→ Fonctions complexes.

On peut adapter la continuité aux complexes, mais comment adapter la dérivabilité ?

La motivation.

D – On m'a dit que $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas dérivable, mais pourquoi ?
T - Bah, la limite $\frac{\bar{z}-\bar{z_0}}{z-z_0}$ dépend de la direction de z : selon, la direction, la limite donne -1 ou 1.
D - C'est juste ça ?
T - Ouais. Dans l'idée, au voisinage du point z_0, appliquer la fonction à z revient à multiplier $z - z_0$ par un complexe. Par exemple, les équations de Cauchy-Riemann reviennent à vérifier que la différentielle correspond à une multiplication par un complexe.

Série entière.

Une **série entière** est une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, avec $(a_k)_k$ une suite de complexes. Son **rayon de convergence** est le $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tel que la série converge pour $|z-z_0| < R$ et diverge pour $|z-z_0| > R$; on l'obtient par la **formule de Hadamard** $R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}$. On appellera **disque de convergence** le disque ouvert $D(z_0, R)$; la série converge normalement sur tout compact inclus dans ce disque ouvert.

Une série entière est continue, intégrable et dérivable sur son disque de convergence ; par exemple, la série dérivée est $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$, de même rayon de convergence.

Fonction analytique.

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ (U ouvert de $\mathbb{C}$) est **analytique** en z_0 si il existe un r tel que f soit exactement la somme d'une série entière convergente sur $D(z_0, r)$ (donc $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ pour des coefficients a_k bien choisis). Et analytique dans U si elle est analytique en tout point de U.

Trois principes.

Ici on suppose U ouvert de $\mathbb{C}$, et on étudie une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ analytique.

Principe des zéros isolés. Si f s'annule en un point $z_0 \in U$, alors on peut trouver un voisinage V de z_0 tel que f s'y annule partout, ou tel que f ne s'y annule qu'en z_0. Dans ce dernier cas, il existe un entier $m \geq 1$ et une série entière de somme g ne s'annulant pas en z_0 tel que $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ sur un voisinage de z_0 ; on l'appelle ordre du zéro.

Principe du prolongement analytique. On suppose U connexe ; si $g : U \to \mathbb{C}$ est une autre fonction analytique telle que $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ est un ensemble qui possède un point d'accumulation, alors $f = g$ sur U.

Principe du maximum. Demandons U connexe et f pas constante dans U. Alors $z \mapsto |f(z)|$ n'a pas de maximum local dans U, et n'a de minimum local que là où $f(z) = 0$. Donc si U est borné, et que $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ ($\bar{U}$ est l'adhérence de U) est analytique dans $\mathbb{U}$, alors $\sup_{z\in U} |f(z)| = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$ (le maximum en norme est atteint sur le bord).

Fonction holomorphe.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ sur U ouvert de $\mathbb{C}$; f est **holomorphe** en $z_0 \in U$ si f admet une **dérivée complexe** en z_0 : la limite $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe (on la note alors $f'(z_0)$). Et f holomorphe en U si holomorphe en tout point. Les fonctions holomorphes sont continues sur leur domaine. On appellera **entière** une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur tout $\mathcal{C}$.

On peut ajouter, multiplier, quotienter et composer des fonctions holomorphes (en faisant attention au domaine) ; le résultat est aussi holomorphe sur son domaine de définition, et on retrouve les dérivées classiques ($(f+g)' = f'+g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - g'f)/g^2$ et $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$). Remarque bonus : pour $g : I \to U$ (I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) fonction $\mathcal{C}^1$, et si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et de dérivée continue, alors $f \circ g$ est $\mathcal{C}^1$ et a dérivée (réelle) $(f' \circ g)g'$.

Une fonction analytique est holomorphe, et indéfiniment dérivable.

Fonction exponentielle.

