Intégrabilité au sens de Riemann.

Subdivision d'un segment.

Une <u>subdivision</u> d'un segment [a,b] est une famille (x_i) $(i\in[\![0,n]\!])$ avec $x_0:=a<x_1<\ldots<x_n:=b$. Son <u>pas</u> est alors la plus grande valeur de $(x_{i+1}-x_i)$. Et une subdivision pointée a de plus la donnée d'un point $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$ pour chaque intervalle de la subdivision.

Applications en escalier.

Une application f:[a,b] → E est dite « <u>en escalier</u> » s'il existe une subdivision (x_i) de [a,b], telle que f soit constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Une telle subdivision est dite adaptée à l'application f. L'ensemble des applications en escalier de [a,b] vers E est noté $\mathcal{E}$([a,b], E). Soit f une application en escalier et $\mathbf{u}:=(x_i)$ une subdivision adaptée à f. Alors, en notant c_i la valeur de f sur $[x_i, x_{i+1}]$, le nombre

$$\sum_{i\in[\![0,n-1]\!]}(x_{i+1}-x_i)c_i$$

ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie, et est appelé « <u>intégrale de f sur [a, b]</u> », ce que l'on note

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cas particuliers.

Toute fonction <u>continue</u>, <u>continue par morceaux</u> (c.à.d. qu'il existe une subdivision $a=a_0<\ldots<a_n=b$ de [a,b] telle que f est continue sur chaque sous-intervalle $]a_i,a_{i+1}[$), <u>monotone</u>, ou <u>à variation bornée</u> ($\sup_{\mathbf{u}} V(f,\mathbf{u}) < +\infty$, où $V(f,\mathbf{u}) = \Sigma\,|f(x_{i+1})-f(x_i)|$ pour toute subdivision $\mathbf{u}$) sur un intervalle [a,b] est intégrable au sens de Riemann.

Intégrable au sens de Riemann.

Une fonction f:[a,b] → ℝ est <u>intégrable au sens de Riemann</u> si pour tout ε>0 on peut trouver deux fonctions en escalier ψ_ε et φ_ε, telles que $\psi_\varepsilon\leqslant f\leqslant\varphi_\varepsilon$ et que

$$\int_a^b \varphi_\varepsilon - \int_a^b \psi_\varepsilon = \int_a^b (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

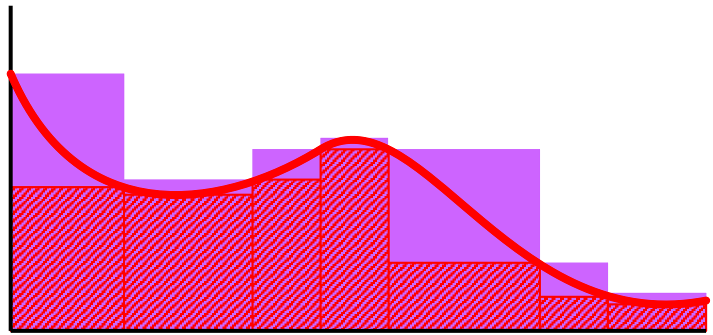
On écrit aussi que f est $\mathscr{R}$-<u>intégrable</u>. On note $\mathscr{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle [a,b].

Intégrale supérieure et inférieure.

On peut définir deux ensembles $\mathcal{E}_f^+ = \{\varphi\in\mathcal{E}([a,b])|f\leqslant\varphi\}$ et $\mathcal{E}_f^- = \{\psi\in\mathcal{E}([a,b])|\psi\leqslant f\}$ des fonctions qui majorent et minorent f respectivement. Et donc : on appelle intégrale supérieure de f sur [a,b] le minimum de $\{\int_a^b \varphi|\varphi\in\mathcal{E}_f^+\}$, et intégrale inférieure de f sur [a,b] le maximum de $\{\int_a^b \psi|\psi\in\mathcal{E}_f^-\}$, notées respectivement

$$\int_a^{*b} f \quad \text{et} \quad \int_{*a}^{b} f$$

Une autre condition pour l'intégrabilité au sens de Riemann est : f est bornée et ses intégrales supérieure et inférieure sont égales. Dans ce cas, elles sont <u>égales à l'intégrale de f sur [a,b]</u>.



