

→ Compléments.

Quand peut-on inverser une fonction ? Où sont les points d'une surface les plus proches de l'origine ?

■ La motivation.

D – Si j'ai une courbe donnée par $x = g(y)$ ou par $\phi(x, y) = 0$, est-ce que je peux donner une formule de la forme $y = f(x)$?

T – Dans les deux cas, il y a des théorèmes qui donnent des conditions sur les différentielles pour que ce soit possible.

D – Et pour en trouver le maximum, comment je peux faire ?

T – Le premier cas ne peut pas donner de f avec des maximum/minimum locaux, donc il suffit de regarder les extrémités. Pour le second cas on a une méthode, des multiplicateurs de Lagrange, qui permet de maximiser/minimiser une variable sur une courbe implicite.

■ Notations et rappels.

Soit $f : E \rightarrow F$; si on peut en parler, la différentielle de f en x est bien une application linéaire de E dans F ; donc un objet de $\mathcal{L}(E, F)$ et non pas de F . On la note $df(x)$ ou $Df(x)$, ou $\mathcal{J}_f(x)$ pour la matrice Jacobienne associée.

On rappelle qu'un **difféomorphisme (global)** est une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ qui est bijective, \mathcal{C}^1 et de réciproque f^{-1} aussi \mathcal{C}^1 , et $d(f^{-1})(f(x)) = (df(x))^{-1}$. Un **difféomorphisme local** est une application telle qu'en chaque point $x_0 \in \mathcal{U}$, il y ait un voisinage $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tel que $f|_{\mathcal{U}_0} : \mathcal{U}_0 \rightarrow f(\mathcal{U}_0)$ soit un difféomorphisme global. Un difféomorphisme global est toujours local. Et dans l'autre sens, si f difféomorphisme local, pour que f soit difféomorphisme global, il suffit que f soit injectif.

■ Théorème d'inversion locale.

Soient E, F , des espaces vectoriels, et \mathcal{U} un ouvert de $E \times F$. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ une fonction \mathcal{C}^1 avec \mathcal{V} ouvert de F , et $x_0 \in \mathcal{U}$. Alors, si $df(x_0) \in GL(E, F)$ alors f est un difféomorphisme local en x_0 (il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est un difféomorphisme global).

■ Théorème des fonctions implicites.

On se place sur un ouvert $\mathcal{U} \subseteq E \times F$ (E, F, G des e.v. avec $\dim(F) = \dim(G)$), et on étudie $f : \mathcal{U} \rightarrow G$. Si jamais la différentielle de f par rapport à la second variable en (x_0, y_0) est inversible ($d_y f(x_0, y_0) \in GL(F, G)$), alors il existe un voisinage \mathcal{U}_0 de (x_0, y_0) et \mathcal{W}_0 voisinage de x_0 et $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{W}_0, F)$, tels que

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x_0, y_0) \\ (x, y) \in \mathcal{U}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \phi(x) \\ x \in \mathcal{W}_0 \end{cases}$$

Et en plus, pour tout $x \in \mathcal{W}_0$, $d_y f(x, \phi(x)) \in GL(F, G)$ et $d\phi(x) = -(d_y f(x, \phi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \phi(x))$.

■ Extrema locaux.

Un **minimum local** est un point a qui admet un voisinage V sur lequel c'est un minimum global : $\forall x \in V, f(a) \leq f(x)$. Similairement, pour un **maximum local** a , $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$ sur un voisinage V de a . On appelle **extremum** un minimum ou maximum ; **strict** si en plus $f(a) \neq f(x)$ pour tout $a \in V$ différent de x .

■ Étude de la dérivée seconde.

On appelle **point critique** de f un point a où $df(a) = 0$, quand f est différentiable. Quand f est différentiable, un extremum local est un point critique.

