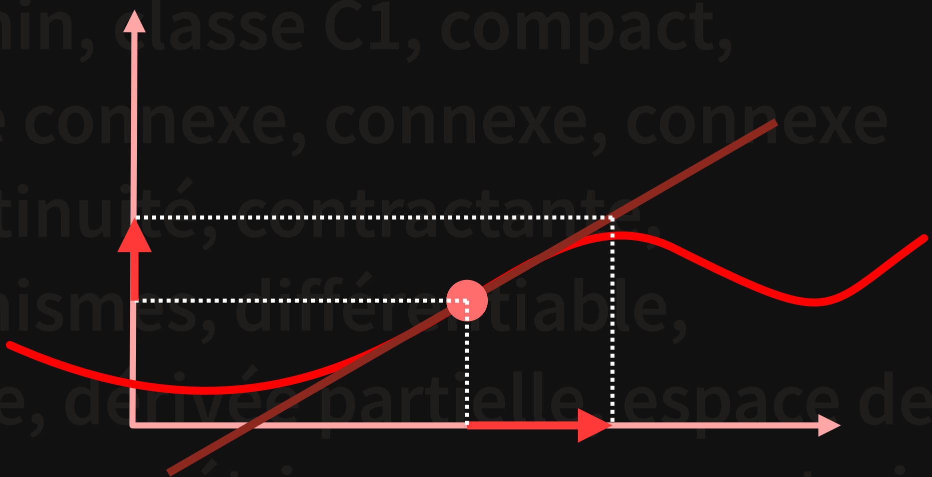
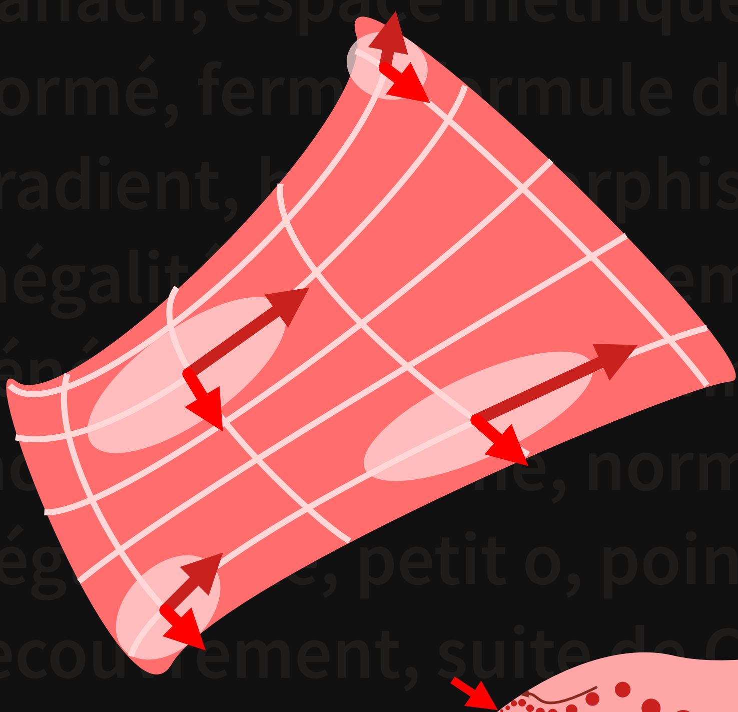
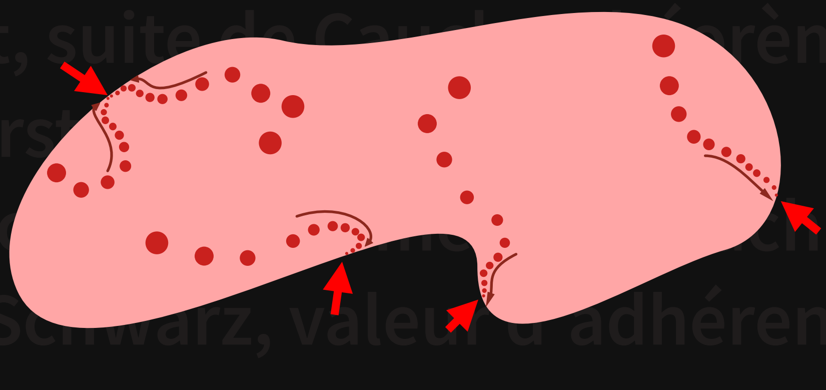
X31M040.