Propriétés essentielles de l'intégrale.

Dans les propriétés suivantes : f, g sont des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle [a,b], α et β sont des réels et c∈]a,b[.

Linéarité.

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Effet de l'intégrale sur l'ordre.

$$f \geq 0 \implies \int_a^b f \geq 0$$

$$f \geq g \implies \int_a^b f \geq \int_a^b g$$

Ces deux propriétés, dite de positivité et de croissance, sont équivalentes grâce à la linéarité !

Valeur absolue.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Relation de Chasles.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

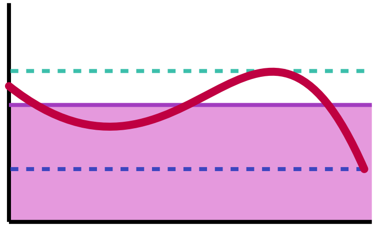
Valeur moyenne.

La valeur moyenne d'une fonction f (intégrable au sens de Riemann) sur [a,b] est définie comme :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Inégalité de la moyenne.

Si m ≤ f ≤ M pour m, M deux réels, alors la moyenne μ de f sur l'intervalle [a,b] satisfait m ≤ μ ≤ M. Autrement dit, l'intégrale de f sur [a,b] est comprise entre m(b-a) et M(b-a) (étant donné la définition de la moyenne.)

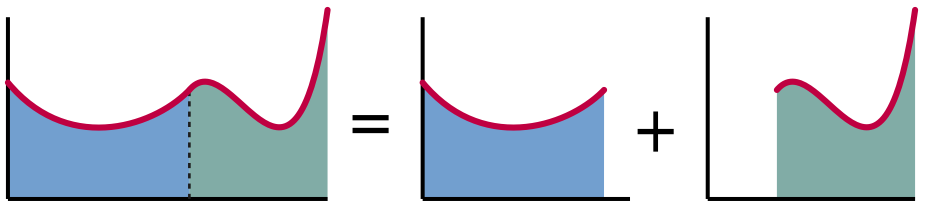


Inégalité de Cauchy-Schwartz pour les intégrales.

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

Il est nécessaire de préciser « pour les intégrales » car une telle inégalité existe pour n'importe quel espace vectoriel muni d'un produit scalaire. En effet, $\mathscr{R}([a,b])$ est un espace vectoriel. Et l'application qui associe à une fonction de cet e.v. son intégrale est linéaire (c'est une forme linéaire). Cette inégalité est liée à la notion de norme, que l'on verra en cours de « fonctions de plusieurs variables ».

Toutes ces propriétés, aussi évidentes soient-elles, sont très utiles. Par exemple, la linéarité et la relation de Chasles permet de simplifier (parfois) des calculs d'intégrales avec les primitives !



La relation de Chasles, comme la plupart des autres propriétés, est assez intuitive quand on les représente visuellement ; et donc se démontre assez facilement en utilisant les définitions de l'intégrale.

Primitives.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F est une <u>primitive</u> de f sur I si elle est dérivable et admet f comme dérivée.
Remarque : certaines fonctions n'ont pas de primitives élémentaires ; on est alors obligé de créer de nouvelles fonctions pour les exprimer.

Théorème fondamental de l'analyse.

Soit f une fonction continue d'un intervalle [a,b] sur E.
- l'application

$$F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \in E$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Toute primitive est de la forme G = F+C, C∈E une constante.
- pour toute primitive F de f :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

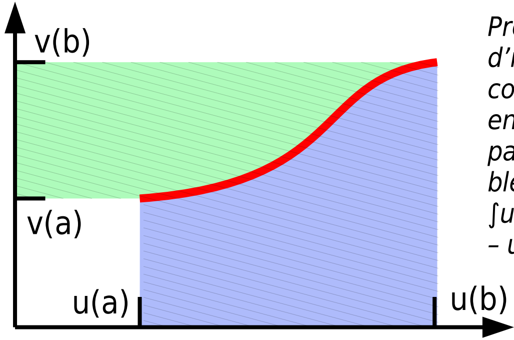
Corollaire.

Soit f une application sur un intervalle I de classe C^1 (dérivable et de dérivée continue). Pour tout a,b∈I, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'$$

Classe de régularité.

