices représentant un endomorphisme dans différentes bases sont semblables.

Théorie : matrice inverse

Soit une matrice carrée M inversible. On peut la comprendre comme les coefficients d'un système qui exprime les vecteurs d'une base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs d'une autre base $\mathcal{B}$. C'est-à-dire comme une matrice de passage. Donc, en « résolvant » le système, on exprime $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathcal{B}'$; on a donc la matrice de passage inverse, qui est l'inverse de M. En effet :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)^{-1}$$



Généralisation

On peut modifier cette formule de changement de base pour qu'elle fonctionne pour n'importe quels e.v. de départ et d'arrivée, et n'importe quelles bases : avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ vers $\mathcal{B}_E'$, et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ vers $\mathcal{B}_F'$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) = Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)P$$

Remarque

Beaucoup du cours d'algèbre linéaire de l'année de licence 2 consiste à trouver des bases dans lesquelles un endomorphisme a une matrice d'une certaine forme. Donc … connaître les formules de changement de base est assez utile.

Rappel : somme directe.

Si V et W sont deux s.e.v. (sous-espaces vectoriels) d'un espace vectoriel E, V+W est un s.e.v. de E, l'ensemble des v+w avec v∈V et w∈W. Cette somme est **directe** si V∩W = {0}.

Somme directe de *p* s.e.v.

Pour plusieurs s.e.v. V_i de E, on définit

$f:(v_1, \ldots, v_p) \mapsto v_1+\ldots+v_p$ de $V_1\times\ldots\times V_p$ vers E

La somme $V_1+\ldots+V_p$ est donc l'image de f ; et la somme est directe ssi f est injective. Alternativement, la somme est directe ssi pour tout i, $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = \{0\}$

Notations.

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_p = \bigoplus_{i=1}^{p} V_i$$

Projecteur.

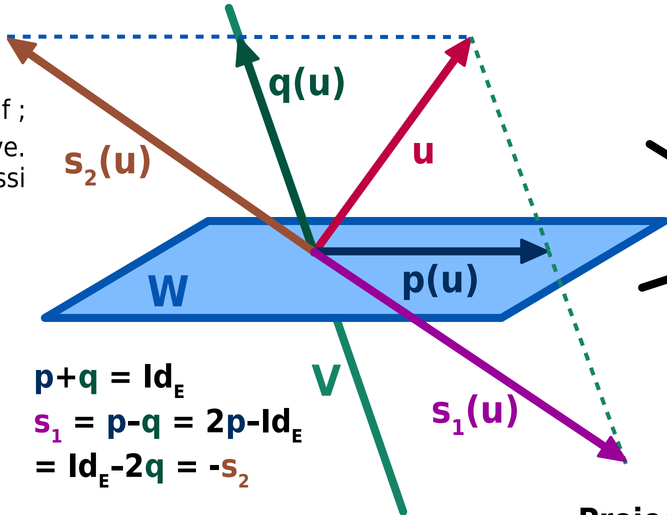
Soit E = V⊕W. Tout vecteur u peut s'écrire comme v+w avec v∈V et w∈W, par définition. On peut définir une application linéaire p qui associe à chaque u le composant v ; on l'appelle « projecteur sur V parallèlement à W ».

Propriétés (projecteur).

- Im p = V, Ker p = W
- p∘p = p
- q = id_E – p est le projecteur sur W parallèlement à V ; en effet Im q = W, Ker q = V et q∘q = q.

Symétrie.

Soit E = V⊕W. Tout vecteur u peut s'écrire comme v+w avec v∈V et w∈W, par définition. On peut définir une application linéaire p qui associe à chaque u le vecteur v-w ; on l'appelle « symétrie par rapport à V parallèlement à W ».



p+q = Id_E

s_1 = p-q = 2p-Id_E

= Id_E-2q = -s_2

Caractérisation (projecteur).

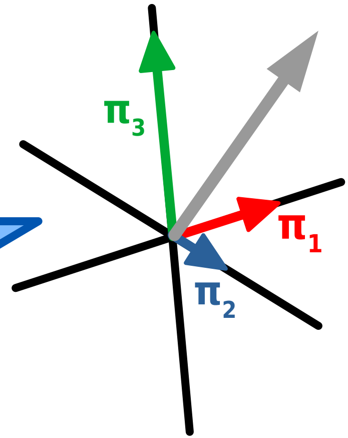
Si p est une application linéaire telle que **p∘p = p**, alors p est un projecteur sur Im(p) parallèlement à Ker(p).

Caractérisation (symétrie).

Si s est une application linéaire telle que **s∘s = Id_E**, alors s est une symétrie par rapport à Ker(s–id_E) parallèlement à Ker(s+id_E).

