数 理 心 理 学

思考機械・論理・言語・代数系

五 味 健 作 *

2025 年 10 月 1 日 †

*理学博士．1973 年 4 月から 2010 年 3 月まで東京大学で有限群論・数理心理学の研究と数学教育に従事.

†本書は WWW(World Wide Web) を通じて未完成のまま公表したものであり，加筆・改良のために頻繁に改訂する．日付が版番号を兼ねる．初版は 1997 年 12 月 22 日．最新版は著者のウェブサイト (https://gomiken.in.coocan.jp/) から入手できる.

著作権についての警告

謝辞

本書の執筆を可能にする今日の文明を築き上げた先人すべてに感謝します．特に，本書の内容の基幹を成す数学的方法，とりわけ代数学的方法を発展させてきた数学者に感謝します．また特に，人間の思考についての研究を発展させてきた脳科学・論理学・言語学の研究者に感謝します．また特に，本書の WWW 出版を可能にした科学者と技術者に，とりわけ電子計算機・WWW・TEX の発明者に感謝します．また特に，WWW の大きな可能性に私の目を開いて下さった北海道大学教授[1]辻下徹氏に感謝します．

本書の主題を成す事柄に私の関心を向けて下さった方々すべてに感謝します．そういう方々の一部は本書の中で，引用した書物の著者などとしてお名前を挙げておきました．特に，私が研究課題を有限群論（代数学の一部）から数理心理学に変える切っ掛けを与えて下さった人工知能の概説書「AI 入門（オーム社・矢田光治編）」の著者黒川忠由氏と本沢昌三氏に感謝します．

本書の内容を成す研究成果を生み出すための研究環境を与えて下さった方々すべてに感謝します．特に，東京大学教養学部数学教室に奉職させ取り立てて下さった先生方，とりわけ東京大学名誉教授近藤武先生と岩掘長慶先生に感謝します．また特に，東京大学の数学関連三教室を統合して数理科学研究科を作り上げ快適な研究環境を提供して下さった方々に感謝します．また特に，研究課題転換のための長い暗中模索やその後の遅々たる研究進展の間にも陰ながら温かく見守って下さったり時機を見て督励して下さった同僚諸氏に感謝します．

本書の研究成果を生み出すための諸能力や技芸を私に伝授して下さった先生方すべてに感謝します．そういう方々の中には，教室やセミナーで直接指導して下さった先生方だけでなく，書物や論文を通じて知らず指導して下さった先生方，たとえば有限群論研究者時代に私淑したイリノイ大学教授鈴木通夫先生などがおられます．

頻繁な改訂で読みにくいにも拘わらず本書を読み内容について有益なご意見を下さった方々すべてに感謝します．そういうご意見は陰に陽に本書の内容に反映されています．

最後に私事になりますが，本書の研究成果を生み出すための根本の精神と身体を授けてくれた両親五味九十二・すずに感謝します．また，研究時間のほとんどを成す自宅での研究を支えてくれている妻五味伸子に感謝します．

[1] 肩書きなどはすべて謝辞執筆当時のもの．

端書き

¢ 本書はWWW(=World Wide Web [2]) を通じて未完成のまま公表したものであり，加筆・改良のために頻繁に改訂する [3]．

本書を未完成のまま WWW を通じて公表する理由 ¶ 科学としての心理学の根本問題は，言うまでもなく「**心とは何か**」というものである．そして，この問題を数理科学的に追究することが数理心理学の目標である．しかし，こういう大きな目標へ向けての研究は簡単に完結するものではない．もちろん，目標を小さく区切って論ずることはできる．しかし，目標を細切れにし過ぎれば本来の目標がよく理解されないから，区切るにしても限度がある．そして，適当に区切った目標にさえ，短期間の研究で到達するのは難しい．当然，研究成果の公表までに長い年月が掛かり，色々な支障をきたすことになる．支障を取り除くためには，研究成果を一部未完成のままで，たとえば書くべき章や節を欠いたままで公表することができ，また，公表した部分にその後の研究で加筆・改良あるいは修正したいところが出来た場合には，自由に改訂できるような公表形態が是非とも必要になる [4]．WWW 出版は，この要求に応えられる理想的な出版形態なのだ [5]．

本書の構成と読み方 ¶ 本書は未完成なのだから構成も暫定的だが，今のところ一番大きい段落は**章**であり，そのうち標題と概要を決めてあるものだけ示せば次のようになる．

第 1 章 **序説**：数理心理学では，どういう問題を，なぜ，どのように研究するのかを説明する．特に，基本問題の幾つかが論理学の問題として捉えられることと，それを解決するには自らの母語の研究が必要であることを説明する．

第 2 章 **国語観察と心論理学の設計構想**：序説で提起した基本問題を解決するための論理学の設計構想の言語的側面を具体的に説明する．

第 3 章 **論理代数学**：論理学を一般的に論ずるために必要な代数学について説明する．

第 4 章 **代数論理学**：前章の代数学が論理学にどう使えるかを説明する．

第 5 章 **単相格論理学**：序説で提起した基本問題を解決するための論理学の建設を開始する．

第 6 章 **格論理学**：前章の論理学を数理心理学により相応しい論理学へと拡張する．

第 7 章 **格言語と日本語**：前二章で論じた格論理学が数理心理学にとって妥当であることを，日本人の言語行動と関連させて説明する．

---

[2]World Wide Web は Web, W3 とも略される．W3Consortium のサイト (http://www.w3.org/) 参照．
[3]最新版は著者のサイト (https://gomiken.in.coocan.jp/) から入手できる．
[4]現に，本書には時によって標題だけの章や節がある．
[5]改訂が容易なだけでなく，出版に掛かる時間や費用や労力の面でも，WWW 出版は紙上出版より遥かに優れている．だから，特に学術論文は，WWW 論文がいずれ主流になるだろう．それにつれ，従来の学術論文掲載誌は存在意義を失い，WWW 論文の論評・情報誌としてしか存続して行けなくなるだろうし，それも WWW 上に移行するだろう．

1 章と 2 章では，概念の正確な定義なしに，曖昧な概念は曖昧なままで，数理心理学の基本的な考え方を大づかみに説明する．その反対に 3 章 – 6 章では，厳密な数学的説明を主とし，その背景説明は主に 7 章で行なう．だから読者は，1 章と 2 章を読むときには細かいことに拘わらず，3 章 – 6 章を読むときには，逆に細部をおろそかにしないと共に，いつも 1 章と 2 章を振り返りながら読み進んでほしい．必要に応じて 3 章 – 6 章を参照しながらまず 1 章・2 章・7 章を精読するのもいい方法かもしれない．そういう読み方のために，これらの章では参照箇所をかなり丁寧に示してある．

各章は幾つかの**節**に分け，節によってはさらに幾つかの**項**に分け，項によってはさらに幾つかの**条**に分ける [6]．この端書きは特別な章であり，**段**に分ける．

数学的の節・項・条にはさらに，**定義・定理・系・補題・例・注意・問題・課題**と，定理・系・補題（これらを**定理等**と総称する）の**証明**と，時に問題に添える**略解**などの段落を設ける．これらの段落の中には他の段落を設けない．補題は定理の証明のための補助命題であり，系は直前の定理か補題から比較的楽に導かれる命題である．定理・補題の系は大抵は一つしか設けないから，二つ以上設けるときの二番目以降にだけ番号を付ける．その他の段落には必ず番号か記号を付ける．

文中の「以下」は，特にそうでない旨断らない限り，その「以下」以降その「以下」を含む最小段落の終りまでの範囲を指す．たとえば，その「以下」がある節に属しその節内のどの小段落にも属さない場合，その「以下」はその「以下」以降その節の終りまでの範囲を指す．その「以下」がある例内にある場合，その「以下」はその例より小さい段落には含まれないから，その「以下」はその「以下」以降その例の終りまでの範囲を指す．

定理・系・補題・例・注意・問題の分類基準は厳密ではない．例・注意の中には，本来なら定理等として命題と証明に分けて書くべきところを，諸般の事情で命題と証明を渾然と書くために例・注意としたものがあり，それらの重要性は定理等に劣らない．ただし，例・注意内で証明に当たるものは略証とする．問題も実は，定理等として証明しなければならないものを経済的・教育的の配慮から問題としたものが多く，単に練習のための問題は多くない．そこで**大抵の問題においては，問うのではなく断定し，時に添える略解は実質は略証である．**だから読者は，問題をきちんと解きながら，つまり証明しながら，読み進まなければならない．しかし，数学科三年次位までの数学的経験を積んだ人にとっては，大抵の問題は，本文を順に読んでいけば楽に解けるはずの（解けなければならない）ものである．これに対し**課題**としたのは，数学の問題とも限らず，興味をそそるにしても緊急でないか高度な問題であり，私自身が答を知らないものもある．

数学的段落の幾つかでは，その段落の全体や一部で仮定する事柄を，段落の冒頭や中間に太字で書く．そういう仮定は，その段落の指定した範囲の定義と定理等では必ず仮定するが，それら定義・定理等の中には改めて書かない．だから，他の段落でそれら定義・定理等を使うときには，そういう仮定があるかどうかに注意しなければならない．**ただしそういう仮定は，その段落の例・注意・問題・課題には必ずしも適用しない．**適用するか否かは文脈で判断してほしい．

段落の標題に付けた記号「✓」は，それら段落を抜かして読んでも当面は論理的には差し支えないことを示す．ただし，それらを抜かして読むと後の事を理解しにくいということはあり得る．また,「✓」の付け忘れのため,「✓」の付かない段落にも抜かして読んでいいものはあり得る．

数学的命題文の切れ目に句読点でなく全角の感嘆符を使うことがある．それはその命題の成立することへの私の驚き・意外感・神秘感などを表し，そういう感じを解消するという課題が残されていることを示唆している．

章・節・項・条・段の先頭には，画面で読む場合の検索の便のために，全角記号￠（セント），＄（ドル），§（セクション），‡（二重ダガー），¶（パラグラフ）を付けてある．これらを画面検

[6]段落の大きさは，法令では章・節・款・条・項の順で，予算・決算では部・款・項・目・節の順だと言う．

索すれば各段落の先頭に跳ぶことができる．各記号に対応する段落は次の通りである．

¢＝章　　$＝節　　§＝項　　‡＝条　　¶＝段

文字列「目次」を画面検索すれば目次へ跳ぶことができる．任意の文字列へ同様に跳ぶことができるから索引は設けない．

DVIOUT 画面で **Hyper Jump 機能**が有効の時，ウェブページと同様にホットテキスト[7]を左クリックすれば，そこへ跳ぶことができる．たとえばここを左クリックすれば端書きの最初に跳ぶ．これが，本書を紙面でなく画面で読むよう推奨する所以である．

本書を読むのに必要な素養　¶ 本書で使う数学的道具は，さしあたりは**数理論理学**[8]が主であるが，それを代数学の一部として扱うので，おおむねは**代数学**である（研究の進展と共に何らかの幾何学が必要になるだろう）．ただしこの代数学の主役は，局所的な算法を沢山持つ**型付代数系**と代数系概念の究極とでも呼ぶべき**界**であり，3 章をそれらの理論に当てる．代数学の通常の教程で重視される群・環・体などの代数系は，数理心理学とは何の関わりも持たない．しかし，少なくとも群についてしっかり学んだ経験が無ければ，3 章以降を理解するのは恐らく大変難しいだろう．この意味で，最低限数学科三年次位の代数学の知識と代数学的思考訓練は必要になる．その基礎あるいは関連として，たとえば基数・濃度や順序数やツォルンの補題や整列定理などの集合論の知識や，閉包や閉集合などの位相空間論の知識も必要になる．また，数理論理学を代数学の一部として扱うと言っても，数理論理学についての知識が皆無でも構わないのではない．完全性定理や不完全性定理位までの，命題論理学や述語論理学の教養は必要になる．ただし，命題論理学や述語論理学を数理心理学に使うのではない．

数学や論理学の他にも，もちろん色々な知識や経験が必要になる．特に**言語**についてのそれは欠くことができない．ただしこれは，外国語や既成の言語理論の知識や学習経験を意味しない．そういうものではなくて，読者が自身の母語をどのように使っているかを内省して得た具体的な知識や内省した経験が重要なのである．

集合に関わる用語・記法・規約　¶ 集合 $\{0,1\}$ を記号 $\mathbb{T}$ で表す．ただし記号 $0,1$ は，数の他に，各種の順序集合の最小元と最大元を表すのにも使う．また，記号 $\mathbb{N},\mathbb{O},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ で，それぞれ**自然数・順序数・整数・有理数・実数・複素数**の全体を表す．ただし,「自然数」は**正整数** $1,2,3,\ldots$ を指すものとし，0 は自然数には含めない[9]．さらに記号 $\mathbb{Z}_0,\mathbb{Q}_0,\mathbb{R}_0,\mathbb{R}_+$ で，**非負整数・非負有理数・非負実数・正実数**の全体を表す[10]．なおこれらの中で $\mathbb{O}$ だけは領域（＝広義の集合）である．

集合の元の**所属関係**は $\in$ や $\ni$ で表す．ϵ（イプシロン），ε（イプシロン），e（イー），$\exists$（存在する）などの似た記号に注意してほしい．集合の**包含関係**は $\subseteq$ と $\supseteq$ で表す．似た記号 $\sqsubseteq$ や $\sqsupseteq$ と区別してほしい．記号 $\subset$ と $\supset$ は**真部分集合**を表すのだけに使う[11]．集合の**交わり（積）**と**結び（和）**はそれぞれ $\cap$ と $\cup$ で表す．似た記号 $\sqcap$, $\sqcup$ に注意してほしい．集合の**直和**は $\amalg$ で表す．ただし，直和であることが明らかな場合は，$\amalg$ でなく $\cup$ を使う．集合族 $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}_0}$ の和は $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ でも表し，

[7] DVIOUT の現在の初期設定ではホットテキストは空色の背景で表示される．

[8] 数理論理学は**記号論理学**の中でも数学の一部として行なわれるものを指す．これが現代の論理学の主流である．数学基礎論のための論理学を数理論理学と呼ぶ学派があるようなので注意を要する．

[9] 数理科学の分野や人により，0 を自然数に含める流儀と含めない流儀が混在しているので注意を要する．本書では，主に物事の番号付けに $1,2,3,\ldots$ を使うのであり，集合論や整数論でのように $0,1,2,3,\ldots$ を「存在」や「構造」として研究対象にするのではない．こういう立場では，0 を自然数に含めない方が自然に思われる．

[10] $\mathbb{R}_0$ を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で表す等の記法もあるが，これは 5 章以降での使用法には不向きなので採用しない．

[11] 数理科学の分野や人により，包含関係を $\subset$ と $\supset$ で表して真部分集合を $\subsetneq$ と $\supsetneq$ で表す流儀と，本書のように包含関係を $\subseteq$ と $\supseteq$ で表して真部分集合を $\subset$ と $\supset$ で表す流儀が混在しているので注意を要する．前者の流儀を本書で採用しないのは，包含関係を順序関係の一種として論ずる際に，真の大小関係を $<$ と $>$ で表す慣例と整合させるためである．

集合族 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の和は $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ でも表す．**空集合**は記号 $\emptyset$ で表す [12]．似た記号 ϕ, φ, Φ（いずれもファイ）も使うので，特に添え字として使う場合に注意してほしい．集合 A の**濃度**は $\#A$ で表し [13]，A の**巾集合**は $\mathcal{P}A$ で表す [14]．$\mathcal{P}A$ は通常は包含関係 $\subseteq$ によって順序集合とみなす．n 個の元から成る集合を n **元集合**と呼ぶ．ただし，1 元集合は**単元集合**とも呼ぶ．

集合に関わる記号・用語は，このように大体普通のものを使うが，重要な例外もある．例えば，集合 A の有限部分集合の全体を $\mathcal{P}'A$ で表す．また，集合 A から集合 B への**写像の全体**は $A{\to}B$ で表す [15]．これに伴い，f が A から B への写像であることを $f\in A{\to}B$ で表す [16]．なお，縦棒つきの矢印で $a\mapsto b$ と書くのは，何らかの写像が a を b にうつすことを示す．**順序対** (a,b) を $a\to b$（または $b\leftarrow a$）で表すこともあるが，これと写像の全体 $A{\to}B$ とは，文脈と矢印前後の空白の大小で区別してほしい．写像 $f\in A{\to}B$ による $a\in A$ の**像**は，主として fa で表すが，場合によっては af, a^f, f_a などでも表す．$f(a)$ のような無意味な**括弧はできるだけ使わない**．$f\in A{\to}B$ の定義域を A の部分集合 C に**制限**すなわち**縮小**して得られる $C{\to}B$ の元は $f|_C$ で表す．逆に，$g\in C{\to}B$ に対して $f|_C=g$ なる $f\in A{\to}B$ を g の A への**拡大**と呼ぶ．$f\in A{\to}B$ が全単射であるとき，B は A の f による**複製**であるとか，$f\in A{\to}B$ は**複写**であるとかとも言う．集合 A から A への**恒等写像** (identity mapping) は id_A で表す．A が集合 B の部分集合であるとき，A から B への**自然な単射**すなわち**埋め込み写像**（imbedding）も id_A で表す．埋め込み写像と id_A の始集合は共に A であるが，終集合は B と A であるから，$B\neq A$ なら埋め込み写像と id_A は厳密には異なる．それを同じ記号で表すのは，**終集合が異なる写像でもグラフが等しい写像は同一視する**という立場をとっているからである．

なお，集合 A から集合 B への写像全体の集合 $A{\to}B$ は

$$A{\to}B=\{f\in\mathcal{P}(A\times B)\mid \text{各 } x\in A \text{ に対し } (x,y)\in f \text{ なる } y\in B \text{ が唯一つある }\}$$

と定義されるが，この定義により次の二つのことが成り立つ [17]．

$$\emptyset{\to}B=\{\emptyset\} \qquad\qquad A\neq\emptyset \text{ なら } A{\to}\emptyset=\emptyset \qquad\qquad (\textbf{空集合律})$$

また，任意の単元集合 $\{a\}$ と集合 A に対して，$f\in\{a\}{\to}A$ を $fa\in A$ と同一視することにより

$$\{a\}{\to}A=A$$

とみなすことがある．これを**一乗便法**と呼ぶ [18]．

短い右矢印 $\Rightarrow$ は代数系の算法記号に使う．これに対し長い矢印 $\Longrightarrow$ と $\Longleftarrow$ は「なら」の代わりに使い，「$P\Longrightarrow Q$」と「$Q\Longleftarrow P$」は共に「P ならば Q」と読む．両方向の長い矢印 $\Longleftrightarrow$ を使った「$P\Longleftrightarrow Q$」は「$P\Longrightarrow Q$ かつ $P\Longleftarrow Q$」を意味する．記号 $\wedge,\vee,\forall,\exists$ はそれぞれ「かつ」「または」「全て」「存在する」の意味を示唆する算法記号に使う [19]．ただし $\exists$ は，特に 5 章

---

[12] ソフトバンク社刊「pLaTeX 2ε for Windows vol.1 Basic Kit」によれば，記号 $\emptyset$ を空集合を表すのに使うのは数学者 André Weil の提案による．Weil はこれをノルウェー文字から採ったというが，私はゼロ 0 に斜線を引いたと解釈したい．なお，ギリシア文字の ϕ で空集合を表すことがあるのは印刷上の都合という．

[13] これは，北米で $\#$ を自然数 n の前に付けて「第 n 番」の意を表すのに因む．

[14] 中国伝来の「冪」「羃」に「巾」を代用するのは関孝和の発案という．

[15] B^A が通常の記法だが，これでは $(A{\to}B){\to}C$ などは組み版が難しい．B^A は 3.10 節で**巾代数系**を表すのに使う．

[16] 通常は $f: A{\to}B$ で表すが，これではコロンや矢印の集合論的意味がはっきりしない．

[17] $A=\emptyset$ であれば，$A\times B=\emptyset\times B=\emptyset$ 従って $\mathcal{P}(A\times B)=\{\emptyset\}$ となり，他方で $x\in A$ なる x はない．従って第一の式が成り立つ．$A\neq\emptyset=B$ であれば，$x\in A$ なる x はあって $y\in B$ なる y がないから，第二の式が成り立つ．

[18] $A{\to}B$ を通常の記法 B^A で表せば，ここに記した等式は $B^\emptyset=\{\emptyset\}$, $\emptyset^A=\emptyset$ $(A\neq\emptyset)$, $A^{\{a\}}=A$ となるが，これらは，非負数の巾についての $b^0=1$, $0^a=0$ $(a>0)$, $a^1=a$ なる等式と並行している．

[19] 記号 $\forall$ と $\exists$ はそれぞれ「all(独)」と「existieren(独)」の頭文字を上下と左右に反転したものである．

以降では,「属す」の意味を示唆する関係を表すのにも使う [20]．読者は文脈によって読み分けてほしい．なお $\wedge$ と $\vee$ については，似た記号 Λ（ラムダ）と V（ヴィ）に注意して欲しい．$\wedge, \vee$ と組みにして否定の意味を表すには，よく使われる $\neg$ や $\sim$ ではなく $\Diamond$ を使う．これは $\Diamond$ が $\wedge$ と $\vee$ を重ねた形であることによる．同様に，各種のブール束の算法記号は次表の組み合せで使う．

交わり（積）	$\cap$	$\wedge$	$\sqcap$	$\blacktriangle$	$\Cap$
結び（和）	$\cup$	$\vee$	$\sqcup$	$\blacktriangledown$	$\Cup$
補	$\circ$	$\Diamond$	$\square$	$\blacklozenge$	$\circledcirc$

特に，集合 A の部分集合 B の**補集合** $A-B$ を B° で表す．なお，交わり・結びをそれぞれ**下限・上限**とも呼ぶ（例 3.13.2 参照）．また 3 章以降では，算法記号を**算号**とも呼ぶ．

集合 A の部分集合 B に対して，次にように定義される $A{\to}\mathbb{T}$ の元 1_B を B の**定義関数**と呼ぶ．

$$1_B(x) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad x \in B \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \quad x \in A - B \text{ のとき} \end{cases}$$

逆に $A{\to}\mathbb{T}$ の元 f に対して，A の部分集合 $f^{-1}1$ を f の**定義集合**あるいは**台**と呼ぶ．A の部分集合 B に 1_B を対応させる写像は $\mathcal{P}A$ から $A{\to}\mathbb{T}$ への全単射であり，$A{\to}\mathbb{T}$ の元 f に $f^{-1}1$ を対応させる写像は $A{\to}\mathbb{T}$ から $\mathcal{P}A$ への全単射であり，これら二つの全単射は互いに他の逆写像である．そこでこれら全単射により，$\mathcal{P}A$ と $A{\to}\mathbb{T}$ をしばしば同一視する．

集合族 $(A_i)_{i\in I}$ の**直積** $\prod_{i\in I} A_i$ は

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ a \in I{\to}\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; a_i \in A_i \ (i \in I) \right\}$$

と定義される（a_i は写像 a による i の像を表す）．従って空集合律により，$I = \emptyset$ の場合の $\prod_{i\in I} A_i$ は単元集合 $\{\emptyset\}$ に等しい．$\prod_{i\in I} A_i$ の元 a をその像の族 $(a_i)_{i\in I}$ と同一視することが多い（$I=\emptyset$ の場合はこれが $\emptyset$ を表すとみなす）．特に，有限個の集合 $A_1, \ldots, A_n$ の直積 $A_1 \times \cdots \times A_n$ は

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \left\{ a \in \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}{\to}\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\middle|\; a_i \in A_i \ (i \leq n) \right\}$$

と定義される $(n \geq 0)$．$A_1 = \cdots = A_n = A$ の場合は，$A_1 \times \cdots \times A_n$ を A^n でも表す．すなわち，

$$A^n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}{\to}A$$

特に $A^0 = \{\emptyset\}$ である．A^n の元を A の元の n **列**と呼ぶ．ただし 0 列 $\emptyset$ は，**空列**と呼び ε や空白で表すことが多い．$n \neq 0$ の場合の n 列は通常はその像の組み $(a_1, \ldots, a_n)$ で表すが，場合によっては $a_1 \cdots a_n$ や $a_1, \cdots, a_n$ でも表し（点々の高さの違いに注意），また特に $a_1 = \cdots = a_n = a$ の場合には，a^n でも表す.「A^n の元 $a_1 \cdots a_n$ を記号 α で表した場合は，集合 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ も α で表す」という便法（これを**列便法**と呼ぶ）を使うことがある．また，集合 $\bigcup_{n\geq 0} A^n$ と $\bigcup_{n\geq 1} A^n$ をそれぞれ A^* と A^+ で表し，これらの元を A の元の**列**と呼ぶ．A^* と A^+ を，列を「繋げる」という算法に関して乗法的な半群とみなす（みなすことができる）．そうすると，空列は A^* の単位元である．

なお以上は，集合に関わる概念の定義ではなく，あくまでも用語・記法・規約の説明に過ぎない．これを定義とみなせば，不完全で循環的のものである．集合に関わる概念の網羅的・系統的の定義については，たとえば 1.2.5 項と 3.34 節で紹介する「現代数学概説 I」を参照されたい．

[20]「属す」の意味を示唆する関係を表すには $\in$ を角張らせた記号を使いたいが，それが LaTeX 2_ε に無いからである．

「文法」と「文法論」　¶ 「文法」「文法論」という言葉は**自然言語**と**形式言語**の両方に使う[21]．「文法」は本来，自然言語において語が連なって文となるときに従う形態的法則を指すだろう[22]．そういう法則についての理論が自然言語の「文法論」である．しかし，こういう本来の用法を転じて，形式言語についても「文法」「文法論」という言葉を使うことが多い．つまり,「形式言語の文法」は形式言語の**代数構造**を意味し,「形式言語の文法論」は，形式言語を構成するために代数構造を定める作業を意味する．

したがって，同じ「文法」「文法論」という言葉を使っても，自然言語と形式言語とではその意味がまったく異なる．自然言語は，文字通り自然にいつの間にか出来たもので，しかも大変複雑なものだから，よく観察してもそこにどういう形態的法則があるのかがなかなか分からない．そこに自然言語の文法論の難しさがある．他方の形式言語は，代数構造を定めて作ったものだから，どういう形態的法則があるかはあらかじめ分かっていて，それについては何の難しさもない．しかし，形式言語は何らかの目的のために設計して作るものであり，どう設計したら目的に適うかがなかなか分からない．そこに形式言語の文法論の難しさがある．

国語の文法用語は**学校文法**[23]のそれに従う．学校文法に異論があるにしても，共通語の役割は果たせるからである．ただし，例外や気をつけるべきことが幾つかある．

まず，**格助詞**とは，体言と用言を結びつけるものだけを指す．体言と体言を結びつける「の」は格助詞ではなく**連体助詞**と呼ぶ．たとえば「私の母」「田中家の客となる」での「の」は連体助詞とする．しかし,「僕の読んだ本はこれだ」「雨の降る日には出掛けない」での「の」は格助詞とする．

また，体言と体言を結びつける「と」や「か」や「や」は，同じく連体助詞と呼ぶか，意味をとって**並立助詞**と呼ぶ．たとえば,「兄と妹を連れて」での「と」や「雨か雪が降る」での「か」やこの文中の「や」は連体助詞である．しかし「花子と散歩する」での「と」は格助詞である．

また,「まで」は副助詞だけでなく格助詞の用法もあるものとする．たとえば「東京から京都まで行く」での「まで」は「から」と同様に格助詞とみなす[24]．しかし,「あの人までがそう言うのか」の「まで」は副助詞である．

したがって，本書で格助詞と呼ぶのは,「が」「の」「に」「を」「へ」「で」「と」「より」「から」「まで」である．なお，以上で使った例のほとんどは岩波国語辞典から拝借した．

括り記号と強調　¶ **丸括弧**（　）をしばしば使うが，これは文章の流れを乱さないための工夫である．文章は意味的に引き続く表現 $A, B, \ldots$ を続けて作る．しかし時に，意味的に A に続くが B には続きにくい表現 B' を書き加えたいことがある．この場合，B' を括弧に入れて $A, (B'), B, \ldots$ の順に書く．これの意味をとるには，$A, B', A, B, \ldots$ の順に読めばいい．ただし，B' が長いときや短くても煩わしいときは B' を脚注とする[25]．また，B' は通常は小さめの字で書くが，普通の大きさの字で書くのは B' を重視している場合である．

角括弧［　］を使うのは，文章を節約するための工夫である．$A, B, \ldots$ と $A, B', B, \ldots$ が共に意味的に引き続く表現から成る文章であるとき，これらを別個に書くのでなくまとめて $A, [B'], B, \ldots$ と書くことがある．これの意味をとるには，$A, B, \ldots$ と $A, B', B, \ldots$ の二通りに読めばいい．

中括弧｛　｝を使うのも文章を節約するための工夫である．$A, B, C, \ldots$ と $A, B', C, \ldots$ が共に意味的に引き続く表現から成る文章であるとき，これらを別個に書くのでなくまとめて $A, \{B, B'\}, C, \ldots$

[21]「自然言語」は，日本語・中国語・英語などのように，特定の社会・集団の中で心の伝達のために自然発生して共有される記号の体系を指す.「形式言語」は，論理学のために作られる代数系の一種である．
[22]チョムスキー学派などは「文法」をさらに広い意味で使うが，それについては本文で触れる．
[23]国語教育の一環として小・中・高等学校などで教えられる文法を指す．
[24]「から」は格助詞だが「まで」は副助詞だとする文法論や辞典がある．
[25]脚注は章ごとに番号を改める．

と書くことがある．これの意味をとるには，$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots$ と $\mathsf{A}, \mathsf{B}', \mathsf{C}, \ldots$ の二通りに読めばいい．

鉤括弧「　」『　』は特定の言語表現を際立たせるために使う．主な用法は次の通りである．

1. その表現の意味が曖昧な場合．たとえば,「人間の心の働きも『生命の原理』に従っている」と書くのは,「生命の原理」の意味が曖昧なことに注意を喚起して,「いわゆる生命の原理」という感じを出すためである．
2. 言語表現を一まとまりに扱う場合．たとえば，1 での「　」の用法.
3. 単にその表現を強調する場合.

ただし，1, 2, 3 の違いはあまりはっきりしない.

中黒・は同種あるいは同格の概念を並列するときの境目を示す．ただし，同種あるいは同格の数学記号を並列するときの境目を示すにはコンマを使う.

太文字や**傍点**は鉤括弧より強い強調のために使う．太文字は主にはっきりした概念や命題を強調する．傍点は主に修飾語や述語を強調する．**下線**は太文字の中の概念を更に強調するのに使う.

記号用字体　¶ 欧文の論文では記号をイタリック体で書く慣習がある．これはローマン体で書かれる文章中で記号を際立たせるための工夫である．しかし和文の論文でこの慣習に従うのは馬鹿げている．和文中では記号は，外国文字で書かれ，それだけで際立つからである．そこで本書では記号は，イタリック体ではなく**オイラー体**で表す[26]．比較のためにオイラー体とローマン体とイタリック体の字体の一部を次に示す.

$\mathsf{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$	$\mathsf{abcdefghijklmnopqrstuvwxyz}$	（オイラー）
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ	abcdefghijklmnopqrstuvwxyz	（ローマン）
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ	*abcdefghijklmnopqrstuvwxyz*	（イタリック）

ただし，英単語の一部を記号として使う場合には，ローマン体を使うことがある．たとえば，Constant（定数）の最初の三文字 Con で「定数全体の集合」を表したりする．また，たとえば「A は B である」のように，文章表現を記号で表す場合にも，ローマン体を使うことがある．なお，オイラー体はオイラーローマン体・スクリプト体・フラクトゥール体などに分かれ，次に示すスクリプト体が特に優れている.

$$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$$

ギリシア文字　¶ 次に示すギリシア文字をしばしば使う．ただし，ローマ字と同形の大文字は示さない．括弧内に日英での慣用の読み方を示す[27]．小文字で読み方が同じなのは異体字である.

小文字： α（アルファ, alpha），β（ベータ, beta），γ（ガンマ, gamma），δ（デルタ, delta），ϵ（イプシロン, epsilon），ε（イプシロン），ζ（ゼータ, zeta），η（イータ, eta），θ（シータ, theta），ϑ（シータ），ι（イオタ, iota），κ（カッパ, kappa），$\varkappa$（カッパ），λ（ラムダ, lambda），μ（ミュー, mu），ν（ニュー, nu），ξ（クシー・クサイ・グザイ, xi），o（オミクロン, omicron），π（パイ, pi），ϖ（パイ），ρ（ロー, rho），σ（シグマ, sigma），τ（タウ, tau），υ（ウプシロン, upsilon），ϕ（ファイ, phi），φ（ファイ），χ（カイ, chi），ψ（プサイ, psi），ω（オメガ, omega）

[26] ソフトバンク社刊「pLaTeX 2ε for Windows vol.1 Basic Kit」によれば，オイラー体は数学者 Leonhard Euler に因みアメリカ数学会の委託でデザインされたものである.

[27] その他の読み方についてはウィキペディアの「ギリシア文字」の項参照．筆順については諸説ある.

大文字：Γ（ガンマ），Δ（デルタ），Θ（シータ），Λ（ラムダ），Ξ（クシー），Π（パイ），Σ（シグマ），Υ（ウプシロン），Φ（ファイ），Ψ（プサイ），Ω（オメガ）

ドイツ文字　¶ 次に示すドイツ文字（亀甲文字・ヒゲ文字・フラクトゥール (Fraktur) とも呼ぶ）を使うことがある．括弧内に読み方を示す．筆記体についてはウェブ上に文献が色々ある．

小文字：$\mathfrak{a}$（アー），$\mathfrak{b}$（ベー），$\mathfrak{c}$（ツェー），$\mathfrak{d}$（デー），$\mathfrak{e}$（エー），$\mathfrak{f}$（エフ），$\mathfrak{g}$（ゲー），$\mathfrak{h}$（ハー），$\mathfrak{i}$（イー），$\mathfrak{j}$（ヨット），$\mathfrak{k}$（カー），$\mathfrak{l}$（エル），$\mathfrak{m}$（エム），$\mathfrak{n}$（エヌ），$\mathfrak{o}$（オー），$\mathfrak{p}$（ペー），$\mathfrak{q}$（クー），$\mathfrak{r}$（エール），$\mathfrak{s}$（エス），$\mathfrak{t}$（テー），$\mathfrak{u}$（ウー），$\mathfrak{v}$（ファウ），$\mathfrak{w}$（ベー），$\mathfrak{x}$（イクス），$\mathfrak{y}$（ユプシロン），$\mathfrak{z}$（ツェット）

大文字：$\mathfrak{A}$（アー），$\mathfrak{B}$（ベー），$\mathfrak{C}$（ツェー），$\mathfrak{D}$（デー），$\mathfrak{E}$（エー），$\mathfrak{F}$（エフ），$\mathfrak{G}$（ゲー），$\mathfrak{H}$（ハー），$\mathfrak{I}$（イー），$\mathfrak{J}$（ヨット），$\mathfrak{K}$（カー），$\mathfrak{L}$（エル），$\mathfrak{M}$（エム），$\mathfrak{N}$（エヌ），$\mathfrak{O}$（オー），$\mathfrak{P}$（ペー），$\mathfrak{Q}$（クー），$\mathfrak{R}$（エール），$\mathfrak{S}$（エス），$\mathfrak{T}$（テー），$\mathfrak{U}$（ウー），$\mathfrak{V}$（ファウ），$\mathfrak{W}$（ベー），$\mathfrak{X}$（イクス），$\mathfrak{Y}$（ユプシロン），$\mathfrak{Z}$（ツェット）

紛らわしい字記号　¶ ローマ・ギリシア・ドイツの対応する文字同士は当然紛らわしいが，その他に，次の縦棒 | で仕切った各組みの字記号も紛らわしいので注意してほしい．

$\flat$（フラット），b（ビー），$\mathfrak{b}$（ベー），$\mathfrak{v}$（ファウ），6（ろく）| $\triangle$（三角），Δ（デルタ）| $\in$（属す），ϵ, ε（イプシロン）| $\emptyset$（空集合），ϕ, φ, Φ（ファイ）| $\wedge$（かつ），Λ（ラムダ）| 入（いる），λ（ラムダ）| 1（いち），I（アイ），l（エル），$\mathfrak{l}$（エル）| 0（ゼロ），O, o（オー），$\bigcirc, \circ$（丸）| ρ（ロー），p（ピー），$\mathfrak{p}$（ペー），$\wp$（ペー）| 9（きゅう），q（キュー），$\mathfrak{q}$（クー）| $\mathfrak{x}$（イクス），r（アール）| 5（ご），$\mathfrak{s}$（エス）| $\cup$（和集合），U（ユウ）| υ（ウプシロン），v（ヴィ），ν（ニュー），γ（ガンマ）| $\vee$（または），V（ヴィ）| ϖ（パイ），ω（オメガ）w（ダブリュー）| $\times$（掛ける），χ（カイ），X, x（エックス），$\varkappa$（カッパ）| 3（さん），$\mathfrak{z}$（ツェット）| $\lozenge$（菱形），$\diamond$（ダイアモンド）| $\square$（ボックス），口（くち），ロ（カタカナ）| $\sharp$（シャープ），$\natural$（ナチュラル），#, ＃（ナンバー・ハッシュ），井（い）| -（半角マイナス），－（全角マイナス），一（いち），ー（長音符）| =（半角等号），＝（全角等号），二（に），ニ（カタカナ）| $\equiv$（合同），三（さん）| +（半角プラス），＋（全角プラス），十（じゅう）| $\exists$（ある・存在する），ヨ（カタカナ）

目 次

図 目 次

表 目 次

第1章　序説

¢ **数理心理学は数理科学の一典型である**．すなわち，まず現代の数学は「数量や図形や関数の学」ではなく「集合論に立脚した**合理論**」である．これに対し数理科学は，**経験論**を交えた

$$\boxed{\text{現象観察}} \to \boxed{\text{数理模型作り}} \to \boxed{\text{数学研究}} \to \boxed{\text{現象理解の深化発展}} \tag{1.0.1}$$

という流れの総体である [1]．この流れに沿って数理心理学者は，まず人間の心の働きという現象を観察し，次いでその観察結果から経験論によって数理模型を作り，さらにその模型について数学という合理論を行なうことにより，もとの現実の心についての理解を深め発展させようとする．この章では，こういう数理心理学の全体像を，概念の正確な定義なしに大づかみに説明する．

1.1　数理心理学が目指すもの

＄ たとえどんな困難が予見されようとも根源的な問に真正面から向き合うこと，それが学問の第一歩であるべきだろう．そして，次の一二歩をどの地点に踏み出すかが研究の成否を分ける．この節では，数理心理学の始めの数歩について考える．

1.1.1　問題のありか

§ 人間の脳の細胞構造がどんなに複雑なものであっても，また，そこで起きている化学現象がどんなに複雑なものであっても，突き詰めれば，脳は神経単位（＝ニューロン）が作る回路網に過ぎず，その回路網の上を単純な信号が行き来しているだけだと言う．しかし脳は，人の心の，思考し感情や意志というものを生じそれを意識するという，複雑な働きを担っている．脳の神経回路網上の単純な信号の行き来から，どうして複雑な心というものが生ずるのだろうか．この問題が色々な分野の科学者の関心を集めている．

---

[1]「数理科学とは何か」については，第 1.2.5 項で紹介する「現代数理科学事典」の序文も参考になる．そこでは「数理模型」は「数学モデル」と呼ばれている．

数理科学の流れ (1.0.1) を**ケプラー** (Johannes Kepler)・**ニュートン** (Isaac Newton) 等による惑星の公転の研究に即して説明すれば，まず現象観察に当たるのは惑星の軌道の観測であり，これによりケプラーの三法則が得られた．次に数理模型に当たるのは，ニュートンの引力の法則と運動方程式である．次に数学研究に当たるのは，これら法則と方程式から得られる微分方程式の研究である（ニュートン自身は微分方程式ではなく初等幾何を使った）．最後に現象理解の深化発展に当たるのは，この微分方程式の研究によって惑星の公転について予測したりケプラーの法則を証明したりすることである．

高等学校学習指導要領は「数学科の目標」の鍵となる「数学的活動」を次の三段階に分けて説明しているが，これは数理科学の流れ (1.0.1) を敷衍したものと解釈することができる．

1. 身近な事象の数学化：ある身近な事象を取り上げてそれを数学化し，数学的課題を設定する．
2. 数学的考察・処理：設定した数学的課題を既習事項や公理・定義などを基にして数学的に考察・処理し，その過程で見出した色々な数学的性質を論理的に系統化し，数学的知識（定理など）を構成する．
3. 数学的知識の意味付け・活用：数学的知識を構成する過程を振り返ったり，数学的知識の意味を身近な事象に戻って考えたり，数学的知識を他の具体的な事象の考察に活用する．

しかし，**脳の構造と心の関係を問う以前に問うべきことがある．それは，心とはそもそも何かという問である**．脳は心を実現できる幾つもの機構のうちの一つに過ぎないだろう（丁度，鳥の身体が空に浮くための幾つもの機構のうちの一つに過ぎないように）．だから，脳の構造や仕組みに囚われずに「心とは何か」「思考・感情・意志・意識とは何か」を問うことが先ず必要なのだ（丁度，ニュートンが地球上の物体に囚われずに「落下とは何か」を問うたように [2]）．しかも心についてのこういう問は，喧伝されている素粒子や宇宙や生命といった物質世界についての問にも増して，根源的で問う価値のあるものに思われる．私たち一人一人にとっては何よりも切実であるはずの「自分とは何か」という問に答えるには，心について問うより外に道はないと思うからである．

それでは，心についての学問的探究の現状はどうか．物質世界の原理を探る学問のうちでは，物理学が特に高度の発展を誇っている．その発展を支えてきたのは数理科学の方法 (1.0.1) である．それ無くしては，物理学のこれ程の発展は無かったに違いない．翻って，心の世界の原理を探る学問としての心理学に目を向けると，物理学との大きな落差に気づく．科学としての心理学は，物理学ほどには発展していないように見えるし，物理学ほどには数理科学の方法と親密でなかったように見える（これは心理学者だけの責任ではなく，物質科学を偏重してきた数理科学者の責任が大きい）[3]．そして多分，この二つのことは無関係ではない．心理学には，数理科学の方法を採り入れることで進歩する余地が残されていると思う．と言うよりは，**数理科学の方法でなければ解明できそうもない問題がある**と言った方がいい．**心とは何かというような形而上に関わるが故に困難な問題は，まさにその種の問題**だと思う．形のない研究対象にさえも数理模型という「複雑過ぎない形」を与えることによって合理論の対象たらしめようというのが数理科学の方法の精神だからである．

本書ではこういう問題意識に基づいて,「数理科学の方法によって行なう心理学」すなわち数理心理学の，新しい，そして私流の試みを説明しよう．本書の中では，単に「数理心理学」と言っても，それは私流の新しい数理心理学を指す（これ以外の心理学には，数理科学的か否かによらず「従来の」を冠する）.「数理心理学者」もしばしば私自身を指す．ただし,「私流の」を「風変わりな」とか「特殊な」とかと受け取ってほしくはない．私は，従来の数理心理学にまったく関わらないながらも，あくまでも数理心理学のあるべき姿を追究する積もりだからである．そして，この新しい数理心理学は広汎なものになると期待できるからである．

数理心理学で先ず何をしなければならないかは，心理学と物理学の比較をもう少し続けると見えてくる．物理学では数理模型を微分方程式で記述することが多い．しかし微分方程式を使うなら，その前に微分方程式論の場としての実数体 $\mathbb{R}$ や n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ の概念が必要だし，そういう場を作るためには，**デカルト** [4]による座標の発見が必要だった．ところが心理学では，場が何であるかさえ分かっているとは言い難いのである．従って，デカルト座標に当たるものを見つけて**場が何であるかを確定すること，それが数理心理学の最初の課題**となる．

つまり現段階では，数理心理学はデカルト以前と言ってもいい．しかし，17 世紀前半のデカルトの時代と違って現代では，数学や科学の知識が沢山蓄積されているし，実験手段も格段に進歩している．研究の方向や方法を適切に選ぶなら，数理心理学が短期間に飛躍的に発展する可能性はある．事実私は，何がデカルト座標に当たるかは第 1.3.3 項で説明し，何が数理心理学の場かは第 1.4.1 項で説明する．さらにその場の上に立って第 5 章以降では，数理科学の流れ (1.0.1) に沿って

[2]地球上の物体を落下させる力と同じ法則に従う力が太陽と惑星間にも働いて惑星は太陽に向かって落下し続けているというのがニュートンの洞察の真髄であろう．

[3]物理学と心理学についての以上の現状認識は，第 1.2.5 項で紹介する「現代数理科学事典」に基づく．

[4]René Descartes．哲学者・物理学者・数学者．数学では座標幾何学（＝解析幾何学）の開祖．座標幾何学は，座標を使って図形を方程式で表し，それをもとにした代数計算の結果を図形的に解釈することにより図形を研究する幾何学．これも数理科学の流れ (1.0.1) に沿っている．つまり，現象観察に当たるのは図形観察であり，数理模型作りに当たるのはその図形を方程式で表すことであり（それ以前に $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ はそれぞれ直線・平面・空間の数理模型である），数学研究に当たるのはその方程式の研究であり，現象理解の深化発展は，その数学研究の結果を図形的に解釈することに当たる．

数理心理学に相応しい数理模型を一つ作り，それについての数学研究を行なう．私はそれを，数理心理学の最初の飛躍的発展と自負している．

1.1.2　人間機械論と巨視・抽象

§ 私が目指す数理心理学の大まかな性格は，本書の副題の四つの言葉「思考機械」「論理」「言語」「代数系」が示している．中でも第一に挙げるべきは「思考機械」という言葉である．電脳（＝コンピュータ＝電子計算機）という機械の存在が数理心理学の出発点だからである．

電脳は人間の思考の一部を模擬するかに見える．そういう機械を目の当たりにすれば，人脳と電脳はどう違うのかという疑問が当然のように湧いてくる．そして，感情や意志を捨象して [5] 人脳を思考機械とみなし，この機械がどんな機械なのかを問うという観点に思い至る．この観点に立つなら，思考機械・人脳を数学的に抽象して**代数系** [6] の概念に行き当たり，この代数系の構造を追究することにより**論理**の研究に導かれ，然るべき論理学を作るために**言語** [7] の観察に向かう，というその後の道筋は必然的に思える．この道を行くなら，数理心理学は思考だけでなく心全般についての科学となり得るだろう．諸学への応用の道も切り開き得るだろう．これが，私の眼前にいま開けている数理心理学の道筋の展望であり，図 1.1 はこの道筋を図解したものである．

図 1.1: 数理心理学の道筋とその序説での説明箇所（実際はこのように一本道ではない）

$$\boxed{\text{思考機械}} \xrightarrow{\text{第 1.3節}} \boxed{\text{代数系}} \xrightarrow{\text{第 1.4節}} \boxed{\text{論理}} \xrightarrow{\text{第 1.5節}} \boxed{\text{言語}} \xrightarrow{\text{第 1.6節}} \boxed{\text{心全般}} - \cdots \rightarrow \boxed{\text{応用}}$$

そういう次第で**数理心理学者は，思考に焦点を合わせて人脳を思考機械とみなす．当面はさらに，人間から脳以外のものを捨象して「人間＝思考機械」とも考える．**数理心理学者はこういう意味での人間機械論の観点に立つ（実は第 1.4.1 項で説明するように，より広汎な機械論の観点に立つ）．

ただし数理心理学者は，ニューロンのような小さくて具体的なものを機械的単位とみなすのではない．数理心理学者は「脳の神経回路網はどういう具合に出来ていて，そこを信号がどういう具合に伝わって行き，その結果どうなるのか」の類のことを問題にしない．まして神経回路網の数理模型を研究するのではない．数理心理学者は，人間の心の働きを観察することによって脳内に存在すると推定される，ニューロンよりもっと大きなまとまりを機械的単位と考える．そういう単位の実態が具体的にどういうものかは，まだ分かっていないし，今後もそう簡単に分かるとは思えない．しかし実態が具体的に分からなくとも，そういう単位を使って考えて数学的研究の場を見出そうとする．こういう意味で，**数理心理学の方法は巨視的かつ抽象的である**．

こういう研究方法の一番いい例は，**メンデル** [8] による遺伝の研究である [9]．現在では，遺伝子は細胞内に DNA（＝デオキシリボ核酸）の一部として実際に存在することが分かっている．しか

[5] ここで捨象した感情・意志は第 1.6 節で拾い戻して考察する．

[6]「代数系」は第 1.2.1 項で大まかに定義し第 3.1 節で正確に定義する．

[7] この「言語」は「自然言語」を指す．ただし「自然言語とは何か」は，「生命とは何か」と同程度の難問で，いま明確に答えることはできない．便宜的に説明するなら，日本語・中国語・英語などのような「特定の社会・集団の中で心伝達（＝コミュニケイション）のために自然発生して共有される記号の体系」が自然言語である．普通は単に「言語」と呼ぶが，人工言語に対置したい時などに「自然言語」と呼ぶ．自然言語も人工言語も人間が作ったものだし人間も自然の一部なのだから，「自然」「人工」と区別するのは実はおかしいが，それはさて措く．

[8] Gregor J. Mendel．カトリック聖職者・学者．その遺伝の研究は 1865 年に発表された．

[9] この章冒頭の脚注 [1] で数理科学の例として触れたケプラー・ニュートン等による惑星の公転の研究も巨視的・抽象的である．なぜならこの研究では，惑星の内部構造や体積や自転を捨象し，惑星を質点とみなす．もっともそれは，惑星が肉眼では一点として観測されることによる怪我の功名であろうから，そう目覚ましい巨視・抽象ではない．

し，そのことが分かる遥か以前にメンデルは，エンドウの巨視的な形質の遺伝現象を観察した結果，それら形質の発現を司る遺伝子なる機械的単位が存在すると推定し（メンデル自身は「遺伝子」ではなく「要素」と呼んだが），その単位の実態が具体的に分からなくとも，その単位を使って考えて数学的研究の場を見出し，その場の上での確率計算によって遺伝現象を説明することができたのである [10]．そして「遺伝子」は，その実態が具体的に分かった現在でも，遺伝や形質発現という現象の説明概念として重要性を失っていない．数理心理学はこの「遺伝子」に相当する巨視的・抽象的な「心の説明概念」を発見しようとしているのだ，と言うこともできる．

なお人間機械論は，数理心理学の出発点であるばかりでなく，その道程において道を間違えないように私たちを導いてくれる磁針にもなる．数理心理学を行なう際には，当然のことであるが，人間の心の働きを人間が観察して心を働かせることになる．観察者と観察対象は同種の心をもった存在なのだ．そこでつい，観察者自身の心の働きと観察対象の心の働きを区別せずごちゃ混ぜにして考えやすくなり，そのことから色々な考え違いが起きる．人間機械論という観点に立てば,「観察対象は機械であって観察対象の心の働きとは機械の働きのことなのだ」とはっきり意識するようになるから，そういう考え違いが起きにくくなるのである（そのことの例が第 1.4.3 項にある）．

1.1.3　思考機械と意識

§ 数理心理学は人間を思考機械とみなすという観点に立つ．その結果，**数理心理学の出発点では,「意識」というものは取り敢えず重要視されない**.「意識とは何か」「機械は如何にして意識を持ち得るか」という問がいずれ考えなければならない根源的な問だということは確かである．しかし思考機械なら，別に意識を持たなくても思考することは可能だろう．実際，現在の電脳は，人間のような意識を持つとは思われないが，思考に類することを行なうことができる．人脳もまた電脳と同じように，無意識的な思考，と言うよりは計算をしているに違いない．むしろ，そういう意識下の思考・計算は，意識に上る思考よりも遥かに膨大なものだろう．そういう思考・計算にも目を向けなければならないと考えられる．

なぜそう考えられるのか．一つの根拠は神経心理学者による次のような指摘である．人が読み書きしたり意識的に考える時には，一つの語を思いつくと，たとえそれを声に出さずともその語の発声のための筋緊張が起きて，その筋緊張の情報が大脳皮質に送り返され，それでその語のはっきりした「心像」が出来上がるのだと言う．これは意識と言葉と思考の間の関係についての興味深い指摘である（ただしこの指摘は，曖昧なところも多いし，循環論法の気味もあるし，根拠も不明である）．もしも意識の正体がそういうものなら，思考の内容は，有声無声の言葉として現れて始めて意識されることになるだろう．しかしたとえ無声でも，その言葉を発するための精妙な筋緊張の指令を出すためには，意識下での綿密な計算が前もって行なわれているはずなのだ．これが，意識下の思考・計算が膨大なものだろうという考えの根拠の一つである．

---

[10] たとえばエンドウについて，種子を丸くする遺伝子を A で表し，種子に皺を作る遺伝子を a で表し，子葉を黄色にする遺伝子を B で表し，子葉を緑色にする遺伝子を b で表し，集合 α と β を $\alpha = \{A, a\}$, $\beta = \{B, b\}$ と定める．そして種子の形と子葉の色以外の面を捨象すれば，エンドウは，α の二元 x_1, x_2 と β の二元 y_1, y_2 から成る列 $x_1x_2y_1y_2$ と抽象される．たとえば AaBb というエンドウは，A が a に対して優性で B が b に対して優性なので，種子は丸く子葉は黄色となる．こういう優生原理によりまた，種子に皺があって子葉が緑色のエンドウは aabb に限る．親エンドウ $x_1x_2y_1y_2$ から出来る雌蕊の卵細胞と雄蕊の花粉は，x_iy_j $(i, j \in \{1, 2\})$ のどれかとなる．そして，卵細胞 xy と花粉 $x'y'$ から出来る子エンドウは $xx'yy'$ となる．こういう生殖原理と先の優生原理により，どういう親からどういう子が出来るかの確率を計算することができる．そしてその計算結果は実験結果と一致したのである．

メンデルのこの研究を数理科学の流れ (1.0.1) に沿って説明すれば，現象に当たるのはエンドウの遺伝であり，数理模型に当たるのは，$x_1x_2y_1y_2$ のような記号列の全体に生殖原理に従う演算規則と優性原理に従う意味付けを与えて出来る系であり，数学に当たるのは確率論であり，現象理解に当たるのは，どういう形質のエンドウを掛け合わせればどういう形質のエンドウがどういう割合で出来るかの予測である．

課題 1.1.1 意識というものが発声筋の緊張と関係しているのなら，生まれつきの聾唖者の意識とはどんなものなのだろうか．

「意識とは何か」を問うのを先送りしたいのは，これ以外には意識についてさしたる疑問が見当たらないからでもある．意識についての疑問が色々あり，意識とは何かを適切に定義できたり説明できたらそういう疑問が解消され豊かな実りが期待できるのなら，是非ともすぐに定義・説明しなければならない．しかし，今がそういう状況だとは思われない．

こういうわけで，本書では「意識とは何か」は問わない．しかし，将来他所でこれを問う場合に備えて，その構想の一部をここに記しておこう．

まず,「意識」という言葉の多義性に注意しなければならない．実際この言葉は，少なくとも,「覚醒度」「自己の思考内容の認知」「自己存在感」という三つの意味を持つ．このうちの「覚醒度」は，単に生体の「活性度の高低」であろう．ただし活性度の高低は，当然，自己の思考内容を認知する能力や自己存在感の強弱に関係し，その故にこそ「覚醒度」として現れるのであろう．次に「自己の思考内容の認知」の意味の「意識」は，単に「出力の再帰的入力」であろう．従ってこの二つの意味の「意識」は，電子計算機にも既に存在するし，改めての研究意欲をあまりそそらない．ただし人間の場合,「出力の再帰的入力」には前述の「発生筋の緊張」が，従って言語が関わる．また，**ゲーデル** (Kurt Gödel) の不完全性定理の証明において論理式等にゲーデル数を対応させるが，この対応は「出力の再帰的入力」の一種ともみなせるから，不完全性定理は思考機械の意識についての定理ともみなせる [11]．従って,「出力の再帰的入力」の意味での「意識」に関しては，神経学・言語学・論理学 [12] の見地からなら研究の余地はあろう．

というわけで，三番目の「自己存在感」が，最も興味を引く「意識」である．実際,「自分が存在している」というこの感じは実に不思議なもので，これの正体を知りたいという思いは，万人の共有するものであろう．

意外にも,「自己存在感」としての「意識」を数学的に研究するための場が何かという問題は，以下に記すような次第で，さほど困難とは思われない．これは，第 1.1.1 項で掲げた「数理心理学の場は何か」という課題が困難であるのと対照的である．このことは，裏を返せば,「自己存在感とは何か」という問題は，やはり数理心理学の問題だとしても，本書とは異なる観点から研究すべきものだということを示唆する．そして，その観点と本書の観点をどう結びつけるかが困難であろうことを暗示する．あるいはまた,「自己存在感」としての「意識」は，不思議なものではあっても，数理心理学の主要問題とはすべきでないことを暗示するのかもしれない．

さて,「自己存在感という意味の意識」（これを以下，単に「意識」と呼ぶ）は，外界からの刺激の受容と記憶から生ずると考えられる [13]．ただし，自己の身体も外界の一部である．そういう外界からの時刻 t における受容刺激 $\mathsf{f}(\mathsf{t})$ は，受容器の個数が n であれば，n 次元のベクトル値関数とみなすことができる．人間の場合でも他の生物の場合でも一般に n は非常に大きい．しかし説明の都合上，極端に単純な世界に住む極端に単純な生物を想像し，$\mathsf{n}=1$ と仮定する．そうすると，受容刺激 $\mathsf{f}(\mathsf{t})$ は実数値関数である．そして，この刺激が記憶されるということは，各時刻 t に $\mathsf{f}(\mathsf{t})$ を受容したときに，少なくとも単位時間 [14] 前の時刻 $\mathsf{t}-1$ の受容刺激 $\mathsf{f}(\mathsf{t}-1)$ がまだ体内に

---

[11] ゲーデルの不完全性定理の一般化についての第 4.10 節参照.

[12]「論理学」は本書では「数理論理学」を指す．端書きの脚注 [8] 参照.

[13] これと似通ったことを色々な分野の科学者が言っている．たとえば,「以前の自己を記憶し，それを統合することによって自己を意識できる（本間三郎）」「記憶が存在するからわれわれの意識がある（John Eccles)」「われわれが自分自身を意識しているのは，以前の自己の状態を記憶し，それをつぎ合わせて前後の整合性を感じていることによる（塚原仲晃)」．しかしこれらは，数学的定式化を欠くから，断片的な感想の域を出ない.

[14] ニューロンが一度発火すると，次の発火までに「不応期」がある．従って，刺激 $f(t)$ は t について連続的に受容されるのではなく，不応期おきに離散的に受容されると考えなければならない．そこで，不応期の長さを時間の単位とする.

保持されていることを意味する．そこでさらに，後退差分 $g(t)=f(t)-f(t-1)=\dfrac{f(t-1)-f(t)}{-1}$ の値が体内で計算されると仮定する（そういう計算をする神経系を設計することは容易だ）．この差分 $g(t)$ が「一次元の意識」の正体であるというのが私の仮説である [15]．

こういう意識 $g(t)$ を研究するには，$f(t)$ が任意の $t \geq 0$ に対して存在すると考え，後退差分 $g(t)$ を微分 $f'(t)$ で近似すればいい [16]．そうすると，一次元の意識 $g(t)$ は受容刺激 $f(t)$ を原始関数とする関数である（逆に，受容刺激 $f(t)$ は意識 $g(t)$ の積分 $\int_0^t g(x)dx$ である）．従って，原始関数を持つ関数の理論の中に既に，一次元の意識の理論があることになる．実際たとえば，そういう関数については連続関数についてと同様の中間値の定理（「ダルブーの中間値の定理」と呼ばれる）が成り立つが，これは，一次元の意識には途切れがないことを示すものと解釈することができる．

高次元の意識については，上記のことを一般化して考えればいい．ただしこういう意識の理論は，「意識の振る舞い」についての知見を与えてはくれるであろうが，「意識とは何か」という問に真正面から答えるものではないかもしれない．ニュートン力学は，運動方程式「力＝質量×加速度」によって「力の振る舞い（力の働いた結果）」についての知見を与えてはくれるが，「力とは何か」という問には答えてくれない．それと同様の事情が「意識」についてもあるように思われる．

1.2　他の研究分野との関連

＄ 人間の行動は心の働きによるものだから，人間の行動についての学問はすべて心理学に関連する．また，人間は生物の一種なのだから，人間の心の働きも「生命の原理」に従うだろう．だから，進化論も深いところで心理学に関わる．また，生命はこの宇宙における物質存在の一形態なのだから，物質や宇宙の根源を探る学問も心理学と無関係ではない [17]．こう考えると，数理心理学とまったく無関係な学問というものは余りないように思われる．しかし，数理心理学はまだ若い学問であり，心の働き方を問う以前の，心の構造を問う段階にある．こういう段階では，数理心理学が直接に関わり合う研究分野はそう多くない．この節では，そういう分野を概観し，そういう分野と対比したり，そういう分野になぞらえたりしながら，数理心理学の始めの数歩についてもう少し説明しよう．

1.2.1　なぜ代数学か

§ 数理心理学は人間を思考機械とみなすという観点に立つ．そして本書の副題には，「思考機械」に続いて「論理」「言語」「代数系」という三つの言葉がある．このことが示す通り，数理心理学は論理学・言語学・代数学と深く関わる（図 1.1 参照）．

数理心理学が論理学・言語学と関わることは，読者の多くが，詳細を知らずとも当然と感ずるだろう．しかし代数学と関わることは，反対に奇異と感ずる読者が多いのではないだろうか．私自身にとっても，「心」について漠然と考え始めた頃には，代数学が関わってくるとは思いも寄らないことだった．数学を代数学・幾何学・解析学に大別するが，およそ代数学ほど「心」から遠く感ぜられるものはなかった．しかしそれは，私が代数学の伝統に知らず縛られていたからなのだ．

---

[15] $g(t)$ は場合によっては負の値を持つので，「負の意識とは何か」という疑問を持つ人がいるかもしれない．しかしそれは，$n=1$ という特殊性に惑わされての疑問である．n が一般の場合には，意識 $g(t)$ もベクトルであって向きを持つ．$n=1$ の場合の $g(t)$ の正負の違いも，向きの違いに過ぎない．

[16] 刺激が離散的にしか受容されなくとも，刺激そのものは連続的に存在する．また，不応期は短い．従って，こういう近似の精度は高いと考えられる．

[17] 生命のもととなるアミノ酸は宇宙空間で生成されて地球に飛来したという説がある．

代数学は数の代わりに文字を使って方程式を立てるという技法の発明から始まり,「代数学」の名もそのこと由来する．しかしより重要なことは，方程式の解の概念が数の概念の拡張を促したことである．最も原始的な数の概念は自然数 $1, 2, 3, \ldots$ だが，それは $x+1=1$ や $x+2=1$ のような方程式にも解を持たせるために整数 $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ の概念に拡張され，それはさらに $2x=3$ のような方程式にも解を持たせるために有理数（＝分数）の概念に拡張され，それはさらに $x^2=2$ のような方程式にも解を持たせるために実数（有理数と無理数）の概念に拡張され，それはさらに $x^2+1=0$ のような方程式にも解を持たせるために複素数の概念に拡張された．さらに，$x+2y=3$, $x+y=1$ のような連立一次方程式の解法の研究から生まれた行列の概念も，数の概念の拡張とみなすことができる．こういう「拡張された数」の集合（複素数の集合や行列の集合等）に共通する特徴は，その中で加算や乗算等の全域的または局所的な算法が可能なことだが，数学の発展につれて，算法の概念が**変換**の概念に包摂され [18]，拡張された数の集合に限らぬ色々な集合上の色々な変換が重要な役割を演ずることが気づかれて，一般の集合 A とその上の変換の族 R の組み (A, R) としての代数系の概念が発明された（旨いことに,「代数系」は「数に代わるものの系」と読むことができる）．こういう経緯で，**現代の代数学は「方程式の学」を超越した「代数系の学」である．**

しかし数学界では伝統的に，方程式の学で主役を演ずる群・環・体が代数系の中で最も基本的なものとされ，環の一種に過ぎない「多元環」に「代数 (algebra)」と僭称させることさえある [19]．こういう伝統に縛られていれば，代数学を「心」から遠い存在と感じても不思議はない．

いま考えれば，数理心理学に代数学が関わってきたのはむしろ必然的に思える．数理心理学に論理学や言語学が関わるのが当然なら，それに代数学が関わるのもまた当然なのだ．その理由は,「思考機械」「言語」「論理」に応じて少なくとも三つある．

第一に，**思考の対象世界も機械も数学的には代数系と抽象される**からである．しかも実は，思考の対象世界をどういう代数系と捉えるかが数理心理学の核心なのだ [20]

第二に，**自然言語は代数系と密接に関連する**からである．実際，伝統的文法学者が自然言語の文法を書き上げる作業は，**普遍型付代数系**を構成する作業に他ならない [21]．ただし，文法学者はそうとは気づいていないであろうし，その普遍型付代数系は自然言語そのものではない．

第三に，**論理学は代数学に包摂されるべき**だからである [22]．流布している論理学の教科書には，論理学を代数学の中で論ずるものはあまり見かけない．そしてこれには，現代論理学の成立事情の絡むもっともな理由もある．現代論理学は，主に数学者が数学基礎論のために発展させたものだ．特に公理的集合論を記述するためには，一階述語言語を集合概念なしに構成しなければならない．だから，そこに代数学を使うわけにはいかない．そこで数学者は，代数学を使わずに論理学の教科書を書く．そして数学者以外の著者は，やむを得ずだろうが，数学者に追従する．しかし，科学や工学のために論理学を使うのに，公理的集合論から始める必要は更々ない（ただし，公理的集合論の教養は科学や工学にも必要だ）．だから，代数学を論理学に使うのをためらう理由は余りない．しかも代数学を使えば，論理学を一般的・抽象的かつ明瞭に説明することが可能になる（ただし，これを明瞭と感ずるためには，代数系に慣れている必要がある）．

実は，代数学に論理学を包摂させるためには，**変換と代数系の概念をさらに拡張しなければなら**

[18] 集合 A の有限個の直積の部分集合から A への写像 ρ を A の上の変換と呼ぶ（これをも第 1.3.3 項以降では算法と呼ぶ）．また，A の元 $x_1, \ldots, x_n, y$ が $\rho(x_1, \ldots, x_n) = y$ をみたすとき，ρ は列 $x_1, \ldots, x_n$ を y に**変換する**と言う．

[19] 第 1.2.5 項と第 3.34 節で参考文献として挙げる「現代数学概説 I」のあとがきに「多元環は英語で algebra と呼ばれることもあるほどで，その理論は代数学の重要な分科として発展してきた」とある．

[20] 機械が代数系と抽象される次第は第 1.3 節で説明する．数理心理学者が思考の対象世界をどういう代数系と捉えるかについては，第 2 章で概略を説明した後，第 5 章・第 6 章の格論理学における「世界論」として詳述する．なお，述語論理学者が思考の対象世界をどういう代数系と捉えるかを第 1.4.1 項で説明する．

[21] このことは第 1.5.3.1 条と第 3.6.1 項で敷衍する．「普遍型付代数系」は第 3.5 節で定義する．

[22] この理由の一つを第 1.2.3 項で説明する．また，論理学が代数学に如何に包摂されるべきかが第 4 章の主題である．

ない． すなわち，任意の集合 A に対して，まず A の元の有限列の全体 $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$ と A の間の任意の関係 R を A 上の広義の変換と考え，R が A の元の列 $x_1, \ldots, x_n$ を A の元 y に変換するとは A^* の元 $x_1 \cdots x_n$ が $x_1 \cdots x_n \, R \, y$ をみたすことと考える．そして対 (A, R) を広義の代数系と考える．ただしこういう対は,「代数」を付けて呼ぶのはもはや不適当なので**界**と呼ぶ [23]．

さて，上記三つの理由により，代数学は数理心理学にとって不可欠の存在である．音楽にたとえれば，代数学は数理心理学の指揮者であり通奏低音である．

それでは代数学以外の数学はどうか．第 1.1.3 項で触れたような「自己存在感としての意識」の研究は解析学的・幾何学的なものとなるだろう．しかし数理心理学者はそういう研究を不急のものとして先送りした．また，心理を機械論によって探るにしても，社会心理の変動を研究するのなら，一人一人の内面の詳細は捨象して人間を単純な入出力機械とみなし，ニューロン間の信号伝達を研究する時を真似て回路網模型を使ったりするのが有効だろう．そういう研究も解析学的・幾何学的なものとなるのかもしれない．しかし数理心理学者は，そういう研究にも食欲をそそられない．数理心理学者は，第 1.1.1 項で「自分とは何か」という問を掲げたことが示すように，一人一人の内面の詳細をこそ研究したいからである．

こういう次第で，解析学や幾何学が数理心理学で重きをなす可能性は小さいように思われる．たとえば何らかの微分方程式で人の心を説明するというような考えは，私にはどうしても出て来ない．そもそも，第 1.1.1 項で指摘したように場が何であるかを確定することが数理心理学の最初の課題であるが，代数学的な概念以外に場と考えられるものは未だ出て来ない．

1.2.2　なぜ言語学か

§「精神のあらゆる手段は言語の中にある．言語について省察しなかった者は，全然何も省察しなかったも同じことだ」という辛辣な警句を残した人がいる [24].「言葉は心の現れだ」とも言われる．こういう言説に数理心理学者は深く同意する．言語が精神の貴重な手段であると共に心の顕著な現れであることは疑いない．ただし数理心理学者は，人間を思考機械とみなすから,「**自然言語という体系の構造に思考機械・人間の構造が現れている**」というように考える．もう少し詳しく言うなら，自然言語の**意味構造**（もの事 [25] の有様を表現する言葉の使われ方の法則）と**論理構造**（思考の筋道を表現する言葉の使われ方の法則）が思考機械・人間の構造をかなりの程度に反映していると考える [26]．だから，思考機械・人間の構造を探ろうという数理心理学者は，自然言語を観察してそれをどうにか解釈しなければならない．端的に言うとこれが，数理心理学に言語学が関わる理由である．

第 1.1.2 項で数理心理学の目標をメンデル遺伝学にたとえて説明したが，そのたとえを続けるなら，数理心理学者が探ろうとする思考機械・人間の構造はエンドウの遺伝子型 [27] に相当し，その探りのために数理心理学者が観察する自然言語は，エンドウの表現型に相当する．エンドウの表現型が遺伝子型と環境の影響によって決まるように，自然言語は思考機械・人間の構造と環境（歴史・文化などの社会環境）の影響によって決まる．数理心理学者がエンドウの表現型を観察するの

[23] 以上が変換と代数系の概念の拡張であることについては例 3.24.1 参照．この拡張は真の拡張である．たとえば自然数の組み x, y のその共通因数 z への変換は，z がただ一つとは限らないから，狭義の変換ではなく広義の変換である．

[24] フランスの哲学者アラン (Alain= Emile Chartier) と思われるが，出典は不明である．

[25]「ものごと」は漢字では普通は「物事」と書くが,「もの」で「物」と「者」の両方を表す都合で「もの事」と書く．

[26]「言葉の使われ方の法則」がいわゆる文法である．従って，意味構造も論理構造も文法の一部である．なお自然言語の中には，もの事の有様と思考の筋道を表現する言葉の他に，話者の陳述態度・感情・意志など色々な種類のものを表現する言葉がある．

[27] 遺伝子型は生物個体の持つ遺伝子の型を指す．これに対し後出の表現型は，個体の形質の型を表す．第 1.1.2 項の脚注 [10] に即して説明すれば，$AaBb$ とか $aabb$ とかは遺伝子型であり，種子が丸く子葉が黄色いとか種子に皺があって子葉が緑色とかは表現型である．

は，その観察結果から環境の影響を捨象することによってエンドウの遺伝子型を浮かび上がらせるためなのである．

さて，数理心理学者は自然言語に思考機械・人間の構造が現れていると考える．しかし，思考機械・人間の構造や状態は，言葉にだけでなく，人間の行動全体に現れているはずではないか．**発話行動**[28]だけに限ってみても，音声の波形や大小や高低・話し方の速さ・話すときの表情や身振り手振りなどのすべてが心の現れのはずだ．ところが数理心理学者は当面，音声の波形や大小や高低・話し方の速さ等には注意を払わない．注意を向けるのは言葉に対してだけである．それでは，なぜ言葉だけに注意を向けるのか．数理心理学者の答ははっきりしている．数理心理学者はまず，思考機械・人間を代数系として抽象する．そしてこの代数系の構造を問う．人間の心は確かに人間の行動全体に現れる．しかしこの代数系の構造に限れば，人間の行動の中の代数的構造を持つ部分に現れているはずではないか．そして人間の行動の中の代数的構造と言えば，言語行動から音声の大小・高低等を捨象したものの中に，つまり言葉の中にしか見当たらない．だから**数理心理学者は当面，人間の言語行動の中でも，言葉にしか注意を向けない**のである．

ところで，人間機械論という観点に立つ時に直ちに起きる疑問がある．それは,「機械が機械を使うとは如何なることか」というものである[29]．人間は機械や道具を沢山使って生活している．そしてそのことを別に不思議とも思っていない．しかし，人間をも機械とみなすなら，機械が機械や道具を使うという現象が起きていることを認めることになるのであり，これがいったい如何なる現象なのかを問わずにはいられない．ただし数理心理学では，人間を思考機械とみなすのだから，人間が思考のために使う機械や道具が問題になる．そういう道具として直ぐに思い当たるのも，また言語である．ただし，ここでの「言語」は自然言語に限らない．たとえば，数学の定理の証明を記述するときには，私たちは関数記号や一階述語言語文もどきを自然言語に混ぜて使う．そういう人工言語も含めて，言語は人間が思考のために使う道具である（この項冒頭のアランの警句参照）．だから**言語は，思考の現れとしてだけでなく思考の道具としても，思考機械・人間の構造をなにがしか反映している**はずである[30]．

他方で，人間の使う道具がすべて人間の構造を良く反映しているわけではない．このことが，数理心理学に重大な問題を提起している．自然言語の中には，思考機械・人間の構造をあまり良く反映しない道具も混じってはいないだろうか．もし混じっていれば，自然言語を丸ごと研究しては，必ずしも思考機械・人間の構造を研究することには成らず，場合によっては，単に人間が使う道具の構造を研究することになる．現代，人は自動車で高速に走行することができる．だからと言って自動車の駆動装置をいくら調べても，人間自身の走行機能を研究することには成らない．人間と自動車の境目ははっきりしているから，人間の走行機能を研究するために自動車を研究するような人はいない．しかし**自然言語においては，思考機械・人間の構造を良く反映するものとそうでないものの境目は，それ程はっきりしてはいない．その境目を見定めることが，数理心理学にとっては重大な課題**なのである．そして，その境目をどの辺に置くのかと言えば，冒頭に述べた通り，自然言語の意味構造や論理構造はこの境目の内側にあると考えるのである．

それでは，逆にこの境目の外にあるものとは何か．一番はっきりした例は外国から輸入された語法である．日本語の場合は漢語系の複合語を思い浮かべればいい．たとえば「観桜会」という言葉を，読者は「桜を観るための会」と理解するだろう．ここで注意すべきは,「観」と「桜」の位置が入れ替わり「を」「ための」などの語が加わっていることである．また例えば「入園料」は,「園に

[28]「発話行動」は**音声言語**を表出する行動を指す．言語には音声言語の他に**文字言語**や手話などの**身体言語**がある．そういう言語一般を表出する行動は**言語行動**と呼ぶ．
[29]この疑問には，第 3.3 節の**擬写**という概念によって答えることができる．
[30]そこで格論理学は，関数記号に相当する算法を備えると共に，一階述語論理学等を埋め込めるように設計してある．一階述語論理学を埋め込めることの証明は第 5.8 節にある．

入るための金」と理解するだろう．ここでも,「入」と「園」が入れ替わり「に」「ための」などが加わっている．つまり,「観桜会」「入園料」という言葉の組み立て方は，日本人が考える筋道を忠実に表してはいない．言い換えれば，思考機械・日本人の構造を忠実に反映してはいない．同様の理由で，一般に，思考機械・人間にとって母語でない言語は，その思考機械・人間の構造を忠実には反映しない．ただし，思考機械・人間の構造は本質的には母語によらず唯一通りであろうから，母語でない言語も思考機械・人間の構造を間接的には反映していることになる．

以上要するに，**数理心理学には言語学が必然的に関わるが，既成の言語学ではなく，新しい観点からの言語学が必要になる**のである．このことについては第 1.5 節でさらに敷衍する．

1.2.3　なぜ論理学か

§「なぜ論理学か」やそれ以前の「論理学とは何か」については，数理心理学の核心に関わることなので，この項に限らず色々な所で，色々な方向から光を当てて説明する．

論理学の長い歴史を考えると意外であるが,「論理学とは何か」については今（2010 年）も未だ一致した意見がないようである．事実，計算機理論家や哲学者による「What is a logical system?」という論争の書がある [31]．そこでは「logical system」は「論理学で研究すべきもの」の意味なので，彼らはつまり「論理学とは何か」を論争していることになる．その論争に決着が付いた様子はない．当然，論理学の一般論・抽象論は発達していない．それを憂える人たちが一般論理学を標榜する「Logica Universalis」という学術誌を立ち上げたのも，ごく最近 (2007 年）である．私の以前の専門であった群論で「群とは何か」「群の公理はどう定めるべきか」の論争がとっくの昔に片付き [32]一般論・抽象論が高度に発達していることや環論・体論でも同様であるのと比べると歯痒い．そこでこの項以降第 4 章までの「論理学とは何か」の説明は，上記のような論争に決着を付けて論理学の一般論・抽象論まで展開する意気込みで行なう．まずここでは，第 1.2.1 項で代数学を「代数系の学」と説明した伝で説明すれば，**論理学は「論理系とその上の演繹系の学」である．**ただし「論理系」は，上記の「logical system」の訳ではなく，大まかには**形式言語**とその**意味論**の対を指す [33]．演繹系は**推論規則**と**論理的公理系**の対である．

次に「なぜ論理学か」と言えば，数理心理学者は人間が如何なる思考機械であるかを知るために数理科学の流れ (1.0.1) に沿って数理模型を作るのだが，思考機械・人間だけの数理模型を作るのではない．**数理心理学者は思考機械・人間とその思考の対象世界および両者の対応関係の数理模型を作るのであり，そういう数理模型にうってつけなのが，論理系とその上の演繹系**なのである．なお，このこととこれまでの説明を合わせれば，数理科学の流れ (1.0.1) を数理心理学に特殊化して書き直すことができる．すなわち，数理心理学は

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{自然言語を介して}\\ \text{思考機械・人間観察}\end{array}} \to \boxed{\text{論理系・演繹系作り}} \to \boxed{\text{数学研究}} \to \boxed{\begin{array}{l}\text{思考機械・人間の}\\ \text{理解の深化発展}\end{array}} \tag{1.2.1}$$

という流れの総体である．

以上のことについては第 1.2.4 項や第 1.4 節で敷衍することとし，以下この項では「なぜ論理学か」のやや異なる一面を，哲学を引き合いに出して説明しよう．もっとも，現在の哲学がどういう

[31] Studies in Logic and Computation 4, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[32] ただし例 3.13.1 や例 3.13.8 を見ると，確定不動と思われている群の公理についても再考の余地はある．

[33]「形式言語」「意味論」が何を指すかは第 1.4 節などで説明する．論理系は第 4.7 節で正確に定義する．第 3 章では第 3.19 節以降で，論理系と演繹系を一般化・抽象化して出来る**論対** (logical space) と**論拠**を論ずる．なお，論対論と論拠論を要約した私の論文「Theory of completeness for logical spaces」が上記 Logica Universalis の 2009 年号に掲載された．そういう論が一般論理学を標榜する学術誌に新奇な論として受け付けられたことは，裏を返せば，論理学の一般論・抽象論がこの年まで未発達であったことのはっきりした証である．

性格の学問なのか，私にはよく分からない [34]．しかし，哲学では「精神」が主要な研究対象のようであり,「精神」と「心」はほぼ同義だから，哲学が数理心理学と近しい学問なのは間違いなかろう．しかし，哲学と数理心理学の考え方の差違もまた大きい．数理心理学に限らず心理学では,「精神とは如何なるものか」を問う．そして問われる「精神」は，もちろん他者の精神を指す [35]．これに対し，哲学は「精神は如何にあるべきか」を問うもののようであり，そうだとすると，哲学が問う「精神」は己の精神を指すだろう [36]．このことは，思考と論理の関係についての哲学者の言からも察せられる．たとえば，哲学畑のと思われる論理学の教科書に次の一節がある [37]．

> 形式論理学は，われわれの「思考」を取り扱う学問であるけれども，思考を経験的事実として取り扱うのではない．つまり，思考というものは，われわれがもっている精神や肉体のどの機能が，どのような仕方で現実に働いて生ずるかを観察し，われわれの思考が働く場合に支配している法則を見出そうとするものではない．そのようなことにかかわらないで，われわれが「正しい思考」を行なうために従わなければならない規範または法則を設定し，それによってわれわれの思考が正しいか，正しくないかを吟味しようとするものである．この意味で，論理学は思考の事実学ではなく，思考の規範学である．

つまり，論理学は「正しい思考が如何にあるべきか」の学問だと言っているのだろう．しかしこれは，歴史的いきさつや哲学の目的がどうであれ，論理学を何ともつまらない学問と成してしまう，視野の狭い見方と言わざるを得ない．

数理心理学者の見方はまったく違う．数理心理学者は「思考とは如何なる現象なのか」を問う．そして，人間を思考機械とみなし，この機械がどんな機械なのかという事実学を目指すのであり，そのために論理学を使う．数理心理学者は他の科学者や数学者と同様，論理的思考が命であるが，自己の思考を吟味したり正当化したりするために論理学を使うことは決してない（それもあって，そういう論理学をつまらないと感ずるのだ）．**数理心理学者は，研究対象である人間がどんな思考機械であるかを記述し解析するための道具として論理学を使う**（丁度，力学で質点の運動を記述し解析するための道具として微分積分学を使うように）．なぜそう使えるかと言えば，**論理学は「如何なる記号変換能力から如何なる記号生成能力が生ずるか」を問う学問の一つ**だからである．

ただし「記号変換」「記号生成」における「記号」は，通常より広い意味に解さなければならない.「記号」と言うと通常は，個々の文字や個々の数字のような要素的なものを指す．しかし「記号変換」「記号生成」における「記号」は，要素的でないものも含む．自然言語に即せば，個々の文字だけでなく，文字を連ねて出来る言語表現も広い意味の記号である．2 進数に即せば，0 と 1 だけでなく，0 と 1 を連ねて出来る 2 進数も広義の記号である.「記号」を数学的に定義するなら,「任意一定の集合の元を文脈に応じて**記号**とも呼ぶ」とせざるを得ない [38]．

また,「記号生成」における「生成」は，何らかの記号に何らかの変換を繰り返して何らかの記号を生み成すことを言う．ただしここの「記号」も「変換」も広義である．たとえば電子計算機は，2 進数に色々な変換を繰り返して新たな 2 進数を生成する．またたとえば人は，言語表現を二つ繋

---

[34] 現在の哲学だけでなく，過去の哲学がどういう性格の学問であったのかも，私にはよく分からない．しかし科学が未発達の時代においては，哲学は科学に代わる「曖昧な科学」として現象界・精神界の根本原理を追究する学問であったようである．それだけに，科学の発達した現在・未来に哲学がどういう性格の学問たり得るのか，私には分からない．

[35] 他者と自分が同種の存在だと仮定して，自分自身を観察対象にすることもある．

[36] 哲学者を自称しいわゆる哲学的な論じ方をする人でも,「他者の精神とは如何なるものか」を問うのなら，心理学者と呼ぶべきであろう．事実，岩波「哲学・思想辞典」は哲学を,「統一的・全体的な人生観・世界観の理論的基礎を追究すべきもの」と規定する．人生観・世界観を追究するとは，すなわち「己の精神は如何にあるべきか」を問うことだと考えられる．ただしもちろん，哲学者は己の精神の理想像を他者にもすすめたいのだろう．

[37] 遠藤弘・白石光男共著「現代の論理学」の端書きの一節．

[38] 第 1.4.1 項での説明と定理 3.7.1 の証明の文脈で「記号」を広義で使う．

げて第三の言語表現を作るという変換を繰り返して複雑な言語表現を生成する [39]．人はまた論理的思考において，命題の組みに推論を繰り返して新たな命題を生成する．この第三の例では，要素的なものから複雑なものまで，命題すべてが広義の記号である．

また,「如何なる記号変換能力から如何なる記号生成能力が生ずるか」という問は，次のように数学的に言い直される．まず，記号の集合 A を任意にとり，A 上の広義の変換 R を任意にとる．組み (A, R) はつまり界である．次に A の各部分集合 X に対して，X の元に広義変換 R を繰り返し適用して生成される A の元の全体を $[X]_R$ で表す [40]．そうすると,「如何なる記号変換能力から如何なる記号生成能力が生ずるか」という問は，(A, R) を界全体に亘らせての「写像 $X \mapsto [X]_R$ は如何なる写像か」という問とみなされる．広義変換 R を記号変換能力とみなしたのである．こうみなした問を追究する論を**演繹論**と呼ぶ．演繹論は界 (A, R) と「如何なる」と問う内容の二者を特定することで範囲が具体的に定まり，これら二者を色々に変えることで色々な演繹論が行なわれる．論理学における演繹論では，A は形式言語の**命題**（＝真理値を持つ元）の全体であり，R は推論規則の族から出来る広義変換であって,「X の元と $[X]_R$ の元の真理値は如何に関係するか」を問う．

以上のように，論理学は「如何なる記号変換能力から如何なる記号生成能力が生ずるか」を問う学問の一つであり，この問は，界すなわち広義の代数系についての演繹論の問とみなされる．これが，第 1.2.1 項で「論理学は代数学に包摂されるべし」と強調した所以の一つである．

なお，論理学における演繹系の概念を拡張して，任意の集合 A 上の広義変換 R と A の部分集合 D の任意の組み (R, D) を，A 上の**生成対**または論拠と呼ぶ．そうすると，演繹系論は論拠論に拡張され，論拠論の目標は「写像 $X \mapsto [X \cup D]_R$ は如何なる写像か」という問の追究となるが，R の D **包**なる A 上の広義変換 R^D が定義されて定理 3.25.3 により $[X \cup D]_R = [X]_{R^D}$ が成り立つので [41],「論拠論＝演繹論」と考えていい．従って，論理学においては「演繹系論＝演繹論」と考えていい．そう考えれば，**論理学は文法論・意味論・演繹論の三本柱で立つ**ことになる．なぜなら，論理学は論理系とその上の演繹系の学であり，論理系は形式言語とその意味論の対であり，形式言語はその**文法**で定まるからである．

さて，哲学者の「正しい思考が如何にあるべきか」という問は,「記号＝命題」として「如何なる記号変換能力から正しい記号生成能力が生ずるか」と言い換えられる．ただし「正しい記号生成」とは，真なる記号からは真なる記号を導くことを言う．つまり，A を形式言語の命題の全体とし，R を A 上の推論規則の族の定める広義変換とするとき，R という記号変換能力から正しい記号生成能力が生ずるというのは，A の部分集合 X の各元が真であれば $[X]_R$ の各元も真であることを言う．そしてこう言い換えた哲学者の問は，論理学における演繹論の問に，すなわち「X の元と $[X]_R$ の元の真理値は如何に関係するか」という問に含まれる．哲学者が論理学を必要とするのはこのためである．計算機理論や数学基礎論や数理心理学も論理学を必要とする．計算機や数学者や人間一般を研究対象として，やはり真理値に関して,「如何なる記号変換能力から如何なる記号生成能力が生ずるか」を問わなければならないからである（数学基礎論がそう解釈されることについては第 1.2.4 項参照）．従って論理学に関しては，計算機理論や数学基礎論が数理心理学と同じ観点に立つのに対し，哲学は視野の狭い観点に立つ．

こういう違いにも拘わらず，数理心理学と哲学が行なうべき論理学には共通点が多い．哲学は正しい思考が如何にあるべきかを問題とする．その際の「思考」は，言語での意識的な思考を指すだろう．だから哲学では，自然言語の論理構造を探ることが必要になる．これに対し数理心理学で

[39] このため「生成」は言語学でも重要な概念である．たとえば，第 1.5.2.1 条で触れるチョムスキーの生成変形文法論の「生成」は，ここでの「生成」と同じ意味である．第 2.2.2 項「文法と生成的意味」参照．
[40] たとえば A が乗法群で R が A の乗法と逆元算法から出来る広義変換であれば，$[X]_R$ は X によって生成される A の部分群である．一般には第 3.24 節によれば，$[X]_R$ は界 (A, R) における X の**界包**に等しい．
[41] こういうことができるのが，代数系を界に拡張したことの御利益の一つである．

は，思考が如何なる現象かを問題とする．そして，人間を思考機械とみなし，この機械がどんな機械なのかを考える．この機械の構造は自然言語に反映されているはずだから，やはりまず自然言語の論理構造を探ることが必要になる．そして哲学と数理心理学のいずれにしても，自然言語の論理構造を探るためには，その前に自然言語の意味構造を探らなければならない．つまり数理心理学と哲学は，目的や考え方が全く違うにも拘わらず，自然言語の意味構造と論理構造を探らなければならないという同じ課題を持つことになる．

ただし，自然言語の意味構造・論理構造を探るにしても，それをもとに思考機械・人間を記述し解析するにしても，それに相応しい論理学が必要になる．数学基礎論の道具として生まれた述語論理学やそれに毛をちょっと生やしたような論理学は相応しくない [42]．**どういう論理学が相応しいかを根本から考え直さなければならない**ように思われる [43]．

課題 1.2.1　「すべての少年がほとんどの少女を好く」とすれば「ほとんどの少女をすべての少年が好く」と考えていいか．「ほとんどの少年が少女 A を好き，かつ，ほとんどの少年が少女 B を好く」とすれば「ほとんどの少年が少女 A と少女 B を好く」と考えていいか．「A は B な**のに**今は C している」とすれば「ほとんど何時もすべての B は C しない」と考えていいか．論理学が思考の規範学だというのなら，こういう問に答える規範も提供しなければならない．そのためには，どういう論理学を作らなければならないか．

1.2.4　数学基礎論になぞらえて見た数理心理学

§ いつの頃か数学者の中に，数学者の思考そのものを数学的に研究しようと志す人たちが現れた．こういう人たちを仮に「数学思考学者」と呼ぼう．数学思考学者は，当然のことながら，まず数学者の行動を観察した．数学者の行動とはすなわち，既成の定理の証明文を読んでそれを理解したり新たな定理を証明してその証明文を書いたりする行動である．つまり，数学者の行動は定理の証明文の中に端的に反映されている．そこで数学思考学者はまず，数学の定理の証明文を観察し，それらに共通する本質は何であるかを考え，その本質をやはり数学的に表現しようと試みた．試行錯誤の末に得られたのは，述語言語 [44] という形式言語およびそれと数学的世界の対応関係についての理論である．特に数学の定理の証明文は，正しかろうが間違いであろうが，述語言語の文で表現することができる．逆に述語言語文は，何らかの定理の証明文（それも正しかったり間違いであったりする）に書き直される．言い換えれば，証明文と述語言語文の間に対応関係がある．

ただし証明文と述語言語文のこの対応は，一対一の対応ではなく，それ故に曖昧な対応である [45]．一つの述語言語文であっても，それに対応する証明文は一つとは限らない．なぜなら証明文というのは，記号交じりの自然言語文であるから，同じ意味であっても語順や言葉遣いなどが人や状況によって変わり得るからである．証明文と述語言語文の対応には別の曖昧性もある．数学思考学者は，数学の定理の証明文がすべて述語言語文で表現できると証明したわけではなく，経験上は証明文はすべて述語言語文で表現できるというに過ぎなかったからである．この意味で，数学思考学者が述語言語に導かれるまでに行なったのは経験論なのである．

数学思考学に限らず，学問は一般に経験論と合理論の混成物であり，経験論部分には曖昧性がある．たとえばメンデル遺伝学やニュートン力学においては，遺伝の法則や運動方程式は経験論によ

[42]「毛をちょっと生やしたような」は「様相演算子や時制演算子を付加した」を意味する．
[43]私が相応しいと考える論理学は，第 5 章と第 6 章で提示する格論理学である．
[44]一階および高階の述語言語を指す．それらは幾つかの助変数に依存し，対象とする数学理論に応じて助変数を適宜に決めて定められる．ただし「助変数」は，一般に「パラメータ（＝限定要素＝限定要因）」を指し，数とは限らない．
[45]一対一対応でないことと曖昧性の関係については第 1.4.4 項参照

り得られ，そこには「遺伝子とは何か」「力とは何か」などについての曖昧性がある．しかし，一旦そういう法則・方程式が得られれば，それを基に厳密な論証によって遺伝や運動を理解したり予測したりする合理論が行なわれる．より一般に，数理科学は

$$\boxed{\text{現象観察}} \to \boxed{\text{数理模型作り}} \to \boxed{\text{数学研究}} \to \boxed{\text{現象理解の深化発展}}$$

という流れ (1.0.1) の総体であるが，数理模型を作るまでに行なわれるのは経験論であり，そこには何かしら曖昧性がある．しかし一旦数理模型が作られれば，それをもとに数学という合理論を行なって色々な現象を理解したり予測したりすることができる．そしてそういう予測の正しさが，数理模型の妥当性の証となる．図 1.2 は，数理科学のこういう性格を図解すると共に，上記の数理科学の流れを敷衍するものである．

図 1.2: 数理科学研究

$$\boxed{\text{現象}} \xleftrightarrow[\text{経験論}]{\text{曖昧な対応}} \boxed{\text{数理模型}} \xrightarrow[\text{合理論}]{\text{数学研究}} \boxed{\text{現象の理解・予測}}$$

さて，経験論によって述語言語という研究の手掛かりを得た数学思考学者は次に，述語言語文化された証明文を観察し，数学者が証明を考える筋道に共通する本質が何であるかを考え，それを数学的に表現しようと試みた．そして数学思考学者がやはり経験的に知ったのは，数学者は公理や前提に幾つかの簡単な型の論法（＝推論規則）を繰り返し適用することによって結論を導き出しているということであった．論法というのは，述語言語文の組みを述語言語文に変換する様式であり，その典型は，述語言語文 a と「a なら b」を意味する述語言語文 $a \Rightarrow b$ の任意の組み $a, a \Rightarrow b$ を述語言語文 b に変換するいわゆる modus ponens である [46]．こうして述語言語上の論理学として述語論理学が**フレーゲ** (Gottlob Frege)・**ラッセル** (Bertrand Russel)・**ホワイトヘッド** (Alfred Whitehead) らによって建設された．

一たび述語論理学が出来上がると，数学思考学者はいよいよ，数学者の思考を数学的に研究することができるようになった．つまり述語言語文の全体を A で表せば，まず，数学者が用いる論理的公理系と数学者が研究の対象とする数学理論の公理系は，A の部分集合 D と X と捉えられる．次に，数学者が使う論法の全体は，A 上の広義変換 R と捉えられる．組み (A, R) は界であり，組み (R, D) は A 上の演繹系（＝論拠）であり，$X \cup D$ の界 (A, R) における界包 $[X \cup D]_R$ が，その理論において証明可能な命題の全体に当たる．従って数学者には，$[X \cup D]_R$ に属す命題を X から演繹系 (R, D) によって証明する潜在能力がある（その能力が顕在化しないことの多いのが数学者の悩みの種であるが）．従って，三つ組み (R, D, X) を色々に選んだときに $[X \cup D]_R$ がどういう集合になるかを研究することは，つまり (R, D, X) と $[X \cup D]_R$ の対応関係を研究することは，数学者の潜在証明能力を研究することに当たる．そこで数学思考学者はこういう研究を**証明論**と呼ぶが，第 1.2.3 項に記した通り $[X \cup D]_R = [X]_{R^D}$ が成り立つので，これは界 (A, R^D) についての演繹論に他ならない．そしてこういう研究により，ゲーデルの不完全性定理や完全性定理が得られた．たとえば完全性定理によれば，ある具体記述可能な演繹系 (R, D) をとれば，任意の公理系 X に対して，X の下で真の命題はすべて $[X \cup D]_R$ に属す．つまり，この命題を X から (R, D) によって導く証明が存在する [47]．(R, D) のこの性質を**完全性** [48] と言う．

[46]「modus ponens」はラテン語で「mode that affirms（肯定する様式）」を意味する．
[47] このことは第 4.9 節で証明する．
[48]「完全性」は第 3.28 節でより一般的に定義し，その意味を第 3.30.5 項で説明する．

以上は数学基礎論において**超数学**として実際に行なわれたことを脚色した物語であり，図 1.3 はこの物語を図解したものである．ただし図中の「数学者の思考の枠組み」は,「数学者が数学的世界

図 1.3: 数学者の思考の研究

$$\boxed{\text{数学者の思考の枠組み}} \xleftrightarrow[\text{経験論}]{\text{曖昧な対応}} \boxed{\text{述語論理系}} \xrightarrow[\text{合理論}]{\text{演繹論}} \boxed{\text{完全性定理等}}$$

を認識する仕組み」「数学的世界」およびこれらの間の「対応関係」という三者を指す．また,「演繹論」は上記の通り「証明論」としてもいい．

図 1.3 が数理科学研究の図 1.2 の特殊化とみなせることは明らかであろう．つまり,「数学者の思考の枠組み」という現象の数理模型が述語論理系（述語言語とその意味論の対）であるが，その内訳を詳しく言えば,「数学者が数学的世界を認識する仕組み」の数理模型が述語言語であり,「数学的世界」と「対応関係」の数理模型が述語言語の意味論である．この意味で，超数学は数理科学の一典型である．世間一般が超数学を科学ではなく数学の一部と捉えているとしても，それは図 1.3 の経験論部分を知らぬか忘れたからに過ぎない．

なお，さっき「脚色した」と言ったのは，実は超数学者にとっては恐らく，自身の研究は数学者の思考の研究ではなく，述語言語も「数学者が数学的世界を認識する仕組み」の数理模型ではなく，証明文の数理模型であったからである．数学基礎論は事実，**カントル** (Georg Cantor) の始めた集合論が有用でありながら逆理を発生させたのを切っ掛けに，数学を反省吟味して逆理を解消し数学の基礎を確立する目的で始められ，**ヒルベルト** (David Hilbert) はその目的を，数学の各理論を公理論化し，それを述語言語によって形式化し，その公理系の無矛盾性を証明することで達成しようとした．しかし，それはまさに演繹論の一部と，つまり上記のような組み $(\mathrm{R},\mathrm{D},\mathrm{X})$ と $[\mathrm{X}\cup\mathrm{D}]_{\mathrm{R}}$ の対応関係を研究することの一部と捉えられる．なぜなら，数学理論の公理系 X の無矛盾性を示すことは，述語言語文とその否定の両方が X の下で真となることがないことを示すことに当たり，それは演繹系 (R,D) が完全の場合には，$[\mathrm{X}\cup\mathrm{D}]_{\mathrm{R}} \neq A$ を示すことに当たるからである [49]．

さてそこで，図 1.3 の標題を「人間の思考の研究」と変えたら図はどう変えるべきかを考えてみよう．つまり，人間一般の思考を数学的に研究しようと志した数理心理学者は，どういう図式を描くべきか．そうすると，図 1.4 が類推によって直ちに得られる．ただし図中の「人間の思考の枠組

図 1.4: 人間の思考の研究

$$\boxed{\text{人間の思考の枠組み}} \xleftrightarrow[\text{経験論}]{\text{曖昧な対応}} \boxed{\text{未知の論理系}} \xrightarrow[\text{合理論}]{\text{未知の演繹論}} \boxed{\text{未知の定理}}$$

み」は,「人間が世界を認識する仕組み」「人間の思考の対象世界」およびこれらの間の「対応関係」という三者を指す．また，未知の論理系は未知の形式言語とその未知の意味論の対であり，未知の演繹論は未知の演繹系についての数学研究である．そして,「人間が世界を認識する仕組み」の数理模型が未知の形式言語であり,「人間の思考の対象世界」と「対応関係」の数理模型が未知の意味論であり,「人間の思考する仕組み」の数理模型が未知の演繹系である．さらに，思考機械・人間は「人間が世界を認識する仕組み」と「人間の思考する仕組み」を合わせた仕組みとみなすことができる．なぜなら人間は，まず世界を認識し，その認識に基づいて思考し，その思考の結果をまた認

[49] このことの一般化を定理 3.30.26 と定理 3.28.1 で証明する．

識するという過程を繰り返すからである．図 1.4 についての以上の説明は，次のような「計算式」で表すと理解しやすい．ただし，これらはもとより厳密な定義に基づいた計算ではないから，記号 $=, +, \approx$ の解釈は読者に任せる．

思考機械・人間 = 人間が世界を認識する仕組み + 人間の思考する仕組み
人間が世界を認識する仕組み ≈ 未知の形式言語
人間の思考する仕組み ≈ 未知の演繹系
人間の思考の対象世界 + 対応関係 ≈ 未知の意味論

さらに，第 1.2.3 項で説明したことから次の「計算式」が得られる．

未知の形式言語 + 未知の意味論 = 未知の (形式言語 + 意味論) = 未知の論理系
未知の推論規則 + 未知の論理的公理系 = 未知の (推論規則 + 論理的公理系) = 未知の演繹系
未知の演繹系 + 未知の数学研究 = 未知の (演繹系 + 数学研究) = 未知の演繹論

それでは，数理心理学者が図 1.4 の示唆する研究を行なうにはどうすべきか．超数学者はまず，数学者の思考の現れである証明文を観察した．それに倣うなら数理心理学者は，人間の思考の顕著な現れである自然言語文をまず第一に観察すべきであろう．情動など他に観察すべきものがあるとしても，それは，数理心理学を始めるに当たっては二の次としてよかろう．そうと決まれば数理心理学者は，再び超数学者に倣って，自然言語文に共通する本質が何であるかを調べ，その本質を何らかの形式言語文によって表し，その形式言語の意味論を定めることを試みるべきであろう．それによって定まる論理系（＝形式言語＋意味論）は，述語論理系が超数学者にとって研究の場になったと同様，数理心理学者にとって研究の場となるであろう．超数学者が証明文と述語言語文の対応を経験的に作り上げ，その対応に多少の曖昧性が許容されたのと同様，自然言語文とその形式言語の文の対応は経験的に作り上げればよく，その対応に多少の曖昧性は許容される．

数理心理学者が次にすべきことは，再び超数学者に倣うなら，形式言語文化された自然言語文を観察し，人間が考える筋道に共通する本質が何であるかを考え，それをやはり数学的に表現しようと試みることであろう．それも超数学者がしたと同様に経験的にすればよく，その目標は，人間が使う演繹系（＝推論規則＋論理的公理系）の表を作り上げることである．

数学者の思考は人間の思考の一部であるから，数理心理学者がこうして作り上げる論理学（すなわち論理系とその上の演繹系の学）は，超数学者が作り上げた述語論理学を何らかの意味で包摂するものでなければならない．たとえば人間が使う推論規則の表は前述の modus ponens を含まなければならない．

こうして図 1.4 に書き入れるべき未知の論理学が述語論理学を包摂するように確定できれば [50]，数理心理学者はその未知の論理学における演繹論によって人間の潜在思考能力について研究することができ，その結果は，超数学者が述語論理学における演繹論（＝証明論）によって行なった数学者の潜在証明能力についての研究を包摂するものになるであろう．その未知の論理学で，たとえば完全性定理や不完全性定理に当たることは成り立つだろうか？ 超数学者ならぬ数理心理学者としては，その他にどんな問題を追究すべきだろうか？ これらは有意義な問いかけに違いない．

他方，第 1.2.3 項で宣言した通り，数理心理学者は

自然言語を介して 思考機械・人間観察 → 論理系・演繹系作り → 数学研究 → 思考機械・人間の 理解の深化発展

[50] 格論理学は，一階述語論理学や様相論理学を埋め込めるように設計してある．第 5.8 節参照．

という数理心理学の流れ (1.2.1) に沿って，思考機械・人間とその思考の対象世界および両者の対応関係の数理模型を論理系とその上の演繹系によって作り，それについて数学研究を行なうが，それがまさに図 1.4 の示唆する研究を行なうに等しいことを，上の計算式を使っての次の「計算」で示すことができる．ただしこれも，厳密な定義に基づいた計算ではないから，解釈は読者に任せる．

$$
\begin{aligned}
&\text{思考機械・人間} + \text{人間の思考の対象世界} + \text{対応関係} + \text{未知の数学研究}\\
&= \text{人間が世界を認識する仕組み} + \text{人間の思考する仕組み}\\
&\quad + \text{人間の思考の対象世界} + \text{対応関係} + \text{未知の数学研究}\\
&\approx \text{人間が世界を認識する仕組み} + \text{未知の演繹系}\\
&\quad + \text{人間の思考の対象世界} + \text{対応関係} + \text{未知の数学研究}\\
&\approx \text{未知の形式言語} + \text{未知の演繹系}\\
&\quad + \text{人間の思考の対象世界} + \text{対応関係} + \text{未知の数学研究}\\
&\approx \text{未知の形式言語} + \text{未知の演繹系} + \text{未知の意味論} + \text{未知の数学研究}\\
&= \text{未知の形式言語} + \text{未知の意味論} + \text{未知の演繹系} + \text{未知の数学研究}\\
&= \text{未知の論理系} + \text{未知の演繹系} + \text{未知の数学研究}\\
&= \text{未知の論理系} + \text{未知の演繹論}
\end{aligned}
$$

以上，数理心理学の方法 (1.2.1) を数学基礎論に**なぞらえて**説明した．つまり数理心理学のこの方法は，図 1.4 の示唆する方法に等しく，従って図 1.2 の示唆する数理科学の方法に沿い，図 1.3 の示唆する超数学の方法を踏襲し包摂している．そして数理心理学は今，図 1.4 の未知の論理学の設計を確定するための経験論を試行錯誤している段階にあるのである（この試行錯誤は第 5 章以降に示す如く終わりかけているが）．

ただし以上の説明は，あくまでも**なぞらえて**の説明であり，数理心理学の考え方の正確な説明ではない．超数学者にとっては，述語言語文は証明文の数理模型であったろう．しかし数理心理学者は,「図 1.4 の説明に記した『人間が世界を認識する仕組み』は，脳内にあって人間の認識を司るはずの生理的実体であり，従って図 1.4 の未知の論理系における形式言語は，自然言語の数理模型ではなく，そういう生理的実体の数理模型であって，そういう実体が自然言語として変形表出する」と考え，それゆえその実体の構造を探るために自然言語を観察する．

「数理心理学の方法 (1.2.1) は超数学の方法を踏襲している」というのも正確な説明ではない．なぜなら私は，数理心理学を始める前も始めた後もしばらくは，超数学をよく理解せず，従ってその方法を踏襲できようはずはなかったのである．数理心理学の方法 (1.2.1) は，私が群論の研究経験と論理学についての少々の知識に基づいて創造したものである．そしてその創造の過程で「数理心理学の方法 (1.2.1) を数学者の思考に限定したものが超数学なのだ」という超数学理解に到達することができた，というのがむしろ正確な説明である．

とは言え数理心理学の方法 (1.2.1) は，図らずも必然的にか，超数学の方法を踏襲する結果となった．しかし私は，そのことを理由に数理心理学の方法を正当化する積もりはない．そういう正当化をするなら，フレーゲ・ヒルベルト・ゲーデルら超数学の先達の権威を振り回すことになり，権威に縋って価値を判断しようという嫌悪すべき権威主義者を納得させることはできても，自らの頭で考えて価値を判断しようという好ましき人々を納得させることはできない．それゆえ私は次節以降で，数理心理学の方法 (1.2.1) の価値と正当性を，基礎に立ち返って説明しようと思う．

1.2.5　この節までの参考文献

§ 古い本ながら

脳 行動のメカニズム：千葉康則 著，ＮＨＫブックス 45, 1966 年

には，脳の働きの分かりやすい解説と共に，心とは何かについての脳科学者の観点からの示唆に富んだ見解が述べられている．

科学において数学が果たしている役割や，数理物理学と従来の数理心理学の発展振りの差，あるいは数理科学者が物質科学を如何に偏重してきたかを知るには，たとえば

現代数理科学事典：大阪書籍，1991 年

を一瞥すればいい．ただし，この事典の数理心理学関係の記述のほとんどは，本書の内容とは関係ない．本書の内容は，むしろ，この事典が数理論理学や数理言語学に含めている事柄に関係する．

本書を読むために必要な代数学や集合論の教養を得るには，これも古い本ではあるが

現代数学概説 I：彌永昌吉・小平邦彦 共著，岩波書店，1961 年

を熟読するよう薦める．この書の几帳面さ端正さも万人が見習うべきものと思う．

代数学と言語学の関係については，これも既に古い本の部類に入るが，

形式意味論入門：白井賢一郎 著，産業図書，1985 年

を通読するよう薦める．これは，いわゆるモンタギュー意味論の概説書で，代数学的な概念が言語学にどう使われるかに重点を置いて説明している．代数学者であった私は，この書を読んで目から鱗が落ちるように感ずる反面，有り体に言えば「言語学者や哲学者だけには任せておけない」と思った．それが代数学から数理心理学への私の転機の一つである．

1.3　思考機械から代数系へ

＄ これまでの二節では数理心理学の始めの数歩について説明した．以下の四節ではその先の歩みについて説明しよう．

計算機からの強い影響の必然的な結果として，数理心理学は人間機械論をよりどころにし，思考を当面の研究対象とする．つまり,「人間はどんな構造の思考機械であって，その結果どんな思考能力を持つのか」というのが，数理心理学の当面の主問題ということになる．この節では，この問題を数学的に述べ直すことを目標にする．機械とは何かを考えるところから始めることにしよう．

1.3.1　単能機械と多能機械

§ 手許の辞典を見ると,「機械とは変換器のことだ」というのが現代的定義らしい．つまり，機械には一般に作業機構の他に原動機構や伝導機構や保管庫があるが，作業機構以外を捨象し，さらに作業機構を変換器と考えるのである．この定義に従うことにする．だから，作業機構が変換器でないものは以下では「機械」とは呼ばないし，通常は「機械」と呼ばないものでも，変換器とみなせるなら以下では「機械」と呼ぶ．そうするとまず，機械は，原材料を入れるとそれに変換を施して何か物を作り出す装置である．ただし，機械に入れ得る原材料はただ一種類とは限らない．色々

な種類の原材料を入れるのに応じて色々な種類の物を作り出すのが普通である．また，複数の原材料を組み合わせて変換を行なうものが多い．

さて次に，機械の中には，決まった種類の原材料からはいつでも決まった種類の物しか作り出さないものがある．こういう機械を**単能機械**と呼ぶ．

例として，二つの数の四則計算をする機械を考えよう．つまりこの機械は，二つの数 a, b と算法記号 $+, -, \times, \div$ のうちのどれか（それを $\star$ で表す）を入力すれば，数 $a \star b$ を計算して出力する．そうするとこれは，原材料として $a, b, \star$ を与えれば $a \star b$ を生産する機械とみなされる．そうみなせばこの機械は，同じ原材料を与えればいつでも同じものを生産するから，単能機械である．各種の自動販売機も，お金と商品名を原材料として与えれば商品とお釣りの組みを生産する単能機械とみなすことができる．

これに比べればコンピュータは，随分複雑な機械であって単能機械とは考えられない．実際，使っているソフトウェアが異なれば，キーボードから同じ文字列を入力したとしても出力は異なる．つまり，決まった種類の原材料を与えても時によって違うものを生産する．だから単能機械ではない．自動車組み立て工場も，工員や下請け工場まで含めて考えれば同種の機械である．生産ラインを変えれば，同じ原材料からでも違う車種を生産する．厨房も，料理人などを含めて考えれば同種の機械である．料理の手順を変えれば，同じ素材からでも違う料理を作り出す．

これらの機械は，決まった種類の原材料を与えても時によって違うものを生産するという共通の特徴を持っている．そして，なぜ時によって違うものを生産できるかと言えば，生産工程を時によって変えることができるからである．こういう機械を**多能機械**と呼ぶ．

身の回りの機械を一瞥すれば，こうして「単能機械」と「多能機械」をはっきり分けることができるように思われる．しかしこういう分類は，実は，機械の皮相しか見ていないからこそできることなのだ．もう少し深く考えると,「単能」と「多能」の違いは余りはっきりしないことが分かる．そのことを例で説明しよう．

まず，さっきの四則計算をする機械も多能機械とみなすことができる．つまりこの機械は，加法工程・減法工程・乗法工程・除法工程という四つの生産工程の間で切り換えを行なうことができる．そして，この機械に二つの数 a, b を原材料として与えれば，たとえば加法工程にあるときは $a + b$ を生産し，減法工程にあるときは $a - b$ を生産する．こういう多能機械だとみなすこともできる．こうみなす場合，この機械の使用者が算法記号 $+, -, \times, \div$ のどれかを入力するのは，原材料を入れる操作ではなく，どの生産工程を選択するかを機械に指令する操作だということになる．

これと反対に，さっき多能機械の例としてあげたものも，見方を変えれば単能機械となってしまう．たとえばコンピュータの場合，使用ソフトウェアを選択するには，メニュー画面でそのソフトウェアの名前をクリックすればいい．つまり，ソフトウェア名と文字列の組みを入力すれば，それに応じて唯一つの出力が得られる．だから，ソフトウェア名と文字列の組みを原材料として受け付ける機械とみなせば，計算機も単能機械となってしまう．自動車工場や厨房についても同様である．

要するに，**同じ機械でも，見方を変えれば単能機械になったり多能機械になったりする**のである．そこで，思考機械・人間をどう見るかが問題となるが，それは次項で考えよう．

1.3.2　思考機械・人間をどう見るか

§ 思考機械・人間と言えども単能機械とみなすことができる．人間が一つの考えを生み出す過程には，さまざまなものが関わっているだろう．たとえば，人間は体表に張り巡らされた感覚細胞によって外界からの刺激を受容している．体内の内臓壁や筋肉などからの信号も受容している．脳内の記憶庫からの入力もある．そういう諸々のものが相合わさって一つの考えが生まれるのだろう．

そして，生まれる考えは，外界からの刺激や体内からの信号や記憶庫からの入力などによって一意に決まるとも考えられる [51]．そう考えると，思考機械・人間も単能機械となってしまう．

こういう考え方に反対する人も沢山いるだろう．特に，人間やその精神を何か特別な存在と考えたい人は強硬に反対するだろう．私自身もこういう考え方には反対である．しかし，私が反対するのは，人間を特別な存在と考えるからではない．私は人間が特別の存在だとは考えない．さっきの見方をすれば人間も確かに単能機械だと思う．人間が生み出す考えは，外界からの刺激や体内からの信号や記憶庫からの入力などによって一意に決まるだろう．そういう意味では，人間は単純な機械である．実際の人間は確かに非常に複雑なものに見える．しかし複雑に見えるのは，外界からの刺激や体内からの信号や記憶庫からの入力の全貌を観察者が把握できないからだろう．観察者が把握できるのは，それら全貌のほんの一部でしかないだろう．一部しか把握できないことを弁えずに観察していれば，人間が同じ状況にあってもさまざまな考えを生み出す無法則で不可解な存在に見えても不思議はない．観察者には一見同じ状況でも実際は違うのであり，違うからこそ違う考えが生まれるのだと私は考える．外界の状況は同じでも，価値観・目的意識という内心の状況は人によって違い，そういう違いが考えの違いとなって現れる．たとえば数学者は，「関数 f が有界閉区間 K において連続である」という同じ前提を与えても，「f は K において積分可能である」や「f は K において最大値・最小値を持つ」などの色々な結論を導き出し，導き出し方も色々である．それは，目的意識が積分論にあったり最大最小問題にあったりと違い，導き出し方についての美意識（美に関する価値観）も違うからである [52]．価値観・目的意識を含めて状況がすべて同じなら，生まれる考えは同じだろう．

人間を単能機械と見ることに私が反対するのは，そういう見方によって何か有意義な結論を得るのは大変難しいと思うからである．外界からの刺激や体内からの信号といったものは，種類も量も膨大だろう．しかも，人間はそういう刺激や信号を絶え間なく受け入れている．観察者がそれらを完全に把握できたとしても，それらのどこからどこまでの一区切りが一つの考えを生み出すもとであるかは，容易には決められない．そういう膨大で区切りのはっきりしないものを思考機械・人間への原材料とみなす理論は，とても立ち行かないだろう．

だから私は，外界からの刺激や体内からの信号や記憶庫からの入力のうちの多くは，どの生産工程を選択するかを思考機械・人間に指令するための入力であると考える．そして残りの入力が思考機械・人間への原材料であると考える．前項の四則計算機械になぞらえて説明すれば，私はこの機械を，原材料 $a, b, \star$ から $a \star b$ を生産する単能機械とみなすのではなく，指令入力に応じて四つの生産工程 $+, -, \times, \div$ のどれかを選択することができて工程 $\star$ の下では原材料 a, b から $a \star b$ を生産する多能機械とみなす．そうすると私は，生産工程の指令を知らない限り，この機械が今どの工程を選択しているかを把握できないから，原材料 a, b を一組み完全に把握できたとしてもその生産品を一意に特定することはできない．私は，あり得る生産品の範囲を特定することしか期待できないし，期待もしない．

上記の「残りの入力」すなわち思考機械・人間への原材料とみなすものは，思考の対象となるもの事の記述である．「もの事」は文字通りもの（物・者）と事であり，「事」は事態や事柄を指す．そして，思考機械・人間の生産物についても，これまでは曖昧に「考え」と書いてきたが，これは正確には事の記述である．**考えは事の記述であってものの記述ではない．なぜなら，思考とは課題を解決する過程であり，課題を解決するというのは色々な事の間の因果関係を見出すことであって，因果関係自身も事だからである．**私たちは，「もの事がどうであるか」という事を考えるのであり，

[51]「一意の」「一意に」「一意性」は「unique」「uniquely」「uniqueness」の訳語である．
[52]価値観・目的意識について数理心理学者がどう考えるかについては第 1.6 節参照．

ものそのものを考えるのではない[53]．ただし「思考機械・人間」といっても，思考して考えを生み出すだけではない．人間はまずもの事を認識し，認識したもの事について思考して考えを生み出し，それをまた認識する．このように思考は認識と不可分であるから，認識も思考機械・人間の生産の一部であると考えるべきであり，そう考えれば，思考機械・人間の生産物には事の記述だけでなくものの記述もある．

もの事とは何かも記述とは何かも，今おいそれとは説明できない．なぜなら，それを説明することが本書全体の目標の一つだからである．しかし,「もの事」や「記述」が何であるにしても，私は，**思考機械・人間は多能機械であって，その原材料も生産物ももの事の記述である**と考える．

1.3.3　代数系へと導く抽象

§ ここでは，**機械が代数系とみなされる**ことを説明しよう．第 1.1.1 項において「数理心理学の場を確定するためにはデカルト座標に当たるものを発見すべし」と指摘したが，第 1.4.1 項で説明する理由で，**この「みなし」こそがデカルト座標に当たる**．従ってこの「みなし」は，単純なものではあっても大変重大な意義を持つ．デカルト座標がそうであるように．

まず，単能機械について考える．単能機械は，決まった種類の原材料の組みを与えるとそれに応じて何時でも決まった種類の物を作り出す機械だった．そうすると，これは写像に他ならない．つまり，この単能機械（これを α で表す）が n 個の原材料の様々な組み（これを $x_1, \ldots, x_n$ で表す）に変換を施して様々な製品（これを y で表す）を作り出すものだとすれば，α は $(x_1, \ldots, x_n)$ に y を対応させる写像とみなされる．

もう少し正確に言えば，様々な x_i $(i = 1, \ldots, n)$ と y の全存在範囲を A で表し，α が受け付ける原材料の組み $(x_1, \ldots, x_n)$ の全体から成る A^n の部分集合を D で表せば，写像 α は D において定義され A の中に値を持つ．従って，α は単に写像なのではなく第 1.2.1 項で A 上の変換と呼んだものであるが，以下では変換を**算法**とも呼ぶ[54]．また，n を α の**項数**と呼ぶ．ただし，α の定義域 D は A^n と等しいとは限らず，この意味で α は局所的算法である[55]．しかしとにかく，単能機械はすべて，ある集合上の算法とみなされる．

たとえば，生卵からゆで卵を作る機械の場合，集合 A は二点集合 $\{r, b\}$ とし，D は単元集合 $\{r\}$ とし，α は D を定義域とし $\alpha r = b$ をみたす項数 1 の算法とすればいい．記号「r」と「b」はそれぞれ「生卵」と「ゆで卵」を表す（「raw」と「boiled」の頭文字をとった）．つまり A は，今地球上に存在する生卵すべてとゆで卵すべてから成る集合ではなくて，すべての生卵の「生卵」という名前 r とすべてのゆで卵の「ゆで卵」という名前 b から成る集合なのである．だから，この機械が生卵一つをゆで卵に変えた時，地球上の生卵が一つ減ってゆで卵が一つ増えるが，A は名前の集合なのだから変化はしない．

この例が示す通り，単能機械を算法とみなすためには，A を具体物の集まりとするのではなく，具体物の名前の集まりとしなければならない．しかし，一々そう説明するのは煩わしいので，以後は「の名前」はおおむね省略する．すぐ後に出て来る工程の集合 Λ についても同様である．

次に一般の機械を考える．これは幾つかの生産工程（それらの全体の集合を Λ とする）の間で切り換えを行なうことができる．しかし工程を一つ決めれば（決めた工程を $\lambda \in \Lambda$ とする），その工程を選択している間はこの機械は単能機械だから，ある集合 A_λ 上の算法 α_λ とみなされる．集

[53] **「考え」と「言葉」は区別しなければならない**．人が例えば「桜」と言った場合，その人は「桜が綺麗だ」「桜を観る」の様な事態について考えたのであり,「桜」そのものを考えたのではなかろう．言葉は考えの完全な表れではない．
[54] この「算法」は「algorithm」の訳ではない．
[55] これに対し，$D = A^n$ なる算法を**全域的算法**または**汎算法**と呼ぶ．

合 A_λ も α_λ の項数 n_λ も，一般に λ に応じて変わる．しかし，集合 A を $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と定義すれば，すべての $\lambda \in \Lambda$ について α_λ は A 上の n_λ 項算法とみなされる．従ってここに，集合 A とその上の算法族 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の組み，すなわち代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が出来る．集合 A をこの代数系の**台集合**と呼び，算法族 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をこの代数系の**代数構造**と呼ぶ．台集合はこの機械が受け付ける原材料や生産し得るものの全体であり，従って，この機械の中に台集合の各元に相当する実体が存在するとは限らない．また，Λ はこの機械が選択することのできる工程の集合であり，工程 $\lambda \in \Lambda$ の下で原材料 $a_1, \ldots, a_{n_\lambda}$ から生産されるものが $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ である．こうして，機械はすべて代数系とみなされる．逆に，任意の代数系は機械とみなされる．

ただし，これら二様の「みなし」は，あくまでも「みなし」である．機械は代数系そのものではないし，代数系は本当の機械ではない．機械を代数系とみなしたのは，言い換えると機械から代数系を抽象したのである．その抽象の陰には，当然，捨象されたものが沢山ある．

なお，代数学で慣用の略記法を以後しばしば使う．すなわちまず，代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ をしばしば A と略記する．次に，$\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ をしばしば $\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と略記する．それは本項の文脈では，工程 λ とその工程を選択している間の機械すなわち算法 α_λ を同一視することを意味する．

1.3.4　生産履歴と計算図

§ ここでは，機械が行なった生産の履歴をどう表現するかを考える．「履歴」は「過程」と言い換えても大過はない．しかし「過程」と言うと，将来の生産の予定あるいは計算機のプログラムのようにもとられ兼ねない．そういうものではなく，あくまでも過去の生産の経過について考える．そのことをはっきりさせるために「履歴」という語を使うのである．**ここに数理心理学と工学の違いがはっきり現れている．工学では，思考機械に働かせることが目標なので，将来の生産の予定を表現することが重要になる．しかし数理心理学では，思考機械・人間を有りのままに観察するので，過去の生産の履歴を表現することが重要になる**のである．

さてまず前項により，機械は代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ とみなされる．集合 A はこの機械が受け付ける原材料や生産し得るものの全体であり，Λ はこの機械が選択することのできる工程の全体であって，工程 $\lambda \in \Lambda$ の下で原材料 $a_1, \ldots, a_{n_\lambda}$ から生産されるものが $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ である．従ってまた，$a_1, \ldots, a_{n_\lambda}$ からの $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ の生産は，$(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ に算法 α_λ を適用する**演算**すなわち**計算**に相当する．なお「算法」と「演算」は，しばしば混同されるが異なる概念である．算法が「計算の規則・方法」を指すのに対し，演算は計算の規則・方法に従って「計算すること」を指す [56]．だから，前項末尾に記した通り機械の工程を算法と同一視するのが妥当なのであり，その工程での生産は演算に相当するのである．

さて次に，ある一つの工程 λ の下で特定の原材料 $a_1, \ldots, a_{n_\lambda}$ を使って行なわれた生産の履歴（これを**単履歴**と呼ぶ）は，たとえば

$$\frac{a_1, \ldots, a_{n_\lambda}}{\lambda}$$

なる図で簡単に表すことができる．しかし，多能機械は工程と原材料を色々に切り換えつつ，つまり λ と $a_1, \ldots, a_{n_\lambda}$ を色々に変えつつ生産を行なう．そして，ある工程の生産品が他の工程の原材料として使われることもある．そういう複雑な生産の結果ある一つの物が作られた履歴（これを**複履歴**と呼ぶ）をどう表現するかも考えなければならない．

そこで，集合 A の部分集合 X の元を原材料として幾つかの工程が実行された結果，物 t が生産されたとする．話を簡単かつ具体的にするために，最終的に t を生産した工程が μ で，その原材料

[56] このことは「算」「法」「演」本来の意味を考えれば疑いないが，念のために藤堂明保編「学研漢和大辞典」を見ると，「算法」は「計算の方法」を意味し「演算」は「式の規則に従って計算し求める数値を出すこと」を意味するとある．

が r, s であるとしよう．そうすると，この最終工程での生産の単履歴は

$$\frac{r\quad s}{\mu} \tag{1.3.1}$$

なる図で表現される．ここで，r, s は X の元ではなく，それぞれ p, c と q, b を原材料として工程 μ と ν によって生産されたとしよう．そうすると，この二つの生産の単履歴は，またそれぞれ

$$\frac{p\quad c}{\mu} \qquad\qquad \frac{q\quad b}{\nu} \tag{1.3.2}$$

なる図で表現される．そして t は，p, c, q, b を原材料として工程 μ, ν, μ によって生産されたことになる．こういう生産の複履歴は，(1.3.1) における r, s をそれぞれ (1.3.2) の二つの図で置き換えて得られる次の図で表現することができる．

$$\frac{\dfrac{p\quad c}{\mu}\quad \dfrac{q\quad b}{\nu}}{\mu} \tag{1.3.3}$$

ここで，b, c は X の元であるが，p, q は X の元ではなく，それぞれ a, b と b, c を原材料として工程 λ と ν によって生産されたとしよう．そうすると，この二つの生産の単履歴は，またそれぞれ

$$\frac{a\quad b}{\lambda} \qquad\qquad \frac{b\quad c}{\nu} \tag{1.3.4}$$

なる図で表現される．そして t は，a, b, c を原材料として工程 $\lambda, \nu, \mu, \nu, \mu$ によって生産されたことになる．こういう生産の複履歴は，(1.3.3) における p, q をそれぞれ (1.3.4) の二つの図で置き換えて得られる次の図で表現することができる．

$$\frac{\dfrac{\dfrac{a\quad b}{\lambda}\quad c}{\mu}\qquad \dfrac{\dfrac{b\quad c}{\nu}\quad b}{\nu}}{\mu} \tag{1.3.5}$$

ここで a は X の元であるとする．そうすると，(1.3.5) の上端に並ぶ原材料 a, b, c はすべて X の元となる．従って，X の元を原材料とする複数の工程によって t が生産された複履歴は，(1.3.5) によって完全に表現される．なお，(1.3.1), (1.3.2), (1.3.4) に示した五つの図に対応して

$$t = \mu(r, s) \qquad r = \mu(p, c) \qquad s = \nu(q, b) \qquad p = \lambda(a, b) \qquad q = \nu(b, c) \tag{1.3.6}$$

が成り立つから（α_λ を λ で表す等の前項で述べた略記法を使って工程を算法と同一視している），

$$t = \mu\big(\mu\big(\lambda(a, b), c\big), \nu\big(\nu(b, c), b\big)\big) \tag{1.3.7}$$

が成り立つ．

以上は特別な場合についての説明だったが，これを一般化して考えることは容易い．そして，X の元を原材料とする幾つかの工程（すなわち算法）によって一つの物が作られた生産（すなわち計算・演算）の履歴はすべて，(1.3.5) の様な樹状図でもって上端に並ぶ原材料がすべて X の元であるものによって表現されることが分かる．

「(1.3.5) の様な樹状図」とは，すなわち，代数系 A の元と算法記号から作られる図であり，この図の上端に現れる A の元に図の下方に現れる A の算法を適用して A の何らかの元が得られる計算・演算の過程を表現する．そこで，こういう図を A 上の**計算図**または演算図と呼ぶ．その一般的で厳密な定義と関連概念の説明は第 3.6.2 項にある．特に，計算図の上端に現れる A の元（図 (1.3.5)

では a, b, c）とその計算図に従った計算で得られる A の元（図 (1.3.5) では式 (1.3.7) の両辺）を，それぞれその計算図の**始点**と**終点**と呼ぶ．従って，A **の部分集合** X **の元を原材料として幾つかの工程によって一つの物が作られた生産の履歴は，**X **の元を始点としその生産物を終点とする計算図で表現される．**なお，(1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) に示した単履歴や複履歴を表現する図も，始点は必ずしも X の元ではないが計算図である．また，代数系 A 上の計算図の全体は自ずと A と同類の代数系になる．これを A 上の**計算代数系**と呼び C(A) で表す（「calculation」に因む）．

1.3.5　顕在能力と潜在能力

§ 機械の生産能力とは何か．それについて何を問うべきか．機械の生産能力と言うと，私たちは普通，生産品の質や量・生産速度・費用などの面を考える．そして，たとえば自動車組み立て工場については，実際にこういう面が重視される．しかしそれは，鉄やプラスチックやゴムから自動車を生産する機械だということがもう決まっていて，それ以外の生産の可能性を問う必要がないからだろう．そういうことが決まっていなければ，そもそもどんな種類の原材料からどんな種類の物を作り得るかを真っ先に問わなければならない．思考機械・人間がまさにそういう機械である．そこで**思考機械・人間については，原材料と生産物の対応関係がどうであるかを知ること，それを人間の思考能力についての最初の課題としよう**．

しかしこの項ではまだ，思考機械・人間に限らぬ一般の機械について考える．

一般の機械について「原材料と生産物の対応関係がどうであるかを知る」という課題を数学的に述べれば次のようになる．まず，機械は代数系 (A, R) とみなされる（代数構造を R と略記した）．集合 A は，この機械の原材料や生産物となり得るものの全体である．そこで，A の部分集合 X の元を原材料としてこの機械が生産し得るもの全体からなる A の部分集合を $\pi(X)$ で表す．そうすると π は，A の巾集合 $\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への写像を表す記号とみなされる．そして，この機械において原材料と生産物の対応関係がどうなっているかを知るには，π がどういう写像かを調べればいい．そこでこの写像 π を，この機械の**顕在能力**あるいは単に**能力**と呼ぶ．

前項で説明した通り，この機械が集合 A の部分集合 X の元を原材料として一つの物を生産した履歴は，その生産物を終点とし X の元を始点とする A 上の計算図で表現される．従って $\pi(X)$ は，X の元を始点とする A 上の計算図の終点となり得る元からなる集合（これを仮に Y で表す）に含まれる．集合 Y がどういうものかは問題 3.6.3 と問題 3.2.7 – 問題 3.2.9 により分かる．それによれば Y は，X の元に R に属す算法を繰り返し適用することによって生成される元の全体に，すなわち第 1.2.3 項で $[X]_R$ と書いたものに等しい．これを以後は X の A における**算包**と呼び $[X]$ で表す．従って次の式が成り立つ．

$$\pi(X) \subseteq [X] \tag{1.3.8}$$

等式 $\pi(X) = [X]$ は必ずしも成り立たない．すなわち，X の元を始点とする A 上の計算図の終点であっても，X の元を原材料としてこの機械で実際に生産できるとは限らない．なぜなら，この機械から代数系 A を抽象する過程で，色々な物や事を捨象している．そして，そういう物や事がこの機械の生産に色々な制約（これを**外的制約**と呼ぶ）を課している．そのため，この代数系だけから作られる計算図の表す生産は，必ずしもこの機械に実行可能とはならないからである．外的制約とは，たとえば自動車工場では，格納庫の容量や原材料の運搬手段や動力の供給量の多寡による制約を指す．思考機械・人間では，記憶量や想起力や根気の多寡に当たるだろう．

いま述べたことをもう少し数学的に説明しよう．そのために，A 上の計算図のうちで，それの表現する生産がこの機械に実行可能なものの全体を E(A) で表す（「enabled」に因む）．そうすると，

さっき述べたことは要するに，一般に外的制約のために $E(A)$ は計算代数系 $C(A)$ の真部分集合だということである．また，式 (1.3.8) の前に述べたことを $C(A)$ と $E(A)$ を使って述べ直せば，$[X]$ は X の元を始点とする $C(A)$ の元の終点になり得る元の全体に等しく，$\pi(X)$ は X の元を始点とする $E(A)$ の元の終点になり得る元の全体に等しい．だから，もしも $E(A) = C(A)$ なら $\pi(X) = [X]$ が成り立つが，実際は外的制約のために $E(A) \subset C(A)$ だから [57]必ずしも $\pi(X) = [X]$ とは限らない，というわけである．

しかしここで，この機械から外的制約を少しずつ取り除き，外的制約をゼロに限りなく近づけて行ったとしよう．それは実際にはできないことだから，仮想的にそういうことをするのである．そうすると $E(A)$ が $C(A)$ に限りなく近づき，従って $\pi(X)$ は $[X]$ に限りなく近づくだろう．こういう意味で，$[X]$ は $\pi(X)$ の極限と考えられる．

以上のことを踏まえ，機械の**潜在能力**を次のように定義しよう．すなわち，**代数系 A と抽象された機械の潜在能力とは，各 $X \in \mathcal{P}A$ にその A における算包 $[X]$ を対応させる写像 $X \mapsto [X]$ のことを言う**．従って，潜在能力は A の代数構造だけによって決まる．また，機械の潜在能力を調べることは，代数系 A についての演繹論を行なうことに他ならない．

なお,「外的制約が何もなく，原材料さえ供給されれば任意の計算図の表す生産を実行できる機械」というものを考えると便利である．それは，実際には存在しない空想的または理想的な機械である．そこで，そういう機械を**理想機械**と呼ぶ．そうすると，機械の潜在能力とは，その機械から外的制約をすべて取り除いて出来る理想機械の顕在能力に等しいことになる．

さて，これまでは思考機械・人間に限らぬ一般の機械について考えてきたが，次節以降では数理心理学の観点に特化し，一般の機械ではなく思考機械・人間を抽象した代数系 A について，しかも顕在能力 π ではなく潜在能力 $X \mapsto [X]$ を考察の対象とする．

この項の始めに「思考機械・人間については，原材料と生産物の対応関係がどうであるかを知ることを人間の思考能力についての最初の課題とする」旨を書いた．これはつまり,「代数系 A については，顕在能力 π がどうであるかを知ることを最初の課題とする」ということである．それにもかかわらず次節以降では顕在能力 π ではなく潜在能力 $X \mapsto [X]$ を考察しようというのは，何か本筋からそれる行為のように読者は思うかもしれない．しかしそうではない．むしろ**潜在能力を考察する過程でこそ，数理心理学の根幹の問題を純粋な形で抽出することができる**のである [58]．顕在思考能力 π の考察は，そういう根幹問題の考察が終わった後で行なうべきものである．しかもそういう考察は，理論的のものだけでなく模擬実験的のものが重要となるだろう．つまり，理論に基づいて何らかの機械をロボットとしてか計算機の中にか実際に製作し，それが人間と同じように行動するか否かを調べることで理論を検証して行くことになる．なぜなら顕在思考能力というものは，文字通り顕に存在する能力だから，それについての理論なら何であれ，実験で検証されなければならないからである．対照的に潜在思考能力は，潜んで存在する能力であるから，その研究は理論的のものとなるのである．

課題 1.3.1　「機械」を抽象した概念には「オートマトン」もある．これは本節とどう関連するか．

1.4　代数系から論理へ

＄ 前節での機械についての一般論により，思考機械としての人間も代数系 A と抽象され，人間の潜在思考能力についての問は，A の代数構造についての問と，A の各部分集合 X にその算包 $[X]$

[57]記号 $\subset$ で真部分集合を表す．その理由については端書き参照．
[58]数学基礎論でも，暗に数学者の潜在能力を考察する．第 1.2.4 項参照.