Pour dénoter la continuité/dérivabilité, on a comme notations assez courantes :
- $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues ;
- $\mathcal{C}^1$ l'ensemble des fonctions dérivables et de dérivée continue ;
- $\mathcal{C}^k$ l'ensemble des fonctions dérivables k fois et de k-ième dérivée continue.



Preuve visuelle de la formule d'intégration par parties : la courbe en rouge est (u(t), v(t)) en fonction de t, pour t parcourant [a,b]. Donc l'aire en bleu est ∫uv' et l'aire en vert ∫u'v ; leur somme est u(b)v(b) – u(a)v(a), l'aire hachurée.

Intégration par parties.

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur [a,b]. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

La formule provient d'une application astucieuse de la formule de dérivation (u·v)'(x) = u'(x)·v(x)+u(x)·v'(x) et du théorème fondamental.

Changement de variables.

Soit φ une fonction de classe C^1 sur [a,b]. Alors, si f est continue sur φ([a,b]), on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

La formule provient d'une application astucieuse de la formule de dérivation (f∘g)'(x) = g'(x))·f'(g(x)) et du théorème fondamental.

Formule de Taylor (reste intégral).

Soit f:[a,b] →ℝ une fonction de classe C^{n+1}. Alors :

$$f(b) = f(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Cette formule se prouve par récurrence, par utilisation répétée de l'intégration par parties.

Somme de Riemann.

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b], et une subdivision pointée d'un intervalle [a,b] (rappel : $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ avec pour tout i un point $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$), alors on définit la somme de Riemann de f associée à la subdivision comme :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$$

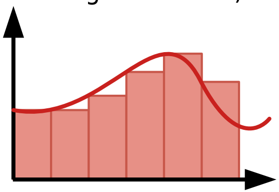
Si f est une fonction continue sur [a,b], lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, la somme de Riemann tend vers l'intégrale de f de a à b. Un cas particulier assez fréquent est quand la subdivision est régulière (tout les $(x_i - x_{i-1})$ sont égaux), et les ξ_i sont aux mêmes endroits dans les sous-intervalles (voir plus bas).

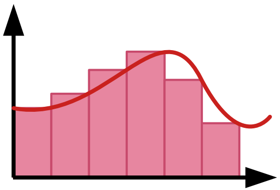
Calcul numérique.

Les méthodes les plus simples de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle [a,b] commencent par subdiviser l'intervalle en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, avec $x_i = a+i(b-a)/n$. Le calcul est alors une somme d'une valeur que l'on calcule pour chaque sous-intervalle.

Méthode des rectangles.

La méthode des rectangles consiste à utiliser une somme de Riemann régulière avec $\xi_i = x_i$ (méthode des rectangles à gauche) ou avec $\xi_i = x_{i+1}$ (méthode des rectangles à droite).





Méthode des points médians.

Cette fois, on prend ξ_i au milieu des sous-intervalles : $\xi_i = (x_i+x_{i+1})/2$. Elle est exacte pour les fonctions affines !

Méthode des trapèzes.

Au lieu d'utiliser des rectangles, on utilise des trapèzes. (C'est donc la moyenne des deux méthodes des rectangles!) La formule est donc : $\frac{(b-a)}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right)$

Bonus : méthode de Simpson.

Cette fois, on utilise des paraboles pour approximer la fonction sur chaque sous-intervalle ; la parabole correspondant à l'intervalle $[x_i , x_{i+1}]$ doit coïncider avec f en x_i, x_{i+1} et $(x_i+x_{i+1})/2$.

Erreurs.

- Pour la méthode des rectangles, il existe un c∈[a,b] tel que l'erreur $I - I^{\text{rect}}$ (c'est-à-dire intégrale – somme) est donnée par

$$I - I^{\text{rect}} = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c)$$

Autrement dit, l'erreur satisfait

$$|I - I^{\text{rect}}| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a,b]} |f'|$$

- Pour la méthode des points médians :

$$I - I^{\text{med}} = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$$

- Pour la méthode des trapèzes :

$$I - I^{\text{trap}} = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$$

Ordre d'une méthode.

Une méthode d'intégration numérique est dite d'ordre N si elle exacte pour tout les polynômes de degré N ou moins, et inexacte pour au moins un polynôme de degré N+1. La méthode des rectangles est de degré 0 ; la méthode des points médians et la méthode des trapèzes sont d'ordre 1.