Propriétés (symétrie).

- Ker(s-id_E) = V, Ker(s+id_E) = W
- s est une involution : s∘s = id_E, et donc un automorphisme
- s' = -s est la symétrie par rapport à W parallèlement à V.



Projecteurs associés à une décomposition

Si E = $V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_p$, on peut construire les projecteurs $\pi_i(x)$ qui projettent sur V_i parallèlement à $\boldsymbol{\Sigma_{j\neq i} V_j}$. Alors on a :

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_p = Id_E, \\ \pi_i\circ\pi_j = 0 \text{ dès que } i\neq j, \\ \pi_i\circ\pi_i = \pi_i \text{ pour tout } i. \end{cases}$$

Endomorphisme et matrices.

Les définitions suivantes, sur les endomorphismes, en ont une autre équivalente pour les matrices, qui ne dépend pas de la base choisie pour représenter l'endomorphisme.

Valeur, vecteur propre.

Soit u un endomorphisme. Un scalaire λ est dit « <u>valeur propre</u> » de u si il existe un vecteur non-nul x tel que $u(x) = \lambda x$. Un vecteur tel que $u(x) = \lambda x$ est dit « <u>vecteur propre</u> » de u. Pour une matrice A représentant u, il faut que $Ax = \lambda x$ pour un vecteur non-nul x.

Exemples.

- projection sur V parallèlement à W : tout les vecteurs de V et W sont propres, de valeurs propres 1 et 0.
- symétrie par rapport à V parallèlement à W : tout les vecteurs de V et W sont propres, de valeurs propres 1 et -1.
- homothétie de rapport k : tout les vecteurs sont propres, de valeur propre k.
- $f(x,y) = (-y,x)$: pas de valeurs propres réelles, et pas de vecteurs propres dans R^2.

En vert et bleu : les deux sous-espaces propres de f(x,y) = (4x-2y,2y)

Spectre.

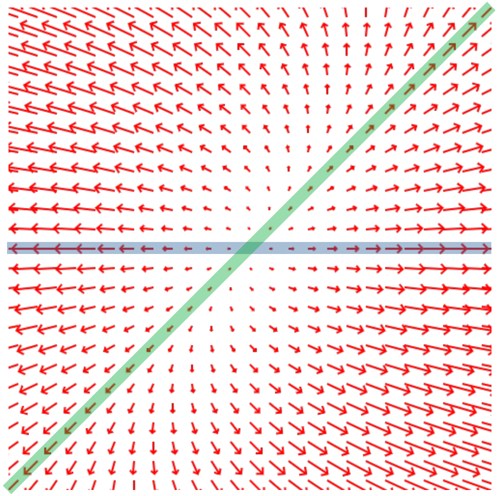
Le <u>spectre</u> d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres, dénoté sp(u).

Définitions équivalentes.

La condition « il existe v non-nul tel que $u(x) = \lambda x$ » est équivalente à « $\ker(u-\lambda Id_E) \neq \{0_E\}$ », vu que $v \in \ker(u-\lambda Id_E)$. Pour une matrice A représentant u : « $(A-\lambda I_n)$ n'est pas inversible », soit $\det(A-\lambda I_n) = 0$.

Sous-espace propre.

Le <u>sous-espace propre</u> de u associé à la valeur propre λ est $\ker(u-\lambda Id_E)$; c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs propres de valeur propre λ, plus le vecteur nul.



Somme directe.

Si λ_1, … λ_p sont des valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda 1}$, … $E_{\lambda p}$ sont en somme directe.

Sous-espace stable.

Un sous-espace vectoriel V de E est dit stable par u si l'image de V par u est incluse dans V : $u(V) \subset V$. On peut alors définir un endomorphisme $u_V : V \to V$ comme $u_V(x) = u(x)$ pour $x \in V$. C'est l'endomorphisme induit par u sur V.

Matrice par blocs.

On peut diviser une matrice de m×n en blocs en partitionnant $[\![1;m]\!]$ et $[\![1;n]\!]$. La multiplication de deux matrices en blocs, quand elle est possible, fonctionne exactement comme on s'y attendrait. Par exemple :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right)$$

Quand c'est possible (c'est-à-dire A a autant de colonnes que E a de lignes, et B autant de colonnes que F a de lignes.)

Matrice diagonale par blocs.

La matrice représentant un endomorphisme u de E dans une base B est diagonale par blocs ssi E est somme directe de s.e.v. stables par u, tels que B soit obtenue en concaténant les bases de ceux-ci. Les symétries et projections sont des exemples simples de tes endomorphismes.

Polynômes d'endomorphisme : caractéristique et minimal.

