Théorie de la mesure.

Ceci est un livret supplémentaire de préparation à la L3. C'est un complément aux 4 autres fiches, qui parle de Théorie de la mesure. En détail, il contient des notions de topologie, de théorie de la mesure et d'intégration, et de probabilités.

Les pages sont basées sur les polycopiés des années précédentes dans les matières correspondantes, et de quelques ouvrages au sujet de théorie de la mesure.

Sommaire.

- Topologie (1)

Espace vectoriel normé, boule, limite, continuité, espace métrique

- Topologie (2)

Continuité uniforme, ouverts, fermés, adhérence, intérieur

- Familles sommables

Famille finie, famille positive, famille quelconque

- σ-algèbres et mesures

σ-algèbre, fonction mesurable, σ-algèbre engendrée, borélien, mesure positive, ensemble négligeable, mesure complète

- Mesure de Lebesgue

Pavés, mesure extérieure, mesure de Lebesgue

- Intégration

Fonction étagée, intégrale, théorème de convergence monotone, lemme de Fatou, convergence dominée

- Probabilité

Espace de probabilité, variable aléatoire, mesure de probabilité.

Basé sur les ouvrages *Analyse Réelle et Complexe*, Walter Rudin, 2012 ; *Measure, Integration & Real Analysis*, Sheldon Axler, 2020 ;
Et le polycopié (de Licence de maths, 3e année) *Topologie des espaces métriques et calcul différentiel*, Erwan Brugallé, 2018 ; les polycopiés d'*Intégration 2* de Nicolas Depauw, et les polycopiés de *Probabilités continues et convergence* de Paul-Éric Chaudru de Raynal (d'après les notes de cours de Nicolas Pétrélis).

Théorie de la mesure.

Les espaces vectoriels normés.

En ajoutant à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E une norme, c'est-à-dire une application $\|\cdot\|:E\to\mathbb{R}^+$ qui satisfait :
i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation);
ii) $\forall x\in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\|\lambda\cdot x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$ (homogénéité absolue);
iii) $\forall x,y\in E$, $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (inégalité triangulaire).
On obtient une structure $(E, \|\cdot\|)$ appelée espace vectoriel normé.

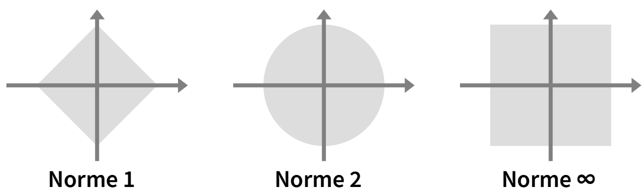
Les exemples.

Voici quelques normes qu'on peut définir sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Dans le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on se restreint pour chaque norme, au s.e.v. sur lequel elle est définie (par exemple, l^∞ pour la norme ∞ est le s.e.v. des suites bornées).

	Norme 1	Norme 2	Norme ∞
$\mathbb{R}^n$	$\lvert x_1\rvert+\ldots+\lvert x_n\rvert$	$(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$	$\max(\lvert x_1\rvert, \ldots, \lvert x_n\rvert)$
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\Sigma_{n\in\mathbb{N}} \lvert x_n\rvert$	$(\Sigma_{n\in\mathbb{N}} x_n^2)^{1/2}$	$\sup_{n\in\mathbb{N}} \lvert x_n\rvert$
$\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$	$\max\limits_{x\in[0,1]} \lvert f(x)\rvert$	$\int_0^1 \lvert f(x)\rvert\, \mathrm{d}x$	$\left(\int_0^1 f(x)^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}$

Les boules (1).

Dans un EVN $(E, \|\cdot\|)$, on définit la boule ouverte de centre x et rayon r, comme $B(x,r) = \{y\in E : \|x-y\|<r\}$, et la boule fermée de centre x et rayon r comme $\overline{B}(x,r) = \{y\in E : \|x-y\|\leq r\}$.



Les limites (1).

Dans un EVN $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'une suite (x_n) de E converge vers $x\in E$ si $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\geq 0$, $\forall n\geq N$, $\|x_n-x\|<\varepsilon$; ce qu'on note $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (ou $x_n\to x$).

L'équivalence des normes.

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un même espace vectoriel E sont équivalentes si : pour toute suite (x_n) de E, (x_n) converge vers $x\in E$ pour $\|\cdot\|$ *ssi* elle converge vers $x\in E$ pour $\|\cdot\|'$. En particulier, toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}^n$) sont équivalentes.

