Série numérique.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Les réels $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$ sont appelés « sommes partielles de la série de terme général u_n ». On dit que la série converge si la suite (S_n) admet une limite finie. La somme de la série est alors la limite de la suite des sommes partielles. On peut alors définir la suite (R_n) des restes comme la limite moins la somme partielle S_n.

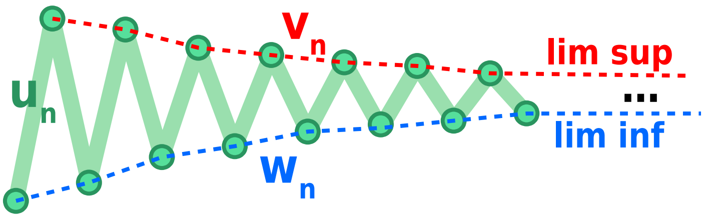
Un critère nécessaire (mais pas suffisant) pour la convergence de Σu_n est que u_n tende vers 0.

Convergence absolue.

Une série Σu_n est dite absolument convergente lorsque $\Sigma|u_n|$ est convergente. Une série convergente non absolument convergente est dite semi-convergente. Bien sûr, toute suite absolument convergente est convergente.

Limites supérieure et inférieure.

Pour toute suite bornée (u_n) de réels, on peut définir $v_n = \sup\{u_k|k\geq n\}$ et $w_n=\inf\{u_k|k\geq n\}$. Alors on définit la limite supérieure comme $\limsup u_n = \lim v_n$ et la limite inférieure comme $\liminf u_n = \lim w_n$. Ce sont la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence (si $\pm\infty$ sont possibles).



Comparaison de séries.

Si Σu_n et Σv_n sont des séries à termes positifs, et sont telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors :

- si Σv_n converge, alors Σu_n aussi
- si Σu_n diverge, alors Σv_n aussi

En utilisant des relations de comparaison, on obtient des résultats plus généraux. Deux suites strictement positives (u_n) et (v_n) sont équivalentes si le rapport u_n/v_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \sim v_n$. Et si $u_n\sim v_n$, alors Σu_n et Σv_n sont de même nature. Toujours avec (u_n) et (v_n) strictement positives : si le rapport u_n/v_n tend vers 0, u_n est dite négligeable devant v_n (et v_n prépondérante devant u_n), et on note $u_n = o(v_n)$. Si le rapport u_n/v_n est majoré (et donc la suite (u_n/v_n) est bornée), u_n est dite dominée par v_n, et on note $u_n = O(v_n)$. Dans les deux cas, on a les mêmes implications qu'au-dessus : si Σu_n diverge, Σv_n aussi, et si Σv_n converge, alors Σu_n aussi.

Séries classiques.

- la série géométrique Σq^k converge si $|q|<1$; la somme est alors $1/(1-q)$. Les sommes partielles sont $S_n = (1-q^{n+1})/(1-q)$.
- la série exponentielle $\Sigma 1/k!$ converge vers e.
- la série harmonique $\Sigma 1/k$ diverge.

Théorème de réarrangement de Riemann.

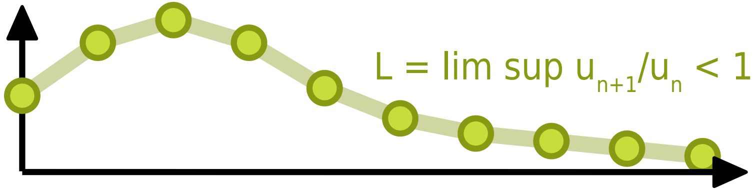
Soit Σu_n une série semi-convergente. Pour tout réels λ, μ tels que $-\infty \leq \lambda \leq \mu \leq +\infty$, il existe une bijection $\sigma:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ telle que la suite (S'_n) des sommes partielles de la série de terme général $u'_n = u_{\sigma(n)}$ vérifie : $\liminf S'_n = \lambda$ et $\limsup S'_n = \mu$.

Critère de Cauchy.

Une série numérique Σu_n converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall q > p \geq N \quad |S_q - S_p| = \left| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right| < \varepsilon$$

C'est-à-dire : pour tout ε, il y a un rang à partir duquel tout les éléments de la suite rentre dans un intervalle de taille ε. Cette définition vient de l'étude des suites de Cauchy.



