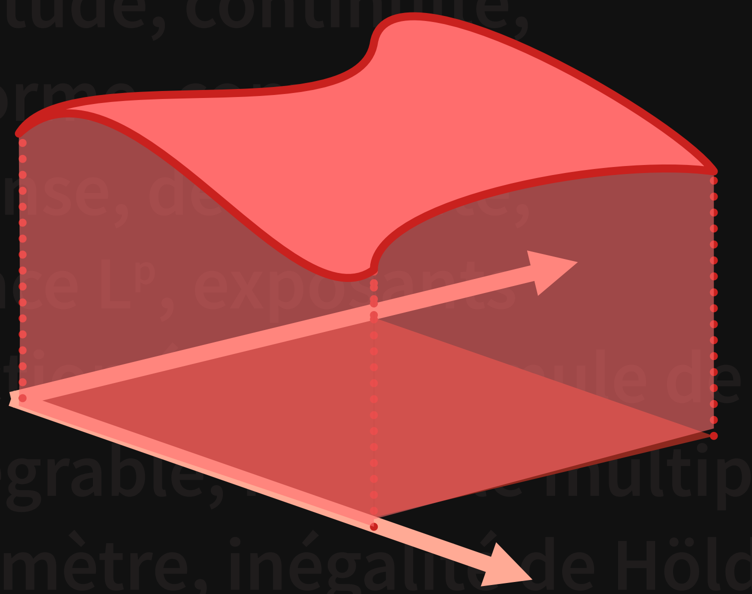
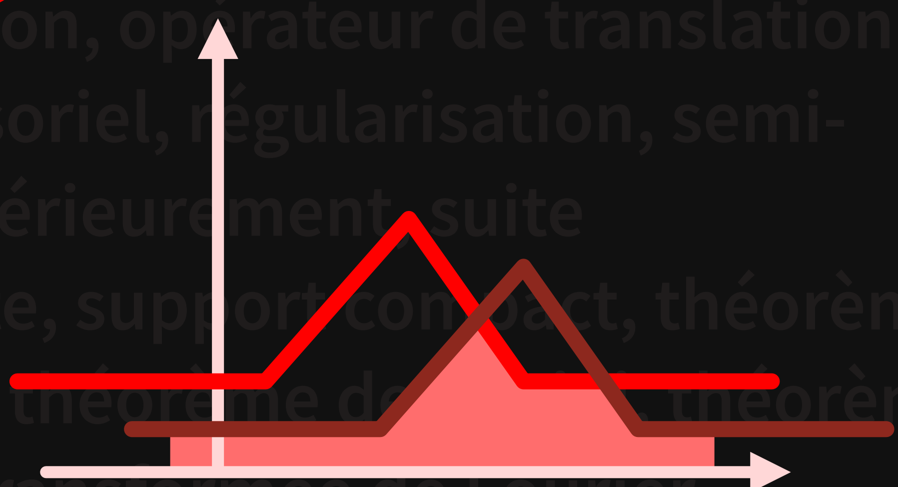
X31M050.

Intégration 2.





Intégration II

Ceci est un de 4 *pdf* de préparation à la L3. Il ne contient que les notions et connaissances qui seront enseignées l'année prochaine d'après le programme. Il n'y a pas de preuves; le but est juste de s'introduire aux concepts, pas de faire un cours entier (et rigoureux).

Les pages sont essentiellement (et en fait, quasiment entièrement) basées sur les polycopiés des années précédentes dans les matières ; il n'y a pas grand-chose ici, qu'on ne trouverait pas dans le cours.

Chaque page-fiche commence par une motivation; une sorte de dialogue entre un personnage D (Deuxième année), et un autre T (Troisième année), que vous pourrez appeler, dans votre tête, comme vous le souhaitez (*e.g.* <u>D</u>amien & <u>T</u>om Worro).

Pour cette fiche en particulier : il est (fortement) recommandé de lire les pages 4 à 7 (de Familles Sommables à Intégration) de « Théorie de la mesure ».

<u>Sommaire.</u>

Basé sur les polycopié (de Licence de maths, 3e année) de *<u>Intégration 2</u>* de Nicolas Depauw.

→ Intégrales à paramètre, Intégrales multiples.

Deux nouveaux types d'intégrales assez courants.

■ La motivation.