Théorème de convergence dominée.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues (par morceaux) de I dans ℝ, et f, φ:I->ℝ continues (par morceaux) avec φ positive. Si on a :

- pour tout t∈I, $(f_n(t))$ converge vers f(t);
- pour tout t∈I et tout n≥1, $|f_n(t)|\leq\varphi(t)$;
- φ est intégrable sur I.

Alors tout les f_n et f sont intégrables sur I, et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n=\int_I f$$

Fonctions à paramètres.

On étudie les fonctions F:X→ℝ définies par une intégrale :

$$F(x)=\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

où f:X×I→ℝ, et X, I sont des intervalles réels.

Continuité.

Théorème. Soit x_0∈X et f:X×I→ℝ une fonction telle que :

- pour tout x∈X, la fonction t∈I↦f(x,t)∈ℝ est intégrable au sens de Riemann;
- pour tout t∈I, la fonction x∈X↦f(x,t)∈ℝ est continue en x_0∈X;
- il existe deux fonctions g:I→ℝ et h:I→ℝ intégrables au sens de Riemann sur I telles que pour tout x∈X et tout t∈I, on aie g(t) ≤ f(x,t) ≤ h(t)

Alors la fonction F:X→ℝ définie par $F:x\mapsto\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue en x_0.

Remarques.

- encadrer f(x,t) est équivalent à trouver g(t) tel que |f(x,t)| ≤ g(t) pour tous x∈X, t∈I.
- si f:X×I→ℝ est continue, alors la fonction F définie comme plus haut l'est aussi ; conséquence du théorème.

Dérivabilité.

Soit f:X×I→ℝ une fonction de 2 variables réelles telle que :

- pour tout x∈X, la fonction t↦f(x,t) est intégrable au sens de Riemann sur I;
- pour tout t∈I, la fonction x↦f(x,t) est dérivable sur X;
- il existe deux fonctions g:I→R et h:I→R intégrables au sens de Riemann sur I telles que pour tous x∈X, t∈I : g(t) ≤ ∂f(x,t)/∂x ≤ h(t).
- pour tout x∈X, la fonction t↦∂f(x,t)/∂x est localement intégrable sur I.

Alors la fonction F:X→R définie par F(x) = $\int_I$f(x,t) est dérivable sur X, la fonction t↦∂f/∂x(x,t) est intégrable sur I et :

$$F'(x)=\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Avec plus de paramètres.

Si on a f:X×I→ℝ continue et admettant en tout point une dérivée partielle ∂f(x,t)/∂x continue sur X×I, et a:X→I, b:X→I des fonctions de classe C^1, alors F:X→ℝ définie par

$$F:x\mapsto\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)\mathrm{d}t$$

Est de classe C^1 sur X et :

$$F'(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\frac{d}{t}+b'(x)f(x,b(x))-a'(x)f(x,a(x))$$

Théorème de Fubini.

Soit f:[a,b]×[c,d]→ℝ une fonction continue. Alors les applications suivantes sont continues :

$$x\in[a,b]\mapsto\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\qquad y\in[c,d]\mapsto\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Et on a :

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Intégrale généralisée (ou impropre).

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle]a,b[(a et b pouvant être ±∞). On appelle <u>intégrale généralisée</u> de f entre a et b la limite :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a, y\to b} \int_x^y f(t)\mathrm{d}t$$

L'intégrale est dite <u>convergente</u> si la limite existe (et est finie); <u>divergente</u> sinon.

Intégrales de Riemann.

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si α > 1.
- L'intégrale $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$ est convergente ssi α < 1.

Comparaison à une intégrale de Riemann.

Soit f:[a,+∞[→ ℝ continue (par morceaux).

- si il existe α>1 tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est intégrable sur [a,+∞[.
- si il existe c>0 tel que $\lim_{t\to+\infty} tf(t) \geq c$ alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ n'est pas convergente.

Convergence absolue.

Soit f une fonction continue par morceaux sur [a,b[. L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite absolument convergente quand l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge. Toute intégrale absolument convergente est convergente. Et donc, une intégrale semi-convergente est une intégrale qui est convergente mais pas absolument (comme pour les séries).