Topologie et calcul différentiel.







Topologie et calcul différentiel.

Ceci est un de 4 *pdf* de préparation à la L3. Il ne contient que les notions et connaissances qui seront enseignées l'année prochaine d'après le programme. Il n'y a pas de preuves; le but est juste de s'introduire aux concepts, pas de faire un cours entier (et rigoureux).

Les pages sont essentiellement (et en fait, quasiment entièrement) basées sur les polycopiés des années précédentes dans les matières ; il n'y a pas grand-chose ici, qu'on ne trouverait pas dans le cours.

Chaque page-fiche commence par une motivation; une sorte de dialogue entre un personnage D (Deuxième année), et un autre T (Troisième année), que vous pourrez appeler, dans votre tête, comme vous le souhaitez (*e.g.* <u>D</u>amien & <u>T</u>om Worro).

Pour cette fiche en particulier : il est (fortement) recommandé de lire d'abord les deux pages de Topologie du livret de « Théorie de la mesure ».

Sommaire.

Basé sur le polycopié (de Licence de maths, 3e année) *Topologie des espaces métriques et calcul différentiel*, Erwan Brugallé, 2018.

→ Compact, complet.

Ces propriétés nous disent si toute suite de Cauchy converge, et si toute suite admet une sous-suite convergente.

La motivation.

D – Comment construit-on les réels déjà ?
T – On commence avec l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$; puis on définit une relation d'équivalence : $(u_n) \sim (v_n)$ si la suite $(u_n - v_n)_n$ (aussi de Cauchy) converge vers 0 ; alors $\mathbb{Q}$ modulo ~ donne $\mathbb{R}$. Et donc, contrairement à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est complet, vu que toute suite de Cauchy y converge.
D – Mais toute suite n'y converge pas.
T – Non ; et comme $\mathbb{R}$ n'est pas compact, on ne peut même pas extraire une suite convergente d'une suite quelconque !

Le cadre.

Par la suite, (X,d) ou une notation similaire désigne un espace métrique. De même pour la prochaine page.

La compacité.

Soit (X,d) ; X est compact si, de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. En détail : pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X avec $Y\subseteq\cup_{i\in I}O_i$, il existe $I_0\subseteq I$ fini tel que $Y\subseteq\cup_{i\in I0}O_i$.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Un espace métrique (X,d) est compact *ssi* toute suite de X admet une sous-suite convergente.

Les parties compactes.

Soit (X,d) ; une partie $Y\subseteq X$ est compacte (pour la distance d) *ssi*, pour tout recouvrement de Y par des ouverts de X, il existe un sous-recouvrement fini de Y. C'est-à-dire : pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X avec $Y\subseteq\cup_{i\in I}O_i$, il existe $I_0\subseteq I$ fini avec $Y\subseteq\cup_{i\in I0}O_i$.

Les fermés bornés.

Dans (X,d) avec $Y\subseteq X$, si Y est compact, alors Y est fermé et borné dans X (borné signifie : il existe M>0 tel que $\forall x,y\in Y$, $d(x,y)\leq M$). Si (X,d) est compact, les parties compactes de X sont exactement les fermés de X. En particulier, un produit fini d'espaces métriques compacts est compact, et les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}^n$.

Les compacts d'un e.v.n.

Pour E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Et donc, les compacts de E sont les fermés bornés. D'ailleurs, pour un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ quelconque, E est de dim. finie ssi la boule unité fermée de E est compacte.

Les suites de Cauchy.

On rappelle que, pour tout (X,d), une suite $(x_n)_n$ de X est dite de Cauchy si

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\geq 0, \forall n,m\geq N, d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

Toute suite convergente est de Cauchy (mais la réciproque est, en général, fausse). Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence $x\in X$, alors $(x_n)_n$ converge vers x.

La complétude.

Un espace métrique (X,d) est dit complet, quand toute suite de Cauchy de (X,d), converge dans X. Tout espace métrique compact est complet. En particulier, tout e.v.n. de dimension finie est complet ; et dans un espace métrique complet (X,d), $Y\subseteq X$ est complet (avec d) *ssi* Y est fermé dans X.

Les espaces de Banach.

On appelle espace de Banach, un e.v.n. complet.