D – Y a-t-il des méthodes d'intégration autres que les plus connues ?
T – Bien sûr ! Pour intégrer $\exp(-x^2)$ sur tout R, on passe en 2d; et là, on étudie l'intégrale multiple obtenue (changement de variable en deux dimensions, etc.) Et aussi, la méthode de Feynman : elle consiste à rajouter un paramètre bien choisi, de dériver par rapport à ce paramètre; une formule permet de réécrire cette dérivée, qu'on réintègre.
D – Donc il faut connaître les intégrales multiples, et les intégrales à paramètre …

■ Le cadre.

Grâce aux nouvelles notions, on peut obtenir des versions plus générale des théorèmes vu. On étudie les fonctions de la forme $F(s) = \int_\Omega f_z(x)\,dx$, où $(f_z)_{z\in Z}$ est une famille de fonctions (vectorielles) sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ (munie de la mesure de Lebesgue λ), et Z est un espace métrique. Il faut que f_z soit mesurable (pour tout z), … etc.

■ La continuité.

Pour $a\in Z$, et si :
- $\lim_{z\to a} f_z = f_a$ sur presque tout Ω ;
- il existe g intégrable sur Ω telle que pour tout z, $|f_z|\leq g$ sur presque tout Ω ;

alors F est définie sur Z, et continue en a. Pour montrer, plus généralement, que F est continue sur Z, on peut vérifier que :
- $z\mapsto f_z(x)$ est continue sur Z pour presque tout x, et que pour tout $a\in Z$, il y ait un voisinage Z_a de a dans Z, et g_a intégrable sur Ω qui majore $|f_z|$ pour tout $z\in Z_a$.

■ La dérivabilité.

Quand Z est un intervalle ouvert de R, et que $f:Z\times\Omega\to\mathbb{C}$, alors si : $z\mapsto f(z,x)$ est dérivable sur Z pour presque tout $x\in\Omega$, de dérivée $z\mapsto(\partial_z f)_z(x)$, et pour tout $a\in Z$, il existe un voisinage Z_a de a dans Z, et g_a intégrable sur Ω qui majore $|\partial_z f_z|$ pour tout $z\in Z_a$; alors F est dérivable sur Z, de dérivée $F' = \partial_z F = \int_\Omega f(z,x)\,dx$. Si en plus, $(\partial_z f)(x)$ est continue sur Z pour presque tout $x\in\Omega$, alors F' est continue sur Z et F est C^1 sur Z.

■ L'espace $L^1(\Omega)$.

$\mathcal{L}^1(\Omega)$ dénote l'ensemble des fonctions intégrables sur un ouvert $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$, qu'on munit de la norme $\|u\|_1 = \int_\Omega |u|\,d\lambda$. Alors, $\mathcal{L}^1(\Omega)$ est un espace vectoriel complet. De plus, si on note $C_c(\Omega)$ l'e.v. des fonctions continues à support compact, et $E_c(\Omega)$ l'e.v. des fonctions étagées, alors $C_c(\Omega)$ et $E_c(\Omega)$ sont des s.e.v. de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ qui sont denses dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$; dans le sens où, pour tout $f\in\mathcal{L}^1(\Omega)$, on peut trouver une suite $(u_n)_n$ dans $C_c(\Omega)$ (ou $E_c(\Omega)$) telle que $u_n \to_n f$ presque partout, que $\sup_n|u_n| \leq|f|$ presque partout, et $\|u_n - f\|_1\to 0$.

■ Le produit tensoriel.

Dans le cas de F_1 et F_2 espaces vectoriels de fonctions définies sur Ω_1 et Ω_2 ouverts de $\mathbb{R}^{d1}$ et $\mathbb{R}^{d2}$, on pose $u_1\otimes u_2$ la fonction définie par $(u_1\otimes u_2)(x_1,x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2)$. Et $F_1\otimes F_2$ dénote l'espace vectoriel engendré par les fonctions sur $\Omega_1\times\Omega_2$ de la forme $u_1\otimes u_2$. On note qu'on a $u\otimes(v+w) = u\otimes v+u\otimes w$, $(\lambda u)\otimes v = \lambda(u\otimes v)$.

■ Les cas particuliers.

- $E_c(\Omega_1\times\Omega_2) = E_c(\Omega_1)(x)E_c(\Omega_2)$;
- $C_c(\Omega_1)(x)C_c(\Omega_2)$ est dense dans $C_c(\Omega_1\times\Omega_2)$, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (et pour la norme $\|\cdot\|_1$).

■ Le théorème de Tonelli.

