1^{st} Order Linear Ordinary Differential Equation

HuStar

2020.07.

이성윤

1st Order Linear ODE + Constant Input

- 기본식: 1차 선형 미분방정식 + 상수 입력(step input)

$$a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t) = A$$

Homogeneous & Particular Solutions

- Homogeneous Solution x_h
  - 입력을 0으로 두고 해를 구하여, 입력에 상관없는 시스템의 고유한 응답 형태를 구함

$$a_1\dot{x}_h + a_0 x_h = 0$$

$$\frac{1}{x_h}\dot{x}_h = -\frac{a_0}{a_1}$$

$$\frac{d}{dt}(ln x_h) = -\frac{a_0}{a_1}$$

$$\therefore x_h(t) = e^{-\frac{a_0}{a_1}t+C} = Ke^{-\frac{a_0}{a_1}t} = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Homogeneous & Particular Solutions

- Particular Solution x_p
  - 특정 입력에 대한 시스템의 응답 형태를 구함

$$a_1\dot{x}_p + a_0 x_p = A$$

$$\therefore x_p(t) = \frac{A}{a_0}$$

- Total Solution = Homogeneous + Particular (Superposition)

$$x(t) = x_h + x_p = Ke^{-\frac{a_0}{a_1}t} + \frac{A}{a_0}$$

Homogeneous & Particular Solutions

- Initial Value Problem
  - 초기 조건을 대입하여 미지수 K를 구하고 시스템의 응답을 확정함

$$x(t=0) = x_o = Ke^{-\frac{a_0}{a_1}*0} + \frac{A}{a_0} = K + \frac{A}{a_0}$$

$$\therefore K = x_0 - \frac{A}{a_0}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)e^{-\frac{a_0}{a_1}t} + \frac{A}{a_0} = (x_0 - x_\infty)e^{-\frac{a_0}{a_1}t} + x_\infty$$

  - Homogeneous: 시간이 지나면 0으로 수렴 → 시스템의 transient response
  - Particular: 시간이 지나면 일정 값에 수렴 → 시스템의 steady-state response

Zero-input & Zero-state Response

- Zero-input Response x_{zi}
  - 외부입력을 제외한 초기조건에 대한 시스템의 응답을 구함

$$a_1\dot{x}_{zi} + a_0x_{zi} = 0, \quad x(t=0) = x_0$$

$$x_{zi}(t) = Ke^{-\frac{a_0}{a_1}t}, \quad x(t=0) = x_0$$

$$\therefore x_{zi}(t) = x_0e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$$

Zero-input & Zero-state Response

- Zero-state Response x_{zs}
  - 초기조건을 제외한 외부입력에 대한 시스템의 응답을 구함 (initially relaxed condition)

$$a_1\dot{x}_{zs} + a_0x_{zs} = A, \quad x(t=0) = 0$$

$$Laplace\ transform \downarrow$$

$$a_1\{sX_{zs} - x(0)\} + a_0X_{zs} = \frac{A}{s}$$

$$X_{zs} = \frac{A}{s} \times \frac{1}{a_1s + a_0} = \frac{A}{a_1} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

$$inverse\ Laplace\ transform \downarrow$$

$$\therefore x_{zs}(t) = \frac{A}{a_1}\int_0^t e^{-\frac{a_0}{a_1}y}\,dy = \frac{A}{a_0}\left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right)$$

Zero-input & Zero-state Response

- Total solution = Zero-input + Zero-state (Superposition)

$$x(t) = x_{zi} + x_{zs} = x_0 e^{-\frac{a_0}{a_1}t} + \frac{A}{a_0}\left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) = x_0\left(e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) + x_\infty\left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right)$$

  - Zero-input: 시스템의 initial value only response (초기값은 시간이 지나면 0으로 수렴해 사라짐)
  - Zero-state: 시스템의 external input only response (외부 입력은 시간이 지나면 일정 값에 수렴함)

Solution of 1st Order Linear ODE

- 두 풀이 방식으로 얻은 답이 동일
  - Homogeneous & Particular: $(x_0 - x_\infty)e^{-\frac{a_0}{a_1}t} + x_\infty$
  - Zero-input & Zero-state: $x_0\left(e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) + x_\infty\left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right)$
- τ(time constant)의 부호와 크기에 따라 수렴/발산 특성 결정