La continuité (1).

Notre première définition de continuité est : pour $f:E\to F$ (avec $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux EVN), on dit que f est continue en un point x de E si

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall y\in E, (\|x-y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F < \varepsilon)$$

Et donc, f est continue sur E si elle est continue en tout point de E. Une caractérisation de la continuité, utilisant les suites, est que f est continue en $x\in E$ *ssi* on a, pour tout suite (x_n) de E avec $\lim x_n = x$, $\lim f(x_n) = f(x)$.

Les espaces métriques.

Un type plus général d'espace est donnée par les espaces métriques : un ensemble X, muni d'une application distance $d:X\times X\to\mathbb{R}^+$ qui satisfait :
i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation);
ii) $\forall x,y\in X$, $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie);
iii) $\forall x,y,z\in X$, $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (inégalité triangulaire).
Notamment, un EVN $(E,\|\cdot\|)$ permet de fabriquer un espace métrique, en prenant $d(x,y) = \|x-y\|$ comme distance sur E. Et si on a (X,d) un espace métrique, et $Y\subseteq X$, d restreint à Y est une distance sur Y, la métrique induite par d.

Les boules (2).

Dans le cas d'espace métrique, on a $B(x,r) = \{y\in E : d(x,y)<r\}$ et $\overline{B}(x,r) = \{y\in E : d(x,y)\leq r\}$. On a notamment la propriété, pour un espace métrique, que si $x\neq y$ sont deux points distincts de X, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r)\cap B(y,r) = \varnothing$. Cette propriété fait de (X,d) un espace séparé, aussi dit de Hausdorff.

Les limites (2).

Cette fois, on dit que $(x_n)_n$ converge vers $x\in X$ si $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\geq 0$, $\forall n\geq N$, $d(x_n,x)<\varepsilon$. On peut montrer, avec la séparation, qu'une limite est unique si elle existe; c'est-à-dire que si (x_n) converge vers x et x' dans X, alors x = x'.

L'équivalence des métriques.

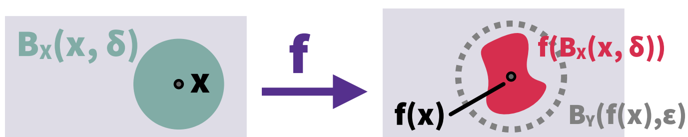
On dira que deux métriques d_1, d_2 sur un même ensemble X sont équivalentes si toute suite convergent pour d_1 l'est pour d_2, et les limites coïncident.

Les suites extraites.

Pour (x_n) une suite d'un ensemble X, la suite (y_n) est dite extraite de (x_n) si $y_n = x_{\phi(n)}$ pour une application $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante. Notamment, si (x_n) converge vers $x\in X$, alors toute suite extraite (y_n) de (x_n) converge aussi vers x. Pour une suite (x_n) d'un espace métrique (X,d), un $x\in X$ est dit valeur d'adhérence de (x_n) si il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.

La continuité (2).

On a cette fois, pour $f:X\to Y$ où (X,d_X) et (Y,d_Y) sont des espaces métriques : $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall y\in X$, $d_E(x,y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x),f(y)) < \varepsilon$. On peut reformuler le tout en termes de boules : $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $f(B_X(x,\delta))\subseteq B_Y(f(x),\varepsilon)$.



La caractérisation séquentielle marche encore pour les espaces métriques. Si on a $f:X\to Y$ et $g:Y\to Z$ entre des espaces métriques (X,d_X), (Y,d_Y) et (Z,d_Z), que f est continue en $x\in X$ et g est continue en f(x), alors $g\circ f : X\to Z$ est continue en x. Et même, si $f:X\to E$ et $g:X\to E$ sont continues en x, de (X,d_X) vers E un e.v.n., alors $\lambda\cdot f+\mu\cdot g$ est continue en x, pour tout λ et μ réels.

Les homéomorphismes.

Pour (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f:X\to Y$ est un **homéomorphisme** si f est une bijection avec f et f^{-1} continues. Par exemple, l'identité de (X,d_1) à (X,d_2) est un homéomorphisme *ssi* d_1 et d_2 sont équivalentes.

La continuité uniforme.