En posant la série entière

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

On obtient une fonction entière qui est sa propre dérivée complexe, appelée **exponentielle**, satisfaisant plein de propriétés : $e^{z+w} = e^z e^w$; $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ est strictement positive, strictement croissante et strictement convexe ; $|e^z| = e^{\Re z} > 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; $e^z = 1$ si et seulement si $z = 2\pi i k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Équations de Cauchy-Riemann.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction ; on peut la décomposer en u, v de $\tilde{U}$ à $\mathbb{R}$ avec $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ où $\tilde{U}$ est l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ correspondant à U. On a l'équivalence entre "u, v sont dérivables et satisfont les **équations de Cauchy-Riemann** : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ " et "f holomorphe sur U".

On a, en corollaire, une version de l'inversion locale : si en un point, $f'(z_0) \neq 0$ ($z_0 \in U$, U ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe), alors il existe deux ouverts $V \ni z_0$ et $W \ni f(z_0)$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit bijective, et de réciproque holomorphe.

$\longrightarrow$ Intégrer sur un chemin.

Même si on a deux dimensions (réelles), on intègre quand même sur un chemin plutôt que sur une surface.

La motivation.

D – Comment je calcule l'intégrale d'une fonction sur un cercle ? Parce que je trouve 2π pour l'intégrale de 1 sur le cercle unité, et 0 pour l'intégrale de $1/z$.
T - Déjà il faut paramétriser le chemin étudié ; ici $g(t) = e^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ donne le cercle. Puis il faut faire comme un changement de variable classique ; donc là tu as oublié le facteur $g'(t)$.
D - Ok, ça donne 0 pour $f(z) = 1$, mais cette fois j'ai $2\pi i$ pour $1/z$.
T - Oui c'est normal, c'est parce qu'il y a un problème en 0, on obtient un résidu.

Chemins.

Une fonction continue $g : [a, b] \to U$ qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux (U ouvert de $\mathbb{C}$) donne un **paramétrage d'un chemin**. Le chemin "relie $g(a)$ à $g(b)$". Il existe d'autres paramétrages du même chemin, on les obtient comme $g \circ \phi$ avec $\phi : [c, d] \to [a, b]$ bijection croissante $\mathcal{C}^1$ par morceaux. L'arc $\gamma^* := g([a, b])$ lui-même est appelée **image** de γ. Et on note $\ell(\gamma) = \int_a^b |g'(t)| \,\mathrm{d}t$ la **longueur** de γ. Ce chemin est un **lacet** si $g(a) = g(b)$ (il forme une boucle). On peut alors intégrer une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ le long d'un chemin γ par

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Constructions de chemins.

Les chemins courants sont des segments orientés $[z_0, z_1]$ (qu'on peut paramétriser par $[0, 1] \ni t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_2)$) et des arcs de cercles (paramétrisés par $[\theta_0, \theta_1] \in \theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$).

On note $\breve{\gamma}$ le chemin parcouru dans l'autre sens ; c'est-à-dire, on remplace la paramétrisation $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ par $\breve{g} : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ défini par $\breve{g}(t) = g(-t)$.

Et pour γ_1 et γ_2 des chemins paramétrisés par $g_1 : [a, c] \to \mathbb{C}$ et $g_2 : [c, b] \to \mathbb{C}$, si $g_1(c) = g_2(c)$, on peut construire un chemin γ noté $\gamma_1 \vee \gamma_2$ paramétrisé par $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ ($g(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si } t \in [a, c] \\ g_2(t) & \text{si } t \in [c, b] \end{cases}$). Dans ce cas, on a une formule de Chasles : $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Propriétés.

Soit γ chemin reliant z_0 à z_1 (des points d'un ouvert U), et $f : U \to \mathbb{C}$ continue ; si f est holomorphe, $\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = f(z_1) - f(z_0)$, et pour un lacet $\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Sinon, on a la majoration

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq (\sup_{\gamma^*} |f|) \cdot \ell(\gamma)$$

Ce qui permet de dire que si $f_n \underset{\text{unif.}}{\longrightarrow} f$ sur γ^*, alors $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z$.

Indice.