を対応させる写像 $X \mapsto [X]$ についての問に翻訳された．なお，第 1.3.2 項の末尾に記したように，思考機械・人間の原材料も生産品ももの事（ものと事）の記述であり（ただし思考機械・人間が生産する「考え」は事の記述である），第 1.3.3 項での機械から代数系への抽象の一般論により，集合 A は思考機械・人間が受け付ける原材料や生産し得るものの全体である．従って，A はもの事の記述の全体であると考えていい．

この節では，代数系 A についての根本的な仮説を述べ，その仮説の下では A についての上記の問が論理学の問に帰着することを説明する．またそのために,「論理学とは何か」を一般的に論ずる．その過程で,「数理心理学の場は何か」という第 1.1.1 項で提起した課題への中間的解答を示す．さらに，この課題の最終解決のために考えるべき基本問題を提起する．従って**この節は，人間の潜在思考能力についての問だけに関わるのではなく，数理心理学の根幹に関わる内容を持つ．**

なお以後，文脈に応じて「認識」を「記銘」と言い換えることがある．国語辞典的に説明するなら，あるもの事を認識するとは，そのもの事をはっきり見分けられるように知ることを指す．しかし「もの事をはっきり見分けられるように知る」ということの脳科学的の説明を思い浮かべたり人間機械論の観点を意識したりした時には,「認識」という言葉がそぐわないことがある．そういう場合には「認識」の代わりに「記銘」を使う．脳科学的に説明するなら，あるもの事を記銘するとは，そのもの事を知覚するのに応じて興奮する一定の生理的単位（ニューロンあるいはその組み合わせ）が脳神経系の中に出来ることを指す．このことについては第 1.4.2 項で敷衍する．

1.4.1　論理学へと導く仮説

§ 大づかみの説明から始めることにしよう．どういう思考にも，必ずその対象になるもの事から成る世界がある．思考機械としての人間は，その世界のもの事を認識すなわち記銘し, その結果出来たもの事の記述をもとに推論を行なって「考え」すなわち事の記述を生み出す．つまり，まず世界のもの事から来る色々な入力を何らかの形に一次記述し，次に，そうやって得られた記述の中でも事の記述に何らかの変換操作を施して，それら事記述と因果関係にある事記述を二次的に作り出そうとする．しかし，代数系と抽象された思考機械に可能なのは A の元（それはすなわちもの事の記述であるが，以下では「記号」とも呼ぶ [59]）に変換を施すことだけだから，世界のもの事を一次記述するのも，事記述からそれと因果関係にある事記述を作り出すのも，すべて記号への変換操作で行なわれる．そこで，A における変換すなわち算法を次の二種類に分ける．ただしこれは，排他的分割ではない [60]．

(a) 世界のもの事を一次記述するための算法

(b) 事記述からそれと因果関係にある事記述を作り出すための算法

そして，(a) に属す算法だけを集合 A に与えて出来る算部分系を**心言語**と呼ぶ [61]（心言語も A で表す）．また，(b) に属す算法を**心論法**と呼び，その全体を**心論理構造**と呼び，事記述すべてから成る A の部分集合 B に代数構造として心論理構造を与えて出来る部分系を**心論理代数系**と呼ぶ（心論理代数系も B で表す）．そうすると，この節冒頭に述べた A についての基本的な問は，次の三つに分割されることになる．ただし厳密には，これは等価な言い換えではない．

---

[59] 名前を変えるだけだから,「記号」の日常語的意味に囚われてはいけない（第 1.2.3 項の「記号」の説明参照）．特に,「頭の中に記号が本当にあるのだろうか」などと問うてはいけない．それは,「染色体の上に $A, a, B, b, \ldots$ という記号が本当にあるのだろうか」という問と同じ位の愚問である（第 1.1.2 項の脚注 [10] 参照）．驚くことに一流と目される学者でさえそういう問を発するが，それに惑わされてはいけない．

[60] たとえば述語論理学では，二つ論理式 a, b からそれらの論理積 $a \wedge b$ を作る算法は，(a) にも (b) にも属す．

[61]「算部分系」やすぐ後に出てくる「部分系」や関連する概念は第 3.2 節で定義する．

基本問題 1 心言語の代数構造は如何なるものか．

基本問題 2 心論理構造は如何なるものか．

基本問題 3 心論理代数系において，部分集合とその算包との対応関係は如何なるものか．

第 1.1.1 項で宣言した通り，場が何であるかを確定することが数理心理学の最初の課題であるが，**心言語という代数系こそが数理心理学の場である**．従って，基本問題 1 に答えることが数理心理学の場を確定することに他ならない．また，心言語なる場は，第 1.3.3 項で説明した「機械を代数系とみなす」という考え方から得られた．だからそこで述べた通り，この「みなし」が数理心理学におけるデカルト座標に当たるのである．

さて，基本問題をこう三つに分割すると，心についての最初の数学的仮説を述べることができる．

仮説 1 心言語は普遍型付代数系である．

なお，心言語については基本問題 3 に相当する問を掲げなかったのは，そういう問が普遍型付代数系については自明なものになってしまうからである（第 3.8 節参照）．

仮説 1 は基本問題 1 への中間的な答であって，最終的な答ではない．「普遍型付代数系」は非常に広い範囲の代数系の総称であり，基本問題 1 は，この普遍型付代数系の構造を特定するまでを求めているのである．しかし特定するとは言っても，心言語の構造は一定不変のものではない．何らかの助変数に依存して変わるものである．その助変数依存性を込めた心言語の構造を特定しなければならない．ただし，心言語における助変数とは，時刻とかの物理量を指すのではない．それらは物質世界の助変数であって，心言語にとっての助変数ではない．心言語の構造を決める助変数の中で一番重要なものは思考機械・人間の「関心」であり，だから基本問題 1 への答は，関心とは何かをよく説明するものでなくてはならない [62]．

仮説 1 は，自然言語に心言語の元が何らかの変形を受けた後に表出しているというもう一つの仮説（それは第 1.5 節で改めて述べて敷衍する）と自然言語の観察から得られる．ただし，自然言語には心言語の元だけが表出するのではない．心論理代数系 B 上の計算代数系 C(B) の元を**推論図**または**推論過程**と呼ぶが，自然言語には推論過程も表出する（他にも色々なものが表出しているが，それら表出元もその表出先も現時点では捨象してある [63]）．第 1.2.2 項において自然言語の意味構造（もの事の有様を表現する言葉の使われ方の法則）と論理構造（思考の筋道を表現する言葉の使われ方の法則）に言及し，他方で代数系 A の算法を (a) と (b) の二種に分割して心言語と心論理代数系なる概念を得たが，心言語と心論理代数系は実は意味構造と論理構造に対応する．つまり，心言語の元はもの事の有様を表現する言葉として表出し，推論過程は思考の筋道を表現する言葉として表出する（図 1.5 参照）．また，第 1.2.1 項において「伝統的文法学者が自然言語の文法を書き上げる作業は，普遍型付代数系を構成する作業に他ならない」と述べたが，その「文法」は，実は意味構造を指していた．心言語が意味構造に対応し文法学者の意味構造論が普遍型付代数系を構成する作業であったのなら，心言語も普遍型付代数系ではないか．仮説 1 は，こういう常識的な考えを述べたものに過ぎない．

文法学者が文法を書き上げる際に構成する普遍型付代数系は，自然言語そのものではなく，その背後にあると想定されるものである．だから文法学者は，この代数系の存在をまったく意識しないか，意識しても何か架空のものとして扱うかもしれない．しかし数理心理学の観点から見ると，これは架空のものではない．もしも然るべく定義したなら，これこそが心言語だと考えられる．そし

[62] この考えを第 5 章以降で敷衍する．第 2.1.3 項に関連する説明がある．

[63] 捨象した表出元については第 1.6 節参照．捨象した表出先には，話者の陳述態度・感情・意志などの表現がある．

図 1.5: 自然言語に表出するもの

人間		自然言語
心言語の元	$\xrightarrow{\text{表出}}$	もの事の有様の表現
推論過程	$\longrightarrow$	思考の筋道の表現
捨象してあるもの	$\longrightarrow$	捨象してあるもの

てこの心言語というものは，思考機械・人間を抽象して得たという意味で，れっきとした実在物なのだ．だから，文法学者にとっては架空のものかもしれないこの代数系を心言語という実在物として捉えよう，というのが仮説 1 の意味だと言ってもいい．

なお，第 1.3.3 項で注意した通り，集合 A は思考機械・人間が受け付ける原材料や生産し得るものの全体であり，従って，脳の中に集合 A の元に相当する実体がすべて存在するのではない．存在するのは，思考機械・人間の現実の生産の原材料と生産品であり，それは A の一部に過ぎない．だから，心言語という普遍型付代数系に相当する実体が脳の中に存在するのでもない．ただし定理 3.5.1 により，普遍型付代数系はその**型代数系** T と**素元系** S および S の分割 $\mathrm{S} = \bigcup_{t \in \mathrm{T}} \mathrm{S}_t$ によって定まる [64]．だから，T と S_t $(t \in \mathrm{T})$ に相当する実体が脳の中に存在すれば，A のすべてが脳の中に実在すると仮想することはできる．さらに，B 上の計算代数系 C(B) は B を素元系かつ型代数系とする普遍型付代数系であるので，C(B) のすべてが脳の中に実在すると仮想することもできる．

以下，基本問題 1, 2, 3 について，もう少し立ち入って説明しよう．

まず，基本問題 1 の問うている心言語の代数構造は，人間にとっての認識の対象世界が如何なるものかによって決まる．なぜなら，心言語は世界のもの事を認識・記銘した結果を記述するための装置であり，従って進化の過程で認識の対象世界に適応してきたはずだからである．だから実は基本問題 1 と同時に，と言うよりは基本問題 1 に先立って，次の大問題を考える必要がある．

基本問題 4　人間にとっての認識の対象世界とは如何なるものか．

これを言い換えれば「人間は世界というものをどう認識しているか」となるが，これを解く鍵も基本問題 1 と同様に自然言語の中に隠されている．なぜなら図 1.6 で図解するように，世界のもの事が心言語により記述され，心言語が自然言語として変形・表出する（図 1.5 参照）．その当然の帰結として，世界というものを人間がどう認識しているかが自然言語に現れているからである．

図 1.6: 世界と心言語と自然言語の間の関係

$$\boxed{\text{世界}} \xrightarrow{\text{記述}} \boxed{\text{心言語}} \xrightarrow{\text{変形・表出}} \boxed{\text{自然言語}}$$

なお先に記した通り，脳の中に集合 A の元に相当する実体がすべて存在するのではなく，存在するのは A の一部に過ぎない．その存在する一部のものを第 7 章では観念・概念と呼ぶ．だから，図 1.6 の「心言語」「記述」を「観念・概念」「認識」と書き換えて図 1.7 のような図を描いても，間違いではないし，それの示唆するものも無いではない．言語学者などがこの類の図を描くことがある．しかしこの図からは，思考機械・人間を代数系と抽象するという，これまで説明してきたような考え方は読み取れない．そこにこの図の難点がある．

[64] 普遍型付代数系に付随する「型代数系」「素元系」等の概念は第 3.4 節と第 3.5 節で定義する．

図 1.7: 世界と観念・概念と自然言語の間の関係

$$\boxed{\text{世界}} \xrightarrow{\text{認識}} \boxed{\text{観念・概念}} \xrightarrow{\text{変形・表出}} \boxed{\text{自然言語}}$$

さて認識の対象世界は，すなわち思考の対象世界であって，もの（物・者）と事から成る．それではものと事とは数学的には何だろうか．一階述語論理学の考え方によれば，ものの全体は何らかの集合 $\mathbb{S}$ であり，一つ一つの事は $\mathbb{S}$ 上の何らかの多項関係である．そして $\mathbb{S}$ 上の n 項関係は，$\mathbb{S}$ の n 個の直積 $\mathbb{S}^n$ から $\mathbb{T} = \{0, 1\}$ への写像とみなせるが，それはさらに $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ 上の算法とみなせる [65]．従って，認識の対象世界としては $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ のような集合をとればよく，それは自ずと代数系とみなされる．しかし一階述語論理学によるこういう世界の定義は，数理心理学の観点から見ると単純過ぎて妥当ではない．なぜなら，図 1.6 で図解したように世界の構造が自然言語に現れているはずであるが，自然言語の観察から窺い知れる世界の構造はもっと複雑だからである．

しかし，認識の対象世界を代数系と捉えるという一階述語論理学の考え方は，数理心理学にとっても大いに参考になる．ものと事から成る認識の対象世界は自ずから何らかの代数系の構造を持ち，人脳は進化の過程でそれに適応して何らかの代数系の構造を持ったに違いない．そう考えれば，第 1.3.3 項の終わり辺りに記した通り代数系は機械とみなされるから，人脳が機械とみなされ，それで，数理心理学が第 1.1.2 項で人間機械論の観点に立ったことがめでたく正当化される．だから基本問題 4 に答えるには，認識の対象世界を何らかの代数系として特定すべきと考えられる．ただし特定するとは言っても，心言語と同様に認識の対象世界も一定不変とは限らないから，何らかの助変数依存性を込めた代数構造を特定するのである．そうすれば，それに近しい構造を持つ代数系として心言語を特定することができるであろう．

なお，認識の対象世界を何らかの代数系として特定すれば，代数系は機械とみなされるから，認識の対象世界も機械とみなされる．従って数理心理学者は，人間・人脳だけでなく認識の対象世界も暗に機械とみなし，そういう意味で人間機械論より広汎な機械論の観点に立つ．

さて次に，心言語の元の中でも，世界における事（事柄・事態）を記述する元を，これまでは「事記述」と呼んできたが，改めて**文**と呼ぶ [66]．そうすると，文の中には真の文と偽の文があるはずである．つまり，認識の対象世界での現実の事柄・事態に合う文と合わない文がある．実は，この**真偽**に関する次の問を，基本問題 1, 4 と基本問題 2 の間に挿入しなければならない．

基本問題 5　心言語の文の真偽は如何にして決まるのか．

思考機械・人間は世界のもの事を記銘し，記銘されたもの事に対応する記号が心言語上に存在する．そういう記号に心言語の算法を適用して作られる文には真のものと偽のものがある．どう作られた文が真なのかを基本問題 5 は問うているのである．

真偽の概念が定まると，真なる文から真なる文を導くことのできる算法としての**健全な論理**の範囲が定まる．基本問題 2 における心論理構造は，この健全な論理の中に探ればいいと考えられる．なぜなら，ヒトという種は健全な論理を進化させてきたはずだからである（第 1.4.3 項参照）．

ただし，個々の思考機械・人間が常に健全な論理を使っていると言うのではない．意識的な思考でも，意識下の計算でも，不健全な論理を使うという誤作動が少なからずある（誤作動の少ない機械へとヒトは進化して行くだろうが）．また，健全な論理を使えないという病的な思考機械も存在し得

[65] 一階述語論理学ではさらにものからものへの変換を考えるが，それも $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ 上の算法とみなせる．

[66] これも $\mathbb{A}$ の元を「記号」と呼ぶと同様，名前を変えるだけだから，「文」の日常語的意味に囚われてはいけない．

ている．さらに，一個の人間でも，時間・年齢と共に変化して行く．人間という思考機械は未完成品として生まれ来てだんだん完成品になるのだろう．つまり思考機械・人間と一口に言っても，その性能は個々の機械や時間や場合によって甚だしく異なる．だから，基本問題 2 にどう答えたらいいかということは，実はそう簡単なことではない．どの範囲の思考機械の心論理構造を調べたらいいのか，ということが先ず問題になる．これと同様の問題は，心言語の構造についての基本問題 1 についても生じてくる．一般化して言うなら，広い範囲に亘って変化分布する研究対象のどの範囲に焦点を絞るべきかという問題である．と言うよりは，どうしたら焦点が絞れるかと言った方がいいかもしれない．この問題は，数理心理学だけでなく，生物学・医学・心理学・言語学など，およそ生き物に関わるすべての学問分野に共通の問題である．

それでは，数理心理学ではこの問題にどう対処すべきか．答は，数理心理学が若い学問であることを考えれば，常識的なものに成らざるを得ない．つまり，統計的に一番多数を占める範囲にまず焦点を合わせるべきだろう．言い換えれば，観察者の周囲に一番多く見られる範囲を研究対象にするのだ．どう言い換えても曖昧だけれども，この曖昧さは，決して批判されるべきものではなく，研究対象の複雑さの指標とみなすべきものなのだ（第 1.2.4 項参照）．

基本問題 2 を解く鍵も，基本問題 1, 4 と同様に自然言語の中に隠されている．自然言語には心言語の元だけが表出しているのではなく，推論過程すなわち心論理代数系での演算の過程も表出しているはずだからである（図 1.5 参照）．

基本問題 1, 4 と基本問題 5 の間にも，まだ大きな問題が隠されている．と言うのは，心言語文の真偽というものは，絶対的に定まるものではなく，心言語と世界の対応関係に相対的に定まるからである（図 1.6 参照）．この対応関係がどういうものかが定まらなければ，文の真偽も定まらない．だから，隠されていた問は次のように述べられる．

基本問題 6 心言語と認識の対象世界の対応関係は如何なるものか．

思考機械・人間は世界のもの事を記銘し，記銘されたもの事に対応する記号が心言語上に存在する．つまり，世界の幾つかのもの事と心言語の幾つかの元とが対応している．それでは，その幾つかの元に心言語の算法を適用して得られる元は世界のどういうもの事に対応するのか．その対応は始めの幾つかの対応とどういう関係にあるのか．そういうことを基本問題 6 は問うているのである．ただし，心言語と認識の対象世界を一つ定めたとしても，両者の対応関係は一定不変とは限らないから，助変数依存性を込めた対応関係を考えなければならない．

以上，数理心理学の基本的な問を六つ提起したが，これらについて考えるということは，実は論理学を行なうことに他ならない．つまり，まず心言語がこの論理学における形式言語であり，これ

図 1.8: 論理学としての数理心理学の三本柱と基本問題

文法論	意味論	演繹論
基本問題 1	基本問題 4, 6, 5	基本問題 2, 3

を先取りして「心言語」という名を使ったのである．次に，第 1.2.3 項で説明した通り論理学の三本柱は文法論・意味論・演繹論であるが，基本問題 1 の求めているものが心言語の文法論であり，基本問題 4, 6, 5 の三問に答える論が心言語の意味論であり，基本問題 2, 3 の求めているものが心論理代数系についての演繹論である．

要するに，**代数系 A と抽象された思考機械・人間の潜在能力についての問は基本問題 1 − 6 に分割され，これらについて仮説 1 の下で考えるということは，心言語という形式言語の上の論理学を研究することに他ならない** [67]．逆に，任意の形式言語の上の論理学は，何らかの思考機械の潜在能力を研究するための学問とみなすことができる．

しかしこう言い切るためには,「論理学とは何か」についてもう少し詳しく説明しなければならない．次項でその義務を果たしながら，これまでの大づかみの説明を敷衍することにする．

注意 1.4.1 推論過程の有限列を**思考過程**または思考履歴と呼ぶが，これが人脳において起きている思考という現象を数学的に抽象したものであることを説明しよう．

まず，第 1.3.4 項で説明したように，代数系と抽象された一般の機械については，一つ一つの物の生産履歴は計算図で表現される．しかし複雑な機械は，複数の物を同時に生産することが珍しくない．たとえば自動車組み立て工場の中には，複数の車種を同時に生産するために複数の生産ラインを動かすものもある．厨房でも複数の料理を併行して作ることがある．思考機械・人間でもそういう現象が実際に起きていることだろう．こういう複数の生産を併行する機械の生産履歴を表現するのは，一般には面倒である．

しかし思考機械・人間の場合は，その特殊性が幸いし，併行する複数の生産の履歴表現も余り面倒にならない．なぜならまず，思考機械・人間の「考え」はすべて事の記述である．従って，思考機械・人間がたとえ複数の工程による生産を併行して複数の事の記述 $f_1, \ldots, f_m$ を同時に生産したとしても，数理心理学者は,「かつ (and)」を意味する二項算法 $\wedge$ を心論理構造に属させることにより，これら m 個の事記述を一つの事記述 $f_1 \wedge \ldots \wedge f_m$ として扱うことができる [68]．従って，思考機械・人間の「考え」すなわち事記述なら，時間の経過につれて一つ一つ順番に生産されるとみなすことができる．そこで，事の記述 $f_0, f_1, \ldots, f_n$ がこの順番に生産されたとしよう [69]．それぞれの事記述 f_i の生産履歴は心論理代数系 B 上の計算図 I_i によって表現され $(i = 0, 1, \ldots, n)$，従って事記述 $f_0, f_1, \ldots, f_n$ の生産履歴は，思考過程 $I_0, I_1, \ldots, I_n$ によって完全に表現される．この意味で思考過程は，人脳において起きている思考という現象を数学的に抽象したものなのである．

なお，人脳において起きている演繹的思考•帰納的思考という現象も，次のように数学的に抽象することができる．すなわち，I_i を推論過程とし，I_i の始点集合と終点を S_i と f_i で表し $(i = 0, 1, \ldots, n)$, S を B の部分集合とし f を B の元とするとき，思考過程 $I_0, I_1, \ldots, I_n$ が S からの f の**演繹過程**であるとは，$f_n = f$ であって各 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して $S_i \subseteq \{f_0, \ldots, f_{i-1}\} \cup S$ の成り立つことを言う．また，$I_0, I_1, \ldots, I_n$ が f からの S の**帰納過程**であるとは，$f_0 = f$ であって各 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して $S_i \subseteq \{f_{i+1}, \ldots, f_n\} \cup S$ の成り立つことを言う．

第 1.3.4 項の例に即せば，a, b, c, p, q, r, s, t が事記述で λ, μ, ν が心論法なら，

$$\frac{r\ \ s}{\mu} \qquad \frac{p\ \ c}{\mu} \qquad \frac{q\ \ b}{\nu} \qquad \frac{a\ \ b}{\lambda} \qquad \frac{b\ \ c}{\nu} \tag{1.4.1}$$

は t からの $\{a, b, c\}$ の帰納過程であり（(1.3.6) 参照），これの順番を逆転した

$$\frac{b\ \ c}{\nu} \qquad \frac{a\ \ b}{\lambda} \qquad \frac{q\ \ b}{\nu} \qquad \frac{p\ \ c}{\mu} \qquad \frac{r\ \ s}{\mu} \tag{1.4.2}$$

---

[67] この研究を第 5 章と第 6 章とで実行する．

[68] この事記述は厳密には，算法 $\wedge$ を適用する順番を明示するために括弧を使って，たとえば $(\ldots((f_1 \wedge f_2) \wedge f_3) \ldots) \wedge f_m$ のように表さなければならない．

[69]「事の記述は時間に関して離散的にではなく連続的に生産されるであろうから $f_0, f_1, \ldots, f_n$ ではなく $f(t)$ $(0 \leq t \leq a)$ のように表すべきだ」と考える人がいるだろう．しかし，事記述の生産は結局はニューロンの発火によるのであり，一度発火すれば次の発火まで不応期があるので，事記述は離散的に生産されるとしてよいと考える．

は $\{a, b, c\}$ からの t の演繹過程である．また，(1.3.5) は $\{a, b, c\}$ からの t の演繹過程であると同時に t からの $\{a, b, c\}$ の帰納過程である．

一般化して言えば，$I_0, I_1, \ldots, I_n$ が S からの f の演繹過程であることは，$I_n, \ldots, I_1, I_0$ が f からの S の帰納過程であることと同等 [70]である（問題 3.6.4 参照）．実はさらに，S からの f の演繹過程が存在するためにも，f からの S の帰納過程が存在するためにも，始点が S に含まれて f を終点とする推論過程の存在することが必要十分であり（問題 3.6.5 参照），そういう推論過程は，S からの f の演繹過程であると同時に f からの S の帰納過程である．また，そういう推論過程が存在するためには，f が S の算包 [S] に属すことが必要十分である（問題 3.6.3 参照）．従って，演繹過程を論ずることも帰納過程を論ずることも，基本問題 2, 3 を論ずることに，すなわち心論理代数系 B についての演繹論に包摂される．

以上のような数学的抽象の下では，演繹的思考も帰納的思考も推論の連鎖であって，引き続く推論間の前後関係が逆という違いしかないから，演繹と帰納をことさらに分ける理由はない．しかしこの抽象の際に捨象した面では，演繹と帰納の間には大きな違いがある．思考には記憶の想起が関わるが，演繹と帰納では想起の仕方が違う．たとえば (1.4.2) の表現する演繹的思考が実際に行なわれるためには，記憶庫内に沢山ある原材料すなわち事の記憶の中から a, b, c が選択・運搬すなわち想起され，沢山ある工程の記憶の中から λ, μ, ν が然るべき順序 $\nu, \lambda, \nu, \mu, \mu$ で想起されて実行されなければならないが，(1.4.1) の表現する帰納的思考が実際に行なわれるためには，さらに p, q, r が想起されなければならないからである．

この例が示すように，人脳において演繹的や帰納的の思考が実際に如何なる仕組みで行なわれるかは，記憶・想起・根気などの外的制約に関わるので顕在思考能力の問題であり，従って本書では問うことはしない．

1.4.2　論理学としての数理心理学

§ 前項で説明した通り，基本問題 1 – 6 は論理学の問題と捉えられる．第 1.3.5 項で触れた顕在思考能力の問題や後出の基本問題 7 や第 1.6 節が示す通り数理心理学の基本問題は 1 – 6 だけではないし，論理学も数理心理学だけのものではないから，数理心理学と論理学はどちらも他方を包摂しないが，数理心理学と論理学の重なりが大きいことは確かである．そこでここでは,「論理学とは何か」と共に数理心理学と論理学の関係について，もう少し詳しく説明しよう．ただし，本書では「論理学」は「数理論理学」を指すので,「論理学とは何か」については論理学の数学的構造の説明に限定する．

第 1.2.3 項に記した通り，論理学は「如何なる記号変換能力から如何なる記号生成能力が生ずるか」を問う学問の一つであるが，論理学における「記号」は形式言語の元を指す．そして「形式言語」は，最も一般的には，普遍型付代数系のうちで素元系が**定数系** Con と**変数系** Var に分割されているものを指す [71]．ただし本書では第 4 章で，このように極度に一般的ではなく程よく一般的な形式言語上の論理学を論ずる．また，素元系の Con と Var への分割は後述のように意味論と結び付けなければ無意味であるし，意味論は変数が豊富になければ不自由なものになる．他方，Con は空集合であってもいいので，任意の普遍型付代数系は素元系全体を Var とする形式言語とみなせる [72]．

[70]「同等」は論理学では，二つの命題A・Bに関し，AならBであってその逆も成り立つことを言う．数学で「同値」を「同等」の意味で使うのは言葉の誤用であろう．
[71]「定数」「変数」は「constant（＝不変のもの）」「variable（＝変化するもの）」を指し，数とは限らない．
[72]たとえば自然数の全体 ℕ さえも形式言語とみなせる．問題 4.1.1 と問題 3.5.4 と問題 3.8.1 参照．

このように形式言語の範囲は広大だから，あらゆる種類の形式言語が論理学の研究に値するのではない．研究に値する形式言語の種類は問題意識に応じて自ずと限られるから，如何なる形式言語を取り上げて研究すべきかを論ずる**文法論**がまず必要になる [73]．そして論理学は，取り上げる形式言語の種類によって，命題論理学・述語論理学等に区分される．たとえば，命題論理学では命題言語なる形式言語を取り上げるが，これは，素元系全体を Var とし二項汎算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項汎算法 $\Diamond$ だけから成る代数構造を持つ普遍汎代数系である [74]．しかし数理心理学の問題意識の下では，命題論理学や述語論理学は，参考にはなっても深い研究には値しない．

さてそれでは，数理心理学における文法論は如何にあるべきか．この問に答えることが，取りも直さず,「心言語は普遍型付代数系である」という仮説 1 の下で「心言語の代数構造は如何なるものか」という基本問題 1 に答えることなのである．この問への私の答は「心言語は**格言語**なる形式言語である」というものであり，これについては第 5 章以降で詳述する．ここでは，心言語の構造が特定されたと仮定して先へ進む．

前項で説明したように，基本問題 1 に答えるためには，まず「人間にとっての認識の対象世界とは如何なるものか」という基本問題 4 に答えなければならない．つまりその後に敷衍した通り，認識の対象世界を何らかの代数系として特定しなければならず，それができれば，認識の対象世界に近しい代数系として心言語を特定することができるはずである．基本問題 4 への私の答は「人間にとっての認識の対象は**格世界**なる代数系である」というものであり，これについてはやはり第 5 章以降で詳述する．ここではこの問の代わりに,「人間にとって如何なる世界が認識可能か（人間は如何なる世界を認識する潜在能力があるか）」という問を考えてみよう [75]．人間の認識対象世界はもちろん人間にとって認識可能な世界であるが，人間は認識可能世界のすべてを認識の対象としてはいないだろうから，この問を考えるのも無意味ではない．

人間機械論の立場で考えれば，この問への答は基本問題 4 に比べてかなりはっきりしている．つまり，如何なる世界が認識可能かは，単に世界を認識・記銘する機械としての人間の構造，すなわち心言語の代数構造で決まるはずである [76]．とすれば，認識可能の条件も代数的概念で書かれなければならないだろう．つまり，認識対象世界が心言語に近しいという意味を包摂する意味で，認識可能世界は心言語に近しい代数系のはずである．そして代数学には「近しい代数系」に一見ぴったりの概念がある．心言語と同型（どうがた）の**型付代数系**を認識可能世界と定義すればいいように思われる [77]．しかしこの定義は妥当ではない．なぜなら，格言語の代数構造には変数系 Var の元を助変数とする算法（そういう算法を**可変子**と呼ぶ）があって，それに相当する算法を格世界において然るべく定義することができないため，格言語と格世界は同型ではないからである．

心言語以外の形式言語についても同様に認識可能世界を考えることができる．前項で注意した通り，任意の形式言語の上の論理学は何らかの思考機械の潜在能力を研究するための学問とみなすことができ，その思考機械にとっての認識可能世界というものが当然考えられるのである．ただ後々の理論の展開のためには，認識可能世界は極端に小さいものであっては都合が悪い．そこで一般に，形式言語から可変子を除いて出来る算部分系と同型の型付代数系であって大きさについてのある付加条件をみたすものを，その形式言語にとっての認識可能世界と定義する（格世界はこの意味で格言語にとっての認識可能世界である）．なお，形式言語を一つ決めても，それにとっての認識可能世界は一般には複数存在する．

---

[73] この「文法論」は「構文論」「統語論」「統辞論」とも呼ばれる．自然言語の文法論とに違いについて端書き参照.

[74] **本書では，否定の意味を表す論理記号として $\neg$ や $\sim$ ではなく $\Diamond$ を使う．** その理由については端書き参照.「普遍汎代数系」の定義ついては問題 3.5.3 参照.

[75] この「潜在能力」は第 1.3.5 項で説明した機械の生産についての潜在的能力とは異なる意味である.

[76] 潜在的な認識能力を問うているのだから，特に，目耳鼻皮膚などの感覚器官や神経系に障害のない場合を考えている.

[77]「同型」「型付代数系」は第 3.4 節で定義する．**「同型（どうがた）」は「同形（どうけい）」とは異なる概念である．**

たとえば，命題言語には可変子がなく型も一つしかないので，一般の形式言語にとっての認識可能世界の上記定義によれば，命題言語にとっての認識可能世界は，空でない集合 W に命題言語の算法と同類の算法を，すなわち二項汎算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項汎算法 $\Diamond$ を与えて出来る代数系に限られる．集合 W もそれら W 上の算法も任意であっていいので，W としてたとえば命題言語自身や任意のブール束をとることができる．しかし命題論理学においては，W を最小のブール束 $\mathbb{T} = \{1, 0\}$ に限定する．同じく形式言語の一つである一階述語言語には，可変子として限量子 $\forall \mathrm{x}$ と $\exists \mathrm{x}$ があって，型として項の型 ϵ と論理式の型 ϕ がある．このため，一階述語言語にとっての認識可能世界は，空でない集合 W_ϵ と W_ϕ の直和 $W = W_\epsilon \amalg W_\phi$ に一階述語言語の限量子以外の算法と同類の算法を，すなわち $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と関数記号と述語記号を局所算法として然るべく与えたものに限られる．集合 W_ϵ と W_ϕ は任意であって，算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ は W_ϕ 全域で定義されて値が W_ϕ の中にありさえすればいいので，W_ϕ としてたとえばやはり論理式の全体や任意のブール束をとることができる．しかし一階述語論理学においては，W_ϕ はやはり $\mathbb{T}$ に限定する．つまり命題論理学や一階述語論理学においては，かなり狭く限られた範囲の認識可能世界だけを考える．

これらの例と同様にその他の論理学においても，問題意識に応じて然るべく狭く限られた範囲の認識可能世界だけを考える．そこでそういう範囲に属す認識可能世界を，その論理学の形式言語にとっての認識対象世界と呼ぶ．つまり論理学を行なうに当たっては，認識対象世界の範囲を認識可能世界の範囲より狭めて設定しなければならず，如何に狭めて設定するのが妥当かを考える**世界論**が必要になる．それでは，心言語のための世界論は如何にあるべきか．この問に答えることが，「心言語は普遍型付代数系である」という仮説 1 の下で「人間にとっての認識の対象世界とは如何なるものか」という基本問題 4 に答えることに他ならない．そして私は前述の通り第 5 章以降で，格言語にとっての認識対象世界は格世界であるという世界論を行なうのである．

さて，心言語の構造が特定されてそれにとっての認識対象世界の範囲が設定されたとしよう．そうすると次に考えるべきは，この二者間の対応関係についての基本問題 6 である．幸いなことにこの問への答は，心言語に限らず程よく一般的な形式言語に適用できる簡潔な代数学的「対応論」として存在している．その概略と背景は次の如くである．

まず，形式言語 A の定数系 Con から認識可能世界 W への写像 Φ で型を保存するものを**定付値**と呼び，同様に，変数系 Var から W への写像 ν で型を保存するものを**変付値**と呼ぶ．そして，変付値の全体を Val で表す（記号「Val」は「valuation」に因む）．なお形式言語 A と認識可能世界 W を一組み決めても，A から W への定付値と変付値は一般には複数存在する．

これら概念の背景を心言語とそれにとっての認識対象世界に即して説明しよう．まず，心言語なる形式言語 A は世界を認識・記銘するための脳内装置の数理模型であり，認識対象世界なる型付代数系 W は，名前の通り，人間が認識の対象とする世界の数理模型であった．それと同様に，定数系・変数系なる集合も，定付値・変付値なる写像も，単なる数学的概念ではなく，脳の内外に有形あるいは無形に実在するはずのものの数理模型なのである．どういうことかと言えば，人間が外界の特定のもの事からの特定の刺激を繰り返し受容すると，人間はそのもの事を記銘する．すなわち，そのもの事を知覚するのに応じて興奮する一定の生理的単位が脳神経系の中に出来る．と言うよりは，その生理的単位が興奮することがすなわちそのもの事を知覚することなのである．そういう生理的単位の実態もそれがどういう仕組みで出来るかもよく分からないが，それを定記銘単位と呼び，定記銘単位の各々に記銘相手のもの事を対応させる写像を定記銘写像と呼ぶ．定数系 Con と定付値 Φ は，定記銘単位の全体と定記銘写像の数理模型に他ならない．

例えば，私たちが犬を見て犬と知覚できるのは，犬からの視覚刺激によって興奮する一定の「犬ニューロン」が私たちの脳神経系の中にあるからだという（犬ニューロンは単一のニューロンではなくニューロンの組み合わせかもしれない）．犬ニューロンは生まれたばかりの赤ん坊にはない．しかし，

赤ん坊が母親に抱かれて外出して犬に出会った時に母親が「ほらワンワン」などと赤ん坊に話し掛けるのは良く見かける光景である．色々な犬に対してそういう経験を重ねることによって赤ん坊に犬ニューロンが出来るのであろう．実際，赤ん坊はそのうちに，どんな犬でも犬を見れば母親に話しかけられずとも「ワンワン」と言うようになる [78]．つまりこの例では，犬を見ると興奮する犬ニューロンという生理的単位が定記銘単位として脳神経系の中に出来る．それがすなわち犬という外界の物を記銘することなのである．同様に猫ニューロンやまんまニューロンなどの色々な定記銘単位が出来るのであろう．また,「ベス」という特定の犬や「チャム」という特定の猫に対応するベスニューロンやチャムニューロンなどの定記銘単位も出来るであろう．さらには,「犬が走る」や「猫が鳴く」などの事に対応する「犬が走るニューロン」や「猫が鳴くニューロン」なども出来るであろう．そして定記銘写像は，犬ニューロン，猫ニューロン，ベスニューロン，... という定記銘単位に，それぞれ犬，猫，ベス，... という記銘相手のもの事を対応させる写像である．従って定記銘写像は,（犬ニューロン，犬）,（猫ニューロン，猫）,（ベスニューロン，ベス），... 等々の，ニューロンとそれを興奮させるもの事の組みの全体と同一視される．

なお,「一定」というのも時間の尺度に相対的なことである．人間の心は日々に成長退化して行くのだから，定記銘単位の全体も各定記銘単位の記銘相手のもの事も長い間には当然変わる．しかし，思考機械・人間の観察者である私には，時間の尺度を自由に変えて定記銘写像なる概念について論ずることが許される．

脳神経系の中には，やはり外界のもの事を記銘するための生理的単位でありながら，記銘相手のもの事がまだ決まっていないものもあるに違いない．そういう生理的単位を変記銘単位と呼ぶ．変数系 Var は変記銘単位の全体の数理模型に他ならない．各変記銘単位 x はそれぞれ，外界の何らかのもの事 w_x を記銘相手として選んで定記銘単位となる可能性がある．x を変記銘単位全体に亘って動かしたときのそういう組み (x, w_x) の全体は，変記銘単位の各々にもの事を対応させる写像とみなされる．それを変記銘写像と呼ぶ．変付値は変記銘写像の数理模型に他ならない．各変記銘単位 x の有り得る記銘相手 w_x は不特定多数存在するから，変付値も不特定多数のものを考えなければならない．そこで，変付値の全体 Val を考えるのである．

さて，形式言語 A にとっての認識可能世界 W の**巾代数系** W^{Val} は，巾代数系の定義 [79] によれば W と同型（どうがた）の型付代数系である．従って W^{Val} の代数構造には，A の可変子に相当する算法は入っていない．しかし W が然るべき条件をみたせば，A の可変子に相当する算法を W^{Val} の代数構造に然るべく付け加えて，W^{Val} を A と同型の型付代数系にすることができる．その結果，A から W への定付値 Φ を任意にとると，A の普遍型付代数系としての**普遍性**により，A から W^{Val} への**保型準写** Φ^* が出来る．そこで，こういう然るべき条件をみたす認識可能世界を A にとっての認識対象世界と定め，写像 Φ^* を定付値 Φ の定める**意味写像**と呼ぶ．意味写像 Φ^* は A から W^{Val} への写像であるが，W^{Val} が Val から W への写像の全体 $\mathrm{Val}{\to}W$ に含まれるので，$\nu \in \mathrm{Val}$ なら，任意の $a \in A$ に対して $(\Phi^* a)\nu$ は W に属す．また，Φ^* の出来方により，$a \in \mathrm{Con}$ なら $(\Phi^* a)\nu$ は Φa に等しく，$a \in \mathrm{Var}$ なら $(\Phi^* a)\nu$ は νa に等しい．さらに巾代数系の定義によれば，各 $b \in W^{\mathrm{Val}}$ にそれによる ν の像 $b\nu \in W$ を対応させる W^{Val} から W への写像は（それは ν によるいわゆる**射影**である），可変子以外の算法については保型準写である．そこで，各 $a \in A$ に $(\Phi^* a)\nu$ を対応させる A から W への写像を仮に Φ^ν で表す．そうすると Φ^ν は，定付値 Φ と変付値 ν が定数と変数を W の元に対応付けるのに応じて，各 $a \in A$ を W の何らかの元に対応付ける（第 1.4.4 項参照）．たとえば，A の定数 c, c' と変数 x が Φ と ν によってそれぞれ W の元 w, w' と u に対応付けられ

[78] 始めのうちは猫を見ても「ワンワン」と言うような間違いもあるが，母親がその都度「あれはニャンニャン」などと直していれば間違いはなくなる．従って，母親の「ほらワンワン」「あれはニャンニャン」などという話し掛けは，種々様々な個々の犬を抽象して出来る「犬」という概念を赤ん坊に授ける役割を果たしているのだから，実に重要である．

[79]「巾代数系」と後出の「保型準写」は第 3.10 節と第 3.3 節で定義する．

$a \in A$ が A の二項算法 λ, μ, ν によって

$$a = \mu\bigl(\mu\bigl(\lambda(c, x), c'\bigr), \nu\bigl(\nu(x, c'), x\bigr)\bigr) \tag{1.4.3}$$

と表示されるとする．そうすると，λ, μ, ν が可変子でないなら，Φ^ν が λ, μ, ν については保型準写であることから，a は Φ^ν によって W の元

$$\mu\bigl(\mu\bigl(\lambda(w, u), w'\bigr), \nu\bigl(\nu(u, w'), u\bigr)\bigr) \tag{1.4.4}$$

に対応付けられる．この元は形式的には，a の表示式の右辺における c, c', x をそれぞれ w, w', u で置き換えることによって得られる．もしも λ, μ, ν の中に可変子があれば，Φ^ν による a の対応付けられ先は，上記の元とは異なるが，やはり $\lambda, \mu, \nu, w, w', u$ によって表される．

以上が，程よく一般的な形式言語とそれにとっての認識対象世界との**対応論**の概略と背景である．読者は，これを心言語とそれにとっての認識対象世界に即して読めば，この対応論が基本問題 6 への答になっていることを察せられるだろう（基本問題 6 直後の解説参照）．

そうすると次に考えるべきは，心言語の文の真偽についての基本問題 5 である．幸いなことに基本問題 6 と同様にこの問への答も，心言語に限らず程よく一般的な形式言語に適用できる簡潔な「真偽論」として存在している．その概略は次の如くである

まず，形式言語 A の元の型の中に特定の型 ϕ があって A の ϕ 型の元を「文」と呼ぶものと仮定する．次に A にとっての認識対象世界 W は，その ϕ 型部分 W_ϕ が「真偽」に相当する集合 $\mathbb{T} = \{1, 0\}$ に等しいものに限定する．さらに，A と W の間に上記のような対応論が適用できるものと仮定する．そうすると，Φ を A から W への定付値とすれば，意味写像 Φ^* は保型写像であるので，A の各文 a を W^{Val} の ϕ 型の元の成す部分集合 $\mathrm{Val}{\to}W_\phi = \mathrm{Val}{\to}\mathbb{T}$ の中へうつす．従って $\nu \in \mathrm{Val}$ なら，$(\Phi^* a)\nu$ は $\mathbb{T}$ の元 1 と 0 のどちらかに等しい．つまり，A から W への対応付けの写像 Φ^ν は，a を 1 か 0 に対応付ける．そこで，$\Phi^\nu a = 1$ のとき，a は (Φ, ν) の下で**真である**と言う．この定義は，基本問題 6 の前に「心言語文の真偽というものは，絶対的に定まるものではなく，心言語と世界との対応関係に相対的に定まる」と記したことに呼応する．また，A から任意の認識対象世界 W への任意の定付値 Φ と A から W への任意の変付値 ν の下で a が真であるとき，a は**恒真**であると言う．たとえば a が (1.4.3) のように表示される場合，a が恒真であるためには，(1.4.4) が W, w, w', u によらずに 1 に等しいことが必要十分である．これが程よく一般的な形式言語の**真偽論**である [80]．

以上のような世界論と対応論と真偽論を「意味論」と総称する．なお真偽論では，0 と 1 以外の真理値を設けることもある．たとえば，0 と 0.5 と 1 の三つを真理値としたり，実数の区間 $[0, 1]$ を真理値集合としたりする論理学がある．それにも拘らず数理心理学者は心言語のための真偽論で 0 と 1 だけを真理値とするが，それは，心言語にとっての認識対象世界は外界の数理模型であって，外界には真と偽の中間のものはないと考えるからである．人間が事の真偽の判断に迷うことは確かにある．しかしそれは，外界に真と偽の中間のものがあるからではない．人間が外界について持つ知識の確度が色々だからである．それゆえ数理心理学者は，心言語のための真偽論では 0 と 1 だけを真理値とする．そして知識の確度は，心言語上の論理学に基づきながらも，異なる枠組みで論ずる目論見である（第 1.6 節参照）．

形式言語 A の意味論が上記のように定まると，A 上の**健全な論理**なるものが次のように定義される．すなわち，文に文を対応させる A 上の算法 ρ が健全な論理であるとは，A から任意の認識対象世界 W への任意の定付値 Φ と A から W への任意の変付値 ν に対し，(Φ, ν) の下で真なる文

[80] これについて詳しくは第 4.7 節で説明する．

を ρ で変換して得られる文がやはり (Φ,ν) の下で真であることを言う．従って，恒真文を健全な論理で変換して得られる文はやはり恒真文である．

さてそうすると，心言語とその認識対象世界の構造を然るべく特定することができれば，以上の説明のようにして心言語上の健全な論理の範囲が定められる．そして,「心論理構造は如何なるものか」という基本問題 2 に答えるには，基本問題 5 の後に指摘した通り，健全な論理の一部を然るべく特定すればいいと考えられる．そして心論理構造が特定されると，いよいよ基本問題 3 に取り掛かることができる．そこに，思考能力に関わる根本的な問題が待ち受けている．典型的な問題は，特定された心論理構造が完全かという問題である．

しかし，健全な心論理構造の完全性などが主要な問題となるのは，統計的に一番多数を占める思考機械・人間に焦点を合わせた当面の研究の場合である．そうでない思考機械にまで範囲を広げた研究も視野に入れて置かなければならない．つまり，不健全な論理も含めて心論理構造を色々に設定して基本問題 3 を考えなければならない．そして，これが心言語上の論理学の最終目標である．「論理学は『如何なる記号変換能力から如何なる記号生成能力が生ずるか』を問う学問の一つだ」と第 1.2.3 項で述べたのは，この辺のことを指している．ただし，この最終目標たる問題は数学的に大変難しい．どんなに難しいかは，群論での同様の問題を思い浮かべてみれば直ぐに分かる．群は算法が唯一つ（逆元算法も入れれば二つ）の代数系である（例 3.13.1 参照）．しかし，群 G とその部分集合 X を具体的に与えられたとき，X の G での算包の性質を調べることは，大抵は絶望的なほどに難しい．しかし如何に難しくとも，数理心理学者は，こういう問題を無視することはできない．

1.4.3　心言語の意味論への要請

§ 第 1.4.1 項で名付けた通り，基本問題 4・5・6 に答える論が心言語の意味論である．その核心は，これまでの説明が示すように,「人間にとっての認識の対象世界とは如何なるものか」という基本問題 4 にどう答えるかにある．そして，どう答えるかは大変難しい．しかし難しいながらも，そこには一つの要請が看て取れる．仮説 1 の後で言及したもう一つの仮説の下で，特に心言語文は自然言語文へと変形・表出するが，**認識の対象世界の構造は，恒真の自然言語文へと表出する心言語文がその世界で真となるものでなければならない**のである．

この要請をもう少し正確に言い換えると次のようになる．色々な自然言語文に対して，私はそれが恒真であるかどうかを理性または直観によって判定することができる（この恒真の概念は形式言語文の恒真の概念とは当然違う）．思考機械・人間の心言語を研究する私は，私が恒真と判定する自然言語文 S（それは比較的に簡単なものに限られる）へと表出する思考機械・人間の心言語文 T が心言語の意味論によって恒真となるように，思考機械・人間の認識の対象世界の数理模型を作らなければならない．

ただし，この要請には一つ曖昧なところがある．どういう心言語文がどういう自然言語文として変形・表出するのかが前もって分かってはいないからである．それをはっきりさせるのは次節で心言語の**変形論**と名付ける論の課題であるが，この変形論を行ないつつ認識の対象世界の数理模型を作らなければならないのである．

なお，恒真かどうかを私が的確に判定できる自然言語文はほぼ国語文に限られる（第 1.5.2.3 条参照）．外国語を幾らか知っているにしても，それは世界中の言語のほんの一部に過ぎない．従って，これまで思考機械・人間とその認識の対象世界および自然言語に言及した際には，実は暗に思考機械・日本人とその認識の対象世界および日本語を考えていたのであり，これからもそうする．そうしても以下の論は，思考機械・人間とその認識の対象世界についての論としては一般性を失わない

だろう．なぜなら，第 1.2.2 項で触れた通り，思考機械・人間の構造は本質的には母語によらないだろうし，認識の対象世界についても同様だからである．

さて，心言語の意味論作りが先の要請に従うべきだという考えは，実は絶対に確かではなく，不確かな仮説や推測の幾つかに基づいている．絶対に確かと思う読者は，安易に考え過ぎているか，数理心理学とは違う観点から見ているか，または第 1.1.2 項で触れたように，観察者自身の心の働きと観察対象の心の働きを区別しないための考え違いを犯しているのである．国語文が恒真かどうかを観察者の私が判定することと観察対象の思考機械・人間の心言語の意味論の間に，なぜそういう強い関係がなければならないのか．私の考えを説明しよう．ただしこの説明は，読者にとってはこの序説で一番位に難解であろうし，私にとってもこの序説で一番位に苦労であった．

まず，論理学の内部には，形式言語の意味論はこうでなくてはならないという決まりは無い．恣意的に意味論を作っても，数学的に矛盾がなければ何らかの論理学は出来る．だから，意味論を限定するものは，論理学の外側からの要請以外にはない．たとえば，人間に奉仕する思考機械を工学者が作りたいとすれば，人間に奉仕させたいという要請が，この思考機械に持たせる論理や知識を限定する．そういう論理・知識はもちろん健全・真でなくてはならない．従って，この思考機械に対応する形式言語の意味論が限定される．

心言語の意味論の場合，外側からの要請は二つある．一つは，思考機械・人間がそれを観察する私と同種の存在であり，私と同じ世界に住んでいるという事実である．もう一つは，生物は環境に適応した方向に次第に進化してきたという進化論の仮説である．

この二つの要請が心言語の意味論をどう限定するかを考えるには，まず，国語文 S が恒真かどうかを思考機械・私が判定するとはどういう過程なのかを考えなければならない．思考機械・私は，たとえば「犬は犬だ」という国語文を恒真と判定する [81]．もう少し複雑な国語文が恒真かどうかを判定することもできる．判定の過程には少なくとも数種類の異なるものがあると思われる．しかしいずれの過程でも，思考機械・私は，まずこの国語文 S をある心言語文 U として記述し（第 1.4.1 項で説明したように，思考機械・人間が世界のもの事を認識・記銘するのは，すべて心言語での記述によるからである），その後で U に対して何らかの操作を行なっているのだろう．そして，S が「犬は犬だ」のような簡単な国語文の場合は，記憶庫に蓄えられている何種類かの例文と U とを単に照合しているのだろう．照合して一致する例文が見つかったときに，思考機械・私は S を恒真と思うのである．なぜそう考えるかと言えば，たとえば「犬は犬だ」を恒真と判定するときに，私は理性を働かせているのではなく直観的に判定しているように思われるからである．別の言い方をすれば，犬はなぜ犬なのかを私は説明できないからである．S がもう少し複雑な国語文だと，明らかに，私は直観的に判定するのではなく理性を働かせている．それは恐らく，蓄えられている例文に心論法を適用して心言語文 U が得られるかどうかを試しているのだろう．得られたときに，思考機械・私は S を恒真と思うのである．

しかし，どんな方式で判定するにせよ，判定結果は間違ってはいないはずである．正確に言えば，その判定機構は間違いない判定を下す潜在能力を備えている（だから，その能力が顕れないで判定を間違えるときもある）．つまり，判定機構が正常かつ十分に働いたなら，思考機械・私が国語文 S を恒真と判定した場合，S から変換された私の心言語文 U は，実際にどの世界においても真，つまり，どの認識対象世界へのどの定付値とどの変付値の下でも U は真のはずである．

なぜなら，思考機械・人間は思考機械・私と同種なのだから，その心言語文 U に対して思考機械・私と同様の機構での判定を行ない，思考機械・私と同様の判定結果を得て，その判定に基づいて行動する．だから，ある世界において U が偽であれば，つまりその世界の現実に合わなければ，

[81] 正確には，「犬」という言葉が何を指そうとこの文が真であると判定する．従って実は，「犬」を変数 X で置き換えた「X は X だ」という変数入り文を恒真と判定していることになる．

その世界の中で思考機械・人間が行動したときに不都合が起きる．そういう不都合を起こす思考機械・人間は，当然生存率が低くなるから，下等動物の頃からの長い進化の過程で淘汰されてきただろう．だから，現存の思考機械・人間の恒真性判定機構は，間違いない判定を下す潜在能力を備えているはずなのである．つまりたとえば，記憶庫に蓄えられている恒真性判定のための例文や，それに心論法を適用して得られる心言語文は，どの世界においても真のはずなのである．正確に言えば，思考機械・人間が関わることのできる世界は，蓄えられている例文やそれに心論法を適用して得られる文が真となる世界だけのはずなのである [82]（これは，基本問題 5 の後で述べた「心論理構造は健全な論理から成る」という考えの根拠にもなる）．

最後に，私が恒真と判定する国語文 S（それは比較的に簡単なものに限られる）へと表出する思考機械・人間の心言語文 T と S から変換された私の心言語文 U との関係を考えなければならない．結論を先に言えば，T と U は等しいはずである．より詳しく言えば，思考機械・私が国語文 S を心言語文 U に変換記述する過程と思考機械・人間の心言語文 T が国語文 S として変形表出する過程とは，S が比較的に簡単なために互いに逆過程であり，特に T と U は等しいはずなのである．そしてそうだから，私が恒真と判定する国語文 S へと表出する思考機械・人間の心言語文 T は，心言語の意味論によって恒真でなければならないのである．

いま述べた T と U が等しいという結論は，進化論の仮説から以下のように演繹することができる．まず，どの自然言語文も話者の考えの現れであり，聞手はその自然言語文から何らかの理解を得るが，数理心理学者は,「考え」も「理解」も心言語の元であると考える．つまり，自然言語文 S へと変形・表出する話者の心言語文 T が，S に込められた話者の「考え」であり，他方，自然言語文 S から変換・記述された聞手の心言語文 U が，S から聞手が得た「理解」なのである [83]（第 1.5.2.2 条参照）．次に，人間の言語機能も言語も，環境に適応した方向に進化してきただろう．そ

図 1.9: 考え・自然言語文・理解

$$\boxed{\text{心言語文T（＝考え）}} \xrightarrow{\text{変形・表出}} \boxed{\text{自然言語文S}} \xrightarrow{\text{変換・記述}} \boxed{\text{心言語文U（＝理解）}}$$

して，どういう言語機能と言語が環境に適応したかと言えば，考えを効率的に伝達できる機能と言語が適応したに違いない．つまり，考えを正確に言葉に変える身体機能と言葉を正確に理解する身体機能および考えを正確に表現できる言語とが環境に適応しただろう．そうであるなら，現存の思考機械・人間と言語については，S が比較的に簡単な場合には，話者の考え T と聞手の理解 U とは一致しなければならないと考えられるのである．

冒頭に掲げた心言語の意味論への要請は，このように進化論を含めた多くの仮説・推測に基づいており，その点で根拠薄弱なものと難詰することもできるだろう．しかし，仮説 1 などと同様この要請は，数理心理学全体を視野におさめたうえで妥当かどうかを判断すべきもので，この要請だけを取り出して妥当性を云々すべきものではない．この要請に基づいて築き上げた数理心理学が全体として妥当なものとなれば，この要請もやはり妥当なものと言わざるを得ないのである．

1.4.4　意味と意味論

§ 第 1.4.2 項では形式言語の意味論について説明したが，意味論の概念は，形式言語だけでなく任意の集合 A に対して一般化することができる．

[82] そうでない世界も，宇宙のまだ人間が関わっていないどこかには有るかもしれない．
[83] S, T, U はそれぞれ「Sentence」「Thought」「Understanding」の頭文字に当たる．

すなわちまず，R が A と集合 B の間の関係であるとき [84]，R を A から B への**意味対応**と呼び，B を R の**意味域**と呼ぶ．次に，各 $a \in A$ に対して，

$$Ra = \{b \in B \mid a\,R\,b\}$$

の元を R の下での a の**指象**と呼ぶ（「指象」は「指示対象」の略である）．逆に各 $b \in B$ に対して，

$$R^{-1}b = \{a \in A \mid a\,R\,b\}$$

の元を R の下での b の**表象**と呼ぶ（「表象」は「表示形象」の略である）[85]．そして，集合 A の意味対応 R を特定してから A の元の指象について行なう色々な論を，A についての**広義の意味論**と総称する．この意味論の概念は広過ぎて実用的ではない．しかし,「意味論」がこう定義できること（あるいはこうしか定義できないこと）を認識するのは重要だろう．

なお，指象が「意味」と呼ぶべきものであるが,「意味」が日常語で使い古されていて学術用語には適さないので「指象」と言い換えるのである．しかしこの項に限って,「指象」を「意味」と呼び換える．つまり，A の元 a の R の下での**意味**とは，$a\,R\,b$ なる B の元 b のことに他ならない．従って a の意味は，唯一つとは限らないし無い場合もある．これに対し B の元 b の表象は,「b を意味する A の元」と呼ぶべきものである．そしてやはり，b を意味する A の元は，唯一つとは限らないし無い場合もある．なお，A の元 a の意味が二つ以上あるとき，a の意味が**曖昧**であるとか a の意味に**曖昧性**があるとか言う．

意味論の典型は，当然ながら国語辞典の中にある．国語辞典は，たとえば「すべて」「全部」「皆」を同様に使って構わないと説明する．そこで，二つの語 a, b を同様に使って構わないとき $a\,R\,b$ と書くことにすれば，R は語全体の集合 J における関係であり，従って J から J 自身への意味対応である．そして国語辞典は，R(すべて) に「全部」「皆」が含まれることなどを論ずるから，意味論を行なっていることになる [86]．そして，この辞典の説明の限りでは R は同値関係であるから,「$a\,R\,b \iff Ra = Rb$」が成り立つ．つまりこの意味論においては，語 b を語 a と同様に使って構わないときに a と b の意味が同じなのである．ただし，辞典は一般に，私たちの実際の語法を正確には記述していない．私たちの実際の語法では，たとえば「すべて」「全部」「皆」はまったく同様に使われるのではなく状況に応じて使い分けられるから，R は実際は推移律をみたさず，従って同値関係ではないであろう.「この辞典の説明の限りでは」というのは，そういう意味である．また，国語辞典は意味論だけを行なうのではない．国語辞典は，たとえば格助詞の「が」が名詞に後置されれば主語を表すことを説明する．これは「が」の意味を説明しているのではなく,「が」の役割を説明しているのである．国語辞典はまた，言葉すべての意味を説明してはいないから [87]，完全な意味論を行なってはいない．

一つの集合 A に対しても，意味域 B と意味対応 R を色々にとれば，色々な意味論を行ない得る．しかしもちろん，どんな意味論でも妥当なのではなく，妥当な意味論は問題意識に応じて限られる．第 1.5.2.2 条では，数理心理学の問題意識の下では語の集合 J に対して如何なる意味論が妥当かを説明する．

第 1.4.2 項で説明した形式言語の意味論も，この項で定義した広義の意味論に包摂される．第 1.4.2 項では，形式言語 A から認識対象世界 W への定付値 Φ と変付値 ν を一組み定めると，意味

[84]「関係」と関連概念については第 3.9 節で説明する．
[85]指象・表象の概念は問題 3.18.28 で一般化される．
[86]国語辞典の「すべて」の項には「全部」「皆」と書いてあり,「全部」の項には「すべて」「皆」と書いてあり,「皆」の項には「すべて」「全部」と書いてある．この類の説明は「循環論法であり何の説明にもならない」と批判され勝ちである．しかしこの項の観点から見ると，こういう説明も立派な意味論なのである．
[87]「自動車」「工場」の意味は説明しても「自動車工場」の「自動車を作る工場」という意味は説明しなかったりする．

写像 $\Phi^* \in A{\to}W^{\mathrm{Val}}$ を介して A と W の対応関係 $a \mapsto (\Phi^* a)v$ が出来ると説明した．そこで，A から W への意味対応 R_Φ を次のように定義する [88].

$$a\,\mathrm{R}_\Phi\,w \iff (\Phi^* a)v = w \text{ なる } v \in \mathrm{Val} \text{ がある} \qquad (a \in A,\ w \in W)$$

そうすると，形式言語 A からある認識対象世界 W への定付値 Φ を定めてから $(\Phi^* a)v$ $(v \in \mathrm{Val})$ について考察することは，意味対応 R_Φ の下での A の広義の意味論を行なうことに等しい．そういう意味論は，たとえば第 5.5 節などにある．

ただし，色々な論が広義の意味論に包摂されることには何の不思議もない．広義の意味論という概念が大変に広く定義してあるからである．

1.4.5　この節の参考文献

§ 論理学は色々な分野に関係するため，教科書も色々な分野の人々が著している．ここでは，哲学・数学基礎論・計算機工学という三つの分野に関係すると思われる著者による教科書を一冊ずつ挙げよう．

1. 現代論理学：安井邦夫 著，世界思想社，1991 年
2. 数理論理学：前原昭二 著，培風館，1973 年
3. 情報科学における論理：小野寛晰 著，日本評論社，1994 年

これらの教科書の論理学は，第 5 章以後の数理心理学のための論理学とは見掛けは大変異なる．しかしこれらいずれの論理学も，基本部分では第 4 章で論ずる程よく一般的な形式言語上の論理学の特殊化であり，その意味では互いに相異なるものではない．

1.5　論理から言語へ

$ 前節までに，思考機械・人間の構造と潜在能力についての基本的な問が心言語という形式言語の上の論理学に帰着することを説明した．この節では，これが自然言語の研究すなわち言語学と，なぜ，そしてどう結びつくのかを説明する．

1.5.1　言語学へと導く仮説

§ **科学的理論が妥当かどうかは，観察される現象を如何に説明し得るかで判定される**（課題 1.5.4 参照）．心の科学的理論としての数理心理学の場合，観察すべき現象の第一は言語現象，つまり人間の言語行動だろう．なぜなら，言葉は人間の心の一番はっきりした現れだからである．

しかし，言葉が心の現れだと言っただけでは非常に漠然としている．これを明確に表現しなければ，科学として先へ進むことができない．そこで私は，これをまず次のように表現したい．

仮説 2 自然言語には心言語の元が何らかの変形を受けた後に表出している [89]**.**

[88] 哲学や従来の心理学で曖昧に「表象」と呼ぶものは，心言語 A に対してのこの意味対応 R_Φ の下での表象として厳密に再定義すべきものに思われる．第 7.1 節参照.

[89] これを第 7.1 節の仮説 6 では「自然言語には観念が何らかの変形を受けた後に表出している」と言い換える．

この節冒頭に述べた通り心言語は何らかの形式言語であるから，仮説 2 はつまり,「心」という漠然としたものの代わりに，形式言語という数学的にはっきりした概念を持ち出したのである．ただし，心と心言語が同義だと言っているのではない．言うなら，心言語は「心の座」である．また，自然言語は心言語からだけの表出でもない．なぜなら，心言語は外界のもの事の記述のための装置であるが，言葉にはもの事の記述以外のもの，たとえば推論の過程や話者の陳述態度・感情・意志などの表現が多く含まれているからである（図 1.5 参照）．また，心言語の元すべてが自然言語に表出するのでもない．表出するためには色々な制限が課せられる．なぜなら自然言語は，音声言語・文字言語・身体言語等のいずれにしても，心身能力の限界に縛られているからである．

課題 1.5.1 推論の過程を表すと考えられる言葉の例を収集せよ．

課題 1.5.2 話者の陳述態度・感情・意志を表現する言葉の例を収集せよ．

仮説 2 は，言い換えれば，自然言語という体系の構造が心言語の代数構造を反映していると主張しているのだが，その反映の度合いが大きいとは，はっきり述べていない．しかし，もちろん私は，反映の度合いはとても大きいと確信している．そして，反映の度合いが大きければ，当然，**心言語の構造は言語現象をうまく説明するものでなくてはならない**し，うまく説明する心言語の理論を作るためには，自然言語をよく観察し，そこでどういう現象が起きているかを見出さなければならない[90]．つまり言語学が必要になる．これが，数理心理学が言語学と結びつく端的な理由である．

しかし，自然言語が心言語の構造を反映する度合いがそれ程大きくないという可能性は本当にないだろうか．たとえば，自然言語には心言語のほんの一部しか表出していないという心配や，心言語が自然言語へと表出するときの変形が甚だしいという心配はないだろうか．

実際，一見すると，心言語から自然言語への変形は非常に大きいようにも見える．なぜなら，心言語というものは世界を記銘する機械としての人間を数学的に抽象したものだから，心言語の代数構造は本質的には母語によらず唯一通りと考えていいだろう[91]．それに対して自然言語は，日本語・中国語・英語などというように千差万別なのだ．また，同じ日本語でも，使う人・地域・時・状況に応じて様々に変化する．

しかし自然言語のこの多様性は，心言語の変形の方向の多様性を示すものであって，心言語の変形の程度の大きさを示すものではないとも考えられる．「心言語から日本語へ」「心言語から中国語へ」などのように変形の方向を定めれば，その方向の変形はさほど大きくないかもしれない．また，日本語と英語のように系統的に離れた言語の間にも，色々な類似性が認められる．これは，変形の方向が違っても変形の仕方には共通の傾向があることを示すのかもしれない[92]．つまり，心言語から自然言語への変形は，甚だしくもなく，そこに普遍的傾向さえ見出されるかもしれないのだ．そう考えると，**自然言語が多様であるからと言って直ちに仮説 2 を否定することはできない**．

自然言語には心言語のほんの一部しか表出していないのではないかという心配については，たとえば次のようなことが考えられる．人間は実は，思考の対象になる複数の世界 $W_1, W_2, \ldots$ に対応して複数の心言語 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ を持っていて（より大きい心言語の部分系となっているものは除外しても），自然言語として表出するものは，そのうちのわずかなのかもしれない．世界 $W_1, W_2, \ldots$

[90] ケプラーが惑星の公転を観測して三法則という現象を見出したことになぞらえるといい．それと同様に，言語という膨大な観察資料の中からどういう現象が起きているかを見出すのは簡単ではない．

[91] これに関連する説明が第 2.1.2 項の末尾や第 7 章にある．

[92] 共通の傾向と言えるものは少なくとも一つはある．心言語の元は形式言語の元だから，算法を適用する順番を示す括り記号を幾対か含む（第 3.7 節参照）．しかし，世界中のどの言語にも，恐らくそういう括り記号はない．つまり，心言語は自然言語として表出するときに括り記号の喪失という変形を起こす（ただし息継ぎなどは括り記号の名残と考えられる）．これは，ヒトの短期記憶能力が低いために，遠く離れた一対の括り記号を一対のものと認識できないためだと考えられる．これに対し，記憶能力の限界に縛られないプログラミング言語には，括り記号が不可欠に存在する．

図 1.10: 心言語から個別言語への変形・表出

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\text{日本語}} & \\ \boxed{\text{中国語}} & \boxed{\text{心言語}} \arrow[l, "\text{変形}"'] \arrow[u, "\text{変形}"] \arrow[r, "\text{変形}"] & \boxed{\text{英語}} \end{tikzcd}$$

変形の方向（矢印の向きに擬せられる）は多様でも，その程度や傾向（矢印の長さや形状に擬せられる）の違いは小さいとも考えられる．

についての思考が行なわれる時には，心言語 $A_1, A_2, \ldots$ のそれぞれにおいて心論法が施されるのだろうか．そうではない可能性も大きい．なぜなら，そういう設計は設計者の観点から見ると拙劣であって，そういう設計が進化の過程で選択されたとは思えない．そうではなくて，心論法専用の心言語 $A_?$ があって（これも複数個かもしれない），$A_1, A_2, \ldots$ における記号は皆 $A_?$ の記号に翻訳されて，$A_?$ においてだけ心論法が施されるのではないだろうか．そして，自然言語となって表出するのは $A_?$ だけかもしれない．

しかしそうであっても，$A_?$ の構造がそれ以外の A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ の構造と甚だしく異なるとは言い切れない．むしろ，$A_?$ とそれ以外の A_n の違いは，そこで心論法が施されるか否かだけであり，代数構造の違いはないと考える方が妥当に思われる．だから，自然言語として表出する $A_?$ の構造を調べることは，それ以外の A_n の構造を調べることにもなると思われる．また，進化の過程で人間がかなりの思考能力を得てから，つまり心言語と心論理構造がかなり出来上がった後で，その構造の上に言語能力が生まれたと想像されるから（かなりの思考能力を持ちながら言語能力の乏しい高等霊長類が存在するから，この想像もあながち間違いではないと思う），自然言語として表出するか否かが $A_1, A_2, \ldots$ の構造を大きく左右するとも思えない．

仮説 2 に対しては，他にも懸念・反駁の種はあるかもしれない．しかし，心とは何かを考える上で，この仮説以上に有力な手掛かりが他にあるだろうか．他に手掛かりを見出し得ないまま明確な根拠もなしに反駁・懸念し腕を拱いたり枝葉の問題にかかずらっているよりは，この仮説が提起する根幹の問題を追究する方が遥かに実り多いと思う．そして私は，かなりの実りが実際にあることを示せると思っている．

課題 1.5.3 心言語が複数個あるかもしれないということに関連して，次のような疑問が起きる．数の認識を司る心言語の構造が如何なるものかについては，ペアノ (Giuseppe Peano) の公理がいい示唆を与えてくれる（問題 3.8.1 参照）．それでは，空間図形の認識を司る心言語についてはどうか．たとえばヒルベルトによる幾何学基礎論はどんな示唆を与えてくれるか．

課題 1.5.4 科学理論の可否が観測結果と合致するか否かで決められるべきものなら，可とされる科学理論は，暗に私達の観測能力を込めて理論化しているのであろうか．

1.5.2　心理言語学の旗揚げ

§ 前項では，数理心理学がなぜ言語学と結びつくのかを説明した．次に，数理心理学がどんな言語学と結びつくのかを説明しよう．

1.5.2.1　心理言語学とその近縁の言語学

‡ 数理心理学のために必要な言語学は，伝統的な言語学とは自ずと異なる．伝統的言語学では，自然言語が研究対象であると同時に観察対象でもある．それに対し数理心理学の下での言語学は，

心言語という形式言語を研究対象とする（正確には心言語とその上の心論理構造を研究するのだが，煩わしいので，以下では心論理構造には余り言及しない）．しかし，心言語は直接には観察できない．そこで，心言語の変形表出先の自然言語を観察し，その観察結果から心言語の代数構造を推定する．従って，数理心理学のための言語学では，次の二つの作業が同時進行することになる．

1. 心言語の文法論を行なうこと．これには心言語の世界論が伴う．

2. 心言語の元が言葉となって表出する際に起きる変形についての理論を作ること．これは心言語の**変形論**と呼べるだろう．

ただし，自然言語には心言語以外のものも表出しているから，この二つの作業のためには，心言語の表出とそれ以外のものとを弁別することが必要になる（図 1.5 参照）．こういう趣旨の言語学を，以後，標題に掲げたように**心理言語学**と呼ぶ．

ここで言語学を見渡してみると，同様の考えに基づくと思われる研究がすでに行なわれていることが分かる．その中で第一に注目すべきものは，いわゆるモンタギュー意味論に端を発し**自然言語のモデル論的意味論**と呼ばれるものに至る流れである．**モンタギュー** (Richard Montague) のそもそもの目標は，第 1.4.4 項で「広義の意味論」と呼んだものを自然言語について行なうことだったようである．そのためにモンタギューは，まずある形式言語の意味論を作り，それを使って自然言語の意味を論じようと試みた．第 1.5.4 項で説明する理由で，そういう試みは論理矛盾を孕み成功しないかもしれない．しかし，モンタギューは実は心言語を形式言語として提示してその意味論を作ったのだと解釈するなら，彼の理論は心言語の文法論や意味論や変形論のいい参考になる．これが，モンタギュー意味論を注目すべきものと考える理由である．

ただし，モンタギューが使った形式言語やその意味論をそのまま数理心理学に使えるのではない．彼の理論はあくまでも言語哲学の観点からのものであり，心理学からの問題意識は無いようである．しかも，言語現象を十分に説明できているとも言い難い．数理心理学を目指す私たちは，彼の理論の骨格だけを参考にして，細部については想をまったく新たにして考える必要がある．

自然言語のモデル論的意味論に次いで注目すべきは，**チョムスキー** (Noam Chomsky) の創始による**生成変形文法論**である [93]．この理論では，言語現象を説明するために「深層構造」等の意識下の言語の存在を模索するが，これは心言語の概念に通ずる考え方ではないだろうか．もっとも，チョムスキーは深層構造等を形式言語や代数系としては提示していないようであり，それは心理言語学の考え方とは大きく異なる．**心理言語学での心言語は，思考機械を抽象したものだから，代数系となるのは必然**なのである．それでも私は，チョムスキーは心理言語学を目指したのだと考えたい．特に，生成変形文法論における「普遍文法」という概念は，心言語の代数構造に当たるものと解釈したい．そう解釈するとチョムスキーの言うことが納得できるような気がするし，彼も自身の言語学を心理学の一部と規定しているからである．

しかしいずれにしても，普遍文法論を形式言語の理論として行なわないことが，チョムスキーの生成変形文法論の致命的な欠陥なのだ．なぜなら，数理心理学で人脳という実在物を抽象して代数系に至ったのに相当する根本の考えを恐らく欠いているために，普遍文法というものに実体が伴わず，その出処が大変に曖昧だからである．しかも，形式言語の理論として行なわないために満足な意味論が無く（この「意味論」も「広義の意味論」を指す），満足な意味論が無いために満足な論理学も無く，満足な論理学が無いために第 1.4.2 項で説明したような手順に沿って思考について研究して行く道も切り開かれず，第 1.6 節で説明するような思考以外の心の側面についての研究もできず，従って，心理学としては形骸的な論に止まらざるを得ないからである．

[93] この「生成」は第 1.2.3 項で触れた「生成」と同じ意味である．

1.5.2.2　言葉の心理学的意味

‡ 自然言語について論ずる時,「言葉の意味とは何か」という問題を避けて通ることはできない．意味についての論が意味論であり,「意味論とは何か」は第 1.4.4 項ではっきりさせた．しかし，その項に記した通りこの意味論の概念は大変に広いから，これに従えば，極端に言えばどんな論でも「意味論」になるし，どんなものでも「意味」になる．だからどういう意味論が妥当かを，問題意識に応じて改めて考えなければならない．そこでこの条では，心理言語学の問題意識の下ではどういう「言葉の意味論」が妥当かを説明しよう．

国語辞典は確かに言葉の意味を説明する．そしてその説明は，正しいものと一般に認められている．しかしこれは，言葉の意味というものが何か客観的に定まったものとして存在することを意味しない．国語辞典に記された「言葉の意味」は，辞典の日本人編纂者がその言葉を聞いたり読んだりして理解する主観的意味を記載したものである．辞典の日本人使用者がその記載を読めば，記載内容に違和感を感ずることはほとんどない．そういう意味では辞典の意味記載は客観的である．しかしそれは，編纂者と使用者が日本人として母語や文化を共有するからである．編纂者はその言葉を聞いて理解する主観的意味を記載する．辞典の使用者は，その言葉を読んでやはりある意味を主観的に理解する．編纂者と使用者が母語や文化を共有するために，その二つの主観的意味がほとんどの場合一致する．これが，国語辞典の意味記載の客観性の実態である．

そこで問われるのは,「人が母語の言葉を聞いたり読んだりして理解する意味」とは何かである．こういう「意味」を**言葉の心理学的意味**と呼ぶ．以下，この問への私の答を説明しよう．

「言葉の心理学的意味とは何か」という問は，当然，次の問に関係する．

基本問題 7 人間が言葉の意味を理解する過程とは如何なるものか．

これは大変難しい問で，どう答えたらいいか，今はよく分からない（課題 1.5.8 の前の注意参照）．しかし，言葉が心言語の元に変換される過程というものがあって，それが言葉の意味の理解される過程の最終段階を成すと考えられる．つまり，**言葉が心言語の元に変換された状態，それがすなわち心言語と抽象された思考機械・人間がその言葉の意味を理解した状態だ**と考える．人間の脳の中に居る何者かが言葉の意味を理解するなどと考えるのではない（そういう考え方では,「何者か」についてさらに説明しなければならない上に，それを説明しても，その何者かが「理解する」とは如何なることかはまだ説明されない）．従ってまた，**言葉が変換されて心言語の元となったもの，それがすなわちこの思考機械・人間にとってのその言葉の意味だ**と考える．だから特に,「言葉の意味」は，心言語の元という脳内の何らかの実在物であり，仮想のものではない．これが「言葉の心理学的意味とは何か」という問への私の答である（第 1.4.3 項参照）．

なお，以上において，正確には，心言語だけでなく心論理代数系にも言及しなければならない．つまりまず思考機械・人間は，心言語とだけ抽象されるのではなく，心言語ないしは心論理代数系と抽象される．人が話をすれば，その人の心言語の元がもの事の有様の表現となって表出するが，それだけではなく，推論過程（すなわち心論理代数系上の計算図）も思考の筋道の表現となって表出し，人間を思考機械と抽象する際に捨象してあるものも，話者の陳述態度や感情や意志の表現となって表出する（図 1.5 参照）．だから基本問題 7 の「言葉の意味」には，もの事の有様だけでなく，思考の筋道や話者の陳述態度や感情や意志も含まれる．そしてその言葉を他の人が聞けば，その言葉に含まれるもの事の有様や話者の陳述態度や感情や意志の表現は聞手の心言語の元に変換されるが，その言葉に含まれる話者の思考の筋道の表現は聞手の心論理代数系上の計算図へ変換される（第 7.2 節参照）．そう変換された状態がすなわち，心言語・心論理代数系と抽象された思考機械・人間がその言葉の意味（もの事の有様や話者の思考の筋道や陳述態度や感情や意志）を理解し

た状態だと考える．しかし，そのように心言語と心論理代数系の両方に一々言及するのは煩雑なので，これまではもっぱら心言語だけに言及したのであり，今後もおおむねそうすることにする．

さて,「言葉の心理学的意味」をこう定めると，これをどう論ずべきかは自ずと明らかである．すなわち，**言葉が心言語の如何なる元に変換されるかの論を以て「言葉の心理学的意味論」としなければならない**（こういう「言葉の心理学的意味論」も第 1.4.4 項で定義した広義の意味論に包摂されるが，それは重要なことではない）．そして**心理言語学の観点から見れば，自然言語の意味論として行なうべきものは，言葉の心理学的意味論に尽きる**のである．なお，言葉が心言語の元に変換される過程は，第 1.4.3 項で示唆した通り，心言語の元が言葉へと変形・表出する過程の逆過程と考えられる．従って，前条で提起した心言語から自然言語への変形論は，言葉の心理学的意味論とみなすことができる．

この条冒頭で「国語辞典の編纂者と日本人使用者が言葉を同じ**意味**に解するのは二人が母語や文化を共有するからである」という趣旨のことを記したが，この記述中の「意味」も，いま定義した「言葉の心理学的意味」を指す．この二人の心言語はもちろん別物であるが，どちらも格言語であるという意味で本質的には同じであり，二人が母語や文化を共有すれば，言葉から双方の心言語への変換過程は同様だと考えられる．と言うよりは逆に,「言葉から心言語への変換過程が同様」ということが「母語や文化を共有する」ということの実態だと考えられる（第 7.3.9.2 条参照）．そしてそうだから，この二人が同じ言葉 S を聞けば，S は双方の心言語の同じ元 U に変換される．つまり，この二人は S を同じ意味 U に解するのである（図 1.9 参照）．

1.5.2.3　心理言語学の観察対象と観察態度

‡ どんな言語学でも，言語現象すなわち人間の言語行動の観察から始まる．それでは，心理言語学ではどういう言語行動を観察すべきなのか．このことについて説明する．

まず，心言語の構造について考えるという当面の目標のためには，第 1.2.2 項で述べたように，声の大小や高低・話し方の速さ・話すときの表情・身振り手振りなどは観察対象から外し，いわゆる言葉だけを観察すればいいだろう．しかしそうだとしても，言葉のうちの何を観察すべきかは明らかなことではない（言葉とは何かも明らかではないが，それは差し置く）．なぜなら私たちは，どんな音素列でも，それが私たちの器官で発声可能なものなら，そしてそれを発声しようという意志を持てば，発声することができるからである．たとえば，

ピーターがレタスを食べる　(1.5.1)

のようなまともな意味と形態をもった言葉だけでなく，

レタスがピーターを食べる　(1.5.2)

のようなおかしな（レタスという野菜はピーターという兎を食べないから）意味をもった言葉も，

食べるピーターがレタスを　(1.5.3)

のような，(1.5.1) の語順を変えたけれどそれ程おかしくない言葉も，

がピーター食べるをレタス　(1.5.4)

のような国語の語法に沿わない（英語の語法には沿っている）言葉も，

とぽちたわへけそみぐあろ　(1.5.5)

のような滅茶苦茶な言葉さえも発することができる．こういう色々な言葉の中の一体どういうものを観察対象とすべきなのか．

心理言語学からの答はこうである．私たちは，(1.5.1), (1.5.2) のような，**意味を苦労なしに理解できてしかも崩れた感じを与えない言葉を観察すればいい**．(1.5.2) の意味も大して苦労なしに理解できる．理解できた意味が現実と合わないから，おかしいと感ぜられるだけである．(1.5.3) のような表現は，会話ではまま使われることがあり，意味も大して苦労なしに理解できる．しかし，崩れた表現と感ぜられるので，観察対象からは外していい．

それでは,「意味を苦労なしに理解できて崩れた感じを与えない言葉」を観察すればいいのはなぜか．その理由は当然「人間が言葉の意味を理解する過程とは如何なるものか」という前条の基本問題 7 に関係するが，その直後に記した通り，言葉が心言語の元に変換される過程というものがあって，それが言葉の意味の理解される過程の最終段階を成すと考えられる．言葉が変換されて心言語の元となったもの，それがすなわち，その人にとってのその言葉の意味である．そうすると，意味を苦労なしに理解できる (1.5.1), (1.5.2) のような言葉は，心言語の元に変換され易いものであり，従って心言語の構造をよく反映しているだろう．その反対に，意味を苦労なしには理解できない (1.5.4), (1.5.5) のような言葉は，心言語の構造をあまりよく反映していないだろう．一般化してもう少し正確に言えば，意味を理解するのに苦労の要らない言葉ほど心言語の構造をよく反映していると考えられる．(1.5.3) のような表現は，意味は大して苦労せずに理解できるのだから，心言語の構造をかなりの程度に反映しているのだろう．しかしその反面で崩れた表現だという感じを与えるのは，心言語の構造を反映しない程度もかなりのものだからだろう．

だから，心言語の構造を探ろうとしている今は，意味を苦労なしに理解できてしかも崩れた感じを与えない言葉を観察すればいいのである．そこで，そういう言葉を**適格表現**と呼ぶ．

「苦労なしに」や「崩れた感じを与えない」という判定基準が主観的だと言って悩む必要はない．言語学者と違い数理心理学者は，自然言語そのものについて客観的な論を行なおうとしているのではない．**数理心理学者は，自然言語は単に観測資料として扱い，心言語の構造をこそ探ろうとしているの**だ．

「適格表現」という呼び方には注意を要する．従来の言語学では「適格表現」と言えば文法に適う言語表現を意味するらしいからである．しかし,「文法に適う」とは一体何を意味するのか．私には，それがこれまでは，ともすれば不適切に考えられてきたように思われる．

数理心理学者はこう考える.「自然言語の文法」を「言葉の中に見出される法則性」と捉えてはいけない．そういう捉え方が一般的だけれども，それは言語の表層に囚われ過ぎている．なぜなら，私たちがヒトという生命体の構造・仕組みによって認識し思考し，その結果や過程が言葉として出て来るのだ．だから，言葉を生み出し言葉の形態を決める大本のものは，生命体ヒトの認識・思考する仕組みなのであり，その仕組みの中にこそ「文法」がある．その仕組みを数理心理学では心言語（ないしは心論理代数系）と抽象する．そういう数理心理学の考え方からすれば,「文法」とは心言語の代数構造のことに他ならない．そしてさっき述べた通り，その代数構造に適う言語表現が，意味を苦労なしに理解できてしかも崩れた感じを与えないものなのだろう．だとすると，そういう言語表現こそが「文法に適う」ものだということになる．要するに，**心理言語学の観点からは,「文法に適う」と「意味を苦労なしに理解できて崩れた感じを与えない」は同義**なのである．

こういうわけで，心理言語学では適格表現を観察する．つまり，眼前の言語表現を，意味が苦労なしに理解できるか否かと，崩れた感じを与えるか否かとを判定しながら観察するのだ．そういう判定は，当然，言葉についての直感に基づくものになる．直感的ということは科学では一般に排斥されるけれども，**心理言語学の立場で言語を観察する場合は，直感に基づいても構わない．否むしろ，直感に訴えることが必要になる**．直感に基づかなければ，外から与えられた何らかの判定基準

（それを**規範文法**と呼ぶ）に従うことになる．しかしそれでは，真の意味の文法を，すなわち心言語の構造を探ることにならない．すべてを言葉についての直感に従って判定することが是非とも必要なのだ．なぜなら，その直感に観察者自身の心言語の構造が現れるからである．

以上のことから，**心理言語学では観察者自らの母語を観察しなければならない**ことが明らかである．非母語の表現を鑑賞したり意味を理解したりする場合，私たちは意識せずとも教わった規範文法を基準にするからである．外国語に堪能であれば外国語を観察していいのでもない．いくら外国語に堪能でも，表現の美醜や微妙な意味の違いをすべて感じ取ることはできないだろう．たとえば，国語における「が」と「は」の使い分け方を外国人に理屈で説明するのは至難の業だが，説明できなくても，私たち日本人は間違いなく簡単に使い分けることができる．母語に対して持っている理屈では説明し難いそういう感覚が，心理言語学では絶対に必要なのだ．

だから，完全な多言語使い (=multilingualist) でなければ，外国語の観察は補助的な手段に止めなければならない．英語の観察・研究が世界の主流だからそれに従おうというのは，論外の考え方である [94]．日本の古語も，地理や民族を隔てたのではなく時を隔てた一種の外国語だから，やはり観察対象から外さなければならない [95]．と言うわけで，**心理言語学でまず必要なのは，現代国語を十分に観察することである** [96]．

しかしだからと言っても，ことさらに現代文学作品などから観察材料を集める必要はない．観察範囲を偏らせないために文学作品などを参考にするのは結構である．しかし**心理言語学ではあくまでも，自分自身がどんな状況でどんな言葉を使うのかの観察に徹すればいい**．そうすることで観察者は，自らの心言語を覗き見て自らを研究材料にすることができるのだ．

これも，心理言語学が伝統的言語学，特に文法学と大きく違う点の一つである．文法学者も眼前の言語表現を，それが適格かどうか（この「適格」の意味はさっきとは違う何かである）判定しながら観察するのだが，文法学者は自然言語そのものについての客観的な学問を目指しているのだから，適格か否かを直感で判定することはできない．しかも文法学者は，如何なる言語表現が適格なのかの規則を発見しようとするのだから，判定規則を前もって用意することもできない．もし用意したら循環論法になるからである．従って文法学者は，世間一般で多く用いられている言語表現を適格表現とせざるを得ない．つまり，文法学者にとっての適格表現とは統計的に多数を占める表現なのであり，だから伝統的文法学者は，文学作品や新聞などの言語世間に観察材料の多くを求めるのだろう（しかし，彼らが直感を完全に排除できているかどうかは，甚だ疑わしい）．

ところで言葉というものは，**心伝達**（＝コミュニケイション）の道具として生まれ，その後思考の道具としても使われるようになったものだろう．これに対し，心理言語学の研究対象である心言語は，思考のために外界のもの事を記銘する装置であり，心伝達とは本来無関係のものである．心言語は心伝達の有無にかかわらず存在し得る．実際，高等の霊長類の中には，かなり高機能の思考機械なのに心伝達の機能は至って貧弱なものが居る．また，生まれつきの機能障害のために喋ることができなくても知的障害はない人たちもいる [97]．つまり，心伝達の機能がなくても立派な心言語が存在し得るのである．

だから**心言語の文法論では，心伝達のためにしか使わない言語表現は観察対象から外して構わない**．たとえば，自然言語文を平叙文・疑問文・命令文・感嘆文などに分類するが，疑問文・命令文・感嘆文はもっぱら心伝達時に使われる表現である．心言語は認識の対象世界を記述するためのもの

---

[94] 生成変形文法論や自然言語のモデル論的意味論は，これまでに説明したように心理言語学に非常に近い研究分野だが，これらの分野の日本人研究者の中には，英語を主たる題材にして研究している人が多い．

[95] 古語を観察対象とはしなくとも，古語の知識は必要である．第 7.3.8.3 条参照．

[96] 国語辞典も現代語に重点を置いたものを使わなければならない．国語辞典では「広辞苑」がいいとの定評があるようだ．しかし，広辞苑に限らず大きな国語辞典は，古典からの引用文が多いため大変使いにくい．古語辞典ならいざ知らず，国語辞典に古典という「外国語」文献を引用しなければならない理由，していい理由が，果たしてどれだけあるのだろうか．

[97] これは障害児施設で実際に働いている人の証言による．

だから，そこには平叙文に相当するものしか存在しない．従って，心言語の文法論では平叙文を観察すべきであり，疑問文・命令文・感嘆文については，心言語の文法論が定まって後に，それに基づいて別途に考えるべきものである．

要するに，心理言語学の観点に立つなら，どんな言語を観察してもいいのではないし，言語のあらゆる相の観察を併行する必要もない．当面の観察対象とすべきものは自ずと限られる．また観察態度も，従来の言語学とは自ずと異なってくるのである．

課題 1.5.5 (1.5.1) から (1.5.5) までのうち，どれからどれまでを言葉と呼ぶべきか．より一般に，「言葉とは何か」という問にどう答えるべきか．

1.5.2.4　狭義・広義の変形論とそれへの要請

‡ 仮説 2 によれば，心言語の元は何らかの変形を受けた後に音素列として表出して言葉となる．その変形・表出の仕方に隠された傾向や法則を追究するのが心言語の変形論である．そして，現代国語を観察しつつ心言語の文法論と変形論を同時進行させ，心言語の文法すなわち代数構造を確定提示する．そこまでが心理言語学の当面の目標である．

さてそうすると，心言語の文法論の範囲は前条までに説明したように割合に狭く限られるから，それと同時進行する変形論の方は，当然それに反比例して範囲の広い難しいものになる．しかも，こういう変形論は実は狭い意味の変形論であって，これだけで変形論を終わらせることはできない．**変形論は，心言語の文法や認識の対象世界の模型を提示した後で，その文法や模型の妥当性を示すために更に継続して行なう必要がある**のである．こういう**広義変形論**は，範囲のなおさら広い難しいものになる．なぜなら，心理言語学では心言語という人類普遍のもの [98] を研究対象としたために，広義変形論では，心言語からあらゆる言語への変形論を視野に入れなければならないのである．だから，それぞれの言語を母語とする人々との協同研究もいずれは必要になる．

いま「あらゆる言語」「それぞれの言語」と言ったが，この言い方の背後にも困難な問題が潜んでいる．自然言語は，実は一つ二つと数えることができないのだ．なぜなら，そもそも言葉というものは，使う人・地域・状況によって異なり，時と共にどんどん変化して行くものである．話し言葉もあれば書き言葉もある．敬語もあれば友達言葉もある．一体どの相を捉えて一つの言語と呼べばいいのか．たとえば敬語と友達言葉をまぜたら，まともな日本語とは言えないような言葉になる．このことからも分かるように，日本語と一口に言っても，実は一つの言語体系としてあるのではなく，人・地域・状況・時に応じて変わる無数の言語体系の総体として存在しているのである（第 1.5.3.1 条参照）．これは，日本語に限らず，一つの言語とみなされているものについて一般的に言えることだろう．そして，無数の言語体系に共通の構造を探るのは心言語の文法論の課題であり，心言語の変形論では，無数の言語体系そのものを相手にしなければならないのである．

また，前条でも指摘したように，そもそも言葉とは何かが明らかではない．(1.5.1) から (1.5.5) までのうち，どれからどれまでを言葉と呼ぶべきだろうか．使い捨てにされる新造語や新語法も言葉と考えるべきだろうか．数学の教科書の関数記号混じりの文章も言葉と考えるべきだろうか．どの問にも容易には答えられない．

要するに，**自然言語と一口に言っても，その範囲や実態は茫漠としている．茫漠としたものを対象とする変形論を如何に行なうべきかは，大変難しい問題**なのである．

しかし難しいながらも，変形論がみたすべき要請が幾つか看て取れる．まず，第 1.4.3 項で示唆したように，そこで説明した心言語の意味論への要請は，裏を返せば変形論への要請なのである．

[98] 普遍と言っても，全く同一だと言うのではない．第 2.1.2 項の末尾参照．

すなわち，**心言語の変形論は，恒真の自然言語文へと表出する心言語文が恒真となるものでなければならない**．この要請をもう少し正確に言い換えると，第 1.4.3 項でと同様に次のようになる．色々な自然言語文に対して，私はそれが恒真であるかどうかを理性または直観によって判定することができる（この恒真の概念は形式言語文の恒真の概念とは当然違う）．思考機械・人間の心言語を研究する私は，私が恒真と判定する自然言語文 S（それは比較的に簡単なものに限られる）へと表出する心言語文 T が心言語の意味論によって恒真となるように，心言語の変形論を作り上げなければならないのである．

この要請の逆もまたある制限の下で正しい．つまり，**心言語の変形論は，恒真の心言語文から表出する自然言語文が恒真となるものでなければならない**．より正確に言い換えれば，思考機械・人間の心言語を研究する私は，心言語の意味論によって恒真となる心言語文 T から表出する自然言語文 S が私の理性または直観によって恒真と判定されるように，心言語の変形論を作り上げなければならない．

ただしこの第二の要請は，すべての恒真心言語文 T に適用されるのではない．適用される心言語文は比較的に簡単なものに制限される（さっき「ある制限の下で」と述べたのはこのことを指す）．なぜなら，当然のことながら，私の理性や直観には限界があるからである [99]．「比較的に簡単な」という言葉の意味が曖昧だから，この第二の要請は第一の要請ほど明確なものではなく，これを適用するときには妥当な判断というものが求められる．

この第二の要請は，心言語の意味論への要請が進化論などの推測に基づいていたように，私たちの言葉の話し方についての次のような推測に基づく．

私たちが言葉を話すときには，何の思考もなく言葉が湧き出て来るのではない．意識せずとも，何らかの思考が伴っている．つまり，何を話すかを予め考え演習をする．そういう予行演習に掛ける時間は，たとえば結婚式の祝辞の練習をするときのように長いものとは限らない．本人も意識しないほどに短い時間であることが多い．そしてそういう予行演習は「無声の言葉」で行なわれる．第 1.1.3 項で紹介した神経心理学者による指摘によれば，私たちが一つの語を思いつくと，たとえそれを声に出さずともその語の発声のための筋緊張が起きて，その筋緊張の情報が大脳皮質に送り返され，それでその語のはっきりした心像が出来上がるのだと言う．そういう神経過程が，予行演習の際にも起きている．つまり私たちは，自分自身の無声の言葉を耳を通してではなく発声筋を通して聞き [100]，その言葉の意味を理解し，真偽を判定し，そのうえで有音の言葉として再発声する．私たちが言葉を話している時には，そうやって，少し後に話すことの予行演習を無声で行なっていると考えられる．

こういう推測には根拠がある．たとえば,「煙突から出る煙が」と言う積もりだったのに，せいたために「えんとつけむが」と言ったりする．言ってしまった後で,「煙突から出る煙が」と自分は言いたかったのかと気づく．そういうことを私はときどき経験する．これは，言葉を話すことと予行演習との時間調整（＝タイミング）が狂ったために，話している言葉の中に予行演習の内容が紛れ込む現象と解釈できるのである．

さてそこで，こういう推測を全部認めるとしよう．そうすると，思考機械・人間の心言語の恒真文が言葉として表出するときには，それに先立って無声の言葉に変換され，その無声の言葉が発声

[99] このことを述語論理学になぞらえて敷衍しよう．数学理論の定理は，論理的公理系やその理論の公理系を使って論理式として表せば恒真文となる．他方，その定理を数学者が証明するということは，その論理式に当たる自然言語文が恒真であると理性または直感によって判定することに当たる．しかし理性や直感の限界のために，そういう判定をすることのできない場合がしばしばある．

[100] 私たちが言葉を話すときには，音声の情報が耳を通して脳に送られるのと同時に，その音声を発するための筋緊張の情報も脳に送られると言う．そうすると，それら二つの情報が脳内で互いに関連づけて記憶されることになるだろう．その結果，発声筋の緊張の情報だけが送られたときでも，それと関連づけられた音声情報の記憶が呼び出され，音声を実際に聞くときと同様の状態になり得るだろう.「発声筋を通して聞く」というのは，そういう状態のことを指す．

筋を通して聞き取られ，理性や直観によって恒真と判定されてから，改めて有声の言葉として表出することになるだろう．そうだとすると，心言語の比較的に簡単な恒真文から表出する自然言語文は，理性や直観によって恒真と判定されるものでなければならないのである．

このように第二の要請は，第一の要請ほど明確でないだけでなく，第一の要請よりさらに多くの推測に基づいており，その点で根拠薄弱なものと難詰することもできるだろう．しかし，第一の要請や心言語の意味論への要請と同様この要請も，数理心理学全体を視野におさめたうえで妥当かどうかを判断すべきもので，この要請だけを取り出して妥当性を云々すべきものではない．

1.5.3　国文法論から心理言語学へ

§ 前項では，心理言語学なるものが数理心理学にとって必要であることを説明した．心理言語学は心言語の文法論と狭義・広義の変形論から成る．そして，心言語の文法論と狭義変形論を同時進行させ心言語の文法すなわち代数構造を提示すること，それが心理言語学の当面の目標である．そこでこの項では，心言語の文法論と狭義変形論をどう行なうべきかを説明する．

私自身の心言語の文法は第 5 章と第 6 章とで提示する．これは私が行なった心言語の文法論の結論である．この結論に至るまでの経過や，これと同時進行した狭義変形論は，この項と第 2 章で概略を説明する以外には取り立てて説明しない．文法論の経過は心言語の文法を確定するまでの言わば試行錯誤の過程であるから詳しく説明すべきものでもなく，狭義変形論は第 7 章で行なう日本語について広義変形論に包摂されるからである．

1.5.3.1　国文法論の実際

‡ 心言語の文法論と狭義変形論で行なうべきことは，実は，国語の伝統的な文法論すなわち国文法論からそう懸け離れていない．**国文法論に少し反省を加えると，自ずと心言語の文法論と狭義変形論へ導かれる**．そこでこの条では，国文法論とはどんな学問なのかについての私の解釈を説明しておこう．ただし，第 3.6.1 項でも説明するので，ここでは概略だけに止める．

国文法論にも色々違う目的があって一概には言えない．しかしいずれの国文法論でも，どういう国語表現が「適格」であるかや使われているかを記述するのであり，それは通常次のような手順で行なわれる．

手順 1. どれだけの品詞が在るかを記述する．

手順 2. 各品詞に属す語句がどういう語形変化をしてどういう組み合せで並ぶとどういう名前の言語表現になるかの規則を記述する [101]．

手順 3. どの基本単語がどの品詞に属すかを記述する．

これだけの手順を踏めば国語の適格表現の全体が定まる，というのが国文法論の考え方だろう．

ところが手順 1, 2, 3 は，まさに，第 3.5 節で説明する普遍型付代数系を構成する手順そのものなのである（手順 1, 2 は型代数系を定め，手順 3 は素元系を定める）．だからこの手順を行なう文法学者は，それと意識せずとも，何らかの普遍型付代数系を構成することになる．第 1.4.2 項の始めに記した通り普遍型付代数系は形式言語とみなされ，端書きで説明したように，形式言語を構成

[101] 学校文法で言語表現に付ける名前には,「名詞」「動詞」「形容詞」「副詞」等の品詞名の他に,「名詞句」「動詞句」「形容詞句」「副詞句」のような句名や「文」「文節」などの名前がある．

する作業がすなわち形式言語の文法論である．従って，手順 1, 2, 3 により自然言語の文法論を行なうことは，何らかの形式言語の文法論を行なうことに他ならない．

要するに，**手順 1, 2, 3 により行なう国文法論は，自然言語を論じているように見えて，実は心理言語学と同様に形式言語を論じている**のである．

なお，国文法学でこれまでに提案された様々な理論（文法学者の数だけ文法理論があると言う）は，手順 1, 2 は皆含むものの，普通は手順 3 すなわち品詞分類を含まない．これは次のような理由によると思われる．まず，ある文法理論が一つの品詞分類表（これを s で表す）を定めれば，s に応じた適格表現の全体が一意に定まる（これを $\mathrm{A_s}$ で表す）．そしてこの文法理論は，この一意に定まる集合 $\mathrm{A_s}$ が日本語の適格表現の全体だと主張することになる．しかしこれは妥当ではない．なぜなら，前項で指摘したように，日本語というものは一つの言語体系として存在しているのではなく，時・人・地域・状況に応じて決まる無数の言語体系の総体として存在しているのである．そこで，次のように考えてみよう．すなわち，日本語とは品詞分類表 s を助変数とする族 $(\mathrm{A_s})_\mathrm{s}$ のことであると．そして，助変数 s は時・人・地域・状況などの指標であると．たとえば，諏訪地方で用いられている言葉を集めて品詞分類表（これを suwa で表す）を作れば，$\mathrm{A_{suwa}}$ は諏訪地方で使われる日本語，すなわち諏訪方言になる [102]．

要するに，手順 1, 2 だけからなる文法論は，日本語の時・人・地域・状況などに左右されない面を論じている．数学的に言い換えれば，形式言語の族 $(\mathrm{A_s})_\mathrm{s}$ に共通の型代数系の構造を論じている．そう解釈できるのである．

1.5.3.2　なぜ文法が書けるか

‡ 前条冒頭で示唆したように，国文法論に少し反省を加えると，自ずと心言語の文法論と狭義変形論へと導かれる．以下の三条では，このことについて説明しよう．

一般に，自然言語の文法論は言語の形態についての論だと受け取られているようである．文法学者の仕事は，どんな種類の語とどんな種類の語がどんな結びつき方をすればどんな種類の表現になるか，という類のことを論ずることだと思われている．実際，前条で示した国文法論の手順 1, 2, 3 は確かにそうなっている．しかし私は，**自然言語の文法論は意味についての論であるべきだ**と考える．そして，この考えに徹することが心言語の文法論と狭義変形論へ至る道だと考える．

その理由の一端は第 1.5.2.3 条で説明した．数理心理学の観点から見れば，文法に適う言語表現とは，意味が苦労なしに理解できて崩れた感じを与えない言語表現のことでなければならない．従って当然，文法論は意味についての論だということになる．以下では，これとやや違う観点から，文法論が意味についての論でなければならない理由を説明する．そのために，架空の文法学者を登場させよう．彼にとっての文法論の目的は，あくまでも言語表現の形態に見出される法則性の追究である．

日本人の文法学者Ｘ氏がまったく未知の外国語（これを「Ｙ国語」と名付ける）に遭遇した場合を考えよう．この場合，もちろん，Ｘ氏はＹ国語の文法を書くことはできない．それどころか，Ｘ氏にとって，Ｙ国語はただの記号の羅列にしか思えないだろう（私はアラビア文字を見るときそう思う）．同様に，日本語を知らないＹ国人にとっては，日本語がただの記号の羅列に思えるだろう．なぜそうなのか．なぜＸ氏は，Ｙ国人にとっては記号の羅列に過ぎない日本語の文法なるものを書き下すことができるのだろうか．その理由は明らかである．Ｙ国人が日本語の意味を読み取れないのに対し，Ｘ氏は日本語の意味を読み取っているからである．

[102] 従って，品詞分類表を作るという手順 3 は，国語辞典から品詞分類を抜き書きする作業と同一ではない．普通の国語辞典は，どの語がどの時・人・地域・状況に相応しいかに無頓着に語を並べたものであり，また，どういう文法理論に基づいているかも定かでないことが多いからである．

このことは日本語に限らない．何語の言語表現であれ，意味を離れて形態だけを見るなら，有限個の記号で生成される記号列でしかない．意味を取り去った言語表現からは，個々の記号の出現確率以外には，法則と呼べるものが見出せない．何語であれ，その文法を書くことができるのは，その言語の意味を読み取れたときなのだ．

このことは簡単な実験で確かめられる．次の記号列は，ある意味を表現し明確な文法に従って書かれた文章である．しかし読者は，その文法を簡単には見出せないだろう．言語表現の「形態だけを見る」とは，いま読者が直面しているこういう状況を指しているのである．

> みすち にる せぜすき．や うのきる みすち かをる．えあばえきう ひ くゆえ きり ひゆけ いし．ぎ そうな ちつ は ぎてさえ やてと ん めすわ みすち どきこ ぬ ぎてさえ．

これと対照的に，もしも「が あき た き．ました なり すずしく」という文章を示されれば，日本人の読者は「が」「あき」「た」「き」「ました」「なり」「すずしく」という個々の記号の意味や役割が分かっているから，この文章全体の「秋が来た．涼しく成りました」という意味が分かり，この言語の文法がどういうものか容易に推定できるだろう（それは英語の文法にとても近い）．つまり，**意味が先に分かって，後から文法が分かる**のである [103]．

1.5.3.3　形態か意味か

‡ しかし，文法家 X 氏は日本語表現の意味ではなく形態を論じているのだと飽くまでも主張し，周囲も大方はその主張を容認するかもしれない．そして，彼らが何故そう主張するのかと言えば，それは，特定の形態が特定の意味を表すという理由かららしい（たとえば，文の最後尾に付いた「だろう」という形態は推量の意味を表す，というように）．つまり，意味を論ずるにしても形態を論ずれば済むという考えである．

しかしここで，極めて重要なことが見落とされている．それは，**意味と形態の対応が一対一ではない**ということである．一番いい例は，いわゆる連体助詞の「の」の用法に見ることができる．表 1.1 に例をあげよう．表中で，等号の左辺は連体助詞の「の」を使った表現であり，その意味を「の」を使わずに表現したのが右辺である．ただし，意味の取り方は他にもあり得る．

表 1.1: 連体助詞の「の」の用例

算数の先生＝算数を教える先生	三時の出発＝三時にする出発
森の道＝森に在る道	森の遊び＝森でする遊び
砂の穴＝砂を掘って作られた穴	放射能の影響＝放射能から受ける影響
君の手紙＝君から来た手紙	明日の営業＝明日に行なう営業
樅の木＝樅と呼ばれる木	雨の日＝雨が降る日
鍬の音＝鍬が出す音	国語の時間＝国語を教える時間
石塀の所＝石塀が在る所	出会いの場所＝出会いが起きる場所

課題 1.5.6 表 1.1 の各式の右辺にある共通性を見出せ．逆に，右辺の表現をさらに細かく分類せよ．さらに，これらの例と違う「の」の用法を見出せ．

[103] ジャン＝フランソワ・シャンポリオン（Jean-Francois Champollion）がロゼッタ・ストーンの碑文のヒエログリフ（聖刻文字，hieroglyph）を解読できたのも，意味の分かるギリシア語文が併記されていたからである．

表 1.1 の例で明らかなことは，様々な意味を持つ表現を短縮して表すための省略記号として，連体助詞の「の」が使われているということである．つまり,「の」という一つの形態が「を教える」「に在る」「を掘って作られた」等の無数の意味に対応する．これは，一つの形態が複数の意味に対応する著しい例だと言えよう．

課題 1.5.7 省略記号と考えられる語の例を収集せよ．

なお，表 1.1 の「の」の用例は省略表現だから意味が曖昧のはずだが，その意味を私は曖昧とも思わず理解することができた．これは世界のもの事についての知識（「先生」は何かを教える人で「算数」は教えられるものだという類の知識）を私が十分に持っていたからである．一般化して言えば，言語表現の意味を理解するには，膨大な知識を蓄えそれを適切に引き出す能力が必要になる．そういう能力の実態を知ることは,「人間が言葉の意味を理解する過程とは如何なるものか」という基本問題 7 について考えるために必要になる．ところがその実態は，人間の言語行動などを観察して分かることではない．模擬実験的な研究によってのみ解明できるものだろう．そこで次の課題を提起する．

課題 1.5.8 表 1.1 の各式の左辺を右辺に書き直す能力を機械に与えるにはどうしたらいいか．

本題に戻ろう．一つの形態が複数の意味に対応する例は他にも沢山ある．そしてそれらは意味の曖昧性 [104] を生ずる（逆に複数の形態が一つの意味に対応していても，曖昧性は生じない）．たとえば，自然言語の単語は一般に複数の意味を持つから，一つの形態に複数の意味が対応し曖昧性が生ずる．具体例はあげるまでもないだろう．この種の曖昧性は**語彙的曖昧性**と呼ぶことができる．また例えば「黒い川と山」と言っても，山が黒いかどうかが曖昧で分からない．これは，括り記号で区別される「黒い（川と山)」「(黒い川）と山」という二通りの意味が，括り記号を失った一つの形態「黒い川と山」に対応しているからである．この種の曖昧性は，**構文的曖昧性**と呼ぶのが適当だろう．また例えば「政治家が好きな女」と言っても，政治家が女を好むのか，それとも女が政治家を好むのかが曖昧で分からない（この例文は実際の醜聞報道からとったものであり，その醜聞では女が政治家を好んだのである）．この二つの意味は英語だったら関係代名詞や語順で区別されるが，日本語にはそれに相当する語法が無いからである．これも構文的曖昧性と呼べるだろう．

なお，一つの形態が複数の意味に対応しながら曖昧性のあまり生じない例もある．たとえば，格助詞の「に」には実に様々な意味・働きがあって，動詞が表す動作・作用の向かう対象を示したり，動作・作用の行なわれる場所を示したり，動作・作用の行なわれる時を示したり，動作・作用の行なわれる程度・様態を示したりする．しかし，これら様々な意味の紛れることはあまりない．

さて，形態を重んじ形態を論じている積もりの文法学者 X 氏は，表 1.1 の「の」の用例のすべてを「名詞・の・名詞」と分類して済ますのだろうか．しかしそれでは，言語表現の意味を読みとることで文法を書けているにも拘わらず,「の」については意味を無視することになる．それはまことにちぐはぐで奇妙な態度と言わざるを得ない．

以上を要するに，私は次のように考える．

- **言語表現の意味を読みとらなければ文法を書くことができない．ところが，**
- **言語表現は一般に意味の不完全な表現である．従って，**
- **言語表現そのものの文法を追究することは無意味であり，**
- **言語表現の意味をこそ追究しなければならない．**

[104] 第 1.4.4 項参照

1.5.3.4　意味に専心すれば

‡ そこで，言語表現を意味に専心して観察し，意味に即して書き直していったとしよう．つまり，一つの形態に複数の意味が対応していたら，この一つの形態を意味に応じた複数の形態に書き直すのだ（逆に一つの意味が複数の形態に対応している場合は，それら複数の形態を一つにまとめる必要はない）．たとえば,「名詞・の・名詞」という表現は,

（名詞・格助詞・動詞）名詞　　　　（名詞・が・(動作名詞・する)）こと

等の,「の」を含まず括り記号を使った表現に書き直す [105]．また例えば「形容詞・名詞・と・名詞」という表現は，括り記号を使って次の二通りに書き直す．

（形容詞・名詞)・と・名詞　　　　形容詞・(名詞・と・名詞)

また例えば格助詞の「に」は，その様々な意味・働きに応じて,「に１」「に２」. . . のように分別する．こういう作業を日本語の隅々まで行なうのだ．

そうすると，どういうことが起きるだろうか．まず，これは形態を無視することにはならない．なぜなら，ある場合には一つの形態が一つの意味に対応するのだから，その場合には形態がそのまま残る．また，連体助詞の「の」の多くがそうだったように，ある種の語は消え去ってしまうだろう．その逆に，元々の日本語には無かった種類の語，たとえば英語の関係代名詞のような語が現れてくることもある．変数が現れることもある．また，語のつながり具合が変わることもある．つまり，日本語が色々に変形して行くことになる．

それでは，こうして得られた**変形日本語**は，いったい何者なのだろうか．私には，これこそが，心言語そのものと言えないまでも，心言語に非常に近い構造をもった代数系なのではないかと思われるのだ．そして，日本語が変形していく過程を逆から見たものが，心言語が日本語に変形表出する過程に非常に近いのではないかと思われるのだ．

なぜそう思うかと言えば，もとの日本語表現において存在した形態と意味の不対応や曖昧性は，その表現の観察者から見た不対応や曖昧性なのだ．その表現の話者の心の中では，すなわち心言語では，曖昧性はなくて意味と一対一に対応する形態があったはずなのだ．また，人が日本語表現の意味を読み取るときには（基本問題 7 参照），意味と一対一に対応付けられた変形日本語という世界を認識するはずだから，変形日本語は心言語という形式言語の認識対象世界であり，従って心言語に近い代数系でなくてはならないと考えられるのだ（第 1.4 節参照）．

なぜ変形日本語が心言語に非常に近いと思うかについては，このくらいの説明で十分だろう．しかし，これは私の直観なのであり，本当は，直観の理由を説明する必要はなかった．リンゴが落ちるのを見て万物が引き合うという直観を得た理由を説明する必要がニュートンにないのと同じである．直観に甚だしい論理的飛躍があっても（飛躍があるからこそ直観なのだが），直観に基づいて何かしらの理論が生まれ，その理論が実験で検証されたり，あるいは観察される現象をうまく説明できれば十分だと考える．科学とは本来そういうものなのである．

以上を要するに，心言語の文法論と狭義変形論は，次の仮説に従って行なうべきと考える．

仮説 3 日本語を意味に即した形態に変形して行くときに現れる形態的規則が心言語の構造を近似している．また，この変形の過程を逆に見たものが，心言語の元が言葉として変形・表出する過程を近似している．

---

[105] ただし,「警察官である兄」の意味で「警察官の兄」と言う用法の「の」は，書き直さずに残すべきものと考えられる．こういう「の」は心言語たる格言語の算法記号 $\sqcap$ の表出と考えられる．第 7.3.6.1 条参照．

1.5.4 「自然言語のモデル論的意味論」批判

§ 第 1.5.2.1 条において，モンタギュー意味論を始めとする自然言語のモデル論的意味論は読み方によっては心言語の文法論や意味論の参考になると述べた．しかし実は私は，逆に自然言語のモデル論的意味論の方がより深刻に，心言語の理論を見習うべきだと考える．理由を説明しよう．

まず第一に，自然言語のモデル論的意味論というものは，無視できない論理的危うさを孕んでいるように見える．なぜなら，この論を行なう言語学者や論理学者は，自然言語を直接に論ずるのではなく，自然言語を何らかの形式言語にまず翻訳し，つまり**翻訳論**を行ない，その形式言語のモデル論的意味論を行なう．そして彼らの最終目標は，その形式言語のモデル論的意味論を使って自然言語表現の意味の異同を論じたりすることであるらしい．しかしそうだとしたら，きっとどこかで循環論法を犯すことになるだろう．なぜなら彼らは，翻訳論を行なうときに既に，自然言語表現の意味を解釈してしまっているはずだからである．

始めから文法を定めて定義した形式言語のモデル論的意味論は，何の論理矛盾もなく行なうことができる．しかし自然言語は，文字通り自然にいつの間にか出来たものだから，その文法を調べることから始めなくてはならないし，第 1.5.3.2 条で「なぜ文法が書けるか」と題して説明した通り，意味を見ずに純粋に形態だけを見て文法論を行なうことはできないのである．しかも自然言語は，外界のもの事の記述だけでなく，話者の推論の過程や陳述態度など様々なものの表現を含んでいる．そういうものすべてを形式言語で表してモデル論的意味論の対象にしようと企てるのは間違っている（第 7.3.10 項参照）．だから，自然言語から形式言語への翻訳論を行なうには，翻訳すべき自然言語表現を取捨選択しなければならない．そのためにも既に意味の分析が必要なのである．

こういう危うい論を言語学者や論理学者が行なうのは，恐らく，意味論に先立って自然言語から形式言語への翻訳論を行なっていることを，はっきりと認識していないからだろう．そして実際，確固たる翻訳論が行なわれている風には見えない．そもそも自然言語というものは大変に茫漠とした存在だから，確固たる翻訳論なるものがそう簡単に行なわれ得るはずはないのである．

なお，自然言語のモデル論的意味論が例えば機械翻訳のような技術の役に立っても，それは自然言語のモデル論的意味論が循環論法を犯していないことの証明にはならない．一般化して言えば，何らかの理論が技術の役に立つことは，その理論が循環論法を犯していないことの証明ではない．「理論」と「技術」は別物なのである．そのことを数学における同様の例を使って説明しよう．

関数 f, g に対して $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ を計算する場合，大抵は次の式で計算することができる．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

例外はこの式の右辺が $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$ となる場合である（この場合，極限 $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ は不定形であると言う）．しかしこの場合でも，$\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ が存在すれば，然るべき条件の下で

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つとの定理がある（これを「不定形の極限定理」と呼ぶ）．そこでたとえば，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

と計算することができる．しかし，この計算を $\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$ の証明に採用したら循環論法を犯すことに成り兼ねない．なぜなら，高校の標準的教科書では，$(\sin x)' = \cos x$ なることを証明