On dit que $f:X\to Y$ est **uniformément continue** sur X si

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x,y\in X, d_E(x,y)<\delta \Rightarrow d_F(f(x),f(y))<\varepsilon$$

C'est un changement léger dans l'ordre des quantificateurs (pour la continuité simple, le $\forall x\in X$ aurait été en premier), qui a une conséquence importante.

Les fonctions lipschitziennes.

Une fonction $f:X\text{->}Y$ entre deux espaces métriques est dite k-**lipschitzienne** pour $k>0$ si $\forall x,y\in X$, $d_F(f(x),f(y))\leq k\cdot d_E(x,y)$. Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue !

Les ouverts et fermés.

Dans un espace métrique (X,d), un sous-ensemble $V\subseteq X$ est dit **ouvert** dans X si $\forall x\in V$, $\exists\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\subseteq V$. Et une union quelconque d'ouverts de X, ou une intersection finie d'ouverts de X, donne un ouvert de X. Cela conduit à la définition d'une topologie, qu'on voit après. En attendant, un sous-ensemble F de X est un **fermé** si son complémentaire, $X\backslash F$, est un ouvert ! Notamment, toute boule ouvert est un ouvert, toute boule fermée est un fermé. On a des propriétés similaires : toute intersection quelconque de fermés, ou union finie de fermés de X, est un fermé de X.

La caractérisation séquentielle.

Pour un espace métrique (X,d), un sous-ensemble $A\subseteq X$ est un fermé de X *ssi* toute suite (x_n) de A qui convergent dans X (vers $x\in X$) a sa limite dans A.

Les topologies.

Soit un ensemble X; un ensemble τ de parties de X forme une **topologie** sur X si :

i) $\emptyset\in\tau$, $X\in\tau$.

ii) τ est stable par intersection finie : si $V_i\in\tau$ pour tout $i\in\{1, \dots n\}$, alors $V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_n\in\tau$.

iii) τ est stable par réunion quelconque : si $\{V_\alpha\}$ est une collection d'éléments de τ, alors $\cup_\alpha V_\alpha\in\tau$.

Dans ce cas-là, on appelle X (ou plus précisément, (X,τ)) un espace topologique, et les éléments de τ des (ensembles) ouverts de X. Et les éléments de la forme $X\backslash O$, avec O ouvert, sont appelés des fermés. Pour un espace métrique, l'ensemble $O(X)$ des ouverts de X forme une topologie de X, associée à la distance d.

La continuité (3).

Pour X,Y des espaces topologiques, et f une application de X vers Y, f est continue si $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X pour tout ouvert V de Y. Cette définition est globale; il existe une définition locale. D'abord, rappelons qu'un **voisinage** d'un point x est un ensemble contenant un ouvert contenant x. Alors, f est continue en un point x_0 de X si pour tout voisinage W de $f(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0, tel que $f(V)\subseteq W$. Et on a ainsi : f est continue (globalement) $\Leftrightarrow$ f est continue (localement) en tout point de X. De manière équivalente, f est (globalement) continue si $f^{-1}(F)$ est un fermé de X pour tout fermé F de Y.

L'adhérence, l'intérieur.

Pour (X,d) un espace métrique et $A\subseteq X$: **l'intérieur** de A noté $A°$ est l'union de tous les ouverts de X contenus dans A; et **l'adhérence** A (ou fermeture/clôture) est l'intersection de tous les fermés de X, contenant A. On dit que A est dense dans X, si A = X. Par cette définition, A est le plus grand ouvert de X contenu dans A; et A le plus grand fermé de X qui contient A. De plus, A est aussi l'ensemble des limites de suites de A convergent vers X.

Théorie de la mesure.

Le cadre.

On note $\overline{\mathbb{R}}$ le complété de $\mathbb{R}$; on lui a ajouté $+\infty$ et $-\infty$, et on pourrait donc écrire $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$.
On notera aussi $x_+ = \max\{0,x\} = ½(|x|+x)$ et $x_- = \max\{0,-x\} = ½(|x|-x)$. Et ainsi, pour f donné, f_+ défini par $f_+(x) = f(x)_+$ et $f_-(x) = f(x)_-$. Important : on a alors $f = f_+ - f_-$, et $|f| = f_+ + f_-$.

L'intention.

On veut construire une opération de somme « Σ_A f », qui serait la somme des f(x), $x\in A$. On voudrait se débarrasser de l'ordre des termes, et juste avoir une idée globale de somme. Pour ça : on considère d'abord les fonctions positives $f \geq 0$, et d'abord le cas où A est fini.