Règle de D'Alembert.

Soit Σu_n une série à termes strictement positifs. Notons ℓ et L les limites inférieure et supérieure des quotients successifs u_{n+1}/u_n.

- si $L < 1$ alors Σu_n converge;
- si $\ell > 1$ alors Σu_n diverge;
- dans les autres cas, on ne peut pas conclure.

Quand ℓ=L, cette règle se simplifie, ne laissant que ℓ=L=1 comme cas indéterminé.

Règle de Cauchy.

Soit Σu_n une série à termes positifs. Soit

$$p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

- si p<1, alors Σun converge ;
- si p>1, alors Σun diverge grossièrement ;
- si p=1, on ne peut rien dire.

Remarque : la règle de Cauchy est plus puissante que la règle de D'Alembert, mais c'est la dernière qui est la plus utilisée en pratique.

Critère d'Abel.

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques telles que :

- la suite des sommes partielles de (v_n) est bornée ;
- u_n tend vers 0 ;
- la série $\Sigma(u_{n+1}-u_n)$ est absolument convergente.

Alors la série $\Sigma u_n v_n$ est convergente. Ce critère a pour conséquence le critère ci-dessous, pour les suites alternées.

Critère des séries alternées (aussi dit de Leibniz).

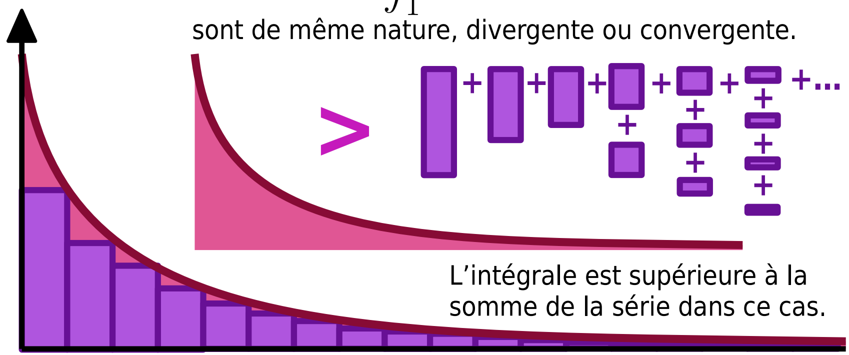
Si (u_n) est une suite de réels positifs décroissante qui tend vers 0, alors la série $(-1)^n u_n$ converge. De plus, n'importe quelle deux sommes partielles successives encadrent la somme $\Sigma(-1)^n u_n$, le n-ième reste R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$, et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Comparaison à une intégrale.

Si f est une fonction continue, positive et décroissante sur [1,+∞[, alors la série Σf(n) et l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

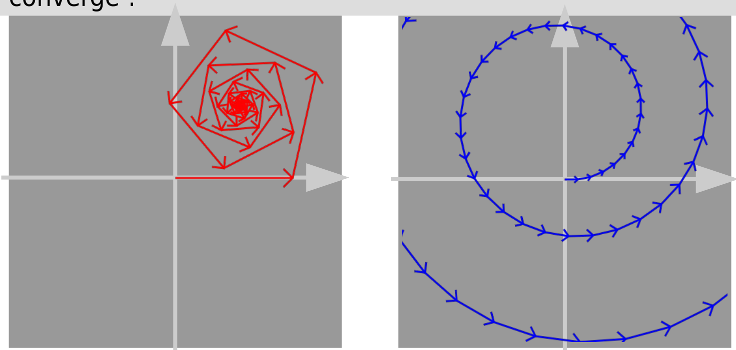
sont de même nature, divergente ou convergente.



L'intégrale est supérieure à la somme de la série dans ce cas.

Série entière.

Une <u>série entière</u> est une série de fonctions de la forme $\Sigma a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$. On définit alors le <u>domaine de convergence</u> de cette série entière comme l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels elle converge !



Deux valeurs de z pour la série entière Σz^n : une donne une série convergente, l'autre une série divergente !