するのに $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ なることを使うからである[106]．つまり，不定形の極限定理は不定形の極限値を機械的に計算したい「技術者」には大変役に立つが，この定理を使ってさっきのように $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ などを証明する「理論家」は循環論法を犯しているかもしれないのである．

以上のことから，自然言語のモデル論的意味論に論理的破綻をきたさないためには，次のように行なわなければならない．つまりまず，自然言語から然るべき形式言語 A への翻訳論を念入りに行なう．次に A のモデル論的意味論を作る．そしてそれで終わりである．終わりにしないで，A のモデル論的意味論を使って自然言語表現の意味の異同を論じたりすると，たちまち循環論法に陥る危険が生ずる．循環論法を犯していないという証明も困難だろう．

しかし言語学者や論理学者は，A のモデル論的意味論作りで終わりにして満足だろうか．たぶん満足できないだろう．そこで終わりにしたら，言語学としても何としても中途半端と思うだろう．確かに，そこで終わりにしたらその研究に一体どういう意義があるのか，私にも分からない．

しかし，自然言語そのものを理論的に研究しようとする限り，中途半端で居ざるを得ないのである．逆に言えば，中途半端でなくしたければ，言語学・論理学という枠から出なければならない．そして幸いなことに，枠のいい出方がある．それは，数理心理学へ転ずることである．すなわち，形式言語 A を心言語として捉えて然るべく定義し直すのである．そして実はこれこそが，第 1.4.1 項で基本問題 1 や仮説 1 として提起したことなのだ．この問題提起に従うなら，A のモデル論的意味論として行なったことは心言語の意味論に生かすことができ，第 1.4.1 項の基本問題 2，基本問題 3，さらにその先へと研究を発展させて行くことができる．しかもこれは，大変に有意義な発展に違いない．さらにまた，自然言語から A への翻訳論として行なったことは，第 1.5.2.2 条で説明した「言葉の心理学的意味論」やその逆の「心言語の変形論」に生かすことができるし，「人間が言葉の意味を理解する過程とは如何なるものか」という基本問題 7 を考えるのにも役立つだろう．

要するに，数理心理学の観点から見れば，**自然言語のモデル論的意味論と称して行なわれていることは，どれも，心言語の文法論や意味論や変形論へと昇華させるべきもの**に見えるのである．「昇華」という言葉はここで使うのに相応しい．なぜなら，言語学の目的も，本来は人間の心を研究することのはずだからである．言葉というものは，人間にとって確かに重要な意味を持っている．しかし，言葉が無ければ心も無いのではない．言葉が無くても心は有り得るのだ．だから，心を研究したいのなら，自然言語は心の観測のための資料に留め，心言語の理論にこそ邁進すべきだと思う．つまり，言語学者・論理学者から数理心理学者へと脱皮すべきだと思う．

1.5.5　この節の参考文献

§ 心理言語学にとって第一に必要な言語資料は，理論言語学者の解釈が沢山加わったものではなく，生の言語現象を分類収集した「一次資料」である．たとえば，ブラーエ[107]による惑星の位置観測資料のようなものがほしい．残念ながらそういうものはなかなか手に入らない．もっとも，物理現象とは違って言語現象は，手間ひまを厭わなければ誰にでも楽に観測できるのが救いである．

1. 現代形容詞用法辞典：飛田良文・浅田秀子 著，東京堂出版，1991 年

2. 現代副詞用法辞典：飛田良文・浅田秀子 著，東京堂出版，1994 年

3. 研究資料日本文法 1-10：明治書院，1985 年

[106] $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = \lim_{x\to 0}(e^x - 1)'/x' = \lim_{x\to 0} e^x/1 = 1$ と計算するのも同様の例である．$(e^x)' = e^x$ を証明するのに $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$ なることを使っていたら循環論法になる．

[107] Tycho Brahe．デンマークの天文学者．その惑星観測資料はケプラーが三法則を導く元となった．

4. 自然言語：郡司隆男 著，日本評論社，1994 年

5. 形式意味論入門：白井賢一郎 著，産業図書，1985 年

6. ことばとこころ：川本茂雄 著，岩波新書 988, 1976 年

7. 言葉を生み出す本能 上下：S. ピンカー 著，ＮＨＫブックス 741, 1995 年

文献 1, 2 は貴重な一次資料だろう．こういう辞典を見ると，普通の国語辞典が如何に通り一遍のものかが分かる．文献 3 は伝統的国文法論についてのものである．第 7 巻の「助詞・助動詞辞典」は貴重な一次資料だと言いたいところだが，古語に重点を置いているのはいただけない．文献 4 は生成変形文法論の概説書で，文献 5 は第 1.2.5 項でも引用したモンタギュー意味論の解説書である．文献 3, 4, 5 の文献表から他の文献をたどることができる．文献 6, 7 は，それぞれ言語学者と発達心理学者による言葉と心についての啓蒙書で，チョムスキー理論を強く意識して書いてある．

1.6　思考機械の感情と発達

$ これまでは専ら思考に焦点を合わせて，$\boxed{\text{思考機械}}\to\boxed{\text{代数系}}\to\boxed{\text{論理}}\to\boxed{\text{言語}}$という数理心理学の道筋を説明してきたが，この道筋を歩むなら，数理心理学は思考だけでなく心全般についての科学になり得ると考えられる（図 1.1 参照）．つまり，心言語の構造や心論理構造が然るべく特定されれば，心言語という場の上で，感情・意志・意識などの心の側面についても科学的に研究して行く道が開けると思われる．

ただしそういう研究は，少なくとも二つの点で，本書で説明しようとしている研究と異なるものになるだろう．まず第一に，心の座は確かに脳であり，それを本書では，思考機械ないしは心言語・心論理代数系と抽象して研究しようとしているのだが，心全般の仕組みは，実は脳だけで説明できるものではなく，それ以外の身体部分も考え合わせなければ説明することができない．第二に，感情・意志・意識などの面についての研究は，理論的と言うよりは多分に模擬実験的なものになるだろう．つまり，何らかの機械をロボットとしてか計算機の中にか実際に製作し，それが人間と同じように行動するか否かを調べることで人間自身について考えて行くことになる．ただし，人間のように特別に複雑な機械がそう簡単に実現できるはずはないから，ごく簡単な機械から始めて徐々に複雑にしていくのが現実的なやり方だろう．

そこでこの節では，そういう研究の将来を占うために，心言語 A の構造や心論理構造が確定したと仮定したうえで，思考機械にどんな装置を追加していったら人間らしい感情や意志を持たせられるかという**工学的構想**を語り，その構想が提起する課題を述べる．つまり，これまではまず人間から脳以外のものを捨象して人間を思考機械とみなし，さらにそれを心言語・心論理代数系へと抽象してきたのだが，そうする過程で捨ててきたはずの機構を少しずつ拾い戻していくときに，思考機械がどういう感情機能を回復していくかを考える．ただし，捨ててきた機構がどういうものかがいま分かっているのではない（だから「捨ててきたはずの」と言ったのである）．それがどういうものかをこれから考えようというのがこの節の趣旨である．しかし，それは心理学的にも数学的にも大変難しいことだから，これから述べる構想も，推測を沢山交えた断片的で大雑把なものにならざるを得ない．

1.6.1　感情の装置

§ 心言語 A の構造や心論理構造は確定したと仮定しているが，実際にはまだ確定していない（確定するための作業は第 5 章から始まり継続中である）．特に，A の文の全体 A_ϕ がどういうものかも確定していない．しかし，それでは話がしにくいので，A_ϕ には，少なくとも「なら」の意味を表す二項算法 $\Rightarrow$ と否定の意味を表す単項算法 $\Diamond$ があるものとする．しかし，心論理構造は特に具体的に設定しない．

思考機械に感情を与える機構について説明しよう．まず，A_ϕ の有限部分集合

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

を適当に選んで，これを**評価系**と名付ける．各 b_i には正値の**重み** c_i を与え $(i = 1, 2, \ldots, n)$，n 次ベクトル $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ を**重みベクトル**と呼ぶ．次に，A_ϕ の部分集合 D をもう一つ適当に選んで，これを**知識系**と名付ける．D の各元 d には 0 から 1 の間の**確度** $p(d)$ を与える．

思考機械は，A_ϕ の任意の元 x に n 次ベクトル

$$e(x) = \big(e_1(x), e_2(x), \ldots, e_n(x)\big)$$

を対応させるものとする（これを x の**評価ベクトル**と呼ぶ）．対応させる方式には色々のものが考えられる．例として三つの方式を挙げよう．

例 1.6.1 (直列方式) D のある元 $d_1, \ldots, d_m$ と x に心論法を適用して一定の計算時間内に b_i が導けたら

$$e_i(x) = c_i p(d_1) \cdots p(d_m)$$

と定める．導けないときは b_i の否定 $b_i{}^\Diamond$ が導けるかをやはり一定時間試し，導けたら

$$e_i(x) = -c_i p(d_1) \cdots p(d_m)$$

と定める（ただし，この二式で $m = 0$ の場合には $p(d_1) \cdots p(d_m)$ は 1 を意味する）．それも導けないときは $e_i(x) = 0$ と定める．この方式を**順直列方式**と呼ぶ．この逆に $b_i{}^\Diamond$ が導けるかを先に試す方式を**逆直列方式**と呼ぶ．

例 1.6.2 (並列方式) D のある元 $d_1, \ldots, d_m$ と x に心論法を適用して b_i が導けるかを一定時間試し，導けたら

$$e_i'(x) = c_i p(d_1) \cdots p(d_m)$$

とし，導けなかったら $e_i'(x) = 0$ とする．同様に $b_i{}^\Diamond$ が導けるかを一定時間試し，導けたら

$$e_i''(x) = -c_i p(d_1) \cdots p(d_m)$$

とし，導けなかったら $e_i''(x) = 0$ とする．そして

$$e_i(x) = e_i'(x) + e_i''(x)$$

と定める．

例 1.6.3 (偏方式) D のある元 $d_1, \ldots, d_m$ と x に心論法を適用して一定時間内に b_i が導けたら

$$e_i(x) = c_i p(d_1) \ldots p(d_m)$$

と定め，導けなかったら $e_i(x) = -c_i$ と定める方式を**順偏方式**と呼ぶ．また，D のある元 $d_1, \ldots, d_m$ と x に心論法を適用して一定時間内に $b_i{}^\Diamond$ が導けたら

$$e_i(x) = -c_i p(d_1) \ldots p(d_m)$$

と定め，導けなかったら $e_i(x) = c_i$ と定める方式を**逆偏方式**と呼ぶ．

この三例のようにすれば，b_i と $b_i{}^\Diamond$ が共に導けるという理論的にはあり得る場合について悩む必要もない．これが工学的に考えることの利点の一つである．

思考機械は，次に，評価ベクトル $e(x)$ と重みベクトル c の間の角 $\theta = \angle(e(x), c)$ の余弦 $\cos\theta$ を計算する．これを x の**評価値**と名付け $f(x)$ で表す．すなわち，

$$f(x) = \frac{\langle e(x), c\rangle}{\|e(x)\| \cdot \|c\|}$$

であり，$|f(x)| \leq 1$ が成り立つ．ただし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表し，$\| \cdot \|$ は長さを表す．評価ベクトル $e(x)$ の計算方式によっては $e(x) = 0$ なる場合もあるだろう．そのときは，この式では $f(x)$ が定まらないが，別途適宜に $|f(x)| \leq 1$ なるよう定めればいい．評価値の定め方にも他に色々の方式があり得るが，いずれの方式にしても，評価ベクトル・評価値の計算装置を**評価器**と呼ぶ．

以上が，思考機械に感情を持たせるための仕組みのすべてである．この仕組みの背景的意味を，詳しいことは後回しにして，取り敢えず大雑把に説明しよう．まず，評価系 B は思考機械にとって「都合のいい」外界の事象の記述集であり，重み c_i は b_i の都合の良さの程度を表す数値である．人間になぞらえて言えば，B は「願望」や「価値観」などの記述に相当する．また，知識系 D は外界のもの事についての思考機械の知識集であり，D の元 d の確度は文字通り知識 d の確からしさの度合いである．そして，x は思考機械への外界からの入力を表し，評価値 $f(x)$ は入力 x の思考機械にとっての都合の良さの度合い（人間になぞらえれば「快感度」）である．

なお，いま**外界からの入力**と言ったが，これは外界からの生の物理的刺激を指すのではなく，それらが何らかの機構により A_ϕ の元に変換されたものを指す．この変換器を**認識器**と呼ぶ．これに対して，生の物理的刺激の検出装置は**受容器**と呼ぶ．受容器や認識器の構造については今は問わない．認識器とは，たとえば人の声を文字に変換する機械や航空写真から建物の輪郭だけを抽出する機械のような，いわゆるパターン認識機械に近い．そういう機構は思考機械に必要だし，それについて問うことはもちろん重要だろう．しかし，これは機械工学や生理学に属す問である．数理心理学を目指す私たちは，そういう問題を大胆に捨てなければならない．

また,「外界からの入力」とか「外界の事象」と言うときの**外界**とは，思考機械の外部だけを指すのではなく，思考機械内部の各部分も外界の物であり，思考機械自身の行動や各部の状態・運動も外界の事象である．だから評価系は，人間になぞらえれば，自身の身体や行動についての願望や価値観の記述も含むと考えなければならない．そういう願望や価値観の対象には，細胞内部の状態や本能的行動のような原始的なものから，いわゆる情操のように複雑高度なものまでが含まれる．同様に知識系は，思考機械・人間が自身の身体各部について持っている知識（それは意識されるものとは限らない）に相当するものも含むと考えなければならない．

例 1.6.4 (数学者) A は一階述語言語だと仮定する（後で理由を説明するが，これは人の心言語についての仮定としては間違っている）．従って，A の文の全体 A_ϕ は論理式の全体に等しい（例 4.1.2

参照）．次に，評価系 B は単元集合 $\{b\}$ だとし，b の重みを c とする．知識系 D の各元の確度は 1 だとする．そして，A_ϕ の元 x に評価ベクトル $e(x)$ を対応させる方式としては並列方式を採用する．つまり，D の元と x に心論法を適用して b が導けるかを一定時間試し，導けたら $e'(x) = c$ とし，導けなかったら $e'(x) = 0$ とする．同様に $b^\Diamond$ が導けるかを一定時間試し，導けたら $e''(x) = -c$ とし，導けなかったら $e''(x) = 0$ とする．そして

$$e(x) = e'(x) + e''(x)$$

と定める．評価値 $f(x)$ は，$e(x) \neq 0$ のときにはさっきの規定通りに $f(x) = \cos\angle(e(x), c)$ と定めるが，$e(x) = 0$ のときには $f(x) = 0$ と定める．そうすると，$f(x) = 1$ となるのは b が導けて $b^\Diamond$ が導けない場合であり，$f(x) = -1$ となるのは $b^\Diamond$ が導けて b が導けない場合であり，これ以外の場合には $f(x) = 0$ となる．

D は数学のある理論体系，たとえば自然数論における公理系であり，b はその理論体系における命題であると考えてみよう．そうすると，この機械にとっては，$x \Rightarrow b$ がその理論体系における自明でない定理なのを証明できるような入力 x が最大の評価値すなわち快感度のもとになる．だからこの思考機械は，その理論体系において $a \Rightarrow b$ なる形の自明でない定理を発見したいという願望を持った機械，すなわち一種の数学者だと考えられる．そこで，以後この機械を M で表す[108]．ただし M は，$x \Rightarrow b$ が定理となるような入力 x をただひたすら待ち続けるだけの機械，いわば「棚ぼた数学者」である．また，そういう入力があっても，それが M に何か影響を及ぼすのでもない．評価値が M に何か影響を及ぼすような機構は，M にはまだ与えられていないからである．

ここで数学の理論体系を持ち出したのは，話をわかりやすくするための便宜に過ぎない．A, D がどんなものだろうと，この機械は，$x \Rightarrow b$ が外界についての自明でない真理であるような入力 x をひたすら待ち続ける機械であることには変わりがない．ただしこれは，D が外界の真理の記述であり，かつこの機械の心論法が健全な場合の話である．

問題 1.6.1 例 1.6.4 に出て来た「自明でない定理」とはどういう意味か．

問題 1.6.2 $e(x)$ の計算方式として直列方式，並列方式，または順偏方式をとる．また，$e(x) = 0$ のときには $f(x) = 0$ と定める．このとき，$f(x) = 1$ となるのは D の元と x に心論法を適用してすべての b_i $(i = 1, \ldots, n)$ が導かれる場合に限る．

問題 1.6.3 $e(x)$ の計算方式として順直列方式をとるとき，$e(b_1)$，$e(b_2)$ が一次従属なら，次の二条件のどちらかが成り立つ．ただし，$X \subseteq A_\phi$ のとき，$[X]$ は，X の元に心論法を適用して導かれる A_ϕ の元の全体を表す（第 3.2 節の「算包」の定義参照）．

1. $[D \cup \{b_1\}] = [D \cup \{b_2\}]$
2. ${b_2}^\Diamond \in [D \cup \{b_1\}]$ かつ ${b_1}^\Diamond \in [D \cup \{b_2\}]$

課題 1.6.1 $e(x)$ の計算方式として順直列方式をとるとき，$e(b_1), e(b_2), \ldots, e(b_n)$ が一次独立になるための十分条件を問題 1.6.3 にならって求めよ．

[108]記号「M」は「mathematician」の頭文字である．

1.6.2　自我仮説

§ 前項で私たちは，思考機械に感情の装置として評価系や知識系や評価器などの仕組みを与えた．記述の便のため，これらの仕組みをまとめて思考機械の**自我**と呼ぶ．そうすると，標記の仮説は次のように述べられる．

仮説 4 (自我仮説)　思考機械・人間には自我が存在する．そして，人間の感情に関することは自我によって説明できる．

この仮説の前半の意味は明らかだろう．そこで以下，仮説後半の意味を敷衍する．そのためにまず,「感情」が従来の心理学では何を意味するかを概観してみよう．そうすると，この短い言葉が実に様々なものを意味していることが分かる．

感情という言葉から私たちが直ぐに思いつくのは，怒り・恐れ・喜び・悲しみなどの「一時的で激しい心の動き」である（これを「情動」と呼ぶ）．これらは，外部からの何らかの刺激によって生じ，皮膚の毛細血管が収縮したり拡張したりというような生理的変化を伴い，顔が青くなったり赤くなったりというような身体の表面的変化によって，その存在を外部から観測することができる．

しかし，これら以外にも感情と呼ばれるものがある．たとえば,「今日はなんとなく鬱陶しい気分だ」というときの「気分」も感情の一つに数えられる．これは，持続的かつ微弱で，しかもきっかけのはっきりしない,「心の状態」である．また，何かに関心を持つとか，何かをしようという衝動にかられるとか，何かをしたいという欲望・情熱を持つとかの,「心の動き」一般も感情の一種とされる．さらに，学問や芸術を好む好まないとか道徳観念が高い低いとかいう，社会的価値基準に照らして捉えた「心の傾向」も感情の一種とされる（これを「情操」と呼ぶ）．情操は，関心・衝動・欲望・情熱などが穏やかで持続的なものに変化して生ずると考えられる．

このように,「感情」という言葉は実に様々なものを意味している．しかも「感情」は，それだけを取り出して論ずれば済むものでもない．なぜなら人は，こういう心の状態や動きや傾向に応じて「行動」する．そして，これら心の状態や動きや傾向が時や人によって異なるために,「気分」や「気質」や「性格」の違いが生まれる．さらに,「性格」は経験や教育によって変化して行く．つまり，人間のほとんどすべての面が「感情」と関わっているのである．感情に関わるこういうことすべてを，自我という機械的仕組みに溯って説明できる（あるいは，説明すべきである）というのが自我仮説後半の趣旨である．もう少し詳しく言うなら，自我の構成要素には評価系・重み・知識系・確度・評価器の計算方式や計算能力などがあるが，これらの構成要素の属性（たとえば，評価系の中の文の種類や個数・重みの値・計算方式の種類等）の定め方・組み合せ方によって，感情に関わる様々なことが説明できるのではないか，というのが自我仮説後半の意味である．

自我仮説は，心言語の代数構造や心論理構造を特定した後で，長い時間を掛けて検証していくべきものである．しかし今の段階でも，多少の思考実験をすれば，自我仮説が妥当なものだという感触を得ることができる．次項以降でそのことを示そう．

1.6.3　情動の装置

§ 私たちは思考機械に自我という仕組みを与えた．この仕組みにより，思考機械は各入力 x に対して評価ベクトル $e(x)$ と評価値 $f(x)$ を出力する．思考機械に与えるものが自我だけなら，起きるのはこれだけのことである．しかし，もしも $e(x)$，$f(x)$ の値の如何が思考機械に影響を及ぼすような機構を思考機械に与えれば，事情はもちろん違ってくる．たとえば，思考機械に人間の効果器（筋肉や分泌腺）に相当するものを与え，それらが $e(x)$ の値に連動して働くような機構を与える．

そうすると，$e(x)$ の値に応じて，人間の行動や身体の生理的変化に相当する色々な変化が起きる．そういう変化は，効果器の設計によっては，怒り・恐れ・喜び・悲しみの現れのように観察者の目に映るだろう．

そこで，$e(x)$ の値に連動して思考機械に起きる変化をひっくるめて**情動**と呼び，情動を思考機械に発現させる装置を**情動装置**と呼ぶ．思考機械・人間にもそういう装置があるのだと考えると，人間の「いわゆる情動」について観察される色々な現象が割合とうまく説明されるからである．

たとえば，$0 \le g \le 1$ なる数 g を適当にとって，$g < |f(x)|$ なる場合に限って $e(x)$ に連動する情動が発現するように情動装置を設計したとする（こういう g を**情動閾**と呼ぶ）．そうすると，$e(x)$ に連動する情動は，情動閾が小さいほど発現し易いことになる．こうして，情動が発現し易いか否かという属性を思考機械に与えることができる．思考機械・人間の場合は，情動閾が個々の人によって違う値に初期設定されていて，それが人の「いわゆる気性」の激しさ（あるいは，穏やかさ）の違いを生む仕組みの一つだと考えられる．

なお，情動閾 g を $-1 \le g \le 0$ なるようにとって，$f(x) < g$ なる場合に限って $e(x)$ に連動する情動が発現するように情動装置を設計することもできる．もしも情動というものが外界の不快な状況からの回避やそれへの対決の為の仕組みだとしたら，こういう設計の方が相応しい．しかし人間の場合は，こういう設計にはなってはいないと考えられる．なぜなら，$f(x)$ が 1 に近いとき，すなわち入力 x の快感度が非常に高いとき，人間は満足・喜び・歓喜というような情動を示すからである．つまり人間の場合は，情動は回避や対決の為だけのものではない．また，進化論の考え方によれば，人間の情動装置も環境に適応した方向に向かって進化してきたはずである．そうすると人間の場合は，満足・喜び・歓喜の情動を示す情動装置は環境に適応していたことになるだろう．それがなぜかということ，また情動とは何の為のものかということは，人間の本性や人間と動物の違いを考える上で，なかなか重要な問題に思われる．

次に，評価ベクトル $e(x)$ の計算方式として，たとえば直列方式や並列方式や偏方式を採用したとしよう．この場合 $e(x)$ は，重みベクトル c が長いほど長くなる．従って，$e(x)$ に連動して発現する情動の「大きさ」が $e(x)$ の長さ $\|e(x)\|$ に比例するように情動装置を設計したとすれば（それは一番常識的な設計に思える），発現する情動は c が長いほど大きくなる．つまり，$\|c\|$ を調節することにより情動の大きさを調節することができる．思考機械・人間の場合は，$\|c\|$ が個々の人によって違う値に初期設定されていて，それも人の気性の激しさの違いを生む仕組みの一つだと考えられる．

いまのように，思考機械に発現する情動の大きさを $\|e(x)\|$ に応じて決めるよう情動装置を設計した場合，思考機械に発現する情動の「種類」は $e(x)$ の向き [109] に応じて決まるよう設計するのが，やはり一番常識的な設計法だろう．そう設計した場合，思考機械に発現させられる情動の種類は，すべての評価ベクトル $e(x)$ $(x \in A_\phi)$ が生成する $\mathbb{R}^n$ の部分空間の次元が大きいほど飛躍的に多くなるだろう．この次元が n に近い値であると仮定しよう [110]．そうすると，思考機械に発現させられる情動の種類は，評価系 B の元の個数が多いほど多くなるだろう．そして，思考機械・人間においては実際にそうなっているのだと考えると非常に都合がいい．なぜなら，評価系は「願望」や「価値観」の記述であり，特に人の情操面の性格を決める．だから，評価系の元の個数が多いほど思考機械に発現させられる情動の種類が多いということは，情操が豊かであればあるほど感情の発露も複雑微妙なものになるという，私たちの人間観察の結論と一致するのである．

さて私は，自我仮説において「感情に関わることは自我によって説明すべきだ」と主張し，いま情動に関わることの幾つかを自我によって説明して見せた．しかし,「説明する」とはそもそも何

[109] n 次ベクトル p, q に対して $q = tp$ なる正数 t があるとき，p と q の向きは同じであると言う．
[110] 課題 1.6.1 はこの仮定に関係する．

を指すのか．そう考えてみると，説明において最初に求められるのは，概念をはっきりさせることだということが分かる．そして，情動についてのいまの説明を振り返ってみると,「情動装置」という概念も「情動」という概念も，はっきりしているとは言い難い．そこで，これらに改めて次の数学的定義を与えよう．すなわち，**情動装置**とは $\mathbb{R}^n$ のある部分集合 I からある集合 J への写像 h のこととし，**評価ベクトル** $e(x)$ **に連動する情動**とは h による $e(x)$ の像 $h(e(x))$ のこととする．そうすると，思考機械・人間の情動について第一に問うべきは，h の始集合 I，終集合 J および定義式がどうかであろう．情動についてのさっきの説明は，こういう問への部分的な答やその根拠とみなすことができる．

自我による「情動」の説明をもう少し続けよう．

人は，活力が弱まったとき，外界からの刺激に対して喜怒哀楽の感情を現わしにくくなる傾向がある．これも自我と情動装置の仕組みによって説明することができる．思考機械の評価ベクトルの計算方式として，たとえば直列方式や並列方式を採用したとしよう．そうすると，もしも思考機械の計算能力が下がれば，計算の制限時間内には入力 x と D の元から b_i を導けない可能性が高い．$b_i{}^\Diamond$ についても同様である．従って $e_i(x) = 0$ なる可能性が高くなり，評価ベクトル $e(x)$ は零ベクトルに近いものになるだろう．評価値 $f(x)$ も当然 0 に近くなるだろう．従って，さっきのように「気性の激しさの仕組み」を与えておけば，$e(x)$ に連動する情動は希にしか表出せず，しかもその表出は小さいだろう．そういうわけで，思考機械・人間の感情反応が鈍い状態とは，評価器の計算能力が落ちた状態だと考えられる．

直列方式と並列方式では，計算の制限時間が二つ設けられている．この二つの時間は，別に等しい必要はない．そこで，この二つの時間を色々に変えてみよう．たとえば順直列方式において，b_i を導くための計算時間を長くとり，$b_i{}^\Diamond$ を導くための計算時間を短くしたとしよう．また，思考機械の計算能力は高いとしよう．そうすると，入力 x に対して，$e_i(x) \geq 0$ となる可能性の方が $e_i(x) < 0$ となる可能性より高くなるだろう．従ってまた，$f(x) \geq 0$ となる可能性の方が $f(x) < 0$ となる可能性よりも高くなるだろう．逆直列方式，並列方式でも事情は同じである．しかし，逆に b_i を導くための計算時間を短くし $b_i{}^\Diamond$ を導くための計算時間を長くすれば，これと反対のことが起きるだろう．だから，計算の制限時間の長さを変えることにより，$e_i(x)$，$f(x)$ が非負の値をとる可能性を調節することができる．従って特に，$e(x)$ に連動する情動の大きさや種類の定め方をさっきのようにしておけば，計算の制限時間の長さを変えることにより，入力 x に対応して発現する情動を調節することができる．人間になぞらえれば，これは，外界からの刺激に対して生ずる情動の種類や，その刺激が快感を生じやすいか不快感を生じやすいかを調節できることを意味する．思考機械・人間の「気分」を変える仕組みには，こういう機構が関わっていると考えられる．

問題 1.6.4 任意の $x \in A_\phi$ に対して $[D \cup \{x, x^\Diamond\}] = A_\phi$ が成り立つと仮定する．また，D の各元の確度は 1 であるとし，評価器の計算能力は高いとする．

1. $B \subseteq D$ が成り立つ場合に，$x \in A_\phi$ に対して，直列方式・並列方式・偏方式の下での $e(x)$ の値について考察せよ．
2. $b_1{}^\Diamond \in D$ が成り立つ場合に，直列方式・並列方式・偏方式の下での $e(b_1)$ の値について考察せよ．

1.6.4　精神発達

§ 人は，その一生を通じて，精神的に成長したり退行したりする．たとえば，生まれたばかりの赤ん坊は，話すことも歩くこともできない．しかし，ある年齢に達すれば，言葉を発し，よち

よち歩きを始める．しゃべったり歩いたりできるようになるには，もちろん筋肉という効果器が発達しなければならない．しかし，それ以上に，効果器に指令を発する脳の発達が重要だろう．そういう意味で，しゃべったり歩いたりできるようになることは精神的な成長とみなすことができる．人が社会（家族や学校や職場）による教育を受けて精神的に大変成長することは言うまでもない．そしてそういう成長には，知識が増加するとか，思考力が増すとか，関心の範囲や価値観が広がるとか，感情を抑える力が増すとかの，色々な側面が観察される．その反対に加齢や病気や良からぬ教育によって精神的退行が起きることも，残念ながら事実である．こういう，人の一生を通じての精神的な成長や退行をひっくるめて「精神発達」と呼ぶ．

これはしかし，従来の心理学での説明と定義に過ぎない．人間機械論をよりどころにする数理心理学は，こういう精神発達の機械的仕組みを数学的に説明しなければならない．そして前項で注意したように，その説明は，精神発達という概念を数学的に定義する作業から始めるべきである．しかし幸い，この作業は難しくない．私は，思考機械の**精神発達**とは自我の構成要素の中の評価系・重みベクトルの向き・知識系・確度の変化であると定義すればいいと考える．つまり，人間の「いわゆる精神発達」の実態は，評価系・重みベクトルの向き・知識系・確度の変化であると考える．そしてこれが，従来の心理学で「自我の発達」と呼ばれているものの実態でもあるだろう．以下，この考えの根拠を少し説明しよう．

例 1.6.4 の数学者 M について考える．だから，M の評価系 B は唯一つの元 b から成り，その重みは c である．M は入力 x の快感度つまり評価値 $f(x)$ が 1 のときに（それは $e(x) = c$ のときである），そうと観察者にはっきり分かる情動を示すとしよう．また，M は自然数論について考えているとしよう（A, D を然るべく定める）．そうすると，b をたとえば

$$\exists v\bigl(u^2 = 4v\bigr)$$

と定めたら（ただし u, v は変数），M は u^2 が 4 の倍数になるための条件を知った時に最大の快感を得ることになる．だから，他のまっとうな数学者から見たとき，M はいかにも「志の低い」数学者だということになるだろう．しかし，もしも b をたとえば

$$\begin{aligned}\exists v\exists w\bigl(u = v + w \wedge (v > 1 \wedge (\forall y(\exists z(v = yz) \Rightarrow (y = v \vee y = 1))))\\ \wedge (w > 1 \wedge (\forall y(\exists z(w = yz) \Rightarrow (y = w \vee y = 1))))\bigr)\end{aligned}$$

に変えたら（ただし u, v, w, y, z は変数），M は u が二つの素数の和になる条件を知った時に最大の快感を得ることになる．だから，他のまっとうな数学者から見たとき，M は「志は高くなった」かもしれないが「向こう見ず」にもなったということになるだろう．つまり，M の評価系の変化は，然るべき外部観察者の目には，願望や価値観の変化として観察されるのである．

数学者 M は評価系が唯一つの元からなるという特殊な例だが，一般の思考機械についても，今の考察から得られた結論は正しいだろう．つまり，情動装置を備えた思考機械の評価系 B の変化は，外部観察者の目には，願望や価値観の変化という精神発達として観察されると思われる．また，重みベクトル c の向きや知識系の元の確度の変化も同様に観察されると思われる．なぜなら，評価器の計算方式としてたとえば直列方式をとった場合，c の向きや知識系の元の確度が変化すれば，入力 x が同一であっても評価ベクトル $e(x)$ の向きが変化する．従って，$e(x)$ に連動する情動の種類を $e(x)$ の向きによって決めるよう情動装置を設計してあれば，同一の入力 x に対しても以前と異なる種類の情動が現れることになる．それは，外部観察者の目には願望や価値観の変化として観察されるだろう．

しかしここで，重要なことがもう一つ分かったと思う．さっき「他のまっとうな数学者から見たとき」とか「然るべき外部観察者の目には」と書いたことから分かるように，思考機械の評価系の

変化が成長であるか退行であるかは，同じく思考機械である外部観察者の評価系の如何によるのである．たとえばさっきの数学者 M も，非数学者の目で見れば，志が高くなったのではなくて,「相変わらず志が低い．なんとくだらないことに血道を上げているのか」ということになり兼ねない．

だから，以上の考察から言えることは唯一つ．自我や情動装置の設計によっては，願望や価値観の変化という精神発達の実態は評価系などの変化だと理解されるということである．個々の精神発達を成長と呼ぶべきか，退行と呼ぶべきか，もしくは別の名で呼ぶべきかについては，何とも言うことができない．

課題 1.6.2 幼い子供や知恵遅れの人たちから，私たちは，純真だとか無垢だとかという印象を受けることが多い．その反対に，知恵が普通に発達した人からは，時として心の醜さを感ずることがある．こういう現象は，この項の観点からはどう解釈できるか．

課題 1.6.3 私たちは，自分を犠牲にして人のために尽くす人を高く評価することが多い．こういう現象は，この項の観点からはどう解釈できるか．

1.6.5　数理発達心理学

§ 前項では，思考機械の精神発達（以後単に「発達」と呼ぶ）とは自我の構成要素の中の評価系・重みベクトルの向き・知識系・確度の変化であると定義した．こういう意味の発達について研究する学問分野を，標題に掲げたように**数理発達心理学**と呼ぶ．

数理発達心理学の課題は次の二つに分けられる．

1. 思考機械・人間においては，発達の機構はどうなっているか．
2. ある発達機構を与えられた思考機械は，どういう環境に置けばどう発達するか．

どちらの課題も大変難しい．しかし難しい理由はそれぞれ異なる．第一の課題について言えば，発達の機構を想像して色々な数理模型を作ることはそれほど難しくない．しかし，色々の模型のうち，どれが実際の人間の機構なのかを決める直接の手懸かりがない．つまり，外部からの観察によって思考機械・人間の発達の機構を窺い知ることが難しいのである．心言語の構造や心論理構造を推定するのだったら，人間の言語行動が大変いい資料になり，それを観察するのもたやすい．しかし，発達の機構については，そういう資料が無いのである（脳科学では，観察も困難な上に微視的資料しか得られず，資料の分析総合自体が困難になる）．

それに対し，第二の課題が難しいのは，研究対象自体が複雑過ぎて数学の力が及びにくいからである．課題 2 に登場する「環境」という概念を数学的に定義することはできる．単に，思考機械への入力の列 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ を**環境**と定義すればいいと思われる．これは，日常語における「環境」の概念を拡張し抽象したものである．こういう意味での環境を思考機械が受け取ったときに思考機械がどんな発達をするかを考えればいい．しかしそうするためには，環境や発達の質・量などの計測法を数学的にはっきりさせなければならない．まずそこに困難がある．また，環境と発達の関係を追究すると言っても，具体的にどこから手を着けたらいいかは茫漠としている．

しかし，これは理論上の困難である．理論が出来なくても模擬実験を進めることはできる．発達機構を備えた思考機械を実際に制作して，それに色々の環境を与えて発達振りを観察することはできるだろう．そして，観察結果から人間についてなにがしかの洞察を得ることもできるだろう．つまり，これこれの設計の思考機械がこれこれの発達をし，その発達振りが人間の発達振りとよく似ているから，人間の設計も同じではないかという類の洞察である．

ただし，模擬実験から得たそういう結論は評価が難しい.「よく似ている」の意味をよほど厳密に考えるのでなければ，誤った結論を信ずることになるだろう．また，人間について意義ある洞察を得るには，思考機械に与える環境をある程度複雑なものにしなければならないだろう．他方で，思考機械に与えた環境とその環境での思考機械の発達との関係を分析するには，思考機械に与えた環境を研究者がよく把握できなければならない（たとえば，ロボットに建物内を動き回らせて何らかの発達実験をしても，建物内という複雑な環境の本質を研究者が把握できなければ，環境と発達との関係を探ることはできない）．ある程度に複雑でかつ研究者が把握できるという相反する性質をもった環境を選択することは，なかなか難しいことに思われる．

こういう色々な困難は予想される．しかし，困難は半面では楽しみでもある．心言語や心論理代数系の構造を然るべく特定した後には [111]，数理発達心理学という広大で楽しみな研究分野が待ち受けている．

1.6.6　この節の参考文献

§ 従来の心理学用語の意味は，学派によってもかなり異なるし，非常に曖昧なものが多い．その辺の事情については，たとえば次の辞典が参考になる．

誠心「心理学辞典」: 外林大作（他）編，誠心書房，1981 年

数理心理学者としては，この節で試みたように，従来の用語法にとらわれずに数学的に厳密に再定義するよう心掛けなければならない．第 1.6.2 項における「自我」の定義とこの辞典の「自我」の説明を読み比べれば，数理心理学と従来の心理学との違いがよく分かるだろう．

1.7　この章の要約

$ これまでの節で詳しく話したことも，あまり詳しく話さなかったことも，全部ひっくるめて要約しよう．第 1 章は本書の要約だと言ってもいいのだから，この節は要約の要約である．

数理心理学は数理科学の一典型である．すなわち数理心理学者は，まず人間の心の働きという自然現象を観察し，次いでその現象を抽象して数理模型を作り，さらにその模型についての数学を研究することにより，心という現実についての理解を深め発展させようとする．

数理心理学の目標は，脳の具体的な構造や仕組みから離れて「心とは何か」を数学的に追究することである．そして最初の課題は,「数理心理学の場は何か」を決めることである．

数理心理学の場を求めての長い旅は,「思考機械 → 代数系 → 論理 → 言語」という道筋を辿る．つまり，数理心理学者は先ず人間を思考機械とみなす．機械は単能機械とも多能機械ともみなせるが，思考機械・人間は多能機械とみなすのが妥当である．多能機械としての思考機械・人間は代数系とみなされる．その台集合はもの事の記述の全体であり，その代数構造は，自然言語の中の意味構造と論理構造として変形表出する．それに応じてこの代数系を，もの事の記述のための代数系である心言語と，既存の事記述からそれと因果関係にある事記述を導くための代数系である心論理代数系に分ける．心言語が数理心理学の場である．

心言語 A は普遍型付代数系の一種の形式言語であり，自然言語を意味に即した形態に変形して行くときに現れる形態的規則が A の代数構造を近似している．従って，A の代数構造を定めるた

[111]心言語の構造を特定する前に，暫定的に心言語がたとえば一階述語言語だと仮定して実験的研究を行なうことにも，なにがしかの意義はあるだろう．

めには，自然言語を意味に専心して内省的に観察するという心理言語学が必要になる．心理言語学は母語について行なわなければならない．そして心理言語学に基づいて，A の代数構造を定め，かつ，認識の対象世界 W の構造や A と W の対応関係についての理論，すなわち意味論を作り上げなければならない．

意味論では，W を適当な型付代数系として定義する．そうすると，A の定数を W の元に対応付ければ，A の代数的普遍性を介して A の元が W に対応付けられ，それにより A の文についての W での真偽の概念が定まり，認識対象世界や対応付けによらず真である文，すなわち恒真文の概念が定まる．他方，心言語文は自然言語文として変形表出する．意味論の要点は，恒真なる自然言語文には A の恒真文が対応するように認識対象世界 W の代数構造を定義することである．

心言語の代数構造と意味論が定まれば，健全な論理の範囲が定まり，それに基づいて心論理代数系の研究に向かうことができる．その第一の課題は，心論理代数系の部分集合にその算包を対応させる写像の性質を調べることである．これにより，思考機械・人間の潜在能力を探ることができる．

以上を要するに，数理心理学の当面の課題は，心言語という形式言語の上の論理学を研究することである．その論理学が適切なものであるかどうかは，何よりもまず，その論理学が言語現象をうまく説明できるかどうかで検証されなくてはならない．

以上が当面の数理心理学の理論的部分である．この理論は人間の潜在思考能力を主題とするが，この理論を踏まえれば，人間の顕在思考能力や感情・意志・意識などの心の側面についても模擬実験的に研究することができ，そういう研究によって数理心理学の人工知能工学などへの応用の道が開けるであろう．

第2章　国語観察と心論理学の設計構想

¢ 前章では数理心理学の基本的な考え方を説明した．特に第 1.5 節までに，数理心理学の基本問題の幾つかが心言語という形式言語上の論理学（それを標題のように**心論理学**と呼ぶ）の問題として捉えられることと，それを解決するには自らの母語の観察が必要であることを説明した．そこでこの章では，心論理学の設計構想の一部を，言語的側面に照明を当てて具体的に説明する．

第 1.4.1 項で触れたように論理学の三本柱は形式言語の文法論・意味論・演繹論であるが,「論理学の設計」は，文法論と意味論を行なうことを指す．心言語の文法論はすなわち「心言語の代数構造は如何なるものか」という第 1.4.1 項の基本問題 1 に答える論である．これについては，第 1.5.3.4 条の仮説 3 までに,「現代国語を意味に専心して観察・変形して行けば，心言語の構造が浮かび上がって来る」という考えを説明した．第 1.4.1 項ではまた，基本問題 1 に先立って「人間にとっての認識の対象世界とは如何なるものか」という基本問題 4 について考える必要のあることを指摘した．この問題に答えることが心言語の意味論の要であるが，図 1.6 で図解した次第で，基本問題 4 を解く鍵も自然言語の中に隠されている．つまり，心論理学の設計のためには，自らの母語を観察することが必要なのである．

読者は，ここまでの私の考え方に賛成するなら，ためらうことなく，国語を意味に専心して観察する作業を始めるべきである．そういう観察に基づいて心論理学の設計に取り掛かるべきである [1]．もちろん私自身も，そういう観察と設計を進めている．そうして私が得た心論理学の設計図は，第 6 章で**格論理学**と名付けて示す予定である．

2.1　算法記号は何か

$ 数理心理学者が国語を観察する際には，旧来の言語学に囚われることなく，数理心理学の然るべき観点に立たなければならない．そういう観点の中でも，今までの言語学には欠けていた思われるものを仮説の形で述べよう．

仮説 5 自然言語には心言語の元が何らかの変形を受けた後に表出している [2]．そして，心言語は形式言語であるから，そこには算法記号が存在している．従って，表出に際して変形があるにしても，心言語の算法記号の名残が自然言語表現の中にあるはずである．

これは，心言語の意味論を行なうためには不可欠の観点である．なぜなら，形式言語の意味論では,「意味」を与えられるのは形式言語という代数系の元であって，元でない算法記号は「意味」を与えられない．算法記号に与えられるのは,「役割」または「機能」である．だから，自然言語表現の中の何が心言語の算法記号の表出・名残であるかを考えることが，心言語の意味論のために不可欠なのである．

---

[1] ただし，この作業のためには，かなり高度の数学的理論構築能力が求められる．端書きに「数学科三年次位の代数学の知識と代数学的思考訓練が必要」と書いたが，これは本書の内容を理解するための要件である．この分野で創造的な研究を行なうためには，さらに何年間かの，本式の代数学の修行が必要だろう．

[2] ここまでは第 1.5.1 項の仮説 2 である．

それでは，自然言語表現の中にある心言語の算法記号の表出・名残とはいったい何だろうか．話を具体的にするために，次の文を考えてみる．

(1) ピーターがレタスを食べる

これがある心言語文の表出であって変形があまり加わっていないとすれば，心言語の算法記号が残っているはずではないか．どれが算法記号だろうか．私の考えを順を追って説明しよう．

2.1.1　動詞は算法記号か

§ 「食べる」を二項算法記号とみなすのは一つの考え方だろう．つまり，文 (1) は算法「食べる」を「ピーター」と「レタス」に適用して得られた心言語文

食べる (ピーター, レタス)

の表出だとする（心言語の語を，それに相当する国語の語，すなわちそれの表出先の語で表しており，以後も一々断らずにそうする）．ただし算法記号の置き場所は，これ以外にも

(ピーター) 食べる (レタス)　　　　(ピーター, レタス) 食べる

の二種類あり，さらに「ピーター」と「レタス」を入れ換えることができる．そして，国語では（「日本人の心言語では」と言うのが正確）三番目の語順が選ばれ，英語では二番目の語順が選ばれる [3]．この考え方では，文 (1) の中の格助詞「が」と「を」は引数の位置を表す記号に過ぎない，ということになる．そして，一階述語言語はこの考え方に基づいて作られていると思われる．

しかし，数理心理学の観点からは，こういう考え方に賛成することができない．その理由を，素朴・直感的なものから始めて幾つか述べよう．ただし，ここに述べるのは現段階で述べられるものだけであり，他のもっと重要な理由は後で折に触れて説明することになる．なぜなら，一般に，ある考え方の良し悪しの理由はそう簡単に説明できるものではない．特に科学においては，より多くの現象をより簡潔に説明できる理論が良い理論だから，ある理論の良し悪しを知るには，その理論全体を深く学ばなければならない.「食べる」のような動詞を算法記号の表出とする理論がよくないことを説明するにも，それに代わるより良い理論を詳しく説明しなければならない [4]．そして，その説明をすることこそが，本書全体の目標なのである．

さてまず，心言語の算法というものは，記銘機械・人間における変換あるいは工程に相当するものであり，原材料に相当するものではない．ところが,「食べる」のような動詞は,「ピーター」「レタス」のような名詞と同様に，工程ではなくて原材料に相当するもののように私には感ぜられる．これは私のまったくの直感だから，読者は納得できないかもしれない．しかし，そういう直感は私の心言語の構造から出て来るはずのものだから，心言語の構造を探ろうとしている今，それを無視することもできないのである．

次に，もしも「食べる」のような動詞が算法に相当するとすれば，用言の仲間である形容詞と形容動詞も算法に相当することになるだろう（だから，心言語の算法は用言の個数に応じて非常に沢山あることにもなる）．そして，人間はその生涯のかなり後期になっても新しい用言概念を学習・獲得し続けるから，もしも用言が算法記号に相当するとすれば，心言語の代数構造が，つまり記銘機械・

[3]一番目の語順を取る言語もあると言う．大修館書店刊「世界のことば小辞典」参照.

[4]コペルニクス (Nicolaus Copernicus) が，天動説より地動説が優れているのを説明するのに,「天体の回転について」という六巻の書を要したことを思い浮かべてほしい.

人間における変換の種類や数が長い年月の間変化し続けることになるだろう．しかし私は，人間機械論の立場をとる以上，心言語の代数構造は長期に安定していると考えたいのである．

さて次に，国語では語順の変更がかなり自由にできる．たとえば,「ピーターがレタスを食べる」と言うことも「レタスをピーターが食べる」と言うこともできる．従って，この二種類の国語文に相当する心言語文が存在する.「食べる」が心言語の算法記号に相当するという考え方で，語順の変更についてのこういう現象をどう説明したらいいのだろうか [5].「食べる」に対応する算法が時によって変化すると考えざるを得ないと思う．そうすると用言に対応する沢山の算法が個々に変化することになるが，さっき述べたように，心言語の代数構造が変化するとは考えたくない．

それでは次に，先ほどの文 (1) を含めた次の六つの文を観察しよう．なお，これらの中には，いわゆる主語や目的語を欠いているものがあり，それらは文ではないと思われるかもしれない．しかしこれらは，いずれも然るべき質問への意味の通ずる答になり得るものだから，文と呼んで差し支えない（どう呼ぶかは，今は重要なことではないが）．

(1) ピーターがレタスを食べる

(2) 食べる

(3) ピーターが食べる

(4) レタスを食べる

(5) ピーターが畑でレタスを食べる

(6) ピーターが昼に畑でレタスを食べる

さて，もしも「食べる」が心言語の算法に相当するなら,「食べる」は少なくとも 4 項の算法であって，文 (6) は心言語の

食べる (ピーター, レタス, 畑, 昼)

なる文の表出だということになるだろう（「食べる」に掛かり得る連用修飾語の種類はまだまだあるから,「食べる」の項数はもっと多いことになるのだが）．算法「食べる」が変化するという考えは，さっき述べた通り好ましくない．だから，算法「食べる」の項数が変化するとは考えにくい．そうすると，やはり述語論理学の考え方をとり入れて，文 (6) 以外の文は,「ピーター」「レタス」「畑」「昼」のうちの幾つかを変数に換えたものと考えざるを得ないように思われる．たとえば，文 (1) は

$$\exists x \exists y\ \text{食べる}（\text{ピーター, レタス}, x, y）$$

なる心言語文の表出だと考える．しかし，限量子 $\exists x$ を使うこういう考え方は，数理心理学には相応しくないように思われる．なぜなら，私たちが日常の思考の際に $\forall x, \exists x$ のような記号を操作しているとはとても思われないからである．私たちは数学的思考の際にこういう記号を使うことが確かにある．しかしそれは道具として使うのであって（第 1.2.2 項参照），心言語にそういう記号があるとはとても考えられない（第 2.3 節参照）．

以上，用言が算法記号に相当すると考えられない理由を幾つか説明したが，同時に私は，述語論理学を数学以外の用に使うことを批判した積もりである．そもそも述語論理学というものは，私の解釈では，数学者が数学基礎論を研究するという限られた目的のための道具として発展させてきたものである（第 1.2.4 項参照）．それを，大した変更もなしに，心理学や言語学や哲学のために使えると期待する方が間違っていると言わざるを得ない（数学基礎論に使うのが妥当かどうかについてさえ，私は疑念を持っている）．数学者が人間の心や自然言語にも関心を持っていたら良かったかもしれない．しかしそうではなかったのだ [6].

[5]格論理学はこの現象を説明できるように設計されている．

[6]現在でも，物理学に関心を持つ数学者は沢山いても，心や自然言語に学問的関心を持つ数学者は希である．これまでの数学のほとんどは，物理学のための（そうでなければ数学自身のための）道具だと言っても言い過ぎではない．

2.1.2　格助詞が算法記号だ

§ それではどう考えたらいいのか．私は，文 (1) – (6) を素直に眺めるなら，これらの文における算法記号は格助詞「が」「を」「で」「に」だと考えるのが自然ではないかと思う．つまり文 (1) – (6) は，それぞれ次の心言語文の表出だと考えるのだ [7]．ただし先の通り，心言語の元をその表出先の国語の語で表している．

[1]　ピーター**が** (レタス**を**食べる)

[2]　食べる

[3]　ピーター**が**食べる

[4]　レタス**を**食べる

[5]　ピーター**が** (畑**で** (レタス**を**食べる))

[6]　ピーター**が** (昼**に** (畑**で** (レタス**を**食べる)))

この意味は明らかと思うが，もう少し説明しよう．まず,「が」「を」「で」「に」はどれも二項算法記号である．そしてたとえば，文 [4] は二項算法「を」を「レタス」と「食べる」に施したものであり，文 [1] は二項算法「が」を「ピーター」と文 [4] に施したものだと見る．そして，文 [2] は算法が施されていない素元だと見る [8]．この考え方によれば,

[7] ピーター**が**レタス**を**

なる心言語文は存在しない．なぜなら，算法「を」は二項算法なので,「を」の右側に何か記号がなければならないからである．文 [7] は，然るべき問への答となり得るから，自然言語文としてはあり得る．これは，心言語文 [1], [5], または [6] が語の消失という変形を受けて表出したものとみなすことができる．

なお，試みに心言語文 [5] を計算図で表すと図 2.1 のようになる [9]．ちなみに，生成変形文法論

図 2.1: 「ピーターが (畑で (レタスを食べる))」の計算図

$$\dfrac{\text{ピーター} \qquad \dfrac{\text{畑} \quad \dfrac{\text{レタス}\quad\text{食べる}}{\text{を}}}{\text{で}}}{\text{が}}$$

でも「木構造」などと呼ばれる似た図が使われる．しかし，その使い方は大変に曖昧のように見える．そもそもこの種の図は，何らかの代数系が始めに定めてあってこそ厳密に定義できるものである．つまり，図に使う記号の種類と図の描き方の規則をはっきりとさせなければならない．そういう事についての考察がなければ，論理無しに誤魔化し誤魔化されているに過ぎない（第 3.6.2 項末尾参照）.

国語における心言語の算法記号の痕跡と考えられるものには,「が」「を」「で」「に」の他に

- 残りの格助詞の幾つか
- いわゆる接続（助）詞の幾つか
- 否定の助動詞「ない」
- 断定の助動詞「だ」

[7] この考えは第 5 章以降で詳しく説明する．
[8]「素元」は第 3.5 節で定義する．
[9]「計算図」は第 3.6.2 項で定義する．普遍型付代数系の元は計算図とみなすことができる．問題 3.8.18 参照.

等があげられる．この他に，国語文への表出の際に消失すると考えられる算法記号も幾つかある．これらのことについては，本論において改めて詳しく論ずることにする．

助詞や助動詞を算法記号の名残とみなすのは，意味論を考えれば至極当然のことでもある．形式言語の意味論では,「意味」を持つのは形式言語という代数系の元であって，元でない算法記号は「意味」を持たない．算法記号が持つのは,「役割」または「機能」である．だから，自然言語においても，単独では意味を持たず役割・機能を持つ助詞や助動詞は，算法記号の名残だと考えられるのだ．その反対に単独で意味を持つ名詞や動詞は，算法記号の名残とは考えられない．

助詞や助動詞を算法記号の名残とみなす考え方は，実は，伝統的国文法論からもそう懸け離れてはいない．助詞や助動詞が名詞や動詞と違う性格の語だということは昔から国語学者に気づかれていたし，性格の違いを説明する試みもされている．たとえば，岩波国語辞典の品詞概説にある「助詞の大部分は，句や文を組み立てるわくのような働きをする」という記述には，算法という概念に通ずるものがある．また**橋本進吉** [10]は，助詞が「文節のきれつづき」において果たす役割で助詞を分類しようと試みた [11]．これは算法記号の名残である助詞をもとの算法の項数と定義域で分類することに当たる，というのが私の解釈である [12]．

ただし，橋本の分類表の中の「終助詞」「間投助詞」は心伝達時に意志や感動の意などを添えるためのものである．これらを，枠のような働きをする「格助詞」や「接続助詞」などと一緒に「助詞」として括るべきではないし，まして「きれつづき」で分類すべきものではない．両者は全く違う性格の語である．この性格の違いは，数理心理学の観点に立てば，更にはっきり説明することができる．格助詞や接続助詞が心言語の算法記号の名残なのに対し，終助詞や間投助詞は，心言語文が自然言語文となって表出するときに加わる変形・修飾とみなすべきものなのだ．

ここで参考のために，外国人の心言語についても少し考察してみよう．たとえば，文 (5) に相当する英語文を

(5e) Peter eats lettuces in the garden

だとしてみる [13]．これに相当する英国人の心言語文はどうなっているだろうか．

[5e] ((Peter λ eats) μ lettuces) in thegarden

だとするのが一つの考え方だろう．つまり，λ, μ, in がそれぞれ二項算法記号だが，英語文となって表出するときに算法記号 λ, μ は消失し in だけが表出すると考えるのだ．心言語文 [5e] を終点とする計算図は図 2.2 のようになる．語尾変化や定冠詞のことを無視しているので，もっと精密に考

図 2.2: 「((Peter λ eats) μ lettuces) in thegarden」の計算図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Peter}\quad\text{eats}}{\lambda}\quad\text{lettuces}}{\mu}\quad\text{thegarden}}{\mathrm{in}}$$

える必要もあるし，他の考え方もあるかもしれない（実際，この考え方は第 7 章で修正する）．しかしいずれにしても，日本人と英国人の心言語がまったく同じだと考えることはできない．しかし，これらの二つの心言語の間に，型付代数系としての保型同形のような何らかの関係があり，そ

[10]国語学者．その文法論は教育界の標準文法であると言う．
[11]橋本進吉博士著作集 第八冊「助詞・助動詞の研究」岩波書店
[12]「項数」「定義域」は第 3.1 節で定義する．
[13]ただし，英語を母国語としない私にはこれが正しい英語文だという直感はない．第 1.5.2.3 条参照．

の意味で同一視できるという可能性は大きい（第 7.3.4.2 条参照）．第 1.5.1 項で心言語の代数構造は本質的には母語によらず唯一通りだろうと述べたのも，この可能性を考えてのことである．

2.1.3　格・関心・部分系

§ ここでは，格助詞「が」「を」「で」「に」などを算法記号とする考え方が好ましい理由をもう一つだけ説明しよう．

かって，ある文法学者が「格は客体界の秩序である」と喝破した．しかし心理言語学の観点に立てば,「**格は話者の関心である**」となる．そして,「が」「を」「で」「に」を算法記号とする考え方をとると，心言語の部分系という概念で「話者の関心」がうまく説明される [14]．

前出の文 (1) – (6) について再び考えてみよう．読者の多くは，文 (2) には何かが欠けていると感じても（実際，いわゆる主語と目的語が欠けている），文 (1) についてはそういう感じを持たなかっただろう．しかし，文 (1) とても欠けたところが無いのではない．ピーターが何処で何時にレタスを食べるかに読者が関心を持っている場合には，読者は文 (1) にも欠けたところが有ると思うだろう．同様に，ピーターとレタスのことが話題になっていることは既知で，食べるか食べないかだけに読者の関心がある場合には，読者は文 (2) に足りないものがあるとは感じないし，他の文は冗長だとさえ思うだろう．

当然のことであるが，文の聞手が文に欠けたところがあると感ずるか否かは，聞手の関心がどこにあるかによるのだ．人は，たぶん，文 (1) には欠けたところが無く，その他の文はどこか欠けているか，またはどこか冗長だと感ずる場合が多いだろう．それは,「食べる」という行動について考えるときには，人は普通,「誰が」「何を」という二つのことに一番関心を持ち,「何処で」「何時に」にはそれ程関心を持たないという傾向があるからではないか．

以上は，文の聞手がその文についてどう感ずるかという話だった．文の話者がどう感ずるかは全く別の話である．話者にとっては，文 (1) – (6) に含まれる情報は，故意に情報を隠したりした場合以外，いずれも必要十分なものであり，欠けたところがあるとも冗長だとも感じないだろう．話者は自分の関心の範囲に応じた話し方をするからである．

つまり，こういうことになる．動詞「食べる」は格助詞「が」「を」「で」「に」などを伴い得る．しかし，常にこれらのすべてを伴うのではない．日常の会話では，その折々で話者が強い関心を持つ「食べる」の側面に関わる格助詞だけを伴い，それ以外の格助詞は伴わないのが普通なのだ．これが「格は話者の関心である」ということの意味である．

課題 2.1.1 格を人の関心の順に並べたらどんな順になるかを統計的・実験的に調べよ．

さて，文 [1] は心言語の {が，を} を算法記号系とする算部分系の，さらに「ピーター」「レタス」「食べる」で生成される台部分系に含まれる [15]．つまり，文 [1] は,「が」「を」「ピーター」「レタス」「食べる」で決まる心言語の部分系に含まれる．そして，この部分系は，文 [1] の話者の関心の対象である「が」「を」「ピーター」「レタス」「食べる」という五つの記号で決まるから，話者の関心の範囲を表す指標とみなすことができる．これが，心言語の部分系という概念が「話者の関心」を説明すると述べたことの意味である．

ところで，今まで「話者の関心」という言葉を使ってきたが，私たちは人間機械論で考えているのだから,「話者の関心」という類の人間的な表現を使って安易に納得してしまうわけにはいかない．関心とは機械における何であるのかまでを考えなくてはならない．そこで，記銘機械・人間を

[14] 仮説 1 の後の注意参照.
[15] 「台部分系」は第 3.2 節で定義する．

数学的に抽象して心言語に至った道を逆に辿って，機械のところまで戻って考えよう．そうすると，いま考えていた部分系は，文 [1] がこの機械で生産される時に実行された工程とその工程の原材料の組みに対応する．だから，文 [1] が定める部分系を話者の関心の範囲の指標と考えるのは，全く理にかなっている（第 1.3 節参照）．

2.2　語構成法と文法

＄ 私たちが言葉を使うときには，一般に要素的な語一つ以上幾つかから別の言語表現を作る．たとえば,「ピーター」「が」「レタス」「を」「食べる」という五つの語をつなげて「ピーターがレタスを食べる」という文を作ったりする．また,「明るい」という一つの形容詞の語尾を変形して「明るさ」という名詞を作ったりする．そして，どういう語をどう組み合わせていいか，あるいはどう変形していいかという規則がある．いわゆる文法というのは，そういう規則である．しかし，文法だけがそういう規則なのではない．要素的な語を組み合わせたり変形させたりして言語表現を作るという操作は，文法だけに従って行なわれるのではない．たとえば,「め」という名詞と「たつ」という動詞をつなげて「めだつ」という動詞を作る．また,「はかる」という一つの動詞を変形して「はかり」という名詞を作る．そして，こういう作り方にも何らかの規則がある．しかし文法学者は，そういう規則を文法の中には入れないで**語構成法**などと呼ぶ．

なお，文法と語構成法を区別せず，すべての規則を文法と考えて論ずるのは妥当でない．なぜなら，国語には漢語系の複合語が沢山入り込んでいるからだ．たとえば,「不」と「快」をつなげて「不快」という形容動詞語幹を作る．また,「殺」と「人」をつなげて「殺人」という名詞を作る．これは明らかに中国語の文法に従った作り方だ（しかも，ここで使われた中国語の文法は，形容動詞や名詞を作るための規則ではない）．和語の作り方なら「快くない」「人殺し」となるだろう．だから，すべての規則を文法と考えて論ずるなら，中国語やその他の外国語の文法までも論ずることになる [16]．だから，文法とそれ以外の規則の境目をどこかに置かなければならないのは確かだろう．

2.2.1　語構成法と心言語

§ 文法学者はある規則を文法と呼び，その他の規則を語構成法と呼んで区別する．それがなぜかの説明は当の文法学者にまかせよう．数理心理学者がここで第一にすべきことは，数理心理学の立場ではいわゆる文法や語構成法をどう扱うべきかを考えることである．そこで，数理心理学の観点からは言語をどう見るべきかを復習しよう．数理心理学では，自然言語そのものの文法論や形態論を行おうというのではない．自然言語を観察するのは，心言語が自然言語に現れているという基本的な仮説 2 に基づいて，心言語の代数構造を推定するための資料を得るのが目的だった．そうすると，文法や語構成法についてここで考えるべきは唯一つ.「いわゆる文法や語構成法は心言語の代数構造の現れなのか」という問である．

語構成法について答えるのは難しくない．語構成法は心言語の代数構造の現れではない．なぜなら，心言語の文法論を行なうために設けた仮説 3 によれば，自然言語表現を意味に即した形態に変形して行くときに現れる形態的規則が心言語の構造を近似している．ところが，一つの語構成法によって作られた語でも，意味に即した形態に変形して行くと，多種多様に変形され，初めに規則と見えていたものは消滅してしまう．言い換えると，形式上は同じ語構成法で作られた語でも，その

[16] 外来語は，原語における品詞が何であれ，国語においてはすべて名詞として働くと言う.「広辞苑」の国文法概要参照.

意味的特徴は同じではない．だから，心言語上には語構成法に対応する算法はないと考えるべきなのである．

例で説明しよう．まず，動詞の連用形は一般に名詞に転ずることができる（このように品詞を変えて新しい語を作るのは，語構成法の一種で**転成**と呼ばれている）．さっき例にあげた「はかり」はそうしてできた名詞である．ただし，動詞の連用形がすべて名詞として使われるのではない．たとえば,「見る」「書く」「聞く」の連用形は，単独では名詞として使われない（「様子見」「読み書き」「ご用聞き」のように，他の語と複合して使われることはある）．しかし，動詞の連用形から出来る名詞はとても沢山あって，もちろん，動詞の連用形というはっきりした共通の形態的特徴を持っている．

ところが，そういう名詞には共通の意味的特徴が無い．動詞「〜する」の連用形は「〜すること」という意味で使われることがある．しかし，そういう抽象的意味だけで使われるのはむしろ希で，色々な具体的・派生的な意味が付け加わっていることが多く，派生的な意味でしか使われない語も多い．そして，その派生的意味が実に様々なのである．表 2.1 に思いついたまま例をあげよう（＝の右に派生的な意味を幾つか示す）．

表 2.1: 動詞連用形から転じた名詞

はかり＝重さをはかるための道具	すわり＝安定
かえ＝代えて使うもの	ゆき＝目的地に行くまでの道中
くみ＝組み合わせて一揃いになるもの	はしり＝あるもの事の始め
はじめ＝あるもの事の最初の段階	ひき＝縁故
たたき＝土間，包丁で細かくたたいた魚肉	ひねり＝色々考え巡らすこと
あがり＝利益，収入	あて＝目的，成算，期待
きり＝切れ目，終わり	うたがい＝疑う気持ち
あじわい＝うまみ，面白み	ひらき＝懸隔，魚の腹をひらいて干した食品
はなし＝話す内容，物語，相談，わけ，事情	よみ＝将来の事態についての予想

複合動詞の連用形から転じた名詞の意味は，さらに複雑かつ多様である．そのことは，たとえば次の語の意味を考えてみれば分かる．

> ひきだし，押し込み，行き倒れ，成り上がり，組合，受取り，取組，たたき上げ，飲み込み，取り込み，抱き合わせ，押し出し

こうしてみると，動詞の連用形から作られた名詞には，何らかのもの（物・者）または事を表しているという名詞共通の特徴以外には，共通の意味的特徴が何も無いということが分かるだろう．動詞の連用形という共通の形態は，共通の意味的特徴を表すものではなく，多種多様な意味を表す言語表現を短縮・省略することによって生じたものに過ぎない．連体助詞の「の」を使った「名詞・の・名詞」という形態が様々な意味を持つ表現の短縮・省略によって生ずるのと同様である [17]．「自然言語表現を意味に即した形態に変形して行くときに現れる形態的規則が心言語の構造を近似している」という仮説 3 に従うなら，連体助詞の「の」の多くが心言語の構造の現れと考えられないと同様に，動詞の連用形を名詞に転ずる変換を心言語の算法の現れと考えることはできない．

語構成法には，いまの例のように一つの語から一つの語を作るものの他に，複数の語をつなげて一つの語を作るものもある（この語構成法は**複合**と呼ばれている）．たとえば，二つの名詞や動詞

[17] このことは第 1.5.3.3 条で説明してある．

をつなげて名詞や動詞を作ることができるが，その作り方には次の三通りがある．

1. 名詞に名詞をつなげて名詞を作る：たとえば,「父」と「親」をつなげて「父親」を作ったり,「天」と「地」をつなげて「天地」を作る．動詞の連用形を名詞に転じたものを使って「恋人」「心変わり」「別れ話」などの語を作るのも，これに含める（この三つの例では,「恋」「変わり」「別れ」「話」が動詞の連用形に由来する名詞である）．

2. 名詞に動詞をつなげて動詞をつくる：たとえば,「目」と「立つ」をつなげて「目立つ」を作ったり,「魂（たま）」と「消える」をつなげて「たまげる」を作る（この例のように，語形変化を伴う複合もある）.「背負う」「乳繰る」「鼻白む」もこうして作られた．

3. 動詞（の連用形）に動詞をつなげて動詞をつくる：たとえば,「ひきだす」「押し込む」「行き倒れる」「成り上がる」「組み合う」「受取る」「取り組む」「たたき上げる」「飲み込む」「取り込む」「抱き合わす」「押し出す」はこうして作られた．

こうして作られる語も，意味に即して変形して行くなら，多種多様な形態に変形されてしまう．たとえば，上記 3 に示したような，動詞 A の連用形と動詞 B をつなげて出来る複合動詞は,「A かつ B」とか「A して B」とかの意味を持つことが比較的多いが，それ以外の意味を持つことも多い.「取り組む」は「取って組む」の意味ではないし,「駆け出す」は「駆けて出す」の意味ではないし,「見つける」は「見てつける」の意味ではない．上記 1, 2 の型の複合語の意味はさらに多彩である．つまり，名詞・名詞，名詞・動詞，動詞・動詞という形態的特徴は，やはり共通の意味的特徴を表すのではなく，多様な意味を持つ言語表現を短縮・省略することによって生じたのである．だから，こういう語構成法も，心言語の代数構造の現れと考えることはできない．

2.2.2　文法と生成的意味

§ 語構成法が心言語の代数構造の現れと考えられないのに反し，いわゆる文法の多くは心言語の代数構造の現れと考えられる．たとえば，冒頭で例として使った「ピーターがレタスを食べる」という文も「明るさ」という名詞も文法に従って作られた言語表現であり，ここで使われた文法規則は心言語の算法の現れだと考えられる．

それがなぜかと言えば，これらの言語表現の意味が，個々の要素的語の意味から，文法に並行する規則に従って導かれるからである．つまり,「ピーターがレタスを食べる」という文の意味は,「ピーター」「レタス」「食べる」という要素的な名詞や動詞の意味，およびこれらを結びつける「が」「を」という助詞の働きだけから決まる．また,「明るさ」という名詞の意味は,「明るい」という形容詞の意味と「さ」という接尾詞の働きだけから決まる．これは，使う名詞・動詞・形容詞によらない．たとえば,「ピーター」と「レタス」を交換して作った「レタスがピーターを食べる」という文の意味も，要素的な語の意味と助詞の働きだけから決まる．もちろん，レタスがピーターを食べるような事態はあり得ないから，こんな文はおかしいと思う読者もいるだろう．しかし，そう思ったのは，そういうおかしい文の意味でも，要素的な語の意味をつなぎ合わせて理解することができたからである．

一般に,「A が B を C」の「A」「B」に名詞を入れ「C」に他動詞を入れてできた文の意味を名詞「A」「B」の意味と動詞「C」の意味から決めるための何らかの一般的規則がある（その規則を私たちが意識して使うと言っているのではない）．しかもその意味規則は,「A」「B」「C」「が」「を」から「A が B を C」を作るための文法規則と並行している．つまり,「A」を「a」に変えて出来る文「a が B を C」ともとの文の意味の違いは,「A」と「a」の違いから生ずるものだけであり,「B」

「C」についても同様である．このように要素的な語の意味から決まる意味を**生成的意味（または構成的意味）**と呼ぶ．

「生成的意味」の意味を理解するには「生成的でない意味」の例を見るのがいいが，その例はすでに前項で示してある．つまり，語構成法で作られた言語表現（これを**語構成法表現**と呼ぶ）の意味は生成的でない．語構成法表現の意味を使われた語構成法と要素的な語の意味だけから知る一般的な規則はない．そういう一般的規則があるとすれば，たとえば,「父親」の意味が「父である親」だと知った人は,「娘婿」を「娘である婿」と解釈して不可解に思うだろうし,「使用人」の意味が「使用される人」だと知った人は,「料理人」を「料理される人」だと解釈してしまうだろう．そういう事情は，程度の差こそあれ，前項で例にあげた語構成法表現のどれについても同様である．そこでは，同じ語構成法で作られた語でも意味的特徴は同じでないと述べたが，この言い方は実はかなり曖昧であり，より正確には，語構成法表現の意味は生成的でないとか，語構成法は生成的意味を生じないとか言うべきだったのである．これが語構成法表現本来の特徴なのであり，語構成法表現の意味は一つ一つ学ばなければ知ることができないとか，語構成法表現は慣用語としてしか使われないとかの他の特徴は，すべて語構成法表現の意味が非生成的であることの結果に過ぎない．

さて，文法に従って作られた言語表現（これを**文法表現**と呼ぶ）の意味は概して生成的である．そして，生成的意味を生ずる文法規則は心言語の算法の現れと考えなくてはならない．なぜなら，自然言語表現を意味に即して変形して行くときに現れる形態的規則が心言語の構造を近似していると私達は考えている．そうすると，生成的意味を生ずる文法規則に従って作られた言語表現は，変形するまでもなく意味に即しているのだから，その文法規則がそのまま心言語の算法の現れと考えられるのである．

ただし，文法表現は必ずしも生成的な意味だけを持つのではない．どんな言語表現でも，たとえば比喩（たとえ）や見立て（なぞらえ）によれば，非生成的な意味を持つことができる．「骨を折る」は「苦労や努力をする」ことを意味し,「手を汚す」は「悪いことをする」ことを意味し,「足を洗う」は「よくない仕事をやめて正業につく」ことを意味するの類である．こういう意味は，要素的語の意味だけからは知ることができない．しかし，こういう表現には生成的な意味が元々あったのだから，こういう表現を作る文法規則は心言語の構造の現れと考えることができる．

文法に従って作られたのに非生成的な意味を持つ言語表現の例は，こういう比喩的な表現をあげるまでもなく，いたるところに見られる．なぜなら，言語表現は一般に意味の不完全な表現であり，従って，その正確な意味を要素的な語の意味だけから知ることができない方が普通なのである．たとえば,「鳥は空を飛ぶ」と言うが，これは意味の完全な表現ではない．より完全な表現は「鳥はたいてい空を飛ぶ」だろう．しかしそれが分かるのは，ダチョウとかの飛ばない鳥もいるがそういう鳥は僅かだという知識があるからである．知識がなければ，この表現だけから正しい意味を知ることはできない．つまり，この表現の意味は生成的ではない．言語表現には必ず何か数量的な意味が含まれていて，国語では数量を表す語がたいてい省略されるから，国語表現の意味はたいてい非生成的だということになる．また例えば「政治家が好きな女」と言えば，政治家が女を好むとも，逆に女が政治家を好むともとれる（この例文は第 1.5.3.3 項でも使った）．もしもこの表現が生成的意味を生ずる規則に従って作られたのなら，意味は唯一通りになるはずである．だから，この表現は生成的意味を生ずる規則に従って作られたものではない．

しかし，だからといって,「鳥は空を飛ぶ」や「政治家が好きな女」のような表現を作る文法規則が心言語の代数構造を反映していないと考えるのは妥当ではない．こういう表現の意味をより正確に表すように変形して行けば，つまり，意味が生成的になるように変形して行けば，そこに現れる形態的規則が心言語の構造を反映しているというのが，やはり妥当な考えに思われる．そして，この考えに従うなら，仮に自然言語自身の意味論を行なうとしても（それは形式言語の意味論のよう

に厳密・客観的なものにはなり得ないが），それは生成的意味論として行なわなければならない．そういう意味論こそが，私たちを心言語の意味論へと導いてくれるのである（第 1.4 節参照）．

なお，いわゆる自然言語のモデル論的意味論も生成的（または構成的）意味論である．そしてこれを，生成変形文法論者の一部は「生成的意味論に過ぎぬ」と言って批判する．しかし，チョムスキーに倣って言語学を心理学の一部とみなすなら，こういう批判はまったくの的外れである．なぜなら，自然言語のモデル論的意味論は，然るべく昇華させるなら，どれも心言語という心理学的存在の意味論になり得るからである（第 1.5.4 項参照）．

2.3　限量語の正しい扱い

$ 次の三つの英文を比べてみよう．

John loves Mary　　　Every boy loves Mary　　　A boy loves Mary

「John」は固有名詞,「every boy」は「すべての少年」,「a boy」は「ある少年」という違いはあるが，これらの三つの文は，形態も意味もよく似ている．ところが，これらの文の意味を一階の述語論理式で表すと，

$$\mathit{love}(\mathrm{John}, \mathrm{Mary}) \qquad \forall x\big(\mathit{boy}(x) \Rightarrow \mathit{love}(x, \mathrm{Mary})\big) \qquad \exists x\big(\mathit{boy}(x) \wedge \mathit{love}(x, \mathrm{Mary})\big)$$

となって，もとの英文の間にあった形態と意味の類似性がまったく失われてしまう．これは一階述語言語が自然言語の意味を表すのに適さないことを示す端的な例として，言語学者の間でよく使われるものらしい [18]．モンタギューが彼の文法を考え出した動機もここにあったようである．実際，彼の主要論文に「The proper treatment of quantification in ordinary English」というものがある．論理記号 $\forall x$ と $\exists x$ は数量の範囲を限る働きを持つので**限量子** (quantifier) と呼ばれる．これによって「every」と「a」の意味を表そうというのが述語論理学の考え方である．その考え方がよくないからよりよい論理学を作り出そう，というのがモンタギューの問題意識だったのだろう．

ただしこの例の提示の仕方は，一階述語言語が自然言語の意味を表すのに適さないことを過度に強調しているので適切ではない．一階述語論理学の考え方では，用言を述語記号という名の算法とみなす（例 4.1.2 参照）．この例の場合,「(to be a) boy」が単項算法記号で,「(to) love」が二項算法記号である．これらの置き場所を英語式にそれぞれ引数 John または x の後ろに移せば（第 2.1 節参照），さっきの三つの述語論理式は

$$(\mathrm{John})\mathit{love}(\mathrm{Mary}) \qquad \forall x\big((x)\mathit{boy} \Rightarrow (x)\mathit{love}(\mathrm{Mary})\big) \qquad \exists x\big((x)\mathit{boy} \wedge (x)\mathit{love}(\mathrm{Mary})\big)$$

となる．これなら，少なくとも単語「John」「love(s)」「Mary」「boy」はもとの英文と同じ順番にならんでおり，その点では三つの英文の間の形態的類似性が保たれている．

それでもやはり，一階述語言語が自然言語の意味を表すのに適さないことは，認めざるを得ない．限量子だけでなく論理記号 $\Rightarrow, \wedge$ までも動員しなければ「すべて」と「ある」の違いが表せないのは，言葉についての私たちの直感から懸け離れているように思われる．私たちが日常の何気ない思考において上記の述語論理式のように考えているとは，とても思われない．数学の証明を書くときなどに述語論理的に考えることは確かにある．しかし，それは特殊な状況と考えるべきだろう．述語論理的に考えられるのが訓練を受けたごく少数の人でしかないことは，教育の場にあれば容易に気づくことである．また，自然言語には「すべて」「ある」以外にも「かなり」「ちょっと」のよう

[18] 第 1.5.5 項の文献 5, p.21 参照.

な数量の範囲を限る働きを持つ語（これを**限量語**と呼ぶ）が色々あるのに，述語論理学にはそういう語を表現する記号がない．述語論理学が数学の証明を形式化するための道具として発展してきたものだからだろう（第 1.2.4 項参照）．数学の証明には「かなり」「ちょっと」などの語は現れないから，そういう語を述語論理学において表現しようという動機付けも無かったと想像される．そうだとしたら，一階述語言語が自然言語の意味を表すのに適さないのは，むしろ当然なのである．

数理心理学の観点から見れば，以上のことは一階述語言語が心言語には相応しくないことを示すものであり，相応しくないことに何ら異論はない．限量をどう解釈するかが重要な問題だということにも異論はない．心言語の文法論と意味論は，自然言語の中の色々な限量語の意味を適切に表現するものでなければならない．つまり，限量語に関わる意味論がうまく行くように心言語や認識対象世界の代数構造を定めなければならない．

2.3.1　限量語の意味

§ それでは，心言語と認識対象世界をどう定めれば限量語の意味がうまく表されるだろうか．その答のヒントを得るために，国語の限量語にどういうものがあるかを観察してみる．そうするとまず，学校文法には限量語という概念のないことに気づく．限量語は，数詞・連体詞・形容詞・形容動詞・副詞・名詞などの中に分散している．例をあげよう．

数詞： 一・二・三・. . . ・十・百・千・万・. . . .　これらに人・匹・本・枚・. . . のような**助数詞**を付けた語も含む．ただし学校文法では，数詞は名詞とみなされる．

連体詞： あらゆる

形容詞： おびただしい・多い・数多い・少ない・数少ない

形容動詞語幹： 一杯・かなり・些少・少量・小量・甚大・多大・多量・大量・沢山・莫大・膨大・厖大・無数・僅か・まれ・微々

副詞： あまた・あらかた・幾分・一杯・大方・多く・数多く・かなり・少し・すべて・大概・大体・大抵・沢山・ちょっと・ちょっぴり・どっさり・ほとんど・ほぼ・僅か・常に

名詞： あまた・あらかた・幾分・いささか・一杯・大方・多く・数多く・かなり・少数・小数・少し・すべて・全部・多数・大概・大多数・大体・大抵・大部分・ちょっと・なにがしか・一握り・ほとんど・皆（みんな）

ただしこれは,「ATOK 辞書」から探し出したままのものだから，国語辞典の説明とは必ずしも一致しないし，適切な例と言えないものも含んでいる．たとえば，形容詞の項にあげてある「数多い」「数少ない」などは，学校文法では連語に入れられるべきものだろう．連語を許すなら，限量語はまだまだある．思いつくままに例をあげよう．

連語： どれも・どれか・だれも・だれか・いつも・いつか・どこも・どこか・幾つも・幾つか・幾らも・幾らか・何も・何か・何人も・何人か・一つも・少しも・少なくとも一つ・一つ残らず・少なからず・一二・二三・四五・. . . ・八九・数え切れない・数知れない・十個以上・百人足らず

ここにあげた例の中で注意すべきは，時間や場所に関する言葉である．たとえば，形容動詞語幹の項にあげた「まれ」，副詞の項にあげた「常に」，連語の項にあげた「いつも」「いつか」「どこも」「どこか」などがそれに当たる．これらの語は，何らかの事柄の起きている時間や場所の長短

や多少を表現するので，やはり限量語である．ただし，時に関する語でも「ときどき」「しばしば」は限量語とは考えられない．これらの語は，何らかの事柄の起きている時間の長短だけでなく，そういう時間の全時間における分布の様態をも表すからである．

次に，限量語の意味について考える．

限量語は何らかの数量 x の範囲の限界を表現する語である．数量の範囲には，たとえば

$$x \leq a \qquad x \geq a \qquad a \leq x \leq a'$$

などがある．ただし，a, a' は定数である．また，この例の $\leq$ や $\geq$ をそれぞれ $<$ や $>$ に置き換えて得られる範囲がある．もちろん，もっと複雑な範囲がいくらでも考えられる．そういう複雑な範囲も，限量語を色々に組み合わせれば表現できるだろうし，組み合わせて出来た語も限量語に違いない．だから私たちは，最も基本的な限量語（それを**素限量語**と呼ぶ）とは何かを考えなければならない．ただし，どういう語を素限量語とするかも，それらをどう分類するかも，唯一通りではない．色々な考え方があり得る．文法学者なら，たとえば「幾らか」「一つ残らず」のような連語は，複数の語を組み合わせたものであるという理由で素限量語の中には入れないかもしれない．しかし第 1.5 節で説明した通り，数理心理学者は言葉の形態ではなく意味に注目しなければならない．特に心言語の文法論や意味論をどう行なうかという観点から見ると，数量範囲の上記三例に合わせて，**上限語・下限語・両限語**の三種の限量語を素限量語とするのが妥当に思われる．これら三種の限量語について以下の三条で説明しよう．

2.3.1.1　上限語

‡ これは $x < a$ または $x \leq a$ なる範囲の上側の限界 a を示す語を指す．たとえば,「ピーターはレタスをすべて食べる」は「ピーターが食べないレタスは零枚以下である」ことを意味するだろう．だから「すべて」は，$x \leq 0$ なる範囲を表す上限語である．同様に,「ピーターはレタスを一枚も食べない」における「一枚も」も，$x \leq 0$ なる範囲を表す上限語である.「ピーターが食べるレタスは零枚以下である」ことを意味するからである．時間に関する語の中では，たとえば「いつも」が $x \leq 0$ なる範囲を表す上限語である.「ピーターは昼間はいつも遊ぶ」は「ピーターが遊ばない昼間の時間は零以下である」のようなことを意味するからである．

さっき例に挙げた限量語の中から上限語を抜き出せば次のようになる．

- あらゆる・すべて・全部・皆・一つも・少しも・幾らも・一つ残らず・常に・どれも・だれも・いつも・どこも・何も・百人足らず

ここで注目すべきことが二つある．一つは，これらの上限語のほとんどは $x \leq 0$ なる範囲を表す語だということである．$0 < a$ なる a に対して $x < a$ または $x \leq a$ なる範囲を表す上限語は，$x < 100$ を表す「百人足らず」以外にはない（離散的な数量の場合は $x < 1$ が $x \leq 0$ と同等のことがあるが）．次に注目すべきことは，これらの上限語のほとんどはその文に現れる用言が示す行為の主体や対象にならないものの数量の範囲を限る語だということである（そういう語を**逆限語**と呼ぶ）．たとえば「すべて」は,「ピーターがレタスを〜食べる」の「〜」に入れられれば，食べないレタスが零枚以下であることを示し,「ピーターがレタスを〜食べない」の「〜」に入れられれば，食べるレタスが零枚以下であることを示す（「すべて」ではなく「一枚も」などを使う方が普通だが）．また「一枚も」は,「ピーターがレタスを〜食べる」の「〜」には入れられないが,「ピーターがレタスを〜食べない」の「〜」に入れられると，食べるレタスが零枚以下であることを表す．例

外はやはり「百人足らず」である.「同志を百人足らず集めただけで反対運動を始める」における「百人足らず」は，集めた同志が百人より少ないことを示すから逆限語ではない.

なお,「ピーターはレタスをすべては食べない」における「すべては」を限量語と考えることはできない．この文では,「〜は〜ない」が「ピーターはレタスをすべて食べる」という文全体を否定する．そして,「ピーターはレタスをすべて食べる」における限量語「すべて」は，やはり，ピーターが食べないレタスの量が零枚以下であることを表す．従って,「ピーターはレタスをすべて食べる」を否定した「ピーターはレタスをすべては食べない」は,「ピーターが食べないレタスの量が零枚より多い」ことを表す.

2.3.1.2　下限語

‡ これは $x > a$ または $x \geq a$ なる範囲の下側の限界 a を示す語を指す．たとえば,「ピーターはレタスを沢山食べる」は「ピーターが食べるレタスは十枚より多い」のようなことを意味するだろう（「十枚」は，場合によって「二十枚」や「三十枚」だったりするかもしれないが）．だから「沢山」は，$x > 10$ とか $x > 20$ とかの範囲を表す下限語である．また,「ピーターはレタスを幾らか食べる」は「ピーターが食べるレタスは零枚より多い」を意味する．だから「幾らか」は，$x > 0$ なる範囲を表す下限語である．同様な理由で,「いつか」「どこか」は，それぞれ時・場所について $x > 0$ なる範囲を表す下限語である.「数え切れない」も $x \geq \infty$ なる範囲を表す下限語である．ただしこの無限大 ∞ は，微分積分学における無限大とは異なり，人間が特定の数として認識しない多数量を意味し，その厳密な定義には，第 3.32.1 項で説明する**量系**の概念が必要になる.

さっき例に挙げた限量語の中から下限語を抜き出せば次のようになる.

- どれか・だれか・いつか・どこか・幾つか・幾らか・何か・何人か・なにがしか・少なくとも一つ
- 幾つも・何人も・一杯・多く・多い・数多く・数多い・かなり・少なからず・沢山・多数・多大・多量・どっさり
- あまた・甚大・大量・莫大・膨大・厖大・おびただしい
- 数え切れない・数知れない・無数
- 十個以上

これらの下限語は，先ほどの上限語の例とは対照的に，その文に現れる用言が示す行為の主体や対象になるものの数量の範囲を限る（そういう語を**順限語**と呼ぶ）．たとえば,「ピーターはレタスを〜食べる」の「〜」に入れられた下限語は，ピーターが食べるレタスの量の下限を示す.「ピーターはレタスを〜食べない」の「〜」に入れられた下限語は，ピーターが食べないレタスの量の下限を示す.

なお,「ピーターはレタスを沢山は食べない」における「沢山は」を限量語と考えることができないのは,「ピーターはレタスをすべては食べない」における「すべては」を限量語と考えることができなかったのと同様である.

2.3.1.3　両限語

‡ これは $a < x < a'$ なる範囲またはこれの $<$ を $\leq$ に置き換えて得られる範囲の上下の限界 a, a' を示す語を指す．たとえば,「ピーターはレタスをほとんど食べる」は「ピーターが食べない

レタスは一枚か二枚である」のようなことを意味するだろう（「一枚か二枚」は，場合によって「一枚から三枚」だったりするかもしれないが）．つまり「ほとんど」は，$1 \leq x \leq 2$ とか $1 \leq x \leq 3$ のような範囲を表現する両限語である．$x \leq 2$ とか $x \leq 3$ のような範囲を表す上限語ではない．なぜなら,「ピーターはレタスをほとんど食べる」は，ピーターがレタスをすべて食べる可能性，つまり $x = 0$ なる可能性があることを意味しないからである．また,「ピーターはレタスを少し食べる」は「ピーターが食べるレタスは一二枚である」のようなことを意味するだろう（「一二枚」は，場合によって「二三枚」などだったりするかもしれないが）．だから「少し」も，$1 \leq x \leq 2$ とか $2 \leq x \leq 3$ のような範囲を表す両限語である．数詞もすべて両限語である．なぜなら，数詞は $x = a$ なる範囲を表現するが，これは $a \leq x \leq a$ なる範囲に等しいからである．

さっき例に挙げた限量語の中から数詞以外の両限語を抜き出せば次のようになる．これらの中には，たとえば「ほとんど」のように逆限語もあれば，たとえば「少し」のように順限語もある．

- あらかた・大方・大概・大体・大多数・大抵・大部分・ほとんど
- 幾分・少ない・数少ない・少数・小数・少量・小量・少し・ちょっと
- いささか・一握り・些少・ちょっぴり・微々・僅か・まれ
- 一二・二三・四五・. . . ・八九

課題 2.3.1 国語に下限語であって逆限語であるものはあるか.

限量語と紛らわしい語に注意しなければならない．岩波国語辞典（第五版）は,「図書館を三つも回って調べた」の「三つも回る」を「ピーターはレタスを一枚も食べない」の「一枚も食べない」と同類のものと説明する．限量語として同類という意味ではないようだが，甚だ不適切な説明だと思う.「図書館を三つも回って調べた」という文から私が理解するのは，話者が図書館を丁度三つ回り，かつ，回ったことに何かしらの感懐（自慢・呆れ・驚き・意外等）を持っているということである（「も」がその感懐を表している）．そして，どうしてそういう感懐が生まれたかと言えば，多分，普通の人は図書館一つで済ますからだろう.「普通の人の一つ」と比較して「話者の三つ」が多いから色々な感懐が生まれるのだろう．しかし，話者が回った図書館の数についてだけなら,「三つも回る」は「三つ回る」と同じ意味を持つ.「三つも」は，数量だけについては「三つ」と同じ意味である．つまり，回った図書館の数 x が $x < 3$ とかの範囲にあることを示すのではなく，あくまでも $x = 3$ であることを示す.「ピーターはレタスを一枚も食べない」の「一枚も」が $x < 1$ なる範囲を表すのとは事情が異なる．要するに,「一枚も食べない」の「一枚も」と「図書館を三つも回る」の「三つも」とは，まったく違う性格の言葉なのである．

「餅を一つしか食べなかった」の「一つしか」にも注意を要する．この文の話者は，やはり餅を丁度一つ食べ，かつ，そのことに何かしらの感懐（不満・未練等）を持っている．話者が食べた餅の個数についてだけなら,「一つしか食べなかった」は「一つ食べた」と同じ意味であり,「しか〜ない」は感懐を表すに過ぎない.「少ししか」「僅かしか」などについても同様である．

2.3.2　限量語の文法的役割

§ 前項では限量語自身の意味について考えた．ここでは，限量語と同じ文中の他語との関係（これを**文法的役割**と呼ぶ）について考える．そのためにまず，次の英文を観察してみよう．これは，Beatrix Potter 作の「The Tale of Peter Rabbit」の一節である．ただし，要所に下線を付す．

> First he ate some lettuces and some French beans; and then he ate some radishes; and then, feeling rather sick, he went to look for some parsley.

さて，この文の中には限量語「some」が四ヶ所使われている．この「some」は文法的にはどういう役割を果たしているだろうか．こう質問されると，恐らく 99.9... % の人は,「some」は「lettuces」「French beans」「radishes」「parsley」を修飾する，そして「some lettuces」などの名詞句を作っていると答えるのではないだろうか．しかし実は，これが大変な間違いの元なのである．そのわけを順を追って説明しよう．

まず，数理心理学では外国語ではなく国語を第一に観察しなければならない [19]．そこで，さっきの英文に代えて次の国語文を観察してみよう．これは堀辰雄の小説「麦藁帽子」の一節である．ただし，旧字体・旧仮名遣いは新しいものに改め，傍点も加えてある．

> 毎年の夏をその高原で暮らすその詩人は，そこで多くの少女たちとも知合いらしかった．私はその詩人に通りすがりにお時宜をしてゆく，幾たりかの少女のうちの一人が，いつか私の恋人になるであろうことを，ひそかに夢みた．

この中には「多くの」と「幾たりかの」という二つの限量語がある．これはどういう文法的役割を果たしているだろうか．さっきの英文のときと同様に，どちらも「少女」を修飾すると考える人が殆どだろう．

ひとまずこの考えを認めることにしよう．そうすると，私たち日本人は「多くの少女」や「幾たりかの少女」というものを実在として認識していることになるだろう．一般化して言えば，私たち日本人は，名詞 A に限量語「多くの」や「幾たりか」を付けた「多くの A」や「幾たりかの A」というものを実在として認識していることになる．

しかし，本当にそうだろうか．私は，そうではないと考える．なぜなら，私たちは「B は多くの A だ」というような文も「B は幾たりかの A だ」というな文も，殆ど作らないからである．私たちが「多くの A」や「幾たりかの A」を実在と認識しているなら，私たちはこういう文を頻繁に作るのではないだろうか．これと対照的に，私たちは「あどけない少女」や「美しい少女」というものは確かに実在として認識している．そしてそうだからこそ,「B はあどけない少女だ」とか「B は美しい少女だ」というような文を頻繁に作るのではないだろうか．

いまここに少女が百人いるとしよう．この中から「あどけない少女」だけを抜き出せと言われれば，何らかの基準に従って抜き出すことができる．そうして,「あどけない少女」という言葉に対応する集合が唯一つ出来る．しかし，たとえば「多くの少女」を抜き出せと言われたら，唯一つの集合を作って済ますことはできない.「多くの」がたとえば「80 人以上の」を意味するとすれば，$\sum_{n=80}^{100} {}_{100}C_n$ 通りの集合が「多くの少女」という言葉に対応する.「あどけない少女」と「多くの少女」という二つの言葉の意味するものは，集合論的に見れば，はっきりと違うのである [20]．

だから私は，限量語は名詞を修飾するものだとは考えない．

ではどう考えるのか．それを説明するために，さっきの英文の石井桃子による訳を引用しよう．ただし，原文はすべて平仮名だが，ここでは漢字や片仮名も使い，要所に傍点と下線を付す．

> それから，まず，レタスを何枚か食べ，それから，さやインゲンを食べ，それから，二十日大根を何本か食べました．その内，ちょっと胸がムカムカしてきましたので，パセリを捜しに行きました

[19] そのわけは第 1.5.2.3 条で説明した．

[20] 「あどけない少女」は少女の集合 G の巾集合 $\mathcal{P}G$ の元に対応し,「多くの少女」は $\mathcal{P}(\mathcal{P}G)$ の元に対応する．

この訳では，四つの「some」のうちの二つが「何枚か」「何本か」と訳出されている．ここで注目すべきことは，この二つの言葉が被修飾語と思われた「レタス」「二十日大根」と直接につながらずに,「を」を間に挟んでいることである．修飾語が被修飾語となぜ隣り合わないのだろうか.

訳がいけないのだと考える人がいるかもしれない.「何枚かのレタスを」「何本かの二十日大根を」と訳して「何枚か（の）」「何本か（の）」が「レタス」「二十日大根」と直接につながるようにすべきだったと．確かに,「何枚かのレタスを食べる」という言い方も国語では許される．堀辰雄の文章における「多くの少女」や「幾たりかの少女」もそういう言い方である.

しかし，これはいかにも西欧語あるいは漢文の翻訳調の言い方であり，石井桃子の「レタスを何枚か」「二十日大根を何本か」という言い方の方が国語本来の言い方に思われる．実際，堀辰雄の文体は西欧作家の影響を強く受けていると指摘されている [21]．さっきの堀辰雄の文章も全体が確かにバタくさい．それが悪いと言うのではない．ただ石井桃子は，読者すなわち子供を日本語らしい日本語に触れさせることに，堀辰雄以上に意を注いで翻訳したはずなのである．また，志賀直哉の文章を少し観察してみると，彼も少しバタくさい作家らしいが，それでもやはり「レタスを何枚か」式の語順の方がかなり多い．例をあげよう [22]．ただし，旧字体・旧仮名遣いは新しいものに改め，傍点を打つために「皆」は「みんな」と書き換える.

- 「西洋人が沢山来るから会話の稽古になるぜ」「昨日停車場へ行ったら馬が沢山来ていた」「（前略）箱根細工の玩具を沢山もっていた」「その頃は浪六の小説も総て読み上げたが（後略）」「そしてそれで美しい花を幾つも作り（後略）」
- 「子供が二三人（中略）それへ石を投げる」「そして嚔（くしゃみ）が二つ三つ続けざまに出た」「（前略）大工が三四人せっせと働いて居た」「（前略）風景画を二三枚かけて置くのだ」
- 「（前略）何人かが宿屋二軒に分れて陣取っていた」「二階の座敷三つにあるものは（後略）」

なお，これらの例では格助詞と限量語の順番を変えられるものがある．たとえば，第二群の「子供が二三人」「風景画を二三枚」は「子供二三人が」「風景画二三枚を」とも言い換えられる（ただしこの語順はややぎごちなく，当然，志賀直哉の文には殆ど見られない）．そして,「が」「を」をそれ以外の格助詞「に」「へ」「で」「と」などに変えた場合は，普通は後者の語順のみが許される [23]．つまり，第三群の例の「宿屋二軒に分れて」を「宿屋に二軒分れて」とは言わない.「座敷三つにある」を「座敷に三つある」とは言わない．言い換えると意味が変るか奇妙になる．このように限量語とのつづき方の面で，格助詞の「が」「を」とそれ以外の格助詞の間には違いがある [24]．と言うよりはむしろ,「が」「を」の方が特殊な格助詞だと考えられる.

しかしとにかく,「レタスを何枚か」「子供が二三人」のような言い方の方が「何枚かのレタスを」「二三人の子供が」のような言い方より日本語らしい言い方だということは確かなようである．すぐれた文芸家が二人そういう言い方を選んでいるし，私自身もこの二人と同じ国語感覚を持っている．だから，日本人は元来「レタスを何枚か」「子供が二三人」のように考えていると思われる．そして数理心理学では,「**人がどう考えるか**」こそが重要なのだ．なぜなら，それを探ることが心言語の構造を知ることにつながるからである.「何枚かのレタスを」「二三人の子供が」のような語法は，心言語の構造を反映するのではなく，思考の「道具」に過ぎないだろう（第 1.2.2 項参照）.

[21]新潮社刊「日本文学全集 31 堀辰雄集」の福永武彦による解説参照.
[22]岩波書店刊「志賀直哉全集」より.
[23]時に関する限量語「いつも」「いつか」などは例外である．また，連語の項にあげた限量語「どれも」「どれか」などは,「どれにも」「どれにか」のように格助詞を間に挟んで使うこともでき,「どこも」「何も」はこういう使い方しかできない.
[24]その他にも，たとえば副助詞とのつづき方の面で,「が」「を」は他の格助詞と異なっている．第 7.3.1.3 条参照.

さてそれでは,「レタスを何枚か」において「何枚か」が「レタス」を修飾していると言えるだろうか.「子供が二三人」において「二三人」が「子供」を修飾していると言えるだろうか．国語においては,「あどけない少女」のように修飾語は被修飾語の前につく，つまり主要部が後置されるのが原則だろう．私には,「を」や「が」を挟んだり主要部を前置して修飾していると言うのは，どうしても不自然に思われる．修飾しているのではなく「レタスを，何枚かを」「子供が，二三人が」という同格表現だと考える人がいるかもしれない．また,「何枚か」や「二三人」は「食べる」「投げる」に掛かる副詞だと言う人もいるかもしれない．しかしどちらの考えも，事態を一層錯綜させるだけで,「**心論理学の設計において限量語をどう扱うか**」という問題の解決には結びつかないように思われる．特に副詞的用法だと考えると，たとえば「子供二三人に飴をやる」という用法では,「飴をやる」に掛かるはずの副詞「二三人」が「子供に」を「子供」と「に」に分断していることになる．これは大変不自然な考え方だと言わざるを得ない.

限量語の文法的役割についての私の結論をそろそろ言おう．私は,「レタスを何枚か」における「何枚か」は「を」を修飾し「子供が二三人」における「二三人」は「が」を修飾していると見るのが自然ではないかと考える.「修飾している」ではなく「組みになっている」と言うべきかもしれない．そして,「子供二三人に飴をやる」「子供二三人と遊ぶ」などにおいても,「二三人」は「子供」を修飾しているのではなく,「に」「と」と組みになっているのだと考える.

一般化して言えば,「格助詞を後置詞とする後置詞句において格助詞と組みを成す」というのが限量語の文法的役割である．そして，なぜそう考えるかと言えば，先に例示したような日本語らしい日本語において限量語は，格助詞の前後に付いて格助詞と決して離れることはないが，格助詞以外の語とは離れることがあるからである.

読者は，これはとんでもない突飛な考え方で，とても受け入れられないと思うかもしれない．しかし，一見突飛な考え方でも，国語現象全体をうまく説明できるものなら受け入れなければならない（万物が引き合うというのも，当初は大変突飛な考えだったはずだが，私たちは受け入れてきた）．私はこの考えに基づいて第 5 章以降で，心論理学の設計図として格言語という形式言語上の論理学すなわち格論理学を提示するが，それは実際，限量語に関わる国語現象を大変うまく説明することができるのである．また，ここではもう説明しないが，こういう考え方は国語だけでなく外国語にも十分適用できるものと期待できる.「some」が「lettuces」「French beans」「radishes」「parsley」を修飾していると考えるのは間違いなのである（第 7.3.4.2 条参照）.

こういう考え方が国語の観察から得られたのはいい教訓である．もしも英語を観察していたら，特に日本人が英語を観察していたら，こういう考えにはなかなか辿り着けないだろう．私たちは，いたずらに外国語を観察せず，日本語を母語とする幸運をまず生かすようにすべきなのだ．ただし，日本語を母語とするための不運を自覚することも重要である．国語では限量語は省略することが多いから，国語だけを観察していたら限量語の重要性に気づかなかったかもしれない.

終わりに，以上の考察に関連する課題を三つ出そう．まず，言語の研究では特定の品詞とか特定の意味の語をすべて辞書から抜き出し分類することが必要になる．それを個々の研究者が人力で行なうのは大変なことである．しかし,「ATOK 辞書」や CD 国語辞典の検索機能も，こういう用途には十分でない．そこで,

課題 2.3.2 国語研究のために十分な検索機能をもった CD 国語辞典を作れ.

「何枚かのレタスを」のような翻訳調の言い方も，いずれ国語の正当な表現として受け入れられて行くだろう．これまでも，古くは中国語式の，最近では西洋語式の表現が国語の中に入り込んでいる．たとえば,「どちらの可能性がより高いか」「B が A によって C される」はどちらも西洋語

の翻訳口調であると言う [25]．それでは,

課題 2.3.3 外国語式の表現法を取り入れることで国語の「文法」は変化してきていると考えるべきだろうか．それとも，語彙が増えただけと考えるべきだろうか．

2.4　重ねて使われない語

$ 国語には重ねて使われない語が色々ある．典型的な例は格助詞である．たとえば,「ピーターがフロプシーがレタスを食べる」のように格助詞「が」を重ねて使うことは，崩れた会話ではあり得ても，正当な国語では許されない．つまりこれは，より正当な「ピーターがレタスを食べ，フロプシーもレタスを食べる」のような表現が語の節約のためにか崩されたものであろう．もちろん，何をもって「崩れた」と言い，何をもって「正当な」と言うかは曖昧である．しかし私たちは，日本語を母語とする者の直感で,「が」を重ねることを「崩れた」と感じ,「が」を重ねない表現を「正当」と感ずる．そしてこの直感は，私たちの心言語の構造が「が」を重ねることと相容れず「が」を重ねないことに合致することによるはずである．だから，心言語の構造を探ろうとしている今,この直感を無視するわけには行かない．

なお,「これからが大変だ」とか「これまでを反省しよう」のように異種の格助詞の「から」「が」「まで」「を」などを重ねて使うことがある [26]．そしてこれからは，崩れたという感じをあまり受けない．しかしこれも，崩れによる重ねである．なぜなら，これらの表現の意味を正確に表そうと思えば，たとえば「これからの仕事が大変だ」とか「これまでの行ないを反省しよう」のように語を補わなければならないだろう．さらに,「の」は前述のように省略表現だから [27]，たとえば「これからしなければならない仕事が大変だ」のように語を補わなければ意味が正確にならない．つまり,「しなければならない仕事」が省略されていたから「が」と「から」が重ねて使われたように見えただけなのである．

この機会に，重要なことだから，前に述べたことを繰り返そう．まず仮説 3 によれば，日本語を意味に即した形態に変形して行くときに現れる形態的規則が心言語の構造を近似している．次に,言語表現は一般に意味の不完全な表現である．だから数理心理学においては，言語表現そのものの形態を論ずることに大した意義はない．いまの例に即せば，語が省略されていることを無視して「から」と「が」は重ねられるなどと指摘しても何の意義もないのである．

なお，たとえば「来週水曜日にゼミを行なう」は，意味に即せば,「来週に水曜日にゼミを行なう」のように格助詞の「に」を重ねた表現に変形することもできる．このような例を挙げて,「日本語を意味に即した形態に変形して行くときに現れる形態的規則が心言語の構造を近似しているのなら，心言語では時を表す格助詞『に』に当たるものが重ねて使われ得る」と考える読者もいるであろう．しかし,「来週水曜日にゼミを行なう」や「来週に水曜日にゼミを行なう」よりは,「に」を重ねずに「の」を使った「来週の水曜日にゼミを行なう」の方が正当な国語表現であり，これを省略表現「の」の意味に即して変形したものの方が，心言語の構造をよりよく近似していると考えられる．この意味で，時を表す「に」を重ねて使うのは，やはり崩れた表現である．

場所を表す格助詞の「に」を重ねて使うのも，やはり崩れた表現である．その例を示そう．岩波国語辞典によれば，古文には「山崎のあなたに水無瀬（みなせ）といふ所に宮ありけり」のように「に」を重ねて使う例があり，現代語でも「入って左手に，一段高くなった所に畳が敷いてある」

[25]「岩波国語辞典」による．
[26] この用法の「まで」は本書では格助詞とみなす．端書き参照．
[27] そのことは第 1.5.3.3 条で説明した．

のような例がある．しかしこれは,「入って左手に畳が敷いてある」と言いかけてから「入って左手に」を補足するために「一段高くなった所に」を挿入した表現と解される．つまりこの表現は,「入って左手に畳が敷いてある」「一段高くなった所に畳が敷いてある」という二つの正当な表現を複合するために崩したものと解されるのである．

時や場所を表す異種の格助詞を重ねて使っても崩れた感じを与えない場合がある.「朝から晩まで働く」のように「から」と「まで」を重ねるのがその例である．そうすると，心言語のこれらに相当する語は重ねて使われると考えるべきであろうか．実はこの問に答えるには，仮説 3 だけでは不足で，人間の認識の対象世界の幾何構造についての仮説が必要になる．たとえば，世界の中の時間というものが一次元のユークリッド空間であるとする．そして，このユークリッド空間の二点 a, b の定める閉区間を C で表せば,「a から b まで」というのは「C に」と同じ意味となる．つまり「から」「まで」は，時・場所についての本質的な格助詞ではなく，本質的な格助詞「に」の代用的な格助詞である．だから,「から」と「まで」が重ねて使われることを心言語の文法論に反映させる必要はない．本質的な格助詞はやはり重ねられないと考えていいのである．

さて，格助詞の他にも色々重ねられない語の例がある．たとえば，過去または確認の意味を表す助動詞の「た」も重ねられない.「ピーターがレタスを食べたたたたた」というような言い方は，どもりでもなければ絶対しない．限量語も重ねられない.「レタスをみんな，ほとんど，少し，僅か食べた」などと言うことはない．程度を表す副詞も重ねられない.「とても，ちょっと，かなり楽しい」などと言うことはない（「とてもとても」のように同じ語を重ねて強調するのは例外である）．

いま例に挙げたような言語表現を耳にすれば，私たちはそれを奇妙だとか意味不明だとか感ずる．それは，これらの表現が心言語の構造と相容れないものだからに違いない．だから私たちは，これらの語が重ねられない理由を心言語の文法論で説明しなければならない．

そう考えると，従来の論理学が数理心理学に必ずしも相応しくないことが直ぐに分かるだろう．たとえば，文 X に過去演算子 H や未来演算子 F を適用した文 HX や FX で時制を表す論理学がある（モンタギューもこれを用いた）．しかしそれでは，HHHHHX のような文が出来てしまう．これは「ピーターがレタスを食べたたたたた」と言うようなものである．このことだけでも，この種の論理学は根本的に間違っていると言わざるを得ない．

さてそれでは，格助詞や「た」や限量語や程度の副詞などが重ねて使われない理由は何だろうか．それぞれ別の理由からだろうか．それとも同じ理由からだろうか．これも心論理学の設計の根幹に関わる重大な問に違いない [28]．

2.5　実在とは何か

＄ 第 1.4.1 項で，心言語の代数構造を問うためには，それに先立って「人間にとっての認識の対象世界とは如何なるものか」という基本問題 4 について考えなければならないと述べた．認識の対象世界とは人間が認識の対象とするもの事から成る世界であり，もの事とはもの（物・者）と事を指している．そして，事とは事柄や事態あるいは現象であり，ものとは人間にとっての**実在**を，つまり，実在すると人間が認識するものを指している．人間は「実在」に関わる「事」について思考する．

ただし，人間にとっての実在は，個々の犬とか個々の猫のような具体的なものばかりではなく，**抽象化**という操作で得られた概念をも含んでいる．たとえば,「ベス」という特定の犬,「チャム」という特定の猫等から，人間は色々な抽象概念を次々に作ることができる．たとえば，今の文に既に

[28] この問への私自身の答は第 5 章以降で説明する．

「犬」「猫」という抽象概念が現れている．その他にも「ビーグル犬」「シャム猫」「ペット」「盲導犬」「哺乳類」「生物」などの抽象概念が，それこそ無数に作られる．そして，これらの概念を人間は実在と感じている．

だから，心言語の構造を問うためには,「実在とは何か」「抽象とは何か」「事とは何か」という問を避けては通れない．これらの問は，第 1.4.2 項で基本問題 4 を敷衍して述べた「数理心理学では認識対象世界の範囲を如何に設定すべきか」という問の核心を成す問だと言ってもいい．

この節では，実在とは何かという問についての私の考え，つまり**実在論**を説明しよう [29]．

2.5.1　数学的実在論へ

§ 先ず，実在とは何かという問は，自然言語だけで論じられるような問題ではない．自然言語だけに頼って論を進めるなら，いずれ無定義用語の山に埋もれるか，際限なく堂堂巡りをすることになる．先ずこのことを，手もとにある二種類の辞典を引き合いに出して説明しよう．

実在とは何かを言葉で説明するためには,「概念」とは何かを定義または説明しなくてはならないだろう．そこで二つの辞典でこれについて調べてみると，次のような説明が見つかる．

- 『同類のもののそれぞれについての表象から共通部分をぬき出して得た表象』
- 『判断において結合される表象を，主観における表象作用から切り離して把握するとき，その内容を概念という』

しかし，これだけでは「概念」の定義とは言い難い（解りにくい定義だということはさておいても）．なぜなら,「同類の」「もの」「表象」「共通部分」「抜き出して得る」「判断」「結合」「主観」「作用」「切り離す」「把握」「内容」などの言葉の定義が無いからである．定義を知るためにさらに辞典で調べたとしよう．たとえば，二つの説明に共通の「表象」という言葉について辞典の一つで調べると（「表象」以外に共通の言葉が無いのは驚きだ），表象とは『現在の瞬間に知覚してはいないもの事や現象について，心に描く像』だという心理学的な説明をしている．そしてここには,「知覚」「事」「もの」「現象」「心」「描く」「像」などの未定義用語が現れている．重大なのは「心」「もの」という語が現れていることである．私たちは,「心とは何か」という問題を考えようとしていて，そのために「ものとは何か」「概念とは何か」を考えている．ところが，辞典の説明をたどって行くと「心」「もの」という語に突き当たってしまう．これはまさに堂堂巡りである．

それでは，どうしたらいいのか．答は唯一つ，数学の経験に学ぶことである．数学でも，何かを定義できないということはしばしば起きる．たとえば，ユークリッド幾何学では「点とは何か」「直線とは何か」「点が直線の上にあるとは如何なることか」等を定義できない．そこでどうするかと言えば，定義せずに，点や直線の間の関係について成り立つべき事柄を公理（または公準）として認め，その公理だけを出発点として論を進める．常識的には「点」「直線」と考えられないようなものもその公理をみたすかもしれない．つまり「点」「直線」に常識はずれの例外が出て来る．しかし，そうであっても構わない．例外を含めて論じてしまえばいい．こういう**公理論**は，数学の世界では広く行なわれ成功している．

こういうわけで，実在論は数学で行なわなければならないと考える．ただし，数学でとは言っても，公理的集合論をもって実在論に代えることもできない．集合論は「数学における実在論」だけれども,「数理心理学における実在論」には成り得ない．なぜならたとえば，集合論に矛盾をきたすような概念であっても，私達には実在と感ぜられるからである．

---

[29] 哲学における「実在論」と混同しないように．

私自身の数学的実在論は，第 5 章以降の心言語の文法論や意味論の中にある．ただしそこでは，「実在とは何か」についての公理を掲げるのではない．また，実在論を単独で行なうのでもない．実在論は,「抽象とは何か」「事とは何か」についての論と共に，心言語の文法論や意味論に包摂されるべきものだと考える．この節の説明はその前座の，しかも非数学的で曖昧な説明に過ぎない．

2.5.2　モンタギューの実在論の難点

§ 数学的実在論は，すでに何人もの人が行なっていると想像する．たとえば，モンタギュー意味論の背後にも数学的実在論がある．しかしこれは，数理心理学に相応しいものではない．その理由を説明しよう．

モンタギューは次のような考え方に依っているように見える．

人が抽象概念を作るときには，ある実在の集合 S_0 の部分集合 X を取り出す．たとえば，すべての「生物」の集合から，ある特徴をそなえた生物だけを取り出して集合 A を作り，A に属すものを「蟻」と呼んだりする．同様に,「豚」「カラス」等に相当する部分集合 B, C 等を取り出す．こうやってどんな部分集合も取り出し得るから，$S_1 = \mathcal{P}S_0$ の元も実在の中に含めなくてはならない．さらに，S_1 のある部分集合を取り出してその元を「哺乳類」と呼んだりする．だから，$S_2 = \mathcal{P}S_1$ の元も実在の中に含めなくてはならない．こういうことは際限なく続くから，結局 $S_n = \mathcal{P}S_{n-1}$ として得られる集合族 S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ の和 $\bigcup_{n\geq 0} S_n$ の元はすべて実在の中に含めなくてはならない．それだけではなく，たとえば $\mathcal{P}(S_1 \cup S_0)$ のような集合の元も実在の中に含めなくてはならない．

こういう考え方は，数学者にとっては当然の考え方であっても，数理心理学には相応しくないと私は考える．そう考える理由は色々あるが，ここでは素朴な理由を二つ挙げよう．

先ず，もしも人間にとっての実在の集合が $\bigcup_{n\geq 0} S_n$ のようなものを含んでいるとしたら，人間は S_n の添数 n に対応する無数の型（＝抽象度）を厳密に区別していることになるだろう．しかし私には，思考機械・人間が，意識的にせよ無意識的にせよ，そういう細かな区別をしているとはとても思われない．

第二の理由をさっきの例に即して説明すれば次のようになる．たとえば「哺乳類」が「脊椎を持ち雌が乳で子を育てる生物」を意味するとしよう．そうすると，人間が「哺乳類」という概念を得る過程というものは,「脊椎を持つ生物（＝脊椎動物）」の集合から「雌が乳で子を育てるもの」から成る部分集合を取り出す過程ではなく,「生物」の集合から「脊椎を持ち雌が乳で子を育てるもの」から成る部分集合を取り出す過程だと考える．言い換えれば，人間は「哺乳類＝脊椎を持つ生物の中で雌が乳で子を育てるもの」と考えるのではなくて,「哺乳類＝生物の中で脊椎を持ちかつ雌が乳で子を育てるもの」と考えているように思うのである．さらに言い換えれば，S_1 の元「脊椎動物」の部分集合としてではなく，S_0 すなわち「生物」の部分集合として「哺乳類」という概念を得ているように思うのである．念のために言えば，私は動物分類学者が「哺乳類」をどう定義するかを説明しているのではなく，人間の考え方の傾向をたとえ話で説明しているのである．

その他もろもろの理由で，私はモンタギューの意味論を数理心理学の目的のために採用することはできない．しかし，それはむしろ当然だろう．なぜなら，モンタギューの目的は数理心理学ではなかったのだから．彼の目的は自然言語の意味解析であって，彼が使った形式言語はそのための数学的「道具」に過ぎない．道具を使うなら，性能の一番いい道具を使うのが当然である．彼の使った形式言語は，一番性能の良さそうな道具として選び取られたのだろう．ところが，数理心理学での形式言語は，記銘機械・人間を抽象して得られた心言語という形式言語でなければならず，性能の善し悪しを考える余地はない．標語的な言い方をするなら，モンタギューの形式言語は思考機

械・人間を観察する側の道具なのに対し，数理心理学における形式言語は，観察される記銘機械・人間そのものなのだ．

2.5.3　基本概念の可変性と上位下位関係

§ 集合 $\bigcup_{n\geq 0} S_n$ の元を実在の中に含めるという，数理心理学には相応しくない考え方をもう少し続けることにしよう．そうすると，$S_1, S_2, \ldots$ の元はすべて S_0 から作られるのだから，S_0 の元を**基本概念**と呼び $S_1, S_2, \ldots$ の元は**派生概念**と呼ぶのが適切だろう．

しかし，人の認識の対象世界そのものも，その中のどの概念が基本でどの概念が派生なのかも，絶対的に決まっているのではなく，人の関心の有り様によって変わるものなのだ．たとえば，身の回りにいるペットについて考えているときには,「ベス」という名の一匹の犬,「チャム」という名の一匹の猫,「太郎」という名の一羽の鳥等が基本概念であり,「哺乳類」「鳥類」などの概念は派生概念だろう．しかし，生物進化の系統図について考えているときには,「哺乳類」「鳥類」「昆虫類」などが基本概念であり,「脊椎動物」「節足動物」などが派生概念かもしれない．また，場合によっては,「ベス」「鳥類」「脊椎動物」のように抽象化の段階が異なる概念が基本概念のこともあり得るだろう．この場合には，基本概念同士の間に,「ベスは脊椎動物に属す」「鳥類は脊椎動物に属す」というような基本概念同士の上位下位関係がある．

だから，S_0 は人間の関心の範囲に応じて変化すると考えなくてはならないし，S_0 は単なる集合ではなく，上位下位という関係が定まっている集合だと考えなくてはならない．ただし，S_0 が変化すると言っても，人間自身がこれを変化させると言うのではない．変化するのは記銘機械・人間すなわち心言語という形式言語の素元系であり，その変化が S_0 の変化と同じ意味を持つように，心言語の文法論と意味論を行なわなければならない．

そこで，S_0 が時によって変化するとしよう．そうすると人間は，$\mathcal{P}S_0 \cup S_0$ すなわち $S_1 \cup S_0$ について考えることができさえすれば，$\bigcup_{n\geq 0} S_n$ についても $\mathcal{P}(S_1 \cup S_0)$ についても考えることができる（問題 2.5.1 参照）．つまり，1，0 というたった二つの型（＝抽象度）を区別することができれば，如何様にも複雑な型の概念について考えることができるのである．

以上，実在とは何かということについて私の考えの一部を説明してきたが，日常言語での説明はこの辺までが限度である．後は，第 5 章以降の数学的説明を読んでほしい．

問題 2.5.1 集合 X に対して $X_0 = X$, $X_{n+1} = \mathcal{P}X_n \cup X_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ と定義すると $\mathcal{P}^n X \subseteq X_n$ が成り立つことを示せ．

2.6　抽象化とは何か

$ 思考機械・人間は，**抽象化**という操作によって色々な概念を作る．ここでは，これを心言語の文法論や意味論でどう説明したらいいかについて，私の考えを説明しよう．ただし，これも日常言語による曖昧な説明に過ぎない．厳密な数学的な説明は，やはり第 5 章以降にある．ただし第 4 章で示すように，抽象化を説明する論理学は，心言語に限らない広範な形式言語を基にして構築することもできる．

2.6.1　抽象化と変数入り文

§ 抽象化とは，たとえば，あらゆる「施設」の中から「料金を取って人を泊める施設」を取り出して「旅館」という概念を得たり,「大勢の患者を収容して診察・治療を行なう施設」を取り出して「病院」という概念を得たりすることを指す．これを少し数学的に言い直せば，すべての「施設」の集合 S_0 の中から「料金を取って人を泊める施設」をすべて取り出して部分集合を作ったり,「大勢の患者を収容して診察・治療を行なう施設」をすべて取り出して部分集合を作ったりすることが抽象化だということになる．

つまり，抽象化とは $S_1 = \mathcal{P}S_0$ の元を取り出す操作である．ただし，取り出すと言っても，人間自身が集合 S_0 や S_1 を操作すると言うのではない．記銘機械・人間に可能なのは心言語上の算法という操作だけだから，その算法が S_1 の抽象操作と同じ意味を持つように，心言語の文法論と意味論を行なわなくてはならない．

そのために，具体的にはどう考えて行なったらいいのか．それは第 1.5.3.4 条で説明してある．つまり，言語表現を意味に即して書き直して行けば心言語の構造が分かってくると考えられる．しかし，意味に即して書き直すと言っても，書き直し方は色々あり得る．たとえば,「料金を取って人を泊める施設」をどう書き直すのが正解かは，そう簡単に判断できることではない．試行錯誤を重ねてやっと分かってくることなのだ．その試行錯誤の過程を説明するのは，教育的にはとても有意義なことだと思う．しかし，それは大変な労力を要する作業なので，取り敢えずは委細を省略し正解だけを示そう．しかし読者は，与えられた正解を理解するだけで満足せず，なぜこれ以外に正解が無いかを，時間をかけて自分の頭で是非考えてみてほしい．

正解を示そう．まず,「料金を取って人を泊める施設」を「施設の所有者が人から料金を取って施設に人を泊める，その施設」と書き直す．この書き直しの要点は，コンマ以前の「施設の所有者が人から料金を取って施設に人を泊める」が主語・述語等を全部備えた文になっているということである．次に，この文の中の「施設」を変数 x に変えて,「x の所有者が人から料金を取って x に人を泊める，その x」なるなる表現を作る．そうすると，この表現には「x の所有者が人から料金を取って x に人を泊める」なる**変数入り文**が含まれる．これはもう国語本来の文ではなく，心言語の文であるとみなさなければならない．しかし，もしも x のところに施設の固有名詞を何か入れたら国語の文が出来て，その文は真であったり偽であったりする．そして，真の文が出来れば，その名詞の意味するものは旅館であり，逆に，偽の文が出来れば，その名詞の意味するものは旅館ではない．たとえば，x に「帝国ホテル」を入れれば真の文が出来るから「帝国ホテル」は「旅館」であるが,「皇居」を入れれば偽の文が出来るから「皇居」は「旅館」ではない．だから，変数入り文「x の所有者が人から料金を取って x に人を泊める」は名詞に真偽値を対応させる関数とみなせて，x に代入されたときの値が真となるのが「旅館」で，偽となるのが「非旅館」だということになる．これを少し数学的に言い直せば次のようになる．この変数入り文を $F(x)$ で表し，真と偽をそれぞれ $1, 0$ で表せば，$F(x)$ は施設の集合から $\mathbb{T}$ $(=\{0,1\})$ への関数とみなせて，集合

$$\{x \mid F(x) = 1\}$$

が旅館の集合だということになる．こういう集合を $F(x)\,\lambda x$ で表す．これはすなわち,「x の所有者が人から料金を取って x に人を泊める，その x」から成る集合であり，λx は「その x」に相当する記号である．

以上のことから，抽象化とは変数入り文 $F(x)$ から集合 $F(x)\,\lambda x$ を作る操作だと考えることができる．ただし，$F(x)$ は心言語の文であるのに対し，集合 $F(x)\,\lambda x$ は心言語の認識対象世界の元である．そして，心言語として抽象された記銘機械・人間に可能なのは，心言語文 $F(x)$ を心言語の何

らかの元に変換することだけである．そこで，第 5 章以降では，$F(x)$ を $F(x)\,\Omega x$ なる心言語の元に変換する算法を心言語の中に定義し，意味写像によって $F(x)\,\Omega x$ が $F(x)\,\lambda x$ に対応するように心言語の意味論を作る（第 5.3.4 項参照）．

2.6.2　概念と命名

§ さっき，変数入り文 $F(x)$ の x のところには固有名詞を入れると考えた．ここに抽象名詞を入れることは考えなくていいのだろうか．たとえば，ここに「病院」を入れていいだろうか．これはつまり,「x の所有者が人から料金を取って x に人を泊める」という関数の定義域をどう設定すべきかという疑問である．数学的に言えば，心言語という型付代数系において変数 x の型をどう設定するかという問題になる．あるいは，x に S_0 の元だけでなく $\mathcal{P}S_0$ の元を代入できるとすべきか，とも言いかえられる．あるいは，基本概念だけでなく派生概念も代入できるとすべきかと言ってもいい（前項参照）．これも心言語の文法論の根幹に関わる重要な問題である．

x に「病院」を代入したものは国語文としてはあり得るのだから，心言語においても，x に $\mathcal{P}S_0$ の元を代入できるとすべきようにも思われる．しかし実は，x に代入できるのは S_0 の元だけであると規定して構わない．なぜなら，基本概念の範囲は変化し得るからである（前項参照）．派生概念は，これに命名するしないによらずに存在するが，命名した途端に基本概念に変わって，基本概念の集合 S_0 が大きくなると考えればいい．たとえば,「大勢の患者を収容して診察・治療を行なう施設」という派生概念は，これに「病院」と命名した途端に基本概念になると考えるのだ．そうすれば，x に「病院」を代入して出来る「料金を取って人を泊める病院」という派生概念も，S_0 の部分集合を取り出したものとみなせる．また，もしも「大勢の患者を収容して診察・治療を行なう施設」という派生概念に「病院」とも何とも名前を付けない場合，これを x に代入すれば「料金を取って人を泊め，かつ，大勢の患者を収容して診察・治療を行なう施設」という派生概念が出来るが，これはもちろん，S_0 の部分集合を取り出したものに他ならない．

なお今の説明は，国語表現を題材に使っていても，本当は心言語やその認識対象世界についての説明である．**命名**ということも，人が外界のもの事に国語の語を割り当てることを意味するのではなく，心言語の素元系における何らかの変化を指している．

2.7　格論理学の要点

$ 以上，心論理学の設計のために私の行なった国語観察と，それから得られた格論理学という設計図の一部を説明してきた．しかし，日常言語による説明はもう限界なので，格言語の文法論と意味論の要点説明を以てこの章を結ぶことにする．後は，第 3 章・第 4 章で数学的・論理学的の予備知識を得てから，第 5 章以降の格論理学の説明を読んでほしい．

2.7.1　文法論の要点

§ 一階述語言語の文法では，

$$\text{ソクラテスは人だ．人は皆死ぬ．故にソクラテスは死ぬ．} \tag{2.7.1}$$

という文章を矢式では

$$H(s), \forall x\big(H(x) \Rightarrow M(x)\big) \to M(s)$$

と表すだろう（「故に」と言っているので，本当は，矢式ではなく推論図にしないといけないが）．ただし，s が「ソクラテス」に対応する定項で，H(x) と M(x) とがそれぞれ「x は人だ」と「x は死ぬ」とに対応する述語である [30]．これに対し格言語の文法では，同じ文章が

$$s\pi(h\triangle), h(\pi\forall)m \to s\pi m \tag{2.7.2}$$

なる矢式で表される．ただし，s と h とは「ソクラテス」と「人」とに対応する**体元**で，m は「死ぬ」に対応する**用元**である [31]．また，π は係り助詞「は」や格助詞「が」に対応し，△ は助動詞「だ」や連語「である」に対応し，∀ は「皆」や「すべて」に対応し，これらは格言語の算法記号やその一部を成す．たとえば π は，単独でも算法記号であるが，∀ と組みになっても算法記号 π∀ を成す．∀ は格言語の**限量記号**の一つである．

なお，いまもしたし今後もあちこちで，心言語の元が自然言語表現に対応するという言い方をするが，その意味には注意を要する．これまでに説明した通り数理心理学者は，論理学者や言語学者のように「(2.7.2) が (2.7.1) の意味を表す」と考えるのではなく,「(2.7.1) を思い浮かべた日本人の脳には (2.7.2) に当たる生理的実体が出来ている」「脳にそういう実体の出来ることが即ち (2.7.1) を思い浮かべることである」「そういう実体が (2.7.1) のような言葉となって表出する」というように考えるのである（仮説 2 参照）．

さらに例を挙げれば,「ソクラテスがペンで字を書く」は格言語の文法では

$$s\pi(p\delta(l\omega w))$$

と表される．ただし，p と l とは「ペン」と「字」とに対応する体元で，w は「書く」に対応する用元である．また，δ と ω とは格助詞「で」と「を」とに対応し，π と同様，格言語の算法記号であると共に限量記号と組みになって別の算法記号を成す．これら同種の算法記号 π, δ, ω 等を「格助詞」に因んで**格**と呼び（π は特に**主格**と呼ぶ），それが「格論理学」という名の由来である．

国語では「ソクラテスがペンで字を書く」を「ペンでソクラテスが字を書く」「字をソクラテスがペンで書く」等のように語順を変えて言うことができるが，これに対応して格言語の文法では，

$$p\delta\bigl(s\pi(l\omega w)\bigr) \qquad l\omega\bigl(s\pi(p\delta w)\bigr)$$

等の表現も許される仕組みを備えている．

もう一つ例を挙げれば,「ソクラテスがペンで書くもの」は，格言語では

$$\Bigl(s\pi\bigl(p\delta(x\omega w)\bigr)\Bigr)\Omega x$$

と表される．x は日本語の言葉とは対応しない**変数**である．Ωx は「ソクラテスがペンで書くもの」における「もの」に対応し [32]，格言語の算法記号である．

これらの例から察せられると思うが，格言語の文法は，記号の種類や並び方が日本語そのままになるよう定めてある．格言語の文法はまた，日本語に見られる「ほとんど」「すこし」などの多様な限量語に対応するために，限量記号を ∀ や ∃ 以外にも多数備えている．要するに，格言語の文法は日本語に密着したものなのである．

格言語の文法が日本語に密着したものなら，その他の多様な自然言語との関係は逆に希薄ではないか，と思う読者がいるかもしれない．しかしそうではない．そのことをここでは微分積分学になぞらえて説明しよう（さらなる説明が第 7 章にある）．

[30]記号 H と M はそれぞれ「human」と「mortal」の頭文字である.「mortal」には適切な訳語が無い.
[31]「体元」「用元」という名は国文法における「体言」「用言」に因む.
[32]英語になぞらえれば，Ωx と x とは関係代名詞とその先行代名詞とに相当する.