On peut définir l'**indice** d'un point $z_0 \notin \gamma^*$ relativement à un lacet γ comme

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

Sur $U = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$, l'intégrale est à valeurs entières, constante sur chaque composante connexe de U, et vaut 0 sur la plus grande composante (la seule non-bornée).

Théorème de Cauchy.

Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite **convexe** si pour tous $z_0, z \in A$, le segment $[z_0, z]$ est entièrement dans A. Elle est dite **étoilée** en z_0 (ici fixé) si pour tout $z \in A$, $[z_0, z]$ est entièrement dans A. Maintenant, le **théorème de Cauchy**. Soit U ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, γ lacet dans U, $f : U \to \mathbb{C}$ fonction holomorphe de dérivée continue sur U, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$. C'est en particulier le cas pour γ un cercle, ou un triangle (ce dernier cas est le **théorème de Goursat**). Et pour tout $z_0 \in U\backslash\gamma^*$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$$

Équivalence holomorphe-analytique.

On peut même calculer les dérivées de f en un point grâce à une formule similaire. Si f est une fonction holomorphe sur un disque $D(z_0, R)$, alors f est égale sur ce disque à la somme d'une série entière $\sum_{k=0}^\infty a_k(z - z_0)^k$; donc y est indéfiniment dérivable (au sens complexe), et on peut calculer $f^{(k)}(z_0)$ grâce aux formules de Cauchy :

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\mathrm{d}w$$

avec γ n'importe quel cercle direct centré en z_0 et de rayon $r < R$.

Autrement dit, on a l'équivalence entre "f analytique sur U" et "f holomorphe sur U". En conséquence, on a :

Théorème de Liouville : toute fonction holomorphe bornée sur tout $\mathbb{C}$ est constante.

→ Résidus.

L'intégrale sur une boucle ne fait pas toujours 0, mais on peut calculer l'erreur !

La motivation.

D – Pourquoi on prend des ouverts convexes ou étoilés pour les primitives ? Connexe ne suffit pas ?
T - Déjà oui, il faut pouvoir relier tous points de l'ouvert. Mais surtout, il faut pouvoir déformer n'importe quel lacet en n'importe quel autre. Et si il y a un trou dans l'ouvert, ça ne marchera pas.
D - Oui, parce qu'un "trou" correspond à un pôle, et ça donne un résidu.
T - Exactement, un reste qu'on doit rajouter pour chaque tour que fait le chemin autour du point.

Développement de Laurent.

Soit $D(z_0, R)$ disque, et f holomorphe sur $D(z_0, R) \backslash \{z_0\}$. Alors on peut l'écrire de manière unique comme $f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, avec $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ (de rayon de convergence $\geq R$) et $h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ de rayon de convergence ∞, avec $h(0) = 0$. Un tel développement est appelé **développement de Laurent** de f en z_0, et la partie $h\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ est dite **singulière**. Le **résidu** de f en z_0 est alors la quantité $\text{rés}(f, z_0) := h'(z_0)$.

Fonction méromorphe.

Une fonction f est **méromorphe** sur U ouvert $\mathbb{C}$ si il existe un ensemble $S \subset U$ sans point d'accumulation dans U (donc fini ou discret par exemple), f est holomorphe sur $U \backslash S$, et qu'en chaque point de S, la partie singulière du développement de Laurent est un polynôme (nombre fini de termes). Ces points sont les pôles de f, et z_j est un pôle d'ordre d si h_j est de degré d. Remarquons que si f a un pôle d'ordre 1 en z_0, on peut aussi calculer le résidu en z_0 par la limite $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$.

Théorème des résidus.

On demande U ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $S \subset U$ ensemble de points sans point d'accumulation dans U, f holomorphe sur $U \backslash S$, et γ lacet sur $U \backslash S$. Alors S ne contient qu'un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_n$ d'indice non-nul relativement à γ, et on a la formule des résidus :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \text{rés}(f, z_j) \text{ind}_\gamma(z_j)$$

Exemple : résidus.