Rayon de convergence.

D'abord, voici le <u>lemme d'Abel</u> : si la suite $(a_n z_0^{\,n})$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z|<|z_0|$, la série $\Sigma a_n z^n$ est absolument convergente. Alors, on peut définir le <u>rayon de convergence</u> d'une suite entière comme $R = \sup\{\rho \geq 0;\ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. à partir du rayon de convergence R, on a :

- si $|z|<R$, la série converge absolument;
- si $|z|>R$, la série diverge grossièrement;
- si $|z|=R$, on ne peut rien dire.

Le disque ouvert de centre 0 et de rayon R est alors appelé disque ouvert de convergence de la série entière. Une application astucieuse de la règle d'Alembert permet de trouver le rayon de convergence : si $|a_{n+1}|/|a_n|$ converge vers ℓ, le rayon de convergence est alors $1/\ell$.

Propriétés.

Soit $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence R_a et R_b. Alors : si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$; si $a_n \sim b^n$, alors $R_a = R_b$. La série dérivée d'une série entière $\Sigma a_n z^n$ est la série entière $\Sigma n a_n z^n$; elle a le même rayon de convergence que $\Sigma a_n z^n$. Soit $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b. Le rayon R de la série somme $\Sigma (a_n+b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z|<\min(R_a,R_b)$, on a alors $\Sigma(a_n+b_n)z^n = \Sigma a_n z^n + \Sigma b_n z^n$. Dans le cas où $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a,R_b)$.

Supplément !

Développement en série entière.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est développable en série autour de $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r>0$ tels que la boule $B(a,r)$ soit incluse dans Ω, et que pour tout $z \in B(a,r)$, $f(z) = \Sigma a_n (z-a)^n$. Une telle fonction est dite <u>analytique</u> si elle est développable en série entière en tout point de Ω. Si f admet un développement en série entière en un point, ce développement est unique. Voici quelques développements en séries communs :

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, R = +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, R = +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, R = 1$$

$$\arctan x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, R = 1$$

Langage des probabilités.

Une <u>tribu</u> sur un ensemble Ω est une partie $\mathcal{T}$ de l'ensemble des parties de Ω, qui contient Ω, le complémentaire de chaque A qu'elle contient, et telle que pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{T}$, leur réunion $\bigcup_{n=0} A_n$ est élément de $\mathcal{T}$. Par exemple, {∅, Ω} est une tribu, et $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

Le couple (Ω, $\mathcal{T}$) est appelé <u>espace probabilisable</u> si $\mathcal{T}$ est un tribu. On appelle alors <u>évènements</u> les éléments de $\mathcal{T}$; Ω est l'évènement certain et ∅ l'évènement impossible. Deux événements sont dits incompatibles si A∩B = ∅.

Probabilités.

Soit (Ω, T) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur (Ω, T) une application P définie sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans [0,1] telle que P(Ω) = 1, et pour toute suite d'évènements deux à deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Le triplet (Ω, $\mathcal{T}$, P) est alors appelé <u>espace de probabilité</u>.
On a alors :
- P(∅) = 0;
- pour tout A∈$\mathcal{T}$, P(A) = 1–P(A);
- pour tous A,B∈P(Ω), A⊂B ⇒ P(A) ≤ P(B);
- pour tous A,B∈P(Ω), P(A∪B) = P(A)+P(B) – P(A∩B).

On dit qu'un évènement A est négligeable si P(A) = 0; presque sûr si P(A) = 1.

Exemple.

Un exemple très simple pour illustrer les concepts de base des probabilités : le lancer d'un dé. Ici X(Ω) = {1,2,3,4,5,6}, et p_i = 1/6 pour tout 1≤i≤6. Son espérance est 3.5; la variance est de 35/12; soit donc 2.91667 environ; soit un écart-type de 1.7078 à peu près.

Variable aléatoire.

Soit un univers Ω muni d'une probabilité p; comme vu à gauche. On appelle <u>variable aléatoire</u> toute application X de Ω dans ℝ, qui à chaque évènement de Ω associe un nombre réel. Une variable aléatoire X est <u>discrète</u> si l'univers image (image de Ω par X) est discret; c.à.d. constitué de valeurs isolées. Fréquemment, X(Ω) est un sous-ensemble de ℕ.