L'étude des dérivées secondes permet de déterminer le type de point critique plus facilement. On suppose ici que f a une dérivée seconde en a et que a est un point critique. Alors on peut poser la forme quadratique $Q_a(h) := d^2 f(a)(h, h)$ ou la matrice Hessienne en a :

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

(On se rappelle que $Hf(a)$ est la matrice de Q_a .) Alors, on a des critères :

- Q_a **coercive** (il existe $c > 0$ tel que $Q_a(h) \geq c\|h\|^2$ pour tout h) c'est-à-dire $Hf(a)$ définie positive : f admet un minimum local strict en a .
- Q_a **anti-coercive** (il existe $c > 0$ tel que $Q_a(h) \leq -c\|h\|^2$ pour tout h) c'est-à-dire $Hf(a)$ définie négative : f admet un maximum local strict en a .
- il existe h, k tels que $Q_a(h) > 0$ et $Q_a(k) < 0$, c'est-à-dire $Hf(a)$ de signature (p, q) avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$: en a , f n'a pas d'extremum, mais admet un point selle.

■ Multiplicateurs de Lagrange.

Parfois, on a besoin d'étudier un maximum/minimum sur un domaine X qui n'est pas ouvert ; c'est-à-dire, sujet à une contrainte de la forme $g(x) = 0$. On a un théorème, des multiplicateurs de Lagrange : soient $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable (\mathcal{U} ouvert), et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable (avec $g = (g_0, \dots, g_p)$). Si f admet un extremum local sous X en a , et que $(g_0(a), \dots, g_p(a))$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a)$.

De manière plus applicable, si les g_i sont linéairement indépendantes sur tout X , alors on peut faire la liste des a où df , et les dg_i sont liés ; puis en vérifiant avec la Hessienne, on obtiendra tous les extrema locaux.

→ Existence de solutions.

On aimerait bien savoir, pour une équation donnée, si elle a des solutions, et jusqu'où elles vont.

■ La motivation.

D – Posons, disons, l'équation $x'(t) = \sin(x(t))$; est-ce qu'elle a des solutions ?

T – Oui, et chaque condition initiale donne une unique solution sur tout \mathbb{R} . Sympa, non ?

D – Est-ce toujours le cas si on utilise une fonction continue ?

T – Pas exactement. Avec une fonction assez sympa, on aura l'existence de solutions unique, mais pas forcément sur tout \mathbb{R} ; par exemple, $x'(t) = x(t)^2$ a une solution de la forme $\frac{1}{t-c}$, qui n'est pas définie partout. Et la continuité ne suffit pas comme condition pour l'unicité ; par exemple, $x'(t) = 2\sqrt{x(t)}$ a $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^2$ comme solutions sur \mathbb{R}^+ , toutes les deux avec la même condition initiale $x(0) = 0$.

■ Rappels utiles.

On peut faire un développement limité à l'ordre 2 en plusieurs dimensions comme

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2}d^2f(a)(h,h) + \varepsilon(h)\|h\|^2$$

avec $\|\varepsilon(h)\| \rightarrow 0$ quand $\|h\| \rightarrow 0$. Ensuite, on a l'inégalité des accroissements finis :

$$\|x(b) - x(a)\| \leq \|b - a\| \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|x'(t)\|$$

et l'inégalité de continuité de l'intégrale :

$$\left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt$$

■ Lipschitzienne.

On va utiliser plusieurs conditions "Lipschitz" :

- **f (globalement) Lipschitzienne en espace uniformément** (par rapport au temps) : il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq C\|y - z\|$ pour tous $y, z \in \mathbb{R}^m$ et $t \in I$.
- **f localement Lipschitzienne** en espace sur $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ un ouvert : pour tout $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \mathcal{U}$, on peut trouver une constante $C > 0$ et un voisinage \mathcal{V} de (\tilde{t}, \tilde{x}) dans \mathcal{U} , tels que $\|f(t,y) - f(t',z)\| \leq C\|y - z\|$ pour tous $(t,y), (t',z) \in \mathcal{V}$.

■ Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Supposons donc $f : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitzienne en espace uniformément avec I intervalle de \mathbb{R} . alors pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, on a l'existence d'une unique solution $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe \mathcal{C}^1 avec $x(t_0) = x_0$ (x solution signifie qu'on a $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in I$). C'est le **théorème de Cauchy-Lipschitz (global)**, aussi appelé théorème de Picard-Lindelöf.

Pour la condition plus faible de $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ localement Lipschitzienne en espace sur \mathcal{U} , on a que pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, il existe un intervalle I contenant t_0 et une solution x sur I satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ (et $x'(t) = f(t, x(t))$ sur tout I). C'est le **théorème de Cauchy-Lipschitz local**.

■ Solution maximale.

Une solution (I, x) est dite **maximale** si pour toute autre solution (I^*, x^*) , on a $I^* \subseteq I$; donc si I est le plus grande intervalle possible. Sous les hypothèses du Cauchy-Lipschitz local, le théorème de Cauchy-Lipschitz maximal dit qu'il existe une unique solution maximale.

Théorème des bouts : mêmes hypothèses qu'un Cauchy-Lipschitz maximal, notons (I^*, t^*) la solution maximale. Alors, pour tout compact $K \subseteq \mathcal{U}$, il existe deux temps $t_1, t_2 \in I^*$ avec que si $t \in I^* \setminus [t_1, t_2]$, $(t, x^*(t)) \notin K$. En d'autres termes, la solution maximale sort toujours de n'importe quel compact. En particulier, cela signifie qu'on ne peut pas avoir une solution maximale bornée à la fois en temps et en espace.

■ Solution globale.

On suppose \mathcal{U} de la forme $I \times \mathbb{R}^n$. Une solution est dite **globale** si son intervalle de définition est tout I ; très souvent, le I est lui-même \mathbb{R} . En supposant f continue et localement lipschitzienne sur \mathcal{U} . Voici trois critères pour qu'une solution maximale soit globale :

- la solution est bornée.
- (théorème d'Osgood) : il existe $g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^{+*}$ localement intégrable, avec $|f(tx)| \leq g(|x|)$ pour tout $(t, x) \in \mathcal{U}$, et surtout $\int_1^{+\infty} \frac{1}{g(r)} dr = +\infty$.
- il existe $C > 0$ tel que $|f(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ pour tout $(t, x) \in \mathcal{U}$.

■ Intégrale première.

Soit maintenant $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}, \mathbb{R}^m)$. Alors, g est appelée une **intégrale première** si pour toute solution $x(t)$ à l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$, $g(x(t))$ est constant. Dans le cas **autonome** (f ne dépend pas du temps, on peut réécrire l'équation comme $x'(t) = f(x(t))$), on peut juste vérifier que pour tout $\tilde{x} \in \mathcal{V}$, $dg(\tilde{x})(f(\tilde{x})) = 0$. L'exemple classique est l'énergie dans des problèmes physiques.

→ Théorie linéaire.

L'existence et l'unicité c'est toujours sympa.
Encore mieux : une formule explicite pour la solution.

■ La motivation.

D – Pour une équation de la forme $x'(t) = 2x(t)$, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 1. Est-ce que ça se généralise ?

T – Bien sûr, un problème linéaire homogène (de la forme $x'(t) = A(t)x(t)$) donne un espace vectoriel de solutions. D – Et si il y a un second terme, comment on trouve une solution particulière ?

T – Comme pour la variation de la constante, on cherche une combinaison linéaire des solutions, où les coefficients sont remplacés par des fonctions à déterminer.

■ Introduction.

On traite maintenant le cas linéaire, avec des équations de la forme $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$. D'abord, les solutions de cette équation sont \mathcal{C}^1 et globales.

■ Wronskien.

En prenant m solutions x_1, \dots, x_m à l'équation $x'(t) = A(t)x(t)$, on peut alors poser le **wronskien** $w(t) := \det(x_1(t), \dots, x_m(t))$. On a l'équation suivante pour son évolution :

$$\forall t_0, t \in I, w(t) = w(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds\right)$$

Ainsi, si la famille est liée à un moment, elle est tout le temps liée.