Notions : polynômes.

Un polynôme est dit scindé (sur K) si il est produit de polynômes de degré 1 (dans K). Notamment, tout polynôme à coefficients réels est scindé sur $\mathbb{C}$. On peut écrire tout polynôme scindé comme $P(X) = a(X-\lambda_1)^{m1}...(X-\lambda_p)^{mp}$, avec les λ_i distincts. Ici, m_j est la multiplicité de la racine λ_j. P est dit à racines simples si tout les m_i sont égaux à 1.

Puissances.

On peut utiliser un polynôme sur un endomorphisme, en définissant les puissances d'un endomorphisme u comme suit : $u^n = u \circ u ... \circ u$ (n fois), et $u^0 = Id$.

Polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique d'une matrice A est le déterminant de XI_n-A (en fonction de X). On le note χ_A. Et celui χ_u d'un endomorphisme u est le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice le représentant dans une base.

Racines.

Les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme u sont les valeurs propres de u ! La multiplicité de la racine correspondant à une valeur propre est sa « multiplicité algébrique ». Et la dimension de l'espace propre associé est sa « multiplicité géométrique ».

Polynôme minimal.

Le polynôme minimal de A est le polynôme unitaire μ_A de plus bas degré tel que $\mu_A(A) = 0$. On a une définition similaire pour celui μ_u un endomorphisme u.

Polynôme annulateur.

Un polynôme annulateur d'un endomorphisme u est un polynôme P tel que P(u) = 0. Tout polynôme annulateur est un multiple du polynôme minimal de u.

Lemme des noyaux.

Soit P_1, ..., P_r des polynômes premiers entre eux. On pose $P = P_1P_2...P_r$. Si on note $N_i = Ker(P_i(u))$, alors $Ker(P(u)) = N_1 \oplus ... \oplus N_r$.

Sous-espace stable.

Si V est un sous-espace (non-nul) de E stable par u, et $u_V : V \to V$ l'endomorphisme induit, alors :
- le polynôme minimal de u_V divise le polynôme minimal de u ;
- le polynôme caractéristique de u_V divise celui de u.

Exemple.

$u(x,y,z)=(-y,x,z)$
$\chi_u(X) = X^3-X^2+X-1$
$V = \{(x,y,0)|x,y\in\mathbb{R}\}$
$u_V(x,y,0)=(-y,x,0)$
$\chi_{uV}(X) = X^2+1$

Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients sur sa diagonale. On a les propriétés suivantes :
- $Tr(A+B) = Tr(A)+Tr(B)$, $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$;
- $Tr(AB) = Tr(BA)$ (si A et B carrées) ;
- deux matrices semblables ont la même trace.

La première propriété fait que l'on peut considérer la trace comme une forme linéaire sur l'espace vectoriel des matrices : $Tr : M_n(K) \to K$. La dernière fait que toutes les matrices représentant un endomorphisme dans une base ont la même trace, et donc on peut définir la trace d'un endomorphisme comme la trace de n'importe quelle matrice le représentant. Pour tout endomorphisme u, on a $\chi_u = X^n - Tr(u)\, X^{n-1} + ... + (-1)^n det(u)$.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est un polynôme annulateur de celui-ci ; et donc, il est divisible par son polynôme minimal ! De même pour les matrices.

Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un endomorphisme ont les mêmes racines.

Multiplicités.

La multiplicité géométrique est toujours inférieure ou égale à la multiplicité algébrique : $dim(E_\lambda) \le mult(\lambda)$.

Diagonalisable.

Un endomorphisme u est diagonalisable si il existe une base dans laquelle la matrice le représentant est diagonale. Cette base ne contient alors que des vecteurs propres de u. Pour une matrice, A est diagonalisable si l'endomorphisme associé $X \mapsto AX$ est diagonalisable; et donc, si A est semblable à une matrice diagonale.

Théorème de diagonalisation.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- l'endomorphisme u est diagonalisable ;
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de u;
- E est somme directe des espaces propres $E_\lambda(u)$ de u;
- la dimension de E est égale à la somme des dimensions des espaces propres;
- χ_u est scindé et $\dim(E_\lambda) = \mathrm{mult}(\lambda)$ pour toute valeur propre λ;
- μ_u est scindé et à racines simples.

➤ Conséquence : un endomorphisme avec n (c.à.d. dim(E)) valeurs propres distinctes est donc diagonalisable !

Cas particuliers.

Les projecteurs et symétries sont toujours diagonalisables ; par leur définition, E est somme directe de leurs espaces propres. Au contraire, en 2d, les rotations autour de l'origine (à part u(x) = x et u(x) = -x) ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$ (mais sur $\mathbb{C}$, si).