Loi de probabilité.

Notons X(Ω) = $\{x_n; n\in I\}$ où I est fini ou dénombrable. La <u>loi de probabilité</u> de X est la suite $(p_n)_{n\in I}$, qui donne pour tout n∈I, la probabilité $p_n = P(X=x_n)$.

Espérance.

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X est d'espérance finie si la famille $(x_nP(X=x_n))$ est sommable (n'importe quel arrangement des termes donne une série convergente, vers toujours la même somme). Si c'est le cas, l'<u>espérance</u> de X est la somme $E(X) = \Sigma_{n\in I} x_n P(X=x_n)$

- L'espérance est linéaire : si X et Y sont deux v.a.d. d'espérances finies, X+Y l'est aussi et on a E(X+Y) = E(X) +E(Y). De plus, on a E(aX+b) = aE(X)+b.
- L'espérance est positive : si X≥0 est d'espérance finie, alors E(X)≥0. De plus, si X≤Y et X,Y sont des v.a.d. d'espérances finies, alors E(X)≤E(Y).

On peut interpréter l'espérance de X comme la valeur moyenne de X si l'expérience est recommencée un très grand nombre de fois.

Variance.

Lorsque X^2 est d'espérance finie, on appelle <u>variance</u> de X le réel $V(X) = E((X-E(X)^2) = E(X^2)-(E(X))^2$, et <u>écart-type</u> le réel σ(X) = √V(X). On a $V(aX+b) = a^2V(X)$, et donc σ(aX+b) = |a|σ(X). Elle représente la moyenne des carrés des écarts à l'espérance; on peut l'interpréter comme la tendance de X à se disperser autour de l'espérance E(X).

Loi de Bernoulli.

- paramètre : p∈[0;1].
- nom : la loi de Bernoulli de paramètre p
- notation : ℬ(1;p)
- valeur : 1 avec la probabilité p, 0 avec la probabilité (1-p)
- propriétés : E(X) = p, V(X) = p(1-p).

Loi binomiale.

- paramètres : n entier naturel, p∈[0;1].
- nom : la loi binomiale de paramètres n et p
- notation : ℬ(n;p)
- valeur : k∈⟦0;n⟧ avec la probabilité $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- propriétés : E(X) = np, V(X) = np(1-p).

Loi hypergéométrique.

- paramètres : N, n entiers naturels, n≤N, p∈[0;1], pN entier.
- nom : la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p
- notation : ℋ(N;n;p)
- valeur : k∈⟦0;n⟧ avec la probabilité $\dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- propriétés : E(X) = np, $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

Tirage de boules d'une urne.

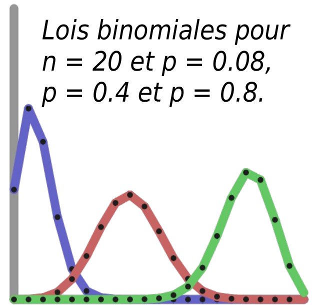
Soit n boules dans une urne. Si on a une probabilité p de tirer une boule d'un certain type, une loi de Bernoulli permet de modéliser un tel tirage, appelé succès. Pour n tirages successifs avec remise, la loi binomiale permet de modéliser le nombre de succès. Pour n tirages sans remise, avec une urne à N boules, une loi hypergéométrique modélise le nombre de succès. Le nombre de boules tirées (avec remise) pour avoir un succès est modélisé par une loi géométrique. Pour le nombre de boules tirées (avec remise) pour avoir n succès, il faudrait utiliser une loi binomiale négative ; il y a plein d'autres lois pour chaque situation.

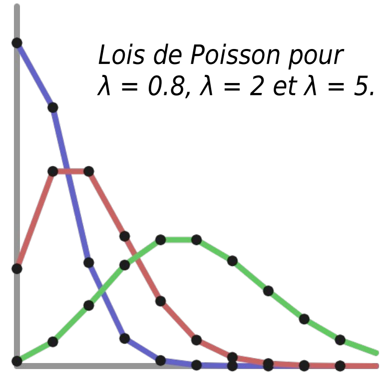
Loi uniforme discrète sur ⟦a;b⟧.

