Тема 3 МЕТОДОЛОГІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПАКУВАННЯ

Ключові особливості задач пакування – це багатовимірність, багатоекстремальність, загалом, нелінійність обмежень, які описують область допустимих розв'язків. Зі збільшенням вимірності простору та кількості розміщуваних об'єктів значно зростає як кількість обмежень, так і кількість локальних екстремумів. Методи повного перебору локальних екстремумів, загалом, не реалізуються на практиці через значну обчислювальну складність оптимізаційних процедур, навіть за невеликої кількості ($n \le 10$) та вимірності. Для задач, поставлених як КР, є необхідність додаткового перебору ще й за цілочисловими змінними. Тому в рамках методології пропонується принципово новий метод спрямованого перебору локальних екстремумів, який ґрунтується на ідеї гомотетичних перетворень гіперкуль і дозволяє отримувати наближення до глобального екстремуму.

На вибір стратегії розв'язання впливають такі основні чинники:

- постановка задачі: ODP, KP, IIPP;

- вимірність простору, в якому розміщуються об'єкти ($d = 2$, $d = 3$ та $d \ge 4$);

- метричні особливості об'єктів (рівні, нерівні, діапазон та розподіл метричних характеристик);

- кількість розміщуваних об'єктів;

- просторова форма області розміщення;

- наявність додаткових обмежень (зони заборони, мінімально допустимі відстані, обмеження на метричні характеристики);

- обмеження на час обчислень.

Проаналізуємо зазначені фактори більш докладно.

На рис. 3.1 показано основні структурні елементи методології розв'язання задач пакування на прикладі гуперкуль. Методологія включає аналіз постановки задачі, вихідних даних та обмежень, математичні моделі, які охоплюють клас задач розміщення гіперкуль різної вимірності, дослідження їх особливостей і розробку стратегій розв'язання, в яких пропонуються методи побудови допустимих розміщень (початкових точок або наближених розв'язків), методи локальної оптимізації та методи глобальної оптимізації.