微分積分学では，一変数関数を $\sin x$ や a^x 等の様々な記法で表し，二変数関数を $x+y$ や $f(x,y)$ 等の様々な記法で表す．それと同様に，代数系において単項算法 α を x に施したものは αx や $x\alpha$ や x^α 等の様々な記法で表せるし，二項算法 β を x,y に施したものは $\beta(x,y)$ や $x\beta y$ や $(x,y)\beta$ 等の様々な記法で表せる．そして，異なる記法を使えば，実質は等しい代数系でも見かけは異なる．より一般的に言えば，互いに同形な代数系は，見かけが異なっても実質的には同じものである．たとえば，実数の全体 $\mathbb{R}$ に加法 $+$ を与えて代数系としたものと，正の実数の全体 $\mathbb{R}_+$ に乗法 $\times$ を与えて代数系としたものとは，指数関数 e^x によって同形であるから，見かけは異なっても実質は等しい代数系である．格言語という代数系にもこの説明が当てはまる．そして，**格言語のこういう見かけの多様性が自然言語の多様性に反映している**のだと私は考える．ただし，自然言語の多様性は格言語の見かけの多様性だけで説明できるものではない．数理心理学者は，論理学者や言語学者とは異なり，格言語に当たる生理的実体が脳に存在してそれが言葉として表出するのだと考えるが，格言語が言葉として表出する際には，記号の喪失等の格言語の変形が起きる．たとえば英語では（「英国人の心言語からの表出では」と言うのが正確），主格 π は常に喪失する．**そういう変形の多様性も自然言語の多様性に反映している**のだと私は考える．この太字部二つを実証するには世界中の言語を調べなければならないが，以上のような理由で，格言語の文法は日本語以外の自然言語にも密着していると私は信じる．

2.7.2　意味論の要点

§ 以上のような次第で，たとえば「ピーターがレタスを畑で食べる」という文における心言語の算法記号の現れ名残は，格助詞の「が」「を」「で」であると考える．それでは，これに対応して格言語の意味論をどう行なうべきか．これについての私の考えの要点を説明しよう．

数学では，たとえば 3 変数関数 f の値は $f(x,y,z)$ で表し，それで用が済む．しかし，f を右端に置いて $(x,y,z)f$ と書いても一向に差し支えない [33]．次に，この関数 f において x,y,z にそれぞれ a,b,c を代入して得られる値は，もちろん $(a,b,c)f$ であるが，これを次のように解釈することができる．先ず，$(x,y,z)f$ における z だけを c に定めた $(x,y,c)f$ は，x と y とを変数とする 2 変数関数の値とみなせる．そこでこの関数を $c3f$ で表すことにする．c と f との間に 3 を置いたのは，三番目の変数 z を c と定めたということを明示するためである．そうすると $(x,y,c)f=(x,y)(c3f)$ が成り立つ．次に，$(x,y)(c3f)$ における y だけを b に定めた $(x,b)(c3f)$ は，x を変数とする 1 変数関数の値とみなせる．そこでこの関数を $b2(c3f)$ で表すことにする．b と $(c3f)$ との間に 2 を置いたのは，さっきと同じ理由からである．そうすると，$(x,b)(c3f)=(x)(b2(c3f))$ が成り立つ．次に，$(x)(b2(c3f))$ における x を a に定めた $(a)(b2(c3f))$ は，定値すなわち 0 変数の関数であるから，これまで同様 $a1(b2(c3f))$ で表すことにする．そうすると結局，次の式が成り立つ．

$$f(a,b,c)=(a,b,c)f=(a,b)(c3f)=(a)(b2(c3f))=a1(b2(c3f))$$

数学の普通の考え方では f という 3 変数の関数しか考えないところを

$$f \qquad\qquad c3f \qquad\qquad b2(c3f) \qquad\qquad a1(b2(c3f))$$

という 3 変数から 0 変数までの四つの関数を考えるところが味噌である．次に，記号 $f,a,b,c,1,2,3$ をそれぞれ「食べる」「ピーター」「レタス」「畑」「が」「を」「で」に置き換え，括弧を除く．そう

[33]一変数関数に即して言えば，関数 f の x における値を fx と書くのは欧語式である．たとえば $\sin x$ は「sine of x」等の略記法であろう．日本語式なら「x の正弦」と語順が逆転する．従って，関数の値も日本語式なら xf と書くべきである．

すると，上の四つの関数から次の四つの日本語文ができる．

食べる　　畑で食べる　　レタスを畑で食べる　　ピーターがレタスを畑で食べる

記号を置き換えただけなので，これらの日本語文もそれぞれ上記の関数を表す．

「日本語文というのは総て，こういうように何らかの関数の表現になっているのではないか」というのが，心言語の意味論を行なうに当たっての私のそもそもの発想である．そうすると，$a1(b2(c3f))$ における $1, 2, 3$ は格助詞「が」「を」「で」に当たるので数字で表すのはもう妥当ではないから，たとえば「π」「ω」「δ」のような文字で表すことにする．「が」が主格を表すので「principal」の頭文字「p」に当たるギリシア文字「π」を「が」に当て[34]，音の類推から「ω」と「δ」とを「を」と「で」とに当てたのである．

なお，この種の考え方は，たとえばモンタギュー意味論の中に既にあり（それは英語についてのものであるが），私もそれから着想を得た．しかし，第 2.3 節で説明したような「限量語が助詞と組みを成す」と考えてそれに対応する意味論を行なうという発想は，モンタギューにもその他の研究者にも無かったものと思われる．

ただし，限量語に関わるそういう意味論についても，格言語の算法 Ωx に対応する意味論についても，ここではもう要点の説明をしない．読者にとって，要点説明ではなく第 5 章以降の精密な説明に直接当たる方が，理解の早道であろう．

[34]英文法では「主格」を「nominative case（指名格，任命格）」と呼ぶ．

第3章　論理代数学

¢ 第1章で数理心理学の基本的な考え方を説明した中で，数理心理学の当面の課題は心言語という形式言語上の論理学すなわち心論理学を研究することであると述べた．そして私自身の心論理学の設計図は，第6章で**格論理学**と名付けて示す予定である．しかしその設計図は，提示後も数理心理学の発展に応じて変更されてゆく可能性が大きい．そのため，格論理学という特殊な論理学が目標であっても，一般的な論理学の見地に立っておくことが望ましい．そこでまずこの章で，論理学を一般的に論ずるために必要な代数学について説明する．ただし，代数学は通常は「代数系」の学と解され（第1.2.1項参照），また「全域的な」代数系が用いられることが多いが，この章の代数学の主役は，全域的代数系の程よい一般化である「型付代数系」と，通常の代数系をさらに抽象して出来る「界」である．第1.4.1項で触れたように論理学の三本柱は形式言語の文法論・意味論・演繹論であるが，型付代数系は主に文法論と意味論に関連し，界は意味論と演繹論に関連する．

3.1　代数系

$ 「代数系」は集合と「算法」族の組みであるので，算法と関連概念の定義から始める．

定義 3.1.1 集合 A の直積 A^n の部分集合 D から A への写像 α を A 上の**算法**と呼び $(n = 1, 2, \ldots)$，$D, \alpha D$ それぞれを α の**定義域・値域**と呼ぶ．定義域を $\mathrm{Dom}\,\alpha$ で表し，値域を $\mathrm{Im}\,\alpha$ で表す [1]．$D \neq \emptyset$ のとき，n を α の**項数**と呼ぶ．$D = \emptyset$ のときは（このとき，端書きに記した空集合律により $\alpha = \emptyset$ である），α は**空算法**であると言い，任意の自然数が α の項数であると考える [2]．また，$D = A^n$ のとき，α を**汎算法**と呼んだり α は**全域的**であると言ったりする [3]．

自然数 n が算法 α の項数であるとき，α は n **項算法**であると言う [4]．ただし，一項算法は**単項算法**とも呼ぶ．算法は写像の一種であるから，算法の記法は写像の通常の記法に準ずる．つまり，α が集合 A 上の n 項算法 $(n \geq 1)$ であるとき，$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$ に算法 α を適用して出来る A の元は $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ で表す．ただし，α が二項算法の場合には，これまた慣例に従って $\alpha(a, b)$ を $a\alpha b$ と書くことが多い．また単項算法の場合は，やはり慣例に従って，$\alpha(a)$ を αa，$a\alpha$，a^α など様々な記号で表す．他方，慣例に反して，括弧はできるだけ使わない．たとえば，先程の値域 αD は $\alpha(D)$ と書くのが慣例である．

例 3.1.1 第1.3節で説明した通り，機械・工場が実行できる工程は，原材料と生産物の全体上の算法として抽象される．数理心理学の観点から見れば，これが算法の最も重要な例である．こういう算法は全域的でないものが多い．

[1] 記号「Dom」と「Im」はそれぞれ「domain」と「image」に因む．

[2] 項数のこの定義に不満の読者は，$D \neq \emptyset$ のときは単元集合 $\{n\}$ を α の項数と定義し，$D = \emptyset$ のときは自然数の全体 $\mathbb{N}$ を α の項数と定義して，以下を適宜に読み換えればいい．

[3] 従って汎算法は，$A = \emptyset$ でない限り空算法ではない．

[4] 従って空算法は，任意の自然数 n に対して n 項算法である

乗法群や加法群における逆元算法 x^{-1} や $-x$ は単項汎算法である．半群・群・環 [5]・体における乗法 $x \cdot y$ や加法 $x+y$ はもちろん二項汎算法であるが，群・環・体の通常の定義には現れない除法 $x/y = xy^{-1}$ や減法 $x-y = x+(-y)$ も二項算法であり，環・体における除法は全域的ではない．また，環 R の元を成分とするあらゆる大きさの行列の全体を $M(R)$ で表すと，行列の加法と乗法も $M(R)$ 上の二項算法であり，どちらも全域的ではない（問題 3.4.1 参照）．

なお，体 K 上の線形空間 V における $k \in K$ と $v \in V$ の積 kv は，通常は K を作用団とする V 上の「外的算法」として扱い，定義 3.1.1 の意味での V 上の算法とは考えない．しかし，これとても V 上の単項算法とみなすことができる．つまり，V には加法の他に K を添数集合とする単項算法族 $(\alpha_k)_{k\in K}$ があって kv の k は α_k の略記であると考えるのである．こう考えれば，外的算法は一般に，定義 3.1.1 の意味での単項算法とみなすことができる．

定義 3.1.2 集合 A 上の n 項算法 α について，A の部分集合 B が

$$\alpha(B^n \cap \mathrm{Dom}\,\alpha) \subseteq B$$

なる条件をみたすとき，B **は** α **で閉じている**とか，α **は** B **を閉ざす**とかと言う [6]．このときまた，$\alpha|_{B^n\cap \mathrm{Dom}\,\alpha}$ は B 上の算法とみなせる．そうみなしたものを α の B への**制限**と呼ぶ．対照的に B が

$$\alpha^{-1}B \subseteq B^n \cap \mathrm{Dom}\,\alpha$$

なる条件をみたすとき，B **は** α **で外に閉じている**とか，α **は** B **を外に閉ざす**とかと言う [7]．そこで，上記通常の意味の「閉じている」「閉ざす」には「内に」を冠することもある．

問題 3.1.1 集合 A 上の算法 α に対し，A の部分集合 B_i $(i \in I)$ がすべて α で閉じていれば，交わり $\bigcap_{i\in I} B_i$ も α で閉じている．また，B_i $(i \in I)$ がすべて α で外に閉じていれば，和 $\bigcup_{i\in I} B_i$ も α で外に閉じている．

注意 3.1.1 代数系に関わる概念を「有限性の制約」を外すことによって拡張できる場合がある．定義 3.1.1 と定義 3.1.2 で定めた算法についての諸概念もそうであり，特に n 項算法なる概念と，それで内外に閉じているという概念を，n が順序数の場合にまで拡張することができる（順序数については第 3.33.2 項参照）．拡張するには任意の集合 A に対して直積 A^n を定義すればいいが，それは，有限順序数の場合に倣って次のようにすればいい．ただし，$\mathbb{O}$ は順序数の全体の領域を表す．

$$A^n = \{i \in \mathbb{O} \mid i < n\} {\to} A$$

こう定義される順序数を項数とする算法を**広義の算法**と呼ぶ．

たとえば，数列の極限は広義の算法である．つまり，非負整数の全体 $\mathbb{Z}_0$ を普通に順序集合とみなしたときの順序型を ω で表せば，実数の全体 $\mathbb{R}$ の直積 $\mathbb{R}^\omega$ は実数列 $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ の全体であり，収束実数列 $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ に極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を対応させる写像は，$\mathbb{R}$ 上の非全域的な ω 項算法である．そして，$\mathbb{R}$ の部分集合 S が算法 $\lim\limits_{n\to\infty}$ で閉じていることは，S が閉集合であることに他ならない．なお $\mathbb{R}$ の完備性により，$\lim\limits_{n\to\infty}$ の定義域は完備列（コーシー列）の全体に等しい．

極限の概念は有理数の全体 $\mathbb{Q}$ においても $\mathbb{R}$ でと同様に定義されるから，$\mathbb{Q}$ においても算法 $\lim\limits_{n\to\infty}$ が定義されるが，$\mathbb{Q}$ は完備ではないから，$\mathbb{Q}$ での $\lim\limits_{n\to\infty}$ は $\mathbb{R}$ での $\lim\limits_{n\to\infty}$ の制限とは異なる．

[5] 環には乗法についての単位元があるものとする流儀とそうでない流儀がある．本書では前者の流儀をとる．

[6] 従って $B^n \cap \mathrm{Dom}\,\alpha = \emptyset$ なら，たとえば $B = \emptyset$ なら，B は α で閉じている．また，α が空算法なら，A の任意の部分集合は α で閉じている．なお,「閉じている」という言い方は位相空間論に因む（注意 3.1.1 参照）．

[7] 従って $\alpha^{-1}B = \emptyset$ なら，たとえば $B = \emptyset$ なら，B は α で外に閉じている．

なおこの定義によれば，n が有限順序数の場合には，$A^n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \to A$ となるので，A^n の元は $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ と書くべきである．しかしそれでは添数の記法が煩わしいので，やはり $A^n = \{1, \ldots, n\} \to A$ と定めて，A^n の元は $(a_1, \ldots, a_n)$ と書くことにする．

定義 3.1.3 集合 A とその上の算法族 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の組み $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を**代数系**または**系**と呼び [8]，A，Λ，$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ それぞれを，この代数系の**台**（詳しくは**台集合**）・**算号系**・**代数構造**と呼ぶ [9]．ただし，**算号**は算法記号を指す．また，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して α_λ が汎算法であるとき，この代数系を**汎代数系**と呼んだり，この代数系は**全域的**であると言ったりする [10]．さらに，Λ を算号系とする代数系とその代数構造を Λ **代数系**・Λ **代数構造**とも呼ぶ．以上の定義において $\Lambda = \emptyset$ の場合は除外しない．すなわち，$\emptyset$ 代数系は集合に他ならない [11]．誤解の恐れの無い場合には色々な略記法を用いる．たとえば，例 3.1.1 で既にしたように算法 α_λ を算号 λ で表したり，次の定義でのように，代数系をその台のみで表したりする．

定義 3.1.4 二つの代数系 A, B が共通の算号系 Λ を持ち，各 $\lambda \in \Lambda$ に対応する A, B の算法が共通の項数を持つとき，A と B は**同類**の代数系であると言う．

注意 3.1.2 同類という関係は反射律と対称律に従う（第 3.9.2 項参照）．つまり，代数系はそれ自身と同類であり，代数系 A が代数系 B と同類なら，B は A と同類である．しかし，同類という関係は推移律には従わない．つまり，A と B が同類の代数系であり B と C が同類の代数系であっても，A と C が同類とは限らない．なぜなら，A, B, C の代数構造は同一の算号系 Λ によってそれぞれ $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とは書けるが，β_λ が空算法の時には，α_λ と γ_λ が共通の項数を持つとは限らないからである．ただし，各 $\lambda \in \Lambda$ について次の二つのことのいずれかが成り立てば，A と C は同類である．

1. $\alpha_\lambda, \gamma_\lambda$ のいずれかは空算法である．
2. β_λ は空算法でない．

なぜなら，$\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda$ のいずれも空算法でなければ，これらが共通の唯一の項数を持つからである．

例 3.1.2 第 1.3 節で説明した通り，機械は代数系として抽象される．すなわち，この機械が実行できる工程の全体が代数構造に相当し，原材料と生産物の全体が台に相当する．数理心理学の観点から見れば，これが代数系の最も重要な例である．その次に重要な例は普遍型付代数系であるが，これについては第 3.4 節以降で説明する．こういう代数系は全域的でないものが多い．

半群と群は，通常のように加法のみまたは乗法のみが代数構造を成すとみなせば，互いに同類の汎代数系である．環と体も，加法と乗法が代数構造を成すとみなせば，互いに同類の汎代数系である．ただし環・体は，除法を代数構造に入れれば汎代数系ではない．体 K 上の線形空間も，例 3.1.1 に沿って加法だけでなく K を添数集合とする単項算法族 $(\alpha_k)_{k\in K}$ も代数構造に含まれるとみなせば，互いに同類の汎代数系である．

注意 3.1.3 集合 A 上の算法とは，ある自然数 n に対して A^n のある部分集合から A への写像のことであった．これの類似概念に，$A^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ のある部分集合 D から A への写像もある．しかし，こういう概念について考察する必要はないと思われる．なぜなら，α がそういう写像なら，

[8] たとえば「部分代数系」の様に，「代数系」に形容詞句を付けると長たらしくなる場合に「代数」を省略して「部分系」と呼んだりする．「線形空間」に対して「部分線形空間」を「部分空間」と略すのと同様である．

[9]「代数系」を「代数的構造」と呼ぶ学派があるようなので注意を要する．

[10] 従って，汎代数系の代数構造に属す算法は，台が空集合でない限り空算法ではない．

[11] 定義の論理的帰結で，$\emptyset$ 代数系は汎代数系でもある．

α の $A^n \cap D$ への制限を α_n で表すとき，α_n は A 上の n 項算法であって $(n \in \mathbb{N})$，組み A, α について考察することは恐らく，代数系 $(A, (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}})$ について考察することに当たるからである．

3.2　部分系

＄ **この節を通じて，そうでない旨断らない限り，**$(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ **を任意の代数系とし，**n_λ **と** A_λ **をそれぞれ** α_λ **の項数と定義域とする** [12]**．**

「部分系」の概念は部分群・部分環・部分体などの概念を一般化するものである．ただし，部分群・部分環・部分体がもとの代数系と同類の代数系であって空集合でないのに対し，代数構造が沢山の算法から成る代数系の理論では，もとの代数系と同類でない部分系も重要な役割を演じ，次の定義によれば空集合は部分系となる．

定義 3.2.1 算号系 Λ をその部分集合 M に制限すれば，代数系 $(A, (\alpha_\mu)_{\mu\in M})$ が出来る．これをもとの代数系の**算部分系**と呼び A_M で表す．

A の部分集合 B がすべての $\lambda \in \Lambda$ について α_λ で閉じていれば，すなわち

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda(B^{n_\lambda} \cap A_\lambda) \subseteq B \tag{3.2.1}$$

をみたせば，α_λ の B への制限 β_λ によって代数系 $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が出来る．これをもとの代数系の**台部分系**と呼ぶ．従って，台部分系はもとの代数系と同類の代数系である [13]．

算部分系の台部分系を**部分系**と呼ぶ．より詳しくは，算部分系 A_M の台部分系を M **部分系**と呼ぶ．算部分系の定義において $M = \Lambda$ の場合と，台部分系の定義において $B = A$ の場合とは，どちらも除外していないから，算部分系と台部分系は部分系の一種である．なお，(3.2.1) は $B = \emptyset$ であれば自明にみたされるから，$\emptyset$ は任意の M に対して M 部分系である．

部分系も代数系であるので，それを台のみで表示することもある．また，台部分系は条件 (3.2.1) をみたす部分集合によって定まるので，そういう部分集合のことを台部分系と呼ぶこともある．以下の説明中の「台部分系」がこの意味なのか本来の意味なのかは，文脈から判断してほしい．

以上の定義において，定義 3.1.3 と同様，$\Lambda = \emptyset$ の場合は除外しない．すなわち，$\emptyset$ 代数系は集合に他ならないが，その部分系も部分集合に他ならない．

例 3.2.1 例 3.1.2 で触れた機械を抽象して得られる代数系においては，算部分系は，その機械が実行できる工程を減らした機械に相当する．これに対し台部分系は，工程はそのままで原材料の範囲を制限する（それに応じて生産品の範囲も制限される）ことによって得られる．

環と体を通常のように加法と乗法が代数構造を成すものとみなせば，部分環・部分体はそれぞれ環・体の台部分系である．群についても同様である．しかし逆は正しくない．なぜなら，群の部分集合が部分群であるためには，逆元算法によっても閉じていることが必要だからである．それやこれやの理由で，群の代数構造には逆元算法も含まれるとみなす方が合理的である（例 3.13.1 参照）．環の可逆元の全体は乗法に関する算部分系である．　**終**

定義 3.2.1 の下で成り立つ基本的な事柄を以下に述べるが，これらは群論の知識があれば容易に類推でき，しかも多くは第 3.24 節で界についての事柄へと一般化する．そこでここではすべてを，証明無しに，あるいは略解付の問題として述べる．

[12] $A_\lambda \neq \emptyset$ なら n_λ は α_λ の唯一つの項数であるが，$A_\lambda = \emptyset$ なら，n_λ は α_λ の項数の一つである．
[13] $A_\lambda \neq \emptyset$ であっても，$B^{n_\lambda} \cap A_\lambda = \emptyset$ なら β_λ は空算法となるが，その場合も n_λ は β_λ の項数の一つである．

問題 3.2.1 B が A の台部分系で $M \subseteq \Lambda$ なら，B は A_M の台部分系である．B, C が A の台部分系で $C \subseteq B$ なら，C は B の台部分系である．B が A の台部分系で C が B の台部分系なら，C は A の台部分系である．

問題 3.2.2 部分系の定義において，算部分系を作る操作と台部分系を作る操作を任意の順に何回も繰り返して得られるもの，たとえば台部分系の算部分系や，算部分系の台部分系のそのまた算部分系などは顧慮する必要がない．

略解　算部分系を作る操作と台部分系を作る操作をそれぞれ O と S で表せば，二続きの操作 SO と OO と SS はそれぞれ OS と O と S で置き換えられる．

問題 3.2.3 A はそれ自身が A の台部分系であり，A の台部分系の交わりは A の台部分系である．

略解　問題 3.1.1 による．

定義 3.2.2 問題 3.2.3 により，A の任意の部分集合 S に対して，S を含む最小の A の台部分系が存在する．S を含む A の台部分系すべての交わりがそれである．これを，A における S の**算包**とか，A の S によって**生成**される台部分系とかと呼び [14]，通常は $[S]$ で表すが，A や Λ を明示する必要があるときは，$[S]_A$ や $[S]_\Lambda$ を使い，A 算包とか Λ 算包とかと呼ぶ．$A = [S]$ のとき，A は S で**生成**されるとか，S は A の**生成系**であるとかと言う．また，A が有限部分集合で生成されるとき，A は**有限生成**であると言う．なお，この定義によれば $[\emptyset] = \emptyset$，$[S]_\emptyset = S$ である．

問題 3.2.4 B を A の M 部分系 $(M \subseteq \Lambda)$ とし $S \subseteq B$ とする．そうすると $[S]_B \subseteq [S]_A$ が成り立つ．$M = \Lambda$ すなわち B が A の台部分系の場合には $[S]_B = [S]_A$ が成り立つ（問題 3.2.11 参照）．従って $[S]_B = [S]_{A_M} = [S]_{([S]_A)_M}$，特に $[S]_A = [S]_{[S]_A}$ が成り立つ．

略解　$A' = [S]_A$，$B' = [S]_B$ と定める．そうすると，$A' \cap B$ は A_M の台部分系であり，従って B の台部分系であって S を含むから，$B' \subseteq A' \cap B \subseteq A'$ が成り立つ．B が A の台部分系なら，B' は A の台部分系であって S を含むから，$B' \supseteq A'$，従って $B' = A'$ が成り立つ．そこで特に $B = A'$ とすれば，$A' = [S]_{A'}$ を得る．A を B に変えて同様に $B' = [S]_{B'}$ を得る．これと B' が A_M と A'_M の台部分系であることから，$B' = [S]_{A_M} = [S]_{A'_M}$ を得る．

問題 3.2.5 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Im}\alpha_\lambda \subseteq B \subseteq A$ なら，B は A の台部分系である．

略解　$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda(B^{n_\lambda} \cap A_\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda(A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Im}\alpha_\lambda \subseteq B$ だからである．

問題 3.2.6 $S \subseteq A$，$M \subseteq \Lambda$ なら $[S] \subseteq \left[S \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda-M} \operatorname{Im}\alpha_\lambda\right]_M$ が成り立つ．従って特に $[S] \subseteq S \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Im}\alpha_\lambda$ が成り立つ（このことは問題 3.2.7 と問題 3.2.8 により精密化される）．

略解　問題 3.2.5 と M 算包の性質により $\left[S \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda-M} \operatorname{Im}\alpha_\lambda\right]_M$ が A の台部分系であって S を含むからである．

[14]「算包」は「算法によって出来る包」の意味である.「台部分系についての包」と考えれば「台包」と呼ぶのがいい（第 3.18.2 項参照）.「生成される」と言う理由は問題 3.2.7 – 問題 3.2.9 を見れば分かるであろう．

問題 3.2.7 A の任意の部分集合 S に対して，A の部分集合 S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ を次のように帰納的に定め，S_n を S の n **包**と呼び，$S_0, S_1, \ldots$ を S の**包列**と呼ぶ．すなわち，まず $S_0 = S$ と定め，$n \geq 1$ であって S_{n-1} が定められたとき，

$$S_n = S_{n-1} \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda\big((S_{n-1})^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big)$$

と定める．このとき $[S] = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ が成り立つ．また，S が A の台部分系であるためには，$S_1 \subseteq S$ なることも $S_1 = S$ なることも必要十分である．

注意 3.2.1 実は，$n = 1, 2, \ldots$ について $S_n = S \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda\big((S_{n-1})^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big)$，従って $[S] = S \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda\big(\bigcup_{n \geq 1}(S_{n-1})^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big)$ が成り立つ．

略解　定義により $S_1 = S \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(S^{n_\lambda} \cap A_\lambda)$ であるので，S が台部分系であることは $S_1 \subseteq S$ なることとも $S_1 = S$ なることとも同等である．

$B = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ と定める．任意の n に対して $S_n \subseteq [S]$ なることが n についての帰納法で容易に示されるから，$S \subseteq B \subseteq [S]$ が成り立つ．他方，$\lambda \in \Lambda$，$(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in B^{n_\lambda} \cap A_\lambda$ とすれば，$a_i \in S_{l_i}$ なる l_i があり $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$，定義により $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots$ が成り立つので，$n = \max\{l_1, \ldots, l_{n_\lambda}\} + 1$ と定めれば，$\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in S_n \subseteq B$ が成り立つ．これは B が台部分系であることを示す．従って $[S] = B$ が成り立つ．

注意 3.2.2 (広義の帰納法) 通常の帰納法は，自然数の全体 $\mathbb{N}$ の部分集合 P で次の二条件をみたすものが $\mathbb{N}$ に限ることによる（問題 3.8.1 参照）．

1. $1 \in P$
2. $n \geq 2$ で $n - 1 \in P$ なら $n \in P$

しかし，条件 1 と次の条件 3 をみたす $\mathbb{N}$ の部分集合 P が $\mathbb{N}$ に限ることが（帰納法で）示される．

3. $n \geq 2$ で $1, \ldots, n - 1 \in P$ なら $n \in P$

そしてこのことにより帰納法が拡張される．たとえば次の問題 3.2.8 の略解での「帰納法」は広義の帰納法を指す．ただし狭義・広義いずれの帰納法でも，問題 3.2.7 や問題 3.2.8 でのように，$\mathbb{N}$ の代わりに非負整数の全体 $\mathbb{Z}_0$ などを使うこともある．

問題 3.2.8 A の任意の部分集合 S に対して，A の部分集合 S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ を次のように帰納的に定め，S_n を S の n **圏**と呼び，$S_0, S_1, \ldots$ を S の**圏列**と呼ぶ．すなわち，まず $S_0 = S$ と定め，$n \geq 1$ であって $S_0, \ldots, S_{n-1}$ が定められたとき，S_n を集合

$$\Big\{\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \;\Big|\; \lambda \in \Lambda,\ (a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in A_\lambda,\ a_i \in S_{l_i}\ (i = 1, \ldots, n_\lambda),\ n = \textstyle\sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1\Big\}$$

と定める．このとき $[S] = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ が成り立つ．また，S が A の台部分系であるためには，$S_1 \subseteq S$ なることが必要十分である．

略解　定義により $S_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(S^{n_\lambda} \cap A_\lambda)$ であるので，S が台部分系であることは $S_1 \subseteq S$ なることと同等である．

$B = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ と定める．任意の n に対して $S_n \subseteq [S]$ なることが n についての帰納法で容易に示されるから，$S \subseteq B \subseteq [S]$ が成り立つ．他方，$\lambda \in \Lambda$，$(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in B^{n_\lambda} \cap A_\lambda$ とすれば，$a_i \in S_{l_i}$ なる l_i があり $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$，$n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1$ と定めれば，$\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in S_n \subseteq B$ が成り立つ．これは B が台部分系であることを示す．従って $[S] = B$ が成り立つ．

問題 3.2.9 A の元 a と部分集合 S が $a \in [S]$ をみたすためには，A の元の列 $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$ で

$$a_i \in S \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda\big(\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

と $a_n = a$ をみたすものの存在することが必要十分である（こういう列を a の S **生成列**と呼ぶ）．

略解　$a_1, \ldots, a_n$ が a の S 生成列であれば，$a_1 \in S$ であり，$a_1, \ldots, a_i$ は a_i の S 生成列である $(i = 1, \ldots, n)$．そこで，長さ n の S 生成列を持つ元は [S] に属すことが，n についての帰納法で示される．また，$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ であって $a_1, \ldots, a_{n_\lambda}$ のそれぞれに S 生成列があれば，それら S 生成列を繋げて最後に a を付け加えた列が a の S 生成列になる．そこで，S の n 包に属す元には S 生成列のあることが，n (≥ 0) についての帰納法によって示される．

問題 3.2.10 A の部分集合 S と U が $U \subseteq S$ をみたせば，S, U の包列と圏列それぞれについて $U_n \subseteq S_n$ が成り立ち $(n = 0, 1, \ldots)$，従って $[U] \subseteq [S]$ が成り立つ．

問題 3.2.11 B が A の部分系で $S \subseteq B$ なら，S の B における n 包は S の A における n 包に含まれ $(n = 0, 1, \ldots)$，特に B が A の台部分系の場合には，S の B における包列は S の A における包列に等しい．以上は圏列についても同様に成り立つ（問題 3.2.4 参照）．

略解　B が A の M 部分系 $(M \subseteq \Lambda)$ であるとし，各 $\mu \in M$ に対して，α_μ の B への制限を β_μ で表し，$\mathrm{Dom}\,\beta_\mu$ を B_μ で表す．S の A, B における n 包をそれぞれ $S_n, S_{B,n}$ で表すと，$n \geq 1$ のとき，各 $\mu \in M$ に対して $\beta_\mu\big((S_{B,n-1})^{n_\mu} \cap B_\mu\big) = \alpha_\mu\big((S_{B,n-1})^{n_\mu} \cap A_\mu\big)$ が成り立つので，$S_{B,n} \subseteq S_n$ であることと，B が台部分系の場合には $S_{B,n} = S_n$ であることが，n についての帰納法で示される．次に n 圏については，S の A, B における n 圏を $S_n, S_{B,n}$ で表せば，B が台部分系の場合，$(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in A_\lambda$，$a_i \in S_{l_i}$，$S_{l_i} = S_{B,l_i}$ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$ であれば $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in B^{n_\lambda} \cap A_\lambda = B_\lambda$ であることに注意すればいい．

問題 3.2.12 A の部分集合 S の n 包 S_n について $S_n = \bigcup_{U \in \mathcal{P}'S} U_n = \bigcup_{M \in \mathcal{P}'\Lambda} S_{M,n}$ が成り立つ．ただし U_n と $S_{M,n}$ は，U の n 包と S の A_M における n 包である $(n = 0, 1, \ldots)$．圏列についても同様のことが成り立つ．従って $[S] = \bigcup_{U \in \mathcal{P}'S} [U] = \bigcup_{M \in \mathcal{P}'\Lambda} [S]_M$ が成り立つ（問題 3.18.12 参照）．

略解　$S_n \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{P}'S} U_n$ は，n についての帰納法で次のように示される．$S = \bigcup_{s \in S}\{s\}$ であるから，$n = 0$ のときはいい．そこで $n \geq 1$ とし，任意の $a \in S_n$ をとる．$a \in S_{n-1}$ なら，帰納法の仮定により $a \in U_{n-1}$ なる $U \in \mathcal{P}'S$ がある．$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$，$a_1, \ldots, a_{n_\lambda} \in S_{n-1}$ なら，帰納法の仮定により各 $i \in \{1, \ldots, n_\lambda\}$ に応じて $a_i \in {U^{(i)}}_{n-1}$ なる $U^{(i)} \in \mathcal{P}'S$ があり，$U = \bigcup_{i=1}^{n_\lambda} U^{(i)}$ と定めれば，$U \in \mathcal{P}'S$ であって，各 $i \in \{1, \ldots, n_\lambda\}$ に対して $a_i \in U_{n-1}$ が成り立つ．従っていずれにしても，$a \in U_n$ なる $U \in \mathcal{P}'S$ がある．

　$S_n \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{P}'\Lambda} S_{M,n}$ は，n についての帰納法で次のように示される．$n = 0$ のときはいい．そこで $n \geq 1$ とし，任意の $a \in S_n$ をとる．$a \in S_{n-1}$ なら，帰納法の仮定により $a \in S_{M,n-1}$ なる $M \in \mathcal{P}'\Lambda$ がある．$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$，$a_1, \ldots, a_{n_\lambda} \in S_{n-1}$ なら，帰納法の仮定により各 $i \in \{1, \ldots, n_\lambda\}$ に応じて $a_i \in S_{M_i,n-1}$ なる $M_i \in \mathcal{P}'\Lambda$ があり，$M = \{\lambda\} \cup \bigcup_{i=1}^{n_\lambda} M_i$ と定めれば，$M \in \mathcal{P}'\Lambda$ であって，各 $i \in \{1, \ldots, n_\lambda\}$ に対して $a_i \in S_{M,n-1}$ が成り立つ．従っていずれにしても，$a \in S_{M,n}$ なる $M \in \mathcal{P}'\Lambda$ がある．

問題 3.2.13 $a \in A$, $S \subseteq A$ であって $a_1, \ldots, a_n$ は a の S 生成列であるとする．このとき，$U = \{a_1, \ldots, a_n\} \cap S$ と定めれば，$a_1, \ldots, a_n$ は a の U 生成列でもある．また，$a_i \notin S$ なる番号 i おのおのに応じて $a_i \in \alpha_\lambda\big(\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big)$ なる $\lambda \in \Lambda$ を一つずつとり，それら λ の全体を M と定めれば，$a_1, \ldots, a_n$ は a の A_M における S 生成列でもある [15].

問題 3.2.14 A が部分集合 S で生成されて A の部分集合 B が任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して α_λ で外に閉じていれば，Λ の部分集合 $M = \{\lambda \in \Lambda \mid \alpha_\lambda^{-1} B \neq \emptyset\}$ に対して $B \subseteq [S \cap B]_M$ が成り立つ．

略解　S の n 圏 S_n に対し $S_n \cap B \subseteq [S \cap B]_M$ なることが n についての帰納法で示される．

定義 3.2.3 A の部分集合 $A - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Im} \alpha_\lambda$ を代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ の**算法余白**または集合 A の算法族 $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に関する**余白**と呼ぶ（問題 3.33.22 参照）．

問題 3.2.15 A の算法余白は，A の任意の生成系に含まれる．

略解　問題 3.2.6 による．

問題 3.2.16 B を A の部分系とし P, Q を A, B の算法余白とすれば，$P \cap B = P \cap Q$ が成り立つ．

問題 3.2.17 P を A の算法余白とし $R \subseteq P$ かつ $M \subseteq \Lambda$ とすれば，R が $[R]_M$ の算法余白であって $P \cap [R]_M = R$ が成り立つ．

略解　$B = [R]_M$ と定め Q を B の算法余白とすれば，$R \subseteq P \cap B \subseteq Q$ が成り立ち，他方で問題 3.2.4 により $B = [R]_B$，従って問題 3.2.15 により $Q \subseteq R$ が成り立つ．

定理 3.2.1 超限基数 $\mathfrak{b}$ が $\#\Lambda \leq \mathfrak{b}$ をみたして A の部分集合 S に対して $\#S \leq \mathfrak{b}$ をみたせば，$\#[S]_\Lambda \leq \mathfrak{b}$ が成り立つ．

証明　まず，S の包列 S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ について $\#S_n \leq \mathfrak{b}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が成り立つことを n についての帰納法で示そう．これは $n = 0$ のときは，問題 3.2.7 により $S_0 = S$ であるから成り立つ．そこで $n \geq 1$ と仮定する．そうすると問題 3.2.7 により $S_n = S_{n-1} \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda\big((S_{n-1})^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big)$ が成り立つ．帰納法の仮定により $\#S_{n-1} \leq \mathfrak{b}$，従って各 $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\#\big(\alpha_\lambda\big((S_{n-1})^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big)\big) \leq \#\big((S_{n-1})^{n_\lambda} \cap A_\lambda\big) \leq \#\big((S_{n-1})^{n_\lambda}\big) \leq \mathfrak{b}^{n_\lambda}$$

が成り立つが，$\mathfrak{b}$ が超限基数であるから $\mathfrak{b}^{n_\lambda} = \mathfrak{b}$ となる．従って $\#S_n \leq \mathfrak{b} + (\#\Lambda)\mathfrak{b}$ であるが，$\mathfrak{b}$ が超限基数であって $\#\Lambda \leq \mathfrak{b}$ であるから，$\mathfrak{b} + (\#\Lambda)\mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ となる．これで $\#S_n \leq \mathfrak{b}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が証明された．そうすると，問題 3.2.7 により $[S]_\Lambda = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ であるから，可算基数 $\mathfrak{a}$ について $\#[S]_\Lambda \leq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ が成り立つ．$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ なることより $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ であるから，これでこの定理は証明された．

注意 3.2.3 代数系の概念も，有限性の制約を外すことによって拡張することができる．すなわち，「算法」の範囲を注意 3.1.1 において定義した広義の算法にまで広げればいい．そうして出来る**広義の代数系**についても，部分系や算包の概念を普通の代数系とまったく同様に定義することができ，問題 3.2.6 までと問題 3.2.10 の $[U] \subseteq [S]$ なる結論が成り立つ．

[15] この問題は佐々木謙氏の着想に基づく．

問題 3.2.7 を広義の代数系用に拡張することもできる．そのことを後記のことを先取りして説明しよう．すなわち，$(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を広義の代数系とするとき，問題 3.2.7 における 1 包の定義に倣って，写像 $\varphi \in \mathcal{P}A{\to}\mathcal{P}A$ を次のように定める．

$$\varphi S = S \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda(S^{n_\lambda} \cap A_\lambda) \qquad\qquad (S \in \mathcal{P}A)$$

そうするとまず，$S \in \mathcal{P}A$ が A の台部分系であるためには，$\varphi S \subseteq S$ なることが必要十分である．また，φ が増写であるので定理 3.18.3 により，φ の閉写包 φ^∞ について $[S] = \varphi^\infty S$ が成り立つ．他方で問題 3.33.17 により，各順序数 β に対して写像 $\varphi^\beta \in \mathcal{P}A{\to}\mathcal{P}A$ が定義され，$\varphi^\infty S = \bigcup_{\beta\in\mathbb{O}} \varphi^\beta S$ が成り立つ（$\mathbb{O}$ と後出の $\mathbb{Z}_0$ の意味は注意 3.1.1 でと同じ）．従って，$\varphi^\beta S$ を S の β **包**と呼ぶことにすれば問題 3.2.7 が拡張される．なお，問題 3.2.7 においては $[S] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_0} \varphi^n S$ となる理由は，問題 3.18.13 と問題 3.18.34 により解明される（注意 3.33.5 参照）．圏列・生成列の概念とそれに関わる命題は，広義の代数系用に然るべく拡張することはできないようである．

問題 3.2.18 (✓) $\mathbb{R}$ に広義の算法 $\lim\limits_{n\to\infty}$ から成る代数構造を与えて作った広義の代数系では，部分集合の算包は位相空間 $\mathbb{R}$ での閉包に等しい（注意 3.1.1 参照）．特に，$[\mathbb{Q}] = \mathbb{R}$ が成り立つ．

3.3　擬写と準写

＄「擬写」「準写」は，数学的には同類の代数系同士を比較するための概念であるが，数理心理学の観点からは，第 1.2.2 項で述べた「機械が機械を使うとは如何なることか」という疑問に答える概念でもある．そのことをまず,「使う」を「操作する」と言い換えて説明しよう．

機械 $\mathbb{A}$ が機械 $\mathbb{B}$ を操作できるためには，$\mathbb{A}$ から $\mathbb{B}$ への伝達機構がなくてはならない．機械 $\mathbb{A},\mathbb{B}$ は代数系 A,B と抽象されるから，この伝達機構の一部として，まず集合 A から集合 B への何らかの写像 f があるだろう．そして,「$\mathbb{A}$ が $\mathbb{B}$ を操作する」と言うからには，$\mathbb{A}$ での各工程 α に $\mathbb{B}$ での何らかの工程 β を対応させる伝達機構もあって，$\mathbb{A}$ が原材料 $(a_1,\ldots,a_n)$ に α を施して a を生産するのに応じて，$\mathbb{B}$ は $(fa_1,\ldots,fa_n)$ に β を施して fa を生産するだろう（図 3.1 参照）．そうす

図 3.1: 機械 $\mathbb{A}$ が機械 $\mathbb{B}$ を操作するの図

$$\begin{tikzcd}
(a_1,\ldots,a_n) \arrow[r, "\text{機械 } \mathbb{A} \text{ での変換 } \alpha"] \arrow[d, "\text{伝達機構 } f"'] & a \arrow[d, "\text{伝達機構 } f"] \\
(fa_1,\ldots,fa_n) \arrow[r, "\text{機械 } \mathbb{B} \text{ での変換 } \beta"'] & fa
\end{tikzcd}$$

ると，$a = \alpha(a_1,\ldots,a_n)$，$fa = \beta(fa_1,\ldots,fa_n)$ であるから，次の式が成り立つ．

$$f\bigl(\alpha(a_1,\ldots,a_n)\bigr) = \beta(fa_1,\ldots,fa_n) \tag{3.3.1}$$

$\mathbb{A}$ での工程の全体が集合 Λ によって $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と添数づけてあれば，伝達機構により α_λ に対応付けられている $\mathbb{B}$ での工程は β_λ と表されて n は λ に応じて変わるから，(3.3.1) は正確には

$$f\bigl(\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_{n_\lambda})\bigr) = \beta_\lambda(fa_1,\ldots,fa_{n_\lambda}) \qquad\qquad (\lambda\in\Lambda)$$

と書かれる．こういう考えが擬写という概念の背景の一つである．なお，機械 $\mathbb{A}$ が単純であっても，伝達機構 $(a, \alpha_\lambda) \mapsto (fa, \beta_\lambda)$ や β_λ の選び方によって，機械 $\mathbb{B}$ は如何様にも複雑にし得る．だから私たちは，便利な機械をどんどん作ることができるのである．ただし，$\mathbb{A}$ の構造が $\mathbb{B}$ に比して貧弱であれば，たとえ $\mathbb{B}$ が $(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda})$ に工程 β_λ を施すことができても，$\mathbb{A}$ は $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ に工程 α_λ を施すことができない場合もある．その逆に $\mathbb{A}$ の構造が十分に豊かの場合というのが，準写という概念の背景の一つである．

例 3.3.1 実数の全体 $\mathbb{R}$ に加法 $+$ を与えて作った代数系 $(\mathbb{R}, +)$ は，実数の和を計算する機械を抽象したものとみなされる．また，正数の全体 $\mathbb{R}_+$ に乗法 $\times$ を与えて作った代数系 $(\mathbb{R}_+, \times)$ は，正数の積を計算する機械を抽象したものとみなされる．$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}_+$ への写像 $f(x) = e^x$ は (3.3.1) に相当する式 $f(a + b) = f(a) \times f(b)$ をみたす．これは，機械 $(\mathbb{R}, +)$ が a, b の和 $a + b$ を生産するのに応じて機械 $(\mathbb{R}_+, \times)$ が $f(a), f(b)$ の積 $f(a) \times f(b)$ を生産することを示すものと解釈される．つまり機械 $(\mathbb{R}, +)$ は，伝達機構 $(x, +) \mapsto (e^x, \times)$ を介して機械 $(\mathbb{R}_+, \times)$ を操作することができる．こういう伝達機構は，携帯用電卓普及以前に使われていた計算尺の中に実現されている．

図 3.2: 機械 $(\mathbb{R}, +)$ が機械 $(\mathbb{R}_+, \times)$ を操作するの図

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, "\text{機械 }(\mathbb{R},+)\text{ での変換}"] \arrow[d, "\text{伝達機構 } e^x"'] & a+b \arrow[d, "\text{伝達機構 } e^x"] \\
(e^a,e^b) \arrow[r, "\text{機械 }(\mathbb{R}_+,\times)\text{ での変換}"'] & e^{a+b}=e^a\times e^b
\end{tikzcd}$$

以下**この節を通じて，そうでない旨断らない限り，**$(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ **と** $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ **を同類の代数系とし，**n_λ **を** α_λ **と** β_λ **の共通の項数とする．**

定義 3.3.1 A から B への写像 f が各 $\lambda \in \Lambda$ について次の条件 (a) をみたすとき，f を**擬写**と呼ぶ．

(a) $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ なら $(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda$ であって $f\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr) = \beta_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda})$ が成り立つ [16].

擬写 $f \in A {\to} B$ がさらに各 $\lambda \in \Lambda$ について次の条件 (b) をみたすとき，f を**準写**と呼んだり f は**厳密**であると言ったりする（「厳密」は「exact sequence」の「exact」に因む）．

(b) $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in A^{n_\lambda}$，$(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda$ なら $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ が成り立つ [17].

なお，β_λが汎算法の場合の条件 (a)(b) は，それぞれ次の条件 (a′)(b′) と同等である．

(a′) $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ なら $f\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr) = \beta_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda})$ が成り立つ．

(b′) α_λ は汎算法である．

従って汎代数系同士の間の準写は，擬写と異ならず，各 $\lambda \in \Lambda$ について次の条件 (a″) をみたす写像に他ならない．

[16] この条件は特に，β_λ が空算法であれば α_λ も空算法であることを意味する．また逆に，α_λ が空算法であればこの条件はみたされる．

[17] β_λ が空算法であればこの条件はみたされる．

(a″) $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in A^{n_\lambda}$ なら $f\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr) = \beta_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda})$ が成り立つ．

全単射の準写を**同写**と呼ぶ [18]．A から B への同写が存在するとき，$A \simeq B$ と書き，A は B に**同形**（どうけい）であると言う [19]．Λ 代数系の間の擬写・準写・同写は，Λ を冠して **Λ 擬写・Λ 準写・Λ 同写**とも呼ぶ．また，$A = B$ の場合には,「換」を「写」に代用して A の**擬換・準換・同換**とも呼ぶ．以上の定義において，定義 3.1.3 と同様，$\Lambda = \emptyset$ の場合は除外しない．すなわち $\emptyset$ 代数系間では，擬写・準写は単なる写像に他ならず，従って同写は全単射に他ならない．

問題 3.3.1 f が A から B への準写であって B が汎代数系であれば，A も汎代数系である．

問題 3.3.2 f を A から B への準写とし $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ とする．$(a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda}) \in A^{n_\lambda}$ が $fa'_i = fa_i$ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$ をみたせば $(a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ が成り立つ．

問題 3.3.3 擬写 $f \in A{\to}B$ と $\tau \in B{\to}T$ と $\sigma \in A{\to}T$ が $\sigma = \tau f$ をみたし σ が厳密なら，f もそうである．

問題 3.3.4 C を A の台部分系とする．そうすると，C から A への埋め込み写像は C から A への準写である．また，擬写の合成写像はやはり擬写である．つまり，$f \in A{\to}B$ が擬写であって g が B から同類の代数系 D への擬写であれば，A と D は同類であって（注意 3.1.2 参照），$gf \in A{\to}D$ は擬写である．従って，A から B への擬写を C に制限したものは，C から B への擬写である．また，A から B への擬写は，算部分系 A_M から B_M への写像としても擬写である．また，擬写 $f \in A{\to}B$ の像が B の台部分系 E に含まれるなら，f は A から E への擬写とみなされる．逆に，A から E への擬写は A から B への擬写とみなされる．これらのことは,「擬写」を「準写」と書き換えても同様に成り立つ．

問題 3.3.5 全単射擬写の逆写像は必ずしも擬写ではないが，同写の逆写像は同写である．

問題 3.3.6 同類の代数系の間の同形という関係 $\simeq$ は同値関係である（そこで A が B に同形のとき，助詞を変えて「A と B は同形」とも言う．第 3.9.2 項参照）．

問題 3.3.7 f と g を A から B への擬写とし，S を A の部分集合とし，$f|_S = g|_S$ と仮定する．このとき $f|_{[S]} = g|_{[S]}$ が成り立つ．

略解　$\{a \in A \mid fa = ga\}$ が A の台部分系だからである．

問題 3.3.8 擬写 $f \in A{\to}B$ と A の部分集合 S および A, B における包列と圏列それぞれについて $f(S_n) \subseteq (fS)_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が，従って $f([S]_A) \subseteq [fS]_B$ が成り立つ．f が厳密なら，$f(S_n) = (fS)_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が，従って $f([S]_A) = [fS]_B$ が成り立つ．

問題 3.3.9 $f \in A{\to}B$ が準写であれば，A の台部分系 C の像 fC は B の台部分系であり，特に，fA は B の台部分系である．

---

[18] 従来の代数学では，もっぱら汎代数系を扱うためか準写の概念は認識されず，条件 (a″) をみたすものが「準同形写像」と呼ばれてきた.「準同形写像」は「同形写像に準ずる写像」の意味であって「同形写像」は「形を同じうする写像」の意味であろう．これに対し本書では,「形を擬する写像」「形を準ずる写像」の意味で「擬形写像」「準形写像」を用い，これらと「同形写像」をさらに縮めて「擬写」「準写」「同写」とする.「全射」「単射」に合わせて「写」を「射」としてもいい．

[19] 代数学では,「型」と「形」を区別せず,「同型」を「同形」と同じ意味と読みで使うことが多い．しかし本書では，次節で説明するように，**「型」と「形」をはっきり区別し,「同型」を「同形」とまったく違う意味と読みで使う**．

略解　問題 3.3.8 により $fC = f([C]_A) = [fC]_B$ だからである．

問題 3.3.10 擬写 $f \in A \to B$ による B の台部分系 D の逆像 $f^{-1}D$ は A の台部分系である．また，$f^{-1}D$ の任意の部分集合 S に対して $f([S]) \subseteq D$ が成り立つ．

略解　問題 3.3.8 と問題 3.2.10 により $f[f^{-1}D] \subseteq [ff^{-1}D] \subseteq [D] = D$，すなわち $[f^{-1}D] \subseteq f^{-1}D$ が成り立つからである（この解法は千馬隆志氏による）．

問題 3.3.11 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ を代数系とし，n_λ を α_λ の項数とし，f を A から集合 B への全単射とする．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して B 上の算法 β_λ を

$$\operatorname{Dom}\beta_\lambda = \left\{(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}) \mid (f^{-1}b_1, \ldots, f^{-1}b_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom}\alpha_\lambda\right\}$$
$$\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}) = f\bigl(\alpha_\lambda(f^{-1}b_1, \ldots, f^{-1}b_{n_\lambda})\bigr)$$

と定めて代数系 $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ を作れば，f は $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ から $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ への同写となる（こうして出来る代数系 $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ を，代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ の f による**複製**と呼ぶ．

注意 3.3.1 B が Λ 代数系で，A が M 代数系 $(M \subseteq \Lambda)$ で，$f \in A \to B_M$ が単射の M 準写であるとき，B の複製代数系 B' を作って，A を B' の M 部分系にすることができる．すなわちまず，A を含む集合 B' と全単射 $F \in B \to B'$ で $Ff = \mathrm{id}_A$ なるものをとる [20]（とることができる）．次に問題 3.3.11 により，B' を B の F による複製代数系と成す．そうすると，問題 3.3.9 により $A = F(fA)$ は B' の代数構造の制限によって B' の M 部分系となるが，その代数構造は A のもとの代数構造に等しいので，A はもとの代数構造によって B' の M 部分系となる．なお，以上の説明は $M = \emptyset$ の場合を含む．つまり，A が集合で $f \in A \to B$ が単射であれば，A は B の複製代数系 B' の部分集合となる．また，この種の操作は代数系間以外でも行なわれる（注意 3.4.1 と定理 3.9.4 参照）．

問題 3.3.12 (✓) $\mathbb{R}$ に広義の算法 $\lim\limits_{n\to\infty}$ から成る代数構造を与えて作った広義の代数系の擬換は，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数に他ならない．

問題 3.3.13 (✓) $\mathbb{R}$ に加法と広義の算法 $\lim\limits_{n\to\infty}$ から成る代数構造を与えて作った広義の代数系の擬換 f は $fx = (f1)x$ をみたす．

略解　$g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $gx = (f1)x$ と定めれば，f が加法について擬換であることから $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ が導かれる．そこで，問題 3.2.18 と広義代数系についての問題 3.3.7 を使う．

注意 3.3.2 (✓) 第 1.2.1 項に記した通り，代数学は数の代わりに記号を使って方程式の解法を研究することから始まり，方程式を解くことは数の概念の拡張と必然的に結びつくが，数の概念を拡張する際にはしばしば，準写ではない擬写が暗々裏に重要な役割を演ずる．たとえば自然数の全体 $\mathbb{N}$ を整数の全体 $\mathbb{Z}$ へ拡張するについては，$\mathbb{N}$ での引き算 $a - b$ が $a > b$ の場合にしか定義されないのに対し，$\mathbb{Z}$ での引き算は，全域的であって $\mathbb{N}$ での引き算の拡張である．従って $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への埋め込み写像は，引き算については擬写ではあるが準写ではない．また，$\mathbb{Z}$ での割り算 a/b は a が b $(\neq 0)$ の整数倍の場合にしか定義されないのに対し，$\mathbb{Q}$ での割り算 a/b は，$b \neq 0$ でありさえすれば定義され，$\mathbb{Z}$ での割り算の拡張である．従って $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ への埋め込み写像は，割り算に

[20] 記号 id_A はここでは A から B' への埋め込み写像を表す．端書きで注意した「終集合が異なる写像でもグラフが等しい写像は同一視する」ことの一例である．

ついては擬写ではあるが準写ではない．また，$\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ への埋め込み写像は，広義の算法 $\lim_{n\to\infty}$ については擬写ではあるが準写ではない（注意 3.1.1 参照）．$\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}$ への拡張や $\mathbb{C}$ の $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ への拡張についても同様の事情がある [21]．なおこれらは，$f\in A\to B$ が擬写であっても fA が B の台部分系であるとは限らないことを示す例でもある（問題 3.3.9 参照）．

3.4　型付代数系

$ 機械を抽象して得られた代数系においては，代数構造は工程の全体に相当し，台は原材料として受け付けるものと生産し得るものの全体に相当するが，機械においては，原材料や生産物が幾つかの型に分類されていて，どの型の原材料にどの工程を施すとどの型の製品が得られるかが決まっている場合が多い．「型付代数系」はそういう機械を抽象して得られる概念である．他方で数学的には，型付代数系の概念は汎代数系の概念の程よい拡張である．

定義 3.4.1 同類の代数系 A と T および準写 $\sigma\in A\to T$ から成る三つ組み (A,T,σ) を**型付代数系**と呼ぶ [22]．そして A,T,σ それぞれを，この型付代数系の**台**（詳しくは**台代数系**）・**型代数系**・**型写像**と呼ぶ．さらに，A の代数構造および T,σ から成る三つ組みを，この型付代数系の**型代数構造**と呼ぶ．ただし，型付代数系や型代数構造の型代数系 T を明示したいときは，T **型代数系**・T **型代数構造**と呼ぶ．他方，各 $a\in A$ に対して σa を a の**型**と呼び，逆に各 $t\in T$ に対して，t の逆像 $\sigma^{-1}t$ の元を t **型**の元と呼ぶ．さらに，A の任意の部分集合 B と T の任意の部分集合 U に対して，$B\cap\sigma^{-1}U$ を B の U **部分**と呼び B_U で表す．ただし $U=\{t\}$ の場合は，t **部分**と呼び B_t で表す．誤解の恐れの無い場合には，型付代数系の表示 (A,T,σ) から T,σ の一方または両方を省略する．以上の定義において，定義 3.1.3 と同様，台代数系と型代数系が $\emptyset$ 代数系の場合は除外しない．すなわち，型付 $\emptyset$ 代数系は単なる集合 A,T と写像 $\sigma\in A\to T$ の組みに他ならない．

問題 3.4.1 (✓) 環 R の元を成分とする行列の全体 $M(R)$ に通常の乗法を算法として与えて代数系と成す．$\mathbb{N}^2$ にも乗法 $(x,y)(y,z)=(x,z)$ を与えて代数系と成す．また，$M(R)$ の各元にその大きさを，すなわち行数 m と列数 n の組み (m,n) を対応させる $M(R)$ から $\mathbb{N}^2$ への写像を σ で表す．このとき $(M(R),\mathbb{N}^2,\sigma)$ は型付代数系である．

問題 3.4.2 任意の代数系 T に対して (T,T,id_T) は型付代数系である．

問題 3.4.3 任意の汎代数系 A は（特に $\emptyset$ 代数系は），任意の単元集合 T を A と同類の汎代数系と成したものを型代数系とし，一意に存在する写像 $\sigma\in A\to T$ を型写像として，型付代数系 (A,T,σ) を成す．逆に，型付代数系 (A,T,σ) の型代数系 T が単元集合の汎代数系であれば，A は汎代数系である．より一般に，汎代数系を型代数系とする型付代数系の台代数系は汎代数系である．

問題 3.4.4 (A,T,σ) を型付代数系とし，α を A の代数構造に属す算法とし，$(a_1,\ldots,a_n)\in\mathrm{Dom}\,\alpha$ とする．このとき，$A_{\sigma a_1}\times\cdots\times A_{\sigma a_n}\subseteq\mathrm{Dom}\,\alpha$ と $\alpha(A_{\sigma a_1}\times\cdots\times A_{\sigma a_n})\subseteq A_{\sigma(\alpha(a_1,\ldots,a_n))}$ が成り立つ．

[21] 以上の注意は，高橋和大氏が準写ではない擬写の例を問うたのへの佐々木謙氏の答に基づく．
[22] 英語では型付代数系を「sorted algebra」と呼ぶようである．それに従って「類別代数系」と呼ぶ手もあるが，そう呼ぶと「型写像」は「類別写像」と呼びたくなり，同値関係による商集合への類別写像と紛らわしくなるのが難点である（第 3.9.2 項参照）．そこで，「次数付加群」などの用語に倣い「型付代数系」と命名した．

問題 3.4.5 (A, T, σ) が型付代数系であって T の台部分系 U が $\sigma A \subseteq U$ をみたせば，(A, U, σ) も型付代数系である．(A, U, σ) が型付代数系であって U が代数系 T の台部分系であれば，(A, T, σ) も型付代数系である．

問題 3.4.6 (A, T, σ) を型付 Λ 代数系とし，$M \subseteq \Lambda$ とする．このとき，(A_M, T_M, σ) は型付 M 代数系である．より一般に，A の任意の M 部分系 B に対して，$(B, T_M, \sigma|_B)$ は型付 M 代数系である（こういう型付代数系 $(B, T_M, \sigma|_B)$ を (A, T, σ) の**部分型付代数系**と呼ぶ）．

略解　σ は，A_M から T_M への写像としても準写であり，さらに B に制限しても準写だからである．

定理 3.4.1 (A, T, σ) **を型付** Λ **代数系とし，**U **を** T **の** M **部分系** $(M \subseteq \Lambda)$ **とする．このとき，**A **の任意の** M **部分系** B **に対して，**B **の** U **部分** B_U **は** A **の** M **部分系であって，**$(B_U, U, \sigma|_{B_U})$ **は型付** M **代数系である．特に，**A **の** U **部分** A_U **は** A **の** M **部分系であって，**$(A_U, U, \sigma|_{A_U})$ **は型付** M **代数系である．**

証明　問題 3.3.10 と問題 3.2.3 により $B_U = B \cap \sigma^{-1}U$ は A の M 部分系である．問題 3.4.6 により $(B_U, T_M, \sigma|_{B_U})$ が型付 M 代数系であり，また $\sigma(B_U) \subseteq U$ であるから，問題 3.4.5 により $(B_U, U, \sigma|_{B_U})$ も型付 M 代数系である．

定義 3.4.2 同じ型代数系を持つ型付代数系は互いに**同型**（どうがた）であると言う．そして同型の型付代数系 (A, T, σ) と (B, T, τ) に対して，$a \in A$ と $b \in B$ の型が等しいとき a, b は**同型**であると言う．ただしこれは，$(A, \sigma) = (B, \tau)$ の場合も含む．さらに，A の部分集合 S から B への写像 f で $\tau f = \sigma|_S$ をみたすものを，S から B への**保型**（ほけい）写像と呼ぶ（こう呼ぶ理由は，問題 3.4.8 を見れば分かるであろう）．特に，A から B への保型写像でかつ準写であるものを**保型準写**と呼ぶ．擬写・同写・擬換・準換・同換についても同様である（問題 3.4.12 参照）．A から B への保型同写が存在するとき，$A \cong B$ と書き，A は B に**保型同形**であると言う．

問題 3.4.7 同型の型付代数系は同類である．

略解　(A, T, σ) と (B, T, τ) が同型の型付代数系であれば，A, B は T と同類であるから，A, B, T の代数構造はそれぞれ $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$，$(\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$，$(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と書け，$\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ のいずれも空算法でなければ，σ, τ が擬写であることにより τ_λ も空算法でない $(\lambda \in \Lambda)$．従って注意 3.1.2 により A, B は同類である．

問題 3.4.8 (A, T, σ) と (B, T, τ) を型付代数系とし，S を A の部分集合とする．このとき，$f \in S{\to}B$ についての次の三条件は同等である．

1. f は保型写像である．
2. 任意の $t \in T$ に対して $f(S_t) = (fS)_t$ が成り立つ．
3. 任意の $t \in T$ に対して $f(S_t) \subseteq B_t$ が成り立つ．

従って，S から B への保型写像が存在するためには，$S_t \neq \emptyset$ なる任意の $t \in T$ に対して $B_t \neq \emptyset$ の成り立つことが必要十分である．

略解　$(1 \Longrightarrow 2)$ $s \in S_t$ なら，$\tau(fs) = \sigma s = t$ だから $fs \in (fS)_t$．従って $f(S_t) \subseteq (fS)_t$．逆に $s \in S$ で $fs \in (fS)_t$ なら，$\sigma s = \tau(fs) = t$ だから $s \in S_t$．従って $(fS)_t \subseteq f(S_t)$．

$(3 \Longrightarrow 1)$ $s \in S$，$\sigma s = t$ とすれば，$s \in S_t$ だから $fs \in B_t$，従って $\tau(fs) = t = \sigma s$．

問題 3.4.9 (A, T, σ) と (B, T, τ) を型付代数系とし，S を A の生成系とする．このとき，擬写 $f \in A \to B$ が保型写像であるためには，$f|_S$ が保型写像であることが必要十分である．

略解　十分であることは問題 3.3.7 による．

問題 3.4.10 同類の汎代数系 A, B を問題 3.4.3 によって同一の単元から成る型代数系を持つ型付代数系とみなせば，A から B への擬写はすなわち A から B への保型準写である．従って，汎代数系間の同形という関係 $\simeq$ は保型同形という関係 $\cong$ と同義である．

問題 3.4.11 型付代数系 A の台部分系 B は問題 3.4.6 により A と同型の型付代数系とみなせるが，そうみなせば，B から A への埋め込み写像は保型準写である．

問題 3.4.12 保型擬写はすなわち保型準写である．保型準写の合成と台部分系への制限とは保型準写である．保型同写の逆写像は保型同写である．保型同形という関係 $\cong$ は同値関係である（そこで $A \cong B$ なるとき，本来なら「A は B に保型同形である」と言うべきところを，助詞を変えて「A と B は保型同形」であるとも言う）．

問題 3.4.13 (A, T, σ) が型付代数系で f が A から集合 B への全単射であるとき，B を A の f による複製代数系と成して $\tau = \sigma f^{-1}$ と定めれば，(B, T, τ) は型付代数系であって f は保型同写となる（こうして出来る型付代数系 (B, T, τ) を，型付代数系 (A, T, σ) の f による**複製**と呼ぶ）．

注意 3.4.1 (B, T, τ) が型付 Λ 代数系で，(A, T_M, σ) が型付 M 代数系 $(M \subseteq \Lambda)$ で，$f \in A \to B_M$ が単射の保型 M 準写であるとき，(B, T, τ) の複製型付代数系 (B', T, τ') を作って (A, T_M, σ) を (B', T, τ') の部分型付代数系にすることができる．すなわちまず，A を含む集合 B' と全単射 $F \in B \to B'$ で $Ff = \mathrm{id}_A$ なるものをとる．次に問題 3.4.13 により，(B, T, τ) の F による複製 (B', T, τ') を作る．そうすると，注意 3.3.1 により A はもとの代数構造によって B' の M 部分系となり，$\sigma = \tau'|_A$ が成り立つ．従って問題 3.4.6 により，(A, T_M, σ) は (B', T, τ') の部分型付代数系である．

問題 3.4.14 A と B を T 型の型付代数系とし $f \in A \to B$ を保型写像とする．このとき，B から A への保型写像 g で $fg = \mathrm{id}_B$ をみたすものが存在するためには，f が全射であることが必要十分である．また，B から A への保型写像 g で $gf = \mathrm{id}_A$ をみたすものが存在するためには，各 $t \in T$ に対して $A_t = \emptyset \neq B_t$ でなくて f が単射であることが必要十分である．

A と B を集合とし $f \in A \to B$ とする．このとき，B から A への写像 g で $fg = \mathrm{id}_B$ をみたすものが存在するためには，f が全射であることが必要十分である．また，B から A への写像 g で $gf = \mathrm{id}_A$ をみたすものが存在するためには，$A = \emptyset \neq B$ でなくて f が単射であることが必要十分である．

略解　任意の集合は，$\emptyset$ 代数系とみなせるから，さらに問題 3.4.3 により単元集合を型代数系とする型付代数系とみなせる．それに前半を適用すれば後半が得られる．

3.5　普遍型付代数系の存在と一意性

$　「普遍型付代数系」は「『普遍性』を持つ型付代数系」を意味し，次のように定義される [23]．

[23] 定義 3.1.3 の意味での「一般的な代数系」を「普遍代数系」と呼ぶ学派があるようなので注意を要する．

定義 3.5.1 型付代数系 (A, T, σ) と A の部分集合 S が次の二条件をみたすとする．

1. $A = [S]$
2. (A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in S{\to}A'$ が保型写像であれば，φ は保型準写 $f \in A{\to}A'$ に拡張される．

このとき，四つ組み (A, T, σ, S) を**普遍型付代数系**と呼び，S の元をこの普遍型付代数系の**素元**と呼ぶ [24]（S 自身は**素元系**と呼ぶ）．また，条件 2 の性質を**普遍性**と呼ぶ．今まで同様，誤解の恐れのない場合には，普遍型付代数系の表示 (A, T, σ, S) を簡略化して A，(A, T, σ) などで表す．

図 3.3: 普遍性の図式による説明

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & A \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ A' & \xrightarrow[\sigma']{} & T \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & A \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \swarrow_{f} & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ A' & \xrightarrow[\sigma']{} & T \end{array}$$

普遍性の意味は図 3.3 を見れば分かりやすい．ただし，図中の記号 i は埋め込み写像を表す．$\varphi \in S{\to}A'$ と $f \in A{\to}A'$ が保型写像であるとは $\sigma'\varphi = \sigma|_S$，$\sigma' f = \sigma$ をみたすことであった．また，$\sigma|_S = \sigma i$，$f|_S = fi$ が成り立つ，従って，左側の図式を可換にする型付代数系 (A', T, σ') と写像 φ があれば右側の図式を可換にする擬写 f がある，というのが普遍性の意味である．

なお，定理 3.8.5 で示すが，型付代数系 (A, T, σ) に対して定義 3.5.1 の二条件 1, 2 をみたす S は高々一つしか存在しない．また，普遍型付代数系の概念は様々に拡張される．たとえば第 3.13 節では，自由群などの「普遍性を持ち恒等式をみたす代数系」について説明する．

問題 3.5.1 定義 3.5.1 の条件 2 において，f は (A', T, σ') と φ によって一意に定まる．

略解　問題 3.3.7 による．

問題 3.5.2 型付代数系 (A, T, σ) と A の部分集合 S が定義 3.5.1 の条件 2 の「拡張される」を「一意に拡張される」に換えた条件（これを条件 0 とする）をみたすとする．このとき (A, T, σ, S) は普遍型付代数系である．従って，定義 3.5.1 の二条件 1, 2 は一条件 0 で置き換えられる [25]．

略解　$([S], T, \sigma|_{[S]})$ が型付代数系なので，条件 0 により，保型準写 $f \in A{\to}[S]$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$ なるものが存在する．$[S]$ から A への埋め込み写像を g で表せば，gf は A の保型準換であって $gf|_S = \mathrm{id}_S$ をみたすから，条件 0 により $gf = \mathrm{id}_A$ が成り立ち，特に g は全射である．従って $A = [S]$ が成り立つ．

問題 3.5.3 普遍型付代数系 (A, T, σ, S) において T が単元集合かつ汎代数系であれば，A は汎代数系であって，次の二条件がみたされる．

1. $A = [S]$

[24]「素元」と呼ぶのは，物理学における「素粒子」や化学における「元素」になぞらえているのである．
[25] しかし，一条件 0 に纏めるより二条件 1, 2 に分割する方が扱いやすい．

2. A' が A と同類の汎代数系であって $\varphi \in S \to A'$ が写像であれば，φ は擬写 $f \in A \to A'$ に拡張される．

逆に，汎代数系 A とその部分集合 S がこの二条件をみたせば，単元集合 T を A と同類の汎代数系と成したものと一意の写像 $\sigma \in A \to T$ によって出来る型付代数系 (A, T, σ) と S の組み (A, T, σ, S) は普遍型付代数系である（そこで，汎代数系 A とその部分集合 S が条件 1, 2 をみたすとき，組み (A, S) を**普遍汎代数系**と呼んだり，A は S を素元系とする普遍汎代数系であるとか言い，条件 2 の性質を**普遍性**と呼ぶ）．

略解　前半：問題 3.4.3 により A は汎代数系である．条件 2 がみたされることを確かめるには，$A \neq \emptyset$ としていい．その場合，注意 3.1.2 により A' は T と同類であるから，再び問題 3.4.3 により，一意に存在する写像 $\sigma' \in A' \to T$ に対し (A', T, σ') が型付代数系となり，さらに φ は保型写像となる．従って，φ は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張される．

後半：(A, T, σ, S) が普遍性を持つことを確かめるために，(A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in S \to A'$ が保型写像であるとする．このとき問題 3.4.3 と問題 3.4.7 により A' は A と同類の汎代数系であるから，φ は擬写 $f \in A \to A'$ に拡張され，問題 3.4.10 により f は保型準写である．

問題 3.5.4 (✓)　自然数の全体 $\mathbb{N}$ に算法 $n \mapsto n + 1$ を与えて出来る代数系 $(\mathbb{N}, +1)$ は，$\{1\}$ を素元系とする普遍汎代数系である（問題 3.8.1 参照）．

問題 3.5.5　(A, T, σ, S) を普遍型付代数系とし，(B, T, τ) を型付代数系とする．このとき，$F \in A \to B$ が保型同写なら (B, T, τ, FS) は普遍型付代数系である．また，$G \in B \to A$ が保型同写なら $(B, T, \tau, G^{-1}S)$ は普遍型付代数系である．

略解　まず $B = FA = F[S] = [FS]$ が成り立つ．次に，型付代数系 (B', T, τ') と写像 $\psi \in FS \to B'$ が $\tau'\psi = \tau|_{FS}$ をみたせば，$\varphi = \psi F|_S$ が $\tau'\varphi = \sigma|_S$ をみたすので，φ は保型準写 $f \in A \to B'$ に拡張される．$g = fF^{-1} \in B \to B'$ は ψ を拡張する保型準写である．

問題 3.5.6　A, B, C を同型の型付代数系とし，$f \in A \to C$ と $g \in B \to C$ を保型準写とする．A が普遍であって g が全射なら，保型準写 $h \in A \to B$ で $f = gh$ なるものが存在する．もしさらに A の相異なる素元の族 $(x_i)_{i \in I}$ と B の元の族 $(b_i)_{i \in I}$ が $fx_i = gb_i$ $(i \in I)$ をみたせば，h としてさらに $hx_i = b_i$ $(i \in I)$ をみたすものがとれる．

略解　A, B, C の型写像をそれぞれ σ, τ, ρ とし，A の素元系を S とする．写像 $\varphi \in S \to B$ で $f|_S = g\varphi$ なるものがある．$\tau\varphi = \rho g\varphi = \rho f|_S = \sigma|_S$ だから，保型準写 $h \in A \to B$ で $h|_S = \varphi$ なるものがある．$(gh)|_S = g\varphi = f|_S$ かつ $A = [S]$ なので，$gh = f$ が成り立つ．

問題 3.5.7　(A, T, σ, S) と (A', T, σ', S') が普遍型付代数系であって $\varphi \in S \to S'$ が $\varphi(S_t) \subseteq S'_t$ $(t \in T)$ をみたせば，保型準写 $f \in A \to A'$ で $f|_S = \varphi$ なるものが唯一つ存在し，φ が全射なら f も全射であり，φ が単射であって $S_t = \emptyset \neq S'_t$ なる $t \in T$ については $A_t \neq \emptyset$ であれば，f も単射である．

注意 3.5.1　問題 3.5.7 により，(A, T, σ, S) と (A', T, σ', S') が普遍型付代数系であって全単射 $\varphi \in S \to S'$ が $\varphi(S_t) = S'_t$ $(t \in T)$ をみたせば，φ は保型同写 $f \in A \to A'$ に一意に拡張される．問題 3.8.13 によれば逆に，A から A' への保型同写はすべて，$\varphi(S_t) = S'_t$ $(t \in T)$ をみたす全単射 $\varphi \in S \to S'$ の拡張である．なお，問題 3.5.7 における「$S_t = \emptyset \neq S'_t$ なる $t \in T$ については $A_t \neq \emptyset$」という条件は，問題 3.8.12 によって除くことができる．

略解　φ は，S から A' への保型写像であるから，(A, T, σ, S) の普遍性により保型準写 $f \in A \to A'$ に唯一通りに拡張される．φ が単射であって $S_t = \emptyset \neq S'_t$ なる $t \in T$ については $A_t \neq \emptyset$ であれば，保型写像 $\varphi' \in S' \to A$ で $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_S$ なるものが存在する．φ' も保型準写 $f' \in A' \to A$ に拡張されて $f'f|_S = \mathrm{id}_S$ が成り立つから，$f'f = \mathrm{id}_A$，従って f は単射である．

普遍型付代数系は広範に存在する．なぜなら，次の定理が成り立つからである．

定理 3.5.1 (普遍型付代数系の存在と一意性定理) **S を集合とし，T を代数系とし，$\tau \in S \to T$ とする．このとき，普遍型付代数系 (A, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ なるものが存在する．**

こういう普遍型付代数系は次の意味で一意に定まる．すなわち，普遍型付代数系 (A', T, σ', S) も $\sigma'|_S = \tau$ をみたせば，保型同写 $f \in A \to A'$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$ なるものが唯一つ存在する．

この定理によれば，集合 S と代数系 T と写像 $\tau \in S \to T$ を定めれば，普遍型付代数系 (A, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ なるものが一意に定まり，従って普遍型付代数系を一つ抽象的にではあるが構成したことになる（これとは違う具象的な構成法をこの定理の証明の中で説明する）．写像 $\tau \in S \to T$ を定めることは，T を添数集合とする S の部分集合族 $(S_t)_{t \in T}$ によって S を分割することに他ならない（そこで τ を S の T **分割写像**とか**型分割写像**とかと呼ぶ）．従って普遍型付代数系を構成するには，集合 S と代数系 T および S の分割 $(S_t)_{t \in T}$ を定めるのでもいい．普遍型付代数系のこういう構成原理を**文法原理**と呼び，三つ組み S, T, τ または $S, T, (S_t)_{t \in T}$ を**文法**と呼ぶ（こう呼ぶ理由は第 3.6.1 項を読めば分かるであろう）．

文法原理に依れば，単純な構造の代数系 T からでも，複雑な構造の普遍型付代数系 A を簡単に作ることができる．実際，普遍型付代数系の最も重要な例は各種の論理学で研究される形式言語であるが，それら形式言語における T は単純な構造をしていることが多い（第 4 章など参照）．

定理 3.5.1 の前半（存在に関する部分）は第 3.7 節で証明する．

問題 3.5.8　定理 3.5.1 の後半（一意性の部分）を証明せよ．

略解　(A, T, σ, S) と (A', T, σ', S) の普遍性と問題 3.5.1 により，保型準写 $f \in A \to A'$ と $f' \in A' \to A$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$，$f'|_S = \mathrm{id}_S$ なるものが唯一対存在し，問題 3.3.7 により $f'f = \mathrm{id}_A$，$ff' = \mathrm{id}_{A'}$ を得る．

問題 3.5.9　定理 3.5.1 から普遍汎代数系の存在と一意性定理を導き適切に述べよ．

3.6　普遍型付代数系の意外で重要な例

$ 普遍型付代数系の最も重要で普通の例は各種の論理学で研究される形式言語であるが，これについては第 4 章以降で詳しく説明する．ここでは意外で重要な例二つについて説明する．

3.6.1　自然言語の文法論と普遍型付代数系

§ 定理 3.5.1 の直後に記した通り，集合 S と代数系 T と写像 $\tau \in S \to T$ を定めれば，普遍型付代数系を一つ作ったことになる．ここでは，自然言語の伝統的な文法論においてこうして作られる普遍型付代数系について説明する．ただし，自然言語そのものが普遍型付代数系なのではない．なおこの項は，この章では唯一，非数学的な曖昧な概念について論ずる節である．

国語の伝統的文法論，すなわち国文法論とは如何なる性格の論なのであろうか．もっとも，国文法論にも色々あって，一概には言えないかも知れない．たとえば，外国人に日本語を習得させるための文法もあるし，子供に日本語の特徴を教えるためのいわゆる「学校文法」もあるし，特定の文学者の文体を分析するためのその作品固有の文法もあるだろう．中でも高邁なのは，日本語とは如何なる言語であるかを知るための文法論である．しかしいずれの国文法論でも，如何なる国語表現が適格であるかを（あるいは使われているかを）記述することが基本目標であり，それは次の三手順で行なわれる．

手順 1. 品詞規則を記述する．たとえば,「品詞には，文・名詞・動詞・形容詞 ⋯ がある」という類の規則である．ただし，品詞項目をどう設定すべきかについては，色々な考え方があり得る．たとえば，形容動詞という品詞の存在を認めるか認めないかを巡っての文法学者間の論争も過去にはあったと言う．

手順 2. これらの品詞に属す語句がどういう形態変化をしてどういう組み合せで並ぶと何という品詞に属す語句になるかの規則を記述する．たとえば,

名詞・が・動詞終止形＝文　　　　形容詞連体形・名詞＝名詞句

の類の規則である．規則をどう記述すべきかについては，色々な考え方があり得る．

手順 3. 語の形態を変化させたり語句を組み合わせたりしては作られない語それぞれについて，それがどの品詞に属すかを記述する．たとえば,「花」「鳥」は名詞で「笑う」「歌う」は動詞であるという類の記述である．これは要するに「基本語」の品詞分類表である．何を基本語とすべきかについても，品詞分類の仕方についても，色々な考え方があり得る．

ところがこの手順はまさに，素元系 S と型代数系 T と型分割写像 $\tau \in S \to T$ を定めて普遍型付代数系を作る手順なのである．どういうことかと言えば，まず，手順 1 によって定まる品詞の集合

$$\mathsf{T} = \{\,名詞，動詞，形容詞，\ldots\}$$

が型代数系の台に当たる．次に，手順 2 は T の代数構造を定めることに当たる．なぜなら，語の結合も形態変化も算法とみなすことができるからである．最後の手順 3 は，たとえば，素元系 S を

$$\mathsf{S} = \{\,花，鳥，笑う，歌う，\ldots\}$$

などと定め，S から T への写像 τ を

$$\tau 花 = 名詞 \qquad \tau 鳥 = 名詞 \qquad \tau 笑う = 動詞 \qquad \tau 歌う = 動詞 \quad .....$$

などと定めることに当たる．

このように $\mathsf{T}, \mathsf{S}, \tau$ を定めると，定理 3.5.1 により，普遍型付代数系 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathsf{S})$ で $\sigma|_{\mathsf{S}} = \tau$ なるものが一意に定まる．従って手順 1, 2, 3 を行なう文法学者は，そうと意識せずとも，何らかの普遍型付代数系 A を定義していることになるのである．ただし，A は国語の適格表現の集まりそのものではない．A が何者であるかは，具体的かつ簡単な例を使って説明しよう．

まず，T は二元集合であるとし，T の二元を N, V で表す．すなわち

$$\mathsf{T} = \{\mathsf{N}, \mathsf{V}\}$$

そして，T には三つの二項算法が γ, ω, δ あるとし，これらを次のように定める．

$$\mathrm{N}\gamma\mathrm{V} = \mathrm{V} \qquad \mathrm{N}\omega\mathrm{V} = \mathrm{V} \qquad \mathrm{N}\delta\mathrm{V} = \mathrm{V}$$

また，S は四元集合であるとし，S の四元を P, L, G, E で表す．すなわち，

$$\mathrm{S} = \{\mathrm{P}, \mathrm{L}, \mathrm{G}, \mathrm{E}\}$$

そして，写像 $\tau \in \mathrm{S} \to \mathrm{T}$ を次のように定める．

$$\tau\mathrm{P} = \tau\mathrm{L} = \tau\mathrm{G} = \mathrm{N} \qquad \tau\mathrm{E} = \mathrm{V}$$

これで普遍型付代数系 $(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{S})$ で $\sigma|_{\mathrm{S}} = \tau$ なるものが定まる．

この定め方により，A の中には，たとえば次の三つの元があることが分かる．

$$\mathrm{P}\gamma\big(\mathrm{G}\delta(\mathrm{L}\omega\mathrm{E})\big) \qquad \mathrm{G}\gamma\big(\mathrm{P}\omega(\mathrm{L}\delta\mathrm{E})\big) \qquad \mathrm{P}\gamma\Big(\mathrm{L}\gamma\big(\mathrm{G}\gamma(\mathrm{P}\delta\mathrm{E})\big)\Big)$$

これらの A の元において，P, L, G, E をそれぞれ「ピーター」「レタス」「畑」「食べる」に書き換え，γ, ω, δ をそれぞれ「が」「を」「で」に書き換え，かつ括弧を取り除くという**変形**を加えれば，次の国語表現の如きものが得られる．

表現 1．ピーターが畑でレタスを食べる

表現 2．畑がピーターをレタスで食べる

表現 3．ピーターがレタスが畑がピーターで食べる

「国語表現の如きもの」といったのは，A の元からこういう変形で得られる表現の殆どは，国語表現としては奇妙なものだからである．表現 1 は普通の国語表現である．しかし表現 2 は，文法的には間違っていないように見えるものの，意味を考えると奇妙な表現である．表現 3 は文法的にも意味の面でも更に奇妙なものである．

奇妙な表現が沢山出来るが，この例を踏まえれば次のように言えよう．すなわち**国文法学者は，国語の適格表現全体を，何らかの普遍型付代数系に何らかの変形が加わったものとして定義することを目指している．**もとの普遍型付代数系 A は国語の適格表現の集まりそのものではなく，適格表現の背後あるいは深層に在ると想定される架空の何者かである．そして，表現 3 のようなものの存在は，いま使った普遍型付代数系の例 A が国文法にはまったく不適当であることを示す．

ただし，以上は国文法論がこのように解釈できるという話であって，数理心理学の観点を説明しているのではない．第 1 章で説明したように，然るべく定義すれば普遍型付代数系 A は架空のものではなく心言語という実在なのだ，というのが数理心理学の考え方である．

しかし，いずれの観点に立つにしても，手順 1, 2, 3 が普遍型付代数系を構成することと同等であることを認識することは重要である．これを認識し代数学的方法を使うなら，自然言語にせよ形式言語にせよ，いわゆる「文法を書く」ことに伴う技術的困難はかなり解消される．

3.6.2　計算図と計算代数系

§ 前項では定理 3.5.1 の示唆する方法で作られる普遍型付代数系の例を一つ挙げたが，ここでは，この定理の次節での証明法に通ずる方法で作られる普遍型付代数系の例を一つ挙げる．

$(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を代数系とし，n_λ を α_λ の項数とする．このとき，A 上の**計算図**なる図とその**終点**なる A の元と**階数**なる非負整数を，次のように階数についての帰納法で定義する．あらかじめ計算図の全体を $D(A)$ で表す．また，$D(A)$ の元 d の終点と階数をそれぞれ $\mathrm{tp}\,d$ と $\mathrm{rk}\,d$ で表す（「tp」「rk」はそれぞれ「terminal point」と「rank」の略である）．

まず，階数 0 の計算図とは A の任意の元 a のことを指し，その終点は a 自身であるとする．そして n が自然数であって，階数 $0, \ldots, n-1$ の計算図とその終点が何であるかが定められたとき，階数 n の計算図とは，$\lambda \in \Lambda$ と計算図 $d_1, \ldots, d_{n_\lambda}$ で

$$n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \mathrm{rk}\,d_i + 1 \qquad\qquad (\mathrm{tp}\,d_1, \ldots, \mathrm{tp}\,d_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$$

なる条件をみたすもの（そういう $d_1, \ldots, d_{n_\lambda}$ は既に定まっている）を任意にとって出来る

$$\frac{d_1, \ldots, d_{n_\lambda}}{\lambda} \tag{3.6.1}$$

なる図のことと定義し，この計算図の終点は次の元と定める．

$$\alpha_\lambda(\mathrm{tp}\,d_1, \ldots, \mathrm{tp}\,d_{n_\lambda}) \tag{3.6.2}$$

従って，たとえば a, b, c を A の元とし $\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\nu$ を A の二項汎算法とするとき，図 (3.6.3) は階数 5 の計算図である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{a \quad b}{\lambda} \quad c}{\mu} \qquad \cfrac{\cfrac{b \quad c}{\nu} \quad b}{\nu}}{\mu} \tag{3.6.3}$$

また，この計算図の終点は，$\alpha_\mu\big(\alpha_\mu(\alpha_\lambda(a, b), c), \alpha_\nu(\alpha_\nu(b, c), b)\big)$ に等しい．この例から容易に類推できるように，計算図は一般に A の元と算号および横棒とで出来た樹状図になる．

注意 3.6.1 計算図は，横棒を算号や元を結ぶ斜め棒に変えればもっと樹らしくなるが，そうするとグラフのように見えるのが難点である．計算図をグラフとみなすことはできるが，そうみなすべきではない．つまり，たとえば図 (3.6.3) を $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ を頂点とするグラフとみなすべきではない．なぜならこの図は，$a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ の中のどの二点を辺で結ぶかの規則に従って描かれたのではないからである．

計算図 d の上端にある記号（図 (3.6.3) の例では a, b, c）を d の**始点**と呼び，これらの集合を $\mathrm{sp}\,d$ で表す（「sp」は「starting points」の略である）．また，始点を左から順に並べて出来る列（図 (3.6.3) の例では $abcbcb$）を**始点列**と呼び $\mathrm{ssp}\,d$ で表す（「ssp」は「sequence of starting points」の略である）．

問題 3.6.1 計算図の始点と始点列を，終点の定義に倣って一般的に定義せよ．

問題 3.6.2 (✓) 集合 A 上の二項汎算法 α が**結合律** $\alpha\big(\alpha(a, b), c\big) = \alpha\big(a, \alpha(b, c)\big)$ に従うためには，代数系 (A, α) 上の同じ始点列を持つ計算図は同じ終点を持つことが必要十分である．

問題 3.6.3 代数系 A 上の任意の計算図 d について $\mathrm{tp}\,d \in [\mathrm{sp}\,d]$ が成り立つ．逆に，S が A の部分集合であるとき，$[S]$ の各元 a に対して，$a = \mathrm{tp}\,d$ かつ $\mathrm{sp}\,d \subseteq S$ なる A 上の計算図 d が存在する．従って，S を A の部分集合とし a を A の元とするとき，$a \in [S]$ なるためには，$a = \mathrm{tp}\,d$ かつ $\mathrm{sp}\,d \subseteq S$ なる A 上の計算図 d の存在することが必要十分である．

略解　$\mathrm{tp}\,d \in [\mathrm{sp}\,d]$ なることは，$\mathrm{rk}\,d$ についての帰納法によって分かる．また，a が S の n 圏に属せば $a = \mathrm{tp}\,d$，$\mathrm{sp}\,d \subseteq S$，$\mathrm{rk}\,d = n$ なる計算図 d が存在することが，n についての帰納法によって証明される．

注意 1.4.1 で心論理代数系について定義した演繹過程と帰納過程の概念を，一般の代数系 A について定義することができる．すなわち，S を A の部分集合とし a を A の元とするとき，計算図列 $d_0, d_1, \ldots, d_n$ が S からの a の**演繹過程**であるとは，$a = \mathrm{tp}\,d_n$ であって各 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対し $\mathrm{sp} d_i \subseteq \{\mathrm{tp}\,d_0, \ldots, \mathrm{tp}\,d_{i-1}\} \cup S$ の成り立つことを言う．また，計算図列 $d_0, d_1, \ldots, d_n$ が a からの S の**帰納過程**であるとは，$a = \mathrm{tp}\,d_0$ であって各 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対し $\mathrm{sp} d_i \subseteq \{\mathrm{tp}\,d_{i+1}, \ldots, \mathrm{tp}\,d_n\} \cup S$ の成り立つことを言う．

問題 3.6.4 S を代数系 A の部分集合とし a を A の元とするとき，A 上の計算図列 $d_0, d_1, \ldots, d_n$ が S からの a の演繹過程であるためには，$d_n, \ldots, d_1, d_0$ が a からの S の帰納過程であることが必要十分である．

問題 3.6.5 S を代数系 A の部分集合とし a を A の元とするとき，S からの a の演繹過程が存在するためには，$a = \mathrm{tp}\,d$ かつ $\mathrm{sp}\,d \subseteq S$ なる A 上の計算図 d の存在することが必要十分である．

略解　$a = \mathrm{tp}\,d$ かつ $\mathrm{sp}\,d \subseteq S$ なる計算図 d があれば，d は S からの a の演繹過程である．S からの a の演繹過程があれば $a \in [S]$ なることが，演繹過程の長さについての帰納法と問題 3.6.3 により分かる．

計算図は機械や論理などについて考える際に重要な役割を演ずる．機械と計算図の関係については第 1.3 節で説明してある．つまりまず，機械は代数系とみなされる．機械が実行できる工程が代数系の算法に相当し，機械の原材料と生産物の全体が代数系の台に相当する．また，機械による生産が代数系における計算（＝演算）に相当する．そして，機械が行なった生産の履歴が，すなわち代数系における計算の履歴が，計算図で表現される．なお，第 1.3 節で具体例として示した図 (1.3.5) は図 (3.6.3) と同じものである．

論理と計算図が関連するのも論理学が人間を含めた「思考機械」の学だからであり，その関連は論理学で使われる証明図に端的に現れている．ただし，証明図は計算図の変種である．計算図 (3.6.3) に即して説明すれば，この図を

$$\alpha_\lambda(a, b) = p \qquad \alpha_\nu(b, c) = q \qquad \alpha_\mu(p, c) = r \qquad \alpha_\nu(q, b) = s \qquad \alpha_\mu(r, s) = t$$

なる A の元 p, q, r, s, t と算号 λ, μ, ν を使って図 (3.6.4) のように描き直したものが証明図に当たる．ただし論理学では λ, μ, ν を示さないことが多い．なお，t は計算図 (3.6.3) の終点に等しい．

$$\mu\dfrac{\mu\dfrac{\lambda\dfrac{a\quad b}{p}\qquad c}{r}\qquad\qquad \nu\dfrac{\nu\dfrac{b\quad c}{q}\qquad b}{s}}{t} \tag{3.6.4}$$

この描き直しや第 1.3 節の説明が示すように，計算図とは要するに，代数系における「計算（＝演算）の過程」に当たる数学的概念である．

問題 3.6.6 図 (3.6.4) のような計算図の変種を一般的に定義せよ．

次に，$D(A)$ が実は普遍型付代数系の構造を持つことを説明しよう．計算図は図形として具体的に定義してあり，普段はその通りに図形として扱えばいい．しかし，$D(A)$ が普遍型付代数系であることを認識することも重要である．

さて，まず定理 3.5.1 によれば，集合 S と代数系 T と写像 $\tau \in S \to T$ を任意にとるとき，普遍型付代数系 (X, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ なるものが一意に存在する．そこで，S, T, τ として A, A, id_A を取れば，普遍型付代数系 $(C(A), A, \sigma, A)$ で $\sigma|_A = \mathrm{id}_A$ なるものが一意に存在する．これを A 上の**計算代数系**と呼ぶ（σ は定義 3.6.1 で tp と書き直す）．

他方で，$D(A)$ の中に A と同類の代数構造を次のように定めることができる．すなわち，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$D(A)$ 上の n_λ 項算法 δ_λ を次のように定義する．

$$\delta_\lambda(d_1, \ldots, d_{n_\lambda}) = \frac{d_1, \ldots, d_{n_\lambda}}{\lambda} \qquad \big((\mathrm{tp}\, d_1, \ldots, \mathrm{tp}\, d_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\, \alpha_\lambda\big)$$

そうすると，tp は $D(A)$ から A への準写になり，従って $(D(A), A, \mathrm{tp})$ は型付代数系になる．

従って $C(A)$ の普遍性により，保型準写 $f \in C(A) \to D(A)$ で $f|_A = \mathrm{id}_A$ なるものが存在する．この f が実は同写になり（その証明は読者の演習問題とする），従って問題 3.5.5 により $(D(A), A, \mathrm{tp}, A)$ も普遍型付代数系となるのである．

問題 3.6.7 普遍型付代数系 $(D(A), A, \mathrm{tp}, A)$ における A の n 圏は階数 n の計算図の全体に等しい．

さて，読者は計算図の概念が厳密でないことに気づいただろうか．実は，さっきの f が同写になることを示せという演習問題も，計算図の概念が曖昧であるために解くことはできないのである（だから，この演習問題を解けた人は，機転がきく反面で不注意でもある）．

なぜ計算図の概念が曖昧かと言うと，そもそも「図とは何か」が曖昧だからである．言い換えれば，**数学は集合論の上に築かなければならない**のに，「図とは如何なる集合の元であるか」を述べてなかったのである．だから当然，二つの図が同じであるか否かの判定基準も述べてない．そういうことをはっきりさせなければ，計算図について何を論ずることもできない筈なのである．

この点を改善するためには，たとえば次のようにすればいい．すなわち，集合 A, Λ および二点集合 $\{[,]\}$ の直和 $S = A \cup \Lambda \cup \{[,]\}$ を作り，計算図を (3.6.1) で定義するのではなく，半群 $S^+ = \bigcup_{n \geq 1} S^n$ の元 $[\lambda d_1 \cdots d_{n_\lambda}]$ として定義する．終点の定義式 (3.6.2) についてはまだ問題点が残るが，計算図が如何なる集合の元であるかは，これではっきりさせられる．このやり方は，実は，次節の普遍型付代数系の存在証明のやり方と本質的に同じものである．(3.6.2) にどういう問題点があってそれがどう解決されるかについては次節を読んでほしい．

以上のことから，数学的厳密性を求めるなら，計算図を次のように定義し直すのがいい．

定義 3.6.1 代数系 A に対して，計算代数系 $C(A)$ の元を A 上の**計算図**と呼び，$C(A)$ の型写像を改めて tp で表し（この「tp」は「type」の略である），計算図 c の型 $\mathrm{tp}\, c$ を c の**終点**とも呼ぶ．

計算図の階数や始点をどう定義し直したらいいかは定義 3.8.3 で説明する．

3.7　普遍型付代数系の存在証明

$ ここでは定理 3.5.1 を証明するが，後半すなわち一意性についての部分の証明は類型的で容易なものなので問題 3.5.8 として読者に任せ，前半のみを次のように一般化して証明する．

定理 3.7.1 S **を集合とし，**T **を代数系とし，**$\tau \in S \to T$ **とする．このとき，型付代数系** (A, T, σ) **で次の三条件をみたすものが存在する．**

1. $A = [S]$
2. $\sigma|_S = \tau$
3. (A', T', σ') **が型付代数系であり，**$g \in T \to T'$ **が擬写であり，**$\varphi \in S \to A'$ **が** $\sigma'\varphi = g\sigma|_S$ **をみたせば，**φ **は擬写** $f \in A \to A'$ **で** $\sigma' f = g\sigma$ **をみたすものに拡張される．**

この定理の条件 3 において $T' = T$, $g = \mathrm{id}_T$ とすれば問題 3.4.12 により普遍性の条件となるから，定理 3.7.1 から定理 3.5.1 の前半が得られる．そこで，条件 3 の性質を**広義の普遍性**と呼ぶ．

定理 3.7.1 を証明する前に，それから得られることを幾つか示そう．

系　普遍型付代数系 (A, T, σ, S) **は広義の普遍性を持つ．**

証明　$\tau = \sigma|_S$ と定めて三つ組み S, T, τ に対して定理 3.7.1 を適用すれば，型付代数系 $(\overline{A}, T, \overline{\sigma})$ で定理 3.7.1 の三条件（において A, σ を $\overline{A}, \overline{\sigma}$ で置き換えたもの）をみたすものがある．さっき注意したように $(\overline{A}, T, \overline{\sigma}, S)$ は普遍型付代数系であり，しかも $\sigma|_S = \tau = \overline{\sigma}|_S$ をみたす．従って定理 3.5.1 の後半により，保型同写 $F \in A \to \overline{A}$ で $F|_S = \mathrm{id}_S$ なるものがある．

(A, T, σ, S) が広義の普遍性を持つことを示すために，(A', T', σ') は型付代数系であり，$g \in T \to T'$ は擬写であり，写像 $\varphi \in S \to A'$ は $\sigma'\varphi = g\sigma|_S$ をみたすとする．このとき，$\sigma'\varphi = g\overline{\sigma}|_S$ で $(\overline{A}, T, \overline{\sigma}, S)$ は広義の普遍性を持つから，φ は擬写 $\overline{f} \in \overline{A} \to A'$ で $\sigma'\overline{f} = g\overline{\sigma}$ をみたすものに拡張される．そこで $f = \overline{f}F$ と定めれば，f は A から A' への擬写であり，$\sigma' f = \sigma'\overline{f}F = g\overline{\sigma}F = g\sigma$, $f|_S = \overline{f}F|_S = \overline{f}\,\mathrm{id}_S = \overline{f}|_S = \varphi$ が成り立つ．よって (A, T, σ, S) は広義の普遍性を持つ．

問題 3.7.1　φ が代数系 A から代数系 B への擬写なら，計算代数系 $C(A)$ から計算代数系 $C(B)$ への擬写 f で $f|_A = \varphi$, $\varphi\,\mathrm{tp}_A = \mathrm{tp}_B\,f$ をみたすものが存在する（tp_A, tp_B はそれぞれ $C(A)$, $C(B)$ の型写像を表す）．また，φ が厳密なら f もそうである．

略解　普遍型付代数系 $(C(A), A, \mathrm{tp}_A, A)$ の広義普遍性を型付代数系 $(C(B), B, \mathrm{tp}_B)$ と擬写 $\varphi \in A \to B$ および写像 $\varphi \in A \to C(B)$ に適用すれば，こういう f の存在することが分かる．φ が厳密なら，$\varphi\,\mathrm{tp}_A$ もそうであって $\varphi\,\mathrm{tp}_A = \mathrm{tp}_B\,f$ なので，f もそうである．

問題 3.7.2　(A, T, σ, S) が普遍型付代数系で g が T から代数系 T' への準写なら，$(A, T', g\sigma, S)$ も普遍型付代数系である．

問題 3.7.3　(A, T, σ) が型付代数系なら，$(C(A), T, \sigma\,\mathrm{tp}, A)$ は普遍型付代数系である．

定理 3.7.1 の証明　この過程で普遍型付代数系の構造についての重要な情報が得られるが，それは第 3.8 節で正確に述べる．

T の代数構造を $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ とし，n_λ と T_λ を t_λ の項数と定義域とする．また，$K = S \cup \Lambda \cup \{[,]\}$ を集合 S, Λ および左括弧・右括弧から成る集合 $\{[,]\}$ の直和とし，半群 $K^+ = \bigcup_{m \geq 1} K^m$ を考える．K の元を括弧も含めて「記号」とも呼ぶ．その上で，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，K^+ の部分集合 S_n および写像 $\sigma_n \in S_n \to T$ を次のように帰納的に定義する．まず，

$$S_0 = S \qquad\qquad \sigma_0 = \tau$$

とする．そして，自然数 n に対して S_i, σ_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ が定義されたとき，まず，次の形の記号列すべてから成る K^+ の部分集合を S_n と定義する．

$$[\lambda a_1 \ldots a_j]$$

ただし，次の条件をみたすものとする．

$$\lambda \in \Lambda \qquad a_i \in S_{l_i}\ (i = 1, \ldots, j) \qquad n = \sum_{i=1}^{j} l_i + 1 \qquad (\sigma_{l_1} a_1, \ldots, \sigma_{l_j} a_j) \in T_\lambda$$

印刷上の理由で n_λ を j と書いた．次に，上記のような S_n の元 $[\lambda a_1 \ldots a_j]$ に対して

$$\sigma_n[\lambda a_1 \ldots a_j] = t_\lambda(\sigma_{l_1} a_1, \ldots, \sigma_{l_j} a_j) \tag{3.7.1}$$

と定義したいが，ここに一つ問題が生ずる．もしも，S_n のある元を $[\lambda a_1 \ldots a_j]$ なる形に表す方法が二通り以上あると，σ_n が (3.7.1) で定義されるとは直ちに言えないのである．何が問題かを理解するためには，次の例について考えてみればいい．すなわち，t_λ, t_μ, t_ν を T の汎算法とし（n_λ, n_μ, n_ν は故意に示さない），$r, s \in S$ とする．このとき，記号列

$$[\lambda rs[\mu sr[\nu sr]r]s[\mu[\lambda[\lambda rs[\mu srs[\lambda[\nu ss]sr[\mu s[\nu rs]ss][\nu ss]]][\nu rs]s]ss[\nu rs]s]rss]]$$

は果たしてある S_n に属すであろうか．属すとしたら，n の値は何であろうか．また，$a_1, \ldots, a_j$ に相当するものはどれであろうか．それらは一意に確定するだろうか．こういう問に一般的に答えられなければ，σ_n が (3.7.1) で定義できるとは断言できない．しかし実際は，次の補題が成り立ち，その後半により，σ_n は確かに (3.7.1) で定義できることが分かる．

補題 3.7.1 S_n **の中の記号列には，**Λ **の元が丁度** n **個現れる** [26]**．また，**S_n $(n \geq 1)$ **の元** a **を**

$$a = [\lambda a_1 \ldots a_{n_\lambda}] \qquad \left(\lambda \in \Lambda,\ a_i \in S_{l_i}\ (i = 1, \ldots, n_\lambda),\ n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1\right)$$

と表すときの λ, a_i, l_i **は** a **に対して一意に定まる．**

この補題の前半は n についての帰納法によって容易に証明される．後半は次の補題から得られる．

補題 3.7.2 S_n $(n \geq 1)$ **の中の記号列は，左括弧と右括弧によって左右から挟まれ，左括弧と右括弧を同数含む．また，**S_n $(n \geq 1)$ **の元** a **を**

$$a = [\lambda a_1 \ldots a_{n_\lambda}] \qquad \left(\lambda \in \Lambda,\ a_i \in S_{l_i}\ (i = 1, \ldots, n_\lambda),\ n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1\right)$$

と表すとき，$i = 1, 2, \ldots, n_\lambda$ **について次の二つのことが成り立つ．**

(1) a_i **より左の** a **の中には，左括弧が右括弧より丁度 1 個多く現れる．**

(2) a_i **の左端以外の** a_i **の左括弧より左の** a **の中には，左括弧が右括弧より 2 個以上多く現れる．**

(1)(2) において「左」と「右」を入れ換えても同様に成り立つ．

[26] 半群 K^+ における「現れ」の概念については問題 3.15.1 参照．

この補題の前半は n についての帰納法によって容易に示され，この前半から (1) が直ちに得られる．(2) も n についての帰納法と (1) によって示されるが，少し複雑である．まず，$n=1$ のときには，$l_1=\cdots=l_{n_\lambda}=0$ だから，a_i には左括弧が無く，従って (2) は自明に成り立つ．a_i に左端以外に左括弧があれば，それは $a_i=[\mu b_1\ldots b_{n_\mu}]$ と書いたときの $b_1,\ldots,b_{n_\mu}$ に現れる左括弧である．帰納法の仮定と (1) により，a_i においては，その左括弧より左には，左括弧が右括弧より 1 個以上多く現れる．$a_1\ldots a_{i-1}$ には左括弧と右括弧が同数現れ，これに a の左端の左括弧が加わるから，a においては，問題の左括弧より左には，左括弧が右括弧より 2 個以上多く現れる.「左」と「右」を入れ換えても同様である．これで補題 3.7.2 が証明された.

補題 3.7.2 から補題 3.7.1 の後半が導かれる．なぜなら，S_n $(n\geq 1)$ の元 a を

$$a=[\lambda a_1\ldots a_{n_\lambda}]\qquad\left(\lambda\in\Lambda,\ a_i\in S_{l_i}\ (i=1,\ldots,n_\lambda),\ n=\sum_{i=1}^{n_\lambda}l_i+1\right)$$

と書いたとき，$l_i\geq 1$ なる a_i の左端の左括弧は，a に現れる左括弧の中で，それより左の a の中に左括弧が右括弧より丁度 1 個だけ多く現れるものとして特徴付けられる.「左」と「右」を入れ換えても同様である．それらの左右の括弧対で挟まれた記号列の中で極短のものとして，a_i $(l_i\geq 1)$ は一意に定まる．a に現れる残りの S の元として $l_i=0$ なる a_i が一意に定まる．そうすると，補題 3.7.1 の前半により，各 a_i に対して $a_i\in S_{l_i}$ なる l_i が一意に定まる．もちろん，λ は a の左から二番目の記号として一意に定まる.

これで，補題 3.7.1 の証明が完成し，同時に S_n,σ_n $(n=0,1,\ldots)$ の定義も完成した．そこで

$$A=\bigcup_{n\geq 0}S_n$$

と定義する．そうすると，補題 3.7.1 の前半により，A は S_n $(n=0,1,\ldots)$ の直和になる．従って，写像 $\sigma\in A\to T$ を

$$\sigma|_{S_n}=\sigma_n\qquad\qquad(n=0,1,\ldots)$$

によって定義することができる．そうすると，$\sigma|_S=\tau$ であり，また，σ_n の定義の式 (3.7.1) は次のように書き換えられる.

$$\sigma[\lambda a_1\ldots a_j]=t_\lambda(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_j)$$

次に，各 $\lambda\in\Lambda$ に対して，A の算法 α_λ を次のように定義する．すなわち，α_λ の定義域 A_λ は

$$A_\lambda=\{(a_1,\ldots,a_j)\in A^j\mid(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_j)\in T_\lambda\}\qquad\qquad(j=n_\lambda)$$

であって，A_λ の元 $(a_1,\ldots,a_j)$ に α_λ を適用したものは

$$\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j)=[\lambda a_1\ldots a_j]$$

であるとする．$a_i\in S_{l_i}$ なる l_i があって $(i=1,\ldots,j)$，$n=\sum_{i=1}^{j}l_i+1$ と定めれば $[\lambda a_1\ldots a_j]\in S_n$ であるから，α_λ は確かに A 上の算法である．こうして T と同類の代数系 $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が出来るが，さらに，σ は必然的に A から T への準写となる．なぜなら，$(a_1,\ldots,a_j)\in A_\lambda$ となるのは $(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_j)\in T_\lambda$ となる場合に限られ，この場合には次式が成り立つからである.

$$\sigma(\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j))=\sigma[\lambda a_1\ldots a_j]=t_\lambda(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_j)$$

従って，(A,T,σ) は型付代数系となる.