Le cas fini.

Dans le cas fini, on peut récupérer la somme qu'on connaît déjà, sans problèmes. On peut aussi se la reconstruire rigoureusement par récurrence, en utilisant qu'une opération somme doit satisfaire :
- $\Sigma_\emptyset f = 0$;
- quand $a\in A$ et f est nulle sur $A\setminus\{a\}$, et $f(a)\geq 0$, alors $\Sigma_A f = f(a)$;
- si $f\geq 0$ et $g\geq 0$ sur A, alors $\Sigma_A (f+g) = \Sigma_A f + \Sigma_A g$.

Par exemple, pour A = {7,8,9} et f défini par f(7) = 2, f(8) = 3 et f(9) = 4, on peut écrire $f = 2\cdot\mathbb{I}_{\{7\}}+3\cdot\mathbb{I}_{\{8\}}+4\cdot\mathbb{I}_{\{9\}}$. Par les propriétés, on a :

$$\Sigma_A f = (\Sigma_A 2\cdot \mathbb{I}_{\{7\}}) + (\Sigma_A 3\cdot \mathbb{I}_{\{8\}}) + (\Sigma_A 4\cdot \mathbb{I}_{\{9\}}) = 2 + 3 + 4 = 9$$

Le cas général positif.

Si $f\geq 0$ sur tout A, alors on définit $\Sigma_A f$ comme :

$$\sup \{\Sigma_B f, \text{ B partie finie de A}\}$$

Le cas général.

Pour f (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) quelconque, on pose :

$$\Sigma_A f = \Sigma_A f_+ - \Sigma_A f_-$$

Le cas vraiment général.

Soit E un espace vectoriel normé ; et f une application (dont le domaine contient A) à valeurs dans E ; alors on dit que f est absolument sommable si $\Sigma_A |f| < +\infty$. Mais pour vraiment définir une somme, on doit dire ceci : on notera Σ_A f le vecteur s, si il existe, qui satisfait que : pour tout $\varepsilon>0$, il existe A' fini $\subseteq$ A tel que pour tout B fini avec $A'\subseteq B\subseteq A$, on ait $|\Sigma_B f - s| < \varepsilon$. On dit alors que f est sommable.

Théorie de la mesure. σ-ALGÈBRES et MESURES

Les σ-algèbres.

Soit un ensemble X; un ensemble M de parties de X forme une σ-algèbre (ou tribu selon Bourbaki) sur X si :
i) $X \in M$.
ii) M est stable par complémentaire : si $A \in M$, alors $A^c \in M$ aussi (rappel : $A^c = X \backslash A$).
iii) M est stable par réunion dénombrable : si $A_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\cup_n A_n \in M$.
Dans ce cas-là, X (ou (X,M)) est un espace mesurable, et les éléments de M sont les ensembles mesurables de X.

Les fonctions mesurables.

De manière analogue à la continuité, pour $f:X \to Y$ d'un espace mesurable X à un espace topologique Y, on dit que f est mesurable si $f^{-1}(V)$ est mesurable dans X pour tout ouvert V de Y.

Les propriétés.

• pour $g:Y \to Z$ continue entre Y et Z des espaces topologiques : si X est un espace topologique et $f:X \to Y$ est continue, alors $h = g \circ f$ $(h:X \to Z)$ est continue; et si X est mesurable et $f:X \to Y$ est mesurable, et si $h = g \circ f$ $(h:X \to Z)$ est mesurable.
• et pour u et v des fonctions mesurables de X (espace mesurable) dans $\mathbb{R}$, et $\Phi:\mathbb{R}^2 \to Y$ continue (avec Y espace topologique), alors $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$, de X dans Y, est mesurable
• si f et g sont des fonctions mesurables (et complexes) définies sur un espace mesurable X, alors f+g et fg sont mesurables.
• pour E un ensemble mesurable, χ_E (défini par $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$ et 0 sinon) est mesurable.
• si u et v sont mesurables réelles, alors u+iv est mesurable complexe. Si f = u+iv est mesurable complexe, alors u, v et |f| sont mesurables réelles.

La σ-algèbre engendrée.

Pour une collection J quelconque de sous-ensembles de X, il existe une plus petite σ-algèbre M* dans X contenant J; on dit (parfois) que M* est la σ-algèbre engendrée par J. On peut l'obtenir comme l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant J.

Les boréliens.