Posons $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, c'est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un pôle d'ordre 1 en i et en $-i$. En i, en posant $w = z - i$ on a

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{2i} \frac{1}{1+\frac{w}{2i}}\right)$$
$$= \frac{-i}{2w}\left(1 - \frac{w}{2i} + \left(\frac{w}{2i}\right)^2 + \cdots\right) = \left[\frac{-i}{2}\frac{1}{w}\right] + \left[-\frac{1}{4} + \frac{i}{8} + \cdots\right]$$

Ainsi, on a un développement de Laurent, ce qui donne un résidu de $\frac{-i}{2}$ en i (un calcul similaire donne $\frac{i}{2}$ en $-i$).

Exemple : intégrale réelle.

On utilise souvent le théorème des résidus pour évaluer une intégrale réelle. Voici un exemple, où on calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ de cette manière (ici on peut le faire sans, mais ce n'est pas toujours le cas). On vient d'en étudier les résidus.

Pour $R > 0$, on forme le lacet qui consiste en le segment $[-R, R]$ et la moitié supérieure du cercle centré en 0 de rayon R. Notons γ_R pour le segment (qu'on peut paramétriser par $g : [-R, R] \to \mathbb{C}$ avec $g(t) = t$), et γ_C pour le demi-cercle, paramétrisé par $[0, \pi] \ni t \to Re^{it}$. On étudie donc le lacet $\gamma = \gamma_R \vee \gamma_C$. Pour $R > 1$ ce lacet contient i, et donc par théorème des résidus, $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2} = \pi$ puisque c'est le seul pôle que le lacet contient, et le chemin est simple, donc i est d'indice 1 relativement à γ.

Or, $\left|\int_{\gamma_C} f(z)\, \mathrm{d}z\right| \leq (\pi R) \cdot \frac{1}{R^2-1}$. En effet, sur γ_C, $|z| = R$ donc $|z^2+1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$ et $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$. Donc, quand $R \to \infty$, $\int_{\gamma_C} f(z)\, \mathrm{d}z \to 0$.

Et bien sûr, $\int_{\gamma_R} f(z)\, \mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$ quand $R \to \infty$.

En remettant tout ensemble, on obtient que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \lim_{R \to \infty} \pi - \int_{\gamma_C} f(z)\, \mathrm{d}z = \pi$.

Primitives.

Une **primitive** d'une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe $F : U \to \mathbb{C}$ avec $F' = f$.

Pour un ouvert connexe U, $f : U \to \mathbb{C}$ continue possède une primitive dans U si et seulement si $\int_\gamma f(w)\, \mathrm{d}w = 0$ pour tout lacet γ dans U. En particulier, si U est étoilé, une fonction est holomorphe dans U si et seulement si elle possède une primitive holomorphe dans U.

Théorème de Morera.

En fait, il suffit de vérifier que $\int_\gamma f(w)\, \mathrm{d}w = 0$ pour tout les chemins triangulaires dont l'enveloppe convexe ($\hat{\gamma}^*$, le plus petit convexe qui contient γ^*) est contenu dans U. C'est le **théorème de Morera**, une sorte de réciproque au théorème de Goursat.

Ce théorème peut être appliqué pour montrer qu'une fonction définie par une série ou une intégrale est bien holomorphe. On ne détaille pas ici.

$\longrightarrow$ Séries de Fourier.

On peut écrire toute fonction sympa comme somme de sinusoïdes, oui mais ça veut dire quoi sympa précisement ?

La motivation.

D – Comment on montre que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$?
T - Il y a plusieurs manières de faire. On peut par exemple considérer une fonction définie par $f(t) = 2\pi|[t]|$ où $[t]$ est l'unique $s \in]-\pi, \pi]$ tel que $t - s \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Alors, en décomposant cette fonction 2π-périodique en une série de Fourier ...
D - ... on peut appliquer le théorème de Dirichlet et récupérer l'égalité.
T - On peut aussi utiliser les séries de Fourier pour prouver l'inégalité isopérimétrique, qui borne l'aire qu'une courbe peut englober en fonction de son périmètre.

Polynôme trigonométrique.