また，S_n の定義と A の代数構造の定義から S_n は S の n 圏に等しいことが分かり，従って，問題 3.2.8 により $A = [S]$ が成り立つ．

これで定理 3.7.1 の条件の 2 までが確かめられた．条件 3 を確かめるために，(A', T', σ') は型付代数系であり，$g \in T \to T'$ は擬写であり，写像 $\varphi \in S \to A'$ は $\sigma'\varphi = g\sigma|_S$ をみたすとする．そしてまず，写像 $f_n \in S_n \to A'$ で $\sigma' f_n = g\sigma_n$ なるものを，次のように帰納的に作る $(n = 0, 1, \ldots)$．まず $f_0 = \varphi$ とする．そうすると

$$\sigma' f_0 = \sigma'\varphi = g\sigma|_S = g\tau = g\sigma_0$$

が成り立つ．次に，自然数 n に対して f_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ が定義されたときに，S_n の各元 a を

$$\lambda \in \Lambda \qquad a_i \in S_{l_i} \ (i = 1, \ldots, j) \qquad n = \sum_{i=1}^{j} l_i + 1 \qquad (\sigma_{l_1} a_1, \ldots, \sigma_{l_j} a_j) \in T_\lambda$$

なる $\lambda, a_1, \ldots, a_j$ によって

$$a = [\lambda a_1 \ldots a_j]$$

と表して，$f_n a$ を次の式で定義したい．

$$f_n a = \alpha'_\lambda(f_{l_1} a_1, \ldots, f_{l_j} a_j)$$

ただし，α'_λ は λ に対応する A' の算法である．f_n が定義可能なことを確かめよう．補題 3.7.1 によって λ, a_i, l_i は a に対して一意に定まるから，$\alpha'_\lambda(f_{l_1} a_1, \ldots, f_{l_j} a_j)$ が存在することを確かめればいい．$t_\lambda(\sigma_{l_1} a_1, \ldots, \sigma_{l_j} a_j)$ は存在して g は擬写であるから，λ に対応する T' の算法を t'_λ とすれば，$t'_\lambda(g\sigma_{l_1} a_1, \ldots, g\sigma_{l_j} a_j)$ は存在する．帰納法の仮定により $\sigma' f_{l_i} = g\sigma_{l_i}$ だから，これは $t'_\lambda(\sigma' f_{l_1} a_1, \ldots, \sigma' f_{l_j} a_j)$ に等しい．σ' は厳密だから，$\alpha'_\lambda(f_{l_1} a_1, \ldots, f_{l_j} a_j)$ は確かに存在する．

さらに，$\sigma' f_n = g\sigma_n$ なることが次の計算で確かめられる．

$$\begin{aligned}
\sigma' f_n a &= \sigma'(\alpha'_\lambda(f_{l_1} a_1, \ldots, f_{l_j} a_j)) && (f_n a \text{ の定義を代入}) \\
&= t'_\lambda(\sigma' f_{l_1} a_1, \ldots, \sigma' f_{l_j} a_j) && (\sigma' \text{ は擬写だから}) \\
&= t'_\lambda(g\sigma_{l_1} a_1, \ldots, g\sigma_{l_j} a_j) && (\sigma' f_{l_i} = g\sigma_{l_i} \text{ だから}) \\
&= g(t_\lambda(\sigma_{l_1} a_1, \ldots, \sigma_{l_j} a_j)) && (g \text{ は擬写だから}) \\
&= g(\sigma_n[\lambda a_1 \ldots a_j]) && (\sigma_n \text{ の定義による}) \\
&= g\sigma_n a && (a = [\lambda a_1 \ldots a_j] \text{ だから})
\end{aligned}$$

これで，すべての n に対して，$\sigma' f_n = g\sigma_n$ なる f_n が定義された．そこで，σ の定義と同様に，写像 $f \in A \to A'$ を

$$f|_{S_n} = f_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

と定義する．そうすると，$f|_S = \varphi$，$\sigma' f = g\sigma$ が成り立つ．読者が自ら理解度を試すために，証明の最後の段階だけを問題とする．

問題 3.7.4 f は擬写である．

注意 3.7.1 $(A_i)_{i \in I}$ を集合族とし B を集合とするとき，$\prod_{i \in I}(A_i \to B)$ から $(\coprod_{i \in I} A_i) \to B$ への全単射があり，それにより $A_i \to B$ の元 φ_i の族 $(\varphi_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}(A_i \to B)$ に対応する $(\coprod_{i \in I} A_i) \to B$ の元 φ は，$\varphi|_{A_i} = \varphi_i$ $(i \in I)$ をみたすので $\prod_{i \in I} \varphi_i$ で表される．この記法によれば，定理 3.7.1 の証明中に定義した $\sigma \in A \to T$ と $f \in A \to A'$ はそれぞれ $\prod_{n \geq 0} \sigma_n$ と $\prod_{n \geq 0} f_n$ に等しい．

3.8　普遍性と有基性

＄ ここでは，普遍型付代数系と密接な関係にある**有基代数系**の概念について説明する．特に，型付代数系が普遍性を持つためには有基代数系であることが必要十分であることを示す．このことが，普遍型付代数系について論じて行く際に重要な役割を演ずる．

定理 3.8.1 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ **を代数系とし，**n_λ **を** α_λ **の項数とする．このとき，**A **の部分集合** S **についての次の二条件 1, 2 は同等であり，これらをみたす** S **は高々一つしか存在しない．**

1. S **は** A **の生成系であり，次の二条件をみたす．**

1a. S **の元は** $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ **なる形に表せない．**

1b. A **の元は** $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ **なる形に高々一通りに表される（証明冒頭参照）．**

2. S **は次の二条件をみたす．**

2a. A **は** S **の** n **圏** S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ **の直和である（**S_n **は問題 3.2.8 で定義した）．**

2b. $n = 1, 2, \ldots$ **に対して，**S_n **の元** a **を** S_n **の定義に沿って**

$$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \qquad \left(\lambda \in \Lambda,\ a_i \in S_{l_i}\ (i = 1, \ldots, n_\lambda),\ n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1\right)$$

と表すときの λ, a_i, l_i **は** a **に対して一意に定まる．**

証明　S が A の生成系であれば，問題 3.2.6 により $A - S$ の元は $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ なる形に表される．従って条件 1 は，条件 1b を「$A - S$ の元は $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ なる形に唯一通りに表される」と書き換えても同等である（この意味で条件 1b は，S に触れずとも，S についての条件である）．特に，S が条件 1 をみたせば，$S = A - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda$ が成り立つ（定義 3.2.3 参照）．従って，条件 1 をみたす S は高々一つしか存在しない．

(1 $\Longrightarrow$ 2) 条件 1 を仮定する．そうすると $A = [S]$ だから，A は S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ の和である．従って条件 2a のみたされることを示すには，n, n' が相異なる非負整数なら $S_n \cap S_{n'} = \emptyset$ であることを示せばいい．条件 1a により，これは $\min\{n, n'\} = 0$ なら成り立つ．そこで，$\min\{n, n'\}$ についての帰納法を使い，さらに背理法を使う．つまり，$n \neq n'$，$\min\{n, n'\} \geq 1$，$a \in S_n \cap S_{n'}$ と仮定する．そうすると

$$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \qquad \left(\lambda \in \Lambda,\ a_i \in S_{l_i}\ (i = 1, \ldots, n_\lambda),\ n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1\right)$$

$$a = \alpha_{\lambda'}(a'_1, \ldots, a'_{n_{\lambda'}}) \qquad \left(\lambda' \in \Lambda,\ a'_i \in S_{l'_i}\ (i = 1, \ldots, n_{\lambda'}),\ n' = \sum_{i=1}^{n_{\lambda'}} l'_i + 1\right)$$

と書け，まず条件 1b により $\lambda = \lambda'$ と $a_i = a'_i \in S_{l_i} \cap S_{l'_i}$ とが成り立ち，次に後者と帰納法の仮定により $l_i = l'_i$ が成り立つ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$．ところがこのとき，$n = n'$ となって仮定に反する．これで $S_n \cap S_{n'} = \emptyset$ なることが示され，従って条件 2a のみたされることが示された．条件 2b のみたされることを示すには，今の論法を真似ればいい．つまり，上の二式において $n = n'$ とすれば，まず条件 1b により $\lambda = \lambda'$ と $a_i = a'_i \in S_{l_i} \cap S_{l'_i}$ とが成り立ち，次に後者と条件 2a により $l_i = l'_i$ が成り立つ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$．

(2 $\Longrightarrow$ 1) 条件 2 を仮定する．そうすると，条件 2a により S は A の生成系となる．さらに，A の元 a が $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と表されたと仮定する．そうすると，条件 2a により $a_i \in S_{l_i}$ なる l_i があり $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$，$n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1$ と定めれば $a \in S_n$ が成り立つ．$n \geq 1$ であるから，条件 2a により $a \notin S$ が成り立つ．従って条件 1a がみたされる．もう一つの表示 $a = \alpha_{\lambda'}(a'_1, \ldots, a'_{n_{\lambda'}})$ があれば，$a'_i \in S_{l'_i}$ なる l'_i をとって $n' = \sum_{i=1}^{n_{\lambda'}} l'_i + 1$ と定めると $a \in S_{n'}$ も成り立つ．従って条件 2a により $n = n'$ であり，従ってまた，条件 2b により $\lambda = \lambda'$，$a_i = a'_i$ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$ が成り立つ．よって条件 1b もみたされる．

定義 3.8.1 代数系 A とその部分集合 S が定理 3.8.1 の同等な二条件 1, 2 をみたすとき，A は S 上の**有基代数系**であるとか (A, S) は**有基代数系**であるとか言い，S を A の**基**あるいは**基底**と呼ぶ．なお，定理 3.8.1 の性質 1b を**単記性**と呼び，この性質を持つ代数系を**単記代数系**と呼ぶ．

(A, S) が有基代数系のとき，定理 3.8.1 の条件 2a により，A の各元 a に対して $a \in S_n$ なる非負整数 n が唯一つあるから，この n を a の S に関する**階数**と呼び $\operatorname{rk} a$ で表す．

例 3.8.1 この節冒頭に触れたことを敷衍すれば，型付代数系 (A, T, σ) の台 A の部分集合 S について，(A, T, σ, S) が普遍型付代数系であるためには (A, S) が有基代数系であることが必要十分である（このことは定理 3.8.5 で証明する）．また，第 3.6 節冒頭に記した通り，普遍型付代数系の最も重要で普通の例は，各種の論理学で研究される形式言語である．従って形式言語は，有基代数系の最も重要で普通の例でもある．

問題 3.8.1 (✓) ペアノの公理によれば，集合 N から N への写像 σ と N の元 1 が三条件

1. σ は単射である
2. $1 \notin \sigma N$
3. N の部分集合 P で $1 \in P$ かつ $\sigma P \subseteq P$ なるものは N に限る（帰納法の原理）

をみたすとき N の元を自然数と呼ぶが，この公理は，N 上の単項算法 σ に関して $(N, \{1\})$ が有基代数系であることと同等である．

略解　条件 3 は，$\{1\}$ を含む N の台部分系が N に限ることと，つまり $[\{1\}] = N$ なることと同等である．条件 2 は $\{1\}$ についての定理 3.8.1 の条件 1a と同等である．条件 1 は定理 3.8.1 の条件 1b と同等である．

問題 3.8.2 単記代数系において，算法余白の任意の部分集合 S の算包は S 上の有基代数系である．

問題 3.8.3 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ が S 上の有基代数系なら，$A = S \amalg \coprod_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Im} \alpha_\lambda$ が成り立つ．

問題 3.8.4 有基代数系 A の基底は，A の算法余白であり，従って A の最小の生成系である．

略解　最小の生成系であることは問題 3.2.15 による．

問題 3.8.5 f を代数系 A から代数系 A' への同写とする．A' が S' 上の有基代数系であれば A は $f^{-1}S'$ 上の有基代数系であり，A が S 上の有基代数系であれば A' は fS 上の有基代数系である．

略解　$S = f^{-1}S'$ と定めると，$A = f^{-1}A' = f^{-1}[S'] = [f^{-1}S'] = [S]$ が成り立つ．A, A' の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(\alpha'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とし，n_λ を $\alpha_\lambda, \alpha'_\lambda$ の項数とする．$s \in S$ が $s = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と表されれば，$S' \ni fs = \alpha'_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda})$ が成り立ち，(A', S') が定理 3.8.1 の条件 1a をみたすことに反する．従って (A, S) はこの条件 1a をみたす．$a \in A$ が $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) = \alpha_\mu(b_1, \ldots, b_{n_\mu})$ と表されれば，$fa = \alpha'_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda}) = \alpha'_\mu(fb_1, \ldots, fb_{n_\mu})$ が成り立つので，(A', S') が定理 3.8.1 の条件 1b をみたすことより $\lambda = \mu$, $fa_i = fb_i$ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$ が成り立ち，f が単射なので $a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$ が成り立つ．つまり，(A, S) はこの条件 1b をみたす．

定理 3.8.2 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ **を有基代数系とし** n_λ **を** α_λ **の項数とすれば，次の二つのことが成り立つ．**

1. **A の階数 1 以上の元 a は $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ なる形に唯一通りに表せて（そこで $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ を a の<u>語形</u>と呼ぶ）$\operatorname{rk} a = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \operatorname{rk} a_i + 1$ が成り立つ．**
2. **A の階数 0 の元は $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ なる形に表せない．**

証明　条件 2 は定理 3.8.1 の条件 1a そのものである．そこで $a \in A$, $\operatorname{rk} a = n \geq 1$ と仮定する．そうすると a は，A の基底 S の n 圏 S_n に含まれるから，次のように表される．

$$a = \alpha_\mu(b_1, \ldots, b_{n_\mu}) \qquad \left(\mu \in \Lambda,\ b_i \in S_{l_i}\ (i = 1, \ldots, n_\mu),\ n = \sum_{i=1}^{n_\mu} l_i + 1\right)$$

従って $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ とも表されたなら，定理 3.8.1 の条件 1b により実は $\lambda = \mu$, $a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$，従って $\operatorname{rk} a = n = \sum_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1 = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \operatorname{rk} b_i + 1 = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \operatorname{rk} a_i + 1$ が成り立つ．

定理 3.8.3 A **が有基代数系で** B **が** A **の部分系であれば，**B **はその算法余白上の有基代数系である．**

証明　Q を B の算法余白とし，$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ を A, B の代数構造とする．そうすると，$M \subseteq \Lambda$, $B \subseteq A$ であって β_μ は α_μ の B への制限である．従って (B, Q) は定理 3.8.1 の条件 1a, 1b をみたすから，$B = [Q]_B$ を示せばいい．背理法を使うために，$b \in B - [Q]_B$ なる b があると仮定し，その中で階数最小のものをとる．そうすると，$b \notin Q$ であるから $b = \beta_\mu(b_1, \ldots, b_j) = \alpha_\mu(b_1, \ldots, b_j)$ と表され，定理 3.8.2 により $\operatorname{rk} b_i < \operatorname{rk} b$ であるから，b の選び方により $b_i \in [Q]_B$ $(i = 1, \ldots, j)$，従って $b = \beta_\mu(b_1, \ldots, b_j) \in [Q]_B$ となるが，これは矛盾である．

系　$(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ **が** S **上の有基代数系で** $M \subseteq \Lambda$ **のとき，**$R = S \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda-M} \operatorname{Im} \alpha_\lambda$ **と定めれば，**A_M **は** R **上の有基** M **代数系である（問題 3.2.6 参照）．**

証明　問題 3.8.3 により R が A_M の算法余白だからである．

系 2 A **が** S **上の有基** Λ **代数系で** $R \subseteq S$, $M \subseteq \Lambda$ **なら，**$[R]_M$ **は** R **上の有基** M **代数系であって** $S \cap [R]_M = R$ **が成り立つ（定理 3.8.4 参照）．**

証明　問題 3.8.4 と問題 3.2.17 と定理 3.8.3 による．

定理 3.8.4 A **が** S **上の有基** Λ **代数系で** $Q, R \subseteq S$ **かつ** $M, N \subseteq \Lambda$ **なら，**$[Q]_M \cap [R]_N = [Q \cap R]_{M\cap N}$ **が成り立つ．さらに，一般に** $X \subseteq S$, $Y \subseteq \Lambda$ **のとき** X **の** A_Y **における** n **圏を** $X_{Y,n}$ **で表せば，**

$$Q_{M,m} \cap R_{N,n} = \begin{cases} (Q \cap R)_{M\cap N,n} & \cdots \quad m = n \text{ のとき} \\ \emptyset & \cdots \quad m \neq n \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ $(m, n = 0, 1, \ldots)$**．また，**$a \in [Q]_M \cap [R]_N$ **のとき，すなわち** $a \in [Q \cap R]_{M \cap N}$ **のとき，有基代数系** $([Q]_M, Q)$, $([R]_N, R)$, $([Q \cap R]_{M \cap N}, Q \cap R)$ **それぞれにおける** a **の階数は一致する（定理 3.8.3 系 2 参照）．**

証明　問題 3.2.8 により $[X]_Y = \bigcup_{n \geq 0} X_{Y,n}$ であり，問題 3.2.11 により X の $[X]_Y$ による n 圏は $X_{Y,n}$ に等しいから，真ん中の式を証明すれば他が導かれる．相異なる非負整数 m, n に対しては，問題 3.2.10 と問題 3.2.11 と定理 3.8.1 の条件 2a により $Q_{M,m} \cap R_{N,n} \subseteq S_{M,m} \cap S_{N,n} \subseteq S_m \cap S_n = \emptyset$ が成り立つ．問題 3.2.10 と問題 3.2.11 により $Q_{M,n} \cap R_{N,n} \supseteq (Q \cap R)_{M \cap N, n}$ も成り立つから，$Q_{M,n} \cap R_{N,n} \subseteq (Q \cap R)_{M \cap N, n}$ を示せばいい．これは $n = 0$ のときには成り立つから，n についての帰納法を使う．そこで，$a \in Q_{M,n} \cap R_{N,n}$ $(n \geq 1)$ とし，A の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ とする．そうすると，$a = \alpha_\mu(a_1, \ldots, a_{n_\mu})$, $\mu \in M$, $a_i \in Q_{M,m_i}$ $(i = 1, \ldots, n_\mu)$, $n = \sum_{i=1}^{n_\mu} m_i + 1$ なる μ, a_i, m_i と $a = \alpha_\nu(b_1, \ldots, b_{n_\nu})$, $\nu \in N$, $b_j \in R_{N,n_j}$ $(j = 1, \ldots, n_\nu)$, $n = \sum_{j=1}^{n_\nu} n_j + 1$ なる ν, b_j, n_j がある．問題 3.2.10 と問題 3.2.11 により $Q_{M,k}$ も $R_{N,k}$ も S_k に含まれるから $(k = 0, 1, \ldots)$，定理 3.8.1 の条件 2b により $\mu = \nu \in M \cap N$, $n_\mu = n_\nu$, $a_i = b_i$, $m_i = n_i$，従って $a_i \in Q_{M,m_i} \cap R_{N,m_i}$，従って帰納法の仮定により $a_i \in (Q \cap R)_{M \cap N, m_i}$ $(i = 1, \ldots, n_\mu)$，従って $a \in (Q \cap R)_{M \cap N, n}$ が成り立つ．これで $Q_{M,n} \cap R_{N,n} \subseteq (Q \cap R)_{M \cap N, n}$ が示された．

定理 3.8.5　型付代数系 (A, T, σ) **の台** A **の部分集合** S **についての次の二条件 1, 2 は同等であり，この同等な二条件をみたす** S **は高々一つしか存在しない．**

1. (A, T, σ, S) **は普遍型付代数系である．**　　**2.** (A, S) **は有基代数系である．**

証明　定理 3.8.1 により，条件 2 をみたす S は高々一つしか存在しない．条件 1, 2 が同等であることを示すには定理 3.7.1 の証明の一部を繰り返せばいい．以下，$(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を A の代数構造とし n_λ を α_λ の項数とする．

(1 $\Longrightarrow$ 2) (A, T, σ, S) が普遍型付代数系であると仮定する．このとき，$S, T, \tau = \sigma|_S$ に定理 3.7.1 の証明法を適用して，新しい普遍型付代数系を構成することができる．それをここでは $(\overline{A}, T, \overline{\sigma}, S)$ で表す．そこに記したこと（補題 3.7.1 等）から $(\overline{A}, S)$ が定理 3.8.1 の条件 2 をみたすことが分かるので，$(\overline{A}, S)$ は有基代数系である．他方，定理 3.5.1 の一意性部分により，同写 $f \in A \to \overline{A}$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$ なるものがある．従って問題 3.8.5 により，(A, S) も有基代数系である．

(2 $\Longrightarrow$ 1) (A, S) が有基代数系であると仮定して (A, T, σ, S) が普遍性を持つことを示せばいい．つまり，(A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in S \to A'$ が $\sigma'\varphi = \sigma|_S$ をみたすとき，φ が保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張されることを示せばいい．しかしそれは，定理 3.7.1 の証明と同様の方法でできるので，概略のみを述べる．まず，$n = 0, 1, \ldots$ に対して，S の n 圏 S_n から A' への写像 f_n で $\sigma' f_n = \sigma|_{S_n}$ なるものを帰納的に定める．すなわち，0 に対しては $f_0 = \varphi$ と定める．$n \geq 1$ に対しては，$a \in S_n$ を $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$, $a_i \in S_{l_i}$, $n = \sum_{i=1}^{j} l_i + 1$ と表すときの λ, l_i, a_i が定理 3.8.1 の条件 2b により一意に決まり（印刷上の都合で n_λ を j で表している），各 $l \in \{l_1, \ldots, l_j\}$ に対して $f_l \in S_l \to A'$ が $\sigma' f_l = \sigma|_{S_l}$ なるように定められていて，$(f_{l_1} a_1, \ldots, f_{l_j} a_j)$ は λ に対応する A' の算法 α'_λ の定義域に属すので，$f_n a = \alpha'_\lambda(f_{l_1} a_1, \ldots, f_{l_j} a_j)$ と定める．そうすると $\sigma' f_n = \sigma|_{S_n}$ が成り立つ．定理 3.8.1 の条件 2a により A が S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ の直和であるので，$f \in A \to A'$ を $f|_{S_n} = f_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ と定める（注意 3.7.1 参照）．これが保型準写になる．

問題 3.8.6 汎代数系 A とその部分集合 S についての次の二条件は同等であり，この同等な二条件をみたす S は高々一つしか存在しない．

1. (A, S) は普遍汎代数系である．　　2. (A, S) は有基代数系である．

略解　問題 3.4.3 により A が単元集合 T を型代数系とする型付代数系 (A, T, σ) とみなされ，問題 3.5.3 により条件 1 は (A, T, σ, S) が普遍型付代数系であることと同等だからである．

問題 3.8.7 (A, T, σ, S) が普遍型付代数系であって T の台部分系 U が $\sigma A \subseteq U$ をみたすなら，(A, U, σ, S) も普遍型付代数系である．(A, U, σ, S) が普遍型付代数系であって U が代数系 T の台部分系であれば，(A, T, σ, S) も普遍型付代数系である．

略解　定理 3.8.5 と問題 3.4.5 による（定理 3.8.6 の証明参照）．

定理 3.8.6 (A, T, σ, S) **を普遍型付** Λ **代数系とし，**U **を** T **の** M **部分系** $(M \subseteq \Lambda)$ **とする．このとき，**A **の任意の** M **部分系** B **に対して，**B **の** U **部分** B_U **は** A **の** M **部分系であって，その算法余白を** R **とすれば，**$(B_U, U, \sigma|_{B_U}, R)$ **は普遍型付** M **代数系である．特に，**A **の** U **部分** A_U **は** A **の** M **部分系であって，その算法余白を** Q **とすれば，**$(A_U, U, \sigma|_{A_U}, Q)$ **は普遍型付** M **代数系である．**

証明　定理 3.4.1 により B_U は A の M 部分系であって $(B_U, U, \sigma|_{B_U})$ は型付 M 代数系である．定理 3.8.5 と定理 3.8.3 により (B_U, R) は有基代数系であるから，再び定理 3.8.5 により，$(B_U, U, \sigma|_{B_U}, R)$ は普遍型付 M 代数系である．

問題 3.8.8 (A, T, σ, S) を普遍型付 Λ 代数系とし，$M \subseteq \Lambda$ とする．このとき，A の任意の M 部分系 B に対して，B の算法余白を R とすれば，$(B, T_M, \sigma|_B, R)$ は普遍型付 M 代数系である．

略解　定理 3.8.6 において $U = T_M$ とすればいい．

問題 3.8.9 (A, T, σ, S) を普遍型付代数系とし，$(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を A の代数構造とし，$M \subseteq \Lambda$ とし，$R = S \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda - M} \operatorname{Im} \alpha_\lambda$ と定める．そうすると (A_M, T_M, σ, R) は普遍型付 M 代数系である．

略解　問題 3.8.3 により A_M の算法余白が R だから，問題 3.8.8 によりこれが成り立つ．

問題 3.8.10 (A, T, σ, S) を普遍型付 Λ 代数系とし，$R \subseteq S$，$M \subseteq \Lambda$ とし，$B = [R]_M$ と定めれば，$(B, T_M, \sigma|_B, R)$ は普遍型付 M 代数系である．

略解　定理 3.8.3 系 2 の証明の通り R が B の算法余白だから，問題 3.8.8 によりこれが成り立つ．

問題 3.8.11 (A, T, σ, S) を普遍型付 Λ 代数系とし，U を T の M 部分系 $(M \subseteq \Lambda)$ とし，$R \subseteq S_U$ として，$B = [R]_M$ と定める．このとき，$\sigma B \subseteq U$ であって $(B, U, \sigma|_B, R)$ は普遍型付 M 代数系である．

略解　問題 3.8.10 により $(B, T_M, \sigma|_B, R)$ が普遍型付 M 代数系であって問題 3.3.10 により $\sigma B \subseteq U$ が成り立つからである．

問題 3.8.12 (A, T, σ, S) と (A', T, σ', S') が普遍型付代数系であって単射 $\varphi \in S \to S'$ が $\sigma'\varphi = \sigma|_S$ をみたせば，保型準写 $f \in A \to A'$ で $f|_S = \varphi$ なるものが唯一つ存在し，この f は単射であって $fA = [\varphi S]_{A'}$，$S' \cap fA = \varphi S$ をみたす（問題 3.5.7 とそれへの注意参照）．

略解　普遍性により，保型準写 $f \in A \to A'$ で $f|_S = \varphi$ なるものが唯一つ存在し $fA = f([S]_A) = [fS]_{A'} = [\varphi S]_{A'}$ が成り立つ．$B = [\varphi S]_{A'}$ と定めると，$(B, T, \sigma'|_B, \varphi S)$ は普遍型付代数系であるから，普遍性により，保型準写 $f' \in B \to A$ で $f'|_{\varphi S} = \varphi^{-1}$ なるものが存在する．$f'f|_S = \mathrm{id}_S$ であるから $f'f = \mathrm{id}_A$ が成り立ち，従って f は単射である．

問題 3.8.13 (A, T, S) と (A', T, S') が普遍型付代数系であって $f \in A \to A'$ が保型同写であれば，$f(S_t) = S'_t$ $(t \in T)$ が成り立つ（問題 3.5.7 とそれへの注意参照）．

略解　問題 3.5.5 と定理 3.8.5 とによって $fS = S'$ が成り立つ．また，問題 3.4.8 によって $f(A_t) = A'_t$ $(t \in T)$ が成り立つ．これから $f(S_t) = S'_t$ $(t \in T)$ なることが導かれる．

定理 3.8.7 (A, S) **を** $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ **を代数構造とする有基代数系とし，**n_λ **を** α_λ **の項数とする．また，**$K = \Lambda \amalg S$ **と定める．このとき，**A **から半群** $K^+ = \bigcup_{n \geq 1} K^n$ **への写像** f **で次の条件をみたすものが唯一つ存在する．**

$$f|_S = \mathrm{id}_S \qquad f\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr) = \lambda(fa_1)\cdots(fa_{n_\lambda}) \tag{3.8.1}$$

証明　A の各元 a に対する fa を，a の階数 r についての帰納法により次のように定義する．まず $r = 0$ すなわち $a \in S$ のときは $fa = a$ と定める．次に $r \geq 1$ のときは，定理 3.8.2 により a は $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と一意に表され，a_i の階数は r より小さいから fa_i は帰納的に定義されている $(i = 1, \ldots, n_\lambda)$．そこで $fa = \lambda(fa_1)\cdots(fa_{n_\lambda})$ と定める．こうして定義される $f \in A \to K^+$ が (3.8.1) をみたすことは明らかである．K^+ 上の汎算法 β_λ を $\beta_\lambda(k_1, \ldots, k_{n_\lambda}) = \lambda k_1 \cdots k_{n_\lambda}$ と定義すると $(\lambda \in \Lambda)$，(3.8.1) の二番目の条件は f が代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ から代数系 $(K^+, (\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ への擬写であることを意味する．従って問題 3.3.7 により，(3.8.1) をみたす f は唯一つに限る．

系　定理 3.8.7 の仮定と定義の下で，φ **を** K **から半群** M **への写像とすれば，写像** $F \in A \to M$ **で次の条件をみたすものが唯一つ存在する．ただし，半群** M **の算法は乗法の形に表す．**

$$F|_S = \varphi|_S \qquad F\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr) = (\varphi\lambda)(Fa_1)\cdots(Fa_{n_\lambda}) \tag{3.8.2}$$

証明　写像 $\Phi \in K^+ \to M$ を $\Phi(x_1 \cdots x_n) = (\varphi x_1)\cdots(\varphi x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n \in K,\ n = 1, 2, \ldots)$ と定義すれば，Φ は φ の拡張であって半群としての擬写である．これと定理 3.8.7 で存在の示された写像 f を用いて $F = \Phi f$ と定めれば，これが (3.8.2) をみたす．(3.8.2) をみたす F の一意性は定理 3.8.7 の証明の論法で示される．

定義 3.8.2 定理 3.8.7 系によって有基代数系 (A, S) と写像 $\varphi \in K \to M$ に対して定まる写像 $F \in A \to M$ とその像 FA を，それぞれ A の M 上の**表現**・**表現言語**と呼ぶ．

問題 3.8.14 定理 3.8.7 系において，M は加法半群 $\mathbb{Z}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ とし，φ は $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi\lambda = 1$ をみたし $s \in S$ に対して $\varphi s = 0$ をみたす写像として得られる表現 $F \in A \to \mathbb{Z}_0$ について，$Fa = \mathrm{rk}\, a$ が成り立つ．

問題 3.8.15 (✓) 問題 3.8.1 に従って $\mathbb{N}$ を有基代数系とみなす．また，L を任意の集合とする．$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$ の部分集合で $\mathbb{N}$ の表現言語となり得るものをすべて求めよ．

課題 3.8.1 (A, S) を有基代数系とし L を任意の集合とする．L^* の部分集合で A の表現言語となり得るものを特徴付ける性質は如何に記述されるか．

問題 3.8.16 定理 3.8.7 の仮定の下で，表現 $f \in A \to \mathcal{P}S$ で次の条件をみたすものがある．ただし，$\mathcal{P}S$ は $\cup$ を算法とする半群とみなす．

$$fs = \{s\} \quad (s \in S) \qquad f(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})) = (fa_1) \cup \cdots \cup (fa_{n_\lambda}) \qquad \emptyset \notin fA$$

また，表現 $g \in A \to S^*$ で次の条件をみたすものがある．

$$g|_S = \mathrm{id}_S \qquad g(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})) = (ga_1) \cdots (ga_{n_\lambda}) \qquad gA \subseteq S^+$$

定義 3.8.3 第 3.6.2 項の末尾で計算図を計算代数系の元と定義し直したが，計算図の階数や始点をどう定義し直すかが宿題となっていた．これをいま済ますことができる．

代数系 A の計算代数系 $C(A)$ は定理 3.8.5 により A 上の有基代数系となる．従って，$C(A)$ の各元 c には有基代数系としての階数 $\mathrm{rk}\, c$ がある．これを計算図としての c の**階数**と定める．また，問題 3.8.16 のように表現 $f \in C(A) \to \mathcal{P}A$ と表現 $g \in C(A) \to A^*$ とが定まる．そこで，$C(A)$ の各元 c に対して，fc を計算図 c の**始点集合**と定め（始点集合の元は**始点**と呼ぶ），gc を計算図 c の**始点列**と定める．そして，c の始点集合と始点列とをそれぞれ $\mathrm{sp}\, c$，$\mathrm{ssp}\, c$ で表す．

問題 3.8.17 この定義に基づいて問題 3.6.3 を証明し直せ．すなわち，A を代数系とするとき，$C(A)$ の任意の元 c について $\mathrm{tp}\, c \in [\mathrm{sp}\, c]_A$ が成り立つことを示せ．逆に，S が A の部分集合であるとき，$[S]_A$ の任意の元 a に対して，$a = \mathrm{tp}\, c$ かつ $\mathrm{sp}\, c \subseteq S$ なる $C(A)$ の元 c が存在することを示せ．

問題 3.8.18 (A, T, σ, S) が普遍型付代数系なら，擬写 $f \in A \to C(A)$ で $\mathrm{tp}\, f = \mathrm{id}_A$ なるものが唯一つ存在する．この f は単射準写であって $fA = [S]_{C(A)} = \{c \in C(A) \mid \mathrm{sp}\, c \subseteq S\}$ をみたす．従って特に，A は $C(A)$ の台部分系と同形である．

略解 問題 3.7.3 により $(C(A), T, \sigma\, \mathrm{tp}, A)$ が普遍型付代数系で $\sigma|_S = \sigma\, \mathrm{tp}\, |_S$ が成り立つので，問題 3.8.12 により，T 型代数系としての保型準写 $f \in A \to C(A)$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$ なるものが唯一つ存在し，この f は単射で $fA = [S]_{C(A)}$ をみたす．$c \in C(A)$ について，$c \in [S]_{C(A)}$ と $\mathrm{sp}\, c \subseteq S$ とが同等であることが，$c \in S_n$ なる n および c の階数についての帰納法で証明される．

$f|_S = \mathrm{id}_S$ なることより $\mathrm{tp}\, f|_S = \mathrm{id}_S$ も成り立つので，$\mathrm{tp}\, f = \mathrm{id}_A$ が成り立つ．逆に，擬写 $g \in A \to C(A)$ が $\mathrm{tp}\, g = \mathrm{id}_A$ をみたせば，g は T 型代数系としての保型準写になる．また $s \in S$ に対しては，$\mathrm{tp}(gs) = s$ は素元だから gs は $C(A)$ の素元系すなわち A に属し，従って $gs = \mathrm{tp}(gs) = s$ が成り立つ．つまり $g|_S = \mathrm{id}_S$ であるから，$g = f$ が成り立つ．

3.9　関係の基本概念

＄ ここには，本書で必要になる「関係」についての概念・用語・記法を，周知・常識的のものから新奇なものまでまとめて説明する（第 3.33 節参照）．周知・常識的の事柄の多くについては，第 1.2.5 項と第 3.34 節で参考文献として挙げる「現代数学概説 I」の書き方を参考にした．

集合 A, B の直積 $A \times B$ の部分集合を A, B 間の**関係**とも呼ぶ．ただし，A, A 間の関係は A **上の関係**と呼ぶ [27]．「関係」と言ったら，通常この $A = B$ という狭い意味の関係を表す．**この節でも，そうでない旨断らない限り，狭い意味の関係について述べる**．ただし，$A \neq B$ の場合も大変重要である．たとえば，第 3.24 節以降で示す通り，集合 A を台とする代数系が A と A^*, A 間の関係 R の組み (A, R) すなわち「界」と抽象され，このことは論理代数学の鍵の一つである．

[27] そのため，「A, B 間の関係」を「$A \times B$ 上の関係」と呼ぶ用語法は採用できない．

集合 A, B 間の関係 R に対して，$A \times B$ の元 (a, b) が $(a, b) \in R$ をみたすことを $a\,R\,b$ で表し，これを「(a, b) **は関係** R **をみたす**」「a **は** b **と** R **関係にある**」等と読む．(a, b) が関係 R をみたさない（a が b と R 関係にない）ことは，R に斜線を重ねて $a \not R b$ で表す．そうすると，関係 R をみたす $(a, b) \in A \times B$ の全体は R に他ならない．また $a\,R\,b$ という記号列は，厳格には R **式**と呼び，厳格でないときは**式**と呼ぶ．たとえば，**相等関係** $=$ や大小関係 $\leq$ や $\geq$ は関係の典型であるが，等式 $a = b$ と不等式 $a \leq b$ と $a \geq b$ は，厳格にはそれぞれ $=$ 式と $\leq$ 式と $\geq$ 式である．

なお，$\mathbb{T} = \{0, 1\}$ とすれば，$\mathcal{P}(A \times B)$ と $(A \times B) \to \mathbb{T}$ の間に一対一対応がある．このことに留意して A, B 間の関係を $(A \times B) \to \mathbb{T}$ の元と定義する流儀もある．この流儀では，$A \times B$ の元 (a, b) が関係 R をみたすとは $R(a, b) = 1$ なることを指す．この流儀は本書では採用しない．

3.9.1　双対・制限・拡張・引き戻し

§ 集合 A, B 間の関係 R に対して，B, A 間の関係 R^* で「$a\,R\,b \iff b\,R^*\,a$」なるものを R の**双対関係** [28] と呼ぶ．たとえば，数の大小関係 $a \leq b$ と $b \geq a$ は，互いに他の双対関係である．そこで，**関係を表す記号を左右反転させた記号は，もとの関係の双対関係を表す**ものとする．

A', B' がそれぞれ A, B の部分集合であるとき，$R \cap (A' \times B')$ を A', B' 間の関係とみなすことができる．そうみなしたものを R **の** $A' \times B'$ **への制限**と呼び $R|_{A' \times B'}$ でも表す．ただし $A' = B'$ の場合は，R **の** A' **への制限**と呼び $R|_{A'}$ で表す．逆に R' が A', B' 間の関係であるとき，$R|_{A' \times B'} = R'$ なる A, B 間の関係 R を R' **の** A, B **への拡張**と呼ぶ．ただしまた，$A = B$ の場合は R' **の** A **への拡張**と呼ぶ．なお，制限は一意であるが，拡張は $A' \times B' \neq A \times B$ なら一意ではない．

f が集合 A' から集合 A への写像で R が A 上の関係であるとき，A' 上の関係 R_f を

$$a\,R_f\,b \iff fa\,R\,fb$$

によって定義することができる．この関係 R_f を R の f による**引き戻し**と呼び，f を R_f の**引き戻し写像**と呼ぶ．たとえば，A 上の関係 R の部分集合 B への制限 $R|_B$ は，R の埋め込み写像 $\mathrm{id}_B \in B \to A$ による引き戻しである．

なお，集合 A の直積 $A \times A$ の部分集合 $\{(a, a) \mid a \in A\}$ を $A \times A$ の**対角線**と呼ぶが，これを A 上の関係とみなしたものは相等関係 $=$ に他ならない．

3.9.2　同値関係と写像

§ 関係 R が**反射的・対称的・推移的**であるとはそれぞれ，R が次の法則に従うことを言う．

反射律： $a\,R\,a$

対称律： $a\,R\,b$ なら $b\,R\,a$

推移律： $a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら $a\,R\,c$

問題 3.9.1 反射律・対称律・推移律のそれぞれに従う関係の双対・制限・引き戻しもそれぞれ，同じ法則に従う．対称律に従うことは，双対関係に等しいことと同等である．

---

[28] この「双対」は，数学者は「そうつい」と読み習わしていて，それを改める必要もないが，漢語の本来からは「そうたい」と読むべきであろう．藤堂明保編「学研漢和大辞典」によれば，双対（そうたい）は「ならんで向き合う」ことを意味し，双対（そうつい）は「相ならぶ対句」を意味する．

反射律・対称律・推移律を合わせた法則を**同値律**と呼び [29]，集合 A 上の同値律に従う関係を A 上の**同値関係**と呼ぶ．A 上の同値関係 R は A を**同値類**に分割する．それら同値類すべてから成る $\mathcal{P}A$ の部分集合を A/R で表し，A の R による**商集合**と呼ぶ．A の元 a を含む同値類を a/R で表す．そうすると，記号 /R は A から A/R への写像を表すともみなせる．この写像を R による A の**類別写像**と呼ぶ．

同値関係 R と類別写像 /R の間には次の関係がある．

$$a\,R\,b \iff a/R = b/R$$

つまり R は，A/R 上の相等関係 = の類別写像 /R による引き戻しである．逆に，集合 A から集合 B への写像 f に対して，B 上の相等関係 = の f による引き戻し $=_f$ は，問題 3.9.1 により A 上の同値関係である．そこで，$=_f$ と f を同一視して，写像 f を同値関係と呼んだり，$A/{=_f}$ を A/f と書いたりする．従ってこの場合には，A の元 a を含む同値類は a/f で表すことになる．

3.9.3　順序関係

§ 関係 R が**反対称的**であるとは，R が次の法則に従うことを言う．

反対称律： $a\,R\,b$ かつ $b\,R\,a$ なら $a = b$

そして，反射律・推移律・反対称律すべてに従う関係を**順序関係**と呼び，通常は $\leq$ あるいは同類の $\leqq$，$\leqslant$，$\subseteq$，$\sqsubseteq$，$\preccurlyeq$ などの記号で表す．また，$x \leq y$ かつ $x \neq y$ なることを $x < y$ で表し，$\leqq$，$\leqslant$，$\subseteq$，$\sqsubseteq$，$\preccurlyeq$ 等についても同様にする．たとえば，X が集合 Y の部分集合であることを $X \subseteq Y$ で表し，X が Y の真部分集合であることを $X \subset Y$ で表してきたが（端書き参照），それは包含関係 $\subseteq$ が任意の集合 S の巾集合 $\mathcal{P}S$ 上で順序関係だからである．なお，反射律と推移律に従う関係を**擬順序関係**と呼ぶ．

問題 3.9.2 反対称律に従う関係の双対と制限も反対称律に従う．反対称律に従う関係の引き戻しは，引き戻し写像が単射であれば反対称律に従う．順序関係の双対と制限も順序関係である（これらをそれぞれ**双対順序関係**・**制限順序関係**と呼ぶ）．順序関係の引き戻しが順序関係であるためには，引き戻し写像が単射であることが必要十分である（順序関係の引き戻しで順序関係であるものを**引き戻し順序関係**と呼ぶ）．

問題 3.9.3 推移的な関係 R が反対称律に従うためには，次の法則に従うことが必要十分である．

挟撃律： $a_{i-1}\,R\,a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ かつ $a_0 = a_n$ なら $a_{i-1} = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

以下この項では，そうでない旨断らない限り，集合 A **とその上の順序関係** $\leq$ **との組み，すなわち順序集合**$(A, \leq)$ **について記す．**ただし，代数系を台集合のみで表示することがあると同様，順序集合も台となる集合 A だけで表示することがある．

B が A の部分集合であれば，$\leq$ の B への制限 $\leq|_B$ が順序関係であるので，順序集合 $(B, \leq|_B)$ が出来る．こういう順序集合を，もとの順序集合の**部分順序集合**とか**制限順序集合**とかと呼ぶ．

[29]例 3.29.1 参照．法則を合わせることについては問題 3.29.1 参照．

問題 3.9.4 任意の順序集合 $(A, \leq)$ と集合 V に対して，集合 $V{\to}A$ 上の順序関係 $\leq$ が次のように定義される．すなわち，$V{\to}A$ の任意の二元 f, g に対して

$$f \leq g \iff \text{任意の } v \in V \text{ に対して } fv \leq gv$$

（これを A の順序関係の V **乗**とか $V{\to}A$ 上の**巾順序関係**とかと呼び，順序集合 $(V{\to}A, \leq)$ を $(A, \leq)$ の V **乗**と呼ぶ）．特に任意の集合 S と V に対して，集合 $V{\to}\mathcal{P}S$ 上の巾順序関係 $\subseteq$ が次のように定義される．

$$f \subseteq g \iff \text{任意の } v \in V \text{ に対して } fv \subseteq gv$$

問題 3.9.5 順序集合の族 $(A_i, \leq_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し，直積 $\prod_{i=1}^n A_i$ 上に次のように定義した関係 $\leq$ は順序関係である（$\leq$ および順序集合 $\left(\prod_{i=1}^n A_i, \leq\right)$ を，$\leq_i$ および $(A_i, \leq_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ の**直積**と呼ぶ）．すなわち，$(a_1, \ldots, a_n)$，$(b_1, \ldots, b_n) \in \prod_{i=1}^n A_i$ に対し

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \iff a_i \leq_i b_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

問題 3.9.6 順序集合の族 $(A_i, \leq_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し，直積 $\prod_{i=1}^n A_i$ 上に次のように定義した関係 $\leq$ は順序関係である（$\leq$ および順序集合 $\left(\prod_{i=1}^n A_i, \leq\right)$ を，$\leq_i$ および $(A_i, \leq_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ の**辞書式直積**と呼ぶ）．すなわち，$(a_1, \ldots, a_n)$，$(b_1, \ldots, b_n) \in \prod_{i=1}^n A_i$ に対し

$$\begin{aligned}&(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \\ &\qquad\qquad \iff a_i = b_i \ (i = 1, \ldots, k-1),\ a_k <_k b_k \text{ なる } k \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ がある}\end{aligned}$$

ただし矢印の右側の条件は，$k = 1$ のときは $a_1 <_1 b_1$ なることを意味し，$k = n + 1$ のときは $a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なることを意味する．

問題 3.9.7 順序集合の族 $(A_i, \leq_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対し，直和 $\coprod_{i=1}^n A_i$ 上の関係 $\leq$ を

$$a \leq b \iff a, b \in A_i,\ a \leq_i b \text{ なる } i \text{ があるか，} a \in A_i,\ b \in A_j,\ i < j \text{ なる } i, j \text{ がある}$$

と定義すれば，$\leq$ は順序関係であり各 $\leq_i$ の拡張である（$\leq$ および順序集合 $\left(\coprod_{i=1}^n A_i, \leq\right)$ を，$\leq_i$ および $(A_i, \leq_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ の**辞書式直和**と呼ぶ）． **終**

任意の $a, b \in A$ に対して，A の八種の部分集合を次のように定義する（括弧の形の違いに注意）．

$$\begin{aligned}
[ab] &= \{x \in A \mid a \leq x \leq b\} & [a{\to}) &= \{x \in A \mid a \leq x\} \\
(ab] &= \{x \in A \mid a < x \leq b\} & (a{\to}) &= \{x \in A \mid a < x\} \\
[ab) &= \{x \in A \mid a \leq x < b\} & ({\leftarrow}b] &= \{x \in A \mid x \leq b\} \\
(ab) &= \{x \in A \mid a < x < b\} & ({\leftarrow}b) &= \{x \in A \mid x < b\}
\end{aligned}$$

これらと A 自身を A の**区間**と呼び，A 以外の上記八種の区間に対しては，a を**下端**と呼び b を**上端**と呼び，下端と上端を**端**と総称する．また，端をすべて含む区間を**閉区間**と呼び，端をどれも含まない区間を**開区間**と呼ぶ．また，区間の中でも特に，$[a{\to})$ と $(a{\to})$ を**上方区間**と呼び，$({\leftarrow}b]$ と $({\leftarrow}b)$ を**下方区間**と呼び，上下端のある区間を**真正区間**と呼ぶ [30]．さらに，下方区間の概念を一

[30] これら「区間」の概念は，$(A, \leq)$ が後出の線形順序集合でなくとも，$a \leq b$ でなくとも定義される．$a \leq b$ でなければ $[a, b]$ は空であり，$a < b$ でなければ，a, b を端とする真正区間は $[a, b]$ 以外は空である．また，A にたとえば最大元 b があれば $[a, b] = [a{\to})$ であるから，真正区間が同時に上方区間または下方区間となることもある．

般化して，A の部分集合 B が条件「$x \in B,\ y \in A,\ y \leq x \implies y \in B$」をみたすとき，B は A において**下方的**であると言う．**上方的**の概念も双対的に同様に，つまりこの条件中の $\leq$ を双対関係 $\geq$ に替えることで定義される．

問題 3.9.8 A の各部分集合 B に対して，A の部分集合 $\overleftarrow{B}$ と $\overrightarrow{B}$ を次のように定める．

$$\overleftarrow{B} = \bigcup_{b \in B} (\leftarrow b] \qquad\qquad \overrightarrow{B} = \bigcup_{b \in B} [b \rightarrow)$$

そうすると，$\overleftarrow{B}$ は下方的で B を含む A の部分集合の中で包含関係 $\subseteq$ に関して最小のものであり，$\overrightarrow{B}$ についても双対的に同様である（そこで $\overleftarrow{B}$ と $\overrightarrow{B}$ を B の A における**下方包・上方包**と呼ぶ）．

問題 3.9.9 各 $a \in A$ に対して $P_a = [a\rightarrow)$，$Q_a = (\leftarrow a]$ と定めると，次の四つのことが成り立つ．

$$P_a \cap Q_a = \{a\} \qquad\qquad b \in P_a \implies P_b \subseteq P_a$$
$$b \in P_a \iff a \in Q_b \qquad\qquad a \in Q_b \implies Q_a \subseteq Q_b$$

逆に，集合 A を添数集合とする A の部分集合族 $(P_a)_{a\in A}$ と $(Q_a)_{a\in A}$ が左側の二条件をみたして右側の二条件のどちらかをみたすとき，$b \in P_a$（すなわち $a \in Q_b$）なることを $a \leq b$ で表せば，$\leq$ は順序関係であって $P_a = [a\rightarrow)$，$Q_a = (\leftarrow a]$ が成り立つ（問題 3.9.61 参照）． **終**

$A = (\leftarrow a]$ をみたす a を A の**最大元**と呼び，$A = [a\rightarrow)$ をみたす a を A の**最小元**と呼ぶ．最大元と最小元はそれぞれ高々一つしか存在しないので，存在する場合には，それぞれ 1, 0 あるいは $\max A$，$\min A$ で表す（誤解の恐れのある場合は $\max_{\leq} A$，$\min_{\leq} A$ と書く）[31]．また，$[a\rightarrow) = \{a\}$ をみたす $a \in A$ を A の**極大元**と呼び，$(\leftarrow a] = \{a\}$ をみたす $a \in A$ を A の**極小元**と呼ぶ．B が A の部分集合であれば，部分順序集合 $(B, \leq|_B)$ に以上のことを適用できて，B の最大元・最小元・極大元・極小元について云々することができる．

A の部分集合 B に対して，$B \subseteq (\leftarrow a]$ をみたす $a \in A$ を B の**上界**と呼び，$B \subseteq [a\rightarrow)$ をみたす $a \in A$ を B の**下界**（かかい）と呼ぶ．さらに，B の上界の全体 $\bigcap_{b\in B}[b\rightarrow)$ の最小元を B の**上限**と呼んで $\sup B$ で表し，B の下界の全体 $\bigcap_{b\in B}(\leftarrow b]$ の最大元を B の**下限**と呼んで $\inf B$ で表す [32]（誤解の恐れのある場合は $\sup_A B$，$\inf_A B$，$\sup_{\leq} B$，$\inf_{\leq} B$ などと書く）．従って $B = \emptyset$ のときには，A の任意の元が B の上界であるから，B の上限は A の最小元に等しい（それは存在することもしないこともある）．同様に，$B = \emptyset$ のときの B の下限は A の最大元に等しい．$\max B$ が存在すれば $\max B = \sup B$ が成り立ち，$\sup B$ が存在して B に属せば $\max B = \sup B$ が成り立つ．min についても同様である．

集合 S の巾集合 $\mathcal{P}S$ が包含関係 $\subseteq$ によって成す順序集合においては，部分集合 $\mathcal{B}$ の上限と下限は和 $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ と結び $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$ であり，従ってこれらは，$\mathcal{B} = \emptyset$ のときには $\emptyset$ と S である．なお，$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ と $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$ を時に $\bigcup\mathcal{B}$ と $\bigcap\mathcal{B}$ で表す．

各 $a \in A$ に対して，$(\leftarrow a)$ と $(a\rightarrow)$ をそれぞれ a の**前組**と**後組**と呼ぶ．さらに，a の前組の極大元を a の**直前**の元と呼び，a の後組の極小元を a の**直後**の元と呼ぶ．ただし，「前」「後」をそれぞれ「下」「上」に換えて呼ぶことがある

問題 3.9.10 順序集合 $(A, \leq)$ における最大元・最小元・極大元・極小元・上界・下界・上限・下限・前組・後組・直前・直後の概念は，双対順序集合 $(A, \geq)$ においてはそれぞれ最小元・最大元・

[31]記号「max」と「min」はそれぞれ「maximum」と「minimum」に因む．
[32]記号「sup」と「inf」はそれぞれ「supremum」と「infimum」に因む．

極小元・極大元・下界・上界・下限・上限・後組・前組・直後・前直となる．すなわち，大と小，上と下，前と後が入れ替わる（このことを順序集合についての**双対性**と呼ぶ）．

略解　$a \in A$ が $\leq$ について $A = [a\to)$ をみたせば $\geq$ についてはA $= (\leftarrow a]$ をみたすから，$\min_{\leq} A = \max_{\geq} A$ である．従って $\sup_{\leq} B = \min_{\leq}\left(\bigcap_{b\in B}[b\to)\right) = \max_{\geq}\left(\bigcap_{b\in B}(\leftarrow b]\right) = \inf_{\geq} B$.

問題 3.9.11 A の二元 a, b についての「a が b の直前の元である」「b が a の直後の元である」「$a < b$ かつ $(a, b) = \emptyset$」の三条件は同等である．

問題 3.9.12 $\mathcal{F}$ が順序集合 A の V 乗 V→A の部分集合であって任意の $v \in V$ に対し $\inf_A\{fv \mid f \in \mathcal{F}\}$ が存在すれば，$\inf_{V\to A} \mathcal{F}$ も存在し，任意の $v \in V$ に対して $(\inf_{V\to A} \mathcal{F})v = \inf_A\{fv \mid f \in \mathcal{F}\}$ が成り立つ．上限についても同様である．また，V→A の元 f について

$$f = \min(V\to A) \iff \text{任意の } v \in V \text{ に対して } fv = \min A$$

が成り立つ．従って V→A に最小元があるためには，A に最小元のあることが必要十分である．最大元についても同様である．　**終**

$(B, \leqq)$ をもう一つの順序集合とし，$f \in A\to B$ とする．そして，f が

$$x \leq y \implies fx \leqq fy \qquad (\textbf{増加律})$$

なる法則に従うとき，f は**増調**な写像であると言ったり，f を**増写**と呼んだりする．また，f が

$$x \leq y \iff fx \leqq fy$$

なる法則に従うとき，「$x < y \implies fx < fy$」が成り立つので，f を**真増写**と呼ぶ．真増写はまた単射である（問題 3.9.13 参照）．そこで，真増写かつ全射であるものを**同順写**と呼び，A から B への同順写があるとき，A は B に**同順**であると言う．さらに，$\leqq$ の双対順序関係 $\geqq$ についての増写・増調・真増写・同順写・同順をそれぞれ，**減写・減調・真減写・逆順写・逆順**と言う．たとえば，減調な写像すなわち減写は

$$x \leq y \implies fx \geqq fy \qquad (\textbf{減少律})$$

なる法則に従う写像であり，真減写は次の法則に従う写像である．

$$x \leq y \iff fx \geqq fy$$

なお，増調な写像と減調な写像を**単調**な写像または**単調写**と総称する [33].

問題 3.9.13 真増写は増調な単射であるが，その逆は真ではない（問題 3.9.27 参照）．

問題 3.9.14 順序集合 $(A, \leq)$ から順序集合 $(B, \leqq)$ への写像 f について次のことが成り立つ．

1. f が増写であるためには，任意の $x \in A$ に対して $f[x\to) \subseteq [fx\to)$ の成り立つことが必要十分である．

[33]「増調」から「単調写」までは本書独自の用語法である．普通は，たとえば「同順」は「順序同形」と言う．しかし，代数系の「同形」を「形を同じうする」の意味に解したのに釣り合わせて,「順序を同じうする」の意味で「同順」と言うことにした．「同形」についての脚注 [18] 参照．

2. f が真増写であるためには，任意の $x \in A$ に対して $f[x\rightarrow) \subseteq [fx\rightarrow)$ と $f^{-1}[fx\rightarrow) \subseteq [x\rightarrow)$ の成り立つことが必要十分である．
3. f が同順写であるためには，f が全単射であって任意の $x \in A$ に対して $f[x\rightarrow) = [fx\rightarrow)$ の成り立つことが必要十分である．

上の各項は $[x\rightarrow)$ と $[fx\rightarrow)$ をそれぞれ $(\leftarrow x]$ と $(\leftarrow fx]$ に書き換えても正しい．

問題 3.9.15 $(A, \leq)$ が順序集合 $(B, \leqq)$ の部分順序集合であれば，A から B への埋め込み写像は真増写である．増写の合成は増写であり，真増写と同順写についても同様である．同順写の逆写像は同順写である．

問題 3.9.16 f が A から集合 B への全単射であるとき，$\leqq$ を A 上の順序関係 $\leq$ の f^{-1} による引き戻しとすれば，$(B, \leqq)$ は順序集合であって f は $(A, \leq)$ から $(B, \leqq)$ への同順写である（こうして出来る順序集合 $(B, \leqq)$ を順序集合 $(A, \leq)$ の f による**複製**と呼ぶ）．

問題 3.9.17 f が順序集合 $(A, \leq)$ から順序集合 $(B, \leqq)$ への真増写であるとき，A を含む集合 C と全単射 $F \in B\rightarrow C$ で $Ff = \mathrm{id}_A$ なるものをとって $(B, \leqq)$ の F による複製 $(C, \leqslant)$ を作れば，$(A, \leq)$ は $(C, \leqslant)$ の部分順序集合である．

問題 3.9.18 f が順序集合 $(A, \leq)$ から順序集合 $(B, \leqq)$ への同順写であるとき，A の部分集合 X に下限 $\inf_A X$ があれば $f(\inf_A X) = \inf_B(fX)$ が成り立ち，上限についても同様である．

略解　$A = (\leftarrow a]$ であれば問題 3.9.14 により $B = (\leftarrow fa]$ であるから，$f(\max A) = \max B$ が成り立つ．これを A の任意の部分集合 X と fX に使って $f(\max X) = \max(fX)$ を得る．従って，

$$\begin{aligned} f(\inf_A X) &= f\left(\max\left(\textstyle\bigcap_{x\in X}(\leftarrow x]\right)\right) = \max\left(f\left(\textstyle\bigcap_{x\in X}(\leftarrow x]\right)\right) \\ &= \max\left(\textstyle\bigcap_{x\in X} f(\leftarrow x]\right) = \max\left(\textstyle\bigcap_{x\in X}(\leftarrow fx]\right) = \max\left(\textstyle\bigcap_{y\in fX}(\leftarrow y]\right) = \inf_B(fX) \end{aligned}$$

問題 3.9.19 $A\rightarrow A$ の二元 φ, ψ が $A\rightarrow A$ 上の巾順序関係 $\leq$ について $\varphi \leq \psi$ をみたし φ または ψ が増写であれば，任意の自然数 n について $\varphi^n \leq \psi^n$ が成り立つ．

略解　ある自然数 n について $\varphi^n \leq \psi^n$ が成り立てば，φ が増写なら $\varphi\varphi^n \leq \varphi\psi^n$ が成り立ち，他方で，$\varphi \leq \psi$ なることにより $\varphi\psi^n \leq \psi\psi^n$ が成り立つ．　終

順序集合 $(A, \leq)$ において任意の $a \in A$ に対して $[a\rightarrow) \cup (\leftarrow a] = \{a\}$ が成り立つとき（問題 3.9.9 参照），$(A, \leq)$ は**離散的**であると言う．対照的に，任意の $a \in A$ に対して $A = [a\rightarrow) \cup (\leftarrow a]$ が成り立つとき，$(A, \leq)$ は**線形**であると言い，$\leq$ を**線形順序関係**と呼ぶ [34]．またこれらに関連して，A の二元 a, b が**比較可能**であるとは，$a \leq b$ と $b \leq a$ のどちらかが成り立つことを言う．

問題 3.9.20 $(A, \leq)$ が離散順序集合であるためには，A の任意の相異なる二元が比較不可能であることも，A の任意の元が極大元であることも，A の任意の元が極小元であることも，いずれも必要十分である．

---

[34]「線形順序」を「全順序」と言うことも多いが,「total order」の安直訳で好ましくない．順序集合を有向グラフで表せば，離散順序集合は辺が無く頂点が離れ散るのに対し，線形順序集合は頂点と辺が一本線の形を成す．

問題 3.9.21 順序集合の極大元の全体は制限順序関係について離散的である．逆に，順序集合 A の部分集合 B が制限順序関係について離散的で，さらに A が B の下方包 $\overleftarrow{B}$ に等しければ（ツォルンの補題の系参照），B は A の極大元の全体に等しい．

問題 3.9.22 $(A, \leq)$ が線形順序集合であるためには，A の任意の二元が比較可能であることも，A の任意の空でない有限部分集合に最大元が有ることも，A の任意の空でない有限部分集合に最小元が有ることも，いずれも必要十分である．

問題 3.9.23 $(A, \leq)$ が線形順序集合であって $a_0, a_1, \ldots, a_n, b \in A$ が $a_{i-1} \leq a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ と $a_0 \leq b < a_n$ をみたせば，$a_{i-1} \leq b < a_i$ なる $i \in \{1, \ldots, n\}$ が存在する．

問題 3.9.24 $(A, \leq)$ を線形順序集合とするとき，A の部分集合 B が A の区間であるためには，$x \leq y$ なる任意の $x, y \in B$ に対して $[x, y] \subseteq B$ の成り立つことが必要十分である．

略解　十分であることは次の論法で示される．たとえば B に下限 a と上限 b がある場合，$a < z < b$ なる任意の z に対して $a \leq x < z < y \leq b$ なる $x, y \in B$ が存在するから $z \in [x, y] \subseteq B$，従って $(a, b) \subseteq B \subseteq [a, b]$ が成り立つ．

問題 3.9.25 $(A, \leq)$ を線形順序集合とし，B を A の部分集合とする．このとき次のことが成り立つ．

1. B の二元 x, y が $x \leq y$ と $[x, y] \subseteq B$ をみたすことを $x \leq_B y$ で表して出来る B 上の関係 $\leq_B$ は順序関係である．
2. $x \leq_B y$ または $y \leq_B x$ であることを $x =_B y$ で表して出来る B 上の関係 $=_B$ は同値関係である（そこで $=_B$ による同値類を B の**連結成分**と呼ぶ）．
3. B の連結成分はすべて A の区間である．
4. A の区間 K が B に含まれれば，K は B のある連結成分に含まれる．

略解　1. $x \leq_B y$ かつ $y \leq_B z$ であれば，問題 3.9.23 により $[x, z] = [x, y] \cup [y, z] \subseteq B$ が成り立つので，$x \leq_B z$ が成り立つ．

2. $x \leq_B y$ かつ $x \leq z \leq y$ であれば $x \leq_B z \leq_B y$ が成り立つ．このことから $=_B$ が推移律に従うことが導かれる．

3. C を B の連結成分とし $x, y \in C$，$x \leq y$ とすれば，$x \leq_B y$ であり，従って結論 2 の略解で使ったことにより $[x, y] \subseteq C$ が成り立つ．従って問題 3.9.24 により C は区間である．

問題 3.9.26 $(A, \leq)$ を線形順序集合とし，$\mathcal{P}A$ に集合算法 $X \cap Y$, $X \cup Y$, X° を与えて代数系とみなす[35]（例 3.13.7 参照）．そして，A の区間の有限和の全体を $\mathfrak{P}$ で表す（零個の区間の和は上限の定義により $\emptyset$ である）．そうすると $\mathfrak{P}$ は，A の区間の全体の $\mathcal{P}A$ における算包に等しい（そこで $\mathfrak{P}$ を A の**区間包**と呼ぶ）．

同様に，A の $(a, b]$，$(\leftarrow a]$，$(a \rightarrow)$ いずれかの形の区間の有限和の全体を $\mathfrak{P}'$ で表せば，$\mathfrak{P}'$ は，$\{(a\rightarrow) \mid a \in A\}$ の算包にも，$\{(\leftarrow a] \mid a \in A\}$ の算包にも等しい（そこで $\mathfrak{P}'$ を A の**偏区間包**と呼ぶ）．また，C を $B \in \mathfrak{P}'$ の連結成分とすれば，$C = B = A$ であるか，または C は A の $(a, b]$，$(\leftarrow a]$，$(a \rightarrow)$ いずれかの形の区間である．A の最少元以外の元に直前の元があれば，$\mathfrak{P}'$ は $\mathfrak{P}$ に等しい．

[35]本書では，集合 X の部分集合 Y の補集合 $X - Y$ を Y° で表す．その理由については端書き参照．

略解　K が a, b を下端･上端とする区間で L が c, d を下端･上端とする区間なら，$\max\{a, c\}$, $\min\{b, d\}$ が存在し，$K \cap L$ はこれらを下端・上端とする区間となる．また，K° は a を上端とする下方区間と b を下端とする上方区間の和となる．これらのことや $\cup, \cap$ についての分配律や法則 $(X \cup Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ$ により，$I, J \in \mathfrak{P}$ なら $I \cap J$, $I^\circ \in \mathfrak{P}$ が成り立つ．

$\mathfrak{P}'$ の元 B の連結成分 C については次のようにすればいい．A と $(a, b]$, $(\leftarrow a]$, $(a \rightarrow)$ いずれかの形の区間の全体を $\mathfrak{Q}$ で表す．$(a, b]$, $(\leftarrow a]$, $(a \rightarrow)$ なる形の区間をそれぞれ，第一種・第二種・第三種の区間と呼ぶ．そうすると問題 3.9.25 により，C は A の区間であり，また，B が $\mathfrak{Q}$ に属す区間の有限和であるから，C もそうである．C に含まれるそういう形の区間 K と L の和 $K \cup L$ がやはり C に含まれるそういう形の区間に含まれることを示せばいい．

まず $K \cap L \neq \emptyset$ の場合を考える．この場合 K, L が共に第一種であれば $K \cup L$ も第一種の区間であり，K, L が第一種と第二種であれば $K \cup L$ は第二種の区間であり，K, L が第一種と第三種であれば $K \cup L$ は第三種の区間であり，K, L が第二種と第三種であれば $K \cup L$ は A に等しく，K, L が共に第二種か共に第三種であれば $K \cup L$ は第二種か第三種の区間である．

次に $K \cap L = \emptyset$ の場合を考える．$K \neq \emptyset \neq L$ と仮定していい．

K, L が共に第一種の場合：$K \cap L = \emptyset$ であるから $K = (a, b]$, $L = (c, d]$, $b \leq c$ と仮定してよく，このとき，C が区間であることにより $[b, d] \subseteq C$ であるから，$K \cup L \subseteq (a, d] \subseteq C$ が成り立つ．

K が第一種で L が第二種の場合：$K \cap L = \emptyset$ であるから $K = (a, b]$, $L = (\leftarrow c]$, $c \leq a$ であるが，$[c, b] \subseteq C$ であるから，$K \cup L \subseteq (\leftarrow b] \subseteq C$ が成り立つ．

K が第一種で L が第三種の場合：$K \cap L = \emptyset$ であるから $K = (a, b]$, $L = (c \rightarrow)$, $b \leq c$ であるが，$d \in (c \rightarrow)$ とすれば，$[b, d] \subseteq C$ であるから，$K \cup L \subseteq (a \rightarrow) \subseteq C$ が成り立つ．

K が第二種で L が第三種の場合：$K \cap L = \emptyset$ であるから $K = (\leftarrow a]$, $L = (b \rightarrow)$, $a \leq b$ であり，$c \in (b \rightarrow)$ とすれば，$[a, c] \subseteq C$ であるから，$K \cup L \subseteq A \subseteq C$ が成り立つ．

K, L が共に第二種か共に第三種の場合：$K \cup L$ は K または L に等しい．

$a \in A$ に直前の元 b があれば，区間 $[a, a]$ は区間 $(b, a]$ に等しい．また，a が A の最少元なら $[a, a] = (\leftarrow a]$ が成り立つ．従って，A の最少元以外の元に直前の元があれば，$\mathfrak{P}'$ は $\mathfrak{P}$ に等しい．

問題 3.9.27 $(A, \leq)$ と $(B, \leqq)$ を線形順序集合とするとき，写像 $f \in A \rightarrow B$ についての次の五条件は同等である（問題 3.9.13 参照）．

1. f は真増写である．
2. f は「$x < y \iff fx < fy$」なる条件をみたす．
3. f は増調な単射である．
4. f は「$x < y \implies fx < fy$」なる条件をみたす．
5. f は「$fx \leqq fy \implies x \leq y$」なる条件をみたす．

問題 3.9.28 $(A, \leq)$ が線形順序集合なら，A から $\mathcal{P}A$ への写像 $a \mapsto (\leftarrow a)$ は $\mathcal{P}A$ の包含関係 $\subseteq$ について真増写である．

略解　$\{(\leftarrow a) \mid a \in A\}$ が包含関係 $\subseteq$ について線形順序集合であって「$a < b \implies (\leftarrow a) \subset (\leftarrow b)$」が成り立つからである．

定義 3.9.1 順序集合 $(A, \leq)$ が**帰納的**であるとは，A の任意の空でない線形部分順序集合に上限が存在することを言う [36]．ただし**線形部分順序集合**は，部分順序集合 $(B, \leq|_B)$ で $\leq|_B$ が線形順序関係のものを指す．

定理 3.9.1 (ツォルンの補題) 帰納的な空でない順序集合には極大元が存在する．

この定理は周知である．証明は，たとえば第 1.2.5 項と第 3.34 節で参考文献として挙げる「現代数学概説 I」にある．

系　**$(A, \leq)$ が帰納的順序集合なら，A の任意の上方区間も帰納的順序集合であり，B を A の極大元の全体とすれば，A は B の下方包 $\overleftarrow{B}$ に等しい（つまり $a \in A$ なら，A の極大元 b で $a \leq b$ なるものが存在する）．**

証明　K を A の上方区間とし，K の線形部分順序集合 $B \neq \emptyset$ をとる．B には A における上限 c があるが，$B \subseteq K$ で K が上方区間であることより $c \in K$ なので，c は B の K における上限でもある．

$a \in A$ なら，$[a \rightarrow)$ は空でない帰納的順序集合であるから，$[a \rightarrow)$ に極大元 b が存在するが，$(b \rightarrow) \subseteq [a \rightarrow)$ なので，b は A の極大元でもある．

問題 3.9.29 (✓) A を Λ 代数系とし，Λ の空でない部分集合 M と A の空でない部分集合 S との組み (M, S) であって $([S]_M, S)$ が有基代数系であるものの全体を $\mathcal{B}$ で表し，$\mathcal{P}\Lambda$ と $\mathcal{P}A$ 上の順序関係 $\subseteq$ の直積順序関係の $\mathcal{B}$ への制限を $\leq$ で表せば，$(\mathcal{B}, \leq)$ は帰納的順序集合である．

略解　$\mathcal{B}$ の空でない線形部分順序集合 $\mathcal{C} = \{(M_i, S_i)\}_{i \in I}$ を任意にとり，$M = \bigcup_{i \in I} M_i$，$S = \bigcup_{i \in I} S_i$ と定める．問題 3.2.12 により $[S]_M = \bigcup_{N \in \mathcal{P}'M} \bigcup_{U \in \mathcal{P}'S} [U]_N$ が成り立つ．$\mathcal{C}$ が線形順序集合であるから，$N \in \mathcal{P}'M$，$U \in \mathcal{P}'S$ なら，$N \subseteq M_i$，$U \subseteq S_i$ なる $i \in I$ があり（問題 3.9.22 参照），従って $[S]_M = \bigcup_{i \in I} [S_i]_{M_i}$ が成り立つ．$a \in S$ が $a = \alpha_\mu(a_1, \ldots, a_n)$，$\mu \in M$，$a_1, \ldots, a_n \in [S]_M$ と表されると仮定すると（α_μ は μ に対応する A の算法を表す），$a \in S_i$，$\mu \in M_i$，$a_1, \ldots, a_n \in [S_i]_{M_i}$ なる $i \in I$ があるが，これは $([S_i]_{M_i}, S_i)$ が有基代数系であることに反する．また，$a \in [S]_M$ が $a = \alpha_\mu(a_1, \ldots, a_n)$，$\mu \in M$，$a_1, \ldots, a_n \in [S]_M$ とも $a = \alpha_{\mu'}(a'_1, \ldots, a'_{n'})$，$\mu' \in M$，$a'_1, \ldots, a'_{n'} \in [S]_M$ とも表されると仮定すれば，$a, a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_{n'} \in [S_i]_{M_i}$，$\mu, \mu' \in M_i$ なる $i \in I$ があるから，$([S_i]_{M_i}, S_i)$ が有基代数系であることにより $\mu = \mu'$，$a_1 = a'_1$，…，$a_n = a'_n$ が成り立つ．以上により $(M, S) \in \mathcal{B}$ が成り立つ．従って $\mathcal{B}$ は帰納的順序集合である．　**終**

順序集合は，「任意の空でない部分集合に最小元が有る」という**最小条件**をみたすとき**整列集合**と呼ばれる．問題 3.9.22 により整列集合は線形順序集合である．数の大小関係について，自然数の全体 $\mathbb{N}$ は整列集合であり，整数の全体 $\mathbb{Z}$ は整列集合でない．しかし次の定理が成り立つ．

定理 3.9.2 (ツェルメロの整列定理) 任意の集合はある順序関係について整列集合となる．

問題 3.9.30 $(A, \leq)$ を線形順序集合とするとき，次のことが成り立つ．

1. A が整列集合であれば，A の任意の部分集合 B は制限順序関係 $\leq|_B$ について整列集合である．
2. A の任意の下方閉区間が制限順序関係について整列集合であれば，A も整列集合である．
3. A の部分集合 $B_1, \ldots, B_n$ がいずれも整列集合であれば，$\bigcup_{i=1}^n B_i$ も整列集合である．

[36]「帰納的順序集合」の定義において「上限」を「上界」に替えても，この項の以下の命題は成り立つ．注意 3.18.4 参照．

4. A が整列集合で f が A から順序集合 B への増写であれば，fA も整列集合である．

略解　2. S を A の空でない部分集合とし，任意の $a \in S$ をとれば，$S \cap (\leftarrow a]$ に最小元があり，それは S の最小元である．

3. S を A の空でない部分集合とすれば，$S \cap B_i \neq \emptyset$ なる i については $S \cap B_i$ に最小元があり，それら最小元の中で最小のものがあり，それが S の最小元である．

4. S を fA の空でない部分集合とすれば，$f^{-1}S$ に最小元 a があり，fa が S の最小元である．

問題 3.9.31 線形順序集合 $(A, \leq)$ が整列集合であるためには，次の三条件をみたす $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ が存在しないことが必要十分である．

1. 任意の $(a, b) \in P \times Q$ が $a < b$ をみたす.
2. $Q \neq \emptyset$ であって $\min Q$ は存在しない.
3. $A = P \cup Q$

略解　$(A, \leq)$ が整列集合でないと仮定する．そうすると，A に無限降下列 $b_1 > b_2 > \cdots$ が存在する．$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b_n \rightarrow)$，$P = A - Q$ と定めれば，(P, Q) が条件 1 – 3 をみたす.

注意 3.9.1 問題3.9.31 の条件 1 は，問題3.9.59 で設ける定義によれば，(P, Q) が双対順序関係 $\geq$ による A の切断であることと同等である．また，条件 1, 3 の下で $P = \bigcap_{b \in Q} (\leftarrow b)$ と $Q = \bigcap_{a \in P} (a \rightarrow)$ が成り立つ．さらに，問題 3.9.31 と双対的同様に次のことが成り立つ．すなわち，線形順序集合 $(A, \leq)$ の任意の空でない部分集合に最大元が有るためには，次の三条件をみたす $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ が存在しないことが必要十分である（うち条件 1, 3 は問題 3.9.31 の条件 1, 3 と同じである）．

1. 任意の $(a, b) \in P \times Q$ が $a < b$ をみたす
2. $P \neq \emptyset$ であって $\max P$ は存在しない.
3. $A = P \cup Q$

3.9.4　完備束

§ 順序集合 A の任意の部分集合に下限と上限が存在するとき，A を**完備順序集合**または**完備束**と呼ぶ（「束」については例 3.13.2 参照）．従って完備束 A には，特に $\max A = \inf \emptyset = \sup A$ と $\min A = \sup \emptyset = \inf A$ が存在する．任意の集合の巾集合は包含関係 $\subseteq$ に関して完備順序集合であり，特に $\mathcal{P}\{\emptyset\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$ は，有限の完備束の典型である．

問題 3.9.32 順序集合 A が完備であるためには，A の任意の部分集合に下限の存在することも，A の任意の部分集合に上限の存在することも，共に必要十分である．

略解　A の任意の部分集合に下限があると仮定する．A の任意の部分集合 X をとり，X の上界の全体を Y で表せば，$a = \inf Y$ が存在する．X の任意の元 x は，Y の下界であるから $x \leq a$ をみたす．つまり $a \in Y$，従って $a = \min Y = \sup X$ が成り立つ.

問題 3.9.33 完備束 A の任意の部分集合族 $(X_i)_{i \in I}$ に対して $\inf \big(\bigcup_{i \in I} X_i\big) = \inf_{i \in I} (\inf X_i)$ と $\sup \big(\bigcup_{i \in I} X_i\big) = \sup_{i \in I} (\sup X_i)$ が成り立つ.

問題 3.9.34 $(A, \leq)$ が完備束で B が A の部分集合であれば次のことが成り立つ．

1. B が条件「$X \subseteq B \implies \inf_A X \in B$」をみたせば（このとき B は A において**交閉的**であると言う），B は制限順序関係 $\leq|_B$ について完備であり，B の任意の部分集合 X に対して $\inf_B X = \inf_A X$ が成り立ち，従って $\max A \in B$ が成り立つ．逆に $\max A \in B$ の場合，B が A において交閉的であるためには，$B - \{\max A\}$ の任意の空でない部分集合 X に対して $\inf_A X \in B - \{\max A\}$ の成り立つことが必要十分である．従って，$\max A \in B$ で $B - \{\max A\}$ が制限順序関係について離散的の場合，B が A において交閉的であるためには，$\#(B - \{\max A\}) \leq 1$ なることが必要十分である．

2. B が条件「$X \subseteq B \implies \sup_A X \in B$」をみたせば（このとき B は A において**結閉的**であると言う），交閉性についてと双対的に同様のことが成り立つ．

3. B が A において下方的であるためには，条件「$X \subseteq B \impliedby \sup_A X \in B$」をみたすことが必要十分である（矢印の向きに注意）．上方性についても双対的に同様である．

4. B が A において下方的かつ結閉的であるためには，B が A の下方閉区間であることが必要十分である（問題 3.18.3 の結論 5 参照）．上方・交閉性についても双対的に同様である．

略解　1. B が A において交閉的であれば，B の任意の部分集合 X に対して $\inf_A X$ が $\inf_B X$ となるから，問題 3.9.32 により B は完備である．

$\max A \in B$ であり，$B - \{\max A\}$ が離散的であり，B が A において交閉的であるとする．このとき $a, b \in B - \{\max A\}$ とすれば，$c = \inf\{a, b\}$ が $B - \{\max A\}$ に属して $c \leq a$ と $c \leq b$ をみたすから $c = a$ かつ $c = b$，従って $a = b$ となる．

注意 3.9.2 $(A, \leq)$ を完備束とするとき，A の部分集合 B で条件「$X \subseteq B \implies \inf_A X, \sup_A X \in B$」をみたすものを A の**部分完備束**と呼ぶ．問題 3.9.34 によれば特に，部分完備束 B は制限順序関係 $\leq|_B$ について完備であり，B の任意の部分集合 X に対して $\inf_B X = \inf_A X$ と $\sup_B X = \sup_A X$ が成り立つ．なお A の部分集合 B は，交閉的あるいは結閉的であっても，A の部分完備束であるとは限らない．たとえば代数系 A の台部分系の全体は，完備束 $\mathcal{P}A$ において交閉的であるが，$\mathcal{P}A$ の部分完備束とは限らない（問題 3.18.23 と問題 3.18.33 参照）．

注意 3.9.3 任意の集合 S の巾集合 $\mathcal{P}S$ は包含関係 $\subseteq$ に関して完備な順序集合であるから，$\mathcal{P}S$ の部分集合の $\mathcal{P}S$ における交閉性や結閉性や下方性や上方性を云々することができるが，$\mathcal{P}S$ において交閉的・結閉的・下方的・上方的であることを，S に関して交閉的・結閉的・下方的・上方的と言うことがある．たとえば，$\mathcal{P}S$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が S に関して交閉的であるとは，$\mathcal{B}$ の元の有限および無限の任意個の交わりがすべて $\mathcal{B}$ に属すことを言い，結閉性についても双対的に同様である．

ただし $\mathcal{B}$ の元零個の交わりと結びは，第 3.9.3 項の下限・上限の定義により，それぞれ S と $\emptyset$ に等しい．従って「S に関して」という断りは，交閉性については省けないが，結閉性については省いても差し支えない．同様に，$X \in \mathcal{B}$, $Y \subseteq X$ のときは $Y \in \mathcal{P}S$ であるが，$X \in \mathcal{B}$, $Y \supseteq X$ のときは Y は S より大きい集合の部分集合であり得るので,「S に関して」という断りは，下方性については省いても差し支えないが，上方性については省けない．

問題 3.9.35 (✓) S を集合とし $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}S$ の部分集合とし，$\mathcal{B}' = \{S - B \mid B \in \mathcal{B}\}$ と定める．このとき，$\mathcal{B}$ が S に関して交閉的であるためには，$\mathcal{B}'$ が結閉的であることが必要十分である．また，$\mathcal{B}$ が結閉的であるためには，$\mathcal{B}'$ が S に関して交閉的であることが必要十分である．

問題 3.9.36 A を完備束とし，A の各部分集合 B に対して次のように定める．

$$B^{\cap} = \{\inf X \mid X \subseteq B\} \qquad\qquad B^{\cup} = \{\sup X \mid X \subseteq B\}$$

そうすると，$B^{\cap}$ は A の交閉的で B を含む部分集合の中で包含関係 ⊆ に関して最小のものであり，$B^{\cup}$ についても双対的に同様である（そこで $B^{\cap}$ と $B^{\cup}$ を B の A における**交包・結包**と呼ぶ）．

略解　$B^{\cap}$ が交閉的で $B^{\cup}$ が結閉的であることは問題 3.9.33 による．

問題 3.9.37 A を順序集合とし，$\mathcal{B}$ を A の下方的部分集合の全体とすれば，$\mathcal{B}$ は A に関して交閉的である．従って，順序集合 A における部分集合 B の下方包 $\overleftarrow{B}$ は，A の B を含む下方的部分集合すべての交わりに等しい．上方的部分集合と上方包 $\overrightarrow{B}$ についても双対的に同様である．

A を完備束とし，$\mathcal{B}$ を A の交閉的部分集合の全体とすれば，$\mathcal{B}$ は A に関して交閉的である．従って，完備束 A における部分集合 B の交包 $B^{\cap}$ は，A の B を含む交閉的部分集合すべての交わりに等しい．結閉的部分集合と結包 $B^{\cup}$ についても双対的に同様である．

略解　$(B_i)_{i\in I}$ を順序集合 A の下方的部分集合の族とし，$B = \bigcap_{i\in I} B_i$ と定める．そうすると $y \leq x \in B$ であれば，任意の $i \in I$ に対して $y \leq x \in B_i$ であるから $y \in B_i$，従って $y \in B$ が成り立つ．

$(B_i)_{i\in I}$ を完備束 A の交閉的部分集合の族とし，$B = \bigcap_{i\in I} B_i$ と定める．そうすると $X \subseteq B$ であれば，任意の $i \in I$ に対して $X \subseteq B_i$ であるから $\inf_A X \in B_i$，従って $\inf_A X \in B$ が成り立つ．

問題 3.9.38 A が完備束であれば，任意の集合 V に対して，$V{\to}A$ はそれ上の巾順序関係について完備であり，任意の $\mathcal{F} \subseteq V{\to}A$ と $v \in V$ に対して，$(\inf_{V\to A} \mathcal{F})v = \inf_A\{fv \mid f \in \mathcal{F}\}$ と $(\sup_{V\to A} \mathcal{F})v = \sup_A\{fv \mid f \in \mathcal{F}\}$ が成り立つ．

特に任意の集合 S と V に対して，$V{\to}\mathcal{P}S$ は完備であり，任意の $\mathcal{F} \subseteq V{\to}\mathcal{P}S$ と $v \in V$ に対して，$(\inf_{V\to\mathcal{P}S} \mathcal{F})v = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} fv$ と $(\sup_{V\to\mathcal{P}S} \mathcal{F})v = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} fv$ が成り立つ（そこで，$\inf_{V\to\mathcal{P}S} \mathcal{F}$, $\sup_{V\to\mathcal{P}S} \mathcal{F}$ をそれぞれ $\bigcap_{f\in\mathcal{F}} f$, $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$ でも表す）．

略解　問題 3.9.12 による．

問題 3.9.39 A と B が順序集合で B が完備であれば，$A{\to}B$ は巾順序関係について完備であって，A から B への増写の全体は $A{\to}B$ の部分完備束である．

定理 3.9.3 任意の順序集合 $(A, \leq)$ に対し，次の三条件をみたす順序集合 $(B, \leqq)$ と写像 $\varphi \in A{\to}B$ が存在する（こういう $B, \leqq, \varphi$ の組み $(B, \leqq, \varphi)$ を $(A, \leq)$ の擬完備化と呼ぶ）．

1. **$(B, \leqq)$ は完備である．**
2. **φ は真増写である．**
3. $B = \left\{\inf_B(\varphi X) \,\middle|\, X \subseteq A\right\} = \left\{\sup_B(\varphi Y) \,\middle|\, Y \subseteq A\right\}$

この定理は周知と思われるので証明は付さないが，注意 3.9.5 に実質的証明がある．

問題 3.9.40 $(B, \leqq)$ を完備順序集合とし，φ を集合 A から B への写像とする．そうすると，任意の $b \in B$ について次のことが成り立つ．

$$b = \inf_B(\varphi X) \text{ なる A の部分集合 X がある} \iff b = \inf_B \varphi\big(\varphi^{-1}[b{\to})\big)$$
$$b = \sup_B(\varphi Y) \text{ なる A の部分集合 Y がある} \iff b = \sup_B \varphi\big(\varphi^{-1}({\leftarrow}b]\big)$$

略解　$b = \inf_B(\varphi X)$ であるとすると，任意の $x \in X$ に対して $b \leqq \varphi x$，すなわち $X \subseteq \varphi^{-1}[b\to)$ であるから，$\varphi X \subseteq \varphi\bigl(\varphi^{-1}[b\to)\bigr) \subseteq [b\to)$，従って $b \geqq \inf_B \varphi\bigl(\varphi^{-1}[b\to)\bigr) \geqq \inf_B [b\to) = b$.

定理 3.9.4 任意の順序集合 $(A, \leq)$ に対し，次の三条件をみたす順序集合 $(B, \leqq)$ が存在する（これを $(A, \leq)$ の完備化と呼ぶ）．

1. **$(B, \leqq)$ は完備である．**
2. **$(A, \leq)$ は $(B, \leqq)$ の部分順序集合である．**
3. **$B = \{\inf_B X \mid X \subseteq A\} = \{\sup_B Y \mid Y \subseteq A\}$**

条件 1, 2 の下で，条件 3 は次の条件 4, 5 のいずれとも同等である（問題 3.9.36 も参照）．

4. **任意の $b \in B$ について $b = \inf_B\bigl(A \cap [b\to)\bigr) = \sup_B\bigl(A \cap (\leftarrow b]\bigr)$ が成り立つ．**
5. **$(C, \leqslant)$ が完備束であって $\varphi \in A\to C$ が真増写であれば，真増写 $f \in B\to C$ で $f|_A = \varphi$ なるものがある．**

$(A, \leq)$ の完備化は次の意味で一意に定まる．すなわち，$(B, \leqq)$ と $(B', \leqq')$ が $(A, \leq)$ の完備化であれば，同順写 $f \in B\to B'$ で $f|_A = \mathrm{id}_A$ なるものがある．

証明　$(A, \leq)$ の擬完備化 $(C, \leqslant, \varphi)$ をとる．さらに，A を含む集合 B と全単射 $F \in C\to B$ で $F\varphi = \mathrm{id}_A$ なるものをとって，$(C, \leqslant)$ の F による複製 $(B, \leqq)$ を作る．そうすると問題 3.9.17 により，$(A, \leq)$ は $(B, \leqq)$ の部分順序集合である．また，問題 3.9.16 により F は $(C, \leqslant)$ から $(B, \leqq)$ への同順写である．従って問題 3.9.18 により，$(B, \leqq)$ は完備であって条件 3 をみたす．つまり，$(B, \leqq)$ は $(A, \leq)$ の完備化である．

問題 3.9.40 により，条件 1, 2 の下で条件 3 と条件 4 は同等である．

$(A, \leq)$ の完備化 $(B, \leqq)$ が条件 5 をみたすことを示そう．そのために，条件 5 の前提における C が完備束であることに留意して，写像 $f \in B\to C$ を，各 $b \in B$ に対して $fb = \inf_C \varphi\bigl(A \cap [b\to)\bigr)$ と定める．そうすると任意の $a \in A$ に対して，$a = \min\bigl(A \cap [a\to)\bigr)$，従って φ が真増写であることにより $\varphi a = \min \varphi\bigl(A \cap [a\to)\bigr) = fa$，従って $f|_A = \varphi$ が成り立つ．

次に f が真増写であることを示すために，任意の $b, b' \in B$ をとる．$b \leqq b'$ なら，$A \cap [b\to) \supseteq A \cap [b'\to)$，従って $\varphi\bigl(A \cap [b\to)\bigr) \supseteq \varphi\bigl(A \cap [b'\to)\bigr)$，従って $fb \leqslant fb'$ が成り立つ．そこで逆に $fb \leqslant fb'$ と仮定する．このとき，任意の $a \in A$ に対して次のように推論することができる．

$$
\begin{aligned}
a \leqq b \implies & \text{任意の } y \in A \cap [b\to) \text{ に対して } a \leq y \\
\implies & \text{任意の } y \in A \cap [b\to) \text{ に対して } \varphi a \leqslant \varphi y \\
\implies & \varphi a \leqslant \inf_C \varphi\bigl(A \cap [b\to)\bigr) = fb \\
\implies & \varphi a \leqslant fb' = \inf_C \varphi\bigl(A \cap [b'\to)\bigr) \\
\implies & \text{任意の } y \in A \cap [b'\to) \text{ に対して } \varphi a \leqslant \varphi y \\
\implies & \text{任意の } y \in A \cap [b'\to) \text{ に対して } a \leq y \\
\implies & a \leqq \inf_B\bigl(A \cap [b'\to)\bigr) = b'
\end{aligned}
$$

すなわち $A \cap (\leftarrow b] \subseteq A \cap (\leftarrow b']$ であるから，$b = \sup_B\bigl(A \cap (\leftarrow b]\bigr) \leqq \sup_B\bigl(A \cap (\leftarrow b']\bigr) = b'$ が成り立つ．従って f は真増写である．これで $(B, \leqq)$ が条件 5 をみたすことが示された．

$(B,\leqq)$ を $(A,\leq)$ の完備化とし，順序集合 $(B',\leqq')$ が条件 1, 2, 5 の $B,\leqq$ を $B',\leqq'$ に書き換えた条件をみたすと仮定する．そうすると，真増写 $f\in B{\to}B'$ と $f'\in B'{\to}B$ で $f|_A=f'|_A=\mathrm{id}_A$ なるものがある．$g=f'f$ は B から B への真増写であって $g|_A=\mathrm{id}_A$ をみたす．そこで任意の $b\in B$ をとると，任意の $x\in A\cap[b{\to})$，$y\in A\cap({\leftarrow}b]$ に対して $y=gy\leqq gb\leqq gx=x$ が成り立つから，$b=\sup_B\bigl(A\cap({\leftarrow}b]\bigr)\leqq gb\leqq\inf_B\bigl(A\cap[b{\to})\bigr)=b$，従って $gb=b$ が成り立つ．つまり $f'f=\mathrm{id}_B$ であるから，f' は全射，従って同順写であり，従って問題 3.9.15 と問題 3.9.18 により，$(B',\leqq')$ も $(A,\leq)$ の完備化である．そこで $(B,\leqq)$ と $(B',\leqq')$ の役割を入れ替えて同様に考えれば，f も同順写であることが分かる．また，条件 1, 2 の下で条件 5 から条件 3 が導かれることも分かった．これで定理は証明された．

問題 3.9.41 (✓) A が完備束 B の部分順序集合であれば，B の部分順序集合で A の完備化となるものがある．ただしその完備化は，B の部分完備束とは限らない．

略解　C を A の完備化とすれば，定理 3.9.4 により，C から B への真増写 f で $f|_A=\mathrm{id}_A$ をみたすものがあって，fC は B の部分順序集合として A の完備化である．A が完備であれば A 自身が A の完備化であるが，A が B の部分完備束とは限らない．

問題 3.9.42 定理 3.9.4 の条件 4 は，$c\nleqq b$ なる任意の $b,c\in B$ に対して $b\leqq a$，$c\nleqq a$ なる $a\in A$ と $a'\leqq c$，$a'\nleqq b$ なる $a'\in A$ があることと同等である．

問題 3.9.43 (✓) 定理 3.9.4 の条件 5 における f は，任意の $b\in B$ に対して $\sup_C\varphi\bigl(A\cap({\leftarrow}b]\bigr)\leqslant fb\leqslant\inf_C\varphi\bigl(A\cap[b{\to})\bigr)$ をみたす．

問題 3.9.44 (✓) $(A,\leq)$ が線形順序集合であって完備束 $(B,\leqq)$ の部分順序集合であるとする．このとき，$(B,\leqq)$ が $(A,\leq)$ の完備化であるためには，$(B,\leqq)$ が線形順序集合であって $b\lneqq c$ なる任意の $b,c\in B$ に対して $b\leqq a\lneqq c$ なる $a\in A$ と $b\lneqq a'\leqq c$ なる $a'\in A$ のあることが必要十分である．

略解　$(B,\leqq)$ が $(A,\leq)$ の完備化であると仮定し，$c\nleqq b$ なる任意の $b,c\in B$ をとる．そうすると問題 3.9.42 により，$b\leqq a$，$c\nleqq a$ なる $a\in A$ があり，$c\nleqq a$ なのでさらに $a'\leqq c$，$a'\nleqq a$ なる $a'\in A$ があり，$b\leqq a\lneqq a'\leqq c$ なので $b\lneqq c$ が成り立つ．従って $(B,\leqq)$ は線形順序集合である．

定理 3.9.5 $(A,\leq)$ **を順序集合とし，**$(B,\leqq)$ **をその完備化とし，**X,Y **を A の部分集合とする．このとき，**$\inf_B X\leqq\sup_B Y$ **が成り立つためには，A における X の任意の下界** x' **と A における Y の任意の上界** y' **が** $x'\leq y'$ **をみたすことが必要十分である．**

証明　A における X の下界 x' と A における Y の上界 y' を任意にとる．そうすると，任意の $x\in X$ に対して $x'\leq x$，すなわち $x'\leqq x$ であるから，$x'\leqq\inf_B X$ が成り立つ．また，任意の $y\in Y$ に対して $y\leq y'$，すなわち $y\leqq y'$ であるから，$\sup_B Y\leqq y'$ が成り立つ．従って，$\inf_B X\leqq\sup_B Y$ であれば $x'\leqq y'$，すなわち $x'\leq y'$ が成り立つ．

$b=\inf_B X$，$c=\sup_B Y$ と定める．$b=\sup_B X'$，$c=\inf_B Y'$ なる A の部分集合 X',Y' がある．$x'\in X'$ であれば，任意の $x\in X$ に対して $x'\leqq b\leqq x$，従って $x'\leq x$ であるから，x' は A における X の下界である．同様に，任意の $y'\in Y'$ が A における Y の上界であることが分かる．また，任意の $x'\in X'$，$y'\in Y'$ について $x'\leq y'$ すなわち $x'\leqq y'$ が成り立てば，X',Y' のとり方により $b\leqq c$ が成り立つ．これで証明された．

問題 3.9.45 順序集合 $(A, \leq)$ の完備化 $(B, \leqq)$ について次のことが成り立つ．

1. $\min B = \inf_B A$，$\max B = \sup_B A$ が成り立つ．従って，$\min A$ があれば $\min B = \min A$ が成り立ち，$\max$ についても同様である．

2. A の部分集合 X に $\inf_A X$ があれば $\inf_A X = \inf_B X$ が成り立つ．$\sup$ についても同様である．

略解　A の部分集合 X に $a = \inf_A X$ があるとする．そうすると，a は X の B での下界である．逆に，$b \in B$ が X の B での下界であるとし，$b = \sup_B Y$ なる A の部分集合 Y をとる．そうすると，任意の $x \in X$，$y \in Y$ に対して $y \leqq b \leqq x$ が成り立つから，任意の $y \in Y$ に対して $y \leqq a$ が成り立ち，従って $b \leqq a$ が成り立つ．

3.9.5　関係間の順序

§ 集合 A, B 間の関係は $A \times B$ の部分集合であるから，A, B 間の関係の間の包含関係 $\subseteq$ を云々することができて，この $\subseteq$ は順序関係となる．特に，A, B 間の関係の中で $\subseteq$ に関して最小のものは，どの $(a, b) \in A \times B$ に対しても $a\,R\,b$ をみたさない関係 R，すなわち $\emptyset$ である．これを**最小関係**または**空関係**と呼ぶ．同様に，A, B 間の関係の中で $\subseteq$ に関して最大のものは，任意の $(a, b) \in A \times B$ に対して $a\,R\,b$ をみたす関係 R，すなわち $A \times B$ である．これを**最大関係**と呼ぶ．集合 A からある集合への写像は A 上の同値関係とみなせるから，そういう写像同士や写像と A 上の関係の間の包含関係や相等関係を云々することもできる．こういう関係も，集合同士の包含関係や相等関係と同様に $\subseteq$ や $=$ で表す．

問題 3.9.46 集合 A 上の同値関係 R と写像 $f \in A {\to} B$ が $R \subseteq f$ をみたせば，写像 $f/R \in A/R {\to} B$ で $(f/R)(a/R) = fa$ なるものが唯一つ存在する．また，$R = f$ なら f/R は単射である．

集合 A, B 間の関係は $A \times B$ の部分集合であるから，それら関係同士の交わり（積）$\cap$ や結び（和）$\cup$ を云々することもできる．特に A 上の関係 R とその双対関係 R^* の交わり $R \cap R^*$ を R の**対称核**と呼ぶ．これは，R に含まれる対称的関係の中で包含関係 $\subseteq$ について最大のものである．また，R が反対称的であることは，R の対称核が相等関係 $=$ に含まれることと同等である．

集合 A, B 間の関係の集合 $\mathcal{R}$ が**交閉的**であるとは，$\mathcal{R}$ が $\mathcal{P}(A \times B)$ の部分集合として $A \times B$ に関して交閉的であることを言う．また，A, B 間の関係についての法則 $\mathcal{L}$ が**交閉的**であるとは，A, B 間の $\mathcal{L}$ に従う関係の全体が交閉的であることを言う．関係の交閉的な集合には最大関係が含まれ，最大関係は交閉的な法則のすべてに従う．

問題 3.9.47 集合 A 上の関係についての反射律・対称律・推移律はそれぞれ交閉的である．特に，反射律・推移律それぞれに従う関係の対称核も同じ法則に従う（問題 3.9.55 参照）．

問題 3.9.48 $\mathcal{L}$ を集合 A, B 間の関係についての交閉的な法則とするとき，A, B 間の任意の関係 R に対して，R を含み $\mathcal{L}$ に従う関係の中に最小のものがある（これを R の $\mathcal{L}$ **包**と呼ぶ）．

問題 3.9.49 集合 A, B 間の関係についての交閉的法則の和（これは未定義）も交閉的法則である．

これらの問題により，集合 A 上の任意の関係 R に対して，R を含む A 上の反射的関係の中に最小のものがある．これを R の**反射包**と呼ぶ．**対称包**と**推移包**も同様に定義する．そしてこれらを

R^r, R^s, R^t で表す[37]．ただし，R^t は RR でも表す．**同値包**と**擬順序包**も同様に定義されるが，これらを表す記号は設けない（問題 3.9.51 参照）．

問題 3.9.50 集合 A 上の関係 R とその反射包 R^r と対称包 R^s と推移包 R^t との間には次の関係がある（問題 3.29.2 参照）．

1. $a\,R^r\,b$ なるためには，$a\,R\,b$ または $a = b$ なることが必要十分である．
2. $a\,R^s\,b$ なるためには，$a\,R\,b$ または bRa なることが必要十分である．
3. $a\,R^t\,b$ なるためには，A の元の列 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$ で $a = a_0$，$a_n = b$，$a_{i-1}\,R\,a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なるものの存在することが必要十分である．

問題 3.9.51 集合 A 上の関係 R に対して，R^{rt} は R の擬順序包に等しく，R^{rst} は R の同値包に等しい．従って，反射的関係の推移包は擬順序関係であり，反射的かつ対称的な関係の推移包は同値関係である．

問題 3.9.52 集合 A 上の推移的関係 R の対称核が空関係であれば，R の反射包は順序関係である．

3.9.6　擬順序関係

§ 順序関係の項で触れた通り，反射律と推移律に従う関係を**擬順序関係**と呼ぶ．従って，同値関係と順序関係は擬順序関係である．擬順序関係を表す記号は順序関係のそれに準ずる．

問題 3.9.53 A を集合とし $(B, \leq)$ を順序集合とし $f \in A \to B$ とするとき，$\leq$ の f による引き戻し $\leq_f$ は A 上の擬順序関係である．また，$\leq_f$ が順序関係であるためには f が単射であることが必要十分であり，$\leq_f$ が順序関係なら f は真増写である．

問題 3.9.54 集合 A, B 間の任意の関係 $\ni$ に対して A 上の関係 $\sqsubseteq$ を

$$a \sqsubseteq a' \iff a \ni b \text{ なる任意の } b \in B \text{ に対して } a' \ni b \tag{3.9.1}$$

と定義すると，$\sqsubseteq$ は擬順序関係である．また，$\ni$ をその否定 $\not\ni$ に替えて同様に作った関係は，$\sqsubseteq$ の双対関係 $\sqsupseteq$ に等しい．また特に $A = B$ の場合の $\sqsupseteq$ は，$\ni$ が反射的なら $\ni$ に含まれ，$\ni$ が推移的なら $\ni$ を含み，従って $\ni$ が擬順序関係なら $\ni$ と一致する．

略解　$\ni$ を $\not\ni$ に替えることは，(3.9.1) において「$a \ni b$」と「$a' \ni b$」を交換することに等しい．

問題 3.9.55 集合 A 上の任意の擬順序関係 $\sqsubseteq$ に対して，$\sqsubseteq$ の対称核を $\equiv$ で表す．すなわち，

$$a \equiv a' \iff a \sqsubseteq a' \text{ かつ } a \sqsupseteq a'$$

そうすると，$\equiv$ は同値関係であり，類別写像 $/\!\equiv$ による A の元あるいは部分集合 X の像を $\overline{X}$ で表すとき，商集合 $\overline{A}$ 上の関係 $\leq$ を

$$\overline{a} \leq \overline{a'} \iff a \sqsubseteq a'$$

[37]記号「r」「s」「t」はそれぞれ「reflexive」「symmetric」「transitive」の頭文字である．

と定義することができて，$\leq$ は順序関係である（従って $\sqsubseteq$ は，A から $\overline{A}$ への写像 $a \mapsto \overline{a}$ による $\overline{A}$ 上の順序関係 $\leq$ の引き戻しに等しい）．

さらに，$\ni$ が A, B 間の関係で (3.9.1) をみたすものなら，$\overline{A}, B$ 間の関係 $\ni$ を

$$\overline{a} \ni b \iff a \ni b$$

と定義することができて，(3.9.1) と同様に次のことが成り立つ．

$$\overline{a} \leq \overline{a'} \iff \overline{a} \ni b \text{ なる任意の } b \in B \text{ に対して } \overline{a'} \ni b \text{ が成り立つ}$$

略解　$\equiv$ が同値関係であることは問題 3.9.47 による．

問題 3.9.56 集合 A 上の関係 $\sqsubseteq$ についての次の三条件は同等である．

1. $\sqsubseteq$ は擬順序関係である．
2. $\sqsubseteq$ はある写像 $f \in A \to B$ による B 上のある順序関係の引き戻しに等しい．
3. 集合 B と A, B 間の関係 $\ni$ とで (3.9.1) をみたすものが存在する．

略解　問題 3.9.53 と問題 3.9.55 により条件 1, 2 は同等である．条件 1, 2 が成り立つとき，A 上の関係 $\ni$ を「$a \ni b \iff b \sqsubseteq a$」と定義すれば，$\ni$ は $\sqsubseteq$ の双対関係 $\sqsupseteq$ に等しいから擬順序関係であり，従って問題 3.9.54 により (3.9.1) が成り立つ．　**終**

集合 A 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ と A の部分集合 X に対し，$a \in A$ が次の二条件をみたすとき，a は A における $\sqsubseteq$ に関する X の**擬下限**であると言う．

1. 任意の $x \in X$ に対して $a \sqsubseteq x$ が成り立つ．
2. $a' \in A$ が任意の $x \in X$ に対して $a' \sqsubseteq x$ をみたせば，$a' \sqsubseteq a$ が成り立つ．

また，A における $\sqsubseteq$ に関する X の擬下限の全体を $\operatorname{qinf} X$ で表す（誤解の恐れのある場合は $\operatorname{qinf}_A X$, $\operatorname{qinf}_{\sqsubseteq} X$ などと書く）．これと双対的に，**擬上限**の概念と $\operatorname{qsup} X$ が定義される [38]．問題 3.9.55 により $\sqsubseteq$ の対称核 $\equiv$ は同値関係であるが，$\operatorname{qinf} X$ と $\operatorname{qsup} X$ は共に $\equiv$ ついて一同値類を成す．なお，擬下限・擬上限の概念は順序関係についての下限・上限の概念の一般化であるが，順序関係についてのその他の概念の多くが擬順序関係についての概念へと一般化される．たとえば**擬最小・擬最大・擬下界・擬上界**が定義され，X の擬下限は X の擬下界の中の擬最大である．

問題 3.9.57 A を集合とし，$(B, \leq)$ を順序集合とし，$f \in A \to B$ を全射とし，$\sqsubseteq$ を f による $\leq$ の引き戻しとする．$a \in A$ が $X \subseteq A$ に対して $\operatorname{qinf}_{\sqsubseteq} X$ に属すためには，$fa = \inf_B fX$ なることが必要十分である．擬上限についても同様のことが成り立つ．

問題 3.9.58 A を集合とし，各 $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ に対して，A 上の関係 $\sqsubseteq_{P,Q}$ を

$$a \sqsubseteq_{P,Q} b \iff (a, b) \notin P \times Q$$

と定義して (P, Q) **関係**と呼ぶ（第 3.22.1 項で定義する A^* 上の (P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ を参照）．このとき，次のことが成り立つ．

[38] 記号「qinf」と「qsup」はそれぞれ「quasi-infimum」と「quasi-supremum」に因む．

1. $\sqsubseteq_{P,Q}$ が反射的であるためには，$P \cap Q = \emptyset$ なることが必要十分である．

2. $A = P \cup Q$ であれば $\sqsubseteq_{P,Q}$ は推移的である．

略解　$\sqsubseteq_{P,Q}$ を $\sqsubseteq_*$ で表す
1. $P \cap Q = \{a \in A \mid a \not\sqsubseteq_* a\}$ が成り立つからである．
2. $a, b, c \in A$ が $a \sqsubseteq_* b$，$b \sqsubseteq_* c$，$a \not\sqsubseteq_* c$ をみたせば，$a \not\sqsubseteq_* c$ なることより $a \in P$，$c \in Q$，従って $a \sqsubseteq_* b$，$b \sqsubseteq_* c$ なることより $b \notin Q$，$b \notin P$ となって，$b \in A - (P \cup Q)$ が成り立つ．

問題 3.9.59 A を集合とし，$\sqsubseteq$ を A 上の関係とし，$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (P, Q) で条件

$$(a, b) \in P \times Q \implies a \not\sqsubseteq b$$

をみたすものを $\sqsubseteq$ による A の**切断**と呼び（定義 3.22.1 で定義する A^* 上の関係による A の切断を参照），その全体を $\mathfrak{S}$ で表す．そうすると，$\sqsubseteq$ が擬順序関係であれば，次のことが成り立つ．

1. 任意の $(P, Q) \in \mathfrak{S}$ が $P \cap Q = \emptyset$ をみたす．

2. $(P, Q) \in \mathfrak{S}$ が $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ に関して $\mathfrak{S}$ の極大元であるためには，$A = P \cup Q$ なることが必要十分である．

略解　1. $a \in P \cap Q$ なら，$a \not\sqsubseteq a$ となって反射律に矛盾する．
2. (P, Q) が $\mathfrak{S}$ の極大元であって $c \in A - (P \cup Q)$ なら，$(P, Q \cup \{c\})$ も $(P \cup \{c\}, Q)$ も $\mathfrak{S}$ に属さないから，$a \sqsubseteq c$，$c \sqsubseteq b$ なる $(a, b) \in P \times Q$ があって推移律に矛盾する．

注意 3.9.4 問題 3.9.59 における「切断」は「Dedekind の切断 (Schnitt)」に因む．すなわち，A として有理数の全体 $\mathbb{Q}$ をとり，$\sqsubseteq$ として有理数の大小関係 $\geq$ をとれば，$\mathbb{Q}$ の部分集合の組み (P, Q) が $\mathfrak{S}$ に属すためには，「$(a, b) \in P \times Q \implies a < b$」なる条件をみたすことが必要十分である．従って，$\mathfrak{S}$ の極大元 (P, Q) がすなわち Dedekind の切断である．

問題 3.9.60 問題 3.9.59 においてさらに $\mathfrak{Q} = \{Q \in \mathcal{P}A \mid (A - Q, Q) \in \mathfrak{S}\}$ と定め，また，各 $a \in A$ に対して $(\leftarrow a] = \{b \in A \mid b \sqsubseteq a\}$ と定め，さらに，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して $(\leftarrow X] = \bigcap_{a \in X} (\leftarrow a]$ と定め，最後に $\mathfrak{P} = \{(\leftarrow X] \mid X \in \mathcal{P}A\}$ と定める．これらについて次のことが成り立つ．

1. $Q_i \in \mathfrak{Q}$ $(i \in I)$ であれば，$\bigcap_{i \in I} Q_i$ も $\mathfrak{Q}$ に属す．

2. $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$

3. $a, b \in A$ が $a \sqsubseteq b$ をみたすためには，$(\leftarrow a] \subseteq (\leftarrow b]$ をみたすことが必要十分である．

4. 任意の $Q \in \mathfrak{Q}$ に対して $Q = \bigcup_{b \in Q} (\leftarrow b]$ が成り立つ．

略解　2. $Q \in \mathcal{P}A$ が $\mathfrak{Q}$ に属すためには「$a \notin Q$，$b \in Q \implies a \not\sqsubseteq b$」なる条件をみたすことが必要十分である．$b \notin (\leftarrow a]$，$c \in (\leftarrow a]$ なら，$b \not\sqsubseteq a$，$c \sqsubseteq a$ なので，$\sqsubseteq$ が推移律に従うことにより $b \not\sqsubseteq c$ が成り立つ．つまり $(\leftarrow a]$ は $\mathfrak{Q}$ に属す．従って，結論 1 により $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$ も成り立つ．
3. $\sqsubseteq$ が推移律に従うから「$a \sqsubseteq b \implies (\leftarrow a] \subseteq (\leftarrow b]$」が成り立つ．$\sqsubseteq$ が反射律に従うから，$a \in (\leftarrow a]$，従って「$a \sqsubseteq b \impliedby (\leftarrow a] \subseteq (\leftarrow b]$」が成り立つ．
4. $Q \in \mathfrak{Q}$ なら，「$b \in Q$，$a \sqsubseteq b \implies a \in Q$」が成り立つので，$b \in Q$ なら $(\leftarrow b] \subseteq Q$ が成り立つ．任意の $b \in Q$ に対して $b \in (\leftarrow b]$ も成り立つので，$Q = \bigcup_{b \in Q} (\leftarrow b]$ を得る．

注意 3.9.5 問題 3.9.60 を定理 3.9.3 の証明に使うことができる．すなわち，問題 3.9.60 において $\sqsubseteq$ を順序関係とする．そうすると，問題 3.18.29 と定理 3.18.2 と問題 3.18.35 により $\mathfrak{P}$ は包含関係 $\subseteq$ に関して完備である．また問題 3.9.60 により，各 $a \in A$ に $(\leftarrow a] = (\leftarrow \{a\}] \in \mathfrak{P}$ を対応させる写像 φ は真増写であり，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対し $(\leftarrow X] = \bigcap_{a \in X} \varphi a = \bigcup_{b \in (\leftarrow X]} \varphi b$ が成り立つから，各 $P \in \mathfrak{P}$ に応じ $P = \inf_{\mathfrak{P}}(\varphi X) = \sup_{\mathfrak{P}}(\varphi Y)$ なる $X, Y \in \mathcal{P}A$ がある．

問題 3.9.61 $(A, \leq)$ を線形順序集合とし，各 $c \in A$ に対して $P_c = [c\rightarrow)$，$Q_c = (\leftarrow c)$ と定める．そうすると，(P_c, Q_c) は $\leq$ による A の切断であって，$\leq = \bigcap_{c \in A} \sqsubseteq_{P_c, Q_c}$ が成り立つ．

より一般に，集合 A 上の任意の関係 $\sqsubseteq$ について，それによる A の切断の全体を $\mathfrak{S}$ で表せば，$\sqsubseteq = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{S}} \sqsubseteq_{P,Q}$ が成り立つ．

略解　$a \not\sqsubseteq b$ であれば，$(\{a\}, \{b\}) \in \mathfrak{S}$ であって $a \not\sqsubseteq_{\{a\},\{b\}} b$ が成り立つ．

課題 3.9.1 数学において関係の中でも順序関係や同値関係などの擬順序関係が特に重要な役割を演ずるのは何故か．

3.9.7　分数式表示と分数式定義

§ 集合 A, B の直積 $A \times B$ の各元 (a, b) を $\dfrac{a}{b}$ と分数式に表せば，A, B 間の関係を「分数」の集合として表示したり定義したりすることができる．たとえば，$\mathbb{N}$ 上の関係 R が

$$a\,R\,b \iff a = x + y,\ b = xy \text{ なる } x, y \in \mathbb{N} \text{ がある}$$

なるもののときには，

$$R = \left\{ \frac{x+y}{xy} \mid x, y \in \mathbb{N} \right\}$$

と表示したり定義したりすることができる．ただし定義する場合には，「R を

$$\frac{x+y}{xy} \qquad\qquad (x, y \in \mathbb{N})$$

と定義する」のように書くこともあり，$(x, y \in \mathbb{N})$ の類のただし書きは，誤解の恐れのないときは省略する．

問題 3.9.62 集合 A の直積 $A \times A$ の各元を分数式に表示して，$A \times A$ 上の単項汎算法 s と二項算法 t とを $s\left(\dfrac{a}{a'}\right) = \dfrac{a'}{a}$，$\operatorname{Dom} t = \left\{ \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a'} \right) \mid a, b, a' \in A \right\}$，$t\left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a'} \right) = \dfrac{a}{a'}$ と定める．このとき，A 上の任意の関係 R の対称包 R^s と推移包 R^t とに対して $R^s = [R]_s$，$R^t = [R]_t$ が成り立つ．ただし $[\ \ ]_s$ と $[\ \ ]_t$ とは，代数系 $(A \times A, \{s\})$ と代数系 $(A \times A, \{t\})$ とにおける算包を表す．

3.10　巾代数系

$ この節と後に続く三つの節では，型付代数系から新しい型付代数系を作る方法やそういう型付代数系の存在について説明する．まずこの節では，群や環の巾の概念を拡張して，型付代数系の巾を定義する．すなわち，型付代数系 (A, T, σ) と集合 V に対し，(A, T, σ) と同型の型付代数系 (A^V, T, τ) を以下のように作ることができる．これを (A, T, σ) **の V 乗**と呼び，これまで通りしばし

ば台代数系 A^V だけで表記する．そして，A と V を A^V の**底代数系**と**指集合**と呼ぶ．また，底代数系 A と指集合 V を色々に変えて出来る色々な A^V を**巾代数系**と総称する [39].

まず $V = \emptyset$ の場合には，問題 3.4.2 に留意して $(A^V, T, \tau) = (T, T, \mathrm{id}_T)$ と定める．つまり台代数系だけで言い表せば，$\emptyset$ を指集合とする巾代数系 $A^\emptyset$ は底代数系 A によらずに A の型代数系 T に等しい．これを**極端な**巾代数系と呼ぶ．ただし，これはごく限られた状況でしか使わない．**今後は，そうでないと断らない限り（問題 3.13.8 参照），A^V と書いたときは $V \neq \emptyset$ であるものとし，「巾代数系」は「非極端の巾代数系」を指すものとする．**

そこで以下 $V \neq \emptyset$ と仮定する．そうしてまず，A^V の台集合は

$$\bigcup_{t\in T}(V{\to}A_t)$$

と定める．次に，A^V の代数構造と型写像 τ の定め方を説明するために，$\bigcup_{t\in T}(V{\to}A_t)$ を仮に B で表し，A と T の算号系を Λ とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対応する A, T の算法を $\alpha_\lambda, t_\lambda$ とし，n_λ をこれら算法の共通の項数とする．そしてまず，写像 $\tau \in B{\to}T$ を

$$\tau b = t \iff b \in V{\to}A_t \qquad\qquad (b \in B,\ t \in T)$$

と定める．そうすると，$b \in V{\to}A_t$ なら任意の $v \in V$ に対して $t = \sigma(bv)$ だから，次式が成り立つ．

$$\tau b = \sigma(bv) \qquad\qquad (b \in B,\ v \in V) \tag{3.10.1}$$

次に，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，B 上の n_λ 項算法 β_λ を次のように定める．すなわち，まず定義域を

$$\mathrm{Dom}\,\beta_\lambda = \left\{(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}) \in B^{n_\lambda} \;\middle|\; (\tau b_1, \ldots, \tau b_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,t_\lambda\right\}$$

と定める．次に各 $(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda$ に対して，$V{\to}A$ の元 $\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})$ を

$$\big(\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})\big)v = \alpha_\lambda(b_1v, \ldots, b_{n_\lambda}v) \qquad\qquad (v \in V) \tag{3.10.2}$$

と定める．これが可能なのは，(3.10.1) により $\big(\sigma(b_1v), \ldots, \sigma(b_{n_\lambda}v)\big) = (\tau b_1, \ldots, \tau b_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,t_\lambda$，従って $(b_1v, \ldots, b_{n_\lambda}v) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ だからである．さらに $t = t_\lambda(\tau b_1, \ldots, \tau b_{n_\lambda})$ と定めれば，

$$\sigma\big(\alpha_\lambda(b_1v, \ldots, b_{n_\lambda}v)\big) = t_\lambda\big(\sigma(b_1v), \ldots, \sigma(b_{n_\lambda}v)\big) = t_\lambda(\tau b_1, \ldots, \tau b_{n_\lambda}) \tag{3.10.3}$$

であるから $\big(\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})\big)v \in A_t$，従って

$$\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}) \in V{\to}A_t \subseteq B$$

が成り立って，β_λ は確かに B 上の算法である．これで T と同類の代数系 $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が出来た．さらに (3.10.1), (3.10.2), (3.10.3) により，$v \in V$ を一つとったとき（$V \neq \emptyset$ だからとれる）

$$\begin{aligned}\tau(\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})) &= \sigma\big((\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}))v\big)\\ &= \sigma\big(\alpha_\lambda(b_1v, \ldots, b_{n_\lambda}v)\big) = t_\lambda(\tau b_1, \ldots, \tau b_{n_\lambda})\end{aligned}$$

となるから，τ は準写である．これで目標の型付代数系 $A^V = (\bigcup_{t\in T}(V{\to}A_t), T, \tau)$ が作れた．

なお，各 $v \in V$ に応じて，各 $b \in \bigcup_{t\in T}(V{\to}A_t)$ に $bv \in A$ を対応させる写像が出来る．これを v の定める**射影**と呼び pr_v で表す．射影は A^V の T 型代数構造の上記定義以前に存在していたが，射影と A^V の T 型代数構造の間には以下に示すような関係がある．

[39]数 a の n 乗 a^n について a, n を「底」「指数」と呼び，a と n を色々に変えて出来る色々な a^n を「巾」と呼ぶのに因む．なお,「巾」を中国伝来の「冪」「羃」に代用するのは関孝和（江戸時代の和算家）の発案という．

定理 3.10.1 A **を型付代数系とし** $\nu \in V$ **とするとき，射影** $\mathrm{pr}_\nu \in A^V \to A$ **は全射保型準写である．**

証明　(3.10.2) から

$$\mathrm{pr}_\nu\bigl(\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})\bigr) = \alpha_\lambda(\mathrm{pr}_\nu b_1, \ldots, \mathrm{pr}_\nu b_{n_\lambda})$$

が得られ，これは pr_ν が擬写であることを示す．また，(3.10.1) から

$$\tau b = \sigma(\mathrm{pr}_\nu b) \qquad\qquad (b \in B)$$

すなわち $\tau = \sigma\,\mathrm{pr}_\nu$ が得られ，これは pr_ν が保型写像であることを示す．従って問題 3.4.12 により，pr_ν は保型準写である．各 $a \in A$ に対し，V の任意の元を a にうつす $V \to A$ の元を b_a で表せば，$b_a \in V \to A_{\sigma a} \subseteq A^V$ であって $\mathrm{pr}_\nu b_a = b_a \nu = a$ が成り立つ．従って pr_ν は全射である．

問題 3.10.1 型付代数系 (A, T, σ) の巾代数系 A^V の型代数構造は，集合 $\bigcup_{t \in T}(V \to A_t)$ 上の T 型代数構造の中で，V の各元の定める $\bigcup_{t \in T}(V \to A_t)$ から A への射影を保型準写と成すものとして特徴付けられる．

問題 3.10.2 巾代数系 A^V の射影を第 3.9.2 項で説明したように A^V 上の関係とみなしたものすべての交わりは，A^V 上の相等関係 $=$ に等しい．

問題 3.10.3 (✓) 集合 V を添数集合とする同型の型付代数系の族 $\bigl((A_\nu, T, \sigma_\nu)\bigr)_{\nu \in V}$ から次のようにして型付代数系 (B, T, τ) を作ることができる（これを $(A_\nu)_{\nu \in V}$ の**直積**と呼ぶ）．すなわち B としては，$\bigcup_{\nu \in V} A_\nu$ の同型の元の族 $(a_\nu)_{\nu \in V}$ であって $a_\nu \in A_\nu$ $(\nu \in V)$ なるものの全体をとり，$b = (a_\nu)_{\nu \in V} \in B$ に対して $\tau b = \sigma_u a_u$ ($u \in V$ は任意) と定める（ことができる）．A_ν の代数構造を $(\alpha_{\nu\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ とし n_λ を $\alpha_{\nu\lambda}$ の項数とするとき（問題 3.4.7 参照），B の代数構造 $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を次式によって定める（ただし，右辺が存在するような $(a_{1\nu})_{\nu \in V}, \ldots, (a_{n_\lambda \nu})_{\nu \in V}$ に対して）．

$$\gamma_\lambda\bigl((a_{1\nu})_{\nu \in V}, \ldots, (a_{n_\lambda \nu})_{\nu \in V}\bigr) = \bigl(\alpha_{\nu\lambda}(a_{1\nu}, \ldots, a_{n_\lambda \nu})\bigr)_{\nu \in V}$$

そうすると各 $u \in V$ に対して，各 $(a_\nu)_{\nu \in V} \in B$ に a_u を対応させる写像（これらも**射影**と呼ぶ）は，B から A_u への保型準写である（ただし必ずしも全射ではない）．また，すべての $\nu \in V$ に対して $(A_\nu, T, \sigma_\nu) = (A, T, \sigma)$ の場合の (B, T, τ) は，(A, T, σ) の巾代数系 A^V に保型同形である．

略解　最後の注意については，A^V の各元 b に $(b\nu)_{\nu \in V}$ を対応させる写像が保型同写となる．

定理 3.10.2 (A, T, σ) **が型付** Λ **代数系で** A' **が** A **の** Λ' **部分系（**$\Lambda' \subseteq \Lambda$**）なら，問題 3.4.6 により** $(A', T_{\Lambda'}, \sigma|_{A'})$ **も型付代数系になり，従って巾代数系** A^V **と** A'^V **が出来るが，**A'^V **は** A^V **の** Λ' **部分系である．特に** A **の算部分系** $A_{\Lambda'}$ **と** A^V **の算部分系** $(A^V)_{\Lambda'}$ **については** $(A_{\Lambda'})^V = (A^V)_{\Lambda'}$ **が成り立つ．**

証明　先程のように，A の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ とし，n_λ を α_λ の項数とし，$B = \bigcup_{t \in T}(V \to A_t)$ とする．B の型写像 τ と代数構造 $(\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は (3.10.1) と (3.10.2) で定められる．$\lambda \in \Lambda'$ に対して α_λ の A' への制限を α'_λ で表す．$(\alpha'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ が A' の代数構造である．同様に $B' = \bigcup_{t \in T}(V \to A'_t)$ とすれば，$A'_t = (\sigma|_{A'})^{-1} t = \sigma^{-1} t \cap A' \subseteq A_t$ であるから，$B' \subseteq B$ が成り立つ．B' の型写像 τ' と代数構造 $(\beta'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$ は (3.10.1) と (3.10.2) に類似の式で定められるが，A' の型写像が $\sigma|_{A'}$ なので $\tau' = \tau|_{B'}$

が成り立ち，従って $\operatorname{Dom}\beta'_\lambda = B'^{n_\lambda} \cap \operatorname{Dom}\beta_\lambda$ が成り立つ．そして $(b_1,\dots,b_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom}\beta'_\lambda$ のとき，α'_λ が α_λ の A' への制限であることより，任意の $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\bigl(\beta'_\lambda(b_1,\dots,b_{n_\lambda})\bigr)v &= \alpha'_\lambda(b_1 v,\dots,b_{n_\lambda} v)\\ &= \alpha_\lambda(b_1 v,\dots,b_{n_\lambda} v) = \bigl(\beta_\lambda(b_1,\dots,b_{n_\lambda})\bigr)v,\end{aligned}$$

従って $\beta'_\lambda(b_1,\dots,b_{n_\lambda}) = \beta_\lambda(b_1,\dots,b_{n_\lambda})$ が成り立つ．つまり β'_λ は β_λ の B' への制限に等しい．従って A'^V は A^V の Λ' 部分系である．

定理 3.10.3 **A を型付代数系とすれば，次の三つのことが成り立つ．**

1. **V' が集合で $f \in V' {\to} V$ なら，各 $b \in A^V$ に対して合成 bf は $A^{V'}$ に属し，各 $b \in A^V$ に $bf \in A^{V'}$ を対応させる写像（これを f^A で表す）は A^V から $A^{V'}$ への保型準写である．f が全射なら f^A は単射であり，f が単射なら f^A は全射である．**
2. **V_1, V_2, V_3 が集合で $f_1 \in V_2 {\to} V_1$ かつ $f_2 \in V_3 {\to} V_2$ なら，$(f_1 f_2)^A \in A^{V_1} {\to} A^{V_3}$ と $f_1 \in A^{V_1} {\to} A^{V_2}$ と $f_2 \in A^{V_2} {\to} A^{V_3}$ について $(f_1 f_2)^A = {f_2}^A {f_1}^A$ が成り立つ．**
3. **$(\mathrm{id}_V)^A \in A^V {\to} A^V$ について $(\mathrm{id}_V)^A = \mathrm{id}_{A^V}$ が成り立つ．**

証明　A の型代数系を T で表す．そうすると $b \in A^V$ なら，$b \in V {\to} A_t$ なる $t \in T$ があって $bf \in V' {\to} A_t \subseteq A^{V'}$ が成り立つ．従って問題 3.4.8 により，f^A は A^V から $A^{V'}$ への保型写像である．そして f^A の定義により

$$(f^A b)v' = b(fv') \qquad (b \in A^V,\ v' \in V') \tag{3.10.4}$$

が成り立つ．これから結論 2, 3 が容易に導かれる．f が全射なら，問題 3.4.14 により $fg = \mathrm{id}_V$ なる $g \in V {\to} V'$ があるから，結論 2, 3 により $g^A f^A = \mathrm{id}_{A^V}$ が成り立ち，従って f^A は単射である．f が単射なら f^A が全射であることも同様に証明される．

各算号 λ に対応する $A, A^V, A^{V'}$ の算法をそれぞれ $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \beta'_\lambda$ で表し，n_λ をこれらの項数とし，任意の $(b_1,\dots,b_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom}\beta_\lambda$ をとる．そうすると，任意の $v' \in V'$ に対して次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}\Bigl(f^A\bigl(\beta_\lambda(b_1,\dots,b_{n_\lambda})\bigr)\Bigr)v' &= \bigl(\beta_\lambda(b_1,\dots,b_{n_\lambda})\bigr)(fv') && \text{((3.10.4) による)}\\ &= \alpha_\lambda\bigl(b_1(fv'),\dots,b_{n_\lambda}(fv')\bigr) && (\beta_\lambda\ \text{の定義による})\\ &= \alpha_\lambda\bigl((f^A b_1)v',\dots,(f^A b_{n_\lambda})v'\bigr) && \text{((3.10.4) による)}\\ &= \bigl(\beta'_\lambda(f^A b_1,\dots,f^A b_{n_\lambda})\bigr)v' && (\beta'_\lambda\ \text{の定義による})\end{aligned}$$

従って $f^A\bigl(\beta_\lambda(b_1,\dots,b_{n_\lambda})\bigr) = \beta'_\lambda(f^A b_1,\dots,f^A b_{n_\lambda})$ が成り立つ．従って問題 3.4.12 により，f^A は保型準写である．

定理 3.10.4 **次の三つのことが成り立つ．**

1. **A と A' が同型の型付代数系で $f \in A {\to} A'$ が保型写像なら，各 $b \in A^V$ に対して合成写像 fb は A'^V に属し，各 $b \in A^V$ に $fb \in A'^V$ を対応させる写像（これを f^V で表す）は A^V から A'^V への保型写像である．f が全射なら f^V も全射である．各型 t に対して $A_t = \emptyset \neq A'_t$ でなくて f が単射であれば，f^V も単射である．f が擬写なら f^V も擬写である．従って，f が保型同写なら f^V も保型同写である．**

2. A_1, A_2, A_3 **が同型の型付代数系で** $f_1 \in A_1 \to A_2$ **と** $f_2 \in A_2 \to A_3$ **が保型写像なら，合成** $f_2 f_1 \in A_1 \to A_3$ **も保型写像であって，**$(f_2 f_1)^V \in {A_1}^V \to {A_3}^V$ **と** ${f_1}^V \in {A_1}^V \to {A_2}^V$ **と** ${f_2}^V \in {A_2}^V \to {A_3}^V$ **について** $(f_2 f_1)^V = {f_2}^V {f_1}^V$ **が成り立つ．**

3. A **が型付代数系なら，**$(\mathrm{id}_A)^V \in A^V \to A^V$ **について** $(\mathrm{id}_A)^V = \mathrm{id}_{A^V}$ **が成り立つ．**

証明　A, A' の型代数系を T で表す．そうすると $b \in A^V$ なら，$b \in V \to A_t$ なる $t \in T$ があって f が保型写像であるから，問題 3.4.8 により $fb \in V \to A'_t \subseteq {A'}^V$ が成り立つ．従ってまた問題 3.4.8 により，f^V は保型写像である．そして，f^V の定義により

$$(f^V b)v = f(bv) \qquad (b \in A^V,\ v \in V) \tag{3.10.5}$$

が成り立つ．これから結論 2, 3 が容易に導かれる．f が全射なら，問題 3.4.14 により $fg = \mathrm{id}_{A'}$ なる保型写像 $g \in A' \to A$ があるから，結論 2, 3 により $f^V g^V = \mathrm{id}_{A'^V}$ が成り立ち，従って f^V は全射である．各 $t \in T$ に対して $A_t = \emptyset \neq A'_t$ でなくて f が単射であれば f^V も単射であることも，同様に証明される．

f が擬写なら f^V も擬写であることを示すために，各算号 λ に対応する $A, A', A^V, {A'}^V$ の算法をそれぞれ $\alpha_\lambda, \alpha'_\lambda, \beta_\lambda, \beta'_\lambda$ で表し，n_λ をこれらの項数とし，任意の $(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda$ をとる．そうすると，任意の $v \in V$ に対して次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}
\bigl(f^V\bigl(\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})\bigr)\bigr)v &= f\bigl(\bigl(\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})\bigr)v\bigr) && (\text{(3.10.5) による}) \\
&= f\bigl(\alpha_\lambda(b_1 v, \ldots, b_{n_\lambda} v)\bigr) && (\beta_\lambda \text{ の定義による}) \\
&= \alpha'_\lambda\bigl(f(b_1 v), \ldots, f(b_{n_\lambda} v)\bigr) && (f \text{ が擬写だから}) \\
&= \alpha'_\lambda\bigl((f^V b_1)v, \ldots, (f^V b_{n_\lambda})v\bigr) && (\text{(3.10.5) による}) \\
&= \bigl(\beta'_\lambda(f^V b_1, \ldots, f^V b_{n_\lambda})\bigr)v && (\beta'_\lambda \text{ の定義による})
\end{aligned}$$

従って $f^V\bigl(\beta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda})\bigr) = \beta'_\lambda(f^V b_1, \ldots, f^V b_{n_\lambda})$ が成り立つ．従って f^V は擬写である．以上と問題 3.4.12 により，f が保型同写なら f^V も保型同写である．

補題 3.10.1　$A_1, \ldots, A_n, B$ **を集合とする．このとき，**$(A_1 \times \cdots \times A_n) \to B$ **の各元** f **に応じて，**$A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))$ **の元** f^* **で**

$$(\cdots((f^* a_1)a_2)\cdots)a_n = f(a_1, \ldots, a_n) \qquad \bigl(a_i \in A_i\ (i = 1, \ldots, n)\bigr)$$

をみたすもの（これを f **の**<u>**線形化**</u>**と呼ぶ）が一意に存在し，写像** $f \mapsto f^*$ **は** $(A_1 \times \cdots \times A_n) \to B$ **から** $A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))$ **への全単射である．**

証明　$n = 1$ のときには明らかに成り立つので，$n \geq 2$ と仮定して，n についての帰納法を使う．各 $a \in A_1$ に対して，$A_2 \times \cdots \times A_n \to B$ の元 f_a を $f_a(a_2, \ldots, a_n) = f(a, a_2, \ldots, a_n)$ と定める．そうすると帰納法の仮定により，f_a の線形化 $(f_a)^* \in A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots)$ が一意に存在する．$A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))$ の元 f^* を各 $a \in A_1$ に対して $f^* a = (f_a)^*$ と定めれば，f^* は f の線形化である．

$\varphi \in A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))$ も f の線形化であれば，各 $a \in A_1$ に対して φa は f_a の線形化であるから $\varphi a = (f_a)^* = f^* a$，従って $\varphi = f^*$ が成り立つ．つまり線形化は一意である．

任意の $\varphi \in A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))$ をとり，$f \in (A_1 \times \cdots \times A_n) \to B$ を $f(a_1, \ldots, a_n) = (\cdots((\varphi a_1)a_2)\cdots)a_n$ と定めれば，φ は f の線形化であるから，その一意性により $\varphi = f^*$ が成り立つ．従って写像 $f \mapsto f^*$ は全射である．

$(A_1 \times \cdots \times A_n) {\to} B$ の二元 f, g が $f^* = g^*$ をみたせば，任意の $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ に対して $f(a_1, \ldots, a_n) = (\cdots((f^*a_1)a_2)\cdots)a_n = (\cdots((g^*a_1)a_2)\cdots)a_n = g(a_1, \ldots, a_n)$ が成り立つから，$f = g$ が成り立つ．つまり写像 $f \mapsto f^*$ は単射である．

定理 3.10.5 型付代数系 A と巾代数系 $A^V, (A^V)^{V'}, A^{V' \times V}$ について $(A^V)^{V'} \cong A^{V' \times V}$ が成り立つ．

証明　A の型代数系を T で表す．そうすると $c \in A^{V' \times V}$ なら，$c \in (V' \times V) {\to} A_t$ なる $t \in T$ があり，補題 3.10.1 により c の線形化 $c^* \in V' {\to} (V {\to} A_t) = V' {\to} (A^V)_t \subseteq (A^V)^{V'}$ が定まる．従って，各 $c \in A^{V' \times V}$ に $c^* \in (A^V)^{V'}$ を対応させる写像が出来て，これは保型写像であり，

$$c(v', v) = (c^* v')v \qquad (c \in A^{V' \times V},\ (v', v) \in V' \times V) \tag{3.10.6}$$

をみたす．各算号 λ に対応する A，A^V，$A^{V' \times V}$，$(A^V)^{V'}$ の算法をそれぞれ $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda, \delta_\lambda$ で表し，n_λ をこれらの項数とし，任意の $(c_1, \ldots, c_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom} \gamma_\lambda$ をとる．そうすると，任意の $(v', v) \in V' \times V$ に対して次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}
\bigl(\bigl(\gamma_\lambda(c_1, \ldots, c_{n_\lambda})\bigr)^* v'\bigr)v &= \bigl(\gamma_\lambda(c_1, \ldots, c_{n_\lambda})\bigr)(v', v) && ((3.10.6)\text{ による}) \\
&= \alpha_\lambda\bigl(c_1(v', v), \ldots, c_{n_\lambda}(v', v)\bigr) && (\gamma_\lambda\text{ の定義による}) \\
&= \alpha_\lambda\bigl((c_1{}^* v')v, \ldots, (c_{n_\lambda}{}^* v')v\bigr) && ((3.10.6)\text{ による}) \\
&= \bigl(\beta_\lambda(c_1{}^* v', \ldots, c_{n_\lambda}{}^* v')\bigr)v && (\beta_\lambda\text{ の定義による}) \\
&= \bigl(\bigl(\delta_\lambda(c_1{}^*, \ldots, c_{n_\lambda}{}^*)\bigr)v'\bigr)v && (\delta_\lambda\text{ の定義による})
\end{aligned}$$

従って $\bigl(\gamma_\lambda(c_1, \ldots, c_{n_\lambda})\bigr)^* = \delta_\lambda(c_1{}^*, \ldots, c_{n_\lambda}{}^*)$ が成り立つ．つまり写像 $c \mapsto c^*$ は擬写であり，従って問題 3.4.12 により保型準写である．

定理 3.10.6 A, B **を同型の代数系とし，**$(f_v)_{v \in V}$ **を** A **から** B **への保型準写の族とする．このとき，**A **から巾代数系** B^V **への写像** f **を**

$$(fa)v = f_v a \qquad (a \in A,\ v \in V)$$

と定めることができて，f **は保型準写である．**

証明　A, B の型代数系を T とすれば，$a \in A_t$ $(t \in T)$ のとき任意の $v \in V$ に対して $(fa)v = f_v a \in B_t$ が成り立つから，$fa \in V {\to} B_t \subseteq B^V$ が成り立ち，f は確かに A から B^V への保型写像である．A, B, B^V の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$，$(\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$，$(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ とすれば，$(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom} \alpha_\lambda$ のとき，任意の $v \in V$ に対して次のように計算することができる $(\lambda \in \Lambda)$．

$$\begin{aligned}
\bigl(f\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr)\bigr)v &= f_v\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr) \\
&= \beta_\lambda(f_v a_1, \ldots, f_v a_{n_\lambda}) \\
&= \beta_\lambda\bigl((fa_1)v, \ldots, (fa_{n_\lambda})v\bigr) = \bigl(\gamma_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda})\bigr)v
\end{aligned}$$

つまり，任意の $(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom} \alpha_\lambda$ に対して $f\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})\bigr) = \gamma_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda})$ が成り立つ $(\lambda \in \Lambda)$．従って f は保型擬写，すなわち保型準写である．

3.11　商代数系

$ この節では型付代数系の商集合上の代数構造を論ずる．その際，第 3.9 節で説明した関係についての記法・用語・概念を断り無く使う．

定義 3.11.1 集合 A 上の関係 R が A 上の**算法** α **と両立する**とは，次の条件をみたすことを言う．

$$\left.\begin{array}{l}(a_1,\ldots,a_n)\in\mathrm{Dom}\,\alpha\\ a_i\,R\,a'_i\ (i=1,\ldots,n)\end{array}\right\}\implies\left\{\begin{array}{l}(a'_1,\ldots,a'_n)\in\mathrm{Dom}\,\alpha\\ \alpha(a_1,\ldots,a_n)\,R\,\alpha(a'_1,\ldots,a'_n)\end{array}\right.$$