Le théorème de Banach.

Une fonction $f:X\to X$ est dite contractante si il existe $k\in[0,1[$ tel que $d(f(x),f(y)) \leq k\cdot d(x,y)$. Une fonction $f:X\to X$ contractante admet un unique point fixe dans X (point $x\in X$ tel que $f(x) = x$); et la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ et x_0 choisi dans X converge vers ce point fixe.

→ Connexe, continu.

Un espace (ou une de ces parties) est-il en un seul morceau ? Et que fait une application linéaire continue ?

■ La motivation.

D – Qu'est-ce que ça veut dire d'être connexe ? Intuitivement, en un un seul morceau, mais rigoureusement ?
T – En topologie, on a plusieurs définitions souvent. Dans notre cas, X « connexe » signifie que les seuls ouverts-fermés (*clopen set*) sont $\varnothing$ et X ; « connexe par arcs » signifie qu'on peut toujours relier deux points de X par un chemin continu dans X.
D – Est-ce que ces définitions sont équivalentes ?
T – En général, non ; l'exemple pathologique ici est la courbe sinus du topologue, c.à.d. l'ensemble $\{(x,\sin(1/x)) \mid x\in]0;1]\}\cup(0,0)$. Elle est connexe, mais pas par arcs !

■ La connexité par arcs.

Soit (X,d) et $x,y\in X$, on appelle chemin dans X reliant x à y une application continue $\gamma:[0,1]\to X$ avec $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. On dit alors que (X,d) est connexe par arcs si pour tout $x,y\in X$, il existe un chemin dans X reliant x à y. Dans $\mathbb{R}$, les sous-ensembles connexes par arcs sont les intervalles.

■ La connexité.

On dit qu'un espace métrique (X,d) est connexe si les seules parties ouvertes et fermées sont X, et $\varnothing$. Voici d'autres définitions équivalentes :
- *ssi* pour tous ouverts de X U et V disjoints avec $X = U\cup V$, on ait $U = \varnothing$ et $V = \varnothing$
- *ssi* toute application continue $f:X\to\{0,1\}$ est constante.

On note tout espace connexe par arc est connexe, que les connexes de R sont les intervalles, pour tout $A\subseteq X$ sous-ensemble connexe, l'adhérence A de A dans X est connexe.

■ Les composantes connexes.

Soit (X,d), et $x\in X$; l'union de tout les sous-ensembles connexes de X contenant x est un sous-ensemble connexe de X; qu'on appelle composante connexe de X contenant x. On peut remplacer tous les "connexes" de cette définition par "connexes par arcs" pour avoir les composantes connexes par arcs. Deux composantes connexes [par arcs] distinctes sont disjointes; et toute composante connexe de X est fermée dans X.

■ La continuité.

- Si $f:X\to Y$ est une application continue entre (X,d_X) et (Y,d_Y), alors f(X) est compact si X l'est. De là, on montre qu'une fonction continue f de (X,d) vers $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes ! Et pour $f:X\to Y$ une bijection continue entre deux espaces métriques, si X est compact, alors f est un homéomorphisme.
- Pour toute application continue $f:X\to Y$ entre (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, si X est connexe par arcs alors f(X) aussi.
- De même, pour toute application continue $f:X\to Y$ entre (X,d_X) et (Y,d_Y), si X est connexe alors f(X) aussi.

■ La continuité.

Pour deux EVN $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$, une application linéaire $f:E\to F$ est continue en 0 (et donc sur tout E) *ssi* elle est lipschitzienne; c'est-à-dire qu'il existe C>0 tel qu'on ait $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ pour tout $x\in E$. Ainsi, f est continue *ssi* f est bornée sur la sphère unité (ou sur la boule unité fermée).

■ La norme subordonnée.

Avec f application linéaire continue entre deux EVN, posons :

$$|||f||| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Si E est de dimension finie, alors f est continue, et en particulier $x_0\in E$ tel que $\|x_0\|_E = 1$, $f(x_0) = |||f|||$. En général, on peut poser $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F. Et $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$, dite "norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$". Et si $(F,\|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ aussi.

■ L'inversibilité.

