

Bode Plot

HuStar

2020.07.

이성윤

주파수 응답

- 다음과 같은 2차 LTI 시스템에 사인파의 입력이 들어온다면,

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t) = A \sin(\omega t)$$

- 미분방정식의 해는 아래와 같음

$$x(t) = x_h + x_p = (B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}) + (B_3 \sin(\omega t) + B_4 \cos(\omega t))$$

$$x(t) = (B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}) + B \sin(\omega t + \phi)$$

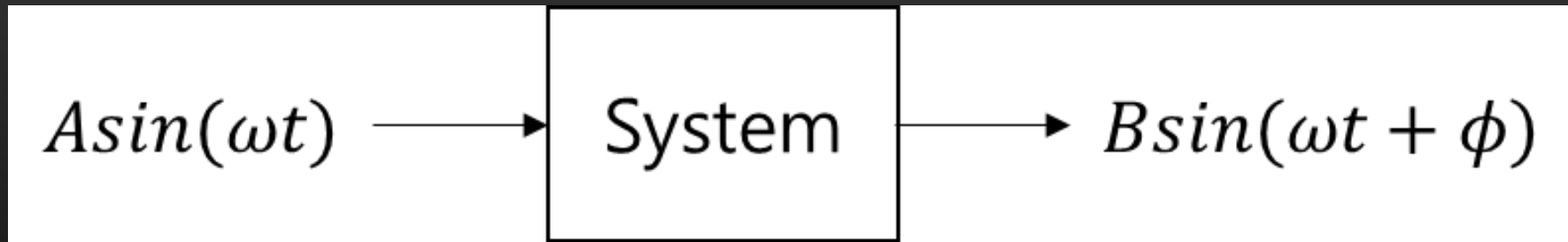
주파수 응답

- 앞의 homogeneous solution은 transient response로 안정한 시스템인 경우 시간이 지나면 0으로 수렴하기 때문에 steady-state response에 관심이 있다면 무시할 수 있음
- 정상상태에서 사인파의 입력에 대한 시스템의 응답은 다음과 같이 나타남

$$x_{ss}(t) = B\sin(\omega t + \phi)$$

주파수 응답

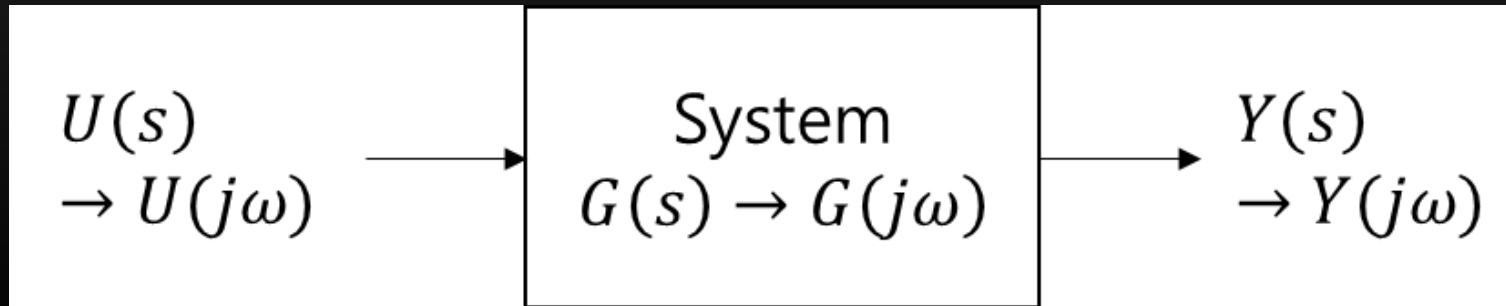
- 사인파 입력에서 출력은 입력의 주파수를 보존하되, 크기와 위상을 바꿈



- 입력 주파수 ω 에 대해 출력의 크기 B 와 위상 ϕ 을 구할 수 있다면, 임의의 입력으로 무수한 주파수를 갖는 사인파의 조합(=결과적으로 모든 신호)이 들어와도 시스템의 출력을 쉽게 예상할 수 있음(=시스템 모델링 완료)

