# Transfer Function

HuStar

2020.07.

이성윤

# 전달함수의 정의

- 시스템에 impulse 입력을 주었을 때, 출력인 impulse response $h(t)$ 를 라플라스 변환한 것

$$input, \qquad \delta(t) \; \rightarrow \; output, \qquad h(t)$$

$$transfer\ function, \qquad H(s) = \mathcal{L}[\, h(t)\, ]$$

# 전달함수의 정의

- 출력과 입력의 라플라스 변환의 비율 (초기값이 모두 0, 'initially relaxed')

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (convolution)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \int_{t=0}^{\infty} y(t)e^{-st}dt$$

$$Y(s) = \int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\} e^{-s(t-\tau+\tau)}dt$$

$$Y(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau} \left\{ \int_{t=0}^{\infty} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt \right\} d\tau$$

# 전달함수의 정의

$$\int_{t=0}^{\infty} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt = \int_{x=-\tau}^{\infty} h(x)e^{-sx}dx = \int_{x=0}^{\infty} h(x)e^{-sx}dx = H(s)$$

$$\therefore Y(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau}H(s)d\tau = H(s)\int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)U(s)$$

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

$$\therefore transfer\ function, \qquad H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}[output]}{\mathcal{L}[input]}\bigg|_{all\ initial\ condtions=0}$$

# Example 1

- Initially relaxed 시스템의 입출력 미분방정식이 다음과 같을 때,

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t) = \dot{u}(t) - 2u(t)$$

- 위 미분방정식의 전달함수를 구해보자

# 전달함수의 다항식 형태

$$H(s) = \frac{b_1 s^M + b_2 s^{M-1} + \cdots + b_{M+1}}{a_1 s^N + a_2 s^{N-1} + \cdots + b_{N+1}}$$

- 분모와 분자의 차수에 따라서 다음과 같이 구분함
  - $H(s)\ is\ improper \quad \leftrightarrow \quad M > N \quad \leftrightarrow \quad H(\infty) = \pm\infty$
  - $H(s)\ is\ biproper \quad \leftrightarrow \quad M = N \quad \leftrightarrow \quad H(\infty) = nonzero\ constant$
  - $H(s)\ is\ proper \quad \leftrightarrow \quad M \leq N \quad \leftrightarrow \quad H(\infty) = constant$
  - $H(s)\ is\ strictly\ proper \quad \leftrightarrow \quad M < N \quad \leftrightarrow \quad H(\infty) = 0$
- 이론, 실전에서 다루는 대부분의 전달함수는 (strictly) proper한 유리함수

# 극점과 영점

- 극점
  - $|H(s)| = \infty$를 만족하는 $s = p$
  - 전달함수의 분모를 0으로 만드는 s
- 영점
  - $H(s) = 0$를 만족하는 $s = z$
  - 전달함수의 분자를 0으로 만드는 s
- 분모 다항식을 특별히 특성방정식(characteristics equation)이라 함
- 특성방정식을 0으로 두고 s를 구하면 극점을 구하는 것과 같음

# 전달함수의 극점, 영점, 이득 형태

$$H(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)} = \frac{K \prod_{i=1}^{M}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

- 다항식 형태의 일반식을 인수 분해하여 극점, 영점, 이득으로 표현
- 극점 P와 영점 Z는 복소수로 복소평면(complex plane)에 위치
- 이득 K는 실수

# Example 2

- 다음 전달함수를 극점, 영점, 이득 형태로 표현하고, 복소평면 상에 극점과 영점 표시해보자 (함수 zpkdata, pzmap)