■ Résolvante.

On peut poser l'équation matricielle suivante :
$$\begin{cases} R'(t_0) = A(t)R(t) \\ R(t_0) = I_m \end{cases}$$
 ; l'unique solution globale R est appelée **résolvante** de A . Elle permet de construire

une solution à l'équation $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ comme

$x(t) = R(t)x_0$. Mais surtout, pour le cas plus général de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, on a la formule explicite suivante, dite de la **variation de la constante** :

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_{t_0}^t R(t)(R(s))^{-1}b(s) ds$$

Note rapide : on a $\det R(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds\right)$.

■ Espace des solutions.

On peut poser \mathcal{S}_h l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $x'(t) = A(t)x(t)$, c'est un espace vectoriel de dimension m (s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$). De même, \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ forme un espace affine de dimension m (et de direction \mathcal{S}_h).

■ Variation de la constante.

Pour la variation de la constante, voici une description plus explicite de la méthode :

- on trouve une famille libre $(x_{h,j})_{j=1, \dots, m}$ de m solutions de l'équation homogène. On note $x_{h,ij}$ la i composante du vecteur $x_{h,j}$.
- donc les solutions sont généralement de la forme $\sum_j c_j x_{h,j}(t)$. Pour une variation de la constante, on remplace les constantes c_j par des fonctions γ_j .
- alors les γ_j à trouver sont sujets à la relation $\sum_j \gamma_j' x_{h,j} = b$, obtenue en dérivant l'équa' diff. C'est un système qui dépend de t . On peut le résoudre par un pivot de Gauss, ou appliquer la méthode de Cramer, en l'occurrence :

$$\gamma_j'(t) = \frac{\det(x_{h,1}(t), \dots, x_{h,j-1}(t), b(t), x_{h,j+1}(t), \dots, x_{h,m}(t))}{\det(x_{h,1}(t), \dots, x_{h,m}(t))}$$

(On remplace le $x_{h,j}(t)$ du numérateur par $b(t)$.)

■ Cas scalaire.

On vient d'étudier des équations vectorielles ($x(t)$ est un vecteur de \mathbb{R}^m) ; on va maintenant y ramener les **équations scalaires** d'ordre m , de la forme $y^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t) + \dots + \alpha_1(t)y'(t) + \alpha_0(t)y(t) = \beta$.

Pour ça, on pose $x = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0(t) & -\alpha_1(t) & \dots & -\alpha_{m-1}(t) \end{pmatrix} ; \text{ et alors,}$$

$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$. Dans ce cas, on récupère toutes les propriétés plus haut : les solutions sont globales, les solutions homogènes forment un espace vectoriel $\mathcal{S}_{h, \text{scal}}$ de dimension m , et les solutions générales un espace affine $\mathcal{S}_{\text{scal}}$ de dimension m ; et la méthode de variation de constante s'applique encore.

→ Coefficients constants.

Le cas linéaire le plus simple est celui à coefficients constant. Comment fait-on ?

■ La motivation.

D – Donc pour résoudre une équation de la forme $x'(t) = Ax(t)$ avec A une matrice, on utilise l'exponentielle de matrice. Mais si on veut des solutions réelles ?

T – Effectivement, c'est pas toujours le cas. Dans le cas diagonalisable, il faut remplacer la matrice diagonale par une matrice diagonale par bloc, avec parfois des blocs 2×2 .

D – Oui, c'est comme remplacer les solutions $\lambda e^{(a+ib)t} + \mu e^{(a-ib)t}$ par $e^{at}(\alpha \cos(bt) + \beta \sin(bt))$.

T – Oui tout à fait, l'exponentielle de matrice n'est pas tellement plus compliquée.

■ Exponentielle de matrice.