Pour $(E,\|\cdot\|_E)$ espace de Banach, une application linéaire $f\in\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$ est inversible si f est un isomorphisme, et si f^{-1} est aussi continue; en particulier, on note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$. Un théorème (du à Banach) dit que pour $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ espaces de Banach, et $f\in\mathcal{L}(E,F)$, si f est bijective alors f^{-1} est continue, donc $f^{-1}\in\mathcal{L}(F,E)$.

→ Différentielles.

Comment parler de dérivées pour des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?
Les dérivées partielles marchent, mais il y a mieux.

■ La motivation.

D – Est-ce que tu te rappelles de la formule pour calculer les dérivées d'une composée de fonctions à plusieurs variables ?
T – Non, mais je pourrais certainement la retrouver. Après, l'écriture avec les dérivées partielles est une somme assez étrange.
D – On dirait un produit de matrices, avec l'indice muet qu'on doit rajouter.
T – Tout à fait ! On pourrait, en fait, écrire cette égalité plus simplement (et plus brièvement) en utilisant la différentielle, qui remplace les n dérivées partielles par une seule application linéaire (qui dépend de x). Et comme on peut l'écrire comme une matrice (dépendant de x), la formule devient un produit de matrices.

■ Le cadre.

Ici, E, F, F_1, F_2, G désignent des espaces vectoriels normés de dimensions finies ; les normes correspondantes, si nécessaires, sont notées $\|.\|_E$, etc. Et on a U un ouvert de E, V un ouvert de F ; on considérera souvent des fonctions $f:U\to F$. Même chose pour la page suivante !

■ Le petit o.

$f:U\to F$ est négligeable devant $\phi:U\to\mathbb{R}$ en $x_0\in U$ si on peut trouver une fonction $\varepsilon:U\to\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en x_0, avec

$$\|f(x)\|_F \le |\phi(x)|\cdot\varepsilon(x)$$

Dans ce cas, on note $f = o_{x_0}(\phi)$ ou $f = o(\phi)$ quand $x_0 = 0$.

■ La différentielle.

Une fonction $f:U\to F$ est différentiable en $x\in U$ si il existe une application linéaire L telle que

$$f(x+h) = f(x)+L(h)+o(\|h\|_E)$$

Alors on appelle différentielle (en x de f) l'application linéaire L, notée d_xf; si elle existe, elle est unique.
De plus, f est dite différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U. Dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction df qui a x, associe d_xf. Si df est continue sur U, f est dite de classe C^1.

■ Les propriétés.

- Linéarité : si $f:U\to F$, $g:U\to F$ sont différentiables en $x\in U$, alors $\lambda f+\mu g$ est différentiable en x, et

$$d_x(\lambda f+\mu g)= \lambda d_xf+\mu d_xg$$

(de même, si f et g sont C^1, alors $\lambda f+\mu g$ aussi).
- Composition : si $f:U\to F$ et $g:V\to G$ avec $f(U)\subseteq V$, et f différentiable en $x\in U$, et g en $f(x)\in V$, alors $g\circ f$ est différentiable en x, et

$$d_x(g\circ f) = d_{f(x)}g\circ d_xf$$

(de même, si f et g sont C^1 sur U et V, alors $g\circ f$ est C^1 sur U).
- soit $f:U\to F_1\times F_2$ définie comme $x\mapsto(f_1(x),f_2(x))$; alors f est différentiable en $x\in U$ *ssi* f_1 et f_2 le sont, et alors

$$d_xf(h) = (d_xf_1(h), d_xf_2(h))$$

pour tout h; de même, f est C^1 sur U *ssi* f_1 et f_2 le sont.

■ La dérivée le long d'une direction.

Une fonction $f:U\to F$ admet une dérivée « en $x\in U$ dans la direction $v\in E$ » si $\psi:t\mapsto f(x+tv)$, définie sur un voisinage $[-\varepsilon,\varepsilon]$ de 0 dans $\mathbb{R}$, est dérivable en 0, on note alors $[\partial f/\partial v](x)$ la dérivée $\psi'(0)$. En particulier, on utilise la notation $[\partial f/\partial x_i](x)$ quand v est le i-ème vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; on l'appelle la i-ème dérivée partielle.

■ Le lien avec la différentielle.

Si $f:U\to F$ est différentiable en $x\in U$, alors f admet une dérivée en x dans toutes les directions, et on a $d_xf(v) = (\partial f/\partial v)(x)$ pour tout $v\in E$. Ainsi, d_xf est entièrement déterminée par les dérivées partielles de f en x; on a

$$d_xf(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

■ Le gradient.