Règle d'Abel.

Soit g Riemann-intégrable sur [a,b[et f décroissante et de limite nulle en b. Si la fonction $x \mapsto \int_a^x g$ est bornée, alors l'intégrale $\int_a^b fg$ converge.

Comparaison série-intégrale.

Beaucoup des propriétés qui suivent sont identiques à celles pour les séries ; lorsque f est décroissante, on peut en effet comparer son intégrale à une série.

Lemme.

Soit f≥0 continue par morceaux sur [a,b[. L'intégrale de f(t) de a à b (par rapport à t) converge si et seulement si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur [a,b[.

Théorème de comparaison.

Soient f et g deux fonctions continues (par morceaux) sur [a,b[telles que 0 ≤ f ≤ g. Alors on a :

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Relations de comparaison.

Pour rappel, voici les relations de comparaison. Au voisinage de a :

- f est dite <u>dominée</u> par g, ce qui est noté $f =_a O(g)$, si au voisinage de a, f(x) = φ(x)g(x) avec φ bornée;
- f est dite <u>équivalente</u> par g, ce qui est noté $f \sim_a g$, si au voisinage de a, f(x) = φ(x)g(x) avec $\lim_a \varphi = 1$;
- f est dite <u>négligeable</u> par g, ce qui est noté $f =_a o(g)$, si au voisinage de a, f(x) = φ(x)g(x) avec $\lim_a \varphi = 1$.

Soit f et g deux fonctions continues (par morceaux) et positives sur [a,b[. Alors :

- si $f \sim_b g$, alors leurs intégrales de a à b (par rapport à t) sont de même natures (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes)
- si $f =_b O(g)$ et donc en particulier si $f =_b o(g)$, on a les mêmes résultats que pour 0 ≤ f ≤ g.

Longueur d'une courbe plane.

La longueur d'une courbe plane paramétrée $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto\gamma(t) = (x(t),y(t))$, de classe C^1 est

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

On peut généraliser cette définition pour obtenir l'intégrale curviligne d'un champ scalaire continu $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ par rapport à un arc γ défini sur [a,b], qui est $\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$

Intégrale double.

Une intégrale est déjà une aire; l'aire d'une zone comprise entre la courbe représentant la fonction, l'axe des abscisses, et deux droites verticales. Mais une autre manière de calculer une aire est une intégrale double sur un domaine : $\iint_D 1$ donne l'aire de D. On peut calculer cela par deux intégrations successives; cela revient à d'abord calculer la longueur de chaque tranche, et d'intégrer cette longueur variable.

Théorème de Fubini.

Pour bonne mesure, un résumé du théorème de Fubini : sous les bonnes conditions, on a :

$$\begin{aligned}&\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Intégrale triple.

De la même manière, une intégrale double permet de calculer un volume compris entre la surface représentant une fonction f(x,y) et plusieurs plans. Mais une intégrale triple aussi. De même, on procède généralement en intégrant la fonction successivement trois fois.

Changement de variables.

Changer de variable lorsqu'il n'y en a qu'une est relativement facile, mais pour plusieurs ? Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\Phi:U\to V$ un C^1-difféomorphisme (isomorphisme de classe C^1 dont la bijection réciproque est aussi de classe C^1), qui est le changement de variables. La matrice jacobienne est définie comme

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous intéresse est son déterminant (dit déterminant jacobien); en effet, on a alors

$$\int_V f = \int_U (f\circ\Phi)\times|\det J_\Phi|$$

Cas particuliers.

Plusieurs changements de variables en particulier sont assez fréquents. Pour deux variables, les coordonnées polaires. On a $(x,y) = \Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Par exemple, x^2+y^2 se simplifie en coordonnées polaires. La matrice jacobienne est alors

$$J_\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

Le déterminant est alors juste r, et le changement de variable est : $\iint_V f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_U f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

où U est l'ensemble d'intégration V exprimé en coordonnées polaires. On peut simplement l'étendre pour 3 variables avec les coordonnées cylindriques : $(x,y,z) = \Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Son déterminant est r. Mais aussi, il y a les coordonnées sphériques : $(x,y,z) = \Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$, de déterminant $-\rho^2\sin\varphi$.