- paramètres : a,b entiers, a≤b.
- nom : la loi uniforme discrète sur ⟦a;b⟧
- valeur : k∈⟦a;b⟧ avec la probabilité 1/(b-a+1)
- propriétés : E(X) = (a+b)/2, V(X) = (b-a)(b-a+2)/12.

Loi géométrique.

- paramètre : p∈]0;1[
- nom : la loi géométrique de paramètre p
- notation : 𝒢(p)
- valeur : k∈ℕ* avec la probabilité $(1-p)^{k-1}p$
- propriétés : E(X) = 1/p, V(X) = $(1-p)/p^2$.





Loi de Poisson.

- paramètre : λ>0.
- nom : la loi de Poisson de paramètre λ
- notation : 𝒫(λ)
- valeur : k∈ℕ avec la probabilité $\exp(-\lambda)\dfrac{\lambda^k}{k!}$
- propriétés : E(X) = λ, V(X) = λ.

Support.

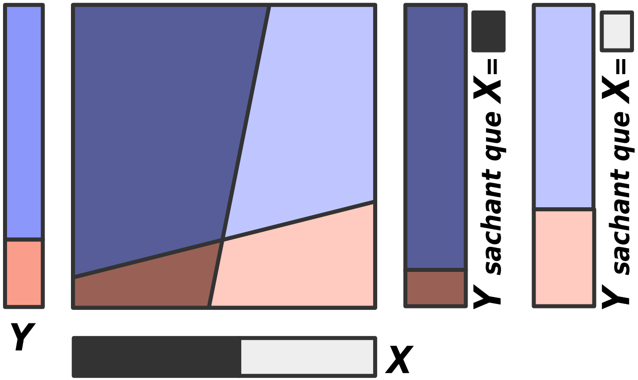
Le support d'une loi de probabilité est l'ensemble des évènements qui peuvent se produire ; c'est-à-dire dont la probabilité est non-nulle. Donc la loi de Bernoulli, binomiale, géométrique et uniforme discrète sont dites à support fini ; la loi géométrique et de Poisson sont dites à support infini !

Couple de variables aléatoires.

Un couple de variables aléatoires discrètes est un couple (X,Y) de deux variables aléatoires discrètes X, Y. La <u>loi conjointe</u> du couple est la loi de (X,Y) en tant que variable aléatoire; c'est-à-dire la donnée des valeurs P(X=x, Y=y) pour tout (x,y)∈X(Ω)×Y(Ω). X et Y sont appelées variables marginales du couple (X,Y). La loi de X est dite <u>loi marginale</u> de X; de même pour Y.

Conditionnement.

Soit x un élément de X(Ω) tel que P(X=x)>0, on appelle <u>loi conditionnelle</u> de Y sachant que (X=x) la probabilité définie comme P(Y=y|X=x) = P(X=x,Y=y)/P(X=x).



Un couple de variables, et des lois conditionnelles. Si elles étaient indépendantes, toutes les lois de Y seraient identiques.

Indépendance.

Deux variables aléatoires X et Y sont <u>indépendantes</u> si, pour tous x∈X(Ω), y∈Y(Ω), on a P(X=x,Y=y) = P(X=x)P(Y=y). Si X et Y sont indépendantes, alors la loi de X sachant Y est égale à la loi de X, et la loi de Y sachant X est égale à la loi de Y.

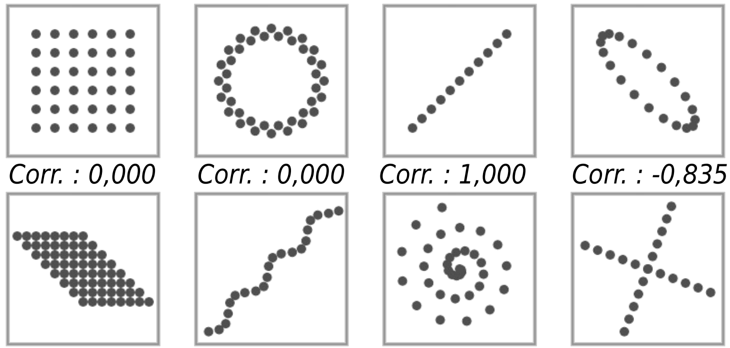
Moment.

