2^{nd} Order Linear ODE

HuStar

2020.07.

이성윤

2^{nd} Order Linear ODE + Constant Input

- 기본식: 2차 선형 미분방정식 + 상수 입력(step input)

$$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t) = A$$

Homogeneous & Particular Solutions

- Homogeneous solution x_h
  - 입력을 0으로 두고 해를 구하여, 입력에 상관없는 시스템의 고유한 응답 형태를 구함

$$a_2\ddot{x}_h + a_1\dot{x}_h + a_0x_h = 0$$

  - 이 때 $x_h = Ke^{st}$를 가정

→ 무한의 주기 & 오일러 공식 $e^{ix} = cosx + isinx$ 를 사용해 확장하면 모든 함수를 표현 가능하기때문

$$a_2Ks^2e^{st} + a_1Kse^{st} + a_0Ke^{st} = 0$$

$$a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

$$s = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

  - 판별식 $D = a_1^2 - 4a_2a_0$ 에 따라 solution의 형태가 다름

Homogeneous & Particular Solutions

- 일반적인 2차 기계시스템에서 살펴보면

$$\sum F = F_{external} - F_{spring} - F_{damper} = f(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$D = c^2 - 4mk$$

$$\frac{c}{2\sqrt{mk}} = \zeta = \frac{actual\ damping, c}{critical\ damping, c_c}$$

  - 판별식으로 질량 m과 스프링상수 k에 대해서 충분한 댐핑상수 c가 존재하는지 알 수 있음

Homogeneous & Particular Solutions

- $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ or $\zeta > 1 \rightarrow$ Overdamped condition (과도 감쇠 조건)
  - s가 두 실근을 가지므로

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d = \sigma_{1,2}$$

$$\rightarrow undamped\ natural\ frequency, \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

$$\rightarrow damped\ natural\ frequency, \omega_d = \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\sigma = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$		**Sign**	
		Negative	Positive
Magnitude	Big	Fast \ decay	Fast \ growth
	Small	Slow \ decay	Slow \ growth

  - homogeneous solution도 두 해를 가져서 superposition을 적용하여,

$$x_h = B_1e^{\sigma_1 t} + B_2e^{\sigma_2 t}$$

  - σ의 부호와 크기에 따라서 수렴/발산 특성 결정

Homogeneous & Particular Solutions

- $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ or $\zeta < 1$ → Underdamped condition (미흡 감쇠 조건)
  - s가 두 허근을 가지므로 (complex conjugates)

$$s = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d = \sigma \pm i\omega$$

  - homogeneous solution도 두 해를 가져서 superposition을 적용하여,

$$\therefore x_h = B_1e^{(\sigma+i\omega)t} + B_2e^{(\sigma-i\omega)t}$$

  - 오일러 공식 $e^{ix} = cosx + isinx$을 사용해 다른 형태로 표현하면,

$$x_h = e^{\sigma t}\{K_1(cos\omega t + isin\omega t) + K_2(cos\omega t - isin\omega t)\}$$

$$\therefore x_h = e^{\sigma t}(C_1cos\omega t + C_2sin\omega t)$$

  - σ의 부호와 크기에 따라서 수렴/발산 특성 결정
  - ω의 크기에 따라서 진동 특성 결정

		Sign		
$\sigma = \frac{-a_1}{2a_2}$		Negative	Positive	$\omega = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$
Magnitude	Big	Fast \ decay	Fast \ growth	High freq.
	Small	Slow \ decay	Slow \ growth	Low freq.

Homogeneous & Particular Solutions

- $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ or $\zeta = 1 \rightarrow$ Critically damped condition (임계 감쇠 조건)
  - Underdamped condition의 $x_h = e^{\sigma t}(C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t)$

    에서 $\omega = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$ 이므로 $4a_2a_0 - a_1^2 \rightarrow 0$ 일 때 $\omega \ll 1$
  - 따라서 $cos\omega t \rightarrow 1, sin\omega t \rightarrow \omega t$ 로 근사할 수 있음

    $\therefore x_h = e^{\sigma t}(C_1 + C_2\omega t) = (D_1 + D_2 t)e^{\sigma t}$
  - σ의 부호와 크기에 따라서 수렴/발산 특성 결정

$\sigma = \frac{-a_1}{2a_2}$		Sign	
		Negative	Positive
Magnitude	Big	Fast \ decay	Fast \ growth
	Small	Slow \ decay	Slow \ growth

Homogeneous & Particular Solutions

- Particular solution x_p

$$a_2\ddot{x}_h + a_1\dot{x}_h + a_0x_h = A$$
$$\therefore x_p(t) = \frac{A}{a_0}$$

- Total Solution = Homogeneous + Particular (superposition)

Overdamped: $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ **or** $\zeta > 1$	$x(t) = B_1e^{\sigma_1 t} + B_2e^{\sigma_2 t} + \frac{A}{a_0}$	$\sigma_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$
Underdamped: $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ **or** $\zeta < 1$	$x(t) = e^{\sigma t}(C_1cos\omega t + C_2sin\omega t) + \frac{A}{a_0}$	$\sigma = \frac{-a_1}{2a_2}$, $\omega = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$
Critically damped: $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ **or** $\zeta = 1$	$x(t) = (D_1 + D_2t)e^{\sigma t} + \frac{A}{a_0}$	$\sigma = \frac{-a_1}{2a_2}$

Homogeneous & Particular Solutions

- Initial value $(x_0, \dot{x}_0)$
  - 미지수가 2개라 초기조건이 2개로 시스템의 거동을 완전히 결정

Overdamped: $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ **or** $\zeta > 1$	$B_1 = \dfrac{\dot{x}_0 - \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$	$B_2 = -\dfrac{\dot{x}_0 - \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$
Underdamped: $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ **or** $\zeta < 1$	$C_1 = x_0 - \dfrac{A}{a_0}$	$C_2 = \dfrac{\dot{x}_0 - \left(x_0 - \frac{A}{a_0}\right)\sigma}{\omega}$
Critically damped: $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ **or** $\zeta = 1$	$D_1 = x_0 - \dfrac{A}{a_0}$	$D_2 = \dot{x}_0 - \left(x_0 - \dfrac{A}{a_0}\right)\sigma$

Example 1

- 다음 이차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자 (overdamped)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 2x = 3, \qquad x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0$$

Example 2

- 다음 이차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자 (critically damped)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 3, \qquad x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0$$

Example 3

- 다음 이차선형미분방정식의 analytic solution을 구하고 MATLAB의 symbolic 방식으로 확인해보자 (underdamped)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 10x = 3, \qquad x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0$$