Dans le cas où $f:U\to\mathbb{R}$, les dérivées partielles sont des réels; on peut alors définir le gradient :

$$\nabla_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

Et alors, la différentielle est donnée par $d_xf(h) = \langle\nabla_x f, h\rangle$.

■ La (matrice) jacobienne.

En général, si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, alors $f:U\to F$ est C^1 sur U *ssi* toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U. De plus, si on choisit une base de E et une base de F, la différentielle peut se représenter par une matrice, la (matrice) jacobienne, notée $Jac_x(f)$, définie par :

$$Jac_x(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

En particulier, c'est la matrice de l'application linéaire d_xf. Et ainsi, la formule de composition devient

$$Jac_x(g\circ f) = Jac_{f(x)}(g)\cdot Jac_x(f)$$

→ Théorèmes.

Peut-on toujours utiliser nos théorèmes en plusieurs dimensions ? Certains, oui ; voici leurs généralisations.

■ La motivation.

D – On a des versions multidimensionnelles des dérivées ; mais comment formule-t-on les formules de Taylor alors ?
T – Comme pour la version unidimensionnelle ; mais en remplaçant $f^{(k)}(x)\cdot h^k$ par $d_x{}^k f(h, \dots h)$ (avec k arguments h). Par exemple, en 2 dimensions, on peut expliciter les premiers termes en fonctions des dérivées partielles. On a donc, en allant jusqu'au second ordre : $f(a+h, b+k) = f(a,b) + ([\partial f/\partial x_1](x)\cdot h+[\partial f/\partial x_2](x)\cdot k) + \frac{1}{2}([\partial^2 f/\partial x_1{}^2](x)\cdot h^2+2[\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2](x)\cdot hk+[\partial^2 f/\partial x_2{}^2](x)\cdot k^2)$. On peut le réécrire comme $f(a+h, b+k) = f(a,b) + L_{(a,b)}(h,k) + \frac{1}{2}Q_{(a,b)}(h,k)$, avec $L_{(a,b)}$ linéaire, et $Q_{(a,b)}$ quadratique. On peut d'ailleurs remarquer, en posant $\mathfrak{D} = \partial/\partial x_1\cdot h+\partial/\partial x_2\cdot k$, alors $L_{(a,b)}(h,k) = [\mathfrak{D}f](a,b)$, et $Q_{(a,b)}(h,k) = [\mathfrak{D}\mathfrak{D}f](a,b)$.

■ L'inégalité des accroissements finis généralisée.

Soit $f:[a,b]\to F$ une fonction d'un intervalle de $\mathbb{R}$, à $(F,\|\cdot\|_F)$, un espace de Banach de dimension finie, et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, toutes les deux continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Alors

$$(\forall x\in]a,b[,\ |||d_xf||| \leq g'(t)) \Rightarrow \|f(b)-f(a)\|_F \leq g(b)-g(a)$$

On déduit l'inégalité des accroissements finis généralisée : pour $f:U\to F$ différentiable allant d'un ouvert U de $(E,\|\cdot\|_E)$ vers $(F,\|\cdot\|_F)$, tous deux espaces de Banach de dimension finie, si il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $|||d_xf||| \leq M$ pour tout $x\in U$, alors pour tous x,y dans U avec $[x, y]\subseteq U$, on a

$$\|f(x)-f(y)\|_F \leq M\cdot\|x-y\|_E$$

■ Les conséquences.

- Pour $f:U\to F$ fonction différentiable, on a que : si d_xf est nulle sur tout U, alors f est une fonction constante.
- Et pour $f:U\to F$ C^1, alors f est localement lipschitzienne en tout point de U; autrement dit, pour tout $x\in U$, il existe $V\subseteq U$ un ouvert et $M>0$ une constante tels que

$$\forall y,z\in V,\ \|f(y)-f(z)\|_F \leq M\cdot\|y-z\|_E$$

■ Les difféomorphismes.

Une fonction $f:U\to V$ est dite difféomorphisme si f est une bijection différentiable, et que f^{-1} est aussi différentiable. Si en plus f et f^{-1} sont C^1, alors f est un C^1-difféomorphisme. En général, une fonction $f:U\to F$ est un C^1-difféomorphisme local en $x\in U$ si il existe un voisinage ouvert U_1 de x dans U tel que la restriction $f|_{U_1} : U_1 \to f(U_1)$ soit un C^1-difféomorphisme.