On dit qu'une variable aléatoire X admet un <u>moment</u> d'ordre p si X^p est d'espérance finie; ce qu'on appelle le moment d'ordre p de X est alors $E(X^p)$. Notamment, la variance demande l'existence d'un moment d'ordre 2.

Covariance.

La <u>covariance</u> de X et de Y est le nombre défini par E((X-E(X))(Y-E(Y))). De cette définition, on a que Cov(X,X) = Var(X), et Cov(X,Y) = Cov(Y,X). Deux v.a.d. X et Y ayant une variance ne sont pas <u>corrélées</u> si Cov(X,Y) = 0. La formule de Huygens donne une autre définition de la covariance : Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y). On a notamment V(X+Y) = V(X) +2Cov(X,Y)+V(Y). Donc si X et Y sont indépendantes, on a V(X+Y) = V(X)+V(Y). On a comme propriétés supplémentaires, pour tout réels a, b, c et d :

- Cov(aX+bY,Z) = aCov(X,Z)+bCov(Y,Z) ;
- Cov(aX+b,cY+d) = acCov(X,Y).



Corr. : 0,000 | *Corr. : 0,000* | *Corr. : 1,000* | *Corr. : -0,835*

Corr. : -0,707 | *Corr. : 0,983* | *Corr. : -0,091* | *Corr. : 0,000*

Corrélation.

Le <u>coefficient de corrélation linéaire</u> de deux variables X et Y est défini comme ρ(X,Y) = Cov(X,Y)/σ(X)σ(Y). C’est un nombre entre -1 et 1 ; il indique à quel point les deux variables sont liées de manière linéaire ; ±1 indique une relation linéaire, 0 signifie non-corrélées.

Convergence en loi et probabilité.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité et X une variable aléatoire définie sur cet espace. La suite (X_n) converge en loi vers X si, pour tout k, on a : $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité et X une variable aléatoire définie sur cet espace. La suite (X_n) converge en probabilité vers X si pour tout ε>0, $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité, et qui admet un moment d'ordre 1; alors, pour tout ε>0, on a :

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\varepsilon}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité, et qui admet un moment d'ordre 2; alors, pour tout ε>0, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Loi faible des grands nombres.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de même loi sur un espace de probabilité, deux à deux indépendantes, ayant une espérance μ et une variance σ². Posons la suite

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Alors la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante qui vaut μ avec la probabilité 1.

Loi forte des grands nombres.

La loi faible des grands nombres énonce que la moyenne de n variables aléatoires de même loi converge en probabilité vers une loi constante (qui vaut μ avec la probabilité 1) lorsque n tend vers +∞. La loi forte dit que la moyenne elle-même tend vers μ presque sûrement (avec probabilité 1).

Approximation hypergéométrique/binomiale.

Soit E un ensemble de N éléments, dont une proportion p d'un certain type; notons X_N le nombre d'éléments de ce type obtenus lors d'un tirage n éléments. X_N suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}$(N;n;p). La suite X_N converge en loi vers une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}$(n;p). En effet, pour N grand, n tirages avec remise et n tirages sans remise sont semblables. En pratique, la loi hypergéométrique peut être approchée par une loi binomiale lorsque N≥10n.

Approximation binomiale/de Poisson.

Soit λ un réel dans]0;1[. Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n;p_n)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Alors (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En pratique, la loi binomiale peut être approchée par une loi de Poisson lorsque n≥30, p≤0.1 et np<15 ; mais ce n'est pas le seul ensemble de conditions

Loi multinomiale.

On modélise n tirages avec remise dans une urne avec k types de boules. Soit n un entier positif, et p_1, ... et p_k k réels dans [0;1] de somme 1, qui représentent les proportions de boules. La loi multinomiale donne la probabilité que x_1 du premier type soient tirées, ... et que x_k du k-ième type soient tirées (où $x_1+\ldots+x_k = n$) :

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} p_1^{x_1} \ldots p_k^{x_k}$$