Si on part d'un espace topologique X, on peut donc créer $\mathcal{B}$ la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X; les ensembles de $\mathcal{B}$ sont appelés boréliens de X. Par les propriétés d'une σ-algèbre, $\mathcal{B}$ doit contenir les ouverts, les fermés, les réunions dénombrables de fermés (qu'on note F_σ) et les intersections dénombrables d'ouverts (qu'on note G_δ). Bref, X est maintenant un espace mesurable; donc toute application continue sur X, est mesurable (au sens de Borel) sur X. Attention ! Il y a quand même des fonctions mesurables mais pas continues; c'est d'ailleurs pour ça que l'intégrale de Lebesgue est plus générale.

Les mesures positives.

Une mesure positive est une fonction μ définie sur une σ-algèbre M à valeurs dans [0, ∞], et telle que, pour tout famille dénombrable d'éléments disjoints de M, on ait $\mu(\cup_i A_i) = \Sigma_i \mu(A_i)$; propriété d'additivité dénombrable. Et on impose que $\mu(A) < \infty$ pour au moins un élément A de M. Mais il peut quand même y avoir des ensembles de mesure infinie. Dans ce cas, on a :
a) $\mu(\emptyset) = 0$
b) $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$ si $A_1, \ldots A_n$ sont disjoints.
c) si $A \subseteq B$ avec $A,B \in M$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
d) $\mu(A_n) \to \mu(A)$ lorsque $n \to \infty$ avec $A = \cup_n A_n$, avec tous $A_n \in \mathscr{M}$, et $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$
e) $\mu(An) \to \mu(A)$ lorsque $n \to \infty$ avec $A = \cap_n A_n$, avec tous $A_n \in \mathscr{M}$, et $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, si $\mu(A_1) < \infty$.

Les exemples.

- pour un ensemble X, pour tout sous-ensemble E, on pose μ(E) = card(E) si E est fini, et μ(E) = +∞ sinon. C'est la mesure dite de dénombrement.
- en se fixant $x_0 \in X$, on pose $\mu(E) = 1$ si $x_0 \in E$, $\mu(E) = 0$ sinon, pour tout sous-ensemble E de X. C'est la mesure de Dirac centrée en x_0.

Les ensembles négligeables.

On appelle ensemble de mesure nulle, ou négligeable, un sous-ensemble B de X tel que $B \subseteq A$ pour un $A \in M$ avec $\mu(A) = 0$. C'est en ce sens qu'on emploie l'adverbe "presque" en mathématiques. Ainsi, "presque partout" signifie "partout sauf sur un ensemble négligeable"; "presque sûrement" signifie "presque partout dans l'univers", c'est-à-dire "pour tout évènement de l'univers, à part pour un ensemble négligeable d'évènements".

Les mesures complètes.

Une mesure est dite complète si tout ensemble négligeable pour cette mesure, appartient à la σ-algèbre sur laquelle elle est définie. On peut ainsi compléter une σ-algèbre M munie d'une mesure μ, en ajoutant tout les sous-ensembles E de X tels que $A \subseteq E \subseteq B$ avec A et B dans M, et $\mu(A) = \mu(B)$; dans ce cas, il faudra poser que $\mu(E) = \mu(A)$. On notera M* la σ-algèbre complétée.

Théorie de la mesure. MESURE de LEBESGUE

Le problème.

On veut définir une mesure particulière qui est une des plus utilisées, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$. Selon les auteurs, la définition est implicite (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$ est la seule mesure telle que …), ou explicite (on pose cette mesure, qui se trouve satisfaire …). Voici les deux.

Les pavés de $\mathbb{R}^k$.

Un pavé de $\mathbb{R}^k$ est un ensemble de la forme (où pour tout i on a $a_i \leq b_i$) : $W = \{(x_1, \ldots x_k) : a_i<x_i<b_i \ \forall i\in\{1,\ldots,k\}\}$, où on peut remplacer n'importe quels < par des ≤. Son volume vol(W) est alors défini comme $(b_1 - a_1)\times\ldots\times(b_k - a_k)$. (Ou plutôt hypervolume ; pour k = 2, ça correspond à l'aire.)