전달함수와 주파수 응답

- 전달함수의 경우, 전달함수 자체가 zero-state response(입력에 대한 출력만 존재)로 정의되어 있음
 - Homogeneous solution이 이미 제거된 형태
- s 는 수렴과 진동의 특징을 모두 포함하는 $s = \sigma + j\omega$ 의 형태이지만, $\sigma = 0$ 으로 두어 출력의 transient response를 무시한 후 $s = j\omega$ 를 전달함수에 대입하면 입력에 대한 시스템의 steady-state 출력을 관찰하는 것과 동일함

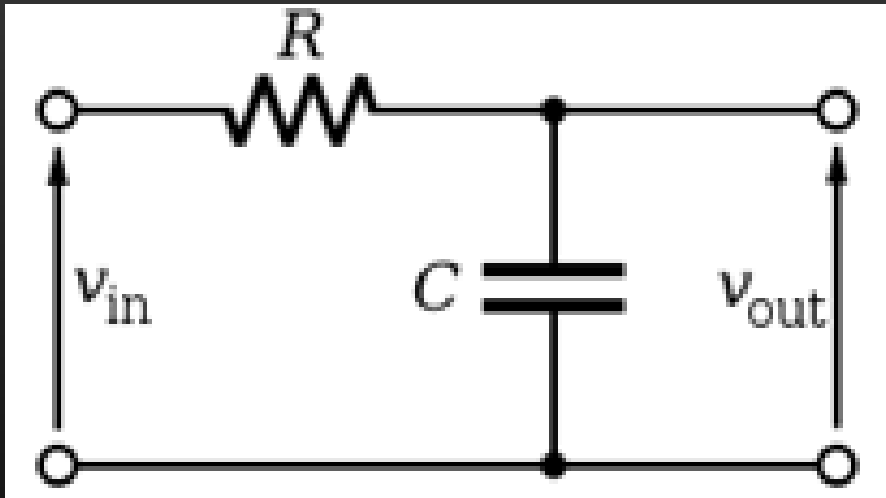


전달함수와 주파수 응답

- 전달함수에 $s = j\omega$ 를 대입하면 실수부와 허수부가 생기며, 2차원 복소평면에서 해당 전달함수가 갖는 크기와 위상을 계산할 수 있음
 - 곱하기는 크기에서 곱셈, 위상에서 덧셈
 - 나누기는 크기에서 나눗셈, 위상에서 뺄셈

예시 $G(s)$	$3s + 1$	$\frac{1}{s + 2}$	$\frac{s - 1}{2s + 1}$
$G(j\omega)$	$j3\omega + 1$	$\frac{1}{j\omega + 2}$	$\frac{j\omega - 1}{j2\omega + 1}$
크기/Magnitude $ G(j\omega) $	$\sqrt{(3\omega)^2 + 1^2} = \sqrt{9\omega^2 + 1}$	$\frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{(\omega)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$	$\frac{\sqrt{(\omega)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{(2\omega)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{4\omega^2 + 1}}$
위상/Phase $\angle G(j\omega)$	$\tan^{-1}\left(\frac{3\omega}{1}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{1}\right)$

예시: 1차 수동 저주파 통과 필터



$$C \frac{d}{dt} v_{out}(t) + \frac{v_{out}(t) - v_{in}(t)}{R} = 0$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_i(s)$$

$$\therefore \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = G(s) = \frac{1}{sRC + 1} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

예시: 1차 수동 저주파 통과 필터

- 크기

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega RC + 1} \right| = \frac{|1|}{|j\omega RC + 1|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}} = \frac{|V_o(j\omega)|}{|V_i(j\omega)|}$$

$$\therefore |V_o(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}} \cdot |V_i(j\omega)|$$

- $\omega = 2\pi f$ 이므로, 주파수가 높은 입력이 들어오면 크기가 감소되어 출력 RC 의 크기를 알맞게 설계하여 입력 주파수 ω 에 따른 출력의 크기를 조절

예시: 1차 수동 저주파 통과 필터

- Case 1: $\omega \rightarrow 0$ or $f \rightarrow 0$ (저주파)

$$|G(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{(0 \cdot RC)^2 + 1^2}} = 1$$
$$\therefore |V_o| \approx |V_i|$$