Trigonalisable.

Un endomorphisme u est trigonalisable si il existe une base dans laquelle la matrice le représentant est triangulaire supérieure. De même, une matrice A est trigonalisable si l'endomorphisme associé l'est aussi ; et donc si A est semblable à une matrice supérieure.

Théorème de trigonalisation.

Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

Donc tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable !

Déterminant et trace.

Si u est scindé (c'est-à-dire si u est trigonalisable), et qu'on note $\chi_u(X) = (X-\lambda_1)^{n1}(X-\lambda_2)^{n2}\ldots(X-\lambda_r)^{nr}$, avec les λ_i distincts, alors on a les formules suivantes :

$$n = \sum_{i=1}^{r} n_i, \quad \det(u) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{r_i}, \quad \mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i$$

Nilpotence.

On dit qu'une matrice A est nilpotente si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. De même pour un endomorphisme. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est nilpotent; - $\chi_u(X) = X^n$;
- il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Applications.

Il est toujours plus facile de travailler avec des matrices diagonales. Par exemple, pour calculer les puissances d'une matrice. En effet, si on a $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale, alors $A^n = (P^{-1}DP)^n = (P^{-1}DP)(P^{-1}DP)\ldots(P^{-1}DP) = P^{-1}D(PP^{-1})D\ldots(PP^{-1})DP = P^{-1}D^nP$. D'autres exemples : la diagonalisation permet de simplifier un système de suites linéaires récurrentes. De même pour les systèmes d'équations différentielles ; pour déterminer vers quel état converge un système de Markov. De manière générale, c'est un outil utile dans pleins de domaines scientifiques.

Décomposition LU.

Une matrice A admet une décomposition LU s'il existe une matrice L qui est triangulaire inférieure unipotente (avec des 1 sur la diagonale), et une matrice U qui est triangulaire supérieure, telles que A = LU. Si une matrice inversible admet une décomposition LU, elle est unique !

Une décomposition LU n'est pas toujours possible; mais en permutant les lignes, cela le devient; on a alors une décomposition PLU, où P est une matrice de permutation.

Descente-remontée.

Cette décomposition est utilisée pour la résolution de systèmes d'équations linéaires. En effet, si A admet une décomposition LU, le système Ax = b est équivalent à LUx = b; on peut donc d'abord résoudre Ly = b, puis on n'a plus qu'à résoudre Ux = y. Les résolutions se font facilement vu que les systèmes sont triangulaires ! Dans le détail : pour l'étape de descente, on a les composantes suivantes :

$$y_1 = \frac{b_1}{\ell_{11}},\ y_2 = \frac{b_2 - \ell_{21}y_1}{\ell_{22}}, \ldots$$

Puis pour l'étape de remontée, on a alors :

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}},\ x_{n-1}) \frac{y_{n-1} - u_{n-1,n}y_n}{u_{n-1,n-1}}, \ldots$$

Décomposition de Cholesky.

Soit une matrice A symétrique et définie positive ($x^T M x > 0$ pour toute matrice colonne x non-nulle = toutes ses valeurs propres strictement positives). On peut toujours trouver une matrice triangulaire inférieure L telle que $A = LL^T$. C'est une décomposition de Cholesky de A. Quand elles sont possibles, elles vont deux fois plus vite que les décompositions LU pour résoudre un système. Par exemple, on a des matrices symétriques définies positives lorsqu'on applique la méthode des moindres carrés en statistique.

Algorithme : LU.

Un des algorithmes pour trouver une décomposition LU est essentiellement une élimination de Gauss. Soit donc une matrice carrée A de N×N. On définit une suite de matrices $A^{(k)}$, en commençant avec $A^{(0)} = A$; posons de plus

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{n+1,n} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -l_{N,n} & & 1 \end{pmatrix}$$

Avec

$$-l_{i,n} = -\frac{a_{i,n}^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}$$

Alors on définit $A^{(n)} = L_n A^{(n-1)}$ par récurrence ; $A^{(N-1)}$ est la matrice U ; tandis que $L_1^{-1} \cdots L_{N-1}^{-1}$ est la matrice L d'une décomposition LU de A. L'algorithme ne fonctionne que si tout les $a_{n,n}^{(n-1)}$ sont non-nuls.

Algorithme : Cholesky.

Un algorithme pour déterminer une décomposition de Cholesky est en procédant colonne par colonne de L. Soit donc A une matrice de n×n. On calcule d'abord :

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}},\ l_{j1} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

Ensuite, en faisant parcourir i de 2 à n, et j de i à n pour chaque valeur de i, on effectue :

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2},\ l_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{ii}} (i+1 \le j \le n)$$