Si f est une fonction positive (mesurable) sur Z, alors :

$$\int_Z f(z)d_z\lambda^d = \int_X\int_Y f(x,y)d_y\lambda^c d_x\lambda^b = \int_Y\int_X f(x,y)d_x\lambda^b d_y\lambda^c$$

■ Le théorème de Fubini.

Si f est une fonction vectorielle intégrable sur X×Y, alors :

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_X\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_Y\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

→ Espaces L^p et inégalités.

Aussi appelés espaces de Lebesgue, ils forment des espaces de fonctions complets ; donc bien utiles.

■ La motivation.

D – Pour les espaces vectoriels, on peut trouver des normes en prenant $(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$ (avec $p \geq 1$). Peut-on faire pareil pour l'espace vectoriel des fonctions ?

T – Oui, il y a un analogue en intégrale ; mais alors, on est obligé de se restreindre à certaines fonctions. Les plus courants sont L^1 (fonctions intégrables) et L^2 (fonctions carré-intégrables), mais on peut aussi définir L^∞ (fonctions bornées presque partout).

D – Et comment sont-elles liées ? Y a-t-il une inclusion pour des exposants p et q différents ?

T – Et non, en général, on n'a ni $L^p \subseteq L^q$ ni $L^q \subseteq L^p$! Notablement, $f(x) = 1 \in L^\infty \backslash L^1$, et il existe des fonctions intégrables non-bornées.

■ Le cadre.

On note ici μ une mesure (positive) sur X; et pour u fonction positive sur X, on note $\|u\|_p$ le réel $(\int |u|^p \, d\mu)^{1/p}$ pour $p \in [1,\infty[$, et on note aussi $\|u\|_\infty = \min\{M : u \leq M \ \mu\text{-presque partout}\}$. Pour une fonction vectorielle, on pose $\|u\|_p = \| \, |u| \, \|_p$. En appelant espace $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions u (à valeurs réelles ou à valeurs dans un espace de Banach) telles que $\|u\|_p < \infty$, alors $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathcal{L}^p$, on va le voir.

■ Les fonctions convexes.

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel E est convexe, si pour tout $x,y \in A$, on a que le segment $[x,y]$ est dans A; c'est-à-dire, $\lambda x+(1-\lambda)y \in A$, pour tout $\lambda \in [0,1]$. Pour une fonction $f:U \to \mathbb{R}$ (U partie de E; U est le domaine de f), son épigraphe est défini comme $\text{Epi } f = \{(x,t) : x \in U, \text{ et } f(x) \leq t\}$; pour U segment de $\mathbb{R}$, c'est visuellement la zone au-dessus du graphe. Et donc, une fonction est convexe si son épigraphe est convexe. Et si l'épigraphe est fermé (dans le cas où E est normé), alors on dit que la fonction est semi-continue inférieurement (qu'on notera s.-c.i.). Une autre caractérisation : une fonction $f:U \to \mathbb{R}$ (U partie de E) est convexe et s.-c.i. *ssi* $f = \sup\{u : \text{affine de E dans } \mathbb{R} \text{ et } u|_U \leq f\}$

■ L'inégalité de Jensen.

Pour μ une mesure de probabilité sur X ($\mu(X) = 1$), et E espace de Banach, si $\Phi:E \to \mathbb{R}$ est convexe, et $u:X \to E$ est intégrable, alors $\Phi(\int u \, d\mu) \leq \int \Phi \circ u \, d\mu$.

■ L'inégalité de Hölder.

Soit p et q dans $]1,\infty[$, avec $1/p+1/q = 1$ (on dit que p et q sont des exposants conjugués); alors $ab \leq a^p/p+b^q/q$ pour tous réels a, b positifs; et pour toutes fonctions u, v positives sur X, alors $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q$; le théorème est aussi vrai pour $p = 1$, $q = \infty$.

■ L'inégalité de Minkowski.

Pour $p \in [1,\infty]$, et u et v deux fonctions positives, on a une inégalité similaire à celle qu'on a sur les espaces vectoriels euclidiens : $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

■ La complétude.

Si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}^p(X;E)$ (l'ensemble des fonctions $u:X \to E$ avec $\|u\|_p < \infty$), muni de $\|\cdot\|_p$, qui sert alors de norme (l'inégalité de Minkowski correspond alors à l'inégalité triangulaire), est complet.

■ Le rapport.