La définition implicite.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est la seule mesure m positive et complète sur une σ-algèbre M de $\mathbb{R}$, telle que : m(I) = sup I - inf I pour tout intervalle borné I de $\mathbb{R}$ (par exemple, m([a,b]) = m(]a,b[) = b-a); M contient tous les boréliens de $\mathbb{R}$, et plus précisément, $E\in M$ *ssi* $A\subseteq E\subseteq B$, A et B boréliens (A un F_σ et B un G_δ) et m(B-A) = 0 ; et m est invariante par translation, c'est-à-dire que m(E) = m(E+x) pour tout x, et tout E dans M. Dans le cas de $\mathbb{R}^k$, la première condition devient : pour tout pavé W, on demande à ce que m(W) = vol(W).

La mesure extérieure.

Revenons à R, où on pose ℓ(]a,b[) = b-a. Pour E partie quelconque de R, on définit ν(E) comme

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k) : I_1, I_2, \cdots \text{ intervalles ouverts tels que } A\in\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

C'est une mesure dite extérieure sur R. Elle possède plein de bonnes propriétés : ν est invariante par translation : ν(E+x) = ν(E) ; ν conserve l'ordre : ν(A)≤ν(B) quand $A\subseteq B$; ν(A) = 0 si A est fini ou dénombrable, etc.

La définition explicite.

On peut partir de la σ-algèbre de Borel, muni d'une mesure qui est définie comme la mesure extérieure restreinte à cette algèbre, qu'on complète, pour obtenir une σ-algèbre de Lebesgue et une mesure de Lebesgue dessus. On peut aussi ne garder que les parties A de R telles que $\nu(S) = \nu(A\cap S) + \nu(A^c\cap S)$ pour toute partie S de R; l'ensemble obtenu est en fait une σ-algèbre, sur laquelle la mesure extérieure donne une mesure de Lebesgue.

Théorie de la mesure.

Les fonctions étagées.

Une fonction qui va d'un espace mesurable, à un sous-ensemble fini des complexes est dite fonction étagée. On peut toujours l'écrire comme : $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$
où χ_{A_i} est la fonction indicatrice de A_i ($\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$, 0 sinon). Une telle fonction est mesurable si tous les Ai le sont. Notamment, on peut approximer toute fonction mesurable f à valeurs dans $[0,\infty]$ par une suite de fonctions mesurables étagées s_n, avec $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ et $s_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$.

L'intégrale de fonctions positives.

Pour une fonction étagée $s = \Sigma_i \alpha_i \chi_{A_i}$, on définit son intégrale sur E comme

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

, où $0 \cdot \infty$ est posé comme 0 (si jamais $\alpha_i = 0$ mais $\mu(A_i \cap E) = +\infty$). Alors, pour définir l'intégrale d'une fonction mesurable positive, on pose $\int_E f \, d\mu = \sup \int_E s \, d\mu$, où le sup est pris sur s, qui parcourt l'ensemble des fonctions mesurables étagées avec $0 \leq s \leq f$.

Les propriétés.

On déduit de nombreuses propriétés de cette définition.
a) Si $0 \leq f \leq g$, alors $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.
b) Si $A \subseteq B$ et $f \geq 0$, alors $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.
c) Si $f \geq 0$ et c une constante ($0 \leq c \leq \infty$), alors $\int_E c \cdot f \, d\mu = c \cdot \int_E f \, d\mu$.
d) Si $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$, $\int_E f \, d\mu = 0$ (même si $\mu(E) = \infty$).
e) Si $\mu(E) = 0$, alors $\int_E f \, d\mu = 0$ même si $f(x) = \infty$ pour tout $x \in E$.
f) Si $f \geq 0$, alors $\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$.

Le théorème de convergence monotone.

Pour une suite croissante de parties $(A_n)_n$ de X (c'est-à-dire $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$), on a vu que $\mu(\cup_n A_n) = \sup_n \mu(A_n)$. On a un théorème semblable pour les fonctions : si (un)n est une suite croissante de fonctions mesurables positives sur X, et qu'elle converge simplement vers une fonction f (sur tout X), alors $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$.
Autrement dit, $\int \sup_n u_n \, d\mu = \sup_n \int u_n \, d\mu$.
Ce théorème, dit de convergence monotone, et aussi nommé théorème de Beppo Levi.

Le lemme de Fatou.

Pour $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives sur X, on a

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Le cas général.