代数系 A 上の関係 R が A の代数構造に含まれるすべての算法と両立するとき，R は A の**代数構造と両立する**と言う．そして，A 上の同値関係で A の代数構造と両立するものを A 上の**合同関係**と呼ぶ．また，型付代数系 A 上の関係 R が A の代数構造と両立し，かつ A の型写像に含まれるとき，R は A の**型代数構造と両立する**と言う．そして，A 上の同値関係で A の型代数構造と両立するものを A 上の**型合同関係**と呼ぶ．

注意 3.11.1 集合 A 上の関係 R が A 上の n 項汎算法 α と両立するための条件は，言うまでもなく

$$a_i\,R\,a'_i\ (i=1,\ldots,n)\implies\alpha(a_1,\ldots,a_n)\,R\,\alpha(a'_1,\ldots,a'_n)$$

である．また，汎代数系 A を型代数系が単元集合の型付代数系とみなした場合，A の型写像は A 上の関係としては最大関係であるから，A 上の任意の関係が A の型写像に含まれる．

問題 3.11.1 集合 A 上の関係 R が A 上の算法 α と両立すれば，R の対称核も α と両立する．

定理 3.11.1 **f が代数系 A から代数系 B への準写なら，B の代数構造と両立する関係 R の f による引き戻し R_f は A の代数構造と両立する．**

証明　A の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とし，n_λ を α_λ の項数とする．また，$\lambda\in\Lambda$ に対応する B の算法を β_λ とする．そして，$(a_1,\ldots,a_{n_\lambda})\in\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$，$a_i\,R_f\,a'_i\ (i=1,\ldots,n_\lambda)$ と仮定する．そうすると，f が擬写であるから，

$$(fa_1,\ldots,fa_{n_\lambda})\in\mathrm{Dom}\,\beta_\lambda\qquad f\bigl(\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_{n_\lambda})\bigr)=\beta_\lambda(fa_1,\ldots,fa_{n_\lambda})$$

が成り立ち，R_f の定義により $fa_i\,R\,fa'_i\ (i=1,\ldots,n_\lambda)$ が成り立つ．従って，R が β_λ と両立することにより

$$(fa'_1,\ldots,fa'_{n_\lambda})\in\mathrm{Dom}\,\beta_\lambda\qquad \beta_\lambda(fa_1,\ldots,fa_{n_\lambda})\,R\,\beta_\lambda(fa'_1,\ldots,fa'_{n_\lambda})$$

が成り立つ．これからさらに，f が準写であることにより

$$(a'_1,\ldots,a'_{n_\lambda})\in\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda\qquad \beta_\lambda(fa'_1,\ldots,fa'_{n_\lambda})=f\bigl(\alpha_\lambda(a'_1,\ldots,a'_{n_\lambda})\bigr)$$

が成り立つ．従ってまた $f\bigl(\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_{n_\lambda})\bigr)\,R\,f\bigl(\alpha_\lambda(a'_1,\ldots,a'_{n_\lambda})\bigr)$ であり，従って R_f の定義により $\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_{n_\lambda})\,R_f\,\alpha_\lambda(a'_1,\ldots,a'_{n_\lambda})$ が成り立つ．つまり，R_f は α_λ と両立する．

系　**f が代数系 A から代数系 B への準写なら，A 上の関係とみなした f は合同関係である．**

証明　A 上の関係とみなした f は，B の相等関係 $=$ の引き戻し $=_f$ であるから，定理により A の代数構造と両立し，問題 3.9.1 により同値関係である．

系 2 **f が型付代数系 A から型付代数系 B への保型準写なら，B 上の型合同関係 R の f による引き戻し R_f は A 上の型合同関係である．特に，A 上の関係とみなした f は型合同関係である．**

証明　f は準写であるから，定理により R_f は A の代数構造と両立する．また，問題 3.9.1 により R_f は同値関係である．また，A, B の型写像を σ, τ とすれば，f が保型写像であるから，任意の $a \in A$ に対して $\tau(fa) = \sigma a$ が成り立つ．そこで $a \mathrel{R_f} a'$ と仮定すれば，$fa \mathrel{R} fa'$ であるから，R が τ に含まれることにより $\tau(fa) = \tau(fa')$ が成り立ち，従って $\sigma a = \sigma a'$ が成り立つ．すなわち，R_f は σ に含まれる．以上により，R_f は型合同関係である．

系 3 **型付代数系 A の型写像 σ は，A 上の関係とみなしたとき型合同関係である．**

証明　自明に $\sigma \subseteq \sigma$ であって，系により σ は合同関係である．

定理 3.11.2 **A が代数系で R が A 上の合同関係なら，商集合 A/R に A と同類の代数構造を定めて，類別写像 $/R$ を準写にすることができる．また，さらに A から代数系 B への準写 f が $R \subseteq f$ をみたせば，写像 $f/R \in A/R \to B$ を $(f/R)(a/R) = fa$ と定義することができて，f/R は準写となる．**

証明　定理 3.11.1 の証明の記号を使う．

前半：類別写像 $/R$ による A の元あるいは部分集合 X の像を $\overline{X}$ で表す．特に $A/R = \overline{A}$ である．そして，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\overline{A}$ 上の n_λ 項算法 $\overline{\alpha}_\lambda$ を次のように定義する．すなわちまず，

$$\mathrm{Dom}\,\overline{\alpha}_\lambda = \{(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n_\lambda}}) \mid (a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda\}$$

と定義する．$\overline{\alpha}_\lambda$ そのものは

$$\overline{\alpha}_\lambda(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n_\lambda}}) = \overline{\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})}$$

と定義する．この定義には矛盾がない．なぜなら，R が A の代数構造と両立するから

$$\left.\begin{array}{l} (a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda \\ (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n_\lambda}}) = (\overline{a'_1}, \ldots, \overline{a'_{n_\lambda}}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda \\ \overline{\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})} = \overline{\alpha_\lambda(a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda})} \end{array}\right. \tag{3.11.1}$$

が成り立ち，従って特に，$(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$，$(a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ のときに

$$(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n_\lambda}}) = (\overline{a'_1}, \ldots, \overline{a'_{n_\lambda}}) \implies \overline{\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})} = \overline{\alpha_\lambda(a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda})}$$

が成り立つからである．代数構造 $(\overline{\alpha}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ により $\overline{A}$ は A と同類の代数系となる．

(3.11.1) によりまた特に，

$$(\overline{a'_1}, \ldots, \overline{a'_{n_\lambda}}) \in \mathrm{Dom}\,\overline{\alpha}_\lambda \implies (a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$$

が成り立つ．これと $\overline{\alpha}_\lambda$ の定義は，$/R$ が準写であることを示す．

後半：f/R が定義できることは問題 3.9.46 で言及した．今は f/R を $\bar{f}$ で表す．これが擬写であることは，次の計算で確かめられる．ただし，β_λ は λ に対応する B の算法である．

$$\begin{aligned} \bar{f}(\overline{\alpha}_\lambda(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n_\lambda}})) &= \bar{f}(\overline{\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})}) \\ &= f(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})) \\ &= \beta_\lambda(fa_1, \ldots, fa_{n_\lambda}) = \beta_\lambda(\bar{f}\overline{a_1}, \ldots, \bar{f}\overline{a_{n_\lambda}}) \end{aligned}$$

また，この計算を一部逆にたどれば，$\bar{f}$ が厳密であることが分かる．

系　(A, T, σ) **が型付代数系で** R **が** A **上の型合同関係なら，**$(A/R, T, \sigma/R)$ **を型付代数系にして類別写像** $/R$ **が保型準写になるようにすることができる．また，さらに** A **から型付代数系** B **への保型準写** f **が** $R \subseteq f$ **をみたせば，写像** $f/R \in A/R{\to}B$ **を** $(f/R)(a/R) = fa$ **と定義することができて，**f/R **は保型準写になる．**

証明　定理 3.11.2 の証明の記号と記法を使う．

前半： R が A 上の合同関係であるから，定理 3.11.2 の前半により，$\overline{A}$ に A と同類の代数構造を定めて，類別写像 $/R$ を準写にすることができる．R が σ に含まれるから，定理 3.11.2 の後半により，写像 $\overline{\sigma} \in \overline{A}{\to}T$ を $\overline{\sigma}\,\overline{a} = \sigma a$ と定義することができて，$\overline{\sigma}$ は準写になる．従って $(\overline{A}, T, \overline{\sigma})$ は型付代数系になる．そして $\overline{\sigma}$ の定め方により，類別写像 $/R$ は保型写像になる．

後半： 定理 3.11.2 の後半により，写像 $\overline{f} \in \overline{A}{\to}B$ を $\overline{f}\,\overline{a} = fa$ と定義することができて，$\overline{f}$ は準写になる．τ を B の型写像とすれば，$\tau(\overline{f}\,\overline{a}) = \tau(fa) = \sigma a = \overline{\sigma}\,\overline{a}$ が成り立つから，$\overline{f}$ は保型写像である．

定義 3.11.2 代数系 A あるいは型付代数系 (A, T, σ) から定理 3.11.2 あるいはその系のように作られた代数系 A/R あるいは型付代数系 $(A/R, T, \sigma/R)$ を A の R による**商代数系**と呼ぶ．

問題 3.11.2 代数系 A の商代数系 A/R の代数構造は，商集合 A/R 上の代数構造の中で，類別写像 $/R$ を準写と成すものとして特徴付けられる．型付代数系 (A, T, σ) の商代数系 $(A/R, T, \sigma/R)$ の T 型代数構造は，商集合 A/R 上の T 型代数構造の中で，類別写像 $/R$ を保型準写と成すものとして特徴付けられる（問題 3.10.1 参照）．

問題 3.11.3 $f \in A{\to}B$ が型付代数系の全射保型準写なら，商代数系 A/f から B への写像 f/f は保型同写であって，これと類別写像 $/f$ とは $(f/f)(/f) = f$ をみたす．従って，$f \in A{\to}B$ が型付代数系の保型準写なら，A/f は B の台部分系 fA と保型同形である．

問題 3.11.4 代数系 A の代数構造と両立する関係一つ以上の交わりも A の代数構造と両立する．

注意 3.11.2 A 上の関係零個の交わりは，$A \times A$ の部分集合零個の交わりであるから，第 3.9.3 項の下限の定義により $A \times A$ すなわち最大関係に等しく，最大関係は A 上の空でも全域的でもない算法とは両立しない．従って，代数系の代数構造と両立する関係の全体は一般には交閉的ではない（問題 3.29.3 参照）．

問題 3.11.4 により，型付代数系 A の型代数構造と両立する関係一つ以上の交わりも A の型代数構造と両立する．また，問題 3.9.47 も使えば，A 上の型合同関係一つ以上の交わりも A 上の型合同関係であることが分かる．他方，A の型写像 σ は定理 3.11.1 系 3 により A 上の型合同関係である．従って，σ に含まれる任意の A 上の関係 R に対して，R を含み A の型代数構造と両立する関係の中に最小のものがあり，また，R を含む A 上の型合同関係の中にも最小のものがある．これらをそれぞれ，R の**型算法包・型合同包**と呼び，R^- と $R^=$ とで表す．

定理 3.11.3 型付代数系 A **上の型写像** σ **に含まれる関係** R **に対して，**A **上の関係** R_n $(n = 0, 1, \ldots)$ **を次のように帰納的に定める（**R_n **を** R **の**$\underline{n\text{ 圏}}$**と呼ぶ）．まず** $R_0 = R$ **と定める．次に，**$n \geq 1$ **であって** R_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ **が定められたとき，**$a\,R_n\,a'$ **であるとは，**A **の代数構造に属すある算法** α**（**k **をその項数とする）と** $\sum_{j=1}^{k} n_j = n - 1$ **なるある非負整数** n_j $(j = 1, \ldots, k)$ **とに対して** $a = \alpha(a_1, \ldots, a_k)$，$a' = \alpha(a'_1, \ldots, a'_k)$，$a_j\,R_{n_j}\,a'_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ **なる** a_j, a'_j $(j = 1, \ldots, k)$ **のあることと定める．このとき，**$R^- = \bigcup_{n \geq 0} R_n$ **が成り立つ．**

証明　$\bigcup_{n\geq 0} R_n$ を Q で表す．そうすると，$R_n \subseteq \sigma$ $(n = 0, 1, \ldots)$ なることが n についての帰納法によって容易に示されるので，$R \subseteq Q \subseteq \sigma$ が成り立つ．次に，A の代数構造に属す任意の算法 α をとって $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$，$a_j\, Q\, a'_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ と仮定する．そうすると，$Q \subseteq \sigma$ なることより $\sigma a_j = \sigma a'_j$，したがって問題 3.4.4 により $(a'_1, \ldots, a'_k) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$ が成り立つ．また，$a_j\, R_{n_j}\, a'_j$ なる n_j があるので，$n = \sum_{j=1}^{k} n_j + 1$ と定めれば，$\alpha(a_1, \ldots, a_k)\, R_n\, \alpha(a'_1, \ldots, a'_k)$，従って $\alpha(a_1, \ldots, a_k)\, Q\, \alpha(a'_1, \ldots, a'_k)$ が成り立つ．つまり Q は α と両立する．従って，$R^- \subseteq Q$ が成り立つ．$R_n \subseteq R^-$ $(n = 0, 1, \ldots)$ なることが n についての帰納法によって容易に示されるから，$R^- = Q$ が成り立つ．

問題 3.11.5 R が型付代数系 A 上の型写像に含まれる対称的関係なら，R の n 圏 R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ と型算法包 R^- も対称的である (問題 3.11.1 参照)

問題 3.11.6 型付代数系 A 上の関係 R が A の型代数構造と両立し，かつ反射的のとき，推移包 R^t も A の型代数構造と両立する．

略解　A の代数構造に属す算法 α に対し，$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$，$a_i\, R^t\, a'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ と仮定する．このとき，A の元 $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{il_i}$ で $a_i = a_{i0}$，$a'_i = a_{il_i}$，$a_{i,j-1}\, R\, a_{ij}$ $(j = 1, \ldots, l_i)$ なるものが存在する $(i = 1, \ldots, n)$．R が反射的だから $l_1 = \cdots = l_n = l$ なるようにできる．そうしたとき，$(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$，$\alpha(a_{1,j-1}, \ldots, a_{n,j-1})\, R\, \alpha(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ が成り立つ $(j = 1, \ldots, l)$．従って，$(a'_1, \ldots, a'_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$，$\alpha(a_1, \ldots, a_n)\, R^t\, \alpha(a'_1, \ldots, a'_n)$ が成り立つ．

問題 3.11.7 型付代数系 A 上の型写像に含まれる任意の関係 R に対して，$R^= = R^{rs-t}$ が成り立つ．

略解　$R^=$ が順に反射的で対称的で型代数構造と両立し推移的であることから，$R^{rs-t} \subseteq R^=$ なることが分かる．R^{rs} が反射的対称的であることから R^{rs-} が反射的対称的で型代数構造と両立することが分かり，従って R^{rs-t} は同値関係で型代数構造と両立する．

問題 3.11.8 (A, T, σ) を型付代数系とし，R を A 上の σ に含まれる関係とし，$U \subseteq T$ とし，A の U 部分 $B = A_U$ が A の代数構造に含まれる任意の算法 α で外に閉じていると仮定する．そうすると，B 上の関係についての次の等式が成り立つ．ただし右辺における $R \cap (B \times B)$ は，B 上の関係とではなく A 上の関係とみなす．

$$R^=\big|_B = \big(R \cap (B \times B)\big)^=\big|_B$$

従って，$R|_B$ が B 上の相等関係に含まれれば，$R^=|_B$ は B 上の相等関係に等しい [40]．

略解　A 上の任意の関係 Q に対して，A 上の関係とみなした $Q \cap (B \times B)$ を Q_B で表す．これは $Q_B|_B = Q|_B$ をみたす．従って $(R^=)_B = \big((R_B)^=\big)_B$ を示せばいい．それには，$(R^=)_B \subseteq (R_B)^=$ を示せばよく，それにはまた，$f = r, s, -, t$ に対して $(R^f)_B \subseteq (R_B)^f$ を示せばいい．$(R^-)_B \subseteq (R_B)^-$ を示すには，関係の n 圏について $(R_n)_B \subseteq (R_B)_n$ の成り立つことを n についての帰納法によって示せばいい．そこで $a\,(R_n)_B\, a'$，$n \geq 1$ とすれば，A の代数構造に含まれるある算法 α（その項数を k とする）によって $a = \alpha(a_1, \ldots, a_k)$，$a' = \alpha(a'_1, \ldots, a'_k)$ と書けて，$\sum_{i=1}^{k} n_i = n - 1$ なるある非負整数 n_i について $a_i\, R_{n_i}\, a'_i$ が成り立つ $(i = 1, \ldots, k)$．仮定により $a_i, a'_i \in B$ であるから，帰納法の仮定により $a_i\,(R_B)_{n_i}\, a'_i$，従って $a\,(R_B)_n\, a'$ が成り立つ．また $a\,(R^t)_B\, a'$ とすれば，A の元

[40] この問題は高岡洋介氏と堀川智史氏の着想に基づく．

の列 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ で $a_{j-1} \mathrel{R} a_j$ $(j = 1, \ldots, m)$，$a_0 = a$，$a_m = a'$ なるものがあるが，仮定により $a_i \in B$ となるので，$a\,(R_B)^t\,a'$ が成り立つ．　**終**

問題 3.9.62 でのように集合 A の直積 $A \times A$ の各元 (a, a') を $\dfrac{a}{a'}$ と分数式に表示して，以下の考察を行なう．

(A, T, σ) が型付代数系であるとき，σ を A 上の関係とみなすことができ，従って $A \times A$ の部分集合とみすことができる．すなわち

$$\sigma = \left\{ \frac{a}{a'} \;\middle|\; a, a' \text{ は同型} \right\}$$

この σ を A と同型の型付代数系にすることができる．すなわちまず，A の代数構造が $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で n_λ が α_λ の項数であるとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，σ 上の n_λ 項算法 β_λ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dom} \beta_\lambda &= \left\{ \left(\frac{a_1}{a_1'}, \ldots, \frac{a_{n_\lambda}}{a_{n_\lambda}'} \right) \in \sigma^{n_\lambda} \;\middle|\; (a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom} \alpha_\lambda \right\} \\
\beta_\lambda \left(\frac{a_1}{a_1'}, \ldots, \frac{a_{n_\lambda}}{a_{n_\lambda}'} \right) &= \frac{\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})}{\alpha_\lambda(a_1', \ldots, a_{n_\lambda}')}
\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{a_1}{a_1'}, \ldots, \dfrac{a_{n_\lambda}}{a_{n_\lambda}'} \right) \in \sigma^{n_\lambda}$，$(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in \operatorname{Dom} \alpha_\lambda$ なら，問題 3.4.4 または定理 3.11.1 系 3 により $(a_1', \ldots, a_{n_\lambda}') \in \operatorname{Dom} \alpha_\lambda$ であって $\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と $\alpha_\lambda(a_1', \ldots, a_{n_\lambda}')$ は同型であるから，この β_λ の定義は可能である．次に，写像 $\tau \in \sigma {\to} T$ を

$$\tau \left(\frac{a}{a'} \right) = \sigma a \ (= \sigma a')$$

と定義する．そうすると，T の代数構造を $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ とするとき，

$$\begin{aligned}
\tau \left(\beta_\lambda \left(\frac{a_1}{a_1'}, \ldots, \frac{a_{n_\lambda}}{a_{n_\lambda}'} \right) \right) &= \tau \left(\frac{\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})}{\alpha_\lambda(a_1', \ldots, a_{n_\lambda}')} \right) \\
&= \sigma(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})) \\
&= t_\lambda(\sigma a_1, \ldots, \sigma a_{n_\lambda}) = t_\lambda \left(\tau \left(\frac{a_1}{a_1'} \right), \ldots, \tau \left(\frac{a_{n_\lambda}}{a_{n_\lambda}'} \right) \right)
\end{aligned}$$

が成り立つから τ は擬写である．この式を一部遡れば，τ がさらに厳密であることも分かる．従って (σ, T, τ) は，代数構造 $(\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ によって型付代数系となる．これを A の**分数代数系**と呼ぶ．なお σ は，問題 3.9.62 で定義した $A \times A$ 上の算法 s, t で閉じている．

問題 3.11.9 型付代数系 A から出来る分数代数系は，A から $\mathbb{T}$ を指集合として出来る巾代数系 $A^{\mathbb{T}}$ と保型同形である．

定理 3.11.4 **A を型付代数系とし σ をその型写像とするとき，A 上の σ に含まれる関係 R について次の三つのことが成り立つ．**

1. **R が A の代数構造と両立するためには，R が分数代数系 σ の台部分系であることが必要十分である．**

2. **$R^- = [R]_\sigma$ が成り立つ．ただし，$[\quad]_\sigma$ は分数代数系 σ における算包を表す．**

3. **$R^= = \left[\left[[R \cup D]_s \right]_\sigma \right]_t$ が成り立つ．ただし，D は $A \times A$ の対角線であり，$[\quad]_s$ と $[\quad]_t$ とは，問題 3.9.62 でと同様に代数系 $(A \times A, \{s\})$ と代数系 $(A \times A, \{t\})$ とにおける算包を表す．**

証明　$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とをそれぞれ A と分数代数系 σ との代数構造とし，n_λ を α_λ，β_λ の項数とする．

1. R が A の代数構造と両立すると仮定する．このとき，任意の $\lambda\in\Lambda$ と任意の $\left(\dfrac{a_1}{a'_1},\dots,\dfrac{a_{n_\lambda}}{a'_{n_\lambda}}\right)\in R^{n_\lambda}\cap\operatorname{Dom}\beta_\lambda$ とに対して，$(a_1,\dots,a_{n_\lambda})\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$，$a_i\,R\,a'_i$ $(i=1,\dots,n_\lambda)$ が成り立つから，$(a'_1,\dots,a'_{n_\lambda})\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$，$\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_{n_\lambda})\,R\,\alpha_\lambda(a'_1,\dots,a'_{n_\lambda})$，従って $\beta_\lambda\left(\dfrac{a_1}{a'_1},\dots,\dfrac{a_{n_\lambda}}{a'_{n_\lambda}}\right)=\dfrac{\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_{n_\lambda})}{\alpha_\lambda(a'_1,\dots,a'_{n_\lambda})}\in R$ が成り立つ．つまり，R は分数代数系 σ の台部分系である．逆に，R が σ の台部分系であると仮定し，さらに $(a_1,\dots,a_{n_\lambda})\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$，$a_i\,R\,a'_i$ $(i=1,\dots,n_\lambda)$ とする．このとき，$\left(\dfrac{a_1}{a'_1},\dots,\dfrac{a_{n_\lambda}}{a'_{n_\lambda}}\right)\in R^{n_\lambda}\cap\operatorname{Dom}\beta_\lambda$ であるから，$\dfrac{\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_{n_\lambda})}{\alpha_\lambda(a'_1,\dots,a'_{n_\lambda})}=\beta_\lambda\left(\dfrac{a_1}{a'_1},\dots,\dfrac{a_{n_\lambda}}{a'_{n_\lambda}}\right)\in R$，つまり $\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_{n_\lambda})\,R\,\alpha_\lambda(a'_1,\dots,a'_{n_\lambda})$ が成り立つ．従って，R は A の代数構造と両立する．

2. R^- は，A の型代数構造と両立し R を含む関係の中で最小のものであるから，結論 1 によって，分数代数系 σ の台部分系であって R を含むものの中で最小のもの，すなわち $[R]_\sigma$ に等しい．

3. 問題 3.11.7 によって $R^= = R^{rs-t}$ が成り立つ．他方，$R^r = R\cup D$ であり，従って問題 3.9.62 によって $R^{rs}=[R\cup D]_s$ が成り立ち，従って結論 2 によって $R^{rs-}=\big[[R\cup D]_s\big]_\sigma$ が成り立ち，従ってまた問題 3.9.62 によって $R^{rs-t}=\Big[\big[[R\cup D]_s\big]_\sigma\Big]_t$ が成り立つ．

問題 3.11.10 型付代数系 A 上の型写像 σ に含まれる関係 R と A の元 a, a' が $a\,R^-\,a'$ をみたすためには，A の元の列 $a_1,\dots,a_n,a'_1,\dots,a'_n$ で $a_n=a$ と $a'_n=a'$ をみたして各 $i\in\{1,\dots,n\}$ について次の二条件のいずれかをみたすものの存在することが必要十分である．

1. $a_i\,R\,a'_i$
2. A の代数構造に属す算法 α（k をその項数とする）と $i-1$ 以下の番号 $j_1,\dots,j_k$ とで $a_i=\alpha(a_{j_1},\dots,a_{j_k})$，$a'_i=\alpha(a'_{j_1},\dots,a'_{j_k})$ なるものが存在する．

略解　分数代数系 σ に問題 3.2.9 を使う．

3.12　型付代数系の拡大

$ この節では，与えられた型付代数系を部分系とする型付代数系（これをもとの型付代数系の**拡大**と呼ぶ）の存在について論ずる．ここに，算法を沢山持つ代数系特有の問題が生ずる．

3.12.1　基本定理

§ 部分系が台と代数構造の制限によって出来ることに対応して，拡大は台と代数構造の拡大によって出来る．この二種類の拡大の存在をまとめて次の定理で証明する．

定理 3.12.1 **T を Λ 代数系とし，$M\subseteq\Lambda$ とし，(S, T_M, τ) を型付代数系とする．さらに，R は S の部分集合で，$(R, T, \tau|_R)$ は型付代数系であり，R_M は S の台部分系であるとする．このとき，次の四条件をみたす型付代数系 $(\overline{A}, T, \overline{\sigma})$ が存在する．**

1. **S は $\overline{A}$ の M 部分系であり，R は $\overline{A}$ の台部分系である．**

2. $\overline{\sigma}|_S=\tau$

3. $\overline{A} = [S]$

4. (A', T, σ') **が型付代数系で，**$\varphi \in S \to A'$ **が保型** M **準写で，**$\varphi|_R \in R \to A'$ **が保型準写であれば，**φ **は保型準写** $f \in \overline{A} \to A'$ **に拡張される．**

この四条件をみたす $(\overline{A}, T, \overline{\sigma})$ **は，次の意味で一意に定まる．すなわち，型付代数系** $(\hat{A}, T, \hat{\sigma})$ **が上の四条件において bar** $^-$ **を hat** $\hat{}$ **に変えたものをみたすなら，保型同写** $f \in \overline{A} \to \hat{A}$ **で** $f|_S = \mathrm{id}_S$ **をみたすものが唯一つ存在する．**

証明　後半（一意性についての部分）の証明は問題 3.5.8 と同様で類型的のものなので省略し，前半（存在についての部分）のみを証明する．

定理 3.5.1 により，普遍型付代数系 (A, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ なるものが存在する．A の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ とする．

写像 $F \in A \to A$ で $F|_S = \mathrm{id}_S$，$\sigma F = \sigma$ なるものを以下のように作る．定理 3.8.5 により (A, S) は有基代数系である．そこで，$a \in A$ に対する Fa を a の階数 n について帰納的に定義する．まず $n = 0$，すなわち $a \in S$ のときは，$Fa = a$ と定める．このとき $\sigma Fa = \sigma a$ は成り立つ．次に $n \geq 1$ のときは，定理 3.8.2 により $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ と一意に書けて，a_i の階数は n より小さい $(i = 1, \ldots, j)$．従って，$Fa_1, \ldots, Fa_j$ は帰納的に定まっている．そこで，場合を三つに分けて Fa を定義する．

場合 1: $Fa_1, \ldots, Fa_j \in R$ の場合，$Fa = r_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ と定める（r_λ は λ に対応する R の算法である）．

場合 2: $Fa_1, \ldots, Fa_j \in S$ かつ $\lambda \in M$ の場合，$Fa = s_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ と定める（s_λ は λ に対応する S の算法である）．

場合 3: これ以外の場合は，$Fa = \alpha_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ と定める．

この定義が可能で矛盾がないことと $\sigma Fa = \sigma a$ なることを確かめなくてはならない．まず，場合 1 かつ場合 2 の場合，すなわち $Fa_1, \ldots, Fa_j \in R$ かつ $\lambda \in M$ の場合，R_M は S の台部分系であるから $r_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j) = s_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ が成り立つ（両辺とも定義されない場合も含める）．従って，場合 1, 2 の規定は矛盾しない．いずれの場合でも，$\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ が定義されているから $t_\lambda(\sigma a_1, \ldots, \sigma a_j)$ も定義される（t_λ は λ に対応する T の算法である）．帰納的に $\sigma a_i = \sigma Fa_i$ は成り立っている $(i = 1, \ldots, j)$．従って $t_\lambda(\sigma Fa_1, \ldots, \sigma Fa_j)$ が定義され，σ が厳密だから，場合 3 における $\alpha_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ は確かに定義される．場合 1, 2 では，$\sigma|_S = \tau$ なることより $\sigma Fa_i = \tau Fa_i$ であるから，$t_\lambda(\tau Fa_1, \ldots, \tau Fa_j)$ が定義され，従って $r_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$，$s_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ は確かに定義される．そして，場合 2 では，次の計算で $\sigma Fa = \sigma a$ なることが確かめられる．

$$
\begin{aligned}
\sigma\bigl(s_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)\bigr) &= \tau\bigl(s_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)\bigr) && (\sigma|_S = \tau \text{ だから}) \\
&= t_\lambda(\tau Fa_1, \ldots, \tau Fa_j) && (\tau \text{ が擬写だから}) \\
&= t_\lambda(\sigma Fa_1, \ldots, \sigma Fa_j) && (\sigma|_S = \tau \text{ だから}) \\
&= t_\lambda(\sigma a_1, \ldots, \sigma a_j) && (\sigma Fa_i = \sigma a_i \text{ だから}) \\
&= \sigma\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr) && (\sigma \text{ が擬写だから})
\end{aligned}
$$

場合 1, 3 での確かめは，同様かもっと簡単なので省略する．これで F の帰納的構成が完了した．

いま作った F がさらに任意の $a \in A$ に対して $FFa = Fa$ をみたすことを，やはり a の階数 n についての帰納法で示そう．まず $n = 0$，すなわち $a \in S$ のときは，$F|_S = \mathrm{id}_S$ なので $FFa = a = Fa$ が成り立つ．次に $n \geq 1$ のときは，$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ と一意に書けて a_i の階数が n より小さいから，帰納法の仮定により $FFa_i = Fa_i$ が成り立つ $(i = 1, \ldots, j)$．$Fa \notin S$ と仮定してよく，そう仮定すると，Fa は場合 3 の規定により $Fa = \alpha_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ と定まるから，$Fa_1, \ldots, Fa_j \in R$ でも $Fa_1, \ldots, Fa_j \in S$ かつ $\lambda \in M$ でもない．従って $FFa_1, \ldots, FFa_j \in R$ でも $FFa_1, \ldots, FFa_j \in S$ かつ $\lambda \in M$ でもないから，FFa はやはり場合 3 の規定により $FFa = \alpha_\lambda(FFa_1, \ldots, FFa_j) = \alpha_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ と定まる．従って $FFa = Fa$ が確かに成り立つ．

$\overline{A} = FA$ と定める．そうすると，$F|_S = \mathrm{id}_S$ であるから $S \subseteq \overline{A}$ が成り立つ．

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\overline{A}$ 上の算法 $\overline{\alpha}_\lambda$ を次のように定めて，$\overline{A}$ を A と同類の代数系にする．すなわち，$\overline{A}$ の元 $a_1, \ldots, a_j$ が $(a_1, \ldots, a_j) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ をみたすときに限り

$$\overline{\alpha}_\lambda(a_1, \ldots, a_j) = F\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr)$$

また，$\overline{\sigma} = \sigma|_{\overline{A}}$ と定める．そうすると，$\overline{A}$ の元 $a_1, \ldots, a_j$ が $(a_1, \ldots, a_j) \in \mathrm{Dom}\,\overline{\alpha}_\lambda$ をみたすのは $(\overline{\sigma}a_1, \ldots, \overline{\sigma}a_j) \in \mathrm{Dom}\,t_\lambda$ の場合に等しく（t_λ は λ に対応する T の算法を表す），その場合

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\bigl(\overline{\alpha}_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr) &= \sigma F\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr) && (\overline{\alpha}_\lambda \text{ と } \overline{\sigma} \text{ の定義による}) \\
&= \sigma\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr) && (\sigma F = \sigma \text{ だから}) \\
&= t_\lambda(\sigma a_1, \ldots, \sigma a_j) && (\sigma \text{ が擬写だから}) \\
&= t_\lambda(\overline{\sigma}a_1, \ldots, \overline{\sigma}a_j) && (\overline{\sigma} \text{ の定義による})
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って $\overline{\sigma}$ は準写であり，$(\overline{A}, T, \overline{\sigma})$ は型付代数系となる．

$(a_1, \ldots, a_j) \in \mathrm{Dom}\,\overline{\alpha}_\lambda$ かつ $a_1, \ldots, a_j \in R$ なら，$F|_S = \mathrm{id}_S$ であることより $Fa_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, j)$ であるから $Fa_1, \ldots, Fa_j \in R$，従って場合 1 の規定により

$$\overline{\alpha}_\lambda(a_1, \ldots, a_j) = F\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr) = r_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j) = r_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$$

が成り立つ．よって，R は $\overline{A}$ の台部分系である．同様に，S が $\overline{A}$ の M 部分系であることが分かる．さらに，$\overline{\sigma}|_S = \sigma|_S = \tau$ が成り立つ．

A の元 $a_1, \ldots, a_j$ に対して，$\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ が定義されるのは $t_\lambda(\sigma a_1, \ldots, \sigma a_j)$ の定義される場合に等しく，$\sigma = \sigma F$ であったからそれは $t_\lambda(\sigma Fa_1, \ldots, \sigma Fa_j)$ の定義される場合に等しく，それは $\alpha_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ の定義される場合に等しく，それは $\overline{\alpha}_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)$ の定義される場合に等しい．そしてこの場合，$F\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr)$ と $\overline{\alpha}_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j) = F\bigl(\alpha_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j)\bigr)$ とは，場合 1, 2, 3 の規定により Fa_i $(= FFa_i)$ だけで決まるから，相等しい．従って F は，A から $\overline{A}$ への写像として準写である．このことと $A = [S]$，$F|_S = \mathrm{id}_S$ であったことにより，$\overline{A} = [S]_{\overline{A}}$ が成り立つ．

(A', T, σ') が型付代数系で，$\varphi \in S {\to} A'$ が保型 M 準写で，$\varphi|_R \in R {\to} A'$ が保型準写であるとする．そうすると，$\sigma'\varphi = \tau = \sigma|_S$ であるから，(A, T, σ, S) の普遍性により，φ は保型準写 $G \in A {\to} A'$ に拡張される．

この G が任意の $a \in A$ に対して $GFa = Ga$ をみたすことを，前のように a の階数 n についての帰納法で示そう．まず $n = 0$ のときは，$a \in S$ で $F|_S = \mathrm{id}_S$ だから，$GFa = Ga$ が確かに成り立つ．次に $n \geq 1$ のときは，$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ と書ける．そして，場合 2 のときは次の計算によって $GFa = Ga$ なることが確かめられる．ただし，$\lambda \in \Lambda$ に対応する A' の算法を α'_λ とする．

$$GF\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j) = Gs_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j) \qquad (\text{場合 2 だから})$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi s_\lambda(Fa_1, \ldots, Fa_j) && (G|_S = \varphi \text{ だから}) \\
&= \alpha'_\lambda(\varphi Fa_1, \ldots, \varphi Fa_j) && (\varphi \text{ は } M \text{ 擬写だから}) \\
&= \alpha'_\lambda(GFa_1, \ldots, GFa_j) && (G|_S = \varphi \text{ だから}) \\
&= \alpha'_\lambda(Ga_1, \ldots, Ga_j) && (\text{帰納法の仮定による}) \\
&= G\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j) && (G \text{ は擬写だから})
\end{aligned}
$$

場合 1, 3 での確かめは，同様かもっと簡単なので省略する．

さて $f = G|_{\overline{A}}$ と定めれば，$(a_1, \ldots, a_j) \in \mathrm{Dom}\,\overline{\alpha}_\lambda$ のとき

$$
\begin{aligned}
f\overline{\alpha}_\lambda(a_1, \ldots, a_j) &= G\overline{\alpha}_\lambda(a_1, \ldots, a_j) \\
&= GF\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr) \\
&= G\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\bigr) \\
&= \alpha'_\lambda(Ga_1, \ldots, Ga_j) = \alpha'_\lambda(fa_1, \ldots, fa_j)
\end{aligned}
$$

が成り立つ $(\lambda \in \Lambda)$．また，$\sigma' f = \sigma' G|_{\overline{A}} = \sigma|_{\overline{A}} = \overline{\sigma}$ が成り立つ．従って f は保型準写である．さらに $f|_S = G|_S = \varphi$ も成り立つ．これで定理は証明された．

問題 3.12.1 定理 3.12.1 において，φ を拡張する保型準写 $f \in \overline{A} {\to} A'$ は一意に定まる．

問題 3.12.2 定理 3.12.1 の証明において，$F \in A {\to} \overline{A}$ は全射保型準写であり，従って商代数系 A/F から $\overline{A}$ への写像 F/F は保型同写である [41]．

略解　後半は問題 3.11.3 による．

3.12.2　算拡大

§ 定理 3.12.1 において $R = \emptyset$ として bar $^-$ をとり S を B と書き換えれば，次の定理が得られる．

定理 3.12.2 **T を Λ 代数系とし，$M \subseteq \Lambda$ とし，(B, T_M, τ) を型付代数系とする．このとき，次の四条件をみたす型付代数系 (A, T, σ) が定理 3.12.1 と同様の意味で一意に存在する．**

1. **B は A の M 部分系である．**
2. $\sigma|_B = \tau$
3. $A = [B]$
4. **(A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in B {\to} A'$ が保型 M 準写であれば，φ は保型準写 $f \in A {\to} A'$ に拡張される．**

定義 3.12.1 定理 3.12.2 の意味で一意に定まる型付代数系 (A, T, σ) を型付代数系 (B, T_M, τ) の T による**算拡大**と呼び，(A, T, σ) の性質 4 を算拡大の**普遍性**と呼ぶ．

算拡大の普遍性は，普遍型付代数系の普遍性を説明する図 3.3 と同様の図 3.4 で説明される．ただし，図中の記号 i は自然な単射を表す．$\tau = \sigma|_B = \sigma i$ であるから，M 擬写 $\varphi \in B {\to} A'$ が保型写像であることは左側の図式が可換であることと同等である．そのときに右側の図式を可換にする擬写 f がある，というのが算拡大の普遍性の意味である．

[41] このことを利用して定理 3.12.1 における $\overline{A}$ を A/F から，注意 3.4.1 で説明した方法で作ることもできる．定理 3.12.1 の最初の証明はそういうものであった．$\overline{A}$ を FA と定義するという現在の証明法は松田一樹氏の発見による．

図 3.4: 算拡大の普遍性の図式による説明

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ A' \arrow[r, "\sigma'"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, "f"] \\ A' \arrow[r, "\sigma'"'] & T \end{tikzcd}$$

3.12.3　台拡大

§ 定理 3.12.1 において $M = \emptyset$ としてから記号 $R, \tau, \tau|_R, \varphi$ を $B, \theta, \tau, \varphi'$ に書き換え bar $^-$ をとれば，次のことが分かる．すなわち，(B, T, τ) を型付代数系とし，集合 S と写像 $\theta \in S{\to}T$ が $B \subseteq S$，$\theta|_B = \tau$ をみたすとすれば，次の四条件をみたす型付代数系 (A, T, σ) が一意に存在する（「一意に」の意味は定理 3.12.1 と同様）．

1′. S は A の部分集合であり，B は A の台部分系である．

2′. $\sigma|_S = \theta$，従って $\sigma|_B = \tau$

3′. $A = [S]$

4′. (A', T, σ') が型付代数系であって写像 $\varphi' \in S{\to}A'$ が $\sigma'\varphi' = \theta$ をみたし，$\varphi'|_B \in B{\to}A'$ が保型準写であれば，φ' は保型準写 $f \in A{\to}A'$ に拡張される．

これから次の定理が得られる．

定理 3.12.3 (B, T, τ) **を型付代数系とし，**R **を** $B \cap R = \emptyset$ **なる集合とし，**$\rho \in R{\to}T$ **とする．このとき，次の四条件をみたす型付代数系** (A, T, σ) **が定理 3.12.1 と同様の意味で一意に存在する．**

1. B **は** A **の台部分系であり，**R **は** A **の部分集合である．**

2. $\sigma|_B = \tau$，$\sigma|_R = \rho$

3. $A = [B \cup R]$

4. (A', T, σ') **が型付代数系で，**$\varphi \in B{\to}A'$ **が保型準写で，**$\psi \in R{\to}A'$ **が保型写像であれば，**φ **と** ψ **を共に拡張する保型準写** $f \in A{\to}A'$ **が有る．**

証明　$S = B \cup R$ と定め，$B \cap R = \emptyset$ に留意して写像 $\theta \in S{\to}T$ を $\theta|_B = \tau$，$\theta|_R = \rho$ と定める．そうすると，先の条件 1′ – 4′ をみたす型付代数系 (A, T, σ) が存在し，これが条件 1 – 3 をみたす．条件 4 の前提の下で，写像 $\varphi' \in S{\to}A'$ を $\varphi'|_B = \varphi$，$\varphi'|_R = \psi$ と定めれば，φ が保型準写であるから $\sigma'\varphi'|_B = \sigma'\varphi = \tau = \theta|_B$ が成り立ち，ψ が保型写像であるから $\sigma'\varphi'|_R = \sigma'\psi = \sigma|_R = \rho = \theta|_R$ が成り立ち，合わせて $\sigma'\varphi' = \theta$ が得られ，さらに $\varphi'|_B = \varphi$ が保型準写であるから，条件 4′ により φ' は保型準写 $f \in A{\to}A'$ に拡張される．つまり条件 4 もみたされる．

定義 3.12.2 定理 3.12.3 の意味で一意に定まる型付代数系 (A, T, σ) を (B, T, τ) の R, ρ による**台拡大**と呼び，(A, T, σ) の性質 4 を台拡大の**普遍性**と呼ぶ．

図 3.5: 台拡大の普遍性の図式による説明

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ A' \arrow[r, "\sigma'"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, "f"] \\ A' \arrow[r, "\sigma'"'] & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ A' \arrow[r, "\sigma'"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, "f"] \\ A' \arrow[r, "\sigma'"'] & T \end{tikzcd}$$

台拡大の普遍性は図 3.5 で説明される．ただし，図中の記号 i, j は自然な単射を表す．擬写 $\varphi \in B{\to}A'$ と写像 $\psi \in R{\to}A'$ がそれぞれ左側の図式を可換にすれば右側の二図式を可換にする擬写 $f \in A{\to}A'$ があるというのが，台拡大の普遍性の意味である．

問題 3.12.3 定理 3.12.2 と定理 3.12.3 のそれぞれは，従ってそれらの元である定理 3.12.1 は，定理 3.5.1 の拡張である [42]．

問題 3.12.4 B を汎代数系とし，R を $B \cap R = \emptyset$ なる集合とする．このとき，次の三条件をみたす汎代数系 A が定理 3.12.1 と同様の意味で一意に存在する（これを B の R による**台拡大**と呼ぶ）．

1. B は A の台部分系であり，R は A の部分集合である．
2. $A = [B \cup R]$
3. A' が汎代数系で，$\varphi \in B{\to}A'$ が擬写で，$\psi \in R{\to}A'$ が写像であれば，φ と ψ を共に拡張する擬写 $f \in A{\to}A'$ が有る．

略解　問題 3.4.3 により，B は単元集合 T を型代数系とする型付代数系 (B, T, τ) とみなされ，R から T への一意に定まる写像を ρ で表せば，定理 3.12.3 の四条件をみたす型付代数系 (A, T, σ) が存在する．条件 3 の前提の下では，A' も型付代数系 (A', T, σ') とみなされ，問題 3.4.10 により φ は保型準写となって ψ は保型写像となるから，φ と ψ を共に拡張する保型準写 $f \in A{\to}A'$ が有る．

3.12.4　普遍型付代数系の素拡大・算拡大・系拡大

§ 引き続いて標記の拡大の存在と一意性を論ずるが，一意性の具体的な内容と証明は定理 3.12.1 と同様に類型的なものなのでおおむね省略する．

補題 3.12.1 (B, T, τ, U) **を普遍型付代数系とし，**R **を** $B \cap R = \emptyset$ **なる集合とし，**$\rho \in R{\to}T$ **とする．このとき，次の三条件をみたす普遍型付代数系** (A, T, σ, S) **が一意に存在する．**

1. B **は** A **の台部分系であり，**R **は** A **の部分集合である．**

2. $\sigma|_B = \tau,\ \sigma|_R = \rho$

[42] 定理 3.12.1 は始めは，現在よりやや弱い形のものであり，定理 3.5.1 の拡張ではなかった．定理 3.5.1 の拡張の形の現在の定理 3.12.1 は水村泰明氏による．

3. $S = U \cup R$

また，こういう (A, T, σ, S) については，(A, T, σ) は (B, T, τ) の R, ρ による台拡大である（このことと条件 3 を踏まえて，(A, T, σ, S) を (B, T, τ, U) の R, ρ による素拡大と呼ぶ）．

証明　(A, T, σ) を (B, T, τ) の R, ρ による台拡大とし，条件 3 に沿って $S = U \cup R$ と定める．そうすると，定理 3.12.3 により条件 1, 2 もみたされて $A = [B \cup R] \supseteq S$ が成り立つ．問題 3.2.4 により $B = [U]_B \subseteq [U]$，従って問題 3.2.10 により $B \subseteq [S]$ が成り立ち，$R \subseteq [S]$ でもあるから $B \cup R \subseteq [S]$ を得る．これを $A = [B \cup R]$ と合わせて $A = [S]$ を得る．そこで，(A, T, σ, S) が普遍性を持つことを示すために，型付代数系 (A', T, σ') と写像 $\psi' \in S \to A'$ が $\sigma'\psi' = \sigma|_S$ をみたすと仮定する．そうすると $\sigma'\psi'|_U = \sigma|_S|_U = \sigma|_U = \sigma|_B|_U = \tau|_U$ が成り立つので，(B, T, τ, U) の普遍性により，$\psi'|_U$ は保型準写 $\varphi \in B \to A'$ に拡張される．また，$\sigma'\psi'|_R = \sigma|_S|_R = \sigma|_R$ が成り立つので，$\psi'|_R \in R \to A'$ は保型写像である．従って，台拡大の普遍性により φ と $\psi'|_R$ は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張され，$f|_U = f|_B|_U = \varphi|_U = \psi'|_U$ かつ $f|_R = \psi'|_R$，従って $f|_S = \psi'$ が成り立つ．従って (A, T, σ, S) は普遍性を持ち，これで前半が証明された．

後半については，まず条件 3 と $A = [S]$ かつ $U \subseteq B$ なることから問題 3.2.10 により $A = [B \cup R]$ を得る．そこで，(A, T, σ) が (B, T, τ) の R, ρ による台拡大の普遍性を持つことを示すために，(A', T, σ') が型付代数系で，$\varphi \in B \to A'$ が保型準写で，$\psi \in R \to A'$ が保型写像であるとする．このとき，$S = U \amalg R$ であることに留意して，写像 $\psi' \in S \to A'$ を $\psi'|_U = \varphi|_U$，$\psi'|_R = \psi$ と定めれば，$\sigma'\psi'|_U = \sigma'\varphi|_U = \tau|_U = \sigma|_B|_U = \sigma|_U$，$\sigma'\psi'|_R = \sigma'\psi = \sigma|_R$ であるから $\sigma'\psi' = \sigma|_S$，従って (A, T, σ, S) の普遍性により，ψ' は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張され，$f|_B$ と φ が保型準写であって $f|_B|_U = f|_U = f|_S|_U = \psi'|_U = \varphi|_U$ をみたすから $f|_B = \varphi$ が成り立ち，また $f|_R = f|_S|_R = \psi'|_R = \psi$ が成り立つ．従って (A, T, σ) は台拡大の普遍性を持ち，これで後半が証明された．

問題 3.12.5 (A, T, σ, S) を普遍型付代数系とし，$U \subseteq S$ とし，$B = [U]$，$\tau = \sigma|_B$，$R = S - U$，$\rho = \sigma|_R$ と定める．このとき，(B, T, τ, U) は普遍型付代数系であり $B \cap R = \emptyset$ が成り立ち，(A, T, σ, S) は (B, T, τ, U) の R, ρ による素拡大である．

略解　一番目の結論は問題 3.8.10 による．また，定理 3.8.5 と問題 3.8.4 により S は A の算法余白であるから，問題 3.2.17 により $B \cap R = \emptyset$ が成り立つ．

問題 3.12.6 (✓)　(A, T, σ, S) を普遍型付代数系 (B, T, τ, U) の R, ρ による素拡大とし，$U_t = \emptyset \neq S_t$ なる任意の $t \in T$ について $B_t \neq \emptyset$ が成り立つと仮定する．このとき，(A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in B \to A'$ が保型準写であれば，φ は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張される．

略解　$U_t \neq \emptyset$ なら $\emptyset \neq \varphi(U_t) \subseteq A'_t$ であり，$U_t = \emptyset \neq R_t$ なら仮定により $\emptyset \neq \varphi(B_t) \subseteq A'_t$ であるから，$R_t \neq \emptyset$ なる $t \in T$ については $A'_t \neq \emptyset$ が成り立ち，従って保型写像 $\psi \in R \to A'$ が存在する．

問題 3.12.7 (✓) 普遍型付代数系 (A', T, σ', S') が普遍型付代数系 (A, T, σ, S) の素拡大であって，普遍型付代数系 (A'', T, σ'', S'') が (A', T, σ', S') の素拡大であれば，(A'', T, σ'', S'') は (A, T, σ, S) の素拡大である．

補題 3.12.2 T を Λ 代数系とし，$M \subseteq \Lambda$ とし，(B, T_M, τ, S) を普遍型付代数系とする．このとき，次の二条件をみたす普遍型付代数系 (A, T, σ, S) が一意に存在する．**

1. B **は** A **の** M **部分系である．**

2. $\sigma|_B = \tau$

また，こういう (A, T, σ, S) については，(A, T, σ) は (B, T_M, τ) の T による算拡大である（そこで (A, T, σ, S) を (B, T_M, τ, S) の T による算拡大と呼ぶ）．

証明　(A, T, σ) を型付代数系 (B, T_M, τ) の T による算拡大とする．そうすると定理 3.12.2 により，条件 1, 2 がみたされて $A = [B]$ が成り立つ．条件 1 と問題 3.2.4 により $B = [S]_B \subseteq [S]$ が成り立ち，従って $[B] \subseteq [S]$ が成り立つ．これと $A = [B]$ を合わせて $A = [S]$ を得る．そこで，(A, T, σ, S) が普遍性を持つことを示すために，型付代数系 (A', T, σ') と写像 $\psi \in S \to A'$ が $\sigma'\psi = \sigma|_S$ をみたすと仮定する．このとき $\sigma'\psi = \sigma|_B|_S = \tau|_S$ であり，また (A'_M, T_M, σ') は型付代数系であるから，(B, T_M, τ, S) の普遍性により，ψ は保型準写 $\varphi \in B \to A'_M$ に拡張される．そうすると，算拡大の普遍性により φ は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張され，従って ψ も f に拡張される．従って (A, T, σ, S) は普遍性を持ち，これで前半が証明された．

後半については，まず $S \subseteq B$ かつ $A = [S]$ であるから，問題 3.2.10 により $A = [B]$ を得る．そこで，(A, T, σ) が (B, T_M, τ) の T による算拡大の普遍性を持つことを示すために，(A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in B \to A'$ が保型 M 準写であるとする．このとき，$\psi = \varphi|_S$ と定めれば，$\sigma'\psi = \sigma'\varphi|_S = \tau|_S = \sigma|_B|_S = \sigma|_S$ であるから，(A, T, σ, S) の普遍性により，ψ は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張され，$f|_B$ と φ が保型 M 準写であって $f|_B|_S = f|_S = \psi = \varphi|_S$ であるから $f|_B = \varphi$ が成り立つ．従って (A, T, σ) は算拡大の普遍性を持ち，これで後半が証明された．

問題 3.12.8　(A, T, σ, S) を普遍型付 Λ 代数系とし，$M \subseteq \Lambda$，$B = [S]_M$，$\tau = \sigma|_B$ と定めれば，(B, T_M, τ, S) は普遍型付代数系であって，(A, T, σ, S) は (B, T_M, τ, S) の T による算拡大である．

略解　一番目の結論は問題 3.8.10 による．

問題 3.12.9 (✓)　T を Λ 代数系とし，$M \subseteq \Lambda$ とし，(A, T, σ, U) を普遍型付代数系 (B, T_M, τ, U) の T による算拡大とし，$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の代数構造とし，$R = \bigcup_{\lambda\in\Lambda-M} \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda$，$S = U \cup R$，$\rho = \sigma|_R$ と定める．このとき，(A_M, T_M, σ, S) は普遍型付代数系であって (B, T_M, τ, U) の R, ρ による素拡大である．

略解　問題 3.8.9 により (A_M, T_M, σ, S) は普遍型付代数系である．

定理 3.12.4　**T を Λ 代数系とし，$M \subseteq \Lambda$ とし，(B, T_M, τ, U) を普遍型付代数系とする．また，R を $B \cap R = \emptyset$ なる集合とし，$\rho \in R \to T$ とする．このとき，次の三条件をみたす普遍型付代数系 (A, T, σ, S) が一意に存在する（「一意に」の意味は証明の最後に述べる）．**

1. **B は A の M 部分系であり，R は A の部分集合である．**

2. $\sigma|_B = \tau$，$\sigma|_R = \rho$

3. $S = U \cup R$

証明　補題 3.12.1 により，(B, T_M, τ, U) の R, ρ による素拡大 (A', T_M, σ', S) があって次の三条件をみたす．

4. B は A' の台部分系であり，R は A' の部分集合である．

5. $\sigma'|_B = \tau$，$\sigma'|_R = \rho$

6. $S = U \cup R$

補題 3.12.2 により，(A', T_M, σ', S) の T による算拡大 (A, T, σ, S) があって次の二条件をみたす．

7. A' は A の M 部分系である．

8. $\sigma|_{A'} = \sigma'$

条件 4, 7 と問題 3.2.1 により条件 1 がみたされ，条件 5, 8 により条件 2 がみたされ，条件 3 は条件 6 そのものである．

普遍型付代数系 (A', T, σ', S') が条件 1 – 3 の A, σ, S を A', σ', S' に替えて得られる条件をみたせば，保型同写 $f \in A \to A'$ で $f|_B = \mathrm{id}_B$，$f|_R = \mathrm{id}_R$ なるものが唯一つ存在する（これが定理の「一意に」の意味である）．これは以下のように証明される．まず，条件 2, 3 により $S = S'$ と $\sigma|_S = \sigma'|_S$ が成り立つので，定理 3.5.1 により保型同写 $f \in A \to A'$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$ なるものが唯一つ存在する．$f|_B$ と id_B が B から A' への保型準写であって $f|_B|_U = f|_U = f|_S|_U = \mathrm{id}_S|_U = \mathrm{id}_U = \mathrm{id}_B|_U$ をみたすから $f|_B = \mathrm{id}_B$ 成り立つ．$f|_R = f|_S|_R = \mathrm{id}_S|_R = \mathrm{id}_R$ も成り立つ．逆に $f|_B = \mathrm{id}_B$ と $f|_R = \mathrm{id}_R$ をみたす保型同写 $f \in A \to A'$ は，条件 3 により $f|_S = \mathrm{id}_S$ をみたすから，唯一つである．

定義 3.12.3 定理 3.12.4 の意味で一意に決まる普遍型付代数系 (A, T, σ, S) を (B, T_M, τ, U) の T, R, ρ による**系拡大**と呼ぶ．

定理 3.12.5 **T を Λ 代数系とし $M \subseteq \Lambda$ とするとき，普遍型付代数系 (A, T, σ, S) と (B, T_M, τ, U) および集合 R と写像 $\rho \in R \to T$ についての次の三条件は同等である．**

1. (A, T, σ, S) **は** (B, T_M, τ, U) **の** R, ρ **によるある素拡大** (A', T_M, σ', S) **の** T **による算拡大である．**

2. (A, T, σ, S) **は** (B, T_M, τ, U) **の** T **によるある算拡大** (A'', T, σ'', U) **の** R, ρ **による素拡大である．**

3. (A, T, σ, S) **は** (B, T_M, τ, U) **の** T, R, ρ **による系拡大である．**

証明　$(1 \Longrightarrow 3)$ 定理 3.12.4 の証明で示したことである．

$(2 \Longrightarrow 3)$ $A'' \cap R = \emptyset$ が成り立ち，A'' は A の台部分系であり，R は A の部分集合であり，$\sigma|_{A''} = \sigma''$，$\sigma|_R = \rho$，$S = U \cup R$ が成り立つ．また，B は A'' の M 部分系であって $\sigma''|_B = \tau$ が成り立つ．従って，$B \cap R = \emptyset$ が成り立ち，B は A の M 部分系であり，R は A の部分集合であり，$\sigma|_B = \tau$，$\sigma|_R = \rho$ が成り立つ．

$(3 \Longrightarrow 1,\ 2)$ $B \cap R = \emptyset$ が成り立ち，B は A の M 部分系であり，R は A の部分集合であり，$\sigma|_B = \tau$，$\sigma|_R = \rho$，$S = U \cup R$ が成り立つ．

そこでまず $A' = [S]_M$，$\sigma' = \sigma|_{A'}$ と定める．そうすると問題 3.12.8 により，(A', T_M, σ', S) は普遍型付代数系であって，(A, T, σ, S) は (A', T_M, σ', S) の T による算拡大である．また，問題 3.2.4 から $B = [U]_{A'}$ が得られ，$\tau = \sigma|_B = \sigma|_{A'}|_B = \sigma'|_B$，$R = S - U$，$\rho = \sigma|_R = \sigma|_{A'}|_R = \sigma'|_R$ が成り立つから，問題 3.12.5 により (A', T_M, σ', S) は (B, T_M, τ, U) の R, ρ による素拡大である．

そこで次に $A'' = [U]$，$\sigma'' = \sigma|_{A''}$ と定める．そうすると問題 3.12.5 により，(A'', T, σ'', U) は普遍型付代数系であって，(A, T, σ, S) は (A'', T, σ'', U) の R, ρ による素拡大である．また，問題 3.2.4 により $B = [U]_{A''_M}$ が成り立ち，従って $\sigma''|_B = \sigma|_{A''}|_B = \sigma|_B = \tau$ も成り立つから，問題 3.12.8 により (A'', T, σ'', U) は (B, T_M, τ, U) の T による算拡大である．

3.13　恒等式

＄「実数の集合 $\mathbb{R}$ においては $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ なる恒等式が成り立つ」「群 G の中心の元 a は G の任意の元 x に対して $ax = xa$ なる関係式をみたす」．これらの意味は明白であって説明を要しない．式が具体的だからである．これに反して，「$\mathbb{R}$ において成り立つ恒等式」「群の元がみたす関係式」と抽象的に言ったとき，これが何を意味するかはそれほど明白ではない．

この節では，$\mathbb{R}$ や群・環・体などの特殊な代数系においてではなく，一般の型付代数系において成り立つ「恒等式」と「関係式」の概念を定義し，そういう恒等式や関係式をみたす型付代数系の存在について考える．

3.13.1　恒等式の定義と例

§ T を代数系とするとき，T 型の普遍型付代数系 (A, T, S) で各 $t \in T$ について素元系 S の t 部分 S_t が可算集合であるものは，すべて互いに保型同形となる．実際，もう一つのそういうもの (A', T, S') があれば，全単射 $\varphi \in S \to S'$ で $\varphi(S_t) = S'_t$ $(t \in T)$ なるものがあり，問題 3.5.7 により，φ は A から A' への保型同写に拡張される．このことを踏まえ，そういう普遍型付代数系 (A, T, S) を任意に一つとって $\mathfrak{A}(T)$ で表し，**可算基普遍型付代数系**と呼ぶ．特に T が単元集合かつ汎代数系の場合には，$\mathfrak{A}(T)$ は普遍汎代数系となるから，これを**可算基普遍汎代数系**と呼ぶ．

$\mathfrak{A}(T) \times \mathfrak{A}(T)$ の元 (ξ, η) を，T 型代数系についての**恒等式**または略して**式**と呼び $\xi \equiv \eta$ で表す．そして，A が T 型代数系であって任意の保型準写 $f \in \mathfrak{A}(T) \to A$ について $f\xi = f\eta$ が成り立つとき，**A において恒等式 $\xi \equiv \eta$ が成り立つ**とか **A は恒等式 $\xi \equiv \eta$ をみたす**とか言い，このことを $\xi =_A \eta$ で表す．そうすると記号 $=_A$ は，$\mathfrak{A}(T)$ 上の関係を表すとみなされる．$\mathfrak{A}(T)$ 上の関係はすなわち $\mathfrak{A}(T) \times \mathfrak{A}(T)$ の部分集合であるが，関係 $=_A$ は，A において成り立つ恒等式の全体に他ならない．

問題 3.13.1 $\mathfrak{A}(T)$ から T 型代数系 A への保型準写が存在するためには，任意の $t \in T$ に対して $A_t \neq \emptyset$ なることが必要十分である．

問題 3.13.2 T 型代数系 A に対して定まる $\mathfrak{A}(T)$ 上の関係 $=_A$ は，最大関係であるか，または型合同関係である．また $=_A$ は，$\mathfrak{A}(T)$ の保型準換を $\mathfrak{A}(T)$ 上の単項算法とみなしたものと両立する．

略解　$\mathfrak{A}(T)$ から A への保型準写が存在しない場合（すなわち $A_t = \emptyset$ なる $t \in T$ の存在する場合），$=_A$ は定義によって最大関係となる．そうでない場合，$\mathfrak{A}(T)$ から A への保型準写 f を関係とみなしたものすべての交わりが $=_A$ に等しく，関係とみなした f は定理 3.11.1 系 2 により型合同関係であるから，問題 3.11.4 等により $=_A$ も型合同関係である．

例 3.13.1 (群)　単元集合 $T = \{t\}$ に

$$t \cdot t = t \qquad\qquad t^{-1} = t$$

なる二項算法と単項算法から成る代数構造を与えて代数系と成す．つまり，T の代数構造は $(\tau_i)_{i \in \{1,2\}}$ と表され，τ_i は i 項算法であり $(i = 1, 2)$，

$$\operatorname{Dom}\tau_2 = \{t\}^2 \qquad\qquad \operatorname{Dom}\tau_1 = \{t\}$$
$$\tau_2(t, t) = t \qquad\qquad \tau_1 t = t$$

であるが，$\tau_2(t,t)$ を $t \cdot t$ で表して $\tau_1 t$ を t^{-1} で表したのである．そうすると，T 型代数系の代数構造は $(\alpha_i)_{i\in\{1,2\}}$ と表されて α_i は全域的 i 項算法であるが $(i = 1, 2)$，やはり $\alpha_2(a, b)$ を $a \cdot b$ で表して $\alpha_1 a$ を a^{-1} で表すことにする．

$$a \cdot b = \alpha_2(a, b) \qquad\qquad a^{-1} = \alpha_1 a$$

こういう記法の下では，T 型代数系とは，二項汎算法 $a \cdot b$ と単項汎算法 a^{-1} から成る代数構造を持つ汎代数系のことに他ならない．特に，可算基普遍汎代数系 $\mathfrak{A}(T)$ はそうである．そこで，次の三つの恒等式を考える．ただし x, y, z は，$\mathfrak{A}(T)$ の相異なる素元である（そういうものは存在する）．

$$x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z \tag{3.13.1}$$

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y \equiv y \tag{3.13.2}$$

$$x^{-1} \cdot x \equiv y^{-1} \cdot y \tag{3.13.3}$$

以下，これらをみたす T 型代数系は算法 $a \cdot b$ についての群に他ならないことを示そう．

A が T 型代数系であるとする．そうすると，A が恒等式 (3.13.1) をみたすことは，A が結合律

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{3.13.4}$$

に従うことと同等である（問題 3.6.2 参照）．これはつまり，(3.13.1) における x, y, z を A の任意の元 a, b, c で置き換え記号 $\equiv$ を等号 $=$ で置き換えたものである．また，A が恒等式 (3.13.2) と (3.13.3) それぞれをみたすことは，A が次の法則それぞれに従うことと同等である．

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = b \tag{3.13.5}$$

$$a^{-1} \cdot a = b^{-1} \cdot b \tag{3.13.6}$$

代表的に (3.13.1) と (3.13.4) について今述べたことを証明しよう．まず，A が恒等式 (3.13.1) をみたすと仮定し，A の任意の元 a, b, c をとる．このとき，$\mathfrak{A}(T)$ の素元系 S から A への写像 φ で $\varphi x = a$，$\varphi y = b$，$\varphi z = c$ なるものが存在する（そのために，x, y, z が相異なることが必要）．$\mathfrak{A}(T)$ の普遍性により φ は準写 $f \in \mathfrak{A}(T) \to A$ に拡張される．A が恒等式 (3.13.1) をみたすから

$$f\big(x \cdot (y \cdot z)\big) = f\big((x \cdot y) \cdot z\big) \tag{3.13.7}$$

が成り立ち，f が準写であるから，

$$f\big(x \cdot (y \cdot z)\big) = fx \cdot (fy \cdot fz) \qquad f\big((x \cdot y) \cdot z\big) = (fx \cdot fy) \cdot fz \tag{3.13.8}$$

が成り立つ．従って

$$fx \cdot (fy \cdot fz) = (fx \cdot fy) \cdot fz \tag{3.13.9}$$

が成り立つ．$fx = \varphi x = a$，$fy = \varphi y = b$，$fz = \varphi z = c$ だから (3.13.4) が成り立つ．

逆に，A が法則 (3.13.4) に従うと仮定し，準写 $f \in \mathfrak{A}(T) \to A$ を任意にとる．そうすると，この仮定により (3.13.9) が成り立ち，f が準写であることにより (3.13.8) も成り立つから，(3.13.7) が成り立つ．従って A は恒等式 (3.13.1) をみたす．

説明の残りは問題として述べる．

問題 3.13.3 三法則 (3.13.4), (3.13.5), (3.13.6) に従う汎算法 $a \cdot b$ と a^{-1} から成る代数構造を持つ代数系 A は，算法 $a \cdot b$ について群となって，任意の $a \in A$ に対して a^{-1} は a の逆元である．逆に，群における乗法 $a \cdot b$ と逆元算法 a^{-1} はこの三法則に従う．

略解　$a \in A$ によらずに $a^{-1} \cdot a$ が A の一定の元であるから，これを e で表す．そうすると，任意の $a \in A$ に対して $e \cdot a = a$ と $a^{-1} \cdot a = e$ が成り立つ．つまり，e は A の左単位元であり，a^{-1} は a の左逆元である．このときに e が A の単位元となって a^{-1} が a の逆元となることは周知である．

例 3.13.2 (束) 二つの二項汎算法 $\wedge, \vee$ から成る代数構造を持つ代数系 A が三組み六個の恒等式

$$x \wedge y \equiv y \wedge x \qquad x \vee y \equiv y \vee x \qquad (\text{可換式})$$
$$(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z) \qquad (x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z) \qquad (\text{結合式})$$
$$(x \wedge y) \vee x \equiv x \qquad (x \vee y) \wedge x \equiv x \qquad (\text{吸収式})$$

をみたすとき，A は $\wedge, \vee$ を**束算法**とする**束**であると言い，算法 $\wedge, \vee$ をそれぞれ**交わり・結び**または**交法・結法**と呼ぶ [43]．ただし x, y, z は，A と同類の可算基普遍汎代数系の相異なる素元である（他の例で今後恒等式を提示する場合も同様）．

例 3.13.1 での論法によれば，束のこの定義は次のように言い換えられる．すなわち，これらの恒等式における x, y, z を A の任意の元 a, b, c で置き換え記号 $\equiv$ を等号 $=$ で置き換えて得られる

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad a \vee b = b \vee a \qquad (\textbf{可換律})$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \qquad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \qquad (\text{結合律})$$
$$(a \wedge b) \vee a = a \qquad (a \vee b) \wedge a = a \qquad (\textbf{吸収律})$$

なる三組み六個の法則に A が従うとき，A は束であると言う．

A を束とし $\wedge, \vee$ をその束算法とする．そうすると吸収律により「$b \wedge a = a \iff a \vee b = b$」が成り立つので，$A$ 上の関係 $\leq$ を

$$a \leq b \iff b \wedge a = a \iff a \vee b = b \tag{3.13.10}$$

と定義する．そうすると $\leq$ は順序関係となる（これを**束 A の順序関係**とか **A の束順序関係**とかと呼ぶ）．実際，$\leq$ はまず，二つの吸収律と可換律により

$$a \wedge a = a \qquad a \vee a = a \qquad (\textbf{巾等律})$$

なる法則に従い，このうち $\wedge$ と $\vee$ いずれについての法則も，$\leq$ が反射律に従うことを示す．次に，$\wedge$ と $\vee$ いずれについての可換律も $\leq$ が反対称律に従うことを示し，$\wedge$ と $\vee$ いずれについての結合律も $\leq$ が推移律に従うことを示す．さらに，$\wedge$ と $\vee$ それぞれについての結合・巾等・可換の三律により，任意の $a, b \in A$ に対して，$a \wedge b$ と $a \vee b$ はそれぞれ，順序関係 $\leq$ に関する $\{a, b\}$ の下限 $\inf\{a, b\}$ と上限 $\sup\{a, b\}$ に等しい（そこで，交わり・結びをそれぞれ**下限・上限**とも呼ぶ）．さらに，任意の $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}'A$ に $\leq$ に関する下限と上限があって次の二式が成り立つ．

$$\inf\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \qquad \sup\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \tag{3.13.11}$$

ただし，両式の右辺における算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意である．なお，任意の $a \in A$ に対して，A から A への写像 $x \mapsto x \wedge a$ と $x \mapsto x \vee a$ は共に，A の束順序関係について増加律に従う．

束算法に言及するときはその順番に留意しなければならない．A が $\wedge, \vee$ を束算法とする束であれば $\wedge, \vee$ の順番を入れ替えた $\vee, \wedge$ についても A は束だからである．このように束算法を入れ替

[43] 四則算法 $+, -, \times, \div$ を加法・減法・乗法・除法と呼ぶ伝である．

えて得られる束をもとの束の**双対束**と呼ぶ．双対束の順序関係は，もとの束の順序関係 $\leq$ の双対関係 $\geq$ に等しい．従って，束の定義からある命題が導かれたとき，その命題中の $\wedge, \vee, \leq$ をそれぞれ $\vee, \wedge, \geq$ に書き換えて得られる命題も成り立つ．このことを束についての**双対性**と呼ぶ．

以上，束を代数系の一種として定義した後にそれに対して束順序関係を定義したが，逆に束を順序集合の一種として定義した後にそれに対して束算法を定義することもできる．すなわち，順序集合 $(A, \leq)$ において任意の二元部分集合に下限と上限が存在するとき，A 上の二項汎算法 $\wedge$ と $\vee$ を $a \wedge b = \inf\{a, b\}$，$a \vee b = \sup\{a, b\}$ と定めれば，A は $\wedge, \vee$ を束算法とする束となって束順序関係は $\leq$ に等しい．そこでこのとき，A は $\leq$ **について束である**と言う．特に完備な順序集合は，その順序関係について束であるので，完備束とも呼ばれる（第 3.9.4 項参照）．

例 3.13.3 (偏束・下束・上束) 一つの二項汎算法 $\wedge$ から成る代数構造を持つ代数系 A がこの算法について可換律・結合律・巾等律の三法則に従うとき，A は**偏束**または**下束**であると言い，算法 $\wedge$ を**交わり**または**交法**と呼ぶ．

A が偏束のとき，その交法 $\wedge$ によって A 上の関係 $\leq$ を次のように定義する．

$$a \leq b \iff b \wedge a = a$$

そうすると $\leq$ は順序関係となる（これを**偏束 A の順序関係**とか **A の偏束順序関係**とかと呼ぶ）．また，任意の $a, b \in A$ に対して，$a \wedge b$ は $\leq$ に関する $\{a, b\}$ の下限 $\inf\{a, b\}$ に等しい（そこで，交わりを**下限**とも呼ぶ）．さらに，任意の $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{P}'A$ に $\leq$ に関する下限があって

$$\inf\{a_1, \ldots, a_n\} = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$$

が成り立つ．ただし，右辺における算法 $\wedge$ を適用する順番は任意である．

逆に，順序集合 $(A, \leq)$ において任意の二元部分集合に下限が存在するとき，A 上の二項汎算法 $\wedge$ を $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ と定めれば，A は $\wedge$ を交法とする偏束となって偏束順序関係は $\leq$ に等しい．そこでこのとき，A は $\leq$ **について偏束である**と言う．

偏束・下束と双対的に**上束**の概念が得られる．すなわち上束は，可換律・結合律・巾等律に従う**結法**という名の二項汎算法 $\vee$ から成る代数構造を持つ代数系である．ただしこの定義だけでは，下束と上束の違いは用語と算号の違いに過ぎない．そこで上束の**上束順序関係** $\leq$ は，

$$a \leq b \iff a \vee b = b$$

と定義する．そうすると，下束についてと双対的に同様のことが上束について成り立つ．

A が $\wedge, \vee$ を束算法とする束であれば，A は $\wedge$ を交法とする偏束かつ $\vee$ を結法とする上束であり，A の束順序関係は偏束順序関係にも上束順序関係にも等しい．しかし，逆に偏束・上束がその順序関係について束であるとは限らない．たとえば $\mathcal{P}\mathbb{T} - \{\mathbb{T}\}$ は，包含関係 $\subseteq$ について偏束ではあるが束ではない．また，$\mathcal{P}\mathbb{T} - \{\mathbb{T}\}$ と実数の下方区間 $(\leftarrow 0]$ との辞書式直和 $\big(\mathcal{P}\mathbb{T} - \{\mathbb{T}\}\big) \amalg (\leftarrow 0]$ は，最大元を持つ偏束であるが束ではない（問題 3.20.1 参照）．なおこの偏束においては，任意の有限部分集合に下限があるが，ある有限部分集合には上限がない．このことは，問題 3.9.32 に記した「順序集合において任意の部分集合に下限があれば任意の部分集合に上限もある」という事実と対照的である．

例 3.13.4 (分配束) 束が束算法 $\wedge, \vee$ についての一組み二個の恒等式

$$(x \wedge y) \vee z \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z) \qquad (x \vee y) \wedge z \equiv (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \qquad \text{(分配式)}$$

をみたすとき，この束を**分配束**と呼ぶ．つまり分配束とは，次の一組み二個の法則に従う束である．

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \qquad (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \qquad (\textbf{分配律})$$

集合 A がその上の順序関係 $\leq$ について束であってこの束が分配束であるとき，A は $\leq$ **について分配束である**という．つまり，A が $\leq$ について分配束であるためには，A の任意の二元部分集合に下限と上限があって A 上の二項汎算法 $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ と $a \vee b = \sup\{a, b\}$ が分配律に従うことが必要十分である．分配束でない束の例は例 3.13.6 にある．

問題 3.13.4 束においては，その束算法 $\wedge, \vee$ と束順序関係 $\leq$ についての次の六法則はいずれも分配律と同等である [44]．特に，分配律の一方は他方から導かれる．

1. $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
2. $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
3. $(a \vee b) \wedge c \leq (a \wedge c) \vee b$
4. $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee c$
5. $\left.\begin{array}{l} a \vee c \geq d \\ b \vee c \geq d \end{array}\right\} \Longrightarrow (a \wedge b) \vee c \geq d$
6. $\left.\begin{array}{l} a \wedge c \leq d \\ b \wedge c \leq d \end{array}\right\} \Longrightarrow (a \vee b) \wedge c \leq d$

略解　法則 3 から次の計算で法則 2 を導くことができる（法則 3 を使う箇所で改行してある）．

$$\begin{aligned}(a \wedge c) \vee (b \wedge c) &\leq (a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge (c \wedge c) = \big((a \vee b) \wedge c\big) \wedge c \\ &\leq \big((a \wedge c) \vee b\big) \wedge c = \big(b \vee (a \wedge c)\big) \wedge c \\ &\leq (b \wedge c) \vee (a \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

法則 2 と法則 6 の前提から法則 6 の結論が導かれるから，法則 2 から法則 6 が導かれる．$d = (a \wedge c) \vee b$ とすれば法則 6 の前提がみたされるから，法則 6 から法則 3 が導かれる．法則 3 は $\leq, \wedge, \vee$ をそれぞれ $\geq, \vee, \wedge$ に取り替えても不変である．従って束についての双対性により，法則 3 から法則 1 が導かれ，法則 1 から法則 5 が導かれ，法則 5 から法則 3 が導かれる．法則 4 は，可換律を使って法則 3 を書き換えたものである．

例 3.13.5 (ブール束) 分配束 A がさらに束算法 $\wedge, \vee$ と単項汎算法 $\Diamond$ についての恒等式

$$(x \wedge x^{\Diamond}) \vee y \equiv y \qquad (x \vee x^{\Diamond}) \wedge y \equiv y \qquad (\text{相補式})$$

をみたすとき，A は $\wedge, \vee, \Diamond$ を**ブール算法**とする**ブール束**であると言い [45]，算法 $\Diamond$ を**補法**と呼ぶ．すなわちブール束とは，次の一組み二個の法則に従う分配束である．

$$(a \wedge a^{\Diamond}) \vee b = b \qquad (a \vee a^{\Diamond}) \wedge b = b \qquad (\text{相補律})$$

従ってブール束 A は，その順序関係 (3.13.10) に関する最小元と最大元を持ち，次の法則に従う．

$$a \wedge a^{\Diamond} = \min A \qquad a \vee a^{\Diamond} = \max A \qquad (\text{本来の}\textbf{相補律})$$

一般に，最小元と最大元のある順序集合 A の元 a に対して，$\inf\{a, a'\} = \min A$, $\sup\{a, a'\} = \max A$ をみたす元 $a' \in A$ を a の A における**補元**と呼ぶ（誤解の恐れのない場合は「A における」は省略する）．従ってブール束においては，各元 a に対して，$a^{\Diamond}$ は a の補元である．

[44] 他の同等な法則については問題 3.19.5 参照．法則の同等性や強弱については定義 3.29.2 参照．
[45]「ブール」は，論理代数学・代数論理学の開祖ブール (George Boole) に因む．

ブール束については，ブール算法に加えて，次式で定義される二項汎算法 $\Rightarrow$ をしばしば考察する．

$$a \Rightarrow b = a^{\lozenge} \vee b$$

これを**導法**と呼ぶ．また，ブール算法 $\wedge, \vee, \lozenge$ と導法 $\Rightarrow$ を**ブール論法**と総称する．

集合 A がその上の順序関係 $\leq$ について束であってこの束がブール束であるとき，A は $\leq$ について**ブール束**であるという．上の説明と下の問題 3.13.5 によればつまり，A が $\leq$ についてブール束であるためには，$\leq$ について A が最小元と最大元を持つ分配束であって A の各元 a に補元のあることが必要十分である．

問題 3.13.5 最小元と最大元を持つ分配束 A について次のことが成り立つ．

1. A の各元には補元は高々一つしかない．
2. A の各元 a に補元があれば，それを $a^{\lozenge}$ で表して出来る単項汎算法 $\lozenge$ は本来の相補律に従う．
3. A 上の単項汎算法 $\lozenge$ が本来の相補律に従えば，A は $\wedge, \vee, \lozenge$ をブール算法とするブール束となる．

例 3.13.6 線形空間 V の部分空間の全体は包含関係 $\subseteq$ について $\{0\}$ を最小元とし V を最大元とする束を成すが，$\dim V \geq 2$ であれば，$\{0\}$ とも V とも異なる部分空間には複数の補元があるので，問題 3.13.5 によれば部分空間束は分配束ではない．

問題 3.13.6 f がブール束 A からブール束 B への準写であれば，f は $\min A$ と $\max A$ とを $\min B$ と $\max B$ とにうつし，導法についても準写である．

略解　最小元については，任意の $a \in A$ をとって次のように計算すればいい．

$$f(\min A) = f(a \wedge a^{\lozenge}) = (fa) \wedge (fa)^{\lozenge} = \min B$$

問題 3.13.7 ブール束は次の諸法則に従う．ただし，0 と 1 は最小元と最大元を表す．

$$0^{\lozenge} = 1 \qquad\qquad 1^{\lozenge} = 0$$

$$(a^{\lozenge})^{\lozenge} = a \tag{重補律}$$

$$(a \wedge b)^{\lozenge} = a^{\lozenge} \vee b^{\lozenge} \qquad\qquad (a \vee b)^{\lozenge} = a^{\lozenge} \wedge b^{\lozenge} \tag{双対律}$$

$$a \leq b \iff b^{\lozenge} \leq a^{\lozenge} \tag{対偶律}$$

$$a \wedge b^{\lozenge} = 0 \iff a \leq b \iff a^{\lozenge} \vee b = 1$$

注意 3.13.1 双対律は普通はドモルガンの法則と呼ばれる [46]．しかしこの法則は，ブール束の補法 $\lozenge$ がその束から双対束への準写である（さらに重補律によれば同写である）ことを意味するから，本書では双対律と呼ぶ [47]．また対偶律は，補法 $\lozenge$ がその束から双対束への真増写であることを意味する（問題 3.13.14 参照）．重補律・双対律・対偶律については定理 3.21.3 の対偶律・重補律と問題 3.21.4 の双対律参照．

[46] ドモルガン (Augustus de Morgan) は論理代数学の開祖の一人．
[47] 概念に縁の人名を付けるのは時に便利ではあるが，それに固執する西洋人の性癖には辟易する．

例 3.13.7 任意の集合 S の巾集合 $\mathcal{P}S$ は，包含関係 $\subseteq$ についてブール束であり（そこでこれを**巾集合束**と呼ぶ），そのブール算法は集合算法 $X\cap Y$, $X\cup Y$, X^c に等しい（X^c は X の補集合 $S-X$ を表す）．さらに，巾集合束は包含関係に関して完備束であって，分配律より強い次の法則に従う．

$$\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)\cup Y = \bigcap_{i\in I}(X_i\cup Y) \qquad\qquad \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cap Y = \bigcup_{i\in I}(X_i\cap Y) \qquad\qquad \text{(終)}$$

さて,「恒等式が成り立つ」ということを前述のように定義することの効用は，以下の二定理や次項の諸定理のような一般的な定理を述べて証明できるところにある．

定理 3.13.1 **T 型代数系 A がみたす恒等式は，巾代数系 A^V もみたす．**

証明　A が恒等式 $\xi\equiv\eta$ をみたすと仮定し，任意の保型準写 $f\in\mathfrak{A}(T)\to A^V$ をとる．任意の $\nu\in V$ に対し，$\mathrm{pr}_\nu\in A^V\to A$ が保型準写であるから，$\mathfrak{A}(T)$ の各元 ζ に $(f\zeta)\nu$ を対応させる写像は $\mathfrak{A}(T)$ から A への保型準写であり，従って，A が恒等式 $\xi\equiv\eta$ をみたすとの仮定により $(f\xi)\nu=(f\eta)\nu$ が成り立つ．$\nu\in V$ が任意だから，これは $f\xi=f\eta$ を意味する．従って A^V も恒等式 $\xi\equiv\eta$ をみたす．

定理 3.13.2 **A と B が T 型代数系であって，B が A の台部分系であるかまたは A から B への全射保型準写があれば，A がみたす恒等式は B もみたす．**

証明　A が恒等式 $\xi\equiv\eta$ をみたすと仮定し，任意の保型準写 $f\in\mathfrak{A}(T)\to B$ をとる．B が A の台部分系の場合には，f は $\mathfrak{A}(T)$ から A への保型準写とみなせるから，A が恒等式 $\xi\equiv\eta$ をみたすとの仮定により $f\xi=f\eta$ が成り立つ．全射保型準写 $h\in A\to B$ がある場合には，問題 3.5.6 により保型準写 $g\in\mathfrak{A}(T)\to A$ で $f=hg$ なるものがあり，A が恒等式 $\xi\equiv\eta$ をみたすとの仮定により $g\xi=g\eta$ が成り立つから，$h(g\xi)=h(g\eta)$ すなわち $f\xi=f\eta$ が成り立つ．従っていずれの場合にも，B は恒等式 $\xi\equiv\eta$ をみたす．

系　**T 型代数系 A がみたす恒等式は商代数系 A/R もみたす．**

証明　定理 3.11.2 系により類別写像 $h\in A\to A/R$ が全射保型準写だからである．

問題 3.13.8 束・偏束・ブール束の巾代数系は，極端な巾代数系も含めて，それぞれ束・偏束・ブール束である（これらを**巾束・巾偏束・巾ブール束**と呼ぶ）．A がブール束であればさらに，A とその巾ブール束 A^V の導法 $\Rightarrow$ は，任意の $f,g\in A^V$ と $\nu\in V$ に対して $(f\Rightarrow g)\nu=f\nu\Rightarrow g\nu$ をみたし，A と A^V の最小元 0 と最大元 1 は，任意の $\nu\in V$ に対して $0\nu=0$ と $1\nu=1$ をみたす．

略解　束・偏束・ブール束の極端な巾代数系は，単元集合であるから，自明に束・偏束・ブール束である．後半を示すには，各 $\nu\in V$ の定める射影 $\mathrm{pr}_\nu\in A^V\to A$ に問題 3.13.6 を使えばいい（問題 3.13.9 と問題 3.9.12 参照）．

問題 3.13.9 束 A の巾束 A^V $(=V\to A)$ の順序関係は A の順序関係の V 乗に等しい.「束」をすべて「偏束」またはすべて「ブール束」に書き換えても同様に成り立つ．

略解　V の各元の定める射影が交法 $\wedge$ についての準写であるから，任意の $f,g\in A^V$ をとっての次の推論で証明される．

$$\begin{aligned} f\le g &\iff f\wedge g=f \iff \text{任意の } \nu\in V \text{ に対して } (f\wedge g)\nu=f\nu \\ &\iff \text{任意の } \nu\in V \text{ に対して } f\nu\wedge g\nu=f\nu \iff \text{任意の } \nu\in V \text{ に対して } f\nu\le g\nu \end{aligned}$$

問題 3.13.10 A を束とし，$\wedge, \vee$ をその束算法とするとき，B が A の $\{\wedge, \vee\}$ 部分系であれば，B は $\wedge, \vee$ の B への制限を束算法とする束であり（そこでこういう B を A の**部分束**と呼ぶ），B の順序関係は A の順序関係の B への制限であり，A が分配束であれば B もそうである．また，A を偏束とし，$\wedge$ をその交法とするとき，B が A の $\{\wedge\}$ 部分系であれば，B は $\wedge$ の B への制限を交法とする偏束であり（そこでこういう B を A の**部分偏束**と呼ぶ）)，B の順序関係は A の順序関係の B への制限である．

問題 3.13.11 束はその完備化の部分束であり，偏束はその完備化の部分偏束である．

略解　問題 3.9.45 による．

問題 3.13.12 A をブール束とし，$\wedge, \vee, \lozenge$ をそのブール算法とする．B が A の空でない $\{\wedge, \vee, \lozenge\}$ 部分系であれば，B は $\wedge, \vee, \lozenge$ の B への制限をブール算法とするブール束であって（そこでこういう B を A の**部分ブール束**と呼ぶ），$\min B = \min A$，$\max B = \max A$ が成り立ち，B の順序関係と導法とは A の順序関係と導法との B への制限に等しい．

問題 3.13.13 $(A, \leq)$ を順序集合とし，A' を束とし，$f \in (A \to A') \cup (A' \to A)$ を同順写とすれば，A は $\leq$ について束であって，f は束としての同写（すなわち束算法についての同写）である．以上のことは,「束」をすべて「偏束」またはすべて「ブール束」に書き換えても同様に成り立つ．

略解　問題 3.9.15 と問題 3.3.5 により，$f \in A' \to A$ としていい．このとき，A を f によって束 A' の複製代数系と成せば，問題 3.3.11 と定理 3.13.2 により，A も束となって f は束としての同写になる．束 A の順序関係 $\leqq$ が $\leq$ と一致することが，任意の $a, b \in A$ をとっての次の推論で示される．ただし，f の逆写像と A' の束順序関係を g と $\leq'$ で表す．

$$a \leqq b \iff b \wedge a = a \iff g(b \wedge a) = ga \iff gb \wedge ga = ga \iff ga \leq' gb \iff a \leq b$$

問題 3.13.14 f を偏束 A から偏束 A' への写像とする．f が偏束としての準写であれば，fA は A' の部分偏束であって f は増写である．また，f が偏束としての単射準写であるためには，fA が A' の部分偏束であって f が真増写であることが必要十分である．従って，f が偏束としての同写であるためには，f が同順写であることが必要十分である．以上のことは,「偏束」をすべて「束」またはすべて「ブール束」に書き換えても同様に成り立つ（問題 3.22.33 参照）．

略解　f が準写であるとする．このとき，問題 3.3.9 によって fA は A' の部分偏束である．また，$a, b \in A$ が $a \leq b$ をみたせば，$fb \wedge fa = f(b \wedge a) = fa$，従って $fa \leq fb$ が成り立つ．f がさらに単射であれば，$a, b \in A$ が $fa \leq fb$ をみたすとき，$f(b \wedge a) = fb \wedge fa = fa$，従って $b \wedge a = a$，すなわち $a \leq b$ が成り立つから，f は真増写である．

逆に，fA が A' の部分偏束であって f が真増写であると仮定する．そうすると任意の $a, b \in A$ に対して，fA が A' の部分偏束であるから $fc = fa \wedge fb$ なる $c \in A$ があり，f が真増写であるから $c \leq a \wedge b$，従って f が増写であることにより $fc \leq f(a \wedge b)$ が成り立ち，他方で f の増調性により $f(a \wedge b) \leq fa \wedge fb$ が成り立つので，$f(a \wedge b) = fa \wedge fb$ が成り立つ.「偏束」を「束」に書き換えた場合，同様に $f(a \vee b) = fa \vee fb$ が導かれる．そこで,「偏束」を「ブール束」に書き換える．そうすると問題 3.13.12 により，A の最小元 0 と最大元 1 とに対して，f0 と f1 とは A' の最小元と最大元とに等しい．任意の $a \in A$ に対して，$fa \wedge f(a^{\lozenge}) = f(a \wedge a^{\lozenge}) = f0$，$fa \vee f(a^{\lozenge}) = f(a \vee a^{\lozenge}) = f1$ であるから，補元の一意性により $f(a^{\lozenge}) = (fa)^{\lozenge}$ が成り立つ．

問題 3.13.15 順序集合 $(A, \leq)$ からある巾集合束への同順写 f があるとき（このとき $(A, \leq)$ を**完備ブール束**と呼ぶ [48]），A は $\leq$ について完備束かつブール束であって**一般分配律**

$$\inf\{x_i \mid i \in I\} \vee y = \inf\{x_i \vee y \mid i \in I\} \qquad \sup\{x_i \mid i \in I\} \wedge y = \sup\{x_i \wedge y \mid i \in I\}$$

に従い，f はブール束としての同写である．

略解　例 3.13.7 と問題 3.13.13 により，A は $\leq$ についてブール束であって f はブール束としての同写である．例 3.13.7 と問題 3.9.18 と問題 3.9.15 により，A は完備束であって一般分配律に従う．

問題 3.13.16 $\mathbb{T}$ は通常の順序関係について完備ブール束であり，そのブール論法は次の式をみたす．

$$a \wedge b = \inf\{a, b\} \qquad a \vee b = \sup\{a, b\} \qquad a^{\Diamond} = 1 - a \qquad a \Rightarrow b = \sup\{1 - a, b\}$$

略解　$\mathbb{T}$ は通常の順序関係について，巾集合束 $\mathcal{P}\{\emptyset\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$ に同順であるから，問題 3.13.15 の定義により完備ブール束である．

問題 3.13.17 ブール束 $\mathbb{T}$ の巾ブール束 $\mathbb{T}^V$ $(= V \to \mathbb{T})$ の各元 f にその定義集合 $f^{-1}1 \in \mathcal{P}V$ を対応させる写像は，$\mathbb{T}^V$ から巾集合束 $\mathcal{P}V$ への同順写である．従って，$\mathbb{T}^V$ は完備ブール束であり，写像 $f \mapsto f^{-1}1$ はブール束としての同写である．

略解　問題 3.13.9 により，巾ブール束 $\mathbb{T}^V$ の順序関係はブール束 $\mathbb{T}$ の順序関係の V 乗に等しい．従って，写像 $f \mapsto f^{-1}1$ が真増写であることは次の推論で示される．

$$\begin{aligned} f \leq g &\iff \text{任意の } v \in V \text{ に対して } fv \leq gv \\ &\iff fv = 1 \text{ なる任意の } v \in V \text{ に対して } gv = 1 \\ &\iff f^{-1}1 \subseteq g^{-1}1 \end{aligned}$$

問題 3.13.18 完備ブール束 A から作られた巾ブール束 A^V も完備ブール束である．

略解　問題 3.13.15 により，A はある巾集合束 $\mathcal{P}S$ にブール束として同形である．定理 3.10.4 と問題 3.13.17 と定理 3.10.5 によりブール束として $A^V \cong (\mathcal{P}S)^V \cong (\mathbb{T}^S)^V \cong \mathbb{T}^{V \times S} \cong \mathcal{P}(V \times S)$ であるから，問題 3.13.14 により A^V は巾集合束 $\mathcal{P}(V \times S)$ に同順である．

問題 3.13.19 線形順序集合は分配束となる．線形順序集合 A がブール束となるためには，$\#A \leq 2$ なることが必要十分である．束 A の任意の部分集合が A の部分束であるためには，A が線形順序集合であることが必要十分である．

3.13.2　恒等式をみたす普遍代数系 (✓)

§ **この項を通じて，T を代数系とし，$\mathcal{R}$ を T 型代数系についての恒等式の集合とする**．そして，T 型代数系 A が $\mathcal{R}$ に属す任意の恒等式をみたすとき，**A において恒等式 $\mathcal{R}$ が成り立つ**とか **A は恒等式 $\mathcal{R}$ をみたす** [49] とか **A は $\mathcal{R}$ 種代数系である**とか言う．つまり，A が $\mathcal{R}$ 種代数系であること

[48] これは完備ブール束の通常の定義ではない．通常は，一般分配律より強い「全分配律」と相補律に従う完備束を完備ブール束と定める．この二定義は同等である．第 1.2.5 項と第 3.34 節で参考文献として挙げる「現代数学概説 I」参照．
[49] この二箇所の「恒等式」は「複数の恒等式」を指す．日本語の名詞に複数形の無いため，こういう不便がある．

は，$\mathfrak{A}(T)$ 上の関係とみなした $\mathcal{R}$ が関係 $=_A$ に含まれることと同等である．特に $=_A$ が最大関係であれば A は $\mathcal{R}$ 種代数系であるが，そういう A を**自明な** $\mathcal{R}$ **種代数系**と呼ぶ．自明でない $\mathcal{R}$ 種代数系 A があれば，問題 3.13.2 により $=_A$ は型合同関係であって，特に $\mathfrak{A}(T)$ の型写像に含まれる．従って，自明でない $\mathcal{R}$ 種代数系が存在するためには，$\mathcal{R}$ の任意の元 $\xi \equiv \xi'$ に対して ξ, ξ' が同型であることが必要である．そういう $\mathcal{R}$ を**同型**の恒等式と呼ぶ．言い換えれば，$\mathcal{R}$ が同型であるためには，$\mathfrak{A}(T)$ 上の関係とみなした $\mathcal{R}$ が $\mathfrak{A}(T)$ の型写像に含まれることが必要十分である．

問題 3.13.20 T 型代数系 B が $\mathcal{R}$ 種代数系 A の巾代数系であるか，台部分系であるか，あるいは A から B への全射保型準写があれば，B も $\mathcal{R}$ 種代数系である．特に，$\mathcal{R}$ 種代数系と保型同形な型付代数系は $\mathcal{R}$ 種代数系である．

問題 3.13.21 $\mathcal{R}$ 種代数系は $\mathcal{R}^r$ 種代数系である．ただし $\mathcal{R}^r$ は，$\mathcal{R}$ を $\mathfrak{A}(T)$ 上の関係とみなしての反射包を表す．また，対称包 $\mathcal{R}^s$ と推移包 $\mathcal{R}^t$ についても同様のことが成り立つ．

略解　A が $\mathcal{R}$ 種代数系なら，$\mathcal{R}$ が関係 $=_A$ に含まれて $=_A$ が同値関係だから，上記各種の包も $=_A$ に含まれる．

定義 3.13.1 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ) と G の部分集合 S が次の二条件をみたすとする．

1. $G = [S]$
2. (G', T, σ') **が** $\mathcal{R}$ **種型付代数系であって** $\varphi \in S \to G'$ **が保型写像であれば，**φ **は保型準写** $f \in G \to G'$ **に拡張される．**

このとき，四つ組み (G, T, σ, S) を**普遍** $\mathcal{R}$ **種型付代数系**と呼び，条件 2 を $\mathcal{R}$ 種型付代数系の**普遍性**と呼ぶ．この定義において $\mathcal{R} = \emptyset$ としたものは普遍型付代数系の定義に他ならないから，普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系という概念は普遍型付代数系の概念を拡張するものである．

問題 3.13.22 定義 3.13.1 の二条件 1, 2 は，条件 2 における「拡張される」を「一意に拡張される」に換えて得られる一条件で置き換えることができる．

問題 3.13.23 定義 3.13.1 において T を単元集合かつ汎代数系とすることによって**普遍** $\mathcal{R}$ **種汎代数系**の定義が得られる．これを適切に述べよ．

問題 3.13.24 (G, T, σ, S) を普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系とし，(H, T, τ) を型付代数系とする．このとき，$f \in G \to H$ が保型同写なら (H, T, τ, fS) は普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系である．また，$g \in H \to G$ が保型同写なら $(H, T, \tau, g^{-1}S)$ は普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系である．

問題 3.13.25 (G, T, σ, S) と (G', T, σ', S') が普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって $\varphi \in S \to S'$ が $\varphi(S_t) \subseteq S'_t$ $(t \in T)$ をみたせば，保型準写 $f \in G \to G'$ で $f|_S = \varphi$ なるものが唯一つ存在し，φ が全射なら f も全射であり，φ が単射であって $S_t = \emptyset \neq S'_t$ なる $t \in T$ については $G_t \neq \emptyset$ であれば，f も単射である．従って，全単射 $\varphi \in S \to S'$ が $\varphi(S_t) = S'_t$ $(t \in T)$ をみたせば，保型準写 $f \in G \to G'$ で $f|_S = \varphi$ なるものが唯一つ存在し，f は保型同写である．従ってまた，(G, T, σ, S) と (G', T, σ', S) が普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって $\sigma|_S = \sigma'|_S$ が成り立てば，保型同写 $f \in G \to G'$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$ なるものが唯一つ存在する．

終

普遍型付代数系の存在と一意性定理によれば，代数系 T と集合 S と写像 $\tau \in S \to T$ を任意に与えても，普遍型付代数系 (A, T, σ, S) であって $\sigma|_S = \tau$ なるものが一意に存在する．それでは，T, S, τ に加えて恒等式の集合 $\mathcal{R}$ を任意に与えたら，普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ, S) であって $\sigma|_S = \tau$ なるものは存在するだろうか．以下，この問題を幾つかに分割して考え，定理 3.13.7 で答を一つ得る．

T 型代数系 A に対して，A 上の関係 R_A を次のように定義する．すなわち，A の二元 a, a' に対して $a\,R_A\,a'$ であるとは，保型準写 $f \in \mathfrak{A}(T) \to A$ と $\mathcal{R}$ の元 $\xi \equiv \xi'$ とで $a = f\xi$，$a' = f\xi'$ をみたすものがあることとする（従って，$\mathfrak{A}(T)$ から A への保型準写が存在しないか $\mathcal{R} = \emptyset$ かの場合には，R_A は空関係である）．R_A を **$\mathcal{R}$ が A に誘導する関係**と呼ぶ．

問題 3.13.26 $\mathcal{R}$ が $\mathfrak{A}(T)$ 上の関係として反射的なら，$\mathcal{R}$ が T 型代数系 A に誘導する関係 R_A は空関係であるか反射的かである．また，$\mathcal{R}$ が対称的なら，R_A も対称的である．

略解　任意の $a \in A$ をとると，a と同型の $\mathfrak{A}(T)$ の素元 x がある．R_A が空関係でなければ，各 $t \in T$ に対して $A_t \neq \emptyset$ が成り立つから，$\mathfrak{A}(T)$ の素元系 S から A への保型写像 φ で $\varphi x = a$ なるものがあり，φ は保型準写 $f \in \mathfrak{A}(T) \to A$ に拡張される．従って，さらに $\mathcal{R}$ が反射的なら，特に式 $x \equiv x$ が $\mathcal{R}$ に属すから，$a\,R_A\,a$ が成り立つ．

問題 3.13.27 $\mathcal{R}$ が T 型代数系 A に誘導する関係 R_A は，A の保型準換を A 上の単項汎算法とみなしたものすべてと両立する．

問題 3.13.28 $\mathcal{R}$ が $\mathfrak{A}(T)$ 自身に誘導する関係 $R_{\mathfrak{A}(T)}$ は，$\mathcal{R}$ を含み $\mathfrak{A}(T)$ の保型準換を $\mathfrak{A}(T)$ 上の単項汎算法とみなしたものすべてと両立する関係の中で最小のものである．

略解　$\mathfrak{A}(T)$ の保型準換の全体を改めて代数構造として集合 $\mathfrak{A}(T)$ に与えて汎代数系を作る．この汎代数系上の関係 $\mathcal{R}$ に定理 3.11.3 を適用する（適用できることが注意 3.11.1 の後半によって分かる）と，$\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \cdots = R_{\mathfrak{A}(T)}$ であるので，$R_{\mathfrak{A}(T)} = \mathcal{R}^-$ が成り立つ．

定理 3.13.3 T 型代数系 A から T 型代数系 B への全射保型準写 g があるときに，B が $\mathcal{R}$ 種代数系であるためには，$R_A \subseteq g$ なることが必要十分である．特に，T 型代数系 A とその上の型合同関係 Q に対し，商代数系 A/Q が $\mathcal{R}$ 種代数系であるためには，$R_A \subseteq Q$ なることが必要十分である．

証明　問題 3.5.6 により，$f \in \mathfrak{A}(T) \to B$ が保型準写であれば，f はある保型準写 $h \in \mathfrak{A}(T) \to A$ と g の合成として表される．そこで，$\mathcal{R}$ の任意の元 $\xi \equiv \xi'$ に対して，$a = h\xi$，$a' = h\xi'$ と定めれば $a\,R_A\,a'$ が成り立つから，$R_A \subseteq g$ なら $ga = ga'$ が成り立ち，従って $f\xi = gh\xi = ga = ga' = gh\xi' = f\xi'$ が成り立つ．これは，$R_A \subseteq g$ なら B が $\mathcal{R}$ 種代数系であることを示す．

$a, a' \in A$ が $a\,R_A\,a'$ をみたせば，保型準写 $h \in \mathfrak{A}(T) \to A$ と $\mathcal{R}$ の元 $\xi \equiv \xi'$ とで $a = h\xi$，$a' = h\xi'$ をみたすものがあり，$f = gh$ は $\mathfrak{A}(T)$ から B への保型準写であるから，B が $\mathcal{R}$ 種代数系なら，$ga = gh\xi = f\xi = f\xi' = gh\xi' = ga'$ が成り立つ．これは，B が $\mathcal{R}$ 種代数系なら $R_A \subseteq g$ であることを示す．

問題 3.13.29 T 型代数系 A が $\mathcal{R}$ 種代数系であるためには，R_A が A 上の相等関係 $=$ に含まれることが必要十分である．

問題 3.13.30 定理 3.13.3 と問題 3.13.29 を用いて，問題 3.13.20 に述べたことを証明せよ．

略解　B が $\mathcal{R}$ 種代数系 A の巾代数系 A^V である場合，各 $\nu \in V$ が定める射影 $\mathrm{pr}_\nu \in B{\to}A$ は定理 3.10.1 により全射保型準写であるから $R_B \subseteq \mathrm{pr}_\nu$ をみたし，従って問題 3.10.2 により，R_B は B 上の相等関係 $=$ に含まれる．B が A の台部分系である場合，R_B は R_A の B への制限に含まれる．

定義 3.13.2 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ) と集合 S と $\rho \in S{\to}G$ が次の二条件をみたすとする．

1. $G = [\rho S]$
2. **(G', T, σ') が $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって $\varphi \in S{\to}G'$ が $\sigma'\varphi = \sigma\rho$ をみたすなら，保型準写 $h \in G{\to}G'$ であって $\varphi = h\rho$ なるものが存在する．**

このとき五つ組み (G, T, σ, S, ρ) を**擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系**と呼び，条件 2 をその**擬普遍性**と呼ぶ．従って，(G, T, σ, S) が普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系なら，$(G, T, \sigma, S, \mathrm{id}_S)$ は擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系である．逆に，擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ, S, ρ) において $S \subseteq G$，$\rho = \mathrm{id}_S$ なら (G, T, σ, S) は普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であるが，このことは問題 3.13.33 で拡張される．

問題 3.13.31 (G, T, σ, S, ρ) が擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって，型付代数系 (G', T, σ') と $\rho' \in S{\to}G'$ に対して，保型同写 $h \in G{\to}G'$ で $h\rho = \rho'$ なるものがあるか，または保型同写 $h' \in G'{\to}G$ で $h'\rho' = \rho$ なるものがあれば，$(G', T, \sigma', S, \rho')$ も擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系である．

問題 3.13.32 (G, T, σ, S, ρ) が擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって ρ が単射であるとする．このとき，S を含む集合 G' と全単射 $h \in G{\to}G'$ で $h\rho = \mathrm{id}_S$ なるものをとって型付代数系 (G, T, σ) の h による複製 (G', T, σ') を作れば，(G', T, σ', S) は普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって $\sigma'|_S = \sigma\rho$ が成り立つ．

略解　問題 3.4.13 により h が保型同写なので，問題 3.13.31 により $(G', T, \sigma', S, \mathrm{id}_S)$ は擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系である．そして $\sigma'|_S = \sigma'\mathrm{id}_S = \sigma' h\rho = \sigma\rho$ が成り立つ．

問題 3.13.33 (✓) (G, T, σ, S, ρ) が擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であれば，$(G, T, \sigma, \rho S)$ は普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系である．

定理 3.13.4 **(A, T, ω, S) を普遍型付代数系とし，Q を A 上の型合同関係とする．このとき，(A, T, ω) の商代数系 $(A/Q, T, \omega/Q)$ と S と類別写像 $/Q$ の S への制限 ρ との組み $(A/Q, T, \omega/Q, S, \rho)$ が擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であるためには，Q が R_A の型合同包 $R_A^{\equiv}$ に等しいことが必要十分である．**

証明　A/Q と $/Q$ と ω/Q とを G と g と σ で表す．そうすると，$\rho = g|_S$，$\sigma\rho = \sigma g|_S = \omega|_S$ であり，また g が全射の保型準写であって $A = [S]$ であるから，$G = [\rho S]$ が成り立つ．また，定理 3.13.3 により G が $\mathcal{R}$ 種代数系であるためには $R_A \subseteq Q$ なることが必要十分であり，この条件のみたされるときには，問題 3.11.4 の後の注意によって $R_A^{\equiv}$ が存在して $R_A^{\equiv} \subseteq Q$ が成り立つ．従って，$R_A \subseteq Q$ と仮定した上で，(G, T, σ, S, ρ) が擬普遍性を持つためには $Q \subseteq R_A^{\equiv}$ なることが必要十分であることを示せばいい．

(G', T, σ') が $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって $\varphi \in S{\to}G'$ が $\sigma'\varphi = \sigma\rho$ をみたすとする．このとき，$\sigma'\varphi = \omega|_S$ であるから，(A, T, ω, S) の普遍性によって φ は保型準写 $f \in A{\to}G'$ に拡張される．そして定理 3.11.1 系 2 により，A 上の関係とみなした f は型合同関係となる．しかも，問題 3.11.3 によって A/f は G' の台部分系と保型同形であって，従って問題 3.13.20 によって A/f は $\mathcal{R}$ 種代数系であるから，定理 3.13.3 によって $R_A \subseteq f$ が成り立つ．$R_A^{\equiv}$ は R_A を含む A 上の最小の型合同関係であるから，結局 $R_A^{\equiv} \subseteq f$ が成り立つ．

従って $Q \subseteq R_A^{=}$ なら，$Q \subseteq f$ であるから，定理 3.11.2 系によって $h \in G{\rightarrow}G'$ を $f = hg$ なるように定義でき，h は保型準写となる．この h が $\varphi = h\rho$ をみたす．これで，$Q \subseteq R_A^{=}$ なら (G, T, σ, S, ρ) が擬普遍性を持つことが示された．

上の (G', T, σ') と $\varphi \in S{\rightarrow}G'$ として商代数系 $(A/R_A^{=}, T, \omega/R_A^{=})$ と類別写像 $/R_A^{=}$ の S への制限をとる．$A/R_A^{=}$ は定理 3.13.3 によって確かに $\mathcal{R}$ 種型付代数系であり，$\sigma\rho = \omega|_S$ であったのと同じ理由で $\sigma'\varphi = \omega|_S$ が成り立つから，$\sigma'\varphi = \sigma\rho$ も確かに成り立つ．従って，(G, T, σ, S, ρ) が擬普遍性を持てば，保型準写 $h \in G{\rightarrow}G'$ で $\varphi = h\rho$ なるものが存在する．類別写像 $/R_A^{=}$ を g' で表せば，$hg|_S = h\rho = \varphi = g'|_S$ であって $A = [S]$ であるから，$hg = g'$ が成り立つ．従って $a\,Q\,a'$ なら，$ga = ga'$ であるから $g'a = hga = hga' = g'a'$ となり，$a\,R_A^{=}\,a'$ が成り立つ．これで，(G, T, σ, S, ρ) が擬普遍性を持てば $Q \subseteq R_A^{=}$ であることが示された．　**終**

$\mathcal{R}$ が $\tau \in S{\rightarrow}T$ に関して**豊富**であるとは，$\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ) であって各 $t \in T$ に対して $\#(G_t) \geq \min\{\#(\tau^{-1}t), 2\}$ なるものが存在することを言う．

定理 3.13.5 (G, T, σ, S, ρ) **が擬普遍** $\mathcal{R}$ **種型付代数系であって** $\mathcal{R}$ **が** $\sigma\rho \in S{\rightarrow}T$ **に関して豊富なら，**ρ **は単射である．**

証明　$\tau = \sigma\rho$ と定める．そうすると，$\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G', T, σ') であって各 $t \in T$ に対して $\#(G'_t) \geq \min\{\#(\tau^{-1}t), 2\}$ なるものが存在する．つまり，$\tau^{-1}t \neq \emptyset$ なら $G'_t \neq \emptyset$ が成り立ち，$\#(\tau^{-1}t) \geq 2$ なら $\#(G'_t) \geq 2$ が成り立つ $(t \in T)$．従って各 $s \in S$ に対して，$\varphi_s \in S{\rightarrow}G'$ で

$$\varphi_s(\tau^{-1}t) \subseteq G'_t \qquad (t \in T)$$
$$\varphi_s s \neq \varphi_s x \qquad (s \neq x \in S)$$

なる二条件をみたすものが存在する．$G'_t = \sigma'^{-1}t$ であるから，一番目の条件は $\sigma'\varphi_s = \tau$ なることを意味する．従って (G, T, σ, S, ρ) の擬普遍性によって，保型準写 $h_s \in G{\rightarrow}G'$ で $\varphi_s = h_s\rho$ なるものが存在する．そこで，ある $s, s' \in S$ に対して $\rho s = \rho s'$ とすれば，$\varphi_s s = \varphi_s s'$ となるから，二番目の条件により $s = s'$ でなければならない．すなわち ρ は単射である．

定理 3.13.6 A **が** T **型代数系であって** $\mathcal{R}$ **が同型なら，**R_A **は** A **の型写像に含まれ，従って，**R_A **の型合同包** $R_A^{=}$ **が存在する．**

証明　$a\,R_A\,a'$ とすれば，保型準写 $f \in \mathfrak{A}(T){\rightarrow}A$ と $\mathcal{R}$ の元 $\xi \equiv \xi'$ とで $a = f\xi$, $a' = f\xi'$ なるものがあり，$A, \mathfrak{A}(T)$ の型写像を ω, θ とすれば，ξ, ξ' が同型であるから $\omega a = \omega f\xi = \theta\xi = \theta\xi' = \omega f\xi' = \omega a'$ が成り立つ．従って，R_A は ω に含まれ，問題 3.11.4 の後の注意によって，R_A の型合同包 $R_A^{=}$ が存在する．

定理 3.13.7 S **を集合とし，**$\tau \in S{\rightarrow}T$ **とする．また，**$\mathcal{R}$ **は同型であるとする．このとき，擬普遍** $\mathcal{R}$ **種型付代数系** (G, T, σ, S, ρ) **で** $\sigma\rho = \tau$ **なるものが存在する．さらに** $\mathcal{R}$ **が** $\tau \in S{\rightarrow}T$ **に関して豊富であれば，普遍** $\mathcal{R}$ **種型付代数系** (G, T, σ, S) **で** $\sigma|_S = \tau$ **をみたすものが存在する．**

証明　普遍型付代数系 (A, T, ω, S) で $\omega|_S = \tau$ なるものが存在し，さらに定理 3.13.6 によって $R_A^{=}$ が存在する．そこで，G と σ と ρ として $A/R_A^{=}$ と $\omega/R_A^{=}$ と類別写像 $/R_A^{=}$ の S への制限とをとる．そうすると，定理 3.13.4 とその証明の一行目に示したことにより，(G, T, σ, S, ρ) は擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系であって $\sigma\rho = \omega|_S = \tau$ が成り立つ．従ってまた，$\mathcal{R}$ が $\tau \in S{\rightarrow}T$ に関して豊富なら，定

理 3.13.5 により ρ は単射であり，従って問題 3.13.32 により，普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ をみたすものが存在する．

問題 3.13.34 擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ, S, ρ) において ρ が単射でなければ，ある $t \in T$ に対して $\#(G_t) \leq 1$ が成り立ち，従って T が単元集合なら $\#G \leq 1$ が成り立つ．

定理 3.13.7 により,「代数系 T と集合 S と写像 $\tau \in S \to T$ および恒等式の集合 $\mathcal{R}$ を任意に与えたときに普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ をみたすものがあるか」という先に掲げた問への答が一つ得られた．次に,「$\mathcal{R}$ 種代数系において成り立つ恒等式」とは具体的に何を指すのかを考える．

定理 3.13.8 (G, T, σ, S, ρ) **が擬普遍** $\mathcal{R}$ **種型付代数系なら，普遍型付代数系** (A, T, ω, S) **と全射保型準写** $g \in A \to G$ **とで** $g|_S = \rho$ **なるものがあって，そういうものに対しては，**A **上の関係として** $g = R_A^{=}$ **が成り立ち（従って** (G, T, σ) **は商代数系** $(A/R_A^{=}, T, \omega/R_A^{=})$ **と保型同形である），さらに任意の保型準写** $f \in A \to G$ **に対して** $f \supseteq R_A^{=}$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.5.1 によって，普遍型付代数系 (A, T, ω, S) で $\omega|_S = \sigma\rho$ なるものが存在する．そしてこれの普遍性によって，保型準写 $g \in A \to G$ で $g|_S = \rho$ なるものが存在する．そういうものについては，$gA = g([S]_A) = [gS]_G = [\rho S]_G = G$ が成り立ち，従って問題 3.11.3 により，商代数系 A/g から G への写像 g/g は保型同写であって，これと類別写像 $/g$ とは $(g/g)(/g) = g$ をみたす．そこで，$G' = A/g$，$h = g/g$ とし，$/g$ の S への制限を ρ' とすれば，$\rho = h\rho'$ が成り立つ．従って問題 3.13.31 によって $(A/g, T, \omega/g, S, \rho')$ は擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系となるから，定理 3.13.4 によって $g = R_A^{=}$ が成り立つ．任意の保型準写 $f \in A \to G$ に対して，A/f は G の台部分系と同形であり，従って $\mathcal{R}$ 種型付代数系であるから，定理 3.13.3 によって $f \supseteq R_A^{=}$ が成り立つ．

定理 3.13.9 $\mathcal{R}$ **が同型であれば，**$\mathcal{R}$ **種代数系すべてにおいて成り立つ恒等式の全体は，**$\mathcal{R}$ **が** $\mathfrak{A}(T)$ **に誘導する関係** $R_{\mathfrak{A}(T)}$ **の型合同包** $R_{\mathfrak{A}(T)}^{=}$ **に等しい．**

証明　$\mathfrak{A}(T)$ を A で表すと，定理 3.13.6 によって $R_A^{=}$ が存在する．これを Q で表す．$\mathcal{R}$ 種代数系すべてにおいて成り立つ恒等式の全体は，H を $\mathcal{R}$ 種代数系全体に亘らせての関係 $=_H$ の交わりである．これを P で表す．そういう $=_H$ は，$\mathcal{R}$ を含み，問題 3.13.2 によって最大関係であるか型合同関係かであって，A の保型準換を A 上の単項算法とみなしたものと両立する．従って，$P \supseteq Q$ が成り立つ（問題 3.13.28 参照）．逆に $P \subseteq Q$ なることを示すために，A の型写像と素元系とを ω, S で表し，A/Q と類別写像 $/Q$ の S への制限と ω/Q とを G, ρ, σ で表す．そうすると，定理 3.13.4 によって (G, T, σ, S, ρ) は擬普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系である．従って定理 3.13.8 により，Q は A から G への保型準写すべての交わりに，すなわち $=_G$ に等しい．これで $P \subseteq Q$ なることが示された．

例 3.13.8 まず，いわゆる自由群は普遍 $\mathcal{R}$ 種汎代数系であることを示そう．単元集合 $T = \{t\}$ に例 3.13.1 のように代数構造を定める．そうすると T 型代数系とは，二項汎算法 $a \cdot b$ と単項汎算法 a^{-1} とから成る代数構造を持つ汎代数系に他ならない．次に $\mathcal{R}$ として，例 3.13.1 に示した三つの恒等式

$$x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z \qquad (x^{-1} \cdot x) \cdot y \equiv y \qquad x^{-1} \cdot x \equiv y^{-1} \cdot y$$

から成る集合をとる．ただし，x, y, z は $\mathfrak{A}(T)$ の相異なる素元である．そうすると，例 3.13.1 で示したことにより，$\mathcal{R}$ 種代数系とは算法 $a \cdot b$ についての群のことに他ならない．

任意の集合 S をとる．そうすると，写像 $\tau \in S \to T$ が一意自明に定まり，位数 2 の群が存在することにより，$\mathcal{R}$ は $\tau \in S \to T$ に関して豊富である．従って定理 3.13.7 によって普遍 $\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G, T, σ, S) が存在する．すなわち，次の二条件をみたす群 G が存在する．

1. G は群として S によって生成される．

2. φ が S から群 G' への写像なら，φ は G から G' への群準同形写像に拡張される．

こういう G は，いわゆる S 上の自由群に他ならない．ただしこの二条件を以ってするなら，自由群ではなく**普遍群**と名付けるべきである．

次に，すべての群において成り立つ恒等式をすべて求める．それには，定理 3.13.9 で示したことにより，可算集合 S 上の普遍群 $\mathfrak{A}(T)$ に $\mathcal{R}$ が誘導する関係 $R_{\mathfrak{A}(T)}$ の型合同包 $R^{=}_{\mathfrak{A}(T)}$ を調べればいい．$\mathfrak{A}(T)$ を A で表すことにする．

問題 3.11.7 により $R^{=}_{A} = R^{rs-t}_{A}$ が成り立つ．さらに，定理 3.11.4 により $R^{=}_{A} = \left[\left[[R_A \cup D]_s\right]_\sigma\right]_t$ が成り立つ．ただし，D は $A \times A$ の対角線であり，$[\ \ ]_s$ と $[\ \ ]_t$ とは，問題 3.9.62 でと同様，代数系 $(A \times A, \{s\})$ と代数系 $(A \times A, \{t\})$ とにおける算包を表す．また，$[\ \ ]_\sigma$ は分数代数系 σ における算包を表すが，$T = \{t\}$ だから σ は $A \times A$ に等しい．R_A は $\mathcal{R}$ から誘導される関係であるから，次の三種類の元から成る．ただし a, b, c は，三種の元それぞれにおいて独立に A 全体に亘る．

$$\frac{a \cdot (b \cdot c)}{(a \cdot b) \cdot c} \qquad \frac{(a^{-1} \cdot a) \cdot b}{b} \qquad \frac{a^{-1} \cdot a}{b^{-1} \cdot b}$$

従って，$[R_A \cup D]_s$ は次の六種類の元から成る．ただし a, b, c は，六種の元それぞれにおいて独立に A 全体に亘る．

$$\frac{a \cdot (b \cdot c)}{(a \cdot b) \cdot c} \qquad \frac{(a \cdot b) \cdot c}{a \cdot (b \cdot c)} \qquad \frac{(a^{-1} \cdot a) \cdot b}{b} \qquad \frac{b}{(a^{-1} \cdot a) \cdot b} \qquad \frac{a^{-1} \cdot a}{b^{-1} \cdot b} \qquad \frac{a}{a}$$

そして，分数代数系 $A \times A$ の算法は次の二つである．

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} = \frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} \qquad \left(\frac{a}{a'}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{a'^{-1}}$$

これら二つの算法を上記六種の元に任意に施して得られる元の全体が $\left[[R_A \cup D]_s\right]_\sigma$ に等しい．そうして，$A \times A$ の元 $\dfrac{a}{a'}$ が $R^{=}_{A}$ に属すためには，$\left[[R_A \cup D]_s\right]_\sigma$ の元の列 $\dfrac{a_0}{a'_0}, \ldots, \dfrac{a_n}{a'_n}$ で $a = a_0$，$a' = a'_n$，$a'_{i-1} = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なるものの存在することが必要十分である．

問題 3.13.35 定理 3.13.7 を用いて，任意の集合 S に対して S 上の**普遍ブール束**が，すなわち次の二条件をみたすブール束 G が存在することを示せ．

1. G は束として S によって生成される．

2. φ が S からブール束 G' への写像なら，φ は G から G' への束準同形写像に拡張される．

同様に，S 上の**普遍半群**が存在してそれが半群 $S^{+} = \bigcup_{n \geq 1} S^n$ に同形であることを示せ．

3.13.3　関係式をみたす普遍代数系 (✓)

§ 前項で述べた事柄は以下のように拡張される．すなわちまず，諸定義を次のように拡張する．T を代数系とするとき，T 型代数系についての恒等式の集合 $\mathcal{R}$ と $\mathfrak{A}(T)$ の相異なる素元の族 $(x_i)_{i \in I}$

の組み $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ を T 型代数系についての**関係式**と呼び，$\mathcal{R}$ と $(x_i)_{i\in I}$ をそれぞれこの関係式の**恒等式**・**定元**と呼ぶ [50]．そして，T 型代数系 A とその元の族 $(a_i)_{i\in I}$ の組み $(A, (a_i)_{i\in I})$ がこの**関係式をみたす**とは，各 $i \in I$ に対して a_i, x_i が同型であって，$fx_i = a_i$ $(i \in I)$ なる任意の保型準写 $f \in \mathfrak{A}(T)\rightarrow A$ と $\mathcal{R}$ の任意の元 $\xi \equiv \xi'$ に対して $f\xi = f\xi'$ の成り立つことを言う．また，そういう組み $(A, (a_i)_{i\in I})$ を $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種代数系**と呼び，$(a_i)_{i\in I}$ を A における $(x_i)_{i\in I}$ の**実例**と呼ぶ（別の意味の「実例」について定義 3.27.2 参照）．なお，$I = \emptyset$ の場合の $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種代数系は，前項の $\mathcal{R}$ 種代数系に他ならない．

$\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種型付代数系 $(G, T, \sigma, (a_i)_{i\in I})$ と G の部分集合 S が次の二条件をみたすとする．

1. $G = [S \cup \{a_i \mid i \in I\}]$ **かつ** $S \cap \{a_i \mid i \in I\} = \emptyset$

2. $(G', T, \sigma', (a_i')_{i\in I})$ **が** $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系であって** $\varphi \in S\rightarrow G'$ **が保型写像であれば，**φ **は保型準写** $h \in G\rightarrow G'$ **で** $ha_i = a_i'$ $(i \in I)$ **なるものに拡張される．**

このとき，五つ組み $(G, T, \sigma, (a_i)_{i\in I}, S)$ を**普遍** $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系**と呼ぶか，あるいは，四つ組み $(G, T, \sigma, (a_i)_{i\in I})$ を **S 上の普遍** $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系**と呼ぶ．

この定義で $S = \emptyset$ の場合は除外しない．すなわち，$\emptyset$ 上の普遍 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種型付代数系とは，次の二条件をみたす $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種型付代数系 $(G, T, \sigma, (a_i)_{i\in I})$ のことを言う（例 3.13.10 参照）．

1. $G = [\{a_i \mid i \in I\}]$

2. $(G', T, \sigma', (a_i')_{i\in I})$ が $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種型付代数系なら，保型準写 $h \in G\rightarrow G'$ で $ha_i = a_i'$ $(i \in I)$ なるものが存在する．

以上の定義のもとで，定理 3.13.7 が次のように拡張される．

定理 3.13.10 S **を集合とし，**$\tau \in S\rightarrow T$ **とする．また，**$\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **を T 型代数系についての関係式とし，**$\mathcal{R}$ **は同型であるとする．このとき，**$\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系** $(G, T, \sigma, (a_i)_{i\in I})$ **および写像** $\rho \in S\rightarrow G$ **で次の三条件をみたすものが存在する．**

1. $G = [\rho S \cup \{a_i \mid i \in I\}]$

2. $\sigma\rho = \tau$

3. $(G', T, \sigma', (a_i')_{i\in I})$ **が** $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系であって** $\varphi \in S\rightarrow G'$ **が** $\sigma'\varphi = \tau$ **をみたすなら，保型準写** $h \in G\rightarrow G'$ **で** $\varphi = h\rho$，$ha_i = a_i'$ $(i \in I)$ **なるものが存在する．**

さらに $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系** $(G', T, \sigma', (a_i')_{i\in I})$ **で各** $t \in T$ **に対して** $\#(G_t' - \{a_i' \mid i \in I\}_t) \geq \min\{\#(\tau^{-1}t), 2\}$ **なるものが存在すれば（このとき** $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **は** $\tau \in S\rightarrow T$ **に関して豊富であると言う），普遍** $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系** $(G, T, \sigma, (a_i)_{i\in I}, S)$ **で** $\sigma|_S = \tau$ **をみたすものが存在する．**

この定理において $S = \emptyset$ とすれば，τ, ρ, φ に関わる仮定や結論が消去されて次の系が得られる．

系　**T を代数系とし，**$\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **を T 型代数系についての関係式とし，**$\mathcal{R}$ **は同型であるとする．このとき，**$\emptyset$ **上の普遍** $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ **種型付代数系** $(G, T, \sigma, (a_i)_{i\in I})$ **が存在する．**