Si p et q sont différents, $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^q$ ne sont pas, en général, comparables dans le sens où il peut exister des éléments de $\mathcal{L}^p$ qui ne sont pas dans $\mathcal{L}^q$, et vice-versa. Par exemple sur R, les fonctions constantes sont dans $\mathcal{L}^\infty$ mais pas $\mathcal{L}^1$, et les fonctions intégrables non bornées sont dans $\mathcal{L}^1$, mais pas $\mathcal{L}^\infty$. Dans le cas où $\mu(X)$ est fini, on a $\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p$ pour $p \leq q$, car alors $\|u\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \cdot \|u\|_q$.

→ Translation, convolution.

Que ce soit pour filtrer un signal (e.g. détecter un visage), ou le modifier (rajouter de l'écho), il suffit de convoluer.

La motivation.

D – Comment peut-on lisser une fonction ? Pour une série temporelle, on peut faire une moyenne roulante sur une semaine, ou un intervalle bien choisi ; mais pour une fonction (uni-dimensionnelle), ça doit être une intégrale ?
T – Oui ; d'ailleurs, c'est mieux décrit par une convolution. On garde la même idée, en prenant une fonction f qui vaut 0 vers $+\infty$ et $-\infty$, et d'intégrale 1. Alors la convolution avec donne une autre fonction plus lisse, et de même intégrale.
D – Et on peut changer le niveau de précision ?
T – Bien sûr, en remplaçant f par $x\mapsto\varepsilon^{-1}f(x/\varepsilon)$ avec $\varepsilon<1$, on obtient un résultat moins lisse en quelque sorte.

L'opérateur de translation.

Posons τ_h l'application qui associe, à un vecteur x de $\mathbb{R}^d$, x+h (où $h\in\mathbb{R}^d$ est fixé). On généralise à une partie, ce qu'on note $\tau_h A$ (:= $\{\tau_h a, a\in A\}$), et à une fonction u (définie sur une partie D de $\mathbb{R}^s$), où $\tau_h u$ est $x\mapsto u(x-h)$ (définie sur h+D). Toutes les normes $\mathcal{L}^p$ sont invariantes par translation.

La continuité uniforme.

Posons C_b^0 l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$, que l'on munit de la norme L^∞ (ou norme sup). Alors, une fonction $u\in C^0_b$ est uniformément continue *ssi* $\lim_{h\to 0} ||\tau_h u - u||_\infty = 0$. Notamment, l'ensemble $C^0_{b,u}$ des fonctions de C^0_b qui sont uniformément continues est un s.e.v. fermé de C^0_b. Et C^0_0 (fonctions continues tendant vers 0 à l'infini est un s.e.v. fermé de $C^0_{b,u}$ (donc $C^0_{b,u}$ et C^0_0 sont complets pour la norme sup); et C^0_c, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans C^0_0.

Les normes L^p.

Pour $p\in[1,\infty[$, si $u\in L^p$, alors $h\mapsto\tau_h u$ est continue bornée uniformément continue de $\mathbb{R}^d$ dans L^p. Dans L^∞ par contre, ce théorème n'est plus vrai; dans le cas où l'application $h\mapsto\|\tau_h u-u\|_\infty$ est continue en 0 pour $u\in L^\infty$, on doit avoir $u\in C^0_{b,u}$.

La convolution.

Pour u, v deux fonctions sur $\mathbb{R}^d$ continues à support compact, on définit la fonction $u*v$ sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$(u * v)(x) = \int u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y$$

L'inégalité de Young.

Quand u et v sont C^0_c, nulles hors des compacts F et G respectivement, alors $u*v = v*u$ est continue, et nulle hors de F+G (c'est-à-dire l'ensemble $\{f+g, f\in F, g\in G\}$). En plus, on a l'inégalité de Young $\|u*v\|_r \leq \|u\|_p\cdot\|v\|_q$ si p, q, r dans $[1,\infty]$ satisfont la relation $1+1/r = 1/p+1/q$.

La convolution dans les L^p.

Si $u\in L^p$ et $v\in L^q$, avec p et q finis, alors le résultat de la convolution est dans L^r, où $1/p+1/q = 1+1/r$.

Les approximants de l'identité.

Soit f positive d'intégrale 1; on pose alors $f_\varepsilon:x\mapsto\varepsilon^{-d}f(x/\varepsilon)$ (d dimension de l'espace); alors $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon * u-u\|_p = 0$ si $p<\infty$ et $u\in L^p$, ou si $p = \infty$ et $u\in C^0_{b,u}$. Cela signifie, intuitivement, que f_ε se rapproche de plus en plus d'un élément neutre de la convolution. On appelle ça une suite régularisante ; ou *mollifier* en anglais.