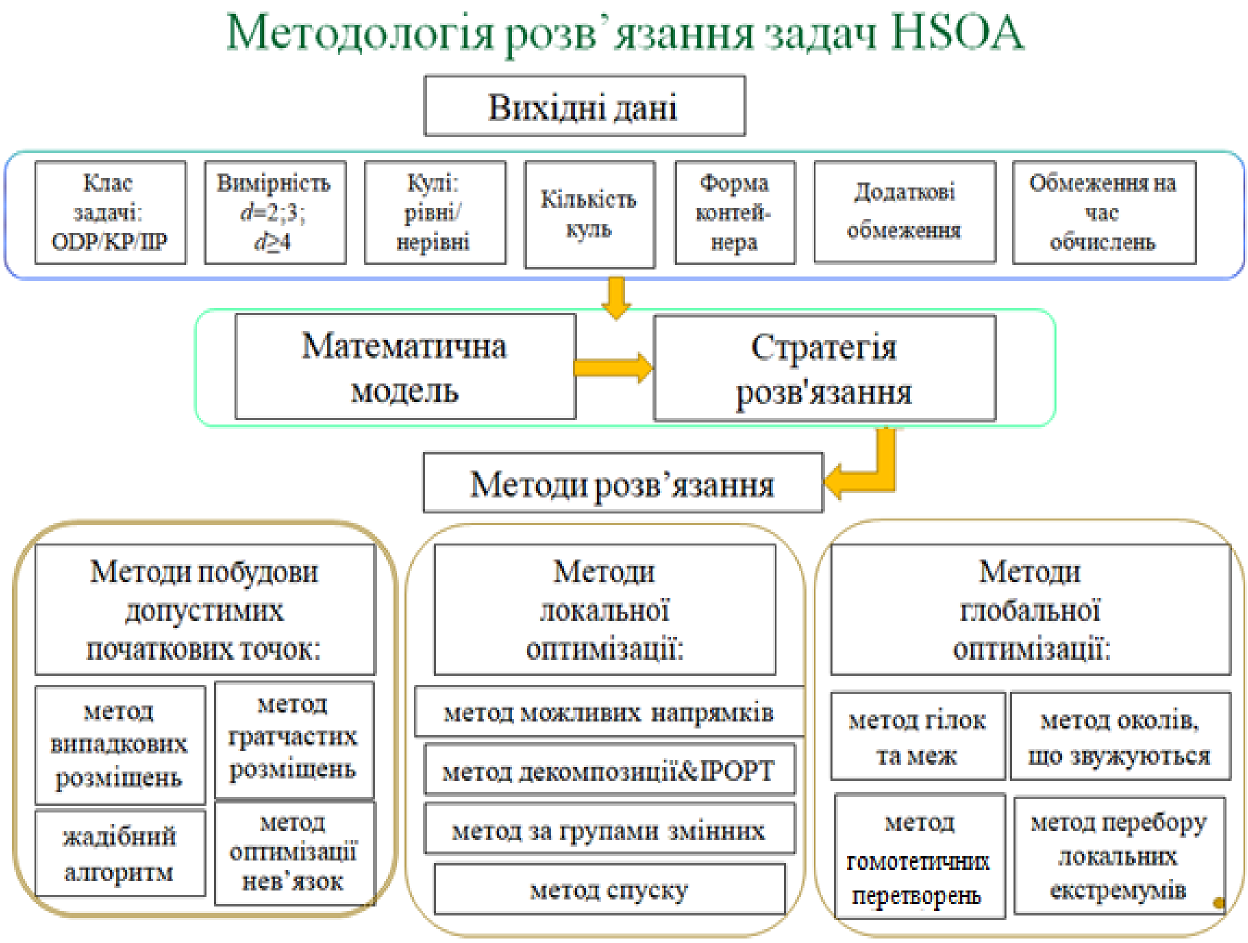

Рис. 3.1. Схематичне зображення методології розміщення гіперкуль

Вигляд постановки задачі відповідає міжнародній класифікації задач розкрою та розміщення [109]. Розглядаються дві основні постановки: задача із змінними метричними характеристиками контейнера (Open Dimension Problem – ODP) та задача про рюкзак (Knapsack Problem – KP). Задача розміщення рівних гіперкуль (Identical Item Packing – IIPP) розглядається в дисертаційній роботі як окремий випадок задачі KP внаслідок того, що ці задачі мають однакову функцію цілі та схожі математичні моделі у вигляді задачі змішаного цілочислового нелінійного програмування.

Вигляд постановки задачі залежить від функції цілі. Якщо є визначений набір гіперкуль із заданими радіусами і треба знайти мінімальні метричні характеристики (розміри) контейнера, в який можна розмістити ці гіперкулі, то маємо задачу. У цьому разі немає необхідності вибирати підмножину гіперкуль із заданого набору – в контейнер мають потрапити всі гіперкулі.

В іншому разі, коли заданий набір гіперкуль з відомими радіусами та контейнер має визначену просторову форму та всі його розміри задані, виникає задача розміщення гіперкуль у контейнері із заданого набору з максимальним коефіцієнтом щільності. Очевидно, що є багато варіантів вибору гіперкуль із набору, й розв’язати цю задачу можна, реалізувавши вичерпний перебір всіх піднаборів гіперкуль і розмістивши ці гіперкулі в контейнері. Така задача формулюється як задача КР і є задачею змішаного цілочислового нелінійного програмування. Вибір піднабору гіперкуль задається двійковими змінними, а параметри розміщення визначаються неперервними змінними.

Окремим випадком задачі про рюкзак є задача IIPP, де вибір гіперкуль із заданого набору означає вибір кількості розміщуваних гіперкуль. Тому схема методу послідовно-одиночного розміщення є основою для розв’язання задач цього класу.

Вимірність простору теж впливає на особливості математичної моделі. В першу чергу, це пов’язано із значним збільшенням контактів гіперкуль за щільного розміщення у просторах вимірності $d \geq 4$, як між собою, так із межею області розміщення. Це спричиняє значне збільшення кількості активних обмежень і, відповідно, складності задачі. Зменшується щільність розміщення, але при цьому ускладнюється пошук випадкових допустимих розміщень гіперкуль. За рахунок накопичення частини гіперкуль біля межі області важливість регулярних ґратчастих розміщень зменшується із збільшенням вимірності.

При розміщенні нерівних гіперкуль збільшення вимірності впливає на важливість розміщення гіперкуль з великим радіусом, які роблять основний внесок у сумарний об’єм розміщуваних гіперкуль.

Тепер проаналізуємо вплив метричних особливостей гіперкуль. Якщо гіперкулі мають різні радіуси, то співвідношення радіусів різних пар гіперкуль або груп гіперкуль може вплинути й на структуру розміщення. Наприклад, гіперкулі достатньо малого радіусу можуть локально вільно рухатися в області, яка утворюється попарним дотиком $d+1$ гіперкуль значно більшого радіусу, тобто розміщення деяких гіперкуль може не впливати на розміщення решти гіперкуль (рис. 3.2).