Un **polynôme trigonométrique** de degré $\leq n$ est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qu'on peut écrire $f(t) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikt}$ pour des coefficients $c_{-n}, \cdots, c_n$ complexes. On peut parler de **série trigonométrique** pour $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{-k} e^{-ikt} + c_k e^{ikt})$.

Normes $L^p_{2\pi}$.

On travaille sur l'espace $L^p_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ avec $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ (la norme L^p) finie. Pour $p = \infty$, on prendra $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ pour f continue. Pour $p = 2$, on peut faire correspondre $\|\cdot\|_2$ à un produit scalaire : $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. En posant e_k la fonction $t \mapsto e^{ikt}$, on a $(e_k|e_l) = 2\pi\delta_{k=l}$, ce qui donne $(f|g) = 2\pi \sum_{|k|\leq n} a_k \overline{b_k}$ pour tous $f(t) = \sum_{|k|\leq n} a_k e^{ikt}$ et $g(t) = \sum_{|k|\leq n} b_k e^{ikt}$.

Convergence des séries.

Soit donc $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, pour avoir la convergence uniforme de la série trigonométrique (vers une fonction 2π-périodique continue) correspondante il suffit d'avoir $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \leq \infty$; et pour avoir la convergence quadratique (vers une fonction 2π-périodique carré-intégrable), il suffit d'avoir $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \infty$. Dans les deux cas, on peut retrouver c_k par $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(f|e_k)$.

Série de Fourier.

D'ailleurs pour $f \in L^1_{2\pi}$, on définit ses **coefficients de Fourier** comme $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(f|e_k)$, sa **série de Fourier** comme la série trigonométrique de coefficients $(c_k(f))$, les **sommes de Fourier** comme les sommes partielles $S_n f = \sum_{|k|\leq n}(c_k(f) e_k)$, et les **moyennes de Cesàro** comme $\mathcal{C}_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k f$. Et, **lemme de Riemann-Lebesgue** : $\lim_{k\to\pm\infty} c_k(f) = 0$.

Noyaux.

Alors, on peut retrouver sommes de Fourier et moyennes de Cesàro par convolution avec des noyaux bien choisis. En particulier, le **noyau de Dirichlet** est $D_n(s) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})s)}{\sin(\frac{1}{2}s)}$, et le **noyau de Fejér** est $\mathcal{F}_n(s) = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}ns)}{n\sin^2(\frac{1}{2}s)}$. On note que $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi$ pour tout $n > 0$. Alors $S_n f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) f(t-s)\,\mathrm{d}s$ et $\mathcal{C}_n f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(s) f(t-s)\,\mathrm{d}s$.

Théorème de Fejér.

Soit $f \in L^2_{2\pi}$, et $(\mathcal{C}_n f)$ la suite des moyennes de Cesàro. Alors :

a) si pour $\ell = \lim_{s\to 0}(f(t+s) + f(t-s))$ existe pour un $t \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n f(t) = \ell$.

b) si f continue sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n$, $\|\mathcal{C}_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{C}_n f - f\|_\infty = 0$.

c) si $f \in L^p_{2\pi}$ pour $p < \infty$, alors $\forall n$, $\|\mathcal{C}_n f\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{C}_n f - f\|_p = 0$.

Théorème de Riesz-Fischer.

Soit $f \in L^2_{2\pi}$, alors f est somme en moyenne quadratique sur $[0, 2\pi]$ de sa série de Fourier, et on a la **formule de Parseval** : $\sum_{k_i n\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{2\pi}$.

Théorème de Dirichlet.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; alors

$$Sf(t) = \frac{\lim_{s\to 0, s>0} f(t+s) + \lim_{s\to 0, s<0} f(t+s)}{2}$$

Et donc, si f est continue en t, $Sf(t) = f(t)$. La quantité $\frac{\lim_{s\to 0, s>0} f(t+s) + \lim_{s\to 0, s<0} f(t+s)}{2}$ est parfois appelée valeur principale de Cauchy. En particulier, si f est Lipschitzienne, on a la convergence $S_n f \to f$ de manière uniforme.