[50] この「定元」も前出の「関係式」も，先の「恒等式」と同様に複数形と解釈されたい．

定理 3.13.10 の証明　定理 3.13.7 の証明をほとんど逐語的に翻訳すればいいので，変更点に重点を置く．集合 S' を $S' = S \amalg \{x_i \mid i \in I\}$ と定め，$\mathfrak{A}(T)$ の型写像 θ を用いて，τ の拡張 $\tau' \in S' \to T$ を $\tau' x_i = \theta x_i$ $(i \in I)$ と定める．普遍型付代数系 (A, T, ω, S') で $\omega|_{S'} = \tau'$ なるものをとって，A 上の関係 R を次のように定める．すなわち，$a \mathrel{R} a'$ であるとは，保型準写 $F \in \mathfrak{A}(T) \to A$ と $\mathcal{R}$ の元 $\xi \equiv \xi'$ とで $a = F\xi$，$a' = F\xi'$，$Fx_i = x_i$ $(i \in I)$ をみたすものがあることとする．そうすると，$\mathcal{R}$ が同型であるから R は A の型写像 ω に含まれ，従って R を含む A 上の最小の型合同関係 Q がある．$G = A/Q$ に T 型代数構造を定めて類別写像 $g \in A \to G$ が保型準写であるようにすることができる．G の型写像を σ とし，G の元の族 $(a_i)_{i \in I}$ を $a_i = gx_i$ と定め，$\rho = g|_S$ と定める．そうすると，$A = [S \cup \{x_i \mid i \in I\}]$ なので $G = [\rho S \cup \{a_i \mid i \in I\}]$ が成り立ち，$\sigma g = \omega$ なので $\sigma\rho = \tau$ が成り立つ．また，g が保型写像なので a_i, x_i は同型である $(i \in I)$．そして問題 3.5.6 により，$kx_i = a_i$ $(i \in I)$ なる保型準写 $k \in \mathfrak{A}(T) \to G$ は，$Fx_i = x_i$ $(i \in I)$ なる保型準写 $F \in \mathfrak{A}(T) \to A$ と g との合成として表される．そこで，$\mathcal{R}$ の任意の元 $\xi \equiv \xi'$ に対して，$a = F\xi$，$a' = F\xi'$ と定めれば $a \mathrel{R} a'$ が成り立つから，$R \subseteq Q$ なることより $ga = ga'$ が成り立ち，従って $k\xi = gF\xi = ga = ga' = gF\xi' = k\xi'$ が成り立つ．よって，$(G, T, \sigma, (a_i)_{i \in I})$ は $\mathcal{R}, (x_i)_{i \in I}$ 種型付代数系である．

$(G', T, \sigma', (a'_i)_{i \in I})$ が $\mathcal{R}, (x_i)_{i \in I}$ 種型付代数系であって $\varphi \in S \to G'$ が $\sigma'\varphi = \tau$ をみたすとする．このとき，φ の拡張 $\varphi' \in S' \to G'$ を $\varphi' x_i = a'_i$ $(i \in I)$ と定めれば，a'_i, x_i が同型であることによって $\sigma'\varphi' = \tau'$ が成り立つから，(A, T, ω, S') の普遍性によって φ' は保型準写 $f \in A \to G'$ に拡張され，A 上の関係とみなした f は型合同関係となる．しかも，$R \subseteq f$ が成り立つ．なぜなら，$a, a' \in A$ が $a \mathrel{R} a'$ をみたせば，保型準写 $F \in \mathfrak{A}(T) \to A$ と $\mathcal{R}$ の元 $\xi \equiv \xi'$ とで $a = F\xi$，$a' = F\xi'$，$Fx_i = x_i$ $(i \in I)$ をみたすものがあり，$fF \in \mathfrak{A}(T) \to G'$ は $fFx_i = a'_i$ $(i \in I)$ をみたす保型準写であって $(G', (a'_i)_{i \in I})$ が $\mathcal{R}, (x_i)_{i \in I}$ 種代数系であるから，$fa = fF\xi = fF\xi' = fa'$ が確かに成り立つ．Q が R を含む最小の型合同関係であったから，$Q \subseteq f$ が成り立つ．従って，$h \in G \to G'$ を $f = hg$ なるように定義でき，h は保型準写で $\varphi = h\rho$ をみたし，$ha_i = hgx_i = fx_i = \varphi' x_i = a'_i$ が成り立つ $(i \in I)$．

$\mathcal{R}$ 種型付代数系 (G', T, σ') であって各 $t \in T$ に対して $\#(G'_t - \{a'_i \mid i \in I\}_t) \geq \min\{\#(\tau^{-1}t), 2\}$ なるものが存在すると仮定する．このとき，$\tau^{-1}t \neq \emptyset$ なら $G'_t - \{a'_i \mid i \in I\}_t \neq \emptyset$ であり，また，$\#(\tau^{-1}t) \geq 2$ なら $\#(G'_t - \{a'_i \mid i \in I\}_t) \geq 2$ が成り立つ $(t \in T)$．従って，各 $s \in S$ に対して，$\varphi_s \in S \to G'$ であって

$$\varphi_s(\tau^{-1}t) \subseteq G'_t - \{a'_i \mid i \in I\}_t \qquad (t \in T)$$

$$\varphi_s s \neq \varphi_s x \qquad (s \neq x \in S)$$

なる二条件をみたすものが存在する．一番目の条件によって $\sigma'\varphi_s = \tau$ が成り立つから，保型準写 $h_s \in G \to G'$ で $\varphi_s = h_s\rho$，$h_s a_i = a'_i$ $(i \in I)$ なるものが存在する．ある $i \in I$ に対して $a_i \in \rho S$ とすれば，$a'_i \in \varphi_s S$ が成り立つが，これは一番目の条件に反する．従って $\rho S \cap \{a_i \mid i \in I\} = \emptyset$ が成り立つ．また，ある $s, s' \in S$ に対して $\rho s = \rho s'$ とすれば，$\varphi_s s = \varphi_s s'$ となるから，二番目の条件により $s = s'$ でなければならない．すなわち ρ は単射である．そこで，S を含む集合 G' と全単射 $h \in G \to G'$ で $h\rho = \mathrm{id}_S$ なるものをとって (G, T, σ) の h による複製 (G', T, σ') を作り，$a'_i = ha_i$ $(i \in I)$ と定めれば，$(G', T, \sigma', (a'_i)_{i \in I}, S)$ は普遍 $\mathcal{R}, (x_i)_{i \in I}$ 種型付代数系で $\sigma'|_S = \tau$ をみたす．

例 3.13.9 K を可換環とするとき，単位可換 K 多元環は，関係式をみたす汎代数系とみなされる．すなわちまず，二つの二項汎算法 $a + b$ と $a \cdot b$ と，単項汎算法 $-a$ と，K を添数集合とする単項汎算法族 $(ka)_{k \in K}$ とから成る代数構造を持つ代数系 A を考える．次に，これが以下に示す関係式

$\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ をみたすものとする．すなわちまず，この関係式の恒等式 $\mathcal{R}$ としては次表のものをとる．

$$
\begin{array}{ll}
x+(y+z) \equiv (x+y)+z & k(x+y) \equiv kx+ky \\
\big((-x)+x\big)+y \equiv y & (k+l)x \equiv kx+lx \\
(-x)+x \equiv (-y)+y & (kl)x \equiv k(lx) \\
x+y \equiv y+x & 1x \equiv x \\
x\cdot(y\cdot z) \equiv (x\cdot y)\cdot z & k(x\cdot y) \equiv (kx)\cdot y \\
x\cdot(y+z) \equiv (x\cdot y)+(x\cdot z) & k(x\cdot y) \equiv x\cdot(ky) \\
(x+y)\cdot z \equiv (x\cdot z)+(y\cdot z) & w\cdot x \equiv x \\
x\cdot y \equiv y\cdot x & x\cdot w \equiv x
\end{array}
$$

ただし，w, x, y, z は可算基普遍汎代数系 $\mathfrak{A}(\{t\})$ の相異なる素元であり，k, l は K のすべての元にわたり，1 は K の単位元である．また，$\{t\}$ の代数構造は，空算法が無いように自明に定める．次に，関係式の定元 $(x_i)_{i\in I}$ は $I=\{i\}$, $x_i = w$ と定める．最後に，A における w の実例を e で表す．そうすると，A は e を単位元とする可換 K 多元環である．すなわちまず，上表の w を含まない 14 種の恒等式は，A が可換 K 多元環であることを表現する．次に，w を含む二つの恒等式は，e が A の単位元であることを表現する．なぜなら，A の任意の元 a に対し，$fw=e$, $fx=a$ なる保型準写 $f\in\mathfrak{A}(\{t\})\to A$ をとれば（w, x が相異なるから，そういう f は存在する），式 $w\cdot x\equiv x$ が $\mathcal{R}$ に属すから $e\cdot a = fw\cdot fx = f(w\cdot x) = fx = a$ が成り立ち，同様に $a\cdot e = a$ も成り立つ．

逆に任意の単位可換 K 多元環は，その単位元を $(x_i)_{i\in I}$ の実例としてこの関係式 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ をみたす．このことを含め，上で証明無しに述べたことは，例 3.13.1 での論法によって確かめられる．

任意の集合 S に対して，$\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ は一意自明に定まる写像 $\tau\in S\to\{t\}$ に関して豊富であるから，定理 3.13.10 によって S 上の普遍 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種汎代数系が存在する．これはすなわち，次の二条件をみたす単位可換 K 多元環 G である．

1. G は S と単位元 1 とで生成され $1\notin S$ が成り立つ．
2. G' が単位可換 K 多元環であって（単位元を $1'$ で表す）$\varphi\in S\to G'$ なら，φ は多元環準同形写像 $h\in G\to G'$ で $h1=1'$ なるものに拡張される．

こういう G は，S 上の K 係数多項式環 K[S] に他ならない．

問題 3.13.36 定理 3.13.10 を用いて，任意の集合 S に対して S 上の**普遍単位半群**が，すなわち次の二条件をみたす半群 G が存在してそれが半群 $S^* = \bigcup_{n\geq 0} S^n$ に同形であることを示せ．

1. G は S と単位元 1 とで生成され $1\notin S$ が成り立つ．
2. G' が単位半群であって（単位元を $1'$ で表す）$\varphi\in S\to G'$ なら，φ は半群準同形写像 $h\in G\to G'$ で $h1=1'$ なるものに拡張される．

例 3.13.10 生成元と関係式とで定義される群は $\emptyset$ 上の普遍 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種汎代数系とみなされる．すなわちまず，二項汎算法 $a\cdot b$ と単項汎算法 a^{-1} とから成る代数構造を持つ代数系 A を考える．次に，これが以下に示す関係式 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ をみたすものとする．すなわちまず，この関係式の恒等式 $\mathcal{R}$ としては例 3.13.1 の三つの恒等式

$$x\cdot(y\cdot z)\equiv(x\cdot y)\cdot z \qquad (x^{-1}\cdot x)\cdot y\equiv y \qquad x^{-1}\cdot x\equiv y^{-1}\cdot y$$

に加えて，可算基普遍汎代数系 $\mathfrak{A}(\{t\})$ における $\{x_i \mid i \in I\}$ の算包の中から任意の恒等式の族 $\xi_j \equiv \eta_j$ $(j \in J)$ をとる．ただし，x, y, z, x_i $(i \in I)$ は $\mathfrak{A}(\{t\})$ の相異なる素元であり，$\mathfrak{A}(\{t\})$ の代数構造は例 3.13.1 のように定める．次に，A における $(x_i)_{i\in I}$ の実例を $(a_i)_{i\in I}$ で表す．そうすると，まず A は算法 $a \cdot b$ について群となる．次に，恒等式 $\xi_j \equiv \eta_j$ $(j \in J)$ に現れる $(x_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_{i\in I}$ で置き換え記号 $\equiv$ を等号 $=$ で置き換えた式が A において成り立つ．このことを以後，**$(a_i)_{i\in I}$ は関係式 $\xi_j \equiv \eta_j$ $(j \in J)$ をみたす**と言い表す．

逆に，A が群であってその元の族 $(a_i)_{i\in I}$ が関係式 $\xi_j \equiv \eta_j$ $(j \in J)$ をみたすなら，$A, (a_i)_{i\in I}$ は $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種汎代数系である．

定理 3.13.10 系によって $\emptyset$ 上の普遍 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ 種汎代数系 G が存在する．これはすなわち，次の三条件をみたす群である．

1. G は a_i $(i \in I)$ によって生成される．
2. $(a_i)_{i\in I}$ は関係式 $\xi_j \equiv \eta_j$ $(j \in J)$ をみたす．
3. G' が群であってその元の族 $(a'_i)_{i\in I}$ が関係式 $\xi_j \equiv \eta_j$ $(j \in J)$ をみたすなら，群準同形写像 $h \in G \to G'$ で $ha_i = a'_i$ $(i \in I)$ なるものが存在する．

こういう G は,「生成元 $(a_i)_{i\in I}$ と関係式 $\xi_j \equiv \eta_j$ $(j \in J)$ とで定義される群」に他ならない．

問題 3.13.37 関係式 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ をみたす型付代数系 A の台部分系 B は，A における $(x_i)_{i\in I}$ の実例 $(a_i)_{i\in I}$ を含むなら，やはり関係式 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ をみたす．また，A の商代数系 A/R も関係式 $\mathcal{R}, (x_i)_{i\in I}$ をみたす．

問題 3.13.38 T 型代数系 A がみたす関係式は，巾代数系 A^V もみたす．

問題 3.13.39 体は，関係式をみたす代数系とみなすことができない．

3.14　代数系間の伝達

$ 代数系間の擬写や準写は，同類の代数系を比較するための概念とみなすことができる．この節では，必ずしも同類でない代数系同士の比較に関わる概念を説明する．そのために，集合 A 上の算法全体の集合を $\mathbf{O}A$ で表す．

$$\mathbf{O}A = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcup_{D\in\mathcal{P}(A^n)}(D\to A)\right)$$

そしてこれを台集合として代数系を作る．すなわち，α が A 上の m 項算法で β_i $(i = 1, \ldots, m)$ が A 上の n 項算法であるとき，A 上の n 項算法 γ を次のように定義する．

$$\gamma(a_1, \ldots, a_n) = \alpha\big(\beta_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \beta_m(a_1, \ldots, a_n)\big)$$

ただし γ の定義域は，上式の右辺が定義されるような $(a_1, \ldots, a_n)$ の範囲である．この算法 γ を $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m$ の**合成**と呼び，

$$\alpha \circ (\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

で表す．合成を作るこの操作を Γ_m で表すと，Γ_m は $\mathbf{O}A$ 上の $m+1$ 項算法とみなされる．そこで，$\mathbf{O}A$ に算法族 $(\Gamma_m)_{m=1,2,\ldots}$ を与えて出来る代数系を A 上の**算法代数系**と呼ぶ．

問題 3.14.1 代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ の台部分系は，算法代数系 $(\mathbf{O}A, (\Gamma_m)_{m=1,2,\ldots})$ における $\{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の算包を代数構造として集合 A に与えて出来る代数系においても台部分系である．

次に，任意の自然数 n と任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し，A 上の n 項汎算法 p_i^n を

$$p_i^n(a_1, \ldots, a_n) = a_i \qquad \big((a_1, \ldots, a_n) \in A^n\big)$$

と定義し，n と i を色々に変えて出来る p_i^n を**射影**と総称する [51]．また，任意の自然数 n と任意の $a \in A$ に対し，A 上の n 項汎算法 c_a^n を

$$c_a^n(a_1, \ldots, a_n) = a \qquad \big((a_1, \ldots, a_n) \in A^n\big)$$

と定義し，n と a を色々に変えて出来る c_a^n を**定値算法**と総称する．さらに，A 上の射影と定値算法の全体を $\mathbf{N}A$ で表す．そして，$\mathbf{O}A$ の任意の部分集合 X に対して，算法代数系 $(\mathbf{O}A, (\Gamma_m)_{m=1,2,\ldots})$ における $X \cup \mathbf{N}A$ の算包を，X の**多項式包**と呼び $\mathbf{P}[X]$ で表す．

定義 3.14.1 写像 $f \in A{\to}B$ が代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への**伝達**であるとは，$\mathbf{P}[\{\beta_\mu \mid \mu \in M\}]$ の元の族 $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を適当にとったときに f が代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(B, (\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への準写になることを言う．また，そういう族 $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の f，$(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ による**翻訳**と呼ぶ．

補題 3.14.1 f が代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達なら，A 上の関係とみなした f は合同関係であり，fA は $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の f，$(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ による翻訳 $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に属す各算法 γ_λ で閉じている．

証明　f が合同関係であることは定理 3.11.1 系 から直ちに分かる．fA が γ_λ で閉じていることは，問題 3.3.9 により fA が代数系 $(B, (\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ の台部分系になることから分かる．

定理 3.14.1 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を代数系とし，f を A から集合 B への写像とし，A 上の関係とみなした f は合同関係であると仮定する．このとき，次の三つのことが成り立つ．

1. **fA 上の算法 δ_λ を次のように定義することができる $(\lambda \in \Lambda)$．すなわち，$(b_1, \ldots, b_j) \in \mathrm{Dom}\,\delta_\lambda$ となるのは $\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ の元 $(a_1, \ldots, a_j)$ で $fa_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, j)$ をみたすものが存在する場合とし，この場合に $\delta_\lambda(b_1, \ldots, b_j) = f\big(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\big)$ と定める（算法 δ_λ を f により α_λ から誘導される算法と呼ぶ）．**

2. **f が $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達で，$(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の f，$(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ による翻訳なら，fA は各 γ_λ で閉じており，γ_λ の fA への制限は δ_λ と等しい．**

3. **$(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ が代数系であり，$(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbf{P}[\{\beta_\mu \mid \mu \in M\}]$ の元の族であり，fA が各 γ_λ で閉じていて，かつ γ_λ の fA への制限が δ_λ と等しければ，f は $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達であり，$(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の f，$(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ による翻訳である．**

証明　**1.** f が合同関係だから，$\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ のもう一つの元 $(a_1', \ldots, a_j')$ も $fa_i' = b_i$ $(i = 1, \ldots, j)$ をみたせば，$f\big(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)\big) = f\big(\alpha_\lambda(a_1', \ldots, a_j')\big)$ が成り立つ．従って δ_λ は矛盾無く定義できる．

2. まず，補題 3.14.1 により fA は γ_λ で閉じている．そこで次に，γ_λ の fA への制限が δ_λ と等しいことを示すために，b_1，…，$b_j \in fA$ とし，$fa_i = b_i$ なる $a_i \in A$ をとる $(i = 1, \ldots, j)$．もし

[51] 第 3.10 節で定めた巾代数系からその底代数系への射影の概念参照．

も $(b_1,\dots,b_j)\in\operatorname{Dom}\gamma_\lambda$ なら，仮定により f は $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への準写であるから

$$(a_1,\dots,a_j)\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda \qquad \gamma_\lambda(b_1,\dots,b_j)=f\bigl(\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)\bigr)$$

が成り立ち，従ってまた，δ_λ の定義により

$$(b_1,\dots,b_j)\in\operatorname{Dom}\delta_\lambda \qquad \gamma_\lambda(b_1,\dots,b_j)=\delta_\lambda(b_1,\dots,b_j)$$

が成り立つ．逆に $(b_1,\dots,b_j)\in\operatorname{Dom}\delta_\lambda$ なら，δ_λ の定義により $\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$ の元 $(a'_1,\dots,a'_j)$ で $fa'_i=b_i$ $(i=1,\dots,j)$ なるものがあるが，f は合同関係であるから $(a_1,\dots,a_j)\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$ となり，f が $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への擬写であるから $(b_1,\dots,b_j)\in\operatorname{Dom}\gamma_\lambda$ が成り立つ．従って確かに，γ_λ の fA への制限は δ_λ と等しい．

3. f が $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への準写であることを示せばいい．そうするためにまず $(a_1,\dots,a_j)\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$ と仮定すると，δ_λ の定義により

$$(fa_1,\dots,fa_j)\in\operatorname{Dom}\delta_\lambda \qquad f\bigl(\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)\bigr)=\delta_\lambda(fa_1,\dots,fa_j)$$

となり，γ_λ の fA への制限が δ_λ と等しいから，

$$(fa_1,\dots,fa_j)\in\operatorname{Dom}\gamma_\lambda \qquad f\bigl(\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)\bigr)=\gamma_\lambda(fa_1,\dots,fa_j)$$

が成り立つ．逆に $(fa_1,\dots,fa_j)\in\operatorname{Dom}\gamma_\lambda$ と仮定すると，γ_λ の fA への制限が δ_λ と等しから $(fa_1,\dots,fa_j)\in\operatorname{Dom}\delta_\lambda$ であり，従って $\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$ の元 $(a'_1,\dots,a'_j)$ で $fa'_i=fa_i$ $(i=1,\dots,j)$ なるものがあるが，f は合同関係であるから $(a_1,\dots,a_j)\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda$ が成り立つ．従って確かに，f は $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への準写である．

系　**$(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ と $(B,(\beta_\mu)_{\mu\in M})$ を代数系とし，f を A から集合 B への写像とし，A 上の関係とみなした f は合同関係であると仮定する．また，δ_λ を f により α_λ から誘導される fA 上の算法とする $(\lambda\in\Lambda)$．このとき，f が $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達であるためには，$\mathbf{P}[\{\beta_\mu\mid\mu\in M\}]$ の元の族 $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であって各 γ_λ が次の二条件 a, b をみたすものの存在することが必要十分である．**

a. **fA は γ_λ で閉じている．**　　**b.** **γ_λ の fA への制限は δ_λ と等しい．**

また，こういう族 $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の $f,(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ による翻訳である．

証明　必要であることは定理 3.14.1 の結論 2 から分かる．十分であることと最後の注意は定理 3.14.1 の結論 3 から分かる．

系 2 **$(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ と $(B,(\beta_\mu)_{\mu\in M})$ を代数系とし，f を A から集合 B への写像とし，A 上の関係とみなした f は合同関係であると仮定する．また，δ_λ を f により α_λ から誘導される fA 上の算法とする $(\lambda\in\Lambda)$．このとき，次の二条件は同等である．**

1. **f は $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達である．**

2. **fA から B への埋め込み写像は代数系 $(fA,(\delta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達である．**

証明　$C = fA$ と定め，C から B への埋め込み写像を g で表す．そうすると，C 上の関係とみなした g は代数系 $(C, (\delta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ 上の合同関係であり，$gC = fA$ であり，g により δ_λ から誘導される gC 上の算法は δ_λ 自身である $(\lambda \in \Lambda)$．従って，前の系により直ちに証明される．

問題 3.14.2 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ と $(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ を代数系とし，$f \in A{\to}B$ を単射とし，fA 上の算法 δ_λ を次のように定義する $(\lambda \in \Lambda)$．ただし n_λ は α_λ の項数である．

$$\delta_\lambda(b_1, \ldots, b_{n_\lambda}) = f\big(\alpha_\lambda(f^{-1}b_1, \ldots, f^{-1}b_{n_\lambda})\big)$$

このとき，次の二条件は同等である．

1. f は $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達である．
2. fA から B への埋め込み写像は代数系 $(fA, (\delta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達である．

問題 3.14.3 集合 A の恒等写像 id_A が代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(A, (\beta_\mu)_{\mu\in M})$ への伝達であるためには，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\alpha_\lambda \in \mathbf{P}[\{\beta_\mu \mid \mu \in M\}]$ なることが必要十分である．

問題 3.14.4 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を代数系とし，n_λ を α_λ の項数とし，p_λ を n_λ 次の置換とし，A 上の n_λ 項算法 β_λ を次のように定める $(\lambda \in \Lambda)$.

$$\beta_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) = \alpha_\lambda(a_{p_\lambda 1}, \ldots, a_{p_\lambda n_\lambda})$$

このとき id_A は代数系 $(A, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への伝達である．

また，m_λ を $m_\lambda \geq n_\lambda$ なる自然数とし，A 上の m_λ 項算法 γ_λ を次のように定める $(\lambda \in \Lambda)$.

$$\gamma_\lambda(a_1, \ldots, a_{m_\lambda}) = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$$

このとき id_A は代数系 $(A, (\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への伝達である．

定理 3.14.2 (伝達定理) **(A, T, σ, S) と (A', T', σ', S') が普遍型付代数系であり，g が T から T' の台部分系 $\sigma'A'$ への伝達であり [52]，写像 $\varphi \in S{\to}A'$ が $\sigma'\varphi = g\sigma|_S$ をみたせば，φ は伝達 $f \in A{\to}A'$ で $\sigma' f = g\sigma$ をみたすものに拡張される．**

証明　問題 3.8.7 により σ' は全射であると仮定していい．A', T' の代数構造をそれぞれ $(\alpha'_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$, $(t'_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ とする．伝達の定義により，$\mathbf{P}[\{t'_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda'\}]$ の元の族 $(t''_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を適当にとれば，g は代数系 T から代数系 $(T', (t''_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への準写になる．他方で，後記の補題 3.14.2 により，$\mathbf{P}[\{\alpha'_{\lambda'} \mid \lambda' \in \Lambda'\}]$ の元の族 $(\alpha''_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を適当にとれば，σ' は代数系 $(A', (\alpha''_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(T', (t''_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への準写になる．従って，これらの代数系を A'', T'' で表せば，(A'', T'', σ') は型付代数系になる．そうすると，定理 3.7.1 系により，φ は保型準写 $f \in A{\to}A''$ で $\sigma' f = g\sigma$ をみたすものに拡張される．保型準写は準写であるから，f は A から A' への伝達である．

補題 3.14.2 **f が代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への全射準写であり $(\delta_\mu)_{\mu\in M}$ が $\mathbf{P}[\{\beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}]$ の元の族であるとき，$\mathbf{P}[\{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}]$ の元の族 $(\gamma_\mu)_{\mu\in M}$ を適当にとれば，f は代数系 $(A, (\gamma_\mu)_{\mu\in M})$ から代数系 $(B, (\delta_\mu)_{\mu\in M})$ への準写になる．**

---

[52] 問題 3.3.9 参照.

証明　$X = \{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, $Y = \{\beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と定める．$\mathbf{P}[Y]$ の任意の元 α' に対して $\mathbf{P}[X]$ の元 α で次の二条件をみたすものがあることを示せばいい．

1. $\alpha(a_1, \ldots, a_j)$ が定義されるためは $\alpha'(fa_1, \ldots, fa_j)$ が定義されることが必要十分である．
2. $\alpha(a_1, \ldots, a_j)$ が定義されれば $f\bigl(\alpha(a_1, \ldots, a_j)\bigr) = \alpha'(fa_1, \ldots, fa_j)$ が成り立つ．

$Z = Y \cup \mathbf{N}B$ と定めれば，$\mathbf{P}[Y]$ は Z の $\mathbf{O}B$ における n 圏 Z_n の和であるから，$\alpha' \in Z_n$ なる最小の番号 n が定まる $(n = 0, 1, \ldots)$．この n についての帰納法で，こういう α が存在することを示す．

$n = 0$ **の場合：**$\alpha' \in Y \cup \mathbf{N}B$ である．$\alpha' \in Y$ なら $\alpha' = \beta_\lambda$ なる λ があるから，$\alpha = \alpha_\lambda$ が条件 1, 2 をみたす．$\alpha' \in \mathbf{N}B$ なら，$\alpha' = p_i^n$ であるか，または $\alpha' = c_{fa}^n$ なる $a \in A$ がある．それぞれの場合に応じて $\alpha = p_i^n$ または $\alpha = c_a^n$ とすれば，これが条件 1, 2 をみたす．

$n \geq 1$ **の場合：**$\alpha' = \beta' \circ (\gamma_1', \ldots, \gamma_k')$ なる β', γ_1', …, $\gamma_k' \in \bigcup_{i<n} Z_i$ がある．帰納法の仮定により，β', γ_1', …, γ_k' に対しては条件 1, 2 をみたす $\mathbf{P}[X]$ の元 β, γ_1, …, γ_k が存在する．そこで $\alpha = \beta \circ (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ と定めれば，これが α' に対して条件 1, 2 をみたすことが容易に確かめられる．

問題 3.14.5　f を代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から代数系 $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への準写とし，$(\gamma_\mu)_{\mu\in M}$ を $\mathbf{P}[\{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}]$ の元の族とするとき，$\mathbf{P}[\{\beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}]$ の元の族 $(\delta_\mu)_{\mu\in M}$ を適当にとれば，f は代数系 $(A, (\gamma_\mu)_{\mu\in M})$ から代数系 $(B, (\delta_\mu)_{\mu\in M})$ への準写になる．

3.15　現れ

\$ この節と後に続く二節では，形式言語における「自由な現れ」「束縛された現れ」の概念と「代入」の概念に関わることを，純粋に代数系の理論として述べる．そこで**この節を通じて，**$(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ **を代数系とし** n_λ **を** α_λ **の項数とする**．

定義 3.15.1　A の二元 a, b に対して $a = \alpha_\lambda(\ldots, b, \ldots)$ なる λ があるとき，b **は** a **に直接に現れる**と言い，このことを $b \prec a$ で表す．また，$b \prec a$ あるいは $b = a$ であることを $b \preceq a$ で表す．そして，A の元の列 $b_0, b_1, \ldots, b_n$ $(n \geq 0)$ で

$$a = b_0 \succeq b_1 \succeq \cdots \succeq b_n = b$$

なる条件をみたすものが存在するとき（$\succeq$ は $\preceq$ の双対関係を表す），b **は** a **に現れる**と言い，このことを $b \precsim\!\!\prec a$ で表す．また，上記のような列 $(b_i)_{i=0,\ldots,n}$ を a への b の**現れ**と呼び，その中でも $n \geq 1$ であって各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $b_{i-1} \neq b_i$ なるものを，**重複のない現れ**と呼ぶ．さらに，A の元 a と部分集合 B に対し，B の部分集合 B^a を次のように定義する．

$$B^a = \{b \in B \mid b \precsim\!\!\prec a\}$$

定義 3.15.2　A の元 a と算号系 Λ の元 λ が $(\mathrm{Im}\,\alpha_\lambda)^a \neq \emptyset$ をみたすとき，λ を a **に現れる算号**と呼んだり，λ **は** a **に現れる**と言ったりする．また，A の元 a と Λ の部分集合 M に対し，a に現れる M の元の全体を M^a で表す．

問題 3.15.1　$x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ を集合 S の元とするとき，S 上の普遍半群 $S^+ = \bigcup_{l\geq 1} S^l$ において $y_1 \cdots y_n$ が $x_1 \cdots x_m$ に現れるためには，$y_i = x_{k+i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ なる番号 k のあることが必要十分である．

略解　$y_1 \cdots y_n$ が $x_1 \cdots x_m$ に直接に現れるためには，$y_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ あるいは $y_i = x_{m-n+i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ の成り立つことが必要十分である．

問題 3.15.2 群においては，任意の元が任意の元に直接に現れ，任意の元に算号が現れる．

問題 3.15.3 $a, b \in A$ が $b \prec a$ をみたし f が A の擬換なら，$fb \prec fa$ が成り立つ．

現れの概念は形式言語の理論において重要であり，形式言語は普遍型付代数系の一種として定義される．そこで**以下この節では，A がさらに集合 S 上の有基代数系であると仮定する．**

定理 3.15.1 (A, S) **について次の三つのことが成り立つ．**

1. **A 上の関係 $\underline{\prec\prec}$ は順序関係であり，S は $\underline{\prec\prec}$ に関する極小元の全体と一致する．特に，$a \in S$ なら $S^a = \{a\}$ が成り立つ．**
2. **$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in A$ のとき，$b \prec a$ なることと $b \in \{a_1, \ldots, a_{n_\lambda}\}$ なることは同等であって $S^a = \bigcup_{k=1}^{n_\lambda} S^{a_k}$ が成り立つ．**
3. **各 $a \in A$ に対して S^a は有限集合である．**

証明　**1.** $\preceq$ が $\prec$ の反射包であって $\underline{\prec\prec}$ が $\preceq$ の推移包であるから，問題 3.9.51 により $\underline{\prec\prec}$ は擬順序関係である．定理 3.8.2 により，$b \prec a$ なら $\mathrm{rk}\, b < \mathrm{rk}\, a$ が成り立つ．従って $b \underline{\prec\prec} a$ なら，$\mathrm{rk}\, b \leq \mathrm{rk}\, a$ であり，$\mathrm{rk}\, b = \mathrm{rk}\, a$ は $b = a$ のときに限り成り立つ．従って，$b \underline{\prec\prec} a$ かつ $a \underline{\prec\prec} b$ なら $b = a$ でなければならない．つまり，$\underline{\prec\prec}$ は反対称律をもみたし，従って順序関係である．

任意の $a \in A$ をとる．$a \notin S$ すなわち $\mathrm{rk}\, a \geq 1$ なら，定理 3.8.2 により $a \neq b \prec a$ なる b が存在するから，a は極小元ではない．そこで $a \in S$ と仮定する．そうすると，定理 3.8.2 により $b \prec a$ なる b は存在せず，従って $b \underline{\prec\prec} a$ なる b は a に限るから，a は極小元である．つまり $A^a = \{a\}$ であるが，$a \in S^a \subseteq A^a$ でもあるから，$S^a = \{a\}$ が成り立つ．

2. $b \prec a$ なら，定義により $a = \alpha_\mu(\ldots, b, \ldots)$ なる $\mu \in \Lambda$ があり，$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ でもあるから，定理 3.8.2 により $\mu = \lambda$ かつ $(\ldots, b, \ldots) = (a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$，従って $b \in \{a_1, \ldots, a_{n_\lambda}\}$ が成り立つ．逆に $b \in \{a_1, \ldots, a_{n_\lambda}\}$ なら，定義により $b \prec a$ が成り立つ．

$a_k \prec a$ であるから，$s \preceq\preceq a_k$ なら，結論 1 により $s \preceq\preceq a$ が成り立つ $(k = 1, \ldots, n_\lambda)$．従って $\bigcup_{k=1}^{n_\lambda} S^{a_k} \subseteq S^a$．そこで $s \in S^a$ と仮定する．そうすると $a = s_0 \succeq s_1 \succeq \cdots \succeq s_n = s$ なる $(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ がある．定理 3.8.2 により $a \neq s$ であるから，$a = s_{i-1} \succ s_i$ なる i があり，結論 2 前半より $s_i = a_k$ なる k があり，従って $s \in S^{a_k}$ が成り立つ．よって $S^a \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_\lambda} S^{a_k}$．

3. a の階数 n についての帰納法を使う．$n = 0$ すなわち $a \in S$ のときは，結論 1 より $S^a = \{a\}$ が成り立つからいい．そこで $n \geq 1$ と仮定する．そうすると定理 3.8.2 により，$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と表せて，$\mathrm{rk}\, a_k < n$ が成り立つ $(k = 1, \ldots, n_\lambda)$．帰納法の仮定により S^{a_k} が有限集合であって，結論 2 により $S^a = \bigcup_{k=1}^{n_\lambda} S^{a_k}$ が成り立つから，S^a も有限集合である．

問題 3.15.4 $R \subseteq S$ のとき，$S^a \subseteq R$ をみたす $a \in A$ の全体は R を含む A の台部分系であり，従って，任意の $a \in [R]_\Lambda$ に対して $S^a \subseteq R$ が成り立つ．

定理 3.15.2 各 $a \in A$ について，次の四つのことが成り立つ．

1. $$\Lambda^a = \begin{cases} \emptyset & \cdots \quad a \in S \text{ のとき} \\ \{\lambda\} \cup \bigcup_{k=1}^{n_\lambda} \Lambda^{a_k} & \cdots \quad a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \text{ のとき} \end{cases}$$

2. $\#(\Lambda^a) \le \mathrm{rk}\, a$

3. $a \in [S^a]_{\Lambda^a}$ **（Λ^a 代数系としての A における S^a の算包）**

4. Λ^a **擬写** $f, g \in A{\to}B$ **が** $f|_{S^a} = g|_{S^a}$ **をみたせば，**$fa = ga$ **が成り立つ．**

証明　**1.** $a \in S$ なら，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，定理 3.15.1 と定理 3.8.2 とにより $(\mathrm{Im}\,\alpha_\lambda)^a \subseteq \{a\}$ と $a \notin \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda$ とが成り立ち，従って $(\mathrm{Im}\,\alpha_\lambda)^a = \emptyset$ であるから，$\Lambda^a = \emptyset$ が成り立つ．そこで $a \notin S$ とする．そうすると $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と表される．定理 3.8.2 により，$a \in \mathrm{Im}\,\alpha_\mu$ なる $\mu \in \Lambda$ は λ に限る．また，$a \ne b \underline{\prec\prec} a$ なら，定理 3.15.1 の結論 2 の証明の論法により $b \underline{\prec\prec} a_k$ なる k のあることが分かる．従って $\Lambda^a \subseteq \{\lambda\} \cup \bigcup_{k=1}^{n_\lambda} \Lambda^{a_k}$ が成り立つ．逆に，$a \underline{\prec\prec} a$ であるから $\lambda \in \Lambda^a$ が成り立ち，$b \underline{\prec\prec} a_k$ なら $b \underline{\prec\prec} a$ であるから，$\Lambda^{a_k} \subseteq \Lambda^a$ が成り立つ $(k = 1, \ldots, n_\lambda)$.

2. a の階数 n についての帰納法を使う．$n = 0$ すなわち $a \in S$ なら，結論 1 により $\Lambda^a = \emptyset$，従って $\#(\Lambda^a) = 0 = n$. そこで $n \ge 1$ と仮定する．そうすると，定理 3.8.2 により $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と表されて $n = 1 + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathrm{rk}\, a_k$，従って帰納法の仮定により $\#(\Lambda^{a_k}) \le \mathrm{rk}\, a_k$ が成り立つ $(k = 1, \ldots, n_\lambda)$. 結論 1 により $\#(\Lambda^a) \le 1 + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \#(\Lambda^{a_k})$ であるから，$\#(\Lambda^a) \le n$ が成り立つ．

3. a の階数 n についての帰納法を使う．$n = 0$ すなわち $a \in S$ なら，$a \in S^a$ なので $a \in [S^a]_{\Lambda^a}$ が成り立つ．そこで $n \ge 1$ と仮定する．そうすると，定理 3.8.2 により $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda})$ と表されて $n = 1 + \sum_{k=1}^{n_\lambda} \mathrm{rk}\, a_k$，従って帰納法の仮定により $a_k \in [S^{a_k}]_{\Lambda^{a_k}}$ が成り立つ $(k = 1, \ldots, n_\lambda)$. 定理 3.15.1 と結論 1 とにより $S^{a_k} \subseteq S^a$ と $\Lambda^{a_k} \subseteq \Lambda^a$ とが成り立つことから $a_k \in [S^a]_{\Lambda^a}$ なることが分かり $(k = 1, \ldots, n_\lambda)$，これと結論 1 により $\lambda \in \Lambda^a$ なることから，$a \in [S^a]_{\Lambda^a}$ が成り立つ．

4. 問題 3.3.7 により f と g の $[S^a]_{\Lambda^a}$ への制限が等しいから，結論 3 により $fa = ga$ が成り立つ．

問題 3.15.5 $M \subseteq \Lambda$ のとき，$\Lambda^a \subseteq M$ をみたす $a \in A$ の全体は S を含む A の M 部分系であり，従って，任意の $a \in [S]_M$ に対して $\Lambda^a \subseteq M$ が成り立つ．

課題 3.15.1 たとえば $a = \alpha_\lambda(\ldots, b, \ldots, c, \ldots)$，$c = \alpha_\mu(\ldots, b, \ldots)$ の場合，b が二箇所で a に現れる．こういう「現れの箇所」の違いを弁別した「現れの理論」を作れ．

3.16　現れの自由

＄ **この節を通じて，**(A, S) **は** $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **を代数構造とする有基代数系であって，その算号系** Λ **は，基底** S **とある集合** Γ **の直和** $\Gamma \amalg S$ **上の普遍半群** $(\Gamma \amalg S)^+ = \bigcup_{n\ge1}(\Gamma \amalg S)^n$ **に含まれるものとする．** つまり，Λ の各元が $\Gamma \cup S$ の元幾つかの「積」であるとする．定義 3.15.1 に従って，半群 $(\Gamma \amalg S)^+$ において $\lambda \in \Lambda$ に現れる S の元の全体を S^λ によって表す（問題 3.15.1 参照）．さらに，Λ の各部分集合 M に対して $S^M = \bigcup_{\lambda\in M} S^\lambda$ と定める．

定義 3.16.1 $a \in A$，$s \in S$ のとき，次の 1, 2 のように定める．

1. a への s の現れ $(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ が $s \in S^\lambda$ なる任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{s_0, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda = \emptyset$ をみたすとき [53]（この条件は $s \notin S^\Lambda$ なら自明にみたされる），この現れは**自由**であると言う．
2. a への s の自由な現れがあるとき，**s は a に自由に現れる**と言い，このことを $s \ll a$ で表す．

[53]定理 3.8.2 により任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $s \notin \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda$ であるから，$s_n \notin \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda$ は常に成り立つ．

また，$a \in A$，$R \subseteq S$ のとき，$s \ll a$ なる $s \in R$ の全体を R^a_{free} で表す．さらに，$B \subseteq A$ のとき，$R^B_{\mathrm{free}} = \bigcup_{a \in B} R^a_{\mathrm{free}}$ と定める．

例 3.16.1 一階述語言語を後出の例 4.1.2 でのように普遍型付代数系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ と定義すれば，定理 3.8.5 により (A, Prm) は有基代数系であり，算号系 Λ は $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \forall x, \exists x$ と関数記号と述語記号から成る．ただし，x は変数系 Var 全体にわたり，$\mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \amalg \mathrm{Var}$ である．そこで，$\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \forall, \exists$ と関数記号と述語記号の全体を Γ とすれば，$\Lambda \subseteq (\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^+$ とみなせて，

$$\mathrm{Prm}^\lambda = \begin{cases} \emptyset & \cdots \quad \lambda \in \Lambda - \{\forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\} \text{ のとき} \\ \{x\} & \cdots \quad \lambda = \forall x, \exists x \text{ のとき } (x \in \mathrm{Var}) \end{cases}$$
$$\mathrm{Prm}^\Lambda = \mathrm{Var}$$

が成り立つ（(4.1.1) 参照）．従って $s \in \mathrm{Con}$ なら $s \notin \mathrm{Prm}^\Lambda$ であり，$s \in \mathrm{Var}$ なら，$s \in \mathrm{Prm}^\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ は $\forall s$ と $\exists s$ に限る．従って $a \in A$ への $s \in \mathrm{Prm}$ の現れ $(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ は，$s \in \mathrm{Con}$ なら自由であり，$s \in \mathrm{Var}$ なら，$\{s_0, \ldots, s_n\} \cap (\mathrm{Im}\, \forall s \cup \mathrm{Im}\, \exists s) = \emptyset$ のときに限り自由である．より具体的に，相異なる変数 x, y, z と三変数述語記号 p から出来る論理式 $a = \forall y\bigl(\exists z\bigl(p(x, y, z)\bigr)\bigr)$ に対して，$s_1 = \exists z\bigl(p(x, y, z)\bigr)$，$s_2 = p(x, y, z)$ と定めれば，列 a, s_1, s_2, x は a への x の自由な現れであり，従って $x \ll a$，すなわち x は a に自由に現れる．さらに，a への x の重複のない現れはこれに限る．同様に，列 a, s_1, s_2, y と列 a, s_1, s_2, z はそれぞれ y と z の a への唯一つの重複のない現れであるが，これらは自由ではない．従って $y \not\ll a$ と $z \not\ll a$ が成り立つ．また，a に現れる変数は x, y, z に限る．従って $\mathrm{Var}^a_{\mathrm{free}} = \{x\}$ が成り立つ．

定理 3.16.1 **$a \in A$，$s \in S^a - \bigcup_{\lambda \in \Lambda^a} S^\lambda$ であれば，a への s の現れはすべて自由である．従って，任意の $a \in A$ に対して $S^a - \bigcup_{\lambda \in \Lambda^a} S^\lambda \subseteq S^a_{\mathrm{free}}$ が成り立つ．特に，任意の $\lambda \in \Lambda^a$ に対して $S^\lambda = \emptyset$ であれば，$S^a \subseteq S^a_{\mathrm{free}}$ が成り立つ．**

証明　$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ を a への s の現れとする．このとき，$\lambda \in \Lambda$，$s \in S^\lambda$ であれば，$\lambda \notin \Lambda^a$ であるから $A^a \cap \mathrm{Im}\, \alpha_\lambda = (\mathrm{Im}\, \alpha_\lambda)^a = \emptyset$ であり，他方で $\{s_0, \ldots, s_n\} \subseteq A^a$ なので，$\{s_0, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\, \alpha_\lambda = \emptyset$ が成り立つ．つまり，$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ は自由である．

系　**任意の $a \in A$ に対して $a \in \bigl[S^a_{\mathrm{free}} \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda^a} (S^a \cap S^\lambda)\bigr]_{\Lambda^a}$ が成り立つ．**

証明　定理 3.15.2 により $a \in [S^a]_{\Lambda^a}$ が成り立つからである．

定義 3.16.2 $a \in A$，$s \in S$，$B \subseteq A$ のとき，次の 1, 2, 3 のように定める．

1. a への s の現れ $(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ が $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda \neq \emptyset$ なる任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{s_0, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\, \alpha_\lambda = \emptyset$ をみたすとき，この現れ**は B から自由である**とか，この現れ**を B は束縛しない**とか，この現れ**にとって B は自由である**とかと言う．

2. a への B から自由な s の現れがあるとき，s **は a に B から自由に現れる**と言い，このことを $s \ll_B a$ で表す．

3. a への s の自由な現れがどれも B から自由であるとき，a において s **は B から自由である** (s is free from B) とか，a において B **は s を束縛しない**とか，a において B **は s にとって自由である** (B is free for s) とかと言う [54]．

[54] 文献では三番目の言い方が一般的で，一番目の言い方と紛らわしいので注意を要する．第三項についても同様である．

また，$a \in A$, $B \subseteq A$ のとき，$s \ll_B a$ なる $s \in S$ の全体を $S^a_{\mathrm{free},B}$ で表す．ただし B が単元集合 $\{b\}$ である場合には，1, 2, 3 における B はすべて b と表記する．

例 3.16.2 例 3.16.1 を継続して論理式 $a = \forall y\bigl(\exists z\bigl(p(x,y,z)\bigr)\bigr)$ への x の自由な現れ

$$a, \quad s_1 = \exists z\bigl(p(x,y,z)\bigr), \quad s_2 = p(x,y,z), \quad x$$

について考え，y, z と異なる変数 w をとると，例 3.16.1 での説明により，$\mathrm{Prm}^w_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{Prm}^\lambda \neq \emptyset$ なる $\lambda \in \Lambda$ は $\forall w$ と $\exists w$ に限り，$\{a, s_1, s_2, x\} \cap (\mathrm{Im}\,\forall w \cup \mathrm{Im}\,\exists w) = \emptyset$ であるから，a への x の現れ a, s_1, s_2, x は w から自由である．従って $x \ll_w a$，すなわち x は a に w から自由に現れる．a への x の重複のない現れはこれだけであったから，a において x は w から自由である．他方，z と一変数関数記号 f から項 $u = f(z)$ を作ると，$z \in \mathrm{Prm}^u_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{Prm}^{\exists z}$ と $s_1 \in \mathrm{Im}\,\exists z$ が成り立つので，a への x の現れ a, s_1, s_2, x は u から自由ではない．a への x の重複のない現れは a, s_1, s_2, x に限ったから，$x \not\ll_u a$，すなわち x は a に u から自由には現れない．また，この現れは自由であったから，a において x は u から自由ではない．同様に，x は a に z から自由には現れず，a において x は z から自由ではない．

問題 3.16.1 $a \in A$, $s \in S$, $B \subseteq A$ のとき，次のことが成り立つ．

1. a への s の現れ $(s_i)_{i=0,\dots,n}$ が B から自由であるためには，$(s_i)_{i=0,\dots,n}$ が各 $b \in B$ から自由であることが必要十分である．

2. a において s が B から自由であるためには，a において s が各 $b \in B$ から自由であることが必要十分である．

3. a において s が B から自由であって A の部分集合 C が任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $S^C_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda \subseteq S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda$ をみたせば，a において s は C から自由である．

4. $s \ll_B a$ であって A の部分集合 C が任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $S^C_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda \subseteq S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda$ をみたせば，$s \ll_C a$ が成り立つ．

略解　任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \bigcup_{b \in B}(S^b_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda)$ が成り立つ．従って，$(s_i)_{i=0,\dots,n}$ が B から自由であるためには，各 $b \in B$ と $S^b_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda \neq \emptyset$ なる任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{s_0, \dots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda = \emptyset$ をみたすことが，つまり，$(s_i)_{i=0,\dots,n}$ が各 $b \in B$ から自由であることが必要十分である．

定理 3.16.2 各 $s \in S$ について，次の三つのことが成り立つ．

1. **$a \in S$ への s の現れ $(s_i)_{i=0,\dots,n}$ は，$a = s$ のときに限り存在して $s_i = a$ $(i = 0, \dots, n)$ をみたし，それら現れは，自由であって各 $B \subseteq A$ に対して B から自由である．**

2. **$S^s_{\mathrm{free}} = \{s\}$ が成り立ち，各 $B \subseteq A$ に対して $S^s_{\mathrm{free},B} = \{s\}$ が成り立つ．**

3. **$a \in A$ への s の現れが自由であるためには，s から自由であることが必要十分である．**

証明　1. s への s の現れはある．$(s_i)_{i=0,\dots,n}$ が $a \in S$ への s の現れであれば，定理 3.15.1 により $s_i = a$ $(i = 0, \dots, n)$ が成り立ち，従って $a = s$ であり，定理 3.8.2 により，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{s_0, \dots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda = \emptyset$ が成り立つ．従ってこの現れは自由であって B から自由である．

2. 結論 1 により $s \in S^s_{\mathrm{free}}$ が成り立つ．S^s_{free} は S^s に含まれ，定理 3.15.1 により $S^s = \{s\}$ である．従って $S^s_{\mathrm{free}} = \{s\}$ が成り立つ．$S^a_{\mathrm{free},B}$ についても同様である．

3. 結論 2 により，a への s の現れ $(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ が s から自由であるためには，$\{s\} \cap S^\lambda \neq \emptyset$ なる任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{s_0, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda = \emptyset$ の成り立つことが必要十分である．$\{s\} \cap S^\lambda \neq \emptyset$ なることは，$s \in S^\lambda$ なることと同等である．従って，$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ が s から自由であることは，$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ が自由であることと同等である．

系　$s \in S$，$a \in A$ **のとき，**$s \ll a$ **なることと** $s \ll_s a$ **なることは同等である．**

証明　$s \ll a$ なら，a への s の自由な現れがあり，それが定理により s から自由であるから，$s \ll_s a$ が成り立つ．逆についても同様である．

定理 3.16.3　$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j) \in A$，$s \in S$，$B \subseteq A$ **とする．**$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ **が** a **への** B **から自由で重複のない** s **の現れであれば，**$n \geq 1$ **であって次の二条件が成り立つ．**

1. $(s_i)_{i=1,\ldots,n}$ **は（**i **の範囲に注意），ある** a_k $(k \in \{1, \ldots, j\})$ **への** B **から自由な** s **の現れである．**
2. $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$

逆に，この二条件が成り立てば，$s_0 = a$ **と定めるとき，**$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ **は（**i **の範囲に注意），**a **への** B **から自由な** s **の現れである．**

証明　前半：定理 3.8.2 により $a \neq s$，従って $n \geq 1$ で $s_1 \neq a$ であるから，定理 3.15.1 により $s_1 = a_k$ なる k があり，従って $(s_i)_{i=1,\ldots,n}$ は a_k への s の現れである．$S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\mu \neq \emptyset$ なる $\mu \in \Lambda$ に対して $\{s_1, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\mu \subseteq \{s_0, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\mu = \emptyset$ であるから，この現れは B から自由である．また，$s_0 = a \in \{s_0, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda$ であるから条件 2 が成り立つ．

後半：$S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\mu \neq \emptyset$ かつ $s_0 \in \mathrm{Im}\,\alpha_\mu$ なる $\mu \in \Lambda$ は無い．なぜなら，そういう μ があると，$a \in \mathrm{Im}\,\alpha_\lambda \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\mu$ であるから定理 3.8.2 により $\lambda = \mu$，従って $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda \neq \emptyset$ となって条件 2 に反する．このことと条件 1 により，$S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\mu \neq \emptyset$ なる $\mu \in \Lambda$ に対して $\{s_0, \ldots, s_n\} \cap \mathrm{Im}\,\alpha_\mu = \emptyset$ が成り立つ．つまり，$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ は a への B から自由な s の現れである．

系　$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j) \in A$，$B \subseteq A$ **のとき，次の式が成り立つ．**

$$S^a_{\mathrm{free},B} = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{j} S^{a_k}_{\mathrm{free},B} & \cdots \quad S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset \text{ のとき} \\ \emptyset & \cdots \quad S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda \neq \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

証明　$s \in S$ とする．そうすると $a \neq s$ だから，a への s の現れがあれば，それから重複する元を取り除いて重複の無い現れを作ることができる．従って定理 3.16.3 により，$s \ll_B a$ なるためには

1. $s \ll_B a_k$ なる $k \in \{1, \ldots, j\}$ がある　　2. $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$

なる二条件をみたすことが必要十分である．これから系の式が得られる．

系 2　$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}) \in A$，$s \in S$ **とする．**$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ **が** a **への** s **の自由で重複のない現れであれば，**$n \geq 1$ **であって次の二条件が成り立つ．**

1. $(s_i)_{i=1,\ldots,n}$ **はある** a_k $(k \in \{1, \ldots, n_\lambda\})$ **への** s **の自由な現れである．**

2. $s \notin S^\lambda$

逆に，この二条件が成り立てば，$s_0 = a$ **と定めるとき，**$(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ **は** a **への** s **の自由な現れである．**

証明　定理 3.16.2 によれば，A の元への s の現れが自由であるためには s から自由であることが必要十分である．定理 3.16.2 により $S^s_{\mathrm{free}} = \{s\}$ であるから，条件 2 は $S^s_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ と同等である．従ってこの系は，定理 3.16.3 において $B = \{s\}$ としたものに他ならない．

問題 3.16.2 $B \subseteq A$，$R \subseteq S$ のとき，$S^a_{\mathrm{free},B} \subseteq R$ をみたす $a \in A$ の全体は R を含む A の台部分系であり，従って，$a \in [R]_\Lambda$ なら $S^a_{\mathrm{free},B} \subseteq R$ が成り立つ．

定理 3.16.4 $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j) \in A$ **のとき，**$S^a_{\mathrm{free}} = S^{\{a_1,\ldots,a_j\}}_{\mathrm{free}} - S^\lambda$ **が成り立つ．つまり，**S **の元が** a **に自由に現れるためには，**$a_1, \ldots, a_j$ **のどれかに自由に現れて** λ **には現れないことが必要十分である．**

証明　定理 3.16.3 系の証明に記した通り，$s \in S$ が $s \ll_s a$ をみたすためには

1. $s \ll_s a_k$ なる $k \in \{1, \ldots, j\}$ がある
2. $S^s_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$

なる二条件をみたすことが必要十分である．また，定理 3.16.3 系 2 の証明に記した通り，$\ll_s$ は $\ll$ と書き換えられ，条件 2 は $s \notin S^\lambda$ と同等である．従ってこの定理が成り立つ．

問題 3.16.3 $R \subseteq S$ のとき，$S^a_{\mathrm{free}} \subseteq R$ をみたす $a \in A$ の全体は R を含む A の台部分系であり，従って，$a \in [R]_\Lambda$ なら $S^a_{\mathrm{free}} \subseteq R$ が成り立つ．

定理 3.16.5 $a \in A$，$s \in S$，$B \subseteq A$ **であって次の三条件のいずれかが成り立てば，**a **において** s **は** B **から自由である．**

1. $s \not\ll a$　　**2.** $a \in S$　　**3.** $B = \{s\}$

証明　$s \not\ll a$ なら，a への s の自由な現れが無いから，定義 3.16.2 の 3 の条件が自明に成り立つ．条件 2 または 3 の下では，定理 3.16.2 により，a への s の自由な現れは B から自由である．

定理 3.16.6 $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j) \in A$，$s \in S$，$B \subseteq A$ **とするとき，**a **において** s **が** B **から自由であるためには，**s **が** a **に自由に現れないか次の二条件の成り立つことが必要十分である．**

1. 各 a_k **において** s **は** B **から自由である** $(k \in \{1, \ldots, j\})$**．**

2. $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$

証明　$s \not\ll a$ なら，定理 3.16.5 により，a において s は B から自由である．従って，$s \ll a$ と仮定して，a において s が B から自由であることと条件 1, 2 とが同等であることを示せばいい．$a \neq s \ll a$ であるから，a への自由で重複のない s の現れがある．従って，定理 3.16.3 系 2 または定理 3.16.4 により，$s \notin S^\lambda$ が成り立つ．

まず，a において s が B から自由であると仮定する．そうすると，存在した a への自由で重複のない s の現れは B から自由であり，従って定理 3.16.3 により条件 2 が成り立つ．条件 1 が成り立つ

ことを示すために，$(s_i)_{i=1,\dots,n}$ を a_k への s の自由な現れとする．そうすると，$s \notin S^\lambda$ であったから，$s_0 = a$ と定めれば $(s_i)_{i=0,\dots,n}$ は，定理 3.16.3 系 2 により a への s の自由な現れであり，従って仮定により B から自由である．つまり，$\mu \in \Lambda$, $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\mu \neq \emptyset$ なら，$\{s_0, \dots, s_n\} \cap \operatorname{Im} \alpha_\mu = \emptyset$ が成り立つ．そういう μ に対しては $\{s_1, \dots, s_n\} \cap \operatorname{Im} \alpha_\mu = \emptyset$ も当然成り立つ．つまり，$(s_i)_{i=1,\dots,n}$ も B から自由である．従って条件 1 が成り立つ．

次に，条件 1, 2 が成り立つと仮定し，a において s が B から自由であることを示すために，a への s の自由な現れ $(s_i)_{i=0,\dots,n}$ と $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\mu \neq \emptyset$ なる $\mu \in \Lambda$ とを任意にとって $\{s_0, \dots, s_n\} \cap \operatorname{Im} \alpha_\mu = \emptyset$ を示そう．そのためには，この現れに重複がないとしていい．このとき，定理 3.16.3 系 2 により $n \geq 1$ であって $(s_i)_{i=1,\dots,n}$ がある a_k への s の自由な現れであるから，条件 1 によりこの現れは B から自由であり，従って $\{s_1, \dots, s_n\} \cap \operatorname{Im} \alpha_\mu = \emptyset$ が成り立つ．また，条件 2 により $\lambda \neq \mu$ であるから，定理 3.8.2 により $s_0 \notin \operatorname{Im} \alpha_\mu$ が成り立つ．これで $\{s_0, \dots, s_n\} \cap \operatorname{Im} \alpha_\mu = \emptyset$ が示された．

系　$a = \alpha_\lambda(a_1, \dots, a_j) \in A$, $s \in S - S^\lambda$, $B \subseteq A$ **であって** a **において** s **が** B **から自由であれば，各** a_k **において** s **は** B **から自由である** $(k = 1, \dots, j)$**．**

証明　a において s が B から自由であれば，定理により $s \not\ll a$ であるか，または，各 a_k において s が B から自由である．$s \not\ll a$ の場合でも，$s \notin S^\lambda$ と仮定しているから，定理 3.16.4 により $s \not\ll a_k$ であり，従って a_k において s は B から自由である．

定理 3.16.7　$a \in A$, $B \subseteq A$ **であって** $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^{\Lambda^a} = \emptyset$ **が成り立てば（つまり** B **の元に自由に現れる** S **の元が** a **に現れる算号に現れなければ），** a **において任意の** $s \in S$ **は** B **から自由である．**

証明　$n = \operatorname{rk} a$ についての帰納法を使う．$n = 0$ すなわち $a \in S$ のときは，定理 3.16.5 によりこの定理の結論が成り立つ．$n \geq 1$ のときには，定理 3.8.2 により $a = \alpha_\lambda(a_1, \dots, a_j)$ と表されて $\operatorname{rk} a_k < n$ が成り立ち $(k = 1, \dots, j)$，定理 3.15.2 により $\Lambda^{a_k} \subseteq \Lambda^a$ が成り立つ．従って帰納法の仮定により，各 a_k において任意の $s \in S$ は B から自由である．$\lambda \in \Lambda^a$ であるから，仮定により $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ も成り立つ．従って定理 3.16.6 により，この定理の結論が成り立つ．

定理 3.16.8 (✓)　$(a_i)_{i \in I}$ **を** A **の元の族とし，** $(s_i)_{i \in I}$ **を** S **の元の族とし，任意の** $i \in I$ **に対して** a_i **において** s_i **を束縛しない** $b \in A$ **の全体を** B **で表す．このとき，** B **は** A **の台部分系であって，** $M = \{\lambda \in \Lambda \mid S^\lambda = \emptyset\}$, $R = S \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda - M} \operatorname{Im} \alpha_\lambda$ **と定めれば，** B_M **は** $R \cap B$ **上の有基代数系である．**

証明　$b = \alpha_\lambda(b_1, \dots, b_j)$, $b_1, \dots, b_j \in B$ と仮定する．さらに，任意の $i \in I$ をとる．このとき問題 3.16.1 により，a_i において $\{b_1, \dots, b_j\}$ は s_i を束縛しない．また定理 3.16.4 により，$S^b_{\mathrm{free}} \subseteq S^{\{b_1, \dots, b_j\}}_{\mathrm{free}}$ が成り立つ．従って再び問題 3.16.1 により，a_i において b は s_i を束縛しない．これは $b \in B$ を示すから，B は A の台部分系である．

定理 3.8.3 系により A_M は R 上の有基代数系である．従って，B_M の算法余白を Q で表せば，定理 3.8.3 により B_M は Q 上の有基代数系である．従って $R \cap B = Q$ なることを示せばいいが，(A_M, R) が有基代数系であることから $R \cap B \subseteq Q$ なることが分かる．逆に $R \cap B \supseteq Q$ なることを示すために，任意の $b \in B - R \cap B$ をとる．このとき，$b = \alpha_\mu(c_1, \dots, c_j)$ なる $\mu \in M$ と $c_1, \dots, c_j \in A$ が存在し，$S^\mu = \emptyset$ なので，定理 3.16.4 により $S^{c_k}_{\mathrm{free}} \subseteq S^b_{\mathrm{free}}$ が成り立つ $(k = 1, \dots, j)$．従って問題 3.16.1 により，任意の $i \in I$ に対し，a_i において c_k は s_i を束縛しない．すなわち $c_k \in B$ であるから，$b \in B - Q$ が成り立つ．これで $R \cap B \supseteq Q$ なることが示せた．

3.17　代入と現れ

$ **この節を通じて，**(A, T, σ, S) **は** $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ **を代数構造とする普遍型付代数系であって，**Λ **は素元系** S **とある集合** Γ **によって定まる普遍半群** $(\Gamma \amalg S)^+ = \bigcup_{n\geq 1}(\Gamma \amalg S)^n$ **に含まれるものとする**．定理 3.8.5 により (A, S) は有基代数系であるから，第 3.8 節や第 3.16 節などの事柄を使うことができる．このことにより，以下の定義と議論が可能になる．

定義 3.17.1 $s_1, \ldots, s_n$ は A の相異なる素元とし，c_i は s_i と同型の A の元とする $(i = 1, \ldots, n)$．このとき，各 $a \in A$ に対して a と同型の A の元

$$a\left(\frac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right)$$

を下記のように定義し，これを，a **において** s_i **に** c_i **を代入して得られる元**と呼ぶ．従って記号

$$\left(\frac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right)$$

は，A から A への保型写像を表すものとみなされる．この写像を**代入**と呼ぶ．なお，この代入の記号を $(s_1, \ldots, s_n/c_1, \ldots, c_n)$ または (s_i/c_i) と書くことがある．

$a(s_1, \ldots, s_n/c_1, \ldots, c_n)$ の定義は，n と a の階数 r についての二重帰納法で行なう．すなわち，便宜上 $n = 0$ の場合を考え，この場合には代入は恒等写像であるとする．そして，まず一個の元の代入 $a(s/c)$ を $\mathrm{rk}\, a = 0$, $\mathrm{rk}\, a = 1$, ... の順に定め，次に二個の元の代入 $a(s_1, s_2/c_1, c_2)$ を $\mathrm{rk}\, a = 0$, $\mathrm{rk}\, a = 1$, ... の順に定め，次に三個の元の代入...，という順にやって行く．

そこで $n \geq 1$ とする．まず，$r = 0$ すなわち a が素元のときには，

$$a\left(\frac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right) = \begin{cases} c_i & \cdots \quad a = s_i \text{ のとき } (i = 1, \ldots, n) \\ a & \cdots \quad a \notin \{s_1, \ldots, s_n\} \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.17.1}$$

と定義する．$s_1, \ldots, s_n$ が相異なるからこの定義は可能であり，c_i が s_i と同型だから，いま定義した元は a と同型である．

$r \geq 1$ のときは，$a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ と一意に書けて $\sum_{k=1}^{j} \mathrm{rk}\, a_k = r - 1$ が成り立つ．また，

$$\{s_1, \ldots, s_n\} - S^\lambda = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}\} \qquad\qquad i_1 < \cdots < i_m$$

なる番号 $i_1, \ldots, i_m$ がある $(0 \leq m \leq n)$．そこで，

$$a\left(\frac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right) = \alpha_\lambda\left(a_1\left(\frac{s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}}{c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}}\right), \ldots, a_j\left(\frac{s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}}{c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}}\right)\right) \tag{3.17.2}$$

と定義する．$a_k\left(\frac{s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}}{c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}}\right)$ は，$m < n$ の場合は n についての帰納法により，また $m = n$ の場合は r についての帰納法により，共に既に定義されており，いずれの場合も a_k と同型である $(k = 1, \ldots, j)$．従って問題 3.4.4 により，(3.17.2) の右辺は確かに存在して a と同型である．

これで帰納法による代入の定義が完了した．最後に，**代入** (s_i/c_i) **は，**$s_1, \ldots, s_n$ **が** A **の相異なる素元であって** c_i **が** s_i **と同型の** A **の元である場合にだけ定義した**ことを改めて強調しておく．代入 (s_i/c_i) についてのこういう要件は，以後の説明では一々記さない．

なお，この定義では，$s_1, \ldots, s_n$ は素元でなくても構わないように見える．しかし，$s_1, \ldots, s_n$ が素元とは限らない場合を含めて代入を有意義に定義するためには，定義法を変えなくてはならない（課題 3.17.2 参照）．

注意 3.17.1 いま定義した代入は，厳密には**同時代入**と呼ぶべきものであり，**逐次代入**とは区別しなければならない．つまり，次の式は一般には成り立たない（定理 3.17.4 参照）．

$$a\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)=a\left(\frac{s_1}{c_1}\right)\cdots\left(\frac{s_n}{c_n}\right)$$

実際，A を一階述語言語とし，x, y, z を相異なる素項とし，d を項とし，f, g を二変数関数記号として $a=f(x,y)$，$c=g(y,z)$ と定めれば，(3.17.1) と (3.17.2) により

$$\begin{aligned}
&a\left(\frac{x,y}{c,d}\right)=f\left(x\left(\frac{x,y}{c,d}\right),y\left(\frac{x,y}{c,d}\right)\right)=f(c,d)=f(g(y,z),d)\\
&a\left(\frac{x}{c}\right)\left(\frac{y}{d}\right)=f\left(x\left(\frac{x}{c}\right),y\left(\frac{x}{c}\right)\right)\left(\frac{y}{d}\right)=f(c,y)\left(\frac{y}{d}\right)=f\left(c\left(\frac{y}{d}\right),y\left(\frac{y}{d}\right)\right)=f\left(c\left(\frac{y}{d}\right),d\right)\\
&c\left(\frac{y}{d}\right)=g\left(y\left(\frac{y}{d}\right),z\left(\frac{y}{d}\right)\right)=g(d,z)
\end{aligned}$$

従って，$y\neq d$ であれば $a\left(\frac{x,y}{c,d}\right)\neq a\left(\frac{x}{c}\right)\left(\frac{y}{d}\right)$ となる．

例 3.17.1 例 3.16.1 で使った一階述語言語 A の論理式

$$a=\forall y\big(\exists z\big(p(x,y,z)\big)\big)$$

に代入 $\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)$ を施してみる．ただし，代入の要件により u, v, w は項である．$a'=\exists z\big(p(x,y,z)\big)$ と定めれば，$a=\forall y\, a'$，$\{x,y,z\}-\mathrm{Prm}^{\forall y}=\{x,z\}$ であるから，(3.17.2) により

$$a\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)=\forall y\left(a'\left(\frac{x,z}{u,w}\right)\right)$$

$a''=p(x,y,z)$ と定めれば，$a'=\exists z\, a''$，$\{x,z\}-\mathrm{Prm}^{\exists z}=\{x\}$ であるから，(3.17.2) により

$$a'\left(\frac{x,z}{u,w}\right)=\exists z\left(a''\left(\frac{x}{u}\right)\right)$$

$a''=p(x,y,z)$，$\{x\}-\mathrm{Prm}^{p}=\{x\}$ であるから，(3.17.2) により

$$a''\left(\frac{x}{u}\right)=p\left(x\left(\frac{x}{u}\right),y\left(\frac{x}{u}\right),z\left(\frac{x}{u}\right)\right)$$

(3.17.1) により $x\left(\frac{x}{u}\right)=u$，$y\left(\frac{x}{u}\right)=y$，$z\left(\frac{x}{u}\right)=z$，従って

$$a\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)=\forall y\big(\exists z\big(p(u,y,z)\big)\big)$$

つまり，x, y, z の中の a に自由に現れる x だけを u に置き換えた論理式が $a\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)$ である（補題 3.17.2 参照）．なお，例 3.16.2 のように $u=f(z)$ とすれば，$a\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)=\forall y\big(\exists z\big(p(f(z),y,z)\big)\big)$ となり，u には自由に現れていた z が $a\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)$ には自由に現れない．これは，例 3.16.2 に記したように x が a に z から自由に現れないからである（定理 3.17.1 参照）．

補題 3.17.1 $a=\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j)$，$s_i\in S^\lambda$ **であれば次の式が成り立つ** $(i=1,\ldots,n)$**．**

$$a\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)=a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_n}\right)$$

証明　$\{s_1,\ldots,s_n\}-S^\lambda=\{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n\}-S^\lambda$ が成り立つからである．

定理 3.17.1 $a \in A$, $s \in S$ **とするとき，**$s \ll a\left(\dfrac{s_1,\dots,s_n}{c_1,\dots,c_n}\right)$ **が成り立つためには，次の二条件のいずれかの成り立つことが必要十分である．**

1. $s_i \ll_{\{s,s_i\}} a$ **かつ** $s \ll c_i$ **なる** $i \in \{1,\dots,n\}$ **がある．**

2. $s \ll a$ **かつ** $s \notin \{s_1,\dots,s_n\}$

証明　n と $r = \operatorname{rk} a$ についての帰納法を使う．$b = a\left(\dfrac{s_1,\dots,s_n}{c_1,\dots,c_n}\right)$ と定める．$n = 0$ のときは，$b = a$ であり条件 1 は空虚であって条件 2 は $s \ll a$ を意味するからいい．そこで $n \geq 1$ と仮定する．

(1) $r = 0$ **の場合：**$a \in S$ である．

(1.1) 必要性：$s \ll b$ と仮定する．$a = s_i$ なる i があれば，定理 3.16.2 により $s_i \ll_{\{s,s_i\}} a$ が成り立ち，代入の定義 (3.17.1) により $b = c_i$ だから，条件 1 が成り立つ．$a \notin \{s_1,\dots,s_n\}$ なら，(3.17.1) により $b = a$，従って $s \ll a$ なので，定理 3.16.2 により $s = a$ であり，条件 2 が成り立つ．

(1.2) 十分性：条件 1 が成り立てば，$s_i \ll_{\{s,s_i\}} a$ なることから定理 3.16.2 により $a = s_i$，従って (3.17.1) により $b = c_i$ なので，$s \ll c_i$ なることにより $s \ll b$ が成り立つ．条件 2 が成り立てば，$s \ll a$ なることから定理 3.16.2 により $a = s$，従って $a \notin \{s_1,\dots,s_n\}$ なので，(3.17.1) により $b = a = s$ であり，定理 3.16.2 により $s \ll b$ が成り立つ．

(2) $r \geq 1$ **の場合：**$a = \alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \operatorname{rk} a_k = r-1$ が成り立つ．

(2.1) $\{s_1,\dots,s_n\} \cap S^\lambda = \emptyset$ **の場合：**$b_k = a_k\left(\dfrac{s_1,\dots,s_n}{c_1,\dots,c_n}\right)$ $(k = 1,\dots,j)$ と定めれば，代入の定義 (3.17.2) により $b = \alpha_\lambda(b_1,\dots,b_j)$ が成り立つ．

(2.1.1) 必要性：$s \ll b$ とすれば，定理 3.16.4 により，$s \notin S^\lambda$ であって $s \ll b_k$ なる k がある．これと r についての帰納法の仮定により，次の二条件のいずれかが成り立つ．

1k. $s_i \ll_{\{s,s_i\}} a_k$ かつ $s \ll c_i$ なる $i \in \{1,\dots,n\}$ がある．

2k. $s \ll a_k$ かつ $s \notin \{s_1,\dots,s_n\}$

$\{s,s_i\} \cap S^\lambda = \emptyset$ であって定理 3.16.2 により $\{s,s_i\} = S_{\mathrm{free}}^{\{s,s_i\}}$ であるから，条件 1k が成り立てば，定理 3.16.3 系により条件 1 が成り立つ．$s \notin S^\lambda$ であったから，条件 2k が成り立てば，定理 3.16.4 により条件 2 が成り立つ．

(2.1.2) 十分性：条件 1 が成り立てば，$s_i \ll_{\{s,s_i\}} a$ なることから定理 3.16.2 と定理 3.16.3 系により $\{s,s_i\} \cap S^\lambda = \emptyset$ であって $s_i \ll_{\{s,s_i\}} a_k$ なる k のあることが分かり，これと $s \ll c_i$ なることから帰納法の仮定により $s \ll b_k$ が得られ，これと $s \notin S^\lambda$ であったことから定理 3.16.4 により $s \ll b$ が得られる．

条件 2 が成り立てば，$s \ll a$ なることから定理 3.16.4 により $s \notin S^\lambda$ であって $s \ll a_k$ なる k のあることが分かり，これと $s \notin \{s_1,\dots,s_n\}$ なることから帰納法の仮定により $s \ll b_k$ が得られ，これと $s \notin S^\lambda$ であったことから定理 3.16.4 により $s \ll b$ が得られる．

(2.2) $s_h \in S^\lambda$ **なる** h **がある場合：**補題 3.17.1 により次の式が成り立つ．

$$b = a\left(\frac{s_1,\dots,s_{h-1},s_{h+1},\dots,s_n}{c_1,\dots,c_{h-1},c_{h+1},\dots,c_n}\right)$$

(2.2.1) 必要性：$s \ll b$ なら，(3.17.2) により $b \in \operatorname{Im} \alpha_\lambda$ であるから定理 3.16.4 により $s \notin S^\lambda$，従って $s \neq s_h$ であって，n についての帰納法の仮定により，次のいずれかの条件が成り立つ．

1′. $s_i \ll_{\{s,s_i\}} a$ かつ $s \ll c_i$ なる $i \in \{1,\dots,h-1,h+1,\dots,n\}$ がある．

$2'$. $s \ll a$ かつ $s \notin \{s_1, \ldots, s_{h-1}, s_{h+1} \ldots, s_n\}$

条件 $1'$ が成り立てば，明らかに条件 1 が成り立つ．条件 $2'$ が成り立てば，$s \neq s_h$ であったから条件 2 が成り立つ．

(2.2.2) 十分性： 条件 1 が成り立つ場合，$s_i \ll_{\{s,s_i\}} a$ なることから定理 3.16.2 と定理 3.16.3 系により $\{s, s_i\} \cap S^\lambda = \emptyset$，特に $i \neq h$ であり，従って条件 $1'$ が成り立つ．条件 2 が成り立つ場合，明らかに条件 $2'$ が成り立つ．いずれの場合でも，n についての帰納法の仮定により $s \ll b$ が成り立つ．

系　$a \in A$，$b = a\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right)$ **なら** $S^b_{\text{free}} \subseteq S^{\{c_1,\ldots,c_n\}}_{\text{free}} \cup \left(S^a_{\text{free}} - \{s_1, \ldots, s_n\}\right)$ **が成り立つ．**

課題 3.17.1 $a \in A$，$b = a\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right)$，$B \subseteq A$ のとき，定理 3.17.1 と系に倣って $S^b_{\text{free},B}$ について考えよ．

定理 3.17.2 $a \in A$，$s \in S$，$B \subseteq A$ **とするとき，** $a\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right)$ **において** s **が** B **から自由であるためには，** $s \not\ll a\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right)$ **であるか次の二条件の成り立つことが必要十分である．**

1. $s \ll c_i$ **であって** a **への** $\{s, s_i\}$ **から自由な** s_i **の現れがあれば，その現れは** B **からも自由であって** c_i **において** s **は** B **から自由である** $(i = 1, \ldots, n)$**．**

2. $s \notin \{s_1, \ldots, s_n\}$ **なら，** a **において** s **は** B **から自由である．**

証明　n と $r = \mathrm{rk}\, a$ についての帰納法を使う．$n \geq 1$ と仮定していい．$b = a(s_i/c_i)$ と定める．$s \not\ll b$ なら，定理 3.16.5 により b において s は B から自由である．従って，$s \ll b$ と仮定した上で，b において s が B から自由であることと条件 1, 2 とが同等であることを示せばいい．

(1) $r = 0$ **の場合：** $a \in S$ であり，定理 3.16.5 により条件 2 が成り立つ．従って，b において s が B から自由であるためには条件 1 が必要十分であることを示せばいい．

(1.1) 必要性： b において s が B から自由であると仮定する．さらにある i に対して，a への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れがあると仮定する．そうすると，定理 3.16.2 により $a = s_i$ が成り立ち，代入の定義 (3.17.1) により $b = c_i$ であり，従って c_i において s は B から自由である．定理 3.16.2 により a への s_i の現れは B から自由である．従って条件 1 が成り立つ．

(1.2) 十分性： $a \notin \{s_1, \ldots, s_n\}$ なら，(3.17.1) により $b = a \in S$ だから，定理 3.16.5 により b において s は B から自由である．そこで，$a = s_i$ なる i があると仮定する．そうすると，まず定理 3.16.2 により，a への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れがある．次に，(3.17.1) により $b = c_i$ であり，さらに，$s \ll b$ と仮定していたから $s \ll c_i$ が成り立つ．従って条件 1 が成り立てば，b において s は B から自由である．

(2) $r \geq 1$ **の場合：** $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \mathrm{rk}\, a_k = r - 1$ が成り立つ．

(2.1) $\{s_1, \ldots, s_n\} \cap S^\lambda = \emptyset$ **の場合：** $b_k = a_k(s_i/c_i)$　$(k = 1, \ldots, j)$ と定めれば，代入の定義 (3.17.2) により $b = \alpha_\lambda(b_1, \ldots, b_j)$ が成り立つ．$s \ll b$ と仮定していたから $s \notin S^\lambda$ が成り立つ．

(2.1.1) 必要性： b において s が B から自由であると仮定する．そうすると，$s \ll b$ とも仮定していたから，定理 3.16.6 により，$S^B_{\text{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ であって各 b_k において s は B から自由である．従って帰納法の仮定により，各 k に対して，$s \not\ll b_k$ であるか次の二条件が成り立つ．

1k. $s \ll c_i$ であって a_k への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れがあれば，その現れは B からも自由であって c_i において s は B から自由である $(i = 1, \ldots, n)$.

2k. $s \notin \{s_1, \dots, s_n\}$ なら，a_k において s は B から自由である．

$s \not\ll b_k$ なら，定理 3.17.1 により次の二条件が成り立つ．

1′k. $s \ll c_i$ かつ $s_i \ll_{\{s,s_i\}} a_k$ なる $i \in \{1, \dots, n\}$ はない．

2′k. $s \notin \{s_1, \dots, s_n\}$ なら $s \not\ll a_k$（従って定理 3.16.5 により a_k において s は B から自由）．

従って，各 k について条件 1k, 2k が成り立つ．

条件 1 が成り立つことを示すために，$s \ll c_i$ であって a への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れがあると仮定する．この現れには重複が無いとしていい．そうすると定理 3.16.3 により，この現れの先頭の a を取り除いたものは，ある a_k への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れである．従って条件 1k により，この新しい現れは B からも自由であって c_i において s は B から自由である．$S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ であったから，再び定理 3.16.3 により，もとの現れも B から自由である．従って条件 1 が成り立つ．

次に，条件 2 が成り立つことを示すために，$s \notin \{s_1, \dots, s_n\}$ と仮定する．そうすると，条件 2k により，各 a_k において s は B から自由である．$S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ であったから，定理 3.16.6 により，a においても s は B から自由である．従って条件 2 が成り立つ．

(2.1.2) 十分性：条件 1, 2 がみたされると仮定する．そしてまず，条件 1k, 2k が成り立つことを示そう．まず条件 1k について考える．そこで，$s \ll c_i$ であって a_k への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れがあると仮定する．$S^{\{s,s_i\}}_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \{s, s_i\} \cap S^\lambda = \emptyset$ であったから，定理 3.16.3 により，この現れの先頭に a を付け加えたものは a への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れである．従って条件 1 により，c_i において s は B から自由であり，新しい現れは B からも自由である．従って，もとの現れも B からも自由である．これで a_k が条件 1 をみたすことが分かった．次に条件 2k について考える．そこで，$s \notin \{s_1, \dots, s_n\}$ と仮定する．そうすると，条件 2 により a において s は B から自由であり，$s \notin S^\lambda$ であったから，定理 3.16.6 系により，各 a_k においても s は B から自由である．これで a_k が条件 2k をみたすことも分かった．

条件 1k, 2k が各 k について成り立つから，帰納法の仮定により各 b_k において s は B から自由である．従って $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ なら，定理 3.16.6 により，b においても s は B から自由である．そこで，$S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ を背理法で証明するために，$S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda \neq \emptyset$ と仮定する．そうすると定理 3.16.6 により，a において s が B から自由であるためには $s \not\ll a$ でなくてはならない．従って条件 2 により，$s \in \{s_1, \dots, s_n\}$ または $s \not\ll a$ が成り立つ．つまり，定理 3.17.1 の条件 2 が成り立たない．そうすると，$s \ll b$ と仮定していたから，定理 3.17.1 の条件 1 が成り立たなくてはならず，ある $i \in \{1, \dots, n\}$ について，$s \ll c_i$ であって a への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れが実際に存在する．条件 1 によりこの現れは B からも自由であるから，定理 3.16.3 系により $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda = \emptyset$ でなければならない．これは矛盾である．

(2.2) $s_h \in S^\lambda$ なる h がある場合：補題 3.17.1 により次の式が成り立つ．

$$b = a\left(\frac{s_1, \dots, s_{h-1}, s_{h+1}, \dots, s_n}{c_1, \dots, c_{h-1}, c_{h+1}, \dots, c_n}\right)$$

(2.2.1) 必要性：b において s が B から自由であれば，$s \ll b$ と仮定していたから，n についての帰納法の仮定により，条件 1, 2 において $1, \dots, n$ を $1, \dots, h-1, h+1, \dots, n$ で置き換えた条件が成り立つ．$s_h \in S^{\{s,s_h\}}_{\mathrm{free}} \cap S^\lambda$，従って $s_h \not\ll_{\{s,s_h\}} a$ であるから，条件 1, 2 が自明に成り立つ．

(2.2.2) 十分性：$s_1, \dots, s_n$ についての条件と見た条件 1 は自明に $s_1, \dots, s_{h-1}, s_{h+1}, \dots, s_n$ へ遺伝する．$s_h \in S^\lambda$ なる仮定により $s_h \not\ll a$ であり，従って定理 3.16.5 により，s_h は a において B から自由である．従って条件 2 も遺伝する．従って条件 1, 2 が成り立てば，n についての帰納法の仮定により，b において s は B から自由である．

系　$a \in A,\ s \in S,\ B \subseteq A$ **であって次の二条件が成り立てば，** $a\left(\dfrac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)$ **において** s **は** B **から自由である．**

1. a **において** s **と** s_i **は** B **から自由である** $(i = 1,\ldots,n)$**．**
2. c_i **において** s **は** B **から自由である** $(i = 1,\ldots,n)$**．**

証明　定理 3.17.2 の条件 1, 2 のみたされることを示せばいい．条件 2 は本系の条件 1 によりみたされる．そこで条件 1 について調べるために，a への $\{s, s_i\}$ から自由な s_i の現れがあると仮定する．そうすると，問題 3.16.1 と定理 3.16.2 によりその現れは a への s_i の自由な現れであるから，本系の条件 1 によりその現れは B から自由である．このことと本系の条件 2 とを合わせれば，定理 3.17.2 の条件 1 のみたされることが分かる．

補題 3.17.2　s_i **が** $a \in A$ **に自由に現れなければ，次の式が成り立つ** $(i = 1,\ldots,n)$**．**

$$a\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right) = a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_n}\right)$$

証明　n と $r = \mathrm{rk}\, a$ についての帰納法を使う．

$r = 0$ **の場合：** $a \in S$ なので，定理 3.16.2 により，s_i が a に自由に現れないことは $a \neq s_i$ を意味する．従って代入の定義 (3.17.1) により，n の如何によらず補題の式は 成り立つ．

$r \geq 1$ **の場合：** $a = \alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \mathrm{rk}\, a_k = r - 1$ が成り立つ．$s_i \in S^\lambda$ のときには，補題 3.17.1 によりこの補題の式は成り立つ．そこで，$s_i \notin S^\lambda$ と仮定する．そうすると定理 3.16.4 により，s_i はどの a_k にも自由に現れない $(k = 1,\ldots,j)$．従って，r についての帰納法の仮定により次の式が成り立つ．

$$a_k\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right) = a_k\left(\frac{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_n}\right)$$

$\{s_1,\ldots,s_n\} \cap S^\lambda = \emptyset$ の場合には，この式と代入の定義 (3.17.2) から補題の式が得られる．$s_h \in S^\lambda$ なる h がある場合には，この h は i と異なり，特に $n \geq 2$ であるから，$n = 1$ の場合の証明はもう完結している．そこで，たとえば $h < i$ と仮定すれば，n についての帰納法の仮定により

$$a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{h-1},s_{h+1},\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_{h-1},c_{h+1},\ldots,c_n}\right) = a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{h-1},s_{h+1},\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_{h-1},c_{h+1},\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_n}\right)$$

が成り立つ．これと補題 3.17.1 とからこの補題の式が得られる．$i < h$ でも同様である．

定理 3.17.3　$r_1,\ldots,r_n$ **と** $s_1,\ldots,s_n$ **はそれぞれ相異なる素元の列であり，** r_i **と** s_i **は同型であって，これらと** $a \in A$ **が次の二条件をみたすとする** $(i = 1,\ldots,n)$**．**

1. r_i **は** a **に自由に現れない．**
2. a **において** s_i **は** r_i **から自由である．**

このとき $a\left(\dfrac{s_1,\ldots,s_n}{r_1,\ldots,r_n}\right)\left(\dfrac{r_1,\ldots,r_n}{c_1,\ldots,c_n}\right) = a\left(\dfrac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)$ **が成り立つ．**

証明　n と $r = \mathrm{rk}\, a$ についての帰納法を使う．$n \geq 1$ としていい．

(1) $r = 0$ **の場合：** $a \in S$ である．定理 3.16.2 と条件 1 により $a \notin \{r_1,\ldots,r_n\}$ が成り立つ．従って代入の定義 (3.17.1) により，定理の式の両辺は，$a \notin \{s_1,\ldots,s_n\}$ なら a に等しく，$a = s_i$ なら c_i に等しい $(i = 1,\ldots,n)$．

(2) $r \geq 1$ **の場合：** $a = \alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \mathrm{rk}\, a_k = r - 1$ が成り立つ．また，定理 3.16.4 と定理 3.16.6 系および条件 1, 2 により，次の二条件が成り立つ $(i = 1,\ldots,n;\ k = 1,\ldots,j)$．

1k. $r_i \notin S^\lambda$ なら，r_i は a_k に自由に現れない．

2k. $s_i \notin S^\lambda$ なら，a_k において s_i は r_i から自由である．

(2.1) $\{s_1,\ldots,s_n,r_1,\ldots,r_n\}\cap S^\lambda=\emptyset$ **の場合：**代入の定義 (3.17.2) により，定理の式の左辺は

$$\alpha_\lambda\left(a_1\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{r_1,\ldots,r_n}\right)\left(\frac{r_1,\ldots,r_n}{c_1,\ldots,c_n}\right),\ldots,a_j\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{r_1,\ldots,r_n}\right)\left(\frac{r_1,\ldots,r_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)\right)$$

に等しく，右辺は

$$\alpha_\lambda\left(a_1\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right),\ldots,a_j\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)\right)$$

に等しい．今の場合，1k, 2k により条件 1, 2 は各 a_k に遺伝しているから，帰納法の仮定により

$$a_k\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{r_1,\ldots,r_n}\right)\left(\frac{r_1,\ldots,r_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)=a_k\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)$$

が成り立ち，従って定理の式が成り立つ．

(2.2) $\{s_1,\ldots,s_n,r_1,\ldots,r_n\}\cap S^\lambda\neq\emptyset$ **の場合：**さらに次の二つの場合に分ける．

(a) $r_i\in S^\lambda$ なる r_i がある．　(b) $s_i\in S^\lambda$ なる s_i がある．

(a) の場合には，$r_i\in S^{r_i}_{\mathrm{free}}\cap S^\lambda$，従って条件 2 と定理 3.16.6 により $s_i \not\ll a$ だから，補題 3.17.2 により次の式が成り立つ．

$$定理の式の右辺=a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_n}\right)$$

(b) の場合にも，補題 3.17.1 により同じ式が成り立つ．全く同様に次の式が成り立つ．

$$a\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{r_1,\ldots,r_n}\right)=a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n}{r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots,r_n}\right)$$

条件 1 および $r_1,\ldots,r_n$ が相異なることと定理 3.16.2 により r_i は $a,r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots,r_n$ のどれにも自由に現れないから，定理 3.17.1 系により，r_i はこの式の右辺に，従って左辺にも自由に現れない．従って補題 3.17.2 により，

$$定理の式の左辺=a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n}{r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots,r_n}\right)\left(\frac{r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots,r_n}{c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_n}\right)$$

が成り立つ．従って，n についての帰納法の仮定により，定理の式が成り立つ．

定理 3.17.4 **$s_i,\ldots,s_n$ が $c_1,\ldots,c_{i-1}$ に自由に現れなければ，任意の $a\in A$ に対して**

$$a\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)=a\left(\frac{s_1,\ldots,s_{i-1}}{c_1,\ldots,c_{i-1}}\right)\left(\frac{s_i,\ldots,s_n}{c_i,\ldots,c_n}\right)$$

が成り立つ $(i=1,\ldots,n)$**．従って** $s_i,\ldots,s_n \not\ll c_{i-1}$ $(i=2,\ldots,n)$ **なら，任意の $a\in A$ に対して** $a\left(\frac{s_1,\ldots,s_n}{c_1,\ldots,c_n}\right)=a\left(\frac{s_1}{c_1}\right)\cdots\left(\frac{s_n}{c_n}\right)$ **が成り立つ．**

証明　n と $r=\mathrm{rk}\,a$ についての帰納法を使う．$n>1$ としていい．

(1) $r=0$ **の場合：**$a\in S$ である．$a\notin\{s_1,\ldots,s_n\}$ なら，定理の式の両辺は代入の定義 (3.17.1) により a に等しい．そこで $a=s_h$ なる h があると仮定する．そうすると，定理の式の左辺は (3.17.1)

により c_h に等しい．右辺は，$h \geq i$ なら (3.17.1) により c_h に等しい．そこで $h < i$ とすると，右辺はまず (3.17.1) により $c_h\left(\dfrac{s_i,\dots,s_n}{c_i,\dots,c_n}\right)$ に等しいが，これは，$s_i,\dots,s_n \not\ll c_h$ なる仮定と補題 3.17.2 により c_h に等しい．

(2) $r \geq 1$ **の場合：**$a = \alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \operatorname{rk} a_k = r-1$ が成り立つ．

(2.1) $\{s_1,\dots,s_n\} \cap S^\lambda = \emptyset$ **の場合：**r についての帰納法の仮定により，各 k に対して

$$a_k\left(\frac{s_1,\dots,s_n}{c_1,\dots,c_n}\right) = a_k\left(\frac{s_1,\dots,s_{i-1}}{c_1,\dots,c_{i-1}}\right)\left(\frac{s_i,\dots,s_n}{c_i,\dots,c_n}\right)$$

が成り立つ $(k = 1,\dots,j)$．これと代入の定義 (3.17.2) により，定理の式の両辺は等しい．

(2.2) $s_h \in S^\lambda$ **なる** h **がある場合：**$h < i$ なら，n についての帰納法の仮定により

$$a\left(\frac{s_1,\dots,s_{h-1},s_{h+1},\dots,s_n}{c_1,\dots,c_{h-1},c_{h+1},\dots,c_n}\right) = a\left(\frac{s_1,\dots,s_{h-1},s_{h+1},\dots,s_{i-1}}{c_1,\dots,c_{h-1},c_{h+1},\dots,c_{i-1}}\right)\left(\frac{s_i,\dots,s_n}{c_i,\dots,c_n}\right)$$

が成り立ち，補題 3.17.1 により，この式の両辺が定理の式の両辺に等しい．$h \geq i$ なら，n についての帰納法の仮定により

$$a\left(\frac{s_1,\dots,s_{h-1},s_{h+1},\dots,s_n}{c_1,\dots,c_{h-1},c_{h+1},\dots,c_n}\right) = a\left(\frac{s_1,\dots,s_{i-1}}{c_1,\dots,c_{i-1}}\right)\left(\frac{s_i,\dots,s_{h-1},s_{h+1},\dots,s_n}{c_i,\dots,c_{h-1},c_{h+1},\dots,c_n}\right)$$

が成り立つ．はやり補題 3.17.1 により，この式の左辺が定理の式の左辺に等しい．また，(3.17.2) により $a\left(\dfrac{s_1,\dots,s_{i-1}}{c_1,\dots,c_{i-1}}\right) \in \operatorname{Im}\alpha_\lambda$ が成り立つから，やはり補題 3.17.1 により，この式の右辺が定理の式の右辺に等しい．

定理 3.17.5 $a_1,\dots,a_j \in A$，$B \subseteq A$ **とし，**$s_1,\dots,s_n$ **は** S **の相異なる元であって** $S^B_{\mathrm{free}} \cap S^\wedge \subseteq \{s_1,\dots,s_n\}$ **をみたすものとする．さらに，**$\{s_1,\dots,s_n\}_t \cap S^\wedge \neq \emptyset$ **なる** $t \in T$ **に対しては** $S_t \cap S^\wedge$ **が可算個の元を含むとする．このとき，**$S^\wedge \cup (\{s_1,\dots,s_n\} - S^\wedge)$ **の相異なる元** $r_1,\dots,r_n$ **で次の二条件をみたすものが存在する．**

1. r_i **は** s_i **と同型である** $(i = 1,\dots,n)$**．**
2. a_k **において任意の** $s \in S$ **は** $b\left(\dfrac{s_1,\dots,s_n}{r_1,\dots,r_n}\right)$ **から自由である** $(k = 1,\dots,j;\ b \in B)$**．**

証明　$R = S^\wedge \cup (\{s_1,\dots,s_n\} - S^\wedge)$，$M_k = \Lambda^{a_k}$ $(k = 1,\dots,j)$，$M = \bigcup_{k=1}^{j} M_k$ と定める．$R - S^M$ の相異なる元 $r_1,\dots,r_n$ で条件 1 をみたすものがあることを示せばいい．なぜなら，そういう $r_1,\dots,r_n$ と任意の $b \in B$ に対して $c = b(s_i/r_i)$ と定めれば，定理 3.17.1 系と定理 3.16.2 により $S^c_{\mathrm{free}} \cap S^\wedge \subseteq \{r_1,\dots,r_n\}$，従って $S^c_{\mathrm{free}} \cap S^\wedge \subseteq S - S^{M_k}$ が成り立ち $(k = 1,\dots,j)$，従って定理 3.16.7 により条件 2 が成り立つからである．そこで

$$\{s_1,\dots,s_n\} \cap S^\wedge = \{s'_1,\dots,s'_m\} \qquad \{s_1,\dots,s_n\} - S^\wedge = \{s''_1,\dots,s''_l\} \qquad (m + l = n)$$

とし，s'_i の型を t_i とする $(i = 1,\dots,m)$．そうすると，$S_{t_i} \cap S^\wedge$ が可算個の元を含む．他方で定理 3.15.2 により M は有限集合である．従って，$S_{t_i} \cap S^\wedge - S^M$ も可算個の元を含み，ここから任意有限個の元を取り出すことができる．従って $S^\wedge - S^M$ の相異なる元 $r'_1,\dots,r'_m$ であって s'_i と r'_i とが同型のものが存在する．そこで $r'_1,\dots,r'_m,s''_1,\dots,s''_l$ を適宜に並べ替えたものを $r_1,\dots,r_n$ とすれば，これらは $R - S^M$ の相異なる元であって条件 1 をみたす．

系　$a_1, \ldots, a_j \in A$ **とし，**$s_1, \ldots, s_n$ **を** S **の相異なる元とし，**$\{s_1, \ldots, s_n\}_t \cap S^\wedge \neq \emptyset$ **なる** $t \in T$ **に対しては** $S_t \cap S^\wedge$ **が可算個の元を含むとする．このとき，**$S^\wedge \cup (\{s_1, \ldots, s_n\} - S^\wedge)$ **の相異なる元** $r_1, \ldots, r_n$ **で次の二条件をみたすものが存在する．**

1. s_i **と** r_i **は同型である** $(i = 1, \ldots, n)$**．**
2. a_k **において任意の** $s \in S$ **は** r_i **から自由である** $(k = 1, \ldots, j;\ i = 1, \ldots, n)$**．**

証明　定理 3.17.5 において $B = \{s_1, \ldots, s_n\}$ とすればいい．

定義 3.17.2 A の元 a, b と A の相異なる素元 $s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_n$ が次の四条件をみたすとする．

0. s_i と r_i は同型である $(i = 1, \ldots, n)$.
1. $b = a\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{r_1, \ldots, r_n}\right)$
2. r_i は a に自由に現れない $(i = 1, \ldots, n)$.
3. a において s_i は r_i から自由である $(i = 1, \ldots, n)$.

このとき，a は $s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_n$ に関して b に**相似**であると言い，このことを $a(s_i)(r_i)b$ で表す．代入は保型写像であるから，$a(s_i)(r_i)b$ であれば a と b は同型である．

問題 3.17.1 $a \in A$ とし，$s_1, \ldots, s_n$ を S の相異なる元とし，$\{s_1, \ldots, s_n\}_t \neq \emptyset$ なる $t \in T$ に対しては $S_t \cap S^\wedge$ が可算個の元を含むとする．このとき，A の元 b と $S^\wedge - \{s_1, \ldots, s_n\}$ の相異なる元 $r_1, \ldots, r_n$ とで $a(s_i)(r_i)b$ をみたすものが存在する．

略解　$U = \{s_1, \ldots, s_n\} \cup S^a_{\text{free}} \cup S^{\wedge^a}$，$t_i = \sigma s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ と定めると，$(S_{t_i} \cap S^\wedge) - U$ が可算個の元を含むので，$S^\wedge - U$ の相異なる元 $r_1, \ldots, r_n$ で定義 3.17.2 の条件 0 をみたすものがある．それらは条件 2 もみたし，また，$S^{r_i}_{\text{free}} \cap S^\wedge = \{r_i\} \subseteq S - S^{\wedge^a}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成り立つので，定理 3.16.7 により条件 3 もみたす．

問題 3.17.2 任意の n 次の置換 p に対して $\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right) = \left(\dfrac{s_{p1}, \ldots, s_{pn}}{c_{p1}, \ldots, c_{pn}}\right)$ が成り立つ．

補題 3.17.3 $s_i = c_i$ **なる** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **があれば，各** $a \in A$ **に対して**

$$a\left(\frac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right) = a\left(\frac{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n}\right)$$

が成り立つ．従って，$\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{s_1, \ldots, s_n}\right)$ **は恒等変換である．**

証明　問題 3.17.2 により $i = 1$ と仮定してよく，補題 3.17.2 により $s_1 \ll a$ と仮定していい．また，$r = \operatorname{rk} a$ についての帰納法を使う．まず $r = 0$ の場合には，定理 3.16.2 により $a = s_1$ であるから，代入の定義 (3.17.1) と $s_1 = c_1$ との仮定により，補題の式の両辺は c_1 に等しい．そこで $r \geq 1$ と仮定する．そうすると $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \operatorname{rk} a_k = r - 1$ が成り立つ．また，$s_1 \ll a$ であるから $s_1 \notin S^\lambda$ が成り立つ．従って $\{s_2, \ldots, s_n\} - S^\lambda = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}\}$，$i_1 < \cdots < i_m$ とすれば，$\{s_1, \ldots, s_n\} - S^\lambda = \{s_1, s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}\}$，$1 < i_1 < \cdots < i_m$ であり，代入の定義 (3.17.2) により

$$a\left(\frac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right) = \alpha_\lambda\left(a_1\left(\frac{s_1, s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}}{c_1, c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}}\right), \ldots, a_j\left(\frac{s_1, s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}}{c_1, c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}}\right)\right)$$

が成り立つ．帰納法の仮定により $a_k\left(\dfrac{s_1, s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}}{c_1, c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}}\right) = a_k\left(\dfrac{s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}}{c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}}\right)$ $(k = 1, \ldots, j)$ であるから，再び代入の定義 (3.17.2) により $a\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{c_1, \ldots, c_n}\right) = a\left(\dfrac{s_2, \ldots, s_n}{c_2, \ldots, c_n}\right)$ が成り立つ．

定理 3.17.6 **A の元 a, b と A の相異なる素元 $s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_n$ が $a(s_i)(r_i)b$ をみたせば，$b(r_i)(s_i)a$ が成り立つ．**

証明　次の三つのことを確かめればいい．

1′. $a = b\left(\dfrac{r_1, \ldots, r_n}{s_1, \ldots, s_n}\right)$

2′. s_i は b に自由に現れない $(i = 1, \ldots, n)$.

3′. b において r_i は s_i から自由である $(i = 1, \ldots, n)$.

条件 1′ は定理 3.17.3 と補題 3.17.3 により確かに成り立つ．定理 3.17.1 系と定理 3.16.2 により $S^b_{\mathrm{free}} \subseteq \{r_1, \ldots, r_n\} \cup \left(S^a_{\mathrm{free}} - \{s_1, \ldots, s_n\}\right)$ が成り立ち，仮定により $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n$ が相異なるから，条件 2′ が成り立つ．条件 3′ が成り立つことを示すには，定理 3.17.2 の条件 1, 2 に相当する次の二条件が成り立つことを示せばいい．

3′1. $r_i \ll r_j$ であって a への $\{r_i, s_j\}$ から自由な s_j の現れがあれば，その現れは s_i からも自由であって r_j において r_i は s_i から自由である $(j = 1, \ldots, n)$.

3′2. $r_i \notin \{s_1, \ldots, s_n\}$ なら，a において r_i は s_i から自由である．

$r_1, \ldots, r_n$ が相異なるから，$r_i \ll r_j$ であれば，定理 3.16.2 により $i = j$ が成り立つ．従ってさらに a への $\{r_i, s_j\}$ から自由な s_j の現れがあれば，その現れは問題 3.16.1 により s_i から自由であり，定理 3.16.2 により r_j において r_i は s_i から自由である．よって条件 3′1 が成り立つ．定理の仮定により定義 3.17.2 の条件 2 が成り立つから，定理 3.16.5 により条件 3′2 も成り立つ．

定理 3.17.7 (✓) **A の元 a, b, c と A の相異なる素元 $s_1, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_n, q_1, \ldots, q_n$ が $a(s_i)(r_i)b$ と $b(r_i)(q_i)c$ をみたせば，$a(s_i)(q_i)c$ が成り立つ．**

証明　次の三つのことを確かめればいい．

1′. $c = a\left(\dfrac{s_1, \ldots, s_n}{q_1, \ldots, q_n}\right)$

2′. q_i は a に自由に現れない $(i = 1, \ldots, n)$.

3′. a において s_i は q_i から自由である $(i = 1, \ldots, n)$.

条件 1′ は定理 3.17.3 により成り立つ．同じ理由と定理 3.17.6 とによって $a = c\left(\dfrac{q_1, \ldots, q_n}{s_1, \ldots, s_n}\right)$ も成り立ち，従って定理 3.17.1 系と定理 3.16.2 により $S^a_{\mathrm{free}} \subseteq \{s_1, \ldots, s_n\} \cup \left(S^c_{\mathrm{free}} - \{q_1, \ldots, q_n\}\right)$ が成り立つ．仮定により $q_1, \ldots, q_n, s_1, \ldots, s_n$ が相異なるから，条件 2′ が成り立つ．条件 3′ が成り立つことを示すには，定理 3.17.2 の条件 1, 2 に相当する次の二条件が成り立つことを示せばいい．

3′1. $s_i \ll s_j$ であって c への $\{s_i, q_j\}$ から自由な q_j の現れがあれば，その現れは q_i からも自由であって s_j において s_i は q_i から自由である $(j = 1, \ldots, n)$.

$3'2$. c において s_i は q_i から自由である.

$s_1,\dots,s_n$ が相異なるから，$s_i \ll s_j$ であれば，定理 3.16.2 により $i=j$ が成り立つ．従ってさらに c への $\{s_i,q_j\}$ から自由な q_j の現れがあれば，その現れは問題 3.16.1 により q_i から自由であり，定理 3.16.2 により s_j において s_i は q_i から自由である．よって条件 $3'1$ が成り立つ．条件 $1'$ によって先ほどと同様 $S^c_{\mathrm{free}} \subseteq \{q_1,\dots,q_n\} \cup \bigl(S^a_{\mathrm{free}} - \{s_1,\dots,s_n\}\bigr)$ が成り立ち，仮定により $q_1,\dots,q_n,s_1,\dots,s_n$ が相異なるから，s_i は c に自由に現れず，従って定理 3.16.5 により条件 $3'2$ も成り立つ.

定理 3.17.8 **A の元 a,b と A の相異なる素元 $s_1,\dots,s_n,r_1,\dots,r_n$ が $a(s_i)(r_i)b$ をみたすとき，次の三つのことが成り立つ.**

1. $s_i \ll a$ **なることと** $r_i \ll b$ **なることは同等である** $(i=1,\dots,n)$**.**

2. $S^a_{\mathrm{free}} = \bigl(\{s_1,\dots,s_n\} \cap S^a_{\mathrm{free}}\bigr) \amalg (S^a_{\mathrm{free}} \cap S^b_{\mathrm{free}})$, $S^b_{\mathrm{free}} = \bigl(\{r_1,\dots,r_n\} \cap S^b_{\mathrm{free}}\bigr) \amalg (S^a_{\mathrm{free}} \cap S^b_{\mathrm{free}})$

3. $R \subseteq S$ **のとき，**$R^a_{\mathrm{free}} \subseteq \{s_1,\dots,s_n\}$ **と** $R^b_{\mathrm{free}} \subseteq \{r_1,\dots,r_n\}$ **は同等である.**

証明　定義 3.17.2 により $r_i \not\ll a$ が成り立つ．従って $r_i \ll b$ なら，定理 3.17.1 により $s_j \ll_{\{r_i,s_j\}} a$ かつ $r_i \ll r_j$ なる $j \in \{1,\dots,n\}$ のあることが分かり，$r_i \ll r_j$ から定理 3.16.2 により $j=i$ が得られ，これと $s_j \ll_{\{r_i,s_j\}} a$ から問題 3.16.1 と定理 3.16.2 により $s_i \ll a$ が得られる．定理 3.17.6 により $b(r_i)(s_i)a$ であるから，同様に，$r_i \ll b$ なら $s_i \ll a$ が成り立つ．よって結論 1 が成り立つ.

定理 3.17.6 の証明中に記した通り $S^b_{\mathrm{free}} \subseteq \{r_1,\dots,r_n\} \cup \bigl(S^a_{\mathrm{free}} - \{s_1,\dots,s_n\}\bigr)$ が成り立つから,

$$S^b_{\mathrm{free}} = \bigl(\{r_1,\dots,r_n\} \cap S^b_{\mathrm{free}}\bigr) \cup \bigl(S^a_{\mathrm{free}} \cap S^b_{\mathrm{free}} - \{s_1,\dots,s_n\}\bigr)$$

が成り立つ．また，定義 3.17.2 と定理 3.17.6 により $\{r_1,\dots,r_n\} \cap S^a_{\mathrm{free}} = \emptyset = S^b_{\mathrm{free}} \cap \{s_1,\dots,s_n\}$ が成り立つ．これらのことから結論 2 を得る．結論 2 において S を R に置き換えたことも成り立つから，$R^a_{\mathrm{free}} \subseteq \{s_1,\dots,s_n\}$ と $R^b_{\mathrm{free}} \subseteq \{r_1,\dots,r_n\}$ とは共に $R^a_{\mathrm{free}} \cap R^b_{\mathrm{free}} = \emptyset$ なることと同等である.

系　$a=\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)$, $b=\alpha_\mu(b_1,\dots,b_j)$, $S^\lambda=\{s\}$, $S^\mu=\{r\}$, $a_k(s)(r)b_k$ $(k=1,\dots,j)$ **が成り立てば，**$S^a_{\mathrm{free}} = S^b_{\mathrm{free}} = \bigcup_{k=1}^{j}\bigl(S^{a_k}_{\mathrm{free}} \cap S^{b_k}_{\mathrm{free}}\bigr)$ **が成り立つ.**

証明　定理 3.16.4 により $S^a_{\mathrm{free}} = \bigcup_{k=1}^{j} S^{a_k}_{\mathrm{free}} - \{s\}$, $S^b_{\mathrm{free}} = \bigcup_{k=1}^{j} S^{b_k}_{\mathrm{free}} - \{r\}$ が成り立ち定理 3.17.8 により $S^{a_k}_{\mathrm{free}} - \{s\} = S^{b_k}_{\mathrm{free}} - \{r\} = S^{a_k}_{\mathrm{free}} \cap S^{b_k}_{\mathrm{free}}$ が成り立つからである.

定理 3.17.9 $b = a\begin{pmatrix} s_1,\dots,s_n \\ \hline c_1,\dots,c_n \end{pmatrix}$ **なら，**$\Lambda^b \subseteq \Lambda^a \cup \bigcup_{s_i \ll a} \Lambda^{c_i}$ **が成り立つ.**

証明　n と $r=\operatorname{rk} a$ についての帰納法を使う．$r=0$ の場合，$a \in S$ であるから，定理 3.16.2 により $s_i \ll a$ なることは $s_i = a$ なることと同等であり，この同等な条件の下で $b=c_i$ が成り立つから，定理の式は成り立つ．そこで $r \geq 1$ と仮定する．このとき，$a=\alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \operatorname{rk} a_k = r-1$ が成り立つ．補題 3.17.2 と n についての帰納法の仮定により，$s_1,\dots,s_n$ が a に自由に現れると仮定していい．そう仮定すると，定理 3.16.4 により $s_1,\dots,s_n \notin S^\lambda$ が成り立つ．従って代入の定義 (3.17.2) により，次の式が成り立つ.

$$b=\alpha_\lambda(b_1,\dots,b_j) \qquad\qquad b_k = a_k\begin{pmatrix} s_1,\dots,s_n \\ \hline c_1,\dots,c_n \end{pmatrix} \quad (k=1,\dots,j)$$

定理 3.15.2 により $\Lambda^b = \{\lambda\} \cup \bigcup_{k=1}^{j} \Lambda^{b_k}$ が成り立ち，r についての帰納法の仮定により $\Lambda^{b_k} \subseteq \Lambda^{a_k} \cup \bigcup_{s_i \ll a_k} \Lambda^{c_i}$ が成り立ち，$s_i \ll a_k$ なら定理 3.16.4 により $s_i \ll a$ が成り立つから，再び定理 3.15.2 により定理の式が成り立つ.

定理 3.17.10 $M \subseteq \Lambda$ **とし，**$R = S \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda - M} \operatorname{Im} \alpha_\lambda$ **と定める（従って問題 3.8.9 により，**(A_M, T_M, σ, R) **は普遍型付** M **代数系である）．このとき** $c_1, \ldots, c_n \in R$ **なる代入** $\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix}$ **は，**A **の元の** (A_M, T_M, σ, R) **における階数を不変に保つ．**

証明　任意の $a \in A$ に対して a と $b = a \begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix}$ の (A_M, T_M, σ, R) での階数 $\operatorname{rk}_M a$ と $\operatorname{rk}_M b$ とが等しいこと示さなければならない．それを n と $\operatorname{rk}_M a$ についての帰納法で行なう．$\operatorname{rk}_M a = 0$ の場合，$a, c_1, \ldots, c_n \in R$ であるから，代入の定義 (3.17.1) と (3.17.2) により $b \in R$，従って $\operatorname{rk}_M b = 0$ が確かに成り立つ．そこで $\operatorname{rk}_M a \geq 1$ と仮定する．このとき，$a = \alpha_\mu(a_1, \ldots, a_j)$ $(\mu \in M)$ と書けて $\sum_{k=1}^{j} \operatorname{rk}_M a_k = \operatorname{rk}_M a - 1$ が成り立つ．補題 3.17.2 と n についての帰納法の仮定により，$s_1, \ldots, s_n$ が a に自由に現れると仮定していい．そう仮定すると，定理 3.16.4 により $s_1, \ldots, s_n \notin S^\mu$ が成り立つ．従って代入の定義 (3.17.2) により，次の式が成り立つ．

$$b = \alpha_\mu(b_1, \ldots, b_j) \qquad\qquad b_k = a_k \begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix} \quad (k = 1, \ldots, j)$$

$\operatorname{rk}_M a$ についての帰納法の仮定により $\operatorname{rk}_M a_k = \operatorname{rk}_M b_k$ $(i = 1, \ldots, j)$ が成り立つから，定理 3.8.2 により $\operatorname{rk}_M a = \operatorname{rk}_M b$ が確かに成り立つ．

問題 3.17.3 $S^\Lambda = \emptyset$ の場合には，代入は A の保型準換である．

課題 3.17.2 $s_1, \ldots, s_n$ が素元とは限らない場合，代入を次のように定義する．まず，s_i に自由に現れる素元はどれも c_i と同型で，かつ，$i \neq j$ なら s_i，s_j には共通の素元が自由に現れないという制限を設ける．そして，素元 a に対しては，

$$a \begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix} = \begin{cases} c_i & \cdots \quad a \ll s_i \text{ のとき } (i = 1, \ldots, n) \\ a & \cdots \quad a \not\ll s_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し，後はさっきと同様に定義する．この代入の性質を調べよ．

3.18　有限性と閉写

＄ ここでは，代数系の台部分系の概念などに陰に含まれていた重要な概念について陽に説明して次節以降への準備とする．

3.18.1　有限性と被覆

§ **この項を通じて** A **を任意の集合とする．**そうすると，巾集合 $\mathcal{P}A$ は包含関係 $\subseteq$ に関して完備な順序集合であるから，$\mathcal{P}A$ の部分集合について交閉性や結閉性や下方性を云々することができる．それに加えてここでは，次に定義する集合の有限性に関わる概念について考える．それらは各種の被覆概念によって統括される．

定義 3.18.1 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}A$ の部分集合とする．このときまず，$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ により**被覆**されるとは，$X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ をみたすことを言う．そして $\mathcal{B}$ が**覆閉的**であるとは，$\mathcal{B}$ により被覆される $X \in \mathcal{P}A$ がすべて $\mathcal{B}$ に属すことを言う．次に，$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ により**強被覆**されるとは，条件

$$Y \in \mathcal{P}'X \implies Y \subseteq B \text{ なる } B \in \mathcal{B} \text{ が存在する}$$

をみたすことを言う．そして $\mathcal{B}$ が**有限的**であるとは，$\mathcal{B}$ により強被覆される $X \in \mathcal{P}A$ がすべて $\mathcal{B}$ に属すことを言う．次に，$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ により**超被覆**されるとは，条件

$$Y \in \mathcal{P}'X \implies Y \subseteq B \subseteq X \text{ なる } B \in \mathcal{B} \text{ が存在する}$$

をみたすことを言う．そして $\mathcal{B}$ が**概有限**であるとは，$\mathcal{B}$ により超被覆される $X \in \mathcal{P}A$ がすべて $\mathcal{B}$ に属すことを言う[55]．次に，$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ により**極被覆**されるとは，$\mathcal{P}'X \subseteq \mathcal{B}$ が成り立つことを言う．そして $\mathcal{B}$ が**劣有限**であるとは，$\mathcal{B}$ により極被覆される $X \in \mathcal{P}A$ がすべて $\mathcal{B}$ に属すことを言う．最後に，$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ により**昇被覆**されるとは，$\mathcal{B}$ の空でない線形部分順序集合 $\{B_i \mid i \in I\}$ で $X = \bigcup_{i \in I} B_i$ をみたすものがあることを言う．そして $\mathcal{B}$ が**昇閉的**であるとは，$\mathcal{B}$ により昇被覆される $X \in \mathcal{P}A$ がすべて $\mathcal{B}$ に属すことを言う．

問題 3.18.1 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}A$ の部分集合とするとき，$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ により**単被覆**されるとは，$X \subseteq B$ なる $B \in \mathcal{B}$ が存在することを言う．そうすると，$\mathcal{B}$ により単被覆される $X \in \mathcal{P}A$ がすべて $\mathcal{B}$ に属すことは，$\mathcal{B}$ が下方的であることと同等である．

また，$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ により**内被覆**されるとは，$X = \bigcup_{\mathcal{B} \ni B \subseteq X} B$ をみたすことを言う．そうすると，$\mathcal{B}$ により内被覆される $X \in \mathcal{P}A$ がすべて $\mathcal{B}$ に属すことは，$\mathcal{B}$ が結閉的であることと同等である．

問題 3.18.2 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}A$ の部分集合とし $X \in \mathcal{P}A$ とすれば，次のことが成り立つ（図 3.6 参照）．

1. X が $\mathcal{B}$ により昇被覆されるか極被覆されれば，X は $\mathcal{B}$ により超被覆される．
2. X が $\mathcal{B}$ により単被覆されれば，X は $\mathcal{B}$ により強被覆される．
3. X が $\mathcal{B}$ により超被覆されれば，X は $\mathcal{B}$ により強被覆され，$\mathcal{B}$ の元の空でない族 $(B_i)_{i \in I}$ で $X = \bigcup_{i \in I} B_i$ なるものがあり，とくに X は $\mathcal{B}$ により内被覆される．
4. X が $\mathcal{B}$ により強被覆されるか内被覆されれば，X は $\mathcal{B}$ により被覆される．
5. $\mathcal{B}$ が下方的のときには，X が $\mathcal{B}$ により強被覆されることと，$\mathcal{B}$ により超被覆されることと，$\mathcal{B}$ により極被覆されることは，すべて同等である．

図 3.6: 各種被覆概念の相関図（矢印の向きに注意）

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{昇被覆}} \arrow[dr] & & \boxed{\text{極被覆}} \arrow[dl] \\
\boxed{\text{単被覆}} \arrow[dr] & & \boxed{\text{超被覆}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{\text{強被覆}} \arrow[dr] & & \boxed{\text{内被覆}} \arrow[dl] \\
 & & \boxed{\text{被覆}} &
\end{tikzcd}$$

[55] 概有限の概念とこれに関わる本書内の命題の幾つかは，松田一樹氏の発見によるもので，氏の 2004 年度東京大学修士論文「関係集合の存在定理」に陰に陽に記されている．ただし松田氏の発見当時は，図 3.6 に示すような被覆概念の相関によって概有限・有限的等の概念が統括されることは分かっていなかった．

略解　1. $X = \bigcup_{i\in I} B_i$ なる $\mathcal{B}$ の空でない線形部分順序集合 $\{B_i \mid i \in I\}$ があれば，任意の $Y \in \mathcal{P}'X$ に対し $Y \subseteq B_i \subseteq X$ なる $i \in I$ があるから，X は $\mathcal{B}$ により超被覆される．

3. X が $\mathcal{B}$ により超被覆されれば，任意の $Y \in \mathcal{P}'X$ に対し $Y \subseteq B_Y \subseteq X$ なる $B_Y \in \mathcal{B}$ があるから，$X = \bigcup_{Y\in\mathcal{P}'X} B_Y$ が成り立つ．

4. X が $\mathcal{B}$ により強被覆されれば，特に条件「$Y \subseteq X,\ \#Y = 1 \implies Y \subseteq B$ なる $B \in \mathcal{B}$ が存在する」をみたし，これは X が $\mathcal{B}$ により被覆されることと同等である．

注意 3.18.1 問題 3.18.2 により，$\mathcal{B}$ により各様に被覆される集合はすべて $\bigcup\mathcal{B}$ に含まれる．従ってそれら各種の被覆概念も，それらによって定まる概有限等の概念も，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}A$ なる集合 A には依存しない．それ故，これら概念に「A に関して」の断りは無用である（注意 3.9.3 参照）．

問題 3.18.3 $\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}$ について次のことが成り立つ（図 3.7 参照）．

1. $\mathcal{B}$ が昇閉的なら，$\mathcal{B}$ は包含関係 $\subseteq$ に関して帰納的である．
2. $\mathcal{B}$ が概有限なら，$\mathcal{B}$ は昇閉的かつ劣有限である．
3. $\mathcal{B}$ の元の空でない任意の族 $(B_i)_{i\in I}$ に対して $\bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{B}$ が成り立てば，$\mathcal{B}$ は概有限である．特に $\mathcal{B}$ が結閉的なら，$\mathcal{B}$ は概有限である．
4. 次の条件 a, b, c, d は同等である．
   a. $\mathcal{B}$ は有限的である．
   b. $\mathcal{B}$ は下方的かつ概有限である．
   c. $\mathcal{B}$ は下方的かつ劣有限である．
   d. 各 $X \in \mathcal{P}A$ について「$X \in \mathcal{B} \iff X$ は $\mathcal{B}$ により極被覆される」が成り立つ．
5. $\mathcal{B}$ が覆閉的であるためには，$\mathcal{B} = \mathcal{P}\left(\bigcup\mathcal{B}\right)$ をみたすことも，$\mathcal{B} = \mathcal{P}B$ なる $B \in \mathcal{P}A$ のあることも，下方的かつ結閉的であることも，有限的かつ結閉的であることも，A の任意の部分集合の族 $(X_i)_{i\in I}$ に対して「$X_i \in \mathcal{B}\ (i \in I) \iff \bigcup_{i\in I} X_i \in \mathcal{B}$」をみたすことも，いずれも必要十分である．

図 3.7: 巾集合の部分集合の有限性に関わる性質の相関図

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{帰納的}} & & & \\
& \boxed{\text{昇閉的}} \arrow[ul] & & \boxed{\text{劣有限}} \\
\boxed{\text{下方的}} & & \boxed{\text{概有限}} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \boxed{\text{有限的}} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \boxed{\text{結閉的}} \arrow[ul] \\
& & \boxed{\text{覆閉的}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

(図 3.6 参照)

略解　図 3.7 に示す各種性質の間の含意関係 [56]のうちの「帰納的」について以外のことは，問題 3.18.1 と問題 3.18.2 から得られる（図 3.6 参照）.

4. $\mathcal{B}$ の元は $\mathcal{B}$ により強被覆されるから，$\mathcal{B}$ が有限的であるためには，各 $X \in \mathcal{P}A$ について「$X \in \mathcal{B} \iff X$ は $\mathcal{B}$ により強被覆される」の成り立つことが必要十分である．また，条件 a, b, c, d いずれの下でも $\mathcal{B}$ は下方的である．また，$\mathcal{B}$ が下方的のときには，問題 3.18.2 により，$\mathcal{B}$ による強被覆・超被覆・極被覆はすべて同等の概念である．従って条件 a, b, c, d は同等である．

5. $\mathcal{B} = \mathcal{P}B$ なる $B \in \mathcal{P}A$ のあることは，すなわち $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の下方閉区間であることであり，そのことは問題 3.9.34 により，$\mathcal{B}$ が下方的かつ結閉的であることと同等である.

問題 3.18.4 $\mathcal{P}A$ の部分集合の交わりについて次のことが成り立つ.

1. 概有限な部分集合の交わりも概有限である.
2. 劣有限な部分集合の交わりも劣有限である.
3. 昇閉的部分集合の交わりも昇閉的である.

注意 3.18.2 問題 3.18.4 の結論 3 は，$\mathcal{P}A$ の昇閉的な部分集合の全体が $\mathcal{P}A$ に関して交閉的であることと同等であり，結論 1, 2 についても同様である．問題 3.9.37 によれば同様に，$\mathcal{P}A$ の A に関して交閉的な部分集合の交わりは A に関して交閉的であり，結閉的な部分集合の交わりは結閉的であり，下方的な部分集合の交わりは下方的である．従って問題 3.18.3 により，結論 1 における「概有限」を「有限的」に替えても「覆閉的」に替えても同様に成り立つ.

問題 3.18.5 (✓) $\mathcal{P}A \supseteq \mathcal{B} \neq \emptyset$ とする．このとき，$\mathcal{B}$ が有限的であるためには，ある集合 I を添数集合とする自然数 n_i の族と写像 $f_i \in A^{n_i} \to C_i$ の族と C_i の部分集合 D_i の族とで

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}A \mid 任意の\ i \in I\ に対して\ B^{n_i} \subseteq {f_i}^{-1}D_i\}$$

なるものの存在することが必要十分である（I が有限集合とは限らないことに注意）．また，$\mathcal{B}$ が有限的であれば，この式をみたす $(n_i, f_i, C_i, D_i)_{i \in I}$ で $\#D_i = 1\ (i \in I)$ なるものが存在する.

略解　$\mathcal{B}$ がこの式をみたすと仮定する．そうすると $\mathcal{B}$ は下方的であり，特に $\mathcal{B}$ の元は $\mathcal{B}$ により極被覆される．また，$B \in \mathcal{P}A - \mathcal{B}$ であれば，ある $i \in I$ とある $(b_1, \ldots, b_{n_i}) \in B^{n_i}$ に対して $f_i(b_1, \ldots, b_{n_i}) \not\subseteq D_i$ が成り立ち，$\{b_1, \ldots, b_{n_i}\} \in \mathcal{P}'B - \mathcal{B}$ であるから，B は $\mathcal{B}$ により極被覆されない．従って $\mathcal{B}$ は有限的である．逆に $\mathcal{B}$ が有限的であれば，$\mathcal{B} \neq \emptyset$ であることより $\emptyset \in \mathcal{B}$ であるから，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して写像 $f_n \in A^n \to \mathbb{T}$ を

$$f_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{B}\ のとき \\ 0 & \cdots \quad \{a_1, \ldots, a_n\} \notin \mathcal{B}\ のとき \end{cases}$$

と定めるとき，$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}A \mid 任意の\ n \in \mathbb{N}\ に対して\ B^n \subseteq {f_n}^{-1}1\}$ が成り立つ.