Soit M matrice; alors $e^M := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$ est une série convergente (sous n'importe quelle norme subordonnée), on l'appelle **exponentielle** de M . Alors : si $A = P^{-1}MP$ avec P inversible, alors $e^A = P^{-1}e^M P$; si $MN = NM$, alors $e^{M+N} = e^M e^N$; $e^{0_m} = I_m$ et $(e^M)^{-1} = e^{-M}$. Et $\psi : t \mapsto e^{tM}$ est dérivable, de dérivée $\psi'(t) = Me^{tM}$. Et surtout, si A est trigonalisable, on peut l'écrire comme $A = D + N$ avec D diagonalisable, et N nilpotente, et $DN = ND$. C'est la **décomposition de Dunford** de A ; elle est pratique parce qu'alors $e^A = e^D e^N$; e^D est facile à calculer en diagonalisant, et e^N est défini par une somme infinie (les termes N^k s'annulent pour k assez grand).

■ Coefficients constants.

Étudions maintenant le cas des coefficients constants ($x'(t) = Ax(t) + b(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$). La solution homogène est donnée par $x_g(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$. Voici quelques cas :

- A est diagonalisable dans \mathbb{K} : on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ diagonal, et alors $R(t) = e^{tA} = P \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_m}) P^{-1}$
- A est diagonalisable dans \mathbb{C} , on veut des solutions sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: les valeurs propres λ_j sont ou bien réelles, ou bien complexes conjuguées (de la forme $\mu_j \pm i\nu_j$). Pour les valeurs propres réelles, on remplace le vecteur propre e_j associé à λ_j par $\text{Re}(e_j)$ ou $\text{Im}(e_j)$ (au moins un des deux est non-nul). Pour les valeurs propres complexes, on remplace le bloc $\begin{pmatrix} \mu_j + i\nu_j & 0 \\ 0 & \mu_j - i\nu_j \end{pmatrix}$ de D par $\begin{pmatrix} \mu_j & -\nu_j \\ \nu_j & \mu_j \end{pmatrix}$, et les vecteurs propres e_j et \bar{e}_j par $\text{Re}(e_j)$ et $\text{Im}(e_j)$. Quand on passe à l'exponentielle, les valeurs propres réelles de \tilde{D} deviennent des $e^{t\lambda_j}$, et les blocs $\begin{pmatrix} \mu_j & -\nu_j \\ \nu_j & \mu_j \end{pmatrix}$ deviennent des $\begin{pmatrix} e^{t\mu_j} \cos(\nu_j) & -e^{t\mu_j} \sin(\nu_j) \\ e^{t\mu_j} \sin(\nu_j) & e^{t\mu_j} \cos(\nu_j) \end{pmatrix}$.
- A est trigonalisable (polynôme caractéristique scindé sur \mathbb{K}), on peut utiliser la décomposition de Dunford.

■ Formule de Duhamel.

Et finalement, la formule de variation de la constante devient :

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s) ds$$

On l'appelle **formule de Duhamel** dans ce contexte.

■ Scalaire à coefficients constants.

Si on reprend le cas scalaire, avec des coefficients constants cette fois, on peut poser le **polynôme caractéristique** de l'équation $y^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}y^{(m-1)}(t) + \dots + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = \beta(t)$ comme $\chi(X) = X^m + \alpha_{m-1}X^{m-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$. Grâce à ce qui a précédé, on a que sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et m_1, \dots, m_p les multiplicités algébriques correspondantes, alors toute solution de l'équation homogène est de la forme $\sum_{j=1}^p Q_j(t)e^{\lambda_j t}$ avec Q_j polynôme complexe de degré $m_j - 1$ (si $m_j = 1$, c'est une constante). Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il faut prendre des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} , et les $Q_j(t)e^{t(\mu_j + i\nu_j)} + \bar{Q}_j(t)e^{t(\mu_j - i\nu_j)}$ (termes dus aux valeurs propres complexes conjuguées) par $\hat{Q}_j(t)e^{t\mu_j} \cos(t\nu_j) + \check{Q}_j(t)e^{t\mu_j} \sin(t\nu_j)$. Bref, voilà pour le cas homogène. Si on est sur \mathbb{C} et que $\beta(t)$ est de la forme $B(t)e^{\lambda t}$ avec $B(t)$ un polynôme, alors on a une solution particulière de la forme $y_P(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ avec Q de degré b si λ n'est pas racine de χ , et de degré $b + m_\lambda$ sinon. Dans le cas réel, on peut trouver une solution particulière similairement quand β est de la forme exponentielle-trigonométrique-polynôme.