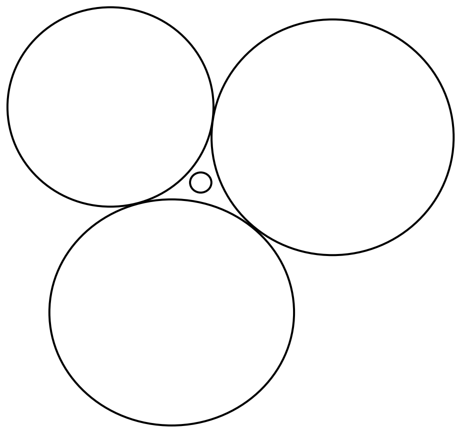

Рис. 3.2. Приклад розміщення кругів, коли один круг може вільно рухатися

При послідовно-одиночному розміщенні на структуру розміщення впливає саме послідовність їх розміщення. І чим більше буде різниця радіусів між гіперкулями, тим більше можуть відрізнятися отримані при цьому розміщення. Для рівних гіперкуль послідовність розміщення не має значення. Таким чином, за великого розкиду значень радіусів гіперкуль ефективними будуть методи, в яких виконуються перестановки гіперкуль, тобто в яких використовуються комбінаторні властивості, наприклад, метод околів, що звужуються [100]. Для рівних гіперкуль потрібні модифікації методів на основі ймовірносних властивостей функції цілі на дереві розв’язків, яке реалізує межові точки області допустимих розв’язків. Якщо радіуси гіперкуль відрізняються несуттєво або має місце плавний перехід від меншого значення до більшого, то найбільш ефективним буде метод спрямованого перебору локальних екстремумів, в якому відбувається плавний перехід від одного екстремуму до іншого завдяки гомотетичним перетворенням гіперкуль.

Важливим є співвідношення діаметру гіперкуль до розміру контейнера, яке, залежно від вимірності простору, впливає на прийняття рішення щодо вибору методу побудови початкових розміщень: випадковий чи на основі ґратчастих розміщень.

Кількість розміщуваних гіперкуль визначає кількість змінних задачі, кількість обмежень задачі. Від них залежить вибір стратегії та методів розв'язання.

За невеликої кількості гіперкуль (до 5-10 гіперкуль) і невеликої вимірності простору ($d \leq 3$) для задачі із змінними метричними характеристиками можливий повний перебір вершин дерева розв'язків, які відповідають межовим точкам області допустимих значень та за певних умов усіх крайніх точок та локальних екстремумів задачі. Для цього можна використовувати схему методу гілок та меж [252]. Проте через нелінійність обмежень на практиці виникають труднощі при розв'язанні нелінійних систем рівнянь. Тому можна говорити тільки про теоретичний глобальний екстремум.

Для задачі КР потрібен ще додатковий перебір за двійковими змінними, що впливає на обчислювальну складність.

Якщо кількість гіперкуль і/або вимірність простору збільшуються, то можливий перебір тільки частини дерева розв'язків і, відповідно, локальних екстремумів.

Можливість застосування методів локальної оптимізації теж залежить від кількості змінних та обмежень. Стратегія активного набору обмежень [257-259,274] дозволяє значно зменшити обчислювальну складність методів пошуку локального екстремуму.

Якщо кількість гіперкуль дуже велика (понад 5000), то можна знайти тільки наближення до локальних екстремумів, використовуючи метод оптимізації за групами змінних. Залежно від кількості гіперкуль, вимірності простору та обчислювальних можливостей можна вибирати групу $g \geq d$ змінних і виконувати локальну оптимізацію тільки за цими змінними. Так, якщо $g = d$, то відбувається оптимізація розміщення тільки однієї гіперкулі, всі інші змінні розглядаються як сталі.

Просторова форма області розміщення, загалом, впливає на стратегію розв'язання. Якщо область розміщення має складну просторову форму, обумовлену присутністю зон заборони, то ускладнюється побудова Ф -функцій, які описують взаємовідношення гіперкулі й області. Область допустимих розв'язків зображається як об'єднання підобластей, які можна описати системами нерівностей, а основна задача розбивається на послідовність підзадач на цих підобластях.

Коли у контейнера є багато зон заборони, ускладнюється й пошук допустимого розміщення. В цьому випадку для пошуку допустимої точки розв'язується допоміжна задача нелінійного програмування.

Наявність зон заборони робить метод побудови початкових точок на основі регулярних розміщень гіперкуль недоцільним .

При розв'язанні задачі слід враховувати можливі симетрії області розміщення.

У прикладних задачах, окрім геометричних обмежень, можуть виникнути додаткові обмеження, наприклад, обмеження на мінімально та максимально допустимі відстані між гіперкулями, обмеження на статичні та динамічні характеристики (центр мас, осьові та центробіжні моменти інерції тощо).

Розглядається два варіанти обмежень, які виникають при оптимізації топології деталі в адитивних технологіях. Математична модель цієї задачі може бути записана у вигляді задачі КР.

Перший варіант – обмеження на мінімально допустимі відстані між гіперкулями. Це обмеження накладається на неперервні змінні задачі.

Внаслідок введення мінімальних відстаней область допустимих розв’язків зменшується, а вплив кругів з більшими радіусами зростає.

Другий варіант – обмеження на кількість різних радіусів кругів – впливає на вибір варіантів кругів із заданого набору, тобто є певним обмеженням на значення цілочислових змінних задачі.

Урахування обмежень, з одного боку ускладнює математичну модель, а з іншого, – зменшує множину можливих розв’язків.

Обмеження на час обчислень застосовується у ситуаціях, коли задача має велику розмірність, немає можливості зробити повний перебір усіх варіантів розміщення. Якщо є обмеження на час, то треба заздалегідь вибрати таку стратегію розв’язання, яка за цей час забезпечить отримання прийнятного результату.