$$H(s) = \frac{s-2}{2s^2+3s+5}$$

# 극점과 시스템 응답

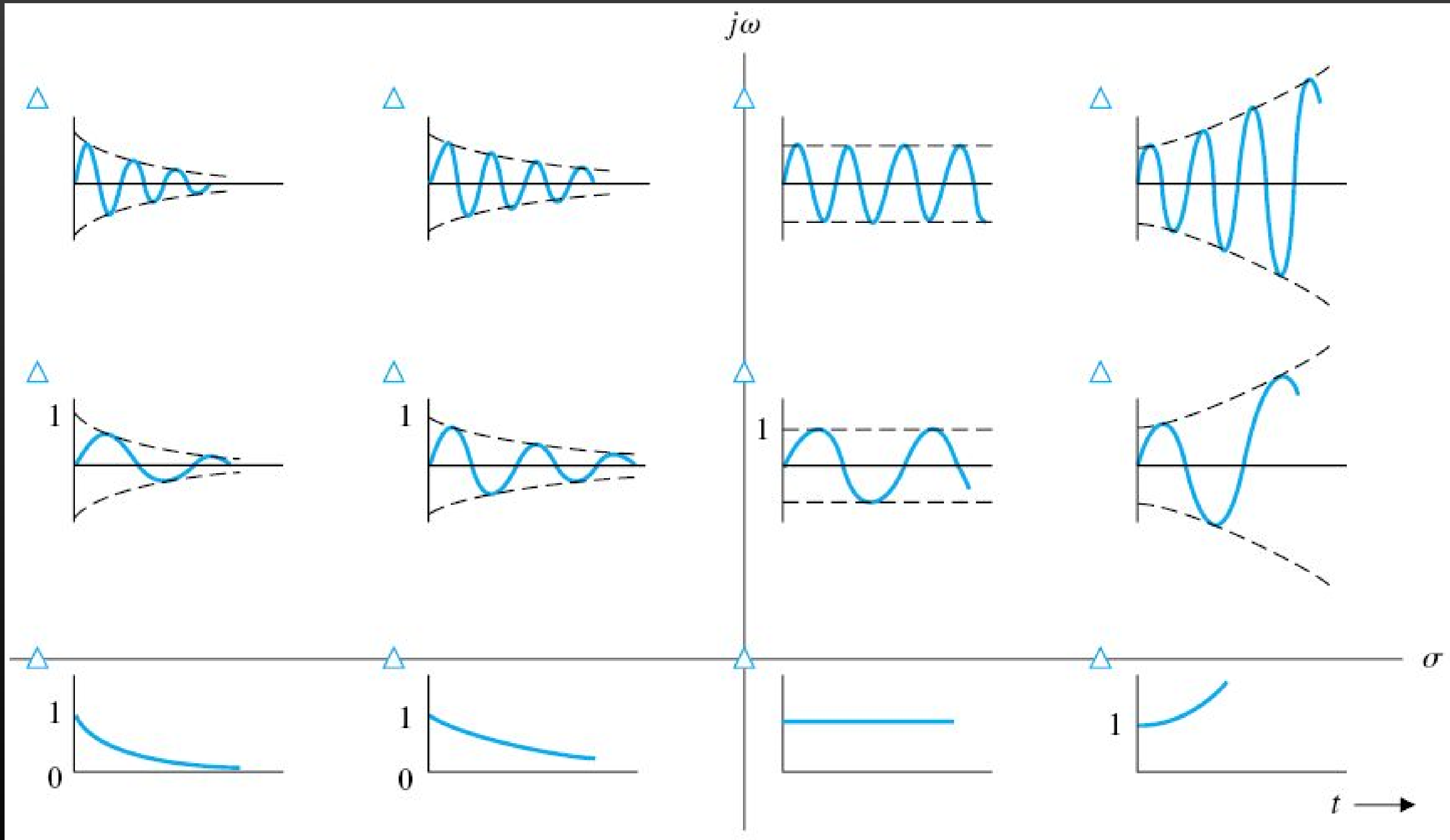
- 전달함수에서 분모인 특성방정식$(characteristics\ equation) = 0$을 풀어 극점을 구하는데, 이는 이전에 살펴본 미분방정식의 해인 $x = Ke^{st}$에서 s를 구하는 것과 같음
- $s = \sigma \pm j\omega$ 로 실수 부분과 허수 부분으로 구성되었고, 이 때 $\sigma$는 크기에 따라 수렴/발산, 부호에 따라 빠름/느림 특성을 결정했고, $\omega$는 크기에 따라 진동의 주파수 특성을 결정함

| $\sigma$ | | Sign | | $\omega = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | Negative | Positive | |
| **Magnitude** | Big | Fast \ decay | Fast \ growth | High freq. |
| | Small | Slow \ decay | Slow \ growth | Low freq. |

Transfer Function

# 극점과 시스템 응답

- x축이 실수부, y축이 허수부인 복소평면에서 극점의 위치에 따라 시스템의 응답이 결정됨
  - Right Half Plane: unstable, diverge
  - On y-axis: marginally stable, constant amplitude
  - On y-axis (repeated): unstable, diverge
  - Left Half Plane: stable, converge



# 극점과 시스템 응답

- LTI 시스템인 proper 전달함수 H(s)는 모든 극점의 실수부가 음수이면 stable 시스템
  - 모든 극점이 LHP에 속한다는 것과 동일한 의미
- LTI 시스템의 impulse response h(t)는 t→∞ 일 때 h(t)→0를 만족하면 BIBO stable
  - BIBO stable에서 BIBO란 bounded input-bounded out으로, 입력의 크기가 유한할 때 출력의 크기도 유한한 경우를 의미

# Example 3

- 극점의 위치에 따른 step response를 살펴보자

$$H_1(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

$$H_2(s) = \frac{10}{(s+10)}$$

$$H_3(s) = \frac{100}{(s+10)(s+10)}$$

$$H_4(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

- 네개의 response를 겹쳐서 그려보자

# Example 4

- 극점의 위치에 따른 step response를 살펴보자

$$H_5(s) = \frac{1}{(s+1)(s+i)(s-i)}$$

$$H_6(s) = \frac{1}{(s+1)(s+i)^2(s-i)^2}$$

- 앞서 그렸던 H1(s)를 포함하여 세개의 response를 겹쳐서 그려보자

# 영점과 시스템 응답

- 영점은 zero-input의 응답과 같이, 시간이 지나면 0으로 수렴하여 사라지는 transient response에 해당하여, 초기 응답에만 관여할 뿐 시스템 전체에 미치는 영향이 크지 않음
- 시스템의 응답속도와 정상상태(steady-state)는 주로 극점에 의하여 결정됨
- 극점은 미분방정식의 해($Ke^{\sigma t}$)에서 지수 부분을 결정하며, 영점은 각 항의 계수를 결정함

# Example 5

- 영점의 위치에 따른 step respons를 살펴보자

$$H_1(s) = \frac{180}{(s+1)(s+2)^2(s+0.5+j4)(s+0.5-j4)}$$

$$H_2(s) = \frac{60(s+3)}{(s+1)(s+2)^2(s+0.5+j4)(s+0.5-j4)}$$

$$H_3(s) = \frac{-20(s+3)(s-3)}{(s+1)(s+2)^2(s+0.5+j4)(s+0.5-j4)}$$

$$H_4(s) = \frac{-12(s-3)(s+1+j2)(s+1-j2)}{(s+1)(s+2)^2(s+0.5+j4)(s+0.5-j4)}$$

- 네개의 시스템의 pole-zero map을 그려보고, step response를 겹쳐서 그려보자