On s'intéresse aux fonctions mesurables complexes sur X, telles que $\int_X |f| \, d\mu < \infty$; dites fonctions intégrables au sens de Lebesgue par rapport à la mesure μ (ou fonctions sommables), elles forment un espace dénoté $\mathcal{L}^1(\mu)$. Et pour $f = u+iv$ dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, on définit pour tout ensemble mesurable E de X, l'intégrale $\int_E f \, d\mu$ comme

$$\int_E u_+ \, d\mu - \int_E u_- \, d\mu + i\int_E v_+ \, d\mu - i\int_E v_- \, d\mu$$

Dans le cas d'une fonction à valeurs dans R, cela se résume à $\int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu$; on peut même poser cette définition pour toute fonction f telle qu'un des termes $\int_E f_+ \, d\mu$ ou $\int_E f_- \, d\mu$ soit fini. On peut généraliser cette définition aux fonctions vectorielles (à valeurs dans R^k).

Les propriétés.

Dans le cas de fonctions complexes/vectorielles, les propriétés c), d), e) et f) gardent du sens (en enlevant $f \geq 0$ quand il le faut). En plus, on a aussi :
- si $f \in L^1(\mu)$, $|\int_X f \, d\mu| \leq \int_X |f| \, d\mu$; avec égalité *ssi* $f = \alpha|f|$ pour une certaine constante α.
- si $f : X \to [0,\infty]$ est mesurable, et $E \in M$ et $\int_E f \, d\mu = 0$, alors $f = 0$ presque partout sur E.
- si $f \in L^1(\mu)$ et $\int_E f \, d\mu = 0$ pour tout $E \in M$, alors $f = 0$ presque partout sur X.

La convergence dominée.

Soit donc une suite $(f_n)_n$ de fonctions complexes mesurables sur X convergent simplement vers f(x), et telle qu'il existe $g \in L^1(\mu)$ avec $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout n et x. Alors $f \in L^1(\mu)$, et $\lim_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$, et donc $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Théorie de la mesure.

Les espaces de probabilité.

La définition classique d'un espace de probabilité utilise un ensemble (l'univers), une tribu sur cet ensemble (famille d'évènements), et une fonction de cette tribu, dans [0,1], appelée probabilité. C'est en fait un espace mesurable (Ω, A) muni d'une mesure $\mathbb{P}$, qui satisfait $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (d'ailleurs, « espace mesurable » correspond à ce qu'on appellerait « espace probabilisable ».

Le détail.

Pour rappel, on demande comme propriétés d'un espace de probabilité : si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$; donc en général, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$; où plus généralement, pour toute suite $(A_n)_n$ de parties de Ω (deux-à-deux) disjointes, $\mathbb{P}(\cup_n Ab) = \Sigma_n \mathbb{P}(A_n)$. On a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$; si $A \subseteq B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. Toute ces propriétés se déduisent du fait que P est une mesure avec $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Le vocabulaire.

Base :
- issue : $\omega \in \Omega$; évènement : $A \in A$;

Évènements particuliers :
- réalisation de l'évènement A et de l'évènement B : $A \cap B$;
- réalisation de l'évènement A ou de l'évènement B : $A \cup B$;
- non-réalisation de l'évènement A : A^c.

Types d'évènements :
- évènement impossible : $\varnothing$; évènement certain : Ω;
- implication de B par A : $A \subseteq B$.
- évènements incompatibles : $A \cap B = \varnothing$.

Les boréliens.

Pour le cas continu, on utilisera la tribu borélienne plutôt que celle complète de Lebesgue ; dans le cadre du cours, ce n'est pas très important. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne (pour rappel, la tribu engendrée par les ouverts]a,b[de $\mathbb{R}$).

Les variables aléatoires.

Pour $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on appelle variable aléatoire une application $X: \Omega \to R$ si pour tout B de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \in A$. Plus généralement, une variable aléatoire est juste une fonction mesurable, d'un espace probabilisé vers un espace mesurable; dans le cas continu par exemple, l'espace mesurable est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Les mesures de probabilité.

Dans le cas discret où Ω est fini ou dénombrable, une densité discrète est une fonction $\Omega \to [0,1]$ avec $\Sigma_{\omega \in \Omega}\, p(\omega) = 1$; et toute densité discrète donne une probabilité sur Ω, en posant $A \mapsto \Sigma_{\omega \in A} p(\omega)$. Dans le cas continu, on peut pareillement construire une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ en utilisant une fonction positive d'intégrale 1.

Le cas des v.a.

Si X est une variable aléatoire, on peut poser une mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ par $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X=E)$ pour tout $E \in A$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$) dans le cas continu).