- 출력의 크기가 입력과 같음

- Case 2: $\omega = \frac{1}{RC}$ or $f = \frac{1}{2\pi RC}$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC} \cdot RC\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore |V_o| = \frac{1}{\sqrt{2}} |V_i|$$

- 출력의 크기가 0.707배로 감소

- Case 3: $\omega \rightarrow \infty$ or $f \rightarrow \infty$ (고주파)

$$|G(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{(\infty \cdot RC)^2 + 1^2}} = 0$$
$$\therefore |V_o| \approx 0$$

- 출력의 크기가 0으로 수렴

예시: 1차 수동 저주파 통과 필터

- 위상

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= \angle \frac{1}{j\omega RC + 1} = \angle 1 - \angle(j\omega RC + 1) = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega RC}{1}\right) \\ &= -\tan^{-1}(\omega RC)\end{aligned}$$

$$\therefore \angle V_o(j\omega) = \angle V_i(j\omega) - \tan^{-1}(\omega RC)$$

- $\omega = 2\pi f$ 이므로, 주파수가 높은 입력이 들어오면 위상이 뒤쳐져서 출력 RC 의 크기를 알맞게 설계하여 입력 주파수에 따른 출력의 위상을 조절

예시: 1차 수동 저주파 통과 필터

- Case 1: $\omega \rightarrow 0$ or $f \rightarrow 0$
 $\angle G(j\omega) \approx -\tan^{-1}(0 \cdot RC) = 0^\circ$
 $\therefore \angle V_o(j\omega) \approx \angle V_i(j\omega)$
 - 출력의 위상이 입력과 같음
- Case 2: $\omega = \frac{1}{RC}$ or $f = \frac{1}{2\pi RC}$
 $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{RC} \cdot RC\right) = -45^\circ$
 $\therefore \angle V_o(j\omega) = \angle V_i(j\omega) - 45^\circ$
 - 출력의 위상이 입력에 45도 뒤쳐짐
- Case 3: $\omega \rightarrow \infty$ or $f \rightarrow \infty$
 $\angle G(j\omega) \approx -\tan^{-1}(\infty \cdot RC) = -90^\circ$
 $\therefore \angle V_o(j\omega) = \angle V_i(j\omega) - 90^\circ$
 - 출력의 위상이 입력에 90도 뒤쳐짐

예시: 1차 수동 저주파 통과 필터

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}} \quad \omega \rightarrow 0 \text{ or } f \rightarrow 0 \quad \omega = \frac{1}{RC} \text{ or } f = \frac{1}{2\pi RC} \quad \omega \rightarrow \infty \text{ or } f \rightarrow \infty$$

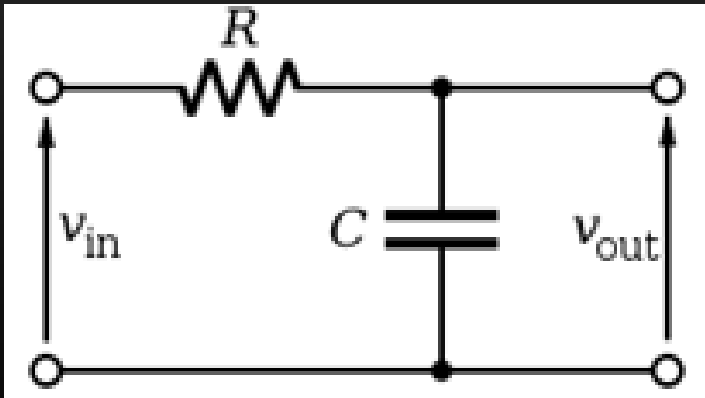
입출력 크기 비율	$1 \leftrightarrow 0[dB]$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow -3.01[dB]$	$0 \leftrightarrow -\infty[dB]$
입출력 위상 차이	0°	-45°	-90°
필터 특성	완전 통과	경계	완전 차단

- 분석 결과, 해당 시스템은 저주파 입력은 통과시키고 고주파 입력은 차단하는 ‘저주파 통과 필터’임
- 전달되는 에너지(전력) 크기가 원래의 에너지(전력) 크기의 $\frac{1}{2}$ 이 되는 주파수를 half-power frequency 혹은 cut-off frequency라고 함 (에너지의 반을 유지하는 주파수)
- 데시벨 [dB]
 - log scale을 사용하여 입출력 크기 비율을 관찰하기 위한 단위

$$[dB] = 10 \log_{10} \left(\frac{|P_o|}{|P_i|} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{|V_o|}{|V_i|} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{|V_o|}{|V_i|} \right) = 20 \log_{10}(|G|)$$