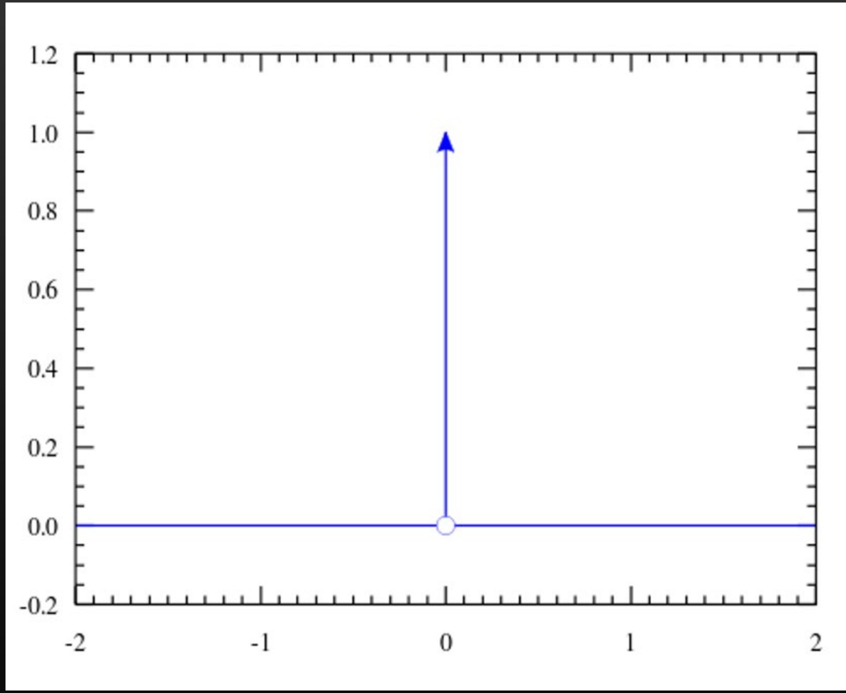
$\tau = \frac{a_1}{a_0}$, $e^{-\frac{t}{\tau}}$		Sign	
		Negative	**Positive**
Magnitude	Small	Fast \ growth	Fast \ decay
	Big	Slow \ growth	Slow \ decay

Impulse Response의 경우?

- 외부 입력이 Dirac delta function일 때?

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$



Impulse Response의 경우?

- Zero-input Response x_{zi}

$$x_{zi}(t) = x_0 e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$$

- Zero-state Response x_{zs}

$$a_1\dot{x}_{zs} + a_0 x_{zs} = \delta(t), \quad x(t=0) = 0$$

$$Laplace\ transform \downarrow$$

$$a_1\{sX_{zs} - \cancel{x(0)}\} + a_0 X_{zs} = 1$$

$$X_{zs} = \frac{1}{a_1 s + a_0} = \frac{1}{a_1} \times \frac{1}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

$$inverse\ Laplace\ transform \downarrow$$

$$x_{zs}(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$$

Impulse Response의 경우?

- Zero-state response x_{zs}는 초기조건이 $x_0 = \frac{1}{a_1}$인 zero-input response x_{zi}와 같음
- Zero-input response x_{zi}는 외부입력이 $f(t) = a_1 x_0 \delta(t)$인 zero-state response x_{zs}와 같음
- 시스템의 초기조건 x_0은 마치 $t = 0$에서 순간적인(impulse) 외부 입력과 같음

Summary

- Zero-input은 본질적으로 zero-state와 동일하며 반드시 0으로 수렴하므로, zero-state만 다루어도 시스템을 모델링 할 수 있음
- 입력이 $\delta(t)$일 때, 즉 impulse input의 zero-state response를 impulse response라고 함
- Impulse respons의 라플라스 변환을 transfer function이라고 함
  - Impulse response: $h(t)$
  - Transfer function: $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$

Example 1

- 다음 일차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자

$$2\frac{dx}{dt} + x = 3, \qquad x(t = 0) = 5$$

  - 함수 dsolve, eval 활용

Example 2

- 다음 일차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자

$$\frac{dx}{dt} + 4x = \delta(t), \qquad x(t = 0) = 0$$

  - 함수 ilaplace 활용