■ Le théorème d'inversion locale.

Soit $f:U\to F$ une fonction de classe C^1 ; si $d_xf\in\mathcal{GL}(E,F)$, alors f est un C^1-difféomorphisme local en $x\in U$. Donc, si $d_xf\in\mathcal{GL}(E,F)$ pour tout $x\in U$, et si f est injective, alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur f(U).

■ Les différentielles d'ordre supérieur.

Pour $f:U\to F$, et $k\in\mathbb{N}^*$, on dit que f est k fois différentiable en $x\in U$ si f est différentiable en x, et si $df:U\to\mathcal{L}(E,F)$ est k-1 fois différentiable en x. Même chose pour la classe C^k sur U : si différentiable en x, et df de classe C^{k-1} sur U.
En particulier, on dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Et donc, on notera $d_x{}^kf$ la différentielle d'ordre k-1 de df en x, si elle existe.

■ L'espace utilisé.

On note $\mathcal{L}^k(E,F)$ l'espace des applications k-linéaires sur E^k à valeurs dans F, autrement dit l'ensemble des fonctions $\phi:E\times\ldots\times E\to F$ avec ϕ linéaire en chaque argument quand les autres sont fixés. Il se trouve que $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}^{k-1}(E,F))$ est isomorphe à $\mathcal{L}^k(E,F)$ pour n'importe quel entier k. Et donc, on peut considérer les différentielles d'ordre k comme des fonctions de $\mathcal{L}^k(E,F)$ (en effet, se sont des fonctions k-linéaires !). On peut poser une norme sur $\mathcal{L}^k(E,F)$ par

$$|||\phi||| = \max_{\|x_1\|_E=\|x_2\|_E=\cdots=1} \|\phi(x_1,\cdots,x_k)\|_F$$

■ Les dérivées partielles d'ordre supérieur.

Pour $f:U\to\mathbb{R}^n$ une fonction, on peut définir les dérivées partielles d'ordre k par récurrence : f admet une dérivée partielle d'ordre k le long de $x_{i1} \ldots x_{ik}$ en x, si f admet une dérivée partielle le long de x_{ik} en x, et si $\partial f/\partial x_{ik}$ admet une dérivée partielle d'ordre k-1 le long de $x_{i1} \ldots x_{ik-1}$ en x; on note alors

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x) := \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)(x)$$

On a que $f:U\to\mathbb{R}^m$ est de classe C^k *ssi* toutes les dérivées partielles d'ordre k de f existent, et sont continues sur U. Si f est k fois différentiable en $x\in U$,

$$d_x^k f(h_1,\cdots,h_k) = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k=1}^{n} h_{1,i_1}\cdots h_{k,i_k}\cdot\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x)$$

■ Le théorème de Schwarz.

Si $f:U\to\mathbb{R}^m$ est une fonction deux Fois différentiable en $x\in U$, alors : $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)$
En général, si $f:U\to\mathbb{R}^m$ est k fois différentiable en $x\in U$, n'importe quelle dérivée partielle d'ordre k reste la même après permutations des indices.

■ Les formules de Taylor-Young.

Pour une fonction $f:U\to F$ k-fois différentiable au voisinage de $x\in U$, et $h\in E$ tel que $x+h\in U$, on a

$$f(x+h) = f(x) + d_xf(h) + \frac{1}{2!}d_x^2f(h,h) + \cdots + \frac{1}{k!}d_x^kf(h,\cdots,h) + o(\|h\|^k)$$

Si f est C^{k+1}, on a la version avec reste intégral :

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}d_x^if(h,\cdots,h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}d_{x+th}^{k+1}f(h,\cdots,h)dt$$

Et la version inégalité de Taylor, où $M = \max_{t\in[0,1]} |||d_{x+th}f|||$:

$$\left\| f(x+h) - f(x) - d_xf(h) - \frac{1}{2!}d_x^2f(h,h) - \cdots\frac{1}{k!}d_x^kf(h,\cdots,h)\right\|_F \leq \frac{M\cdot\|h\|_E^{k+1}}{(k+1)!}$$