→ Stabilité.

Il y a souvent des solutions stables.
S'en rapproche-t-on ou s'en éloigne-t-on ?

■ La motivation.

D - Si on prend l'équation logistique $x'(t) = x(t)(1 - x(t))$, on a les solutions $x(t) = 0$ et $x(t) = 1$.

T - Ce sont des solutions stationnaires, et 0 sont des 1 des points d'équilibre, oui.

D - Et les solutions entre, que peut-on en dire ?

T - Si on pose $f(x) = x(1 - x) = x - x^2$, on a $f'(0) = 1$ et $f'(1) = -1$; donc les points s'éloignent de 0 et se dirigent vers 1. Autrement dit, x est croissante, mais on le savait déjà.

■ Introduction.

Maintenant on étudie des équations différentielles autonomes ($x'(t) = f(x(t))$), $x(0) = x_0 \in \mathcal{U}$, $t \in I$. On peut aussi voir ça comme un **système dynamique**, où un point se déplace toujours dans la direction donnée par sa position dans un **champ de vecteur**. On suppose f localement Lipschitzienne, et on étudie les intervalles maximaux d'existence.

■ Solutions spéciales.

Si x_0 est tel que $f(x_0) = 0$, alors $x(t) = x_0$ est une solution dite **stationnaire** ; notons \mathcal{E} l'ensemble des zéros de f , appelés **points d'équilibre**. Si il existe $\tau > 0$ tel que $t_0 + \tau \in I$ et $x(t_0) = x(t_0 + \tau)$, alors $I = \mathbb{R}$ et la solution est **périodique** : $x(t + \tau) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

■ Point d'équilibre.

Soit x_e point d'équilibre. Alors, x_e est dit :

- **stable** si dans n'importe quel voisinage \mathcal{V} de x_e , il y a une boule $B(x_e, r) \subset \mathcal{V}$ telle que les solutions y commençant, y reste (donc si $x_0 \in B(x_e, r)$ alors $[0, \infty[\subset I$ et pour tout $t \geq 0$, $x(t) \in \mathcal{V}$).
- **asymptotiquement stable** si il est stable, et il existe \mathcal{W} de x_e tel que si $x_0 \in \mathcal{W}$, alors $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_e$ (la solution tend vers x_e)
- **instable** si il n'est pas stable.

■ Le flot.

Pour une équation $x' = f(x)$, (f défini sur \mathcal{U}) le **flot** associé au champ de vecteurs f est la fonction ϕ qui à (t, y) associe $x(t)$ quand il existe ($t \in I_y$) où x est la solution satisfaisant $x(0) = y$. Cet objet vérifie des conditions du genre $\phi(t_1, \phi(t_2, y)) = \phi(t_1 + t_2, y)$ (quand tout existe). Si f est $\mathcal{C}^k(\mathcal{U})$, alors ϕ est \mathcal{C}^k sur $\mathcal{D}_\phi = \{(t, y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{U} : t \in I_y\}$ qui est un ouvert. Et pour un point d'équilibre x_e , un **portrait de phase** est le tracé, autour de x_e , de quelques trajectoires $\phi(t, y)$ avec y proche de x_e et t variant dans I_y .

■ Lemme de Gronwall (continu).

Soit $I = [0, T[$ ($T > 0$ ou $T = \infty$), avec A et C des constantes réelles, alors :

- si $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue et vérifie $\psi'(t) \leq A + C \int_0^t \psi(s) ds$, alors $\psi(t) \leq Ae^{Ct}$ pour tout $t \in I$;
- si $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue et vérifie $|x'(t)| \leq C|x(t)|$ alors $|x(t)| \leq |x(0)|e^{Ct}$.