La régularisation.

Si u et v sont C^0_c, et l'une des deux est C^1, alors $u*v$ est C^1. Si u et v sont C^k, alors $u*v$ est C^{2k}. Si $u\in C^1\cap L^p$, et $u'\in L^p$ et $v\in L^q$ (et $1/p+1/q = 1$), alors $u*v\in C^1_b$, et $(u*v)' = u'*v$. Et si en plus f est C^k_c, alors $f*u$ est C^k; et donc cela signifie que $C^k\cap L^p$ est dense dans L^p (pour p fini), et $C^k_{b,u}$ est dense dans $C^0_{b,u}$.

→ Transformation de Fourier.

Comment retrouver la densité en chaque point d'un objet quand on n'a que des clichés au rayons X ? La solution passe par Fourier.

■ La motivation.

D – Si on a une fonction qui n'est pas exactement périodique mais qui se répète plus ou moins (e.g. $\exp(-x^2)\sin(x)$), comment peut-on estimer une sorte de période ?

T – Pour cette question très spécifique, la réponse est qu'intuitivement, la transformée de Fourier donne pour chaque fréquence à quel point la fonction semble correspondre à cette fréquence.

D – Mais plus rigoureusement … ?

T – Ça associe à la fonction, une autre dans un espace miroir en quelque sorte ; on y a une version du principe d'incertitude !

■ La transformation.

Soit $u \in L^1$, à valeur dans $\mathbb{C}$; la transformée de Fourier de u est une fonction $\hat{u} = \mathcal{F}u$ définie par :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot x} u(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ $(u \mapsto \hat{u})$ est un opérateur linéaire, et $\|\mathcal{F}u\|_\infty \leq \|u\|_1$.

■ La boîte à opérateurs.

Posons déjà κ, qui associe à une fonction u, la fonction κu, définie $(\kappa u)(x) = x \cdot u(x)$. Posons ς, qui associe à u la fonction ςu telle que $(\varsigma u)(x) = u(-x)$. Et rajoutons $\overline{\mathcal{F}}$, qui est très proche de $\mathcal{F}$; en ce que $\overline{\mathcal{F}}v(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi}\, v(x)\, d\xi$. Deux autres opérateurs utiles : τ_h est dit opérateur de translation, et est défini par $\tau_h u(x) = u(x-h)$; et μ_h, opérateur de modulation, et est défini par $\mu_h u(x) = e^{2\pi i h \cdot x} u(x)$.

■ Les propriétés.

Quand u et κu sont intégrables, alors

$$\partial \mathcal{F}u = -2\pi i \mathcal{F}\kappa u$$

Et si u et ∂u sont intégrables, on a que

$$2\pi i \kappa \mathcal{F}u = \mathcal{F}\partial u$$

Et on a $\overline{\mathcal{F}}u = \varsigma\mathcal{F}u = \mathcal{F}\varsigma u$; et $\overline{\mathcal{F}}\overline{u} = \overline{\mathcal{F}u}$. On a les relations

$$\mathcal{F}(\tau_h u) = \mu_{-h}\mathcal{F}u \text{ et } \mathcal{F}(\mu_h u) = \tau_h \mathcal{F}u$$

Même genre que les relations entre ∂ et 2πiκ !

■ La convolution.

Pour $u, w \in L^1$, alors on a la relation

$$\mathcal{F}(u * w) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(w)$$

On a aussi $\overline{\mathcal{F}}(u\hat{w}) = (\overline{\mathcal{F}}u) * w$, ce qui nous permet de déduire que, quand u, w et û sont intégrables, on a que :

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(u * w) = \overline{\mathcal{F}}(\hat{u}\hat{w}) = (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}u) * w$$

■ Le théorème d'inversion.

Si $w \in L^1$ et $\hat{w} \in L^1$, alors $w = \overline{\mathcal{F}}\hat{w}$; autrement dit, on a les deux formules parallèles :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot x} u(x)\,\mathrm{d}x$$

$$u(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

■ La formule de Plancherel.

Si u et w sont intégrables, et û et ŵ aussi, alors

$$\int u\overline{w}\,\mathrm{d}\lambda = \int \hat{u}\overline{\hat{w}}\,\mathrm{d}\lambda$$

Et $\|u\|_2^2 = \|\hat{u}\|_2^2$.