Example 1

- 다음 저주파 필터의 bode plot을 그리고 주파수에 따른 출력의 크기와 위상을 확인해보자 (함수 bode)
 - $R=100\ \Omega$ / $C = 0.01\ \text{F}$

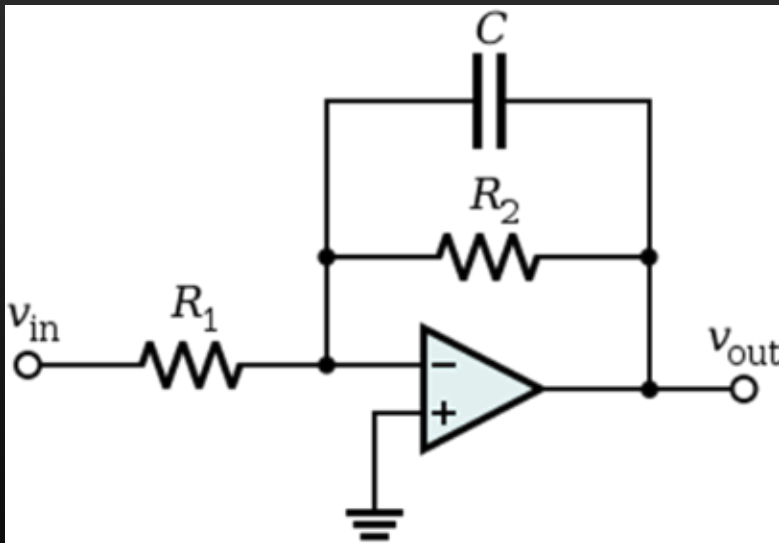


Example 2

- Example1의 시스템에 cut-off frequency 대비 1/10, 1, 10배의 주파수를 지닌 사인파를 입력한 출력을 계산하고 입력 자체와 비교해보자(함수 lsim)

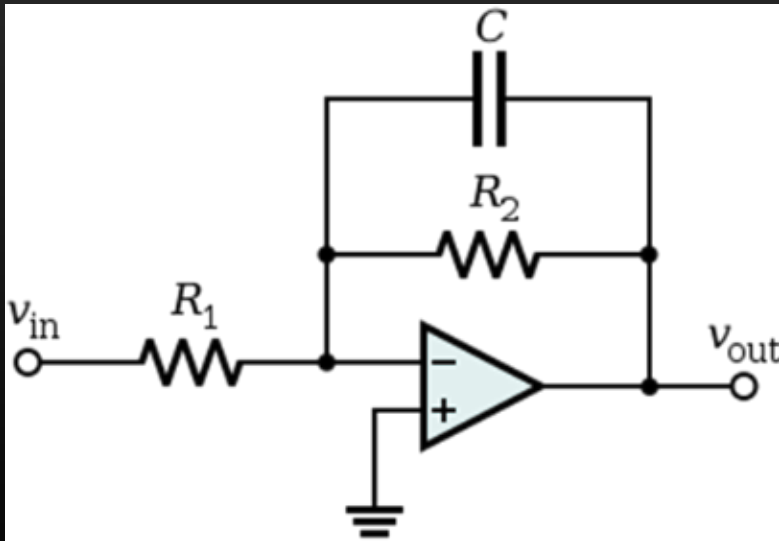
Example 3

- 다음 1차 능동 저주파 통과 필터의 전달함수를 구하고, bode plot 을 그리기 위한 크기와 위상 식을 구해보자



Example 4

- 다음 저주파 필터의 bode plot을 그리고 주파수에 따른 출력의 크기와 위상을 확인해보자 (함수 bode)
 - $R_1=100\ \Omega$ / $R_2=1000\ \Omega$ / $C = 0.0001\ \text{F}$



Example 5

- Example4의 시스템에 cut-off frequency 대비 1/100, 1, 100배의 주파수를 지닌 사인파를 입력한 출력을 계산하고 입력 자체와 비교해보자(함수 lsim)