■ Critère de stabilité.

On peut aussi étudier la stabilité dans un cas non-linéaire. Une équation de la forme $x'(t) = f(x(t))$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ peut se ramener à $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ en prenant A la matrice de $df(x_e)$, et alors $b(t) = o_{t \rightarrow 0}(x(t))$. Étudions le spectre $Sp(A) = \{\lambda | \lambda \text{ valeur propre de } A \text{ dans } \mathbb{C}\}$. Si pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $\text{Re}(\lambda) < 0$, alors x_e est asymptotiquement stable. Si pour un $\lambda \in Sp(A)$, $\text{Re}(\lambda) > 0$, alors x_e est instable. Sinon, il faut plus d'études.

■ Théorème de Lyapunov.

On a alors le **théorème de Lyapunov** (ou Liapounov). Si on trouve un voisinage \mathcal{V} de x_e et $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 avec : $g(x_e) = 0$, $g(y) > 0$ et $dg(y)(f(y)) \leq 0$ pour tout $y \in \mathcal{V} \setminus \{x_e\}$, alors x_e est stable ; et si en plus, $dg(y)(f(y)) < 0$ ($\forall y \in \mathcal{V} \setminus \{x_e\}$), alors x_e est asymptotiquement stable.

→ Cas particulier.

Et si on étudiait un cas spécifique ?

Linéaire, coefficients constants, homogène, dimension 2.

■ Le cas particulier.

Une petite étude illustrative est celle tous les cas en dimension 2, d'équation différentielle linéaire de la forme $x' = Ax$. Il se trouve que selon les valeurs propres et leurs propriétés, les solutions et les portraits de phase auront des aspects différents. On trouve, au final, 12 "classes de solutions" possibles.

- A a deux valeurs propres réelles non-nulles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$: trois cas selon les signes de λ_1 et λ_2 .
- A a deux valeurs propres complexes (non-réelles) conjuguées $\mu \pm i\nu$: trois cas, selon le signe de μ .
- A a une valeur propre λ réelle double, et A est diagonalisable : trois cas selon le signe de λ .
- A a une valeur propre λ réelle double, et A n'est pas diagonalisable : trois cas selon le signe de λ .

Sur le schéma, on indique par e_1 et e_2 les espaces propres qu'on utilise pour diagonaliser/trigonaliser la matrice.

■ Le tracé.

Pour les trois premiers cas, on peut remarquer que les solutions sont de la forme $(z_1(t), z_2(t)) = (e^{t\lambda_1} z_{10}, e^{t\lambda_2} z_{20})$; donc en posant $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$, on peut exprimer une des coordonnées en fonction de l'autre : $|z_2| = C|z_1|^\gamma$, pour une constante C dépendant des conditions initiales. Grâce à cette formule, on peut tracer à la main les courbes (par exemple, le (b) donne un γ négatif, donc une courbe hyperbolique).

Pareillement, pour les trois suivants, passer en coordonnées polaires nous indique que la courbe à tracer est de la forme $r(t) = r_0 e^{\mu t}$ et $\theta(t) = \theta_0 + \nu t$; selon le signe de μ , on obtient un cercle ou une spirale (logarithmique) qui diverge/converge.

Pour (g), (h) et (i), la matrice est λId , et le tracé va vite.

Et pour les trois derniers, on peut trouver une expression de la forme $z_1(t) = z_2(t) \left(\alpha + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{z_2(t)}{z_{20}} \right) \right)$ si $\lambda \neq 0$, et avec α dépendant des conditions initiales. Même avec l'expression, ce n'est pas évident à tracer. Et pour le cas $\lambda = 0$ (le (k)), on a $(z_1(t), z_2(t)) = (z_{10} + t z_{20}, z_{20})$, donc une droite.

