2nd Order Linear ODE

HuStar

2020.07.

이성윤

2nd Order Linear ODE + Constant Input

• 기본식: 2차 선형 미분방정식 + 상수 입력(step input)
$$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = f(t) = A$$

- Homogeneous solution x_h
 - 입력을 0으로 두고 해를 구하여, 입력에 상관없는 시스템의 고유한 응답 형태를 구함 $a_2\ddot{x}_h + a_1\dot{x}_h + a_0x_h = 0$
 - 이 때 $x_h = Ke^{st}$ 를 가정 \rightarrow 무한의 주기 & 오일러 공식 $e^{ix} = cosx + i sinx$ 를 사용해 확장하면 모든 함수를 표현 가능하기때문 $a_2Ks^2e^{st} + a_1Kse^{st} + a_0Ke^{st} = 0$ $a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$

$$s = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

• 판별식 $D = a_1^2 - 4a_2a_0$ 에 따라 solution의 형태가 다름

• 일반적인 2차 기계시스템에서 살펴보면

$$\sum F = F_{external} - F_{spring} - F_{damper} = f(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$D = c^2 - 4mk$$

$$\frac{c}{2\sqrt{mk}} = \zeta = \frac{actual\ damping, c}{critical\ damping, c_c}$$

• 판별식으로 질량 m과 스프링상수 k에 대해서 충분한 댐핑상수 c가 존재 하는지 알 수 있음

- $a_1^2 4a_2a_0 > 0$ or $\zeta > 1 \rightarrow$ Overdamped condition (과도 감쇠 조건)
 - s가 두 실근을 가지므로

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta \omega_n \pm \omega_d = \sigma_{1,2}$$

$$ightarrow$$
 undamped natural frequency, $\omega_n=\sqrt{rac{a_0}{a_2}}$ $ightarrow$ damped natural frequency, $\omega_d=\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

$\sigma = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$		Sign	
		Negative	Positive
Magnitude	Big	Fast \ decay	Fast \ growth
	Small	Slow \ decay	Slow \ growth

• homogeneous solution도 두 해를 가져서 superposition을 적용하여,

$$x_h = B_1 e^{\sigma_1 t} + B_2 e^{\sigma_2 t}$$

• σ 의 부호와 크기에 따라서 수렴/발산 특성 결정

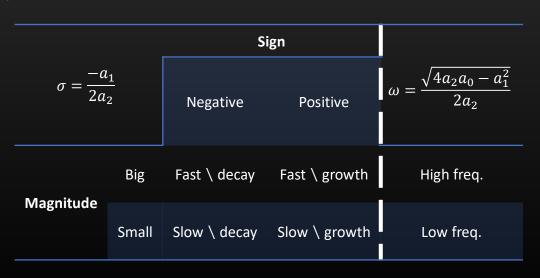
- $a_1^2 4a_2a_0 < 0$ or $\zeta < 1 \rightarrow$ Underdamped condition (미흡 감쇠 조건)
 - s가 두 허근을 가지므로 (complex conjugates)

$$s = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d = \sigma \pm i\omega$$

homogeneous solution도 두 해를 가져서 superposition을 적용하여,

$$\therefore x_h = B_1 e^{(\sigma + i\omega)t} + B_2 e^{(\sigma - i\omega)t}$$

- σ 의 부호와 크기에 따라서 수렴/발산 특성 결정
- ω의 크기에 따라서 진동 특성 결정



- $a_1^2 4a_2a_0 = 0$ or $\zeta = 1 \rightarrow$ Critically damped condition (임계 감쇠 조건)
 - Underdamped condition $|x_h| = e^{\sigma t} (C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t)$

에서
$$\omega = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$$
이므로 $4a_2a_0 - a_1^2 \to 0$ 일 때 $\omega \ll 1$

• 따라서 $cos\omega t \rightarrow 1$, $sin\omega t \rightarrow \omega t$ 로 근사할 수 있음

$$\therefore x_h = e^{\sigma t}(C_1 + C_2 \omega t) = (D_1 + D_2 t)e^{\sigma t}$$

• σ 의 부호와 크기에 따라서 수렴/발산 특성 결정

$\sigma = \frac{-a_1}{2a_2}$		Sign		
		Negative	Positive	
Magnitude	Big	Fast \ decay	Fast \ growth	
	Small	Slow \ decay	Slow \ growth	

• Particular solution x_n

$$a_2\ddot{x}_h + a_1\dot{x}_h + a_0x_h = A$$
$$\therefore x_p(t) = \frac{A}{a_0}$$

Total Solution = Homogeneous + Particular (superposition)

Overdamped:

$$a_1^2 - 4a_2a_0 > 0 \text{ or } \zeta > 1$$

$$x(t) = B_1 e^{\sigma_1 t} + B_2 e^{\sigma_2 t} + \frac{A}{a_0} \qquad \qquad \sigma_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Underdamped:

$$a_1^2 - 4a_2a_0 < 0 \text{ or } \zeta < 1$$

Underdamped:
$$a_1^2 - 4a_2a_0 < 0 \text{ or } \zeta < 1$$
 $x(t) = e^{\sigma t}(C_1cos\omega t + C_2sin\omega t) + \frac{A}{a_0}$ $\sigma = \frac{-a_1}{2a_2}$, $\omega = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$

$$\sigma = \frac{-a_1}{2a_2},$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$$

Critically damped:

$$a_1^2 - 4a_2a_0 = 0 \text{ or } \zeta = 1$$

$$x(t) = (D_1 + D_2 t)e^{\sigma t} + \frac{A}{a_0}$$

$$\sigma = \frac{-a_1}{2a_2}$$

- Initial value (x_0, \dot{x}_0)
 - 미지수가 2개라 초기조건이 2개로 시스템의 거동을 완전히 결정

$\begin{array}{ll} \text{Overdamped:} & & & \\ a_1^2 - 4a_2a_0 > 0 \text{ or } \zeta > 1 & B_1 = \frac{\dot{x}_0 - \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} & B_2 = -\frac{\dot{x}_0 - \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ \\ \text{Underdamped:} & & \\ a_1^2 - 4a_2a_0 < 0 \text{ or } \zeta < 1 & C_1 = x_0 - \frac{A}{a_0} & C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)\sigma}{\omega} \\ \\ \text{Critically damped:} & & \\ a_1^2 - 4a_2a_0 = 0 \text{ or } \zeta = 1 & D_1 = x_0 - \frac{A}{a_0} & D_2 = \dot{x}_0 - \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)\sigma \\ \\ \end{array}$

Example 1

• 다음 이차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자 (overdamped)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 2x = 3, x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0$$

Example 2

• 다음 이차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자 (critically damped)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 3, x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0$$

Example 3

• 다음 이차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자 (underdamped)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 10x = 3, x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0$$