問題 3.18.6 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}A$ の部分集合とする．このとき，$X \in \mathcal{P}'A$ が $\mathcal{B}$ により強被覆されるためには X が $\mathcal{B}$ により単被覆されることが必要十分であり，X が $\mathcal{B}$ により超被覆されるためには $X \in \mathcal{B}$ なることが必要十分であり，X が $\mathcal{B}$ により極被覆されるためには $\mathcal{P}X \subseteq \mathcal{B}$ なることが必要十分であ

[56] 二つの命題 A と B の間に「A なら B」という論理的関係があるとき,「A は B を含意する (A implies B)」と言う．矢印で「A $\Longrightarrow$ B」と書くのと同じ意味である．定義 3.29.2 参照.

る．従って，$\mathcal{B}$ が概有限であるためには A の $\mathcal{B}$ により超被覆される無限部分集合がすべて $\mathcal{B}$ に属すことが必要十分であり，$\mathcal{B}$ が劣有限であるためには，A の $\mathcal{B}$ により極被覆される無限部分集合がすべて $\mathcal{B}$ に属すことが必要十分である．従ってまた，A が有限集合であれば，$\mathcal{P}A$ の任意の部分集合は概有限である．

問題 3.18.7 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}A$ の部分集合とするとき，$\mathcal{P}'A \subseteq \mathcal{B}$ であれば，$\mathcal{P}A$ の任意の元は $\mathcal{B}$ により極被覆され，従って，$\mathcal{B}$ がさらに劣有限なら $\mathcal{B} = \mathcal{P}A$ が成り立つ．また，$\mathcal{P}'A \cap \mathcal{B} = \emptyset$ であれば，$\mathcal{P}A$ の元はどれも $\mathcal{B}$ によって極被覆されず，従って $\mathcal{B}$ は自明に劣有限である．

注意 3.18.3 以下の問題 3.18.9 – 問題 3.18.11 と問題 3.18.3 により，図 3.7 中の矢筈にある性質は矢尻にある性質と同等でない．

問題 3.18.8 (✓) A を無限集合とし $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}A \mid 0 < \#(A - B) < \infty\}$ と定めれば，$\mathcal{B}$ は昇閉的かつ劣有限であるが概有限ではない [57]．

略解　$\{B_i \mid i \in I\}$ が $\mathcal{B}$ の空でない線形部分順序集合であれば，$\{A - B_i \mid i \in I\}$ は有限集合から成る空でない線形順序集合であるから，$\#(A - B_j) = \min\{\#(A - B_i) \mid i \in I\}$ なる $j \in I$ があって $A - B_j = \min\{A - B_i \mid i \in I\}$，従って $A - \bigcup_{i \in I} B_i = A - B_j$ であるから，$\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}$ が成り立つ．$Y \in \mathcal{P}'A$ であれば，$z \in A - Y$ なる z があって $Y \subseteq A - \{z\} \in \mathcal{B}$ が成り立つ．従って A は $\mathcal{B}$ により超被覆されるが，A は $\mathcal{B}$ に属さない．

問題 3.18.9 (✓) A を可算集合とし $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}A \mid A - B$ は無限集合$\}$ と定めれば，$\mathcal{B}$ は下方的であるが帰納的でも劣有限でもない．

問題 3.18.10 (✓) A が第一分離公理をみたす非離散位相空間であれば，A の開集合系は結閉的であるが下方的ではなく，A の閉集合系は帰納的であるが昇閉的でも劣有限でもない．

略解　閉集合系を $\mathcal{B}$ で表す．$\mathcal{B}$ の任意の部分集合 $\mathcal{X}$ に対し $\bigcup \mathcal{X}$ の閉包は $\mathcal{B}$ における $\mathcal{X}$ の上限であるので（問題 3.18.33 参照），$\mathcal{B}$ は帰納的である．問題 3.18.7 により $\mathcal{B}$ は劣有限でない．$\mathcal{B}$ が昇閉的であるとすると，次のようにして矛盾が導かれる．まず，開集合でない $C \in \mathcal{P}A$ がある．次に，$\{B \in \mathcal{B} \mid B \cap C = \emptyset\}$ は空でなく昇閉的，従って $\subseteq$ に関して帰納的であるから，ツォルンの補題により極大元 B を持つ．任意の $a \in A - B$ に対して，$B \cup \{a\}$ は B より大きい閉集合なので $c \in C$ が成り立つ．従って $A - B = C$ であるが，これでは C が開集合となって矛盾である．

問題 3.18.11 順序集合 A の線形部分順序集合の全体は，有限的であるが，A が線形順序集合でなければ結閉的でない．

略解　A の線形部分順序集合の全体 $\mathcal{B}$ が結閉的とすると，問題 3.18.3 により $\mathcal{B} = \mathcal{P}B$ なる $B \in \mathcal{P}A$ があり，さらに A の任意の単元部分集合が $\mathcal{B}$ に属すから $B = A$ が成り立つ．

注意 3.18.4 問題 3.18.11 とツォルンの補題により，空でない順序集合 A には極大線形部分順序集合 B があって B は空でない．従って，A の任意の空でない線形部分順序集合に上界があれば，B にも上界 c があり，$B \cup \{c\}$ も線形部分順序集合なので $c \in B$，従って $c = \max B$ が成り立ち，従ってまた $(c\rightarrow) = \emptyset$ が成り立って，c は A の極大元である．つまり，「帰納的順序集合」の定義において「上限」を「上界」に替えても，ツォルンの補題は成り立つ．

[57] この問題は高岡洋介氏の着想に基づく．

問題 3.18.12 A, B が集合で写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ が任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $\varphi X = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \varphi Y$ をみたすとき（このとき φ は**有限的**であると言う），次のことが成り立つ．

1. φ は $\mathcal{P}A$ と $\mathcal{P}B$ における包含関係 $\subseteq$ について増写である．
2. 写像 $\psi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ も増写であれば，$\mathcal{P}A$ の部分集合 $\{X \in \mathcal{P}A \mid \varphi X \subseteq \psi X\}$ は概有限である．特に，$A = B$ なら，$\{X \in \mathcal{P}A \mid \varphi X \subseteq X\}$ は概有限である．
3. 写像 $\psi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ も増写であれば，$\mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ 上の巾順序関係について $\varphi \subseteq \psi$ であるためには，任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ に対して $\varphi Y \subseteq \psi Y$ の成り立つことが必要十分である．
4. C が集合で写像 $\psi \in \mathcal{P}B \to \mathcal{P}C$ も有限的であれば，合成写像 $\psi\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}C$ も有限的である．

略解　2. $X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{P}A \mid \varphi X \subseteq \psi X\}$ により超被覆されれば，各 $Y \in \mathcal{P}'X$ に対して $Y \subseteq Z \subseteq X$ なる $Z \in \mathcal{B}$ があって $\varphi Y \subseteq \varphi Z \subseteq \psi Z \subseteq \psi X$ が成り立つから，$\varphi X \subseteq \psi X$ が成り立つ．

3.　任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ に対して $\varphi Y \subseteq \psi Y$ が成り立てば，任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $\varphi X = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \varphi Y \subseteq \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \psi Y \subseteq \psi X$ が成り立つ．

4. 任意の $X \in \mathcal{P}A$ をとる．$Z \in \mathcal{P}'(\varphi X)$ なら，各 $z \in Z$ に対して $z \in \varphi(Y_z)$ なる $Y_z \in \mathcal{P}'X$ があり，$Y_Z = \bigcup_{z \in Z} Y_z$ と定めれば $Y_Z \in \mathcal{P}'X$ であって $Z \subseteq \varphi(Y_Z)$，従って $\psi Z \subseteq \psi\big(\varphi(Y_Z)\big)$ が成り立つ．従って $\psi(\varphi X) = \bigcup_{Z \in \mathcal{P}'(\varphi X)} \psi Z \subseteq \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \psi(\varphi Y)$ が成り立つ．

問題 3.18.13 代数系 A において，各部分集合 X に X の算包を対応させる写像も，X の n 包を対応させる写像も，X の n 圏を対応させる写像も，いずれも $\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への写像として有限的である $(n = 0, 1, \ldots)$．従って，A の台部分系の全体は概有限である．

略解　問題 3.2.12 と問題 3.18.12 による．

注意 3.18.5 定理 3.24.12 で一般化して証明するが，以上に説明したことにより，代数系 A の部分集合 C と D に対し A の台部分系 B で $B \cap C = \emptyset$ と $B \supseteq D$ をみたすものがあれば，その中に包含関係 $\subseteq$ に関して極大のものがある．単位元を持つ環に極大イデアルがあることはこの原理による．

問題 3.18.14 A, B が集合であって写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ が $\mathcal{P}A$ の任意の元の族 $(X_i)_{i \in I}$ に対して $\varphi(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi X_i$ をみたせば（このとき φ は**加法的**であると言う），φ は有限的である．また，φ が加法的であるためには，φ が増写であって $\mathcal{P}A$ の任意の元の族 $(X_i)_{i \in I}$ に対して $\varphi(\bigcup_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi X_i$ をみすことが必要十分である（この後者の性質を**劣加法性**と呼ぶ）．

問題 3.18.15 A, B を集合とし，$\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}B$ への加法的写像の全体を $\mathcal{F}$ で表し，$\mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ 上の巾順序関係の制限により $\mathcal{F}$ を順序集合と成す．また，A, B 間の任意の関係 R に対して，写像 $\varphi_R \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ を $\varphi_R X = \{y \in B \mid x\,R\,y$ なる $x \in X$ がある $\}$ と定める．そうすると写像 $R \mapsto \varphi_R$ は，A, B 間の関係の全体すなわち $\mathcal{P}(A \times B)$ から $\mathcal{F}$ への同順写である．

特に，$f \in A \to B$ であれば，各 $X \in \mathcal{P}A$ に X の f による像 $fX \in \mathcal{P}B$ を対応させる写像も，各 $Y \in \mathcal{P}B$ に Y の f による逆像 $f^{-1}Y \in \mathcal{P}A$ を対応させる写像も共に加法的，従って有限的である．

問題 3.18.16 A, B を集合とし，$\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}B$ への写像 φ で $\mathcal{P}A$ の任意の元の族 $(X_i)_{i \in I}$ に対して $\varphi(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \varphi X_i$ をみたす（この性質を**反加法性**と呼ぶ）ものの全体を $\mathcal{F}$ で表し，$\mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ 上の巾順序関係の制限により $\mathcal{F}$ を順序集合と成す．また，A, B 間の任意の関係 R に対して，写像 $\varphi_R \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ を $\varphi_R X = \{y \in B \mid$ 任意の $x \in X$ に対して $x\,R\,y\}$ と定める．そうすると写像 $R \mapsto \varphi_R$ は，A, B 間の関係の全体すなわち $\mathcal{P}(A \times B)$ から $\mathcal{F}$ への同順写である．

問題 3.18.17 A, B を集合とし，各 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ と各 $b \in B$ に対して，$\mathcal{P}A$ の部分集合 φ_b を $\varphi_b = \{X \in \mathcal{P}A \mid b \notin \varphi X\}$ と定める．そうすると次のことが成り立つ（図 3.8 参照）．

1. φ が有限的であることは，各 φ_b $(b \in B)$ が有限的であることと同等である．

2. φ が増調であることは，各 φ_b $(b \in B)$ が下方的であることと同等である．

3. φ が劣加法的であることは，各 φ_b $(b \in B)$ が結閉的であることと同等である．

4. φ が加法的であることは，各 φ_b $(b \in B)$ が覆閉的であることと同等である．

5. 各 φ_b $(b \in B)$ が概有限であることは，各 $X \in \mathcal{P}A$ が $\varphi X = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \bigcap_{Y \subseteq Z \subseteq X} \varphi Z$ をみたすことと同等である（こういう φ は**概有限**であると言う）．

6. 各 φ_b $(b \in B)$ が劣有限であることは，各 $X \in \mathcal{P}A$ が $\varphi X \subseteq \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \varphi Y$ をみたすことと同等である（こういう φ は**劣有限**であると言う）．

7. 各 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ に $\mathcal{P}A$ の部分集合族 $(\varphi_b)_{b \in B}$ を対応させる写像は，$\mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ から $B \to \mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ への，包含関係 $\subseteq$ の巾順序関係についての同順写である．

図 3.8: 巾集合間の写像の有限性に関わる性質の相関図

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \boxed{\text{劣有限}} \\
\boxed{\text{増調}} & & \boxed{\text{概有限}} \arrow[ur] & \\
 & \boxed{\text{有限的}} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \boxed{\text{劣加法的}} \arrow[ul] \\
 & & \boxed{\text{加法的}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

(図 3.7 参照)

問題 3.18.18 A, B を集合とし，$(\varphi_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}B$ への有限的写像の族とすれば，これらの $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ 上の巾順序関係 $\subseteq$ についての上限 $\bigcup_{i \in I} \varphi_i$ も有限的である．つまり，$\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}B$ への有限的写像の全体は，完備束 $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ において結閉的である．増調・劣加法的・加法的・概有限・劣有限な写像についても同様である．

略解　各 $b \in B$ に対して問題 3.18.17 の記号法について $\left(\bigcup_{i \in I} \varphi_i\right)_b = \bigcap_{i \in I} (\varphi_i)_b$ が成り立って，問題 3.18.4 と注意 3.18.2 により $\mathcal{P}A$ の有限的部分集合の全体が $\mathcal{P}A$ に関して交閉的だからである．

問題 3.18.19 A, B を集合とし，写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ が有限的であるとし，D を A の部分集合として写像 $\psi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}B$ を $\psi X = \varphi(X \cup D)$ と定める．このとき，ψ も有限的である．

略解　$\mathcal{P}A$ 上の定値変換 $X \mapsto D$ を δ で表せば，$\psi = \varphi \cdot (\mathrm{id}_{\mathcal{P}A} \cup \delta)$ が成り立つ．$\varphi, \mathrm{id}_{\mathcal{P}A}, \delta$ がいずれも有限的であるから，ψ も有限的である．

3.18.2　閉写と包

§ 順序集合 $(A, \leq)$ に対し，写像 $\varphi \in A \to A$ が次の三法則に従うとき，φ を A 上の**閉写**とか**閉作用子**とか**閉包写像**とかと呼び，各 $x \in A$ に対して φx を x の φ **包**と呼ぶ．

$$x \leq \varphi x \qquad (\textbf{拡大律})$$

$$\varphi(\varphi x) = \varphi x \qquad (\textbf{巾等律})$$

$$y \leq x \implies \varphi y \leq \varphi x \qquad (\text{増加律})$$

より一般に任意の写像 $\varphi \in A \to A$ に対し，$\varphi x = x$ なる元 $x \in A$ を φ **留元**と呼び，A の φ 留元の全体を φ の**留域**と呼び，$\varphi x \leq x$ なる元 $x \in A$ を φ **閉元**と呼び，A の φ 閉元の全体を φ の**閉域**と呼ぶ．さらに，$(A, \leq)$ の双対順序集合 $(A, \geq)$ における閉写を，$(A, \leq)$ における**開写**と呼ぶ．これはすなわち，巾等律と $\leq$ についての

$$\varphi x \leq x \qquad (\textbf{縮小律})$$

と増加律に従う写像 φ であり，そういう φ については，φx を x の φ **核**と呼ぶ．

A が集合 S の巾集合 $\mathcal{P}S$ の場合の以上の概念は，そうでない旨断らない限り，$\mathcal{P}S$ 上の順序として包含関係 $\subseteq$ をとってのものを指す．特に，任意の写像 $\varphi \in \mathcal{P}S \to \mathcal{P}S$ に対し，$X \in \mathcal{P}S$ が φ 閉元であるとは，$\varphi X \subseteq X$ をみたすことを言う．そういう X を S の φ **閉集合**とも呼んだり，X **は** φ **で閉じている**とか φ **は** X **を閉ざす**とかとも言う．

例 3.18.1 本書にこれまで登場しこれから登場する「…包」という名の色々の概念は，ほとんどが何らかの閉写 φ の定める φ 包であり，それらは「包」を画面検索すれば探し出すことができる．これまで登場したものは算包・下方包・上方包・区間包・偏区間包・交包・結包・$\mathcal{L}$ 包・反射包・対称包・推移包・同値包・擬順序包・型算法包・型合同包・多項式包等であり，これから登場するものは増写包・閉写包・概有限包・有限包・覆包・劣有限包・交概有限包・界包・偏包容包・D 包等である．

注意 3.18.6 位相空間 S の各部分集合 X にその閉包 $\overline{X}$ を対応させる写像は $\mathcal{P}S$ 上の閉写であり，開核を対応させる写像は開写である．「φ 包」「φ 核」の名はこのことに由来する．しかし，位相空間での閉包がさらに $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ なる二法則に従うのに対し，φ 包はこの二法則に必ずしも従わない．φ 核についても同様の事情がある．

問題 3.18.20 A を集合とし，α を A 上の算法とし，各 $X \in \mathcal{P}A$ に代数系 $(A, \{\alpha\})$ における X の 1 圏を対応させる写像を φ で表す．そうすると，$X \in \mathcal{P}A$ が定義 3.1.2 の意味で α で閉じているためには，X が φ で閉じていることが必要十分である（問題 3.24.16 参照）．

問題 3.18.21 $(A, \leq)$ を順序集合とし $\varphi \in A \to A$ とする．このとき，φ が拡大律に従えば，φ の留域と閉域は等しく，φ が巾等律に従うためには**巾閉律**「$\varphi(\varphi x) \leq \varphi x$」に従うことが必要十分である．また，$\varphi$ が巾等律に従えば，φ の留域は φ の値域 φA にも等しい．また，$A \to A$ の元 ψ が巾順序関係について $\varphi \leq \psi$ をみたせば，ψ の閉域は φ の閉域に含まれる．

定理 3.18.1 (閉写の基本定理) 順序集合 $(A, \leq)$ 上の閉写について次のことが成り立つ．

1. **φ が A 上の閉写であれば，φ の留域 B と任意の $x \in A$ について $\varphi x = \min\{y \in B \mid x \leq y\}$ が成り立つ．**

2. **B が A の部分集合であって各 $x \in A$ に対して $\min\{y \in B \mid x \le y\}$ が存在すれば，各 $x \in A$ にこの最小値を対応させる写像は A 上の閉写であり，その留域は B に等しい．**

3. **A 上の二つの閉写 φ, ψ が $A \to A$ 上の巾順序関係について $\varphi \le \psi$ をみたすためには，ψ の留域が φ の留域に含まれることが必要十分である．**

証明　1. 拡大律と巾等律により，任意の $x \in A$ に対して $x \le \varphi x \in B$ が成り立つ．逆に $x \le y \in B$ であれば，増加律により $\varphi x \le \varphi y = y$ が成り立つ．つまり $\varphi x = \min\{y \in B \mid x \le y\}$ である．

2. 写像 $x \mapsto \min\{y \in B \mid x \le y\}$ を φ で表す．そうすると，任意の $x \in A$ に対して $x \le \varphi x \in B$ が成り立つ．また，$y \in B$ なら，$y \le y \in B$ であるから $\varphi y \le y$ が成り立つ．以上により，拡大律 $x \le \varphi x$ と巾閉律 $\varphi(\varphi x) \le \varphi x$ がみたされ,「$x \in B \iff \varphi x = x$」が成り立つ．また，$x' \in A$ が $x \le x'$ をみたせば，$\{y \in B \mid x \le y\} \supseteq \{y \in B \mid x' \le y\}$ であるから $\varphi x \le \varphi x'$ が成り立つ．従って問題 3.18.21 により φ は閉写である．

3. 必要であることは問題 3.18.21 による．逆に ψ の留域 C が φ の留域 B に含まれれば，任意の $x \in A$ に対して，$\{y \in B \mid x \le y\} \supseteq \{y \in C \mid x \le y\}$，従って結論 1 により $\varphi x \le \psi x$ が成り立つ．

問題 3.18.22 A が集合で φ が $\mathcal{P}A$ 上の閉写であるとし，$\mathcal{B}$ を φ の留域とし，$D \subseteq A$ として写像 $\psi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ を $\psi X = \varphi(X \cup D)$ と定める．このとき，ψ も閉写であり，その留域は $\{Y \in \mathcal{B} \mid D \subseteq Y\}$ に等しい．また，φ が有限的なら ψ も有限的である．

略解　$\mathcal{B}' = \{Y \in \mathcal{B} \mid D \subseteq Y\}$ とすれば，定理 3.18.1 により $\varphi(X \cup D)$ が $\{Y \in \mathcal{B}' \mid X \subseteq Y\}$ の最小元であるから，また定理 3.18.1 により一番目の結論が成り立つ．二番目の結論は問題 3.18.19 による．

問題 3.18.23 A が代数系で D が A の部分集合であれば，A の各部分集合 X に算包 $[X \cup D]_A$ を対応させる写像は $\mathcal{P}A$ 上の有限的な閉写であり，その留域は A の D を含む台部分系の全体に等しい（このことは定理 3.24.11 で一般化する）．

問題 3.18.24 A が順序集合であれば，A の各部分集合 B に A における下方包 $\overleftarrow{B}$ を対応させる写像は $\mathcal{P}A$ 上の閉写であり，その留域は A の下方的部分集合の全体に等しい．上方包 $\overrightarrow{B}$ についても同様である．

問題 3.18.25 A が完備束であれば，A の各部分集合 B に A における交包 $B^{\cap}$ を対応させる写像は $\mathcal{P}A$ 上の閉写であり，その留域は A の交閉的部分集合の全体に等しい．結包 $B^{\cup}$ についても同様である．

問題 3.18.26 (✓) 各実数 x に x を下回らない最小整数を対応させる写像は $\mathbb{R}$ 上の閉写であり，各実数 x に x を超えない最大整数を対応させる写像は $\mathbb{R}$ 上の開写であり，これらの留域は $\mathbb{Z}$ に等しい．

定理 3.18.2 (ガロア対の基本定理) **$i = 0, 1$ に対して，$(A_i, \le_i)$ を順序集合とし，$f_i \in A_i \to A_{1-i}$ を減写で任意の $x \in A_i$ に対して $x \le_i f_{1-i}(f_i x)$ をみたすものとする（こういう (f_0, f_1) を<u>ガロア対</u>と呼ぶ[58]）．このとき，$f_i f_{1-i} f_i = f_i$ が成り立つ．また，$\varphi_i = f_{1-i} f_i$ は A_i 上の閉写であり（そこで (φ_0, φ_1) をガロア対 (f_0, f_1) に伴う<u>閉写対</u>と呼ぶ），その留域すなわち値域 $\varphi_i A_i$ は $f_{1-i} A_{1-i}$**

[58] ガロア (Évariste Galois, 1811-1832) はフランスの数学者．彼のいわゆる Galois 理論は，代数方程式の解が巾根によって構成される仕組みを，群の部分群束と体の部分体束の間のガロア対を介して解明した．

に等しく，$f_i|_{\varphi_i A_i}$ $(i = 0, 1)$ は，$\varphi_i A_i$ から $\varphi_{1-i} A_{1-i}$ への逆順写であって互いに他の逆写像である．特に，$x, x' \in A_i$ が $f_i x \leq_{i-1} f_i x'$ をみたすためには，$\varphi_i x' \leq_i \varphi_i x$ をみたすことが必要十分である．また，各 $x \in A_i$ に対し $f_i x = \max {f_{1-i}}^{-1}(\varphi_i x)$ が成り立つ．

証明　$j = 1-i$ と定める．そうすると，任意の $x \in A_i$ に対して $x \leq_i f_j f_i x$，すなわち $x \leq_i \varphi_i x$ が成り立つ．$x \leq_i f_j f_i x$ を f_i でうつして $f_i f_j f_i x \leq_j f_i x$ が得られ，$x \leq_i f_j f_i x$ の双対の $y \leq_j f_i f_j y$ に $y = f_i x$ を代入して逆の $f_i x \leq_j f_i f_j f_i x$ も得られるので，$f_i f_j f_i = f_i$ が成り立つ．これから $f_j f_i f_j f_i = f_j f_i$，すなわち $\varphi_i \varphi_i = \varphi_i$ が得られる．$x' \leq_i x$ なら，$f_i x \leq_j f_i x'$，従って $f_j f_i x' \leq_i f_j f_i x$，すなわち $\varphi_i x' \leq_i \varphi_i x$ が成り立つ．以上により φ_i は閉写である．$\varphi_i = f_j f_i$ かつ $f_j = f_j f_i f_j = \varphi_i f_j$ であるので，$\varphi_i A_i = f_j A_j$ が成り立つ．$f_j y \leq_i f_j y'$ であれば $f_i f_j y' \leq_j f_i f_j y$ すなわち $\varphi_j y' \leq_j \varphi_j y$ が成り立ち，逆に $\varphi_j y' \leq_j \varphi_j y$ すなわち $f_i f_j y' \leq_j f_i f_j y$ であれば $f_j y = f_j f_i f_j y \leq_i f_j f_i f_j y' = f_j y'$ が成り立つ．従って $f_i|_{f_j A_j}$ は真減写である．$f_i f_j f_i = f_i$ が成り立つので，$f_i(f_j A_j) = f_i A_i$ であり，従って $f_i|_{f_j A_j}$ は $f_j A_j$ から $f_i A_i$ への逆順写である．さらに，$(f_j f_i) f_j = f_j$ と $(f_i f_j) f_i = f_i$ が成り立つので，$f_i|_{f_j A_j}$ と $f_j|_{f_i A_i}$ は互いに他の逆写像である．最後に，$f_j(f_i x) = \varphi_i x$ であり，また $f_j y = \varphi_i x$ であれば，$y \leq_j f_i f_j y = f_i \varphi_i x = f_i f_j f_i x = f_i x$ が成り立つ．

問題 3.18.27 (✓)　φ が順序集合 $(A, \leq)$ 上の閉写で B が φ の留域であれば，写像 $\varphi \in A {\to} B$ と写像 $\mathrm{id}_B \in B {\to} A$ とは，$(A, \leq)$ と双対制限順序集合 $(B, \geq|_B)$ との間のガロア対を成し，その閉写対は (φ, id_B) である．

問題 3.18.28　A, B を集合とし，$\mathcal{P}A$ と $\mathcal{P}B$ が包含関係 $\subseteq$ により成す順序集合の間のガロア対 φ, ψ で φ と ψ が共に反加法的であるものの全体を $\mathcal{G}$ で表し，$\mathcal{P}A {\to} \mathcal{P}B$ 上と $\mathcal{P}B {\to} \mathcal{P}A$ 上の巾順序関係から出来る $(\mathcal{P}A {\to} \mathcal{P}B) \times (\mathcal{P}B {\to} \mathcal{P}A)$ 上の直積順序の制限により $\mathcal{G}$ を順序集合と成す．また，A, B 間の任意の関係 R に対し，写像 $\varphi_R \in \mathcal{P}A {\to} \mathcal{P}B$ と写像 $\psi_R \in \mathcal{P}B {\to} \mathcal{P}A$ を次のように定める．

$$\varphi_R X = \{y \in B \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対して } x \mathrel{R} y\}$$
$$\psi_R Y = \{x \in A \mid \text{任意の } y \in Y \text{ に対して } x \mathrel{R} y\}$$

そうすると写像 $R \mapsto (\varphi_R, \psi_R)$ は，A, B 間の関係の全体すなわち $\mathcal{P}(A \times B)$ から $\mathcal{G}$ への同順写である．また，$\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}B$ への反加法的写像 φ の各々に対して $(\varphi, \psi) \in \mathcal{G}$ なる ψ が唯一つ存在し，$\mathcal{P}B$ から $\mathcal{P}A$ への反加法的写像 ψ の各々に対して $(\varphi, \psi) \in \mathcal{G}$ なる φ が唯一つ存在する．

略解　$(\varphi, \psi) \in \mathcal{G}$ であれば，問題 3.18.16 により，A, B 間の関係 Q と R で $\varphi = \varphi_Q$，$\psi = \psi_R$ なるものがそれぞれ唯一つ存在する．そして次の推論により，$Q = R$ なることが示される．

$$x \mathrel{Q} y \implies \varphi\{x\} \supseteq \{y\} \implies \{x\} \subseteq \psi(\varphi\{x\}) \subseteq \psi\{y\} \implies x \mathrel{R} y$$
$$x \mathrel{R} y \implies \{x\} \subseteq \psi\{y\} \implies \varphi\{x\} \supseteq \varphi(\psi\{y\}) \supseteq \{y\} \implies x \mathrel{Q} y$$

問題 3.18.29　順序集合 A において，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して，$\mathcal{P}A$ の元 $[X{\to})$ と $({\leftarrow}X]$ を

$$[X{\to}) = \bigcap_{x \in X} [x{\to}) \qquad\qquad ({\leftarrow}X] = \bigcap_{x \in X} ({\leftarrow}x]$$

と定義する（これらは X の上界の全体と下界の全体である）．このとき写像 $X \mapsto [X{\to})$ と $X \mapsto ({\leftarrow}X]$ は，$\mathcal{P}A$ とそれ自身の間で包含関係 $\subseteq$ に関してガロア対を成し，反加法的である．

問題 3.18.30 (✓)　f が集合 A から集合 B への写像であれば，各 $X \in \mathcal{P}A$ に X の f による像 $fX \in \mathcal{P}B$ を対応させる写像と，各 $Y \in \mathcal{P}B$ に Y の f による逆像 $f^{-1}Y \in \mathcal{P}A$ を対応させる写像とは，$\mathcal{P}A$ が包含関係 $\subseteq$ について成す順序集合 $(\mathcal{P}A, \subseteq)$ と $\mathcal{P}B$ が双対包含関係 $\supseteq$ について成す順序集合 $(\mathcal{P}B, \supseteq)$ の間のガロア対を成し，それに伴う閉写対は共に有限的である．

問題 3.18.31　$(A, \leq)$ を完備束とし，各写像 $\varphi \in A {\to} A$ に対して写像 $\overline{\varphi} \in A {\to} A$ を

$$\overline{\varphi}x = \sup\{\varphi y \mid y \leq x\}$$

と定める（特に A が集合 S の巾集合の場合は $\overline{\varphi}X = \bigcup_{Y \subseteq X} \varphi Y$）．そうすると $\overline{\varphi}$ は，$A {\to} A$ 上の巾順序関係について φ より大きい増写の中で最小のものである（そこで $\overline{\varphi}$ を φ の**増写包**と呼ぶ）．従って写像 $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ は $A {\to} A$ 上の閉写であり，その留域は増写の全体に等しい．

略解　任意の $x \in A$ に対して，$x \leq x$ であるから $\varphi x \leq \overline{\varphi}x$ が成り立つ．$x' \in A$ が $x \leq x'$ をみたせば，$\{\varphi y \mid y \leq x\} \subseteq \{\varphi y \mid y \leq x'\}$ であるから，$\overline{\varphi}x \leq \overline{\varphi}x'$ が成り立つ．$\psi \in A {\to} A$ が増写で $\varphi \leq \psi$ をみたせば，$y \leq x$ なる任意の $y \in A$ に対して $\varphi y \leq \psi y \leq \psi x$ であるから，$\overline{\varphi}x \leq \psi x$ が成り立つ．

補題 3.18.1　$(A, \leq)$ **を完備束とし，**$A {\to} A$ **と** $\mathcal{P}A$ **を巾順序関係** $\leq$ **と包含関係** $\subseteq$ **によって順序集合と成す．また，各** $\varphi \in A {\to} A$ **に対して，**φ **の増写包** $\overline{\varphi}$ **の閉域を** B_φ **で表す．**

$$B_\varphi = \{x \in A \mid \overline{\varphi}x \leq x\}$$

また，各 $B \in \mathcal{P}A$ **に対して，**$A {\to} A$ **の元** φ_B **を次のように定義する．すなわち，各** $x \in A$ **に対して**

$$\varphi_B x = \inf\{y \in B \mid x \leq y\}$$

そうすると，写像 $\varphi \mapsto B_\varphi$ **と** $B \mapsto \varphi_B$ **は** $A {\to} A$ **と** $\mathcal{P}A$ **の間のガロア対を成し，これに伴う閉写対について次のことが成り立つ．すなわちまず，各** $\varphi \in A {\to} A$ **に対し** $\varphi^\infty = \varphi_{B_\varphi}$ **と定めれば，**φ^∞ **は** φ **より大きい** A **上の閉写の中で最小のものであり（そこで** φ^∞ **を** φ **の閉写包と呼ぶ），**φ^∞ **の留域は** B_φ **に等しい．次に，各** $B \in \mathcal{P}A$ **に対し，**B_{φ_B} **は** B **の** A **における交包** $B^\cap$ **に等しい．**

証明　1. 任意の $B \in \mathcal{P}A$ をとる．そうすると定義により，任意の $x \in A$ に対して $\varphi_B x \geq x$ が成り立ち，特に $x \in B$ であれば $\varphi_B x = x$ が成り立つ．また，$x, x' \in A$ が $x \leq x'$ をみたせば，$\{y \in B \mid x \leq y\} \supseteq \{y \in B \mid x' \leq y\}$ であるから $\varphi_B x \leq \varphi_B x'$ が成り立つ．つまり φ_B は増写である．

2. 任意の $\varphi \in A {\to} A$ とる．さらに，B_φ の任意の部分集合 X をとって $y = \inf X$ と定める．そうすると，任意の $x \in X$ に対して，$y \leq x$ であるから $\overline{\varphi}y \leq \overline{\varphi}x \leq x$ が成り立つ．従って $\overline{\varphi}y \leq y$，すなわち $y \in B_\varphi$ が成り立つ．つまり B_φ は交閉的である．

3. $\varphi' \in A {\to} A$ が $\varphi \leq \varphi'$ をみたせば，問題 3.18.31 により $\overline{\varphi} \leq \overline{\varphi'}$ であるから，問題 3.18.21 により $B_\varphi \supseteq B_{\varphi'}$ が成り立つ．また，任意の $x \in A$ をとると，$x \leq y$ なる任意の $y \in B_\varphi$ に対して問題 3.18.31 により $\varphi x \leq \overline{\varphi}x \leq \overline{\varphi}y \leq y$ であるから，$\varphi x \leq \varphi_{B_\varphi} x$ が成り立つ．つまり，$\varphi \leq \varphi_{B_\varphi}$ が成り立つ．また，$B' \in \mathcal{P}A$ が $B \subseteq B'$ をみたせば，任意の $x \in A$ に対して，$\{y \in B \mid x \leq y\} \subseteq \{y \in B' \mid x \leq y\}$ であることより $\varphi_B x \geq \varphi_{B'} x$ が成り立つから，$\varphi_B \geq \varphi_{B'}$ が成り立つ．また，(1) により $B \subseteq B_{\varphi_B}$ が成り立つ．これで，ガロア対の要件のみたされることが示された．

4. 任意の $x \in A$ に対して，(1) と (2) により $x \leq \varphi_{B_\varphi} x \in B_\varphi$ であるから，$\varphi^\infty x = \varphi_{B_\varphi} x = \min\{y \in B_\varphi \mid x \leq y\}$ が成り立つ．従って定理 3.18.1 により，φ^∞ は閉写であり，その留域は B_φ

に等しい．閉写 $\psi \in A{\rightarrow}A$ が $\varphi \leq \psi$ をみたすとする．そうすると，問題 3.18.31 により $\overline{\varphi} \leq \psi$ であるので，任意の $x \in A$ に対して $\overline{\varphi}(\psi x) \leq \psi(\psi x) = \psi x$，すなわち $\psi x \in B_\varphi$ であり，他方で $x \leq \psi x$ であるから，$\varphi^\infty x \leq \psi x$ となる．つまり $\varphi^\infty \leq \psi$ が成り立つ．

5. (1) と (2) と問題 3.9.36 により $B_{\varphi_B} = \{x \in A \mid \varphi_B x \leq x\} = \{x \in A \mid \varphi_B x = x\} \subseteq B^\cap$ が成り立つ．逆に $x \in B^\cap$ なら，$x = \inf X$ なる B の部分集合 X があって $X \subseteq \{y \in B \mid x \leq y\}$ であるから $\varphi_B x \leq x$，従って $x \in B_{\varphi_B}$ が成り立つ．これで $B_{\varphi_B} = B^\cap$ が示された．

定理 3.18.3 完備束 $(A, \leq)$ 上の閉写について次のことが成り立つ．

1. **φ が A 上の閉写であれば，B を φ の留域とするとき，B は A において交閉的かつ制限順序関係 $\leq|_B$ について完備であり，任意の $x \in A$ について $\varphi x = \min\{y \in B \mid x \leq y\}$ が成り立つ．**

2. **B が A の部分集合であれば，各 $x \in A$ に $\inf\{y \in B \mid x \leq y\}$ を対応させる写像を φ_B で表すとき，φ_B は A 上の閉写であり，φ_B の留域は B の A における交包 $B^\cap$ に等しく，任意の $x \in A$ に対して $\varphi_B x = \min\{y \in B^\cap \mid x \leq y\}$ が成り立つ．**

3. **A 上の閉写の全体は，$A{\rightarrow}A$ 上の巾順序関係 $\leq$ について交閉的であり，$\leq$ の制限順序関係について完備である．**

4. **$\varphi \in A{\rightarrow}A$ であれば，φ の閉写包 φ^∞ の留域は φ の増写包 $\overline{\varphi}$ の閉域に等しく，各 $x \in A$ に対し，$\varphi^\infty x$ は x より大きい $\overline{\varphi}$ 閉元の中で最小のものである．**

5. **各 $\varphi \in A{\rightarrow}A$ に φ^∞ を対応させる写像は $A{\rightarrow}A$ 上の巾順序関係 $\leq$ についての閉写であり，その留域は A 上の閉写の全体に等しい．**

証明　結論 4, 5 は補題 3.18.1 と定理 3.18.1 から得られる．$A{\rightarrow}A$ が問題 3.9.38 により巾順序関係について完備であるから，結論 5 の閉写 $\varphi \mapsto \varphi^\infty$ にこれから証明する結論 1 を適用すれば結論 3 が得られる．補題 3.18.1 のガロア対を (F, G) で表し，それに伴う閉写対を (f, g) で表す．すなわち，各 $\varphi \in A{\rightarrow}A$ と $B \in \mathcal{P}A$ に対し

$$F\varphi = \{x \in A \mid \overline{\varphi}x \leq x\} \qquad (GB)x = \inf\{y \in B \mid x \leq y\} \quad (x \in A)$$
$$f\varphi = GF\varphi = \varphi^\infty \qquad gB = FGB = B^\cap$$

そうすると，定理 3.18.2 により $G(\mathcal{P}A) = f(A{\rightarrow}A)$ であり，これは結論 5 により A 上の閉写の全体に等しい．同様に $F(A{\rightarrow}A) = g(\mathcal{P}A)$ であり，これは問題 3.18.25 により A の交閉的部分集合の全体に等しい．従って，φ が A 上の閉写で B がその留域であれば，$B = F\varphi \in F(A{\rightarrow}A)$ であるから B は交閉的である．これと問題 3.9.34 と定理 3.18.1 を合わせれば結論 1 が得られる．また $B \in \mathcal{P}A$ のとき，$\varphi = GB$ と定めれば，$\varphi \in G(\mathcal{P}A)$ であるから φ は閉写であり，従って $\varphi = \varphi^\infty$ であるから，補題 3.18.1 により，φ の留域は $F\varphi = FGB = gB = B^\cap$ に等しい．これと定理 3.18.1 を合わせれば結論 2 が得られる．

問題 3.18.32 (✓) $(A, \leq)$ が完備束であれば次のことが成り立つ．

1. $\varphi \in A{\rightarrow}A$ が増写であれば，φ の閉域は A において交閉的である．

2. 任意の $B \in \mathcal{P}A$ と $x \in A$ に対して $\inf\{y \in B \mid x \leq y\} = \min\{y \in B^\cap \mid x \leq y\}$ が成り立つ．

3. $B \in \mathcal{P}A$ が A において交閉的であるためには，任意の $x \in A$ に対して $\min\{y \in B \mid x \leq y\}$ の存在することも，B を留域とする A 上の閉写の存在することも必要十分である．

略解　定理 3.18.3 およびその証明の論法と定理 3.18.1 による．

問題 3.18.33　φ が完備束 A 上の閉写で B が φ の留域であれば，任意の $X \subseteq B$ に対し $\sup_B X = \varphi(\sup_A X)$ と $\inf_B X = \varphi(\inf_A X) = \inf_A X$ が成り立ち，従って，$\varphi(\min A)$ と $\max A$ とが B の最小元と最大元とである．また，任意の $Y \subseteq A$ に対して $\varphi(\sup_A(\varphi Y)) = \varphi(\sup_A Y)$ が成り立つ．

略解　任意の $x \in X$ に対して $x \leq \sup_A X$，従って $x = \varphi x \leq \varphi(\sup_A X)$ が成り立つ．また，$y \in B$ が任意の $x \in X$ に対して $x \leq y$ をみたせば，$\sup_A X \leq y$，従って $\varphi(\sup_A X) \leq \varphi y = y$ が成り立つ．従って $\varphi(\sup_A X) = \sup_B X$ であり，同様に $\varphi(\inf_A X) = \inf_B X$ を得る．また，定理 3.18.3 により B は交閉的であるから，問題 3.9.34 により $\inf_B X = \inf_A X$ が成り立つ．特に $X = \emptyset$ として $\min B = \varphi(\min A)$ と $\max B = \max A$ を得る．

任意の $y \in Y$ に対して $\varphi y \geq y$ が成り立つから，$\sup_A(\varphi Y) \geq \sup_A Y$，従って $\varphi(\sup_A(\varphi Y)) \geq \varphi(\sup_A Y)$ を得る．また，任意の $y \in Y$ に対して $y \leq \sup_A Y$，従って $\varphi y \leq \varphi(\sup_A Y)$ が成り立つから，$\sup_A(\varphi Y) \leq \varphi(\sup_A Y)$ であり，従ってさっきと逆の $\varphi(\sup_A(\varphi Y)) \leq \varphi(\sup_A Y)$ を得る．

問題 3.18.34　A が集合で写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が有限的であれば，φ の閉写包 φ^∞ は $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ 上の巾順序関係についての上限 $\bigcup_{n \geq 1}(\varphi^0 \cup \varphi)^n$ に等しく（問題 3.33.17 参照），φ^∞ も有限的であり，φ^∞ の留域は A の φ 閉集合の全体に等しく，従って各 $X \in \mathcal{P}A$ に対し，$\varphi^\infty X$ は X を含む最小の A の φ 閉集合である．

略解　$\varphi_0 = \varphi^0 \cup \varphi$，$\tilde{\varphi} = \bigcup_{n \geq 1} \varphi_0^n$ と定める．$\tilde{\varphi} \supseteq \varphi_0 \supseteq \varphi^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}A}$ なので，$\tilde{\varphi}, \varphi_0$ は拡大律に従う．問題 3.18.12 と問題 3.18.18 により $\tilde{\varphi}, \varphi_0$ は有限的，従って増写である．任意の $X \in \mathcal{P}A$ をとって $Y = \tilde{\varphi}X$ と定める．そうすると，$Y = \bigcup_{n \geq 1} \varphi_0^n X$ かつ $\varphi_0^1 X \subseteq \varphi_0^2 X \subseteq \cdots$ であるから，$Z \in \mathcal{P}'Y$ であれば $Z \subseteq \varphi_0^n X$ なる n があって $\varphi_0 Z \subseteq \varphi_0^{n+1} X \subseteq Y$ となる．従って $\varphi_0 Y \subseteq Y$ が成り立ち，これから $\tilde{\varphi} Y \subseteq Y$，すなわち巾閉律 $\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}X) \subseteq \tilde{\varphi}X$ が得られる．ψ が φ より大きい閉写であれば，$\psi \supseteq \varphi_0$ なので問題 3.9.19 により $\psi \supseteq \varphi_0^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$，従って $\psi \supseteq \tilde{\varphi}$ が成り立つ．以上により $\tilde{\varphi} = \varphi^\infty$ である．残りのことは定理 3.18.3 による．

注意 3.18.7　巾集合上の閉写について以下に述べることの中には，順序集合や完備束上の閉写についての既出のことの特殊化に過ぎないものがあるが，重要なので改めて述べるのである．

問題 3.18.35　A が集合で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の部分集合であれば，各 $X \in \mathcal{P}A$ に $\bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ を対応させる写像を $\varphi_{\mathcal{B}}$ で表すとき，$\varphi_{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{P}A$ 上の閉写であり，$\varphi_{\mathcal{B}}$ の留域は $\mathcal{B}$ の A に関する交包 $\mathcal{B}^\cap$ に等しく，任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $\bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B = \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{B}^\cap} Y$ が成り立つ．逆に φ が $\mathcal{P}A$ 上の閉写であれば，$\mathcal{B}$ を φ の留域とするとき，$\varphi = \varphi_{\mathcal{B}}$ が成り立ち，$\mathcal{B}$ は A に関して交閉的かつ包含関係 $\subseteq$ について完備である．

略解　定理 3.18.3 の一部を完備束 $\mathcal{P}A$ に特殊化したものである．

問題 3.18.36　A が集合で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の部分集合であれば，$\mathcal{B}$ の A に関する交包 $\mathcal{B}^\cap$ は，$\mathcal{B}$ の元任意個の交わり全体に等しく（ただし $\mathcal{B}$ の元零個の交わりは，第 3.9.3 項の下限の定義により A である），$\mathcal{B}$ を含み A に関して交閉的な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中で最小のものである．また，写像 $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^\cap$ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写であり，その留域は $\mathcal{P}A$ の A に関して交閉的な部分集合の全体に等しい．また，$X \in \mathcal{B}^\cap - \{A\}$ であれば $X \subseteq B$ なる $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ が存在し，従って $\bigcup(\mathcal{B} - \{A\}) = \bigcup(\mathcal{B}^\cap - \{A\})$ が成り立つ．

略解　最後のこと以外は問題 3.9.36 と問題 3.18.25 の特殊化である．

注意 3.18.8 問題 3.18.36 の括弧中や注意 3.9.3 に記した事情で，交包についての「A に関する」という断りは省くことができない．後出の「交概有限包」についても同様である．これに対し結包・下方包や後出の「概有限包」「有限包」「覆包」「劣有限包」については，注意 3.9.3 や注意 3.18.1 に記した事情で，こういう断りは必要ない．

問題 3.18.37 A を集合とし，$\mathcal{P}A$ の各部分集合 $\mathcal{B}$ に対し，$\mathcal{B}$ によって超被覆される $\mathcal{P}A$ の元の全体を $\overline{\mathcal{B}}$ で表す．そうすると写像 $\mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写であり，その留域は $\mathcal{P}A$ の概有限な部分集合の全体に等しい．従って $\overline{\mathcal{B}}$ は，$\mathcal{B}$ を含み概有限な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中で最小のものである（そこで $\overline{\mathcal{B}}$ を $\mathcal{B}$ の**概有限包**と呼ぶ）．また，任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ に対して $\bigcap_{Y \subseteq B \in \mathcal{B}} B = \bigcap_{Y \subseteq X \in \overline{\mathcal{B}}} X$ が成り立ち，$\bigcup(\mathcal{B} - \{A\}) = \bigcup(\overline{\mathcal{B}} - \{A\})$ が成り立ち，$X \in \overline{\mathcal{B}}$ であれば $B \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}$ が存在する．また，$\overline{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$ は無限集合から成る

略解　$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}A$ とし，$\overline{\mathcal{B}}$ によって超被覆される $X \in \mathcal{P}A$ を任意にとる．$Y \in \mathcal{P}'X$ であれば，$Y \subseteq B' \subseteq X$ なる $B' \in \overline{\mathcal{B}}$ があるから，$Y \subseteq B \subseteq B' \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}$ がある．従って，X は $\mathcal{B}$ によって超被覆される．これは巾閉律 $\overline{\overline{\mathcal{B}}} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$ がみたされることを示す．$Y \in \mathcal{P}'A$ のとき，$Y \subseteq X \in \overline{\mathcal{B}}$ なら $Y \subseteq B \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}$ があるから，$\bigcap_{Y \subseteq B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcap_{Y \subseteq X \in \overline{\mathcal{B}}} X$ が成り立つ．$x \in X \in \overline{\mathcal{B}} - \{A\}$ なら $x \in B \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}$ があって $B \neq A$ であるから，$\bigcup(\mathcal{B} - \{A\}) \supseteq \bigcup(\overline{\mathcal{B}} - \{A\})$ が成り立つ．$X \in \overline{\mathcal{B}}$ なら，$\emptyset \in \mathcal{P}'X$ であるから $\emptyset \subseteq B \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}$ がある．最後のことは問題 3.18.6 による．

注意 3.18.9 $\mathcal{B}$ を含み概有限な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中に最小のものがあることは問題 3.18.4 からすでに分かっており，後出の有限包・覆包・劣有限包・交概有限包についても問題 3.18.4 と注意 3.18.2 により同様である．

問題 3.18.38 A が集合で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の部分集合であれば，$\mathcal{B}$ の下方包 $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ は，$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{P}B$ に等しく，$\mathcal{B}$ を含み下方的な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中で最小のものである．また，写像 $\mathcal{B} \mapsto \overleftarrow{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写であり，その留域は $\mathcal{P}A$ の下方的な部分集合の全体に等しい．また，包含関係 $\subseteq$ に関して $\mathcal{B}$ の極大元の全体と $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ の極大元の全体は等しく，$\bigcup \mathcal{B} = \bigcup \overleftarrow{\mathcal{B}}$ が成り立つ．

略解　最後のこと以外は問題 3.9.8 と問題 3.18.24 の特殊化である．

問題 3.18.39 A が集合で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の部分集合であれば，$\mathcal{B}$ の下方包 $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ の概有限包 $\overset{\leftleftarrows}{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{B}$ によって強被覆される $\mathcal{P}A$ の元の全体に等しく，写像 $\mathcal{B} \mapsto \overset{\leftleftarrows}{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写であり，その留域は $\mathcal{P}A$ の有限的な部分集合の全体に等しい．従って $\overset{\leftleftarrows}{\mathcal{B}}$ は，$\mathcal{B}$ を含み有限的な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中で最小のものである（そこで $\overset{\leftleftarrows}{\mathcal{B}}$ を $\mathcal{B}$ の**有限包**と呼ぶ）．また，A の部分集合が $\overset{\leftleftarrows}{\mathcal{B}}$ に属すためには，$\overleftarrow{\mathcal{B}}$ により極被覆されることが必要十分である．

略解　最後の注意は問題 3.18.2 による．

問題 3.18.40 (✓) A が集合で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の部分集合であれば，$\mathcal{B}$ の下方包 $\overleftarrow{\mathcal{B}}$ の結包 $\overleftarrow{\mathcal{B}}^{\cup}$ は $\mathcal{B}$ によって被覆される $\mathcal{P}A$ の元の全体 $\mathcal{P}(\bigcup \mathcal{B})$ に等しく，写像 $\mathcal{B} \mapsto \overleftarrow{\mathcal{B}}^{\cup}$ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写であり，その留域は $\mathcal{P}A$ の覆閉的な部分集合の全体に等しい．従って $\overleftarrow{\mathcal{B}}^{\cup}$ は，$\mathcal{B}$ を含み覆閉的な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中で最小のものである（そこで $\overleftarrow{\mathcal{B}}^{\cup}$ を $\mathcal{B}$ の**覆包**と呼ぶ）．

問題 3.18.41 **(✓)** A を集合とし，$\mathcal{P}A$ の各部分集合 $\mathcal{B}$ に対し，$\mathcal{B}$ により極被覆される $\mathcal{P}A$ の元の全体を $\mathcal{B}'$ で表し，$\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ と定める（超被覆・強被覆・被覆の場合と違って $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ とは限らないことに留意）．そうすると，写像 $\mathcal{B} \mapsto \widetilde{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写であり，その留域は $\mathcal{P}A$ の劣有限な部分集合の全体に等しい．従って $\widetilde{\mathcal{B}}$ は，$\mathcal{B}$ を含み劣有限な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中で最小のものである（そこで $\widetilde{\mathcal{B}}$ を $\mathcal{B}$ の**劣有限包**と呼ぶ）．また，$\widetilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$ は無限集合から成る．

問題 3.18.42 **(✓)** A が集合で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の部分集合であれば次のことが成り立つ．

$$\overleftarrow{\overline{\mathcal{B}}} \subseteq \overline{\overleftarrow{\mathcal{B}}} = \widetilde{\overleftarrow{\mathcal{B}}} \qquad \overleftarrow{\mathcal{B}^{\cup}} \subseteq \overleftarrow{\mathcal{B}}^{\cup} \qquad \overline{\mathcal{B}}^{\cup} = \mathcal{B}^{\cup} \qquad \widetilde{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{\widetilde{\mathcal{B}}} = \overline{\mathcal{B}}$$

問題 3.18.43 **(✓)** A を集合とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}A$ の部分集合とし，$\mathcal{B}$ の相異なる二元の間には包含関係が無いと仮定する．このとき $\overleftarrow{\mathcal{B}} \cap \overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ が成り立つ．

略解　$X \in \overleftarrow{\mathcal{B}} \cap \overline{\mathcal{B}}$ とすれば，まず $X \subseteq B$ なる $B \in \mathcal{B}$ があり，次に問題 3.18.37 により $B' \subseteq X$ なる $B' \in \mathcal{B}$ があるから，$X = B = B' \in \mathcal{B}$ が成り立つ．

図 3.9: 巾集合の部分集合 $\mathcal{B}$ の各種の包の相関図（矢印の向きに注意．問題 3.18.42 参照）

$$\begin{tikzcd}
 & & & \boxed{\text{劣有限包 } \tilde{\mathcal{B}}} \arrow[dl] \\
\boxed{\text{下方包 } \overleftarrow{\mathcal{B}}} \arrow[dr] & & \boxed{\text{概有限包 } \overline{\mathcal{B}}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{\overleftarrow{\overline{\mathcal{B}}}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \boxed{\text{結包 } \mathcal{B}^{\cup}} \arrow[dl] \\
\boxed{\text{有限包 } \overline{\overleftarrow{\mathcal{B}}}} \arrow[dr] & & \boxed{\overleftarrow{\mathcal{B}^{\cup}}} \arrow[dl] & \\
 & \boxed{\text{覆包 } \overleftarrow{\mathcal{B}}^{\cup}} & &
\end{tikzcd}$$

問題 3.18.44 A を集合とし，$\mathcal{P}A$ の各部分集合 $\mathcal{B}$ と各 $C \in \mathcal{P}A$ に対し，$\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}^C$ を $\mathcal{B}^C = \{B \in \mathcal{B} \mid C \subseteq B\}$ と定める（これを $\mathcal{B}$ の C **上方**と呼ぶ）．そうすると，$\mathcal{P}A$ の任意の部分集合 $\mathcal{B}$ に対して，次のことが成り立つ．

1. 任意の $C \in \mathcal{P}A$ に対して $\overline{\mathcal{B}^C} \subseteq \overline{\mathcal{B}}^C$ が成り立つ．
2. $C \in \mathcal{P}'A$ であれば $\overline{\mathcal{B}^C} = \overline{\mathcal{B}}^C$ が成り立つ．
3. $C \in \overline{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$ であれば $C \in \overline{\mathcal{B}}^C - \overline{\mathcal{B}^C}$ が成り立つ．
4. $\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}$ についての次の三条件は同等である．
   a. $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ が成り立つ．
   b. 任意の $C \in \mathcal{P}A$ に対して $\overline{\mathcal{B}^C} = \overline{\mathcal{B}}^C$ が成り立つ．
   c. 任意の $C \in \mathcal{P}A$ に対して $\overline{\mathcal{B}^C} = \mathcal{B}^C$ が成り立つ．

略解　1. 任意の $X \in \overline{\mathcal{B}^C}$ をとる．そうすると，$Y \in \mathcal{P}'X$ であれば，$Y \subseteq B \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}^C$ があり，$\mathcal{B}^C$ の定義により $B \in \mathcal{B}$ と $C \subseteq X$ が成り立つ．従って $X \in \overline{\mathcal{B}}^C$ が成り立つ．

2. $C \in \mathcal{P}'A$ とし，任意の $X \in \overline{\mathcal{B}}^C$ をとる．そうすると，$Y \in \mathcal{P}'X$ であれば，$C \cup Y \subseteq B \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}$ がある．従って $X \in \overline{\mathcal{B}^C}$ が成り立つ．

3. $C \in \overline{\mathcal{B}^C}$ とすれば，問題 3.18.37 により $B \subseteq C$ なる $B \in \mathcal{B}^C$ があるから，$C = B \in \mathcal{B}$ となって矛盾である．

4. 条件 a の下で，任意の $C \in \mathcal{P}A$ に対し $\overline{\mathcal{B}^C} \subseteq \overline{\mathcal{B}}^C = \mathcal{B}^C \subseteq \overline{\mathcal{B}^C}$，従って条件 b, c がみたされる．

問題 3.18.45　A を集合とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{P}A$ の部分集合で包含関係 $\subseteq$ に関して帰納的のものとし，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{B}$ の $\subseteq$ に関する極大元の全体とする．このとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ の下方包に含まれる．

略解　ツォルンの補題の系と問題 3.18.38 による．

問題 3.18.46 (✓)　A が第一分離公理をみたす位相空間であるとき，$\mathcal{B}$ が A の開集合系であれば $\mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{P}A$ が成り立ち，$\mathcal{B}$ が A の閉集合系であれば $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{P}A$ が成り立つ．

略解　任意の $X \in \mathcal{P}A$ について $X = \bigcap_{y \in A-X}(A - \{y\})$ であって，任意の $y \in A$ に対して $A - \{y\}$ が開集合であるので，開集合についてのことが成り立つ．$\mathcal{B}$ が A の閉集合系であれば，$\mathcal{P}'A \subseteq \mathcal{B}$ が成り立つから，問題 3.18.7 と問題 3.18.2 により $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{P}A$ が成り立つ．

問題 3.18.47 (問題 3.24.14 参照)　A を集合とし $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ を有限的写像とする．このとき，φ が拡大律に従うことは，任意の $X \in \mathcal{P}'A$ に対して $X \subseteq \varphi X$ をみたすこととも，法則

$$\varphi\{x_1, \ldots, x_n\} \ni x_i \ (i = 1, \ldots, n) \tag{3.18.1}$$

に従うこととも同等である．また φ が巾閉律に従うためには，任意の $X \in \mathcal{P}'A$ に対して $\varphi(\varphi X) \subseteq \varphi X$ をみたすことも，次の法則に従うことも必要十分である．

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\{x_1, \ldots, x_m\} \ni y_j \ (j = 1, \ldots, n) \\ \varphi\{y_1, \ldots, y_n\} \ni z \end{array}\right\} \implies \varphi\{x_1, \ldots, x_m\} \ni z \tag{3.18.2}$$

略解　$\mathcal{P}A$ の恒等写像を ψ で表せば，ψ も有限的であり，φ が拡大律に従うことは，$\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ 上の巾順序関係について $\psi \subseteq \varphi$ をみたすことと同等であり，このことは問題 3.18.12 により，任意の $X \in \mathcal{P}'A$ に対して $X \subseteq \varphi X$ をみたすことと同等である．また，φ が巾閉律に従うためには，$\varphi^2 \subseteq \varphi$ をみたすことが必要十分であり，このためには問題 3.18.12 により，任意の $X \in \mathcal{P}'A$ に対して $\varphi(\varphi X) \subseteq \varphi X$ をみたすことが必要十分である．また，$\varphi(\varphi X) \subseteq \varphi X$ が成り立つためには，任意の $Y \in \mathcal{P}'(\varphi X)$ に対して $\varphi Y \subseteq \varphi X$ の成り立つことが必要十分である．以上のことから上記の結論が得られる．

問題 3.18.48　A が集合で写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が増写なら，写像 $\varphi' \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ を $\varphi' X = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \varphi Y$ と定めるとき，次のことが成り立つ．

1. φ' は $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ において巾順序関係 $\subseteq$ について φ より小さい有限的写像の中で最大のものであり（そこで φ' を φ の**有限核**と呼ぶ），任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ に対して $\varphi' Y = \varphi Y$ をみたす．
2. φ が閉写であれば，φ' も閉写であって，φ' の留域は φ の留域 $\mathcal{B}$ の概有限包 $\overline{\mathcal{B}}$ に等しい．

従って写像 $\varphi \mapsto \varphi'$ は，$\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への増写の全体上の開写であって，その留域は有限的写像の全体に等しい．また，$\mathcal{P}A$ 上の閉写 φ が有限的であるためには，φ の留域が概有限であることが必要十分である．

略解　1. φ が増写なので $\varphi' \subseteq \varphi$ が成り立つ．$Y \in \mathcal{P}'A$ に対しては，定義により $\varphi'Y \supseteq \varphi Y$ でもあるので，$\varphi'Y = \varphi Y$ が成り立つ．従ってまた φ' は有限的である．$\psi \in \mathcal{P}A {\to} \mathcal{P}A$ が $\psi \subseteq \varphi$ をみたす有限的写像であれば，任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ に対して $\psi Y \subseteq \varphi Y = \varphi'Y$ が成り立つから，問題 3.18.12 により $\psi \subseteq \varphi'$ が成り立つ．

2. φ が閉写であるとする．このとき，任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ に対して $Y \subseteq \varphi Y = \varphi'Y$ が成り立つから，問題 3.18.47 により φ' は拡大律に従う．また，任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ に対して，$\varphi'(\varphi'Y) = \varphi'(\varphi Y) = \bigcup_{Z \in \mathcal{P}'(\varphi Y)} \varphi Z$ であるが，$Z \subseteq \varphi Y$ なら $\varphi Z \subseteq \varphi(\varphi Y) = \varphi Y = \varphi'Y$ が成り立つので，$\varphi'(\varphi'Y) \subseteq \varphi'Y$ が成り立つ．従って問題 3.18.47 により φ' は巾閉律に従う．また，問題 3.18.12 により φ' は増写である．従って φ' は閉写である．

$X \in \overline{\mathcal{B}}$ であれば，各 $Y \in \mathcal{P}'X$ に対して $Y \subseteq B \subseteq X$ なる $B \in \mathcal{B}$ があって $\varphi Y \subseteq \varphi B = B \subseteq X$ が成り立つので，$\varphi'X = X$ が成り立つ．逆に，A の部分集合 X が $\varphi'X = X$ をみたせば，各 $Y \in \mathcal{P}'X$ に対して $Y \subseteq \varphi Y \subseteq X$ が成り立って $\varphi Y \in \mathcal{B}$ であるから，$X \in \overline{\mathcal{B}}$ が成り立つ．

問題 3.18.49　A が集合で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}A$ の A に関して交閉的な部分集合であれば，$\mathcal{B}$ の概有限包 $\overline{\mathcal{B}}$ は A に関して交閉的である．従って，$\mathcal{P}A$ の各部分集合 $\mathcal{B}$ にその A に関する交包 $\mathcal{B}^{\cap}$ の概有限包 $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ を対応させる写像は $\mathcal{P}A$ 上の閉写であり，その留域は $\mathcal{P}A$ の A に関して交閉的かつ概有限な部分集合の全体に等しい．従って $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ は，$\mathcal{B}$ を含み A に関して交閉的かつ概有限な $\mathcal{P}A$ の部分集合の中で最小のものである（そこで $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ を $\mathcal{B}$ の A に関する**交概有限包**と呼ぶ）．

略解　問題 3.18.35 により，$\mathcal{B}$ から閉写 $\varphi_{\mathcal{B}}$ が出来て，$\mathcal{B}$ は $\varphi_{\mathcal{B}}$ の留域に等しい．従って $\overline{\mathcal{B}}$ は，問題 3.18.48 により $\varphi_{\mathcal{B}}$ の有限核 $(\varphi_{\mathcal{B}})'$ の留域に等しく，従って問題 3.18.35 により交閉的である．

問題 3.18.50　A が集合で $\mathcal{C}$ が $\mathcal{P}A$ の部分集合のとき，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して

$$\varphi^{\mathcal{C}}X = \{a \in A \mid a \text{ を含む任意の } Y \in \mathcal{C} \text{ に対して } X \cap Y \neq \emptyset\}$$

と定める．そうすると，各 $X \in \mathcal{P}A$ に $\varphi^{\mathcal{C}}X$ を対応させる写像 $\varphi^{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{P}A$ 上の閉写である．逆に，φ が $\mathcal{P}A$ 上の閉写であれば，$\varphi = \varphi^{\mathcal{C}}$ なる $\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が存在する．

略解　$\mathcal{B} = \{A - Y \mid Y \in \mathcal{C}\}$ と定めれば

$$\varphi^{\mathcal{C}}X = A - \bigcup_{Y \in \mathcal{C},\ X \cap Y = \emptyset} Y = \bigcap_{Y \in \mathcal{C},\ X \subseteq (A-Y)} (A - Y) = \bigcap_{X \subseteq Z \in \mathcal{B}} Z$$

が成り立つので，問題 3.18.35 により $\varphi^{\mathcal{C}}$ は閉写である．

問題 3.18.51　A を集合とし，$\mathfrak{F} = (\mathcal{C}_a)_{a \in A}$ を次の二条件をみたす $\mathcal{P}A$ の部分集合族とする（こういう族を A の**近傍系族**と呼ぶ）．

1. a は任意の $Y \in \mathcal{C}_a$ に属す $(a \in A)$.
2. $a \in Y \in \mathcal{C}_b$ なら，$Z \subseteq Y$ なる $Z \in \mathcal{C}_a$ が存在する $(a, b \in A)$.

このとき，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して $\psi_{\mathfrak{F}}X = \{a \in A \mid 任意の\ Y \in \mathcal{C}_a\ に対して\ X \cap Y \neq \emptyset\}$ と定めれば，各 $X \in \mathcal{P}A$ に $\psi_{\mathfrak{F}}X$ を対応させる写像 $\psi_{\mathfrak{F}}$ は $\mathcal{P}A$ 上の閉写である．逆に，φ が $\mathcal{P}A$ 上の閉写であれば，$\varphi = \psi_{\mathfrak{F}}$ なる A の近傍系族 $\mathfrak{F}$ が存在する．

略解　$\mathcal{C} = \bigcup_{a \in A} \mathcal{C}_a$ と定める．そうすると条件 1, 2 により，任意の $Y \in \mathcal{C}_a$ に対して $X \cap Y \neq \emptyset$ なることは，a を含む任意の $Y \in \mathcal{C}$ に対して $X \cap Y \neq \emptyset$ なることと同等である．従って問題 3.18.50 により，$\psi_{\mathfrak{F}} = \varphi^{\mathcal{C}}$ が成り立つ．

問題 3.18.52 $(A, \leq)$ を順序集合とすれば，各 $X \in \mathcal{P}A$ に $\{a \in A \mid a = \inf(X \cap [a{\to}))\}$ を対応させる写像も $\{a \in A \mid a = \sup(X \cap ({\leftarrow}a])\}$ を対応させる写像も $\mathcal{P}A$ 上の閉写である（定理 3.9.4 の条件 4 参照）．

略解　各 $a \in A$ に対して $\mathcal{C}_a = \{[a{\to}) - [b{\to}) \mid A \ni b \not\leq a\}$ と定める．そうすると，$\mathcal{P}A$ の部分集合族 $(\mathcal{C}_a)_{a \in A}$ は A の近傍系族である．また，$a \in A$ が任意の $Y \in \mathcal{C}_a$ に対して $X \cap Y \neq \emptyset$ をみたすことは，$a = \inf(X \cap [a{\to}))$ なることと同等である．そこで問題 3.18.51 を使う．

3.19　束写系から得られる関係法則

＄ 第 3.17 節までの代数学は，論理学の三本柱である形式言語の文法論・意味論・演繹論の中でも，主に文法論と意味論に関連する．この節からは意味論と演繹論に関連する代数学に転ずる．その主要部は第 3.26 節から第 3.31 節までであり，その他の節では重要な準備を行なう．

この節を通じて，そうでない旨断らない限り，次の条件 a, b, c を仮定する．

a. A **は集合である．**

b. $\mathbb{B}$ **は束であり（その順序関係・交法・結法を** $\leq, \wedge, \vee$ **で表す），最小元** 0 **と最大元** 1 **を持つ．**

c. f **は** A **から** $\mathbb{B}$ **への写像である．**

こういう三つ組み $(A, \mathbb{B}, f)$ を**束写系**と呼び，特に $\mathbb{B} = \mathbb{T}$ $(= \{0, 1\})$ の場合は $\mathbb{T}$ **写系**とも呼ぶ．

束写系は意味論に関連する．意味論では，たとえばある形式言語の文の真偽を問題とする．文の全体を A で表し，真と偽を 1 と 0 で表して $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ と定め，A の各元 x の真偽値を fx で表せば，f は A から $\mathbb{B}$ の写像とみなされ，$(A, \mathbb{B}, f)$ は束写系である．より精密に言えば，意味論は第 3.26 節以降の「論対」の理論として抽象され，束写系は第 3.30 節で定義する「束値論対」の特殊なものとみなされる．逆に束値論対は，束写系の族の一種とみなされ，問題 3.30.12 によれば束写系と「同値」である．

束についての基本的な概念・事実・規約は例 3.13.2 で説明してある．この節の後半以降ではブール束が重要な役割を演ずる．ブール束についての基本的な概念・事実・規約は例 3.13.5 で説明してある．問題 3.13.16 に記したように $\mathbb{T}$ はブール束である．

A の元は x, y, z などで表し，$\mathbb{B}$ の元は a, b, c などで表し，A 上の普遍単位半群 $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$ の元を α, β, γ などで表す．アルファベット (alphabet) の先頭と末尾の文字群をこのように使い分ける記法を，今後は **AZ 記法**と呼ぶ．

半群 A^* の単位元すなわち空列は，主に ε で，時に空白で表す．A^* の乗法記号は通常は記さない．従って，A^* の元は一般に $x_1 \cdots x_n$ と書かれるが，これは $n = 0$ の場合には空列を意味する．

A^* の元 $x_1 \cdots x_n$ を α で表した場合，集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ も α で表すという列便法を用いる．特に，空列 ε は列便法によれば空集合 $\emptyset$ を表す（この段落については端書き参照）．

$\mathbb{B}$ の任意の有限部分集合に上限と下限があることに留意して A^* 上の関係 $\preccurlyeq_f$ を

$$\alpha \preccurlyeq_f \beta \iff \inf f\alpha \leq \sup f\beta \tag{3.19.1}$$

と定義し，**束写系** $(A, \mathbb{B}, f)$ **の定める関係**とか f **真関係**とかと呼ぶ．後者の名は，前述のように $(A, \{f\})$ が束値論対とみなされて $\preccurlyeq_f$ がその「恒真関係」に当たることに因む．また，色々な束写系の定める関係を**束写関係**と総称する．ただし束を $\mathbb{T}$ に限定した場合は,「束」を「$\mathbb{T}$」で置き換えて $\mathbb{T}$ **写関係**とも呼ぶ.

(3.19.1) では列便法を使っている．つまり，$\alpha = x_1 \cdots x_m$，$\beta = y_1 \cdots y_n$ なら，$f\alpha = f\{x_1, \ldots, x_m\} = \{fx_1, \ldots, fx_m\}$，$f\beta = f\{y_1, \ldots, y_n\} = \{fy_1, \ldots, fy_n\}$，従って

$$x_1 \cdots x_m \preccurlyeq_f y_1 \cdots y_n \iff \inf\{fx_1, \ldots, fx_m\} \leq \sup\{fy_1, \ldots, fy_n\}$$

ただし，第 3.9.3 項の下限・上限の定義により $\inf \emptyset = 1$，$\sup \emptyset = 0$ であり，$\inf \emptyset$ と $\sup \emptyset$ を存在さすために $\mathbb{B}$ に最大限・最小限があると仮定している．さらに (3.13.11) を使えば,

$$x_1 \cdots x_m \preccurlyeq_f y_1 \cdots y_n \iff fx_1 \wedge \ldots \wedge fx_m \leq fy_1 \vee \ldots \vee fy_n$$

ただし，$\iff$ の右側における算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意である．

以下定理 3.19.7 の辺りまでは，主に束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ についての種々の代数的付加条件の下で，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ がどういう法則に従うかを調べる.

問題 3.19.1 束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ が A^* 上の最大関係であるためには，$\#\mathbb{B} = 1$ なることが必要十分である（こういう $(A, \mathbb{B}, f)$ を**極端な**束写系と呼ぶ）.

略解　$\preccurlyeq_f$ が最大関係なら，特に $\varepsilon \preccurlyeq_f \varepsilon$，すなわち $1 \leq 0$，すなわち $\#\mathbb{B} = 1$ が成り立つ.

問題 3.19.2 $\mathbb{T}$ 写系 $(A, \mathbb{T}, f)$ と $(A, \mathbb{T}, g)$ が関係の包含関係 $\subseteq$ に関して $\preccurlyeq_f \subseteq \preccurlyeq_g$ をみたせば，$f = g$ が成り立つ．従って，A^* 上の $\mathbb{T}$ 写関係の全体は $\subseteq$ に関して離散的である.

略解　$fx = 1 \implies \varepsilon \preccurlyeq_f x \implies \varepsilon \preccurlyeq_g x \implies gx = 1$ が成り立ち，同様に $fx = 0 \implies gx = 0$ が成り立つからである.

定理 3.19.1 **f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は次の四法則に従う．ただし，$\succcurlyeq_f$ は $\preccurlyeq_f$ の双対関係を表す.**

$$x \preccurlyeq_f x \tag{反復律}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha \preccurlyeq_f \beta &\implies x\alpha \preccurlyeq_f \beta \\ \alpha \succcurlyeq_f \beta &\implies x\alpha \succcurlyeq_f \beta \end{aligned}\right\} \tag{付加律}$$

$$\left.\begin{aligned} xx\alpha \preccurlyeq_f \beta &\implies x\alpha \preccurlyeq_f \beta \\ xx\alpha \succcurlyeq_f \beta &\implies x\alpha \succcurlyeq_f \beta \end{aligned}\right\} \tag{巾等律}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha xy\beta \preccurlyeq_f \gamma &\implies \alpha yx\beta \preccurlyeq_f \gamma \\ \alpha xy\beta \succcurlyeq_f \gamma &\implies \alpha yx\beta \succcurlyeq_f \gamma \end{aligned}\right\} \tag{置換律}$$

証明　$fx = fx$ が成り立つので，$\preccurlyeq_f$ は反復律に従う．列便法によれば $x\alpha \supseteq \alpha$，従って $\inf f(x\alpha) \leq \inf f\alpha$ と $\sup f\alpha \leq \sup f(x\alpha)$ が成り立つので，$\preccurlyeq_f$ は付加律に従う．同じく列便法によれば $x\alpha = xx\alpha$，$\alpha yx\beta = \alpha xy\beta$ なので，$\preccurlyeq_f$ は巾等律と置換律に従う.

注意 3.19.1 反**復**律と第 3.9.2 項に出て来た反**射**律は異なる．反復律は，$\preccurlyeq_f$ を A に制限して出来る A 上の関係が反射律に従うことを意味する．$\mathbb{B}$ において $1 \leq 0$ でない限り（つまり，$\mathbb{B}$ が単元集合でない限り），$\varepsilon \preccurlyeq_f \varepsilon$ が成り立たないから，A^* 上の関係としての $\preccurlyeq_f$ は反射律に従わない．

問題 3.19.3 定理 3.19.1 の反復律以外において，A の元 x, y を A^* の元に置き換えても同様に成り立つ．反復律において A の元 x を A^* の ε 以外の元に置き換えても同様に成り立つ．

問題 3.19.4 付加律・巾等律・置換律を合わせた法則は次の法則と同等である．

$$\alpha \preccurlyeq_f \beta,\ \alpha \subseteq \alpha',\ \beta \subseteq \beta' \implies \alpha' \preccurlyeq_f \beta' \qquad \text{(包容律)}$$

定理 3.19.2 f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は次の法則に従う．

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \preccurlyeq_f x,\ x\beta \preccurlyeq_f \delta \implies \alpha\beta \preccurlyeq_f \delta \\ \alpha \succcurlyeq_f x,\ x\beta \succcurlyeq_f \delta \implies \alpha\beta \succcurlyeq_f \delta \end{array}\right\} \qquad \text{(消去律)}$$

$\mathbb{B}$ が分配束なら $\preccurlyeq_f$ は次の法則に従う[59]**（問題 3.22.19 参照）．**

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \preccurlyeq_f x\gamma \\ x\beta \preccurlyeq_f \delta \end{array}\right\} \implies \alpha\beta \preccurlyeq_f \delta\gamma \qquad \text{(強消去律)}$$

証明　強消去律を証明するために $a = \inf f\alpha$, $b = \inf f\beta$, $c = \sup f\gamma$, $d = \sup f\delta$, $e = fx$ と定める．そうすると，強消去律の前提条件は $a \leq e \vee c$ と $e \wedge b \leq d$ なる二つの不等式と同等である．この前提の下で，さらに $\mathbb{B}$ が分配束なら，次のように推論することができる．

$$\begin{aligned} a \wedge b &\leq (e \vee c) \wedge b && \text{(前提と写像 } x \mapsto x \wedge b \text{ の増調性による)} \\ &\leq (e \wedge b) \vee c && \text{(分配律による．問題 3.13.4 参照)} \\ &\leq d \vee c && \text{(前提と写像 } x \mapsto x \vee c \text{ の増調性による)} \end{aligned}$$

従って $\inf f(\alpha\beta) = a \wedge b \leq d \vee c = \sup f(\delta\gamma)$ すなわち $\alpha\beta \preccurlyeq_f \delta\gamma$ が成り立つ．$\gamma = \varepsilon$ または $\beta = \varepsilon$ の場合には，$c = 0$ または $b = 1$ であって，上の推論が分配律無しに運べる．従って，消去律が無条件に成り立つ．

定義 3.19.1 反復律・付加律・巾等律・置換律・消去律の計五法則を合わせた法則を**束律**と呼び，反復律・付加律・巾等律・置換律・強消去律の計五法則を合わせた法則を**強束律**と呼ぶ．また，束律に従う関係と強束律に従う関係をそれぞれ**束関係**・**強束関係**と呼ぶ．

注意 3.19.2 強消去律において $\gamma = \varepsilon$ または $\beta = \varepsilon$ としたのが消去律であるから，強消去律・強束律はそれぞれ実際に消去律・束律より強い．また，強束律が束律と同等でないことが問題 3.19.17 と例 3.13.6 から分かる．

問題 3.19.5 束が分配束であるためには，束算法と順序が次の法則に従うことが必要十分である．

$$\left.\begin{array}{l} a \leq e \vee c \\ e \wedge b \leq d \end{array}\right\} \implies a \wedge b \leq d \vee c$$

[59] この種の法則に「切断」という名を当てる人がいるが,「Schnitt」「cut」などの誤訳であろう．日本語では「消去」「削減」あるいは「代入」が相応しい（問題 3.20.10 参照）．本書では「切断」を定義 3.22.1 の意味で使う．

略解　上の法則に従う束において任意の元 b, c, e に対して，$a = e \vee c$，$d = e \wedge b$ とすればこの法則の前提がみたされるから，$(e \vee c) \wedge b \leq (e \wedge b) \vee c$ が成り立つ．そこで問題 3.13.4 を使う．

問題 3.19.6 fA が $\mathbb{B}$ の部分束であるとき，次の三条件は同等である（問題 3.22.19 参照）．

1. fA は分配束である．
2. f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は強消去律に従う．
3. f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は「$v \preccurlyeq_f xy$，$xw \preccurlyeq_f z \implies vw \preccurlyeq_f zy$」なる法則に従う．

略解　$fA \cup \{0, 1\}$ も $\mathbb{B}$ の部分束であって，(3.19.1) において $\mathbb{B}$ を $fA \cup \{0, 1\}$ に替えても $\preccurlyeq_f$ は変わらないから，$fA \cup \{0, 1\} = \mathbb{B}$ と仮定していい．そう仮定すると，fA が分配束なら $\mathbb{B}$ もそうなので $(1 \implies 2)$ は定理 3.19.2 に含まれ，$(3 \implies 1)$ には問題 3.19.5 が使える．

問題 3.19.7 A^* 上の関係 $\precsim_f$ を次のように定める（記号 $\precsim$ と $\preccurlyeq$ の違いに注意）．

$$\alpha \precsim_f \beta \iff \begin{cases} \inf f\alpha \leq fy \text{ なる } y \in \beta \text{ がある} & \cdots \quad \beta \neq \varepsilon \text{ のとき} \\ \inf f\alpha = 0 & \cdots \quad \beta = \varepsilon \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき，$\precsim_f$ は強束律に従い $\precsim_f \subseteq \preccurlyeq_f$ をみたし，$\precsim_f$ と $\preccurlyeq_f$ の $A^* \times (A^0 \cup A^1)$ への制限は一致する．また，$\mathbb{B}$ が線形順序集合であれば $\precsim_f = \preccurlyeq_f$ が成り立つ．

略解　$\precsim_f$ が強消去律に従うことを示すために，$\alpha \precsim_f x\gamma$，$x\beta \precsim_f \delta$ と仮定する．$\inf f\alpha \leq fy$ なる $y \in \gamma$ があれば，$\alpha\beta \precsim_f \delta\gamma$ が成り立つ．そこで $\inf f\alpha \leq fx$ と仮定する．そうすると $\inf f(\alpha\beta) \leq \inf f(x\beta)$ が成り立つので，$\alpha\beta \precsim_f \delta\gamma$ が成り立つ．

問題 3.19.8 fA が $0, 1$ を含むためには，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が次の二法則（合わせて**両端律**と呼ぶ）に従うことが必要十分である．

$$x \preccurlyeq_f \varepsilon \text{ なる } x \text{ が存在する} \qquad (\textbf{下端律})$$
$$x \succcurlyeq_f \varepsilon \text{ なる } x \text{ が存在する} \qquad (\textbf{上端律})$$

略解　fA が 0 を含むためには $fx = 0$ なる $x \in A$ のあることが必要十分であり，$fx = 0$ なることは $x \preccurlyeq_f \varepsilon$ なることと同等である．

問題 3.19.9 $0 = \inf fA$ であるか $1 = \sup fA$ であるかに応じて，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は次の劣空律か優空律かに従う（これらの法則を合わせて**両空律**と呼ぶ）．

$$\alpha \preccurlyeq_f \varepsilon \iff \text{任意の } y \in A \text{ に対して } \alpha \preccurlyeq_f y \qquad (\textbf{劣空律})$$
$$\alpha \succcurlyeq_f \varepsilon \iff \text{任意の } y \in A \text{ に対して } \alpha \succcurlyeq_f y \qquad (\textbf{優空律})$$

略解　$0 = \inf fA$ が成り立つ場合，$\alpha \in A^*$ が任意の $y \in A$ に対して $\alpha \preccurlyeq_f y$ をみたせば，任意の $y \in A$ に対して $\inf f\alpha \leq fy$，従って $\inf f\alpha \leq 0$，すなわち $\alpha \preccurlyeq_f \varepsilon$ が成り立つ．逆に $\alpha \preccurlyeq_f \varepsilon$ が成り立てば，付加律により任意の $y \in A$ に対して $\alpha \preccurlyeq_f y$ が成り立つ．

問題 3.19.10 fA が $\mathbb{B}$ の部分束であるためには，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が次の二法則（合わせて**準両限律**と呼ぶ）に従うことが必要十分である．

各 $(x,y)\in A\times A$ に応じて，$z\preccurlyeq_f x$，$z\preccurlyeq_f y$，$xy\preccurlyeq_f z$ なる $z\in A$ が存在する　(**準下限律**)

各 $(x,y)\in A\times A$ に応じて，$z\succcurlyeq_f x$，$z\succcurlyeq_f y$，$xy\succcurlyeq_f z$ なる $z\in A$ が存在する　(**準上限律**)

略解　任意の $(x,y)\in A\times A$ をとる．fA が算法 $\wedge$ で閉じていれば，$fx\wedge fy=fz$ なる $z\in A$ が存在し，これが $fz\le fx$，$fz\le fy$，$fx\wedge fy\le fz$ をみたす．逆に，この三不等式をみたす $z\in A$ が存在すれば，$fx\wedge fy=fz\in fA$ が成り立つ．

問題 3.19.11 $fA=\mathbb{B}$ なら，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は準両限律・両端律・両空律に従う（問題 3.21.11 参照）．また，$\mathbb{B}$ が線形順序集合なら，$\preccurlyeq_f$ は強束律と準両限律に従う．

略解　後半は問題 3.13.19 による．

問題 3.19.12 集合 A の部分集合 S に対して，A^* 上の関係 $\preccurlyeq_S$ を列便法を使って

$$\alpha\preccurlyeq_S\beta \iff \alpha\not\subseteq S\ \text{または}\ \beta\not\subseteq A-S$$

と定義する（これを S **関係**と呼ぶ）．そうすると $\preccurlyeq_S$ は強束律と準両限律に従う．また，$\preccurlyeq_S$ が下端律に従うためには $S\neq A$ なることが必要十分であり，$\preccurlyeq_S$ が上端律に従うためには $S\neq\emptyset$ なることが必要十分である（問題 3.21.16 参照）．

略解　$A,\mathbb{T}$ と S の定義関数 $1_S\in A{\to}\mathbb{T}$ から成る三つ組み $(A,\mathbb{T},1_S)$ が束写系であり，その定める関係 $\preccurlyeq_{1_S}$（および問題 3.19.7 のように定義される関係 $\preccurlyeq_{1_S}$）が $\preccurlyeq_S$ に等しい．$\mathbb{T}$ が分配束で 1_SA が $\mathbb{T}$ の部分束であるから，$\preccurlyeq_S$ は強束律と準両限律に従う．

なお，$\mathcal{P}A$ から $A{\to}\mathbb{T}$ への写像 $S\mapsto 1_S$ が全単射であるから，S を $\mathcal{P}A$ 全体に亘って動かして得られる関係 $\preccurlyeq_S$ の全体は，A^* 上の $\mathbb{T}$ 写関係の全体に等しい．

問題 3.19.13 A を集合とし，$\varphi\in\mathcal{P}A{\to}\mathcal{P}A$ を閉写とし，$\alpha,\beta\in A^*$ が列便法の下で

$$\varphi\alpha\supseteq\bigcap_{y\in\beta}\varphi\{y\}$$

をみたすことを $\alpha\preccurlyeq_\varphi\beta$ で表す．ただし，$\beta=\varepsilon$ の場合の $\bigcap_{y\in\beta}\varphi\{y\}$ は A を表す．こうして得られる A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ は束律と劣空律に従う．

$\preccurlyeq_\varphi$ が準下限律に従うためには，各 $(x,y)\in A\times A$ に応じて $\varphi\{x,y\}=\varphi\{z\}$ なる $z\in A$ の存在することが必要十分であり，$\preccurlyeq_\varphi$ が準上限律に従うためには，各 $(x,y)\in A\times A$ に応じて $\varphi\{x\}\cap\varphi\{y\}=\varphi\{z\}$ なる $z\in A$ の存在することが必要十分である．

$\preccurlyeq_\varphi$ が下端律に従うためには，$\varphi\{x\}=A$ なる $x\in A$ の存在することが必要十分であり，上端律に従うためには，$\varphi\emptyset\neq\emptyset$ なることが必要十分である．

略解　φ の留域を $\mathcal{B}$ とし，$\mathcal{B}$ 上の順序関係 $\le$ を「$X\le Y\iff X\supseteq Y$」と定め（$\le$ はすなわち双対包含関係である），写像 $f\in A{\to}\mathcal{B}$ を $fx=\varphi\{x\}$ と定める．そうすると問題 3.18.33 により，$\mathcal{B}$ は最小元 A と最大元 $\varphi\emptyset$ とを持つ完備束であって，次の二式が成り立つ．

$$\inf f\alpha=\inf\{\varphi\{x\}\mid x\in\alpha\}=\varphi\Bigl(\bigcup_{x\in\alpha}\varphi\{x\}\Bigr)=\varphi\alpha$$

$$\sup f\beta = \sup\{\varphi\{y\} \mid y \in \beta\} = \bigcap_{y\in\beta} \varphi\{y\}$$

また，第一式と同様に $\inf fA = \varphi A = A$ が成り立つ．つまり $(A, \mathcal{B}, f)$ が束写系であり，その定める関係 $\preccurlyeq_f$ が $\preccurlyeq_\varphi$ に等しく，$\inf fA = \min \mathcal{B}$ が成り立つ．従って $\preccurlyeq_\varphi$ は束律と劣空律に従う．

問題 3.19.14 代数系 A の部分集合 D に対して，$\alpha, \beta \in A^*$ が

$$[\alpha \cup D]_A \supseteq \bigcap_{y\in\beta} [\{y\} \cup D]_A$$

をみたすことを $\alpha \preccurlyeq_D \beta$ で表して得られる A^* 上の関係 $\preccurlyeq_D$ は束律に従う．

略解　写像 $\varphi \in \mathcal{P}A {\to} \mathcal{P}A$ を $\varphi X = [X \cup D]_A$ と定義すれば，φ は問題 3.18.23 により閉写である．

問題 3.19.15 A を集合とし，$\varphi \in \mathcal{P}A {\to} \mathcal{P}A$ を閉写とし，A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ を次のように定める．

$$\alpha \preccurlyeq_\varphi \beta \iff \begin{cases} \varphi\alpha \cap \beta \neq \emptyset & \cdots \quad \beta \neq \varepsilon \text{ のとき} \\ \varphi\alpha = A & \cdots \quad \beta = \varepsilon \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき，$\preccurlyeq_\varphi$ は強束律と劣空律に従い $\preccurlyeq_\varphi \subseteq \preccurlyeq_\varphi$ をみたし，$\preccurlyeq_\varphi$ と $\preccurlyeq_\varphi$ の $A^* \times (A^0 \cup A^1)$ への制限は一致する．

略解　問題 3.19.7 を使って問題 3.19.13 と同様にすればいい．

定理 3.19.3 $x \wedge y$ **と** $x \vee y$ **を A 上の二項汎算法とする．このとき，f が** $\{\wedge, \vee\}$ **準写であるためには，f 真関係** $\preccurlyeq_f$ **が次の二法則（合わせて**両限律**と呼ぶ）に従うことが必要十分である．**

$$x \wedge y \preccurlyeq_f x \qquad x \wedge y \preccurlyeq_f y \qquad xy \preccurlyeq_f x \wedge y \tag{下限律}$$

$$x \vee y \succcurlyeq_f x \qquad x \vee y \succcurlyeq_f y \qquad xy \succcurlyeq_f x \vee y \tag{上限律}$$

証明　f が $\{\wedge\}$ 準写であると仮定する．そうすると，任意の $x, y \in A$ に対して $f(x \wedge y) = fx \wedge fy$ が成り立ち，従って $f(x \wedge y) \leq fx$，$f(x \wedge y) \leq fy$，$fx \wedge fy \leq f(x \wedge y)$ が成り立つ．つまり，$\preccurlyeq_f$ は下限律に従う．同様に，f が $\{\vee\}$ 準写であれば，$\preccurlyeq_f$ は上限律に従う．

逆に，$\preccurlyeq_f$ が下限律に従うと仮定する．そうすると，任意の $x, y \in A$ に対して $f(x \wedge y) \leq fx$，$f(x \wedge y) \leq fy$，$fx \wedge fy \leq f(x \wedge y)$ が成り立ち，従って $f(x \wedge y) = fx \wedge fy$ が成り立つ．つまり，f は $\{\wedge\}$ 準写である．同様に，$\preccurlyeq_f$ が上限律に従えば，f は $\{\vee\}$ 準写である．

注意 3.19.3 準下限律と準上限律とは，算法 $\wedge$ と $\vee$ とを表に出さずに下限律と上限律とを述べたものである．すなわち，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ が準下限律に従うためには，$\preccurlyeq$ が A 上のある二項汎算法 $x \wedge y$ に関する下限律に従うことが必要十分であり，$\preccurlyeq$ が準上限律に従うためには，$\preccurlyeq$ が A 上のある二項汎算法 $x \vee y$ に関する上限律に従うことが必要十分である．

定理 3.19.4 $\mathbb{B}$ **がブール束であるとし，その補法を** $a^\Diamond$ **で表す．また，**$x^\Diamond$ **を A 上の単項汎算法とする．このとき，f が** $\{\Diamond\}$ **準写であるためには，f 真関係** $\preccurlyeq_f$ **が次の二法則（合わせて**両補律**と呼ぶ）に従うことが必要十分である．**

$$xx^\Diamond \preccurlyeq_f \varepsilon \tag{下補律}$$

$$xx^\Diamond \succcurlyeq_f \varepsilon \tag{上補律}$$

証明　f が $\{\Diamond\}$ 準写であれば，任意の $x \in A$ に対して $fx \wedge f(x^{\Diamond}) = fx \wedge (fx)^{\Diamond} = 0$ が成り立つから，$\preccurlyeq_f$ は下補律に従う．上補律についても同様である．

逆に，$\preccurlyeq_f$ が両補律に従えば，各 $x \in A$ に対して，$fx \wedge f(x^{\Diamond}) = 0$ と $fx \vee f(x^{\Diamond}) = 1$ とが成り立つから $f(x^{\Diamond})$ は fx の補元であり，補元の一意性により $f(x^{\Diamond}) = (fx)^{\Diamond}$ が成り立つ．

問題 3.19.16 A 上の単項汎算法 $x^{\Diamond}$ についての次の二条件は同等である．

1. 各 $x \in A$ に対して $f(x^{\Diamond})$ は fx の補元である．
2. f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は算法 $x^{\Diamond}$ について両補律に従う．

定理 3.19.5 $\mathbb{B}$ がブール束であるとし，その補法と導法を $a^{\Diamond}$ と $a \Rightarrow b$ で表す．また，$x^{\Diamond}$ と $x \Rightarrow y$ を A 上の単項と二項の汎算法とする．このとき，f が $\{\Diamond, \Rightarrow\}$ 準写であるためには，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が両補律に加えて次の三法則（合わせて三導律と呼ぶ）に従うことが必要十分である [60]．

$$x^{\Diamond} \preccurlyeq_f x \Rightarrow y \qquad \text{(下補導律)}$$

$$y \preccurlyeq_f x \Rightarrow y \qquad \text{(反復導律)}$$

$$x \Rightarrow y \preccurlyeq_f x^{\Diamond} y \qquad \text{(上補反復導律)}$$

証明　f が $\{\Diamond, \Rightarrow\}$ 準写であると仮定する．そうすると，定理 3.19.4 によって $\preccurlyeq_f$ は両補律に従う．さらに，任意の $x, y \in A$ に対して，次のように計算することができる．

$$\begin{aligned} f(x \Rightarrow y) &= fx \Rightarrow fy && (f \text{ が } \{\Rightarrow\} \text{ 準写だから}) \\ &= (fx)^{\Diamond} \vee fy && (\mathbb{B} \text{ の導法 } \Rightarrow \text{ の定義による}) \\ &= f(x^{\Diamond}) \vee fy && (f \text{ が } \{\Diamond\} \text{ 準写だから}) \end{aligned}$$

従って $f(x^{\Diamond}) \leq f(x \Rightarrow y)$，$fy \leq f(x \Rightarrow y)$，$f(x \Rightarrow y) \leq f(x^{\Diamond}) \vee fy$ なる三不等式が成り立ち，それぞれから下補導律と反復導律と上補反復導律が得られる．

逆に，$\preccurlyeq_f$ が両補律と三導律に従うと仮定する．そうすると，まず定理 3.19.4 により f は $\{\Diamond\}$ 準写である．次に，任意の $x, y \in A$ をとると，下補導律と反復導律とにより $(fx)^{\Diamond} = f(x^{\Diamond}) \leq f(x \Rightarrow y)$ と $fy \leq f(x \Rightarrow y)$，従って $fx \Rightarrow fy = (fx)^{\Diamond} \vee fy \leq f(x \Rightarrow y)$ が成り立つ．他方，上補反復導律により $f(x \Rightarrow y) \leq f(x^{\Diamond}) \vee fy = (fx)^{\Diamond} \vee fy = fx \Rightarrow fy$ が成り立つ．合わせて $f(x \Rightarrow y) = fx \Rightarrow fy$ が成り立つから，f は $\{\Rightarrow\}$ 準写である．　**終**

以上のことを総合するために，これまでの規約や定義に次のものを加える．まず，$\mathbb{B}$ がブール束である場合，その補法と導法を $a^{\Diamond}$ と $a \Rightarrow b$ で表す．次に，$\mathbb{B}$ がブール束で，$x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ が A 上の汎算法で，$f \in A \to \mathbb{B}$ が $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写である場合，f はこれらの算法について A の $\mathbb{B}$ 上の**ブール表現**であるとかブール束 $\mathbb{B}$ 上の A の**表現**であるとか言い，束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ は**ブール表現系**とも呼ぶ．また，色々なブール表現系の定める関係を**ブール表現関係**と総称する．ただしブール束を $\mathbb{T}$ に限定した場合は,「ブール」を「$\mathbb{T}$」で置き換えて $\mathbb{T}$ **表現**・$\mathbb{T}$ **表現系**・$\mathbb{T}$ **表現関係**とも呼ぶ．他方，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ が反復律・付加律・巾等律・置換律・強消去律と A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ についての両限律・両補律・三導律の計十二法則を合わせた法則（これを**ブール律**と呼ぶ）に従うとき，$\preccurlyeq$ はこれらの算法について A^* 上の**ブール関係**であると言う．さらに，以上のブール表現・ブール律・ブール関係等の条件から算法 $\Rightarrow$ に関する条件を除いて得られる概念

[60] 三法則の名の由来は問題 3.21.6 の略解を見れば分かるであろう．

を，**擬ブール表現・擬ブール律・擬ブール関係**等と呼ぶ．すなわち，擬ブール表現は $\{\wedge, \vee, \Diamond\}$ 準写であり，擬ブール律は反復律・付加律・巾等律・置換律・強消去律・両限律・両補律を合わせた法則であり，擬ブール関係は擬ブール律に従う関係である．

そうすると，以上のことは次の定理と系に総合される．

定理 3.19.6 **$\mathbb{B}$ がブール束であって f が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ について A の $\mathbb{B}$ 上のブール表現であれば，これらの算法について f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は A^* 上のブール関係である．**

$\mathbb{B}$ がブール束であって f が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$ について A の $\mathbb{B}$ 上の擬ブール表現であれば，これらの算法について $\preccurlyeq_f$ は A^* 上の擬ブール関係である．

証明　$\mathbb{B}$ がブール束であって f が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$ について A の $\mathbb{B}$ 上の擬ブール表現であれば，$\preccurlyeq_f$ は，定理 3.19.1 により反復律・付加律・巾等律・置換律に従い，定理 3.19.2 により強消去律に従い，定理 3.19.3 により両限律に従い，定理 3.19.4 により両補律に従う．f がさらに A 上の汎算法 $\Rightarrow$ についても準写であれば，$\preccurlyeq_f$ は定理 3.19.5 により三導律に従う．

系　**A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ についての次の二条件は同等である．**

1. **これらの算法について f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は A^* 上のブール関係である．**
2. **$B' = fA \cup \{0, 1\}$ は $\mathbb{B}$ の部分束かつブール束であって，f を A から B' への写像とみなしたものは，これらの算法について A の B' 上のブール表現である．**

これら同等な二条件の下で，さらに $A \neq \emptyset$ なら，$0, 1 \in fA$，すなわち $B' = fA$ が成り立つ．

証明　条件 2 の下で，$0, 1$ は B' の最小元・最大元となるから，B' の補法を $\Diamond$ で表すと，$x \in A$ なら $f(x \wedge x^\Diamond) = fx \wedge (fx)^\Diamond = 0$，$f(x \vee x^\Diamond) = fx \vee (fx)^\Diamond = 1$，従って $0, 1 \in fA$ が成り立つ．

(2 $\Longrightarrow$ 1) $B' = fA \cup \{0, 1\}$ が $\mathbb{B}$ の部分束との仮定により，(3.19.1) において $\mathbb{B}$ を B' に替えても $\preccurlyeq_f$ は変わらない．そこで，$\mathbb{B} = B'$ と仮定して定理 3.19.6 を使えばいい．

(1 $\Longrightarrow$ 2) 問題 3.19.10 により fA が $\mathbb{B}$ の部分束であるから，B' もそうである．従って上と同様に $\mathbb{B} = B'$ と仮定していい．問題 3.19.6 により fA が分配束であるから，$\mathbb{B}$ もそうである（問題 3.13.4 参照）．問題 3.19.16 により fA の各元には補元があるから，$\mathbb{B}$ の各元にも補元がある．従って，$\mathbb{B}$ はブール束である．従ってまた定理 3.19.5 により，f は $\{\Diamond, \Rightarrow\}$ 準写である．定理 3.19.3 により f は $\{\wedge, \vee\}$ 準写でもある．

問題 3.19.17 A が順序関係 $\leq$ について最小元と最大元とを持つ束であるとき，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ を「$\alpha \preccurlyeq \beta \iff \inf \alpha \leq \sup \beta$」によって定めれば，次の四つのことが成り立つ．

1. $\preccurlyeq$ は束律と両端律および A の束算法 $x \wedge y$ と $x \vee y$ についての両限律に従う．
2. $\preccurlyeq$ が強消去律に従うためには，A が分配束であることが必要十分である．
3. A がブール束であれば，$\preccurlyeq$ は A のブール論法に関して A^* 上のブール関係である．
4. $\preccurlyeq$ が A 上のある汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ に関して A^* 上のブール関係であれば，A はブール束であって，これらの算法は A のブール論法に等しい．

略解　(A, A, id_A) が束写系であり，その定める関係が $\preccurlyeq$ に等しい．$\preccurlyeq$ がある汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ に関して A^* 上のブール関係であれば，定理 3.19.6 系により，A はブール束であって，これらの算法と A のブール論法に関して id_A はブール表現である．従ってこれらの算法は，実は A のブール論法に等しい．

定理 3.19.7 **$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ の場合には，A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ に関しての次の三条件は同等である．**

1. **f は A の $\mathbb{T}$ 表現である．**
2. **f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は A^* 上のブール関係である．**
3. **f の定義集合 $F = f^{-1}1$ は次の四法則に従う（算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関し，これら四法則を合わせた法則をブール部分集合律と呼び，これに従う部分集合 F をブール部分集合と呼ぶ）．**

3a. $x \wedge y \in F \iff x, y \in F$　　**3c.** $x^\Diamond \in F \iff x \notin F$

3b. $x \vee y \in F \iff x \in F$ **または** $y \in F$　　**3d.** $x \Rightarrow y \in F \iff x \notin F$ **または** $y \in F$

従って，算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する A の $\mathbb{T}$ 表現の全体を $\mathcal{T}$ で表し，これら算法に関する A のブール部分集合の全体を $\mathcal{B}$ で表せば，$\mathcal{T}$ から $\mathcal{B}$ への写像 $f \mapsto f^{-1}1$ は全単射である（問題 3.13.17 参照）．

証明　条件 1, 2 が同等なのは，$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ であれば定理 3.19.6 系において $B' = \mathbb{B}$ となるからである．

$f(x \wedge y) = fx \wedge fy$ が成り立つためには，「$f(x \wedge y) = 1 \iff fx \wedge fy = 1$」の成り立つことが必要十分であり，$fx \wedge fy = 1$ なることは $fx = fy = 1$ なることと同等である．従って，f が $\{\wedge\}$ 準写であるためには，F が法則 3a に従うことが必要十分である．

$f(x \vee y) = fx \vee fy$ が成り立つためには，「$f(x \vee y) = 1 \iff fx \vee fy = 1$」の成り立つことが必要十分であり，$fx \vee fy = 1$ なることは $fx = 1$ または $fy = 1$ なることと同等である．従って，f が $\{\vee\}$ 準写であるためには，F が法則 3b に従うことが必要十分である．

$f(x^\Diamond) = (fx)^\Diamond$ が成り立つためには，「$f(x^\Diamond) = 1 \iff (fx)^\Diamond = 1$」の成り立つことが必要十分であり，$(fx)^\Diamond = 1$ なることは $fx = 0$ なることと同等である．従って，f が $\{\Diamond\}$ 準写であるためには，F が法則 3c に従うことが必要十分である．

$f(x \Rightarrow y) = fx \Rightarrow fy$ が成り立つためには，「$f(x \Rightarrow y) = 1 \iff fx \Rightarrow fy = 1$」の成り立つことが必要十分である．$fx \Rightarrow fy = (fx)^\Diamond \vee fy$ であるから，$fx \Rightarrow fy = 1$ なることは $(fx)^\Diamond = 1$ または $fy = 1$ なることと同等であり，それは $fx = 0$ または $fy = 1$ なることと同等である．従って，f が $\{\Rightarrow\}$ 準写であるためには，F が法則 3d に従うことが必要十分である．

問題 3.19.18　集合 A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ に関して，A のブール部分集合の全体は包含関係 $\subseteq$ について離散的であり，A の $\mathbb{T}$ 表現の全体は巾順序関係 $\leq$ について離散的である．

略解　A のブール部分集合 F と G が $F \subseteq G$ をみたすとき，$x \in G - F$ とすれば，$x^\Diamond \in F - G$ となって矛盾である．後半は，前半と問題 3.13.17 によるか，A の $\mathbb{T}$ 表現 f と g が $f \leq g$ をみたせば任意の $x \in A$ に対して $fx \leq gx$ と $f(x^\Diamond) \leq g(x^\Diamond)$ が成り立つことによる．　**終**

以上，束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ について，種々の代数的付加条件の下で f 真関係 $\preccurlyeq_f$ がどういう法則に従うかを主に調べた．以下では，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ とその $A \times A$ への制限 $\leq_f$ の関係に焦点を合わせる．$\preccurlyeq_f$ の定義により

$$x \leq_f y \iff fx \leq fy$$

が成り立つから，$\le_f$ は $\mathbb{B}$ の順序関係 $\le$ の f による引き戻しに他ならず，従って問題 3.9.53 により $\le_f$ は擬順序関係である（問題 3.9.56 参照）．

補題 3.19.1 集合 A 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ に対し，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ を次のように定める．すなわち，A^* の元 $x_1\cdots x_m$ と $y_1\cdots y_n$ が $x_1\cdots x_m \preccurlyeq y_1\cdots y_n$ をみたすとは，

$$x',y' \in A,\ x' \sqsubseteq x_i\ (i=1,\dots,m),\ y_j \sqsubseteq y'\ (j=1,\dots,n) \implies x' \sqsubseteq y'$$

なる条件をみたすこととする．そうすると $\preccurlyeq$ は，$\sqsubseteq$ を拡張し束律と両空律に従う．また $\preccurlyeq$ は，$\sqsubseteq$ を拡張し束律に従う A^* 上の関係の中で最大のものである（そこで $\preccurlyeq$ を，擬順序関係 $\sqsubseteq$ の<u>最大束拡張</u>と呼ぶ．定理 3.20.1 で定義する偏束関係の最大束拡張を参照）．

注意 3.19.4 擬順序関係 $\sqsubseteq$ の最大束拡張 $\preccurlyeq$ の上記の定義条件は，$m>0$, $n=0$ の場合には，$x' \sqsubseteq x_i\ (i=1,\dots,m)$ なる任意の $x' \in A$ と任意の $y' \in A$ に対して $x' \sqsubseteq y'$ の成り立つことを意味する．従って A の元 x が $x \preccurlyeq \varepsilon$ をみたすためには，任意の $y \in A$ に対して $x \sqsubseteq y$ をみたすことが必要十分である．$m=0$, $n>0$ の場合と $m=n=0$ の場合についても同様である．

証明　定理 3.20.1 のように $\preccurlyeq$ の定義を使うだけで証明できるが，以下の証明の方が視野が広く好ましい．$\equiv$ を $\sqsubseteq$ の対称核とすれば，問題 3.9.55 により，商集合 $\overline{A} = A/{\equiv}$ 上の順序関係 $\le$ を

$$\overline{x} \le \overline{x'} \iff x \sqsubseteq x'$$

と定義することができる．$(\overline{B}, \leqq)$ を $(\overline{A}, \le)$ の完備化とし，写像 $f \in A \to \overline{B}$ を $fx = \overline{x}$ と定める．そうすると $x_1\cdots x_m \preccurlyeq y_1\cdots y_n$ であることは

$$x',y' \in A,\ fx' \le fx_i\ (i=1,\dots,m),\ fy_j \le fy'\ (j=1,\dots,n) \implies fx' \le fy'$$

の成り立つことと同等であり，このことは，$fA = \overline{A}$ なることと定理 3.9.5 により

$$\inf_{\overline{B}}\{fx_1,\dots,fx_m\} \leqq \sup_{\overline{B}}\{fy_1,\dots,fy_n\}$$

の成り立つことと同等である．従って $\preccurlyeq$ は，$\sqsubseteq$ を拡張し，定理 3.19.1 と定理 3.19.2 により束律に従う．また，問題 3.9.45 により $\min\overline{B} = \inf_{\overline{B}} fA$, $\max\overline{B} = \sup_{\overline{B}} fA$ が成り立つから，問題 3.19.9 により $\preccurlyeq$ は両空律に従う．

$\sqsubseteq$ を拡張し束律に従う A^* 上の関係 R を任意にとり，$x_1\cdots x_m\, R\, y_1\cdots y_n$ と仮定する．このとき，$x' \sqsubseteq x_i\ (i=1,\dots,m)$, $y_j \sqsubseteq y'\ (j=1,\dots,n)$ なる任意の x', y' に対して，R が $\sqsubseteq$ の拡張であることによって $x'\,R\,x_i\ (i=1,\dots,m)$, $y_j\,R\,y'\ (j=1,\dots,n)$ が成り立ち，従って R の消去律等によって $x'\,R\,y'$ が成り立ち，再び R が $\sqsubseteq$ の拡張であることによって $x' \sqsubseteq y'$ が成り立つ．つまり $x_1\cdots x_m \preccurlyeq y_1\cdots y_n$ が成り立つ．これで R が $\preccurlyeq$ に含まれることが示された．

定理 3.19.8 束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ がさらに次の二条件をみたすなら，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は $\mathbb{B}$ の順序関係 $\le$ を f によって引き戻して得られる A 上の擬順序関係 $\le_f$ の最大束拡張に等しい．

$$a = \inf f\alpha \implies a = \sup\bigl(fA \cap (\leftarrow a]\bigr) \tag{3.19.2}$$

$$b = \sup f\beta \implies b = \inf\bigl(fA \cap [b\rightarrow)\bigr) \tag{3.19.3}$$

注意 3.19.5　$\alpha = \varepsilon$ の場合の条件 (3.19.2) は，a が $\mathbb{B}$ の最大元 1 に等しいから，$1 = \sup fA$ なる条件と同等である．同様に，$\beta = \varepsilon$ の場合の (3.19.3) は $0 = \inf fA$ なる条件と同等である（問題 3.19.9 参照）．また，$a = \sup\bigl(fA \cap (\leftarrow a]\bigr)$ なることは，$a \not\leq c \in \mathbb{B}$ なら $d \leq a$, $d \not\leq c$ なる $d \in fA$ のあることと同等であり，$b = \inf\bigl(fA \cap [b\rightarrow)\bigr)$ なることは，$\mathbb{B} \ni c \not\leq b$ なら $b \leq d$, $c \not\leq d$ なる $d \in fA$ のあることと同等である（問題 3.9.42 と問題 3.18.52 参照）．

証明　$\leq_f$ の最大束拡張を $\preccurlyeq$ で表す．任意の $\alpha, \beta \in A^*$ をとり，$a = \inf f\alpha$, $b = \sup f\beta$ と定め，$\alpha = x_1 \cdots x_m$, $\beta = y_1 \cdots y_n$ とする．そうすると，$x', y' \in A$ が $x' \leq_f x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, $y_j \leq_f y'$ $(j = 1, \ldots, n)$, $x' \leq_f y'$ をみたすことはそれぞれ，$fx' \leq a$, $b \leq fy'$, $fx' \leq fy'$ なることと同等である．従って，次の推論により $\preccurlyeq_f$ が $\preccurlyeq$ に等しいことが示される．

$$
\begin{aligned}
\alpha \preccurlyeq \beta &\iff fx' \leq a,\ b \leq fy' \text{ なる任意の } x', y' \in A \text{ に対して } fx' \leq fy' \\
&\iff c \leq a,\ b \leq d \text{ なる任意の } c, d \in fA \text{ に対して } c \leq d \\
&\iff \sup\bigl(fA \cap (\leftarrow a]\bigr) \leq \inf\bigl(fA \cap [b\rightarrow)\bigr) \\
&\iff a \leq b \\
&\iff \alpha \preccurlyeq_f \beta
\end{aligned}
$$

系　fA **が** $1 = \sup fA$ **と** $0 = \inf fA$ **をみたす** $\mathbb{B}$ **の部分束であれば（たとえば** $fA = \mathbb{B}$ **のとき），**f **真関係** $\preccurlyeq_f$ **は** $\mathbb{B}$ **の順序関係** $\leq$ **を** f **によって引き戻して得られる** A **上の擬順序関係** $\leq_f$ **の最大束拡張に等しい．**

証明　$a = \inf f\alpha$ $(\alpha \neq \varepsilon)$ なら $a \in fA$ が成り立ち，$b = \sup f\beta$ $(\beta \neq \varepsilon)$ なら $b \in fA$ が成り立つ．これと $1 = \sup fA$, $0 = \inf fA$ なる仮定により，条件 (3.19.2), (3.19.3) がみたされる．

問題 3.19.19　$fA = \mathbb{B}$ であってもう一つの束写系 $(A, \mathbb{B}', f')$ も $f'A = \mathbb{B}'$ をみたすとする．このとき，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が f' 真関係 $\preccurlyeq_{f'}$ に等しいためには，$\mathbb{B}$ の順序関係 $\leq$ を f によって引き戻して得られる A 上の擬順序関係 $\leq_f$ が $\mathbb{B}'$ の順序関係 $\leq$ を f' によって引き戻して得られる A 上の擬順序関係 $\leq_{f'}$ に等しいことが必要十分である．

問題 3.19.20　定理 3.19.6 系の同等な二条件の下で，さらに $A \neq \emptyset$ なら，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は $\mathbb{B}$ の順序関係 $\leq$ を f によって引き戻して得られる A 上の擬順序関係 $\leq_f$ の最大束拡張に等しい

問題 3.19.21　問題 3.19.17 における A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ は，A 上の順序関係 $\leq$ の最大束拡張である．

問題 3.19.22　A を集合とし，$\mathbb{B}$ を最小元と最大元を持つ束とし，$(f_\nu)_{\nu \in V}$ を A から $\mathbb{B}$ への写像の族とし，A から巾束 $\mathbb{B}^V$ への写像 f を $(fx)\nu = f_\nu x$ $(x \in A,\ \nu \in V)$ と定める．このとき，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は f_ν 真関係 $\preccurlyeq_{f_\nu}$ $(\nu \in V)$ すべての交わりに等しい．

略解　$x_1 \cdots x_m$, $y_1 \cdots y_n \in A^*$ とすれば，問題 3.13.9 と問題 3.9.12 により

$$
\begin{aligned}
&x_1 \cdots x_m \preccurlyeq_f y_1 \cdots y_n \\
&\iff \inf\{fx_1, \ldots, fx_m\} \leq \sup\{fy_1, \ldots, fy_n\} \\
&\iff \text{任意の } \nu \in V \text{ に対して } \bigl(\inf\{fx_1, \ldots, fx_m\}\bigr)\nu \leq \bigl(\sup\{fy_1, \ldots, fy_n\}\bigr)\nu \\
&\iff \text{任意の } \nu \in V \text{ に対して } \inf\{(fx_1)\nu, \ldots, (fx_m)\nu\} \leq \sup\{(fy_1)\nu, \ldots, (fy_n)\nu\}
\end{aligned}
$$

$$\iff \text{任意の}\ \nu \in V\ \text{に対して}\ \inf\{f_\nu x_1, \ldots, f_\nu x_m\} \leq \sup\{f_\nu y_1, \ldots, f_\nu y_n\}$$
$$\iff \text{任意の}\ \nu \in V\ \text{に対して}\ x_1 \cdots x_m \preccurlyeq_{f_\nu} y_1 \cdots y_n$$

問題 3.19.23 集合 A から巾束 $\mathbb{T}^{\mathcal{P}A}$ への写像 f を「$(fx)S = 1 \iff x \in S$」($x \in A,\ S \in \mathcal{P}A$) と定める．そうすると f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は,「$\alpha \preccurlyeq_f \beta \iff \alpha \cap \beta \neq \emptyset$」をみたし，$A^*$ 上の $\mathbb{T}$ 写関係すべての交わりに等しく，A^* 上の反復律と包容律に従う関係の中で最小のものであり，強束律に従う．

略解　各 $S \in \mathcal{P}A$ の定義関数 1_S について $(fx)S = 1_S(x)$ が成り立つから，問題 3.19.22 により $\preccurlyeq_f$ は 1_S 真関係 $\preccurlyeq_{1_S}$ ($S \in \mathcal{P}A$) すべての交わりに等しく，従って問題 3.19.12 で定義した S 関係 $\preccurlyeq_S$ ($S \in \mathcal{P}A$) すべての交わりに等しい．このことから始めの二つの結論が得られる．

注意 3.19.6 束写系の条件 a, b, c より強い次の三条件をみたす三つ組み $(A, \mathbb{B}', f)$ について考える（これを**完備束写系**と呼ぶ）．

a′. A は集合である（これは条件 a と変わらない）．

b′. $\mathbb{B}'$ は完備束である（順序関係・最小元・最大元を $\leq, 0, 1$ で表す．第 3.9.4 項参照）．

c′. f は A から $\mathbb{B}'$ への写像である（これも条件 c と変わらない）．

そしてまず，A 上の普遍単位半群 A^* の代わりに A の巾集合 $\mathcal{P}A$ に着目し，$\mathcal{P}A$ に加法 $\alpha \cup \beta$ を算法として与えて汎代数系とみなす．ただし，加法記号 $\cup$ は記さず，また，単元集合 $\{x\}$ を x で表す（従ってたとえば，$\alpha x y \beta$ は $\alpha \cup \{x\} \cup \{y\} \cup \beta$ を意味する）．そうすると，$\mathcal{P}A$ は空集合 $\emptyset$ を単位元とする可換半群であり，巾等律 $\alpha\alpha = \alpha$ に従う．

次に，$\mathbb{B}'$ が完備束であることに留意して，$\mathcal{P}A$ 上の f **真関係** $\preccurlyeq'_f$ を次のように定義する．

$$\alpha \preccurlyeq'_f \beta \iff \inf f\alpha \leq \sup f\beta$$

ただし，第 3.9.3 項の下限・上限の定義により $\inf\emptyset = 1$, $\sup\emptyset = 0$ である．

$\mathcal{P}A$ 上の f 真関係 $\preccurlyeq'_f$ について，束写関係についてと同様の理論が成立する．ただし，まったく同様ではない．主な相違点を挙げれば，

1. fA が $\mathbb{B}'$ の部分束である場合を，$fA \cup \{0, 1\} = \mathbb{B}'$ の場合に帰着させることができない．$\mathbb{B}'$ の部分束は必ずしも完備束ではないからである．そのため，$\preccurlyeq'_f$ についての問題 3.19.6 に相当する命題では，たとえば $fA = \mathbb{B}'$ と仮定を強めなくてはならず，また，$\preccurlyeq'_f$ についての定理 3.19.6 系に相当する命題が成立するかが不明となる．

2. 集合 A 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ に対して，補題 3.19.1 でと同様に $\mathcal{P}A$ 上の関係 $\preccurlyeq$ を定義することはできて，これが $\sqsubseteq$ を拡張し束律に従うことも証明できる．しかし，これが $\sqsubseteq$ を拡張し束律に従う $\mathcal{P}A$ 上の関係の中で最大のものであるかが不明となる．

なお，$(A, \mathbb{B}, f)$ が束写系であれば，$\mathbb{B}$ の完備化を $\mathbb{B}'$ で表すとき，$(A, \mathbb{B}', f)$ は完備束写系であり，その定める関係 $\preccurlyeq'_f$ を $\mathcal{P}'A$ に制限したものは，$(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ と同一視することができる．問題 3.9.45 により $\mathbb{B}$ が $\mathbb{B}'$ の部分束であって $\mathbb{B}'$ と最小元・最大元を共有するからである．

3.20　偏束写系から得られる関係法則

$ 第 3.19 節では束写系から得られる関係について考えた．類似の考察をより広範に「偏束写系」についても行なうと共に，束写系と偏束写系の関係について考える．ただし，第 3.19 節の内容の自明な拡張に類することは，本来は定理とすべきことでも問題の形に述べることがある．また，AZ 記法・列便法を含めて，第 3.19 節の記法・便法を継承する．なお，偏束についての基本的な概念・事実・規約は例 3.13.3 で説明してある．

問題 3.20.1 三つ組み $(A, \mathbb{B}, f)$ が束写系の条件 a, b, c より弱い次の三条件をみたすとする（こういう三つ組みを**偏束写系**と呼ぶ）．

a′. A は集合である（これは条件 a と変わらない）．

b′. $\mathbb{B}$ は偏束であり（その順序関係・交法を $\leq, \wedge$ で表す），最大元 1 を持つ．

c′. f は A から $\mathbb{B}$ への写像である（これも条件 c と変わらない）．

そして，A^*, A 間の関係 $\vDash_f$ を次のように定義する（これを**偏束写系** $(A, \mathbb{B}, f)$ **の定める関係**とか**偏 f 真関係**とかと呼ぶ）．

$$\alpha \vDash_f y \iff \inf f\alpha \leq fy$$

ただし，下限の定義により $\inf \emptyset = 1$ である．そうすると，関係 $\vDash_f$ は次の五法則に従う．

$$x \vDash_f x \qquad \text{(反復律)}$$

$$\alpha \vDash_f y \implies x\alpha \vDash_f y \qquad \textbf{(偏付加律)}$$

$$xx\alpha \vDash_f y \implies x\alpha \vDash_f y \qquad \textbf{(偏巾等律)}$$

$$\alpha xy\beta \vDash_f z \implies \alpha yx\beta \vDash_f z \qquad \textbf{(偏置換律)}$$

$$\alpha \vDash_f x,\ x\beta \vDash_f y \implies \alpha\beta \vDash_f y \qquad \textbf{(偏消去律)}$$

また，fA が $\mathbb{B}$ の部分偏束であるためには $\vDash_f$ が問題 3.19.10 の準下限律に従うことが必要十分であり，fA が 1 を含むためには $\vDash_f$ が問題 3.19.8 の上端律に従うことが必要十分である．

定義 3.20.1 任意の集合 A に対して，A^*, A 間の関係についての上記の五法則を合わせた法則を**偏束律**と呼び，A^*, A 間の偏束律に従う関係を**偏束関係**と呼ぶ．

問題 3.20.2 偏付加律・偏巾等律・偏置換律を合わせた法則は次の法則と同等である．

$$\alpha \vDash_f y,\ \alpha \subseteq \alpha' \implies \alpha' \vDash_f y \qquad \textbf{(偏包容律)}$$

問題 3.20.3 偏束律およびそれを成す反復律・偏付加律・偏巾等律・偏置換律・偏消去律はそれぞれ交閉的法則である（定理 3.29.4 と定理 3.29.2 参照）．

問題 3.20.4 $(A, \mathbb{B}, f)$ が束写系であれば，$(A, \mathbb{B}, f)$ は偏束写系であって，偏 f 真関係 $\vDash_f$ は f 真関係 $\preccurlyeq_f$ の $A^* \times A$ への制限に等しい．

略解　例 3.13.3 に記した通り，束 $\mathbb{B}$ は偏束でもあって，$\mathbb{B}$ の束順序関係と偏束順序関係が等しいからである．

問題 3.20.5 A を集合とするとき，A^* 上の束関係 $\preccurlyeq$ を制限して得られる A^*, A 間の関係 $\vDash$ は偏束律に従う．$\vDash$ が準下限律に従うためには $\preccurlyeq$ が準下限律に従うことが必要十分であり，$\vDash$ が上端律に従うためには $\preccurlyeq$ が上端律に従うことが必要十分である．

問題 3.20.6 集合 A の部分集合 S に対して，A^*, A 間の関係 $\vDash_S$ を列便法を使って

$$\alpha \vDash_S y \iff \alpha \not\subseteq S \text{ または } y \in S$$

と定義する（これを**偏 S 関係**と呼ぶ）．そうすると $\vDash_S$ は偏束律と準下限律に従う．また，$\vDash_S$ が上端律に従うためには，$S \neq \emptyset$ なることが必要十分である．

略解　$\vDash_S$ が問題 3.19.12 で定義した S 関係 $\preccurlyeq_S$ の $A^* \times A$ への制限に等しいからである．

問題 3.20.7 A を集合とし $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ を閉写とするとき，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ が

$$\varphi\alpha \ni y$$

をみたすことを $\alpha \vDash_\varphi y$ で表して得られる A^*, A 間の関係 $\vDash_\varphi$ は偏束律に従う．$\vDash_\varphi$ が準下限律に従うためには，各 $(x, y) \in A \times A$ に応じて $\varphi\{x, y\} = \varphi\{z\}$ なる $z \in A$ の存在することが必要十分であり，上端律に従うためには，$\varphi\emptyset \neq \emptyset$ なることが必要十分である．

注意 3.20.1 A^*, A 間の任意の偏束関係は $\mathcal{P}A$ 上のある有限的閉写 φ に対し $\vDash_\varphi$ に等しいことが問題 3.24.16 により示される．

略解　$\vDash_\varphi$ は問題 3.19.13 で定めた A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ および問題 3.19.15 で定めた A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ の $A^* \times A$ への制限に等しい．

問題 3.20.8 代数系 A の部分集合 D に対して，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ が $[\alpha \cup D]_A \ni y$ をみたすことを $\alpha \vDash_D y$ で表して得られる A^*, A 間の関係 $\vDash_D$ は偏束律に従う．

問題 3.20.9 A を代数系とし，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対し，A 上の計算代数系 $C(A)$ の元 c で $\mathrm{sp}\, c \subseteq \alpha$，$\mathrm{tp}\, c = y$ なるものがあることを $\alpha \vDash_\emptyset y$ で表す（$\mathrm{sp}\, c$ は第 3.8 節末尾で定義した）．こうして得られる A^*, A 間の関係 $\vDash_\emptyset$ は偏束律に従う．

問題 3.20.10 (✓) A を代数系とし，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対し，A 上の計算代数系 $C(A)$ の元 c で $\mathrm{ssp}\, c = \alpha$，$\mathrm{tp}\, c = y$ なるものがあることを $\alpha \vDash_A y$ で表す（$\mathrm{ssp}\, c$ は第 3.8 節末尾で定義した）．こうして得られる A^*, A 間の関係 $\vDash_A$ は次の法則に従う．

$$\alpha \vDash_A x,\ \beta \vDash_A y \implies \beta(x/\alpha) \vDash_A y \qquad \text{(代入律)}$$

ただし $\beta(x/\alpha)$ は，β において x に α を代入した元を表す（この代入概念は未定義である）．

定理 3.20.1 **A を集合とし，A^*, A 間の偏束関係 $\vDash$ に対して，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ を**

$$\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n \iff y_i \vDash z\ (i = 1, \ldots, n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } \alpha \vDash z$$

と定義すれば，$\preccurlyeq$ は $\vDash$ を拡張し束律と劣空律に従う．また，$\preccurlyeq$ は $\vDash$ を拡張し束律に従う A^* 上の関係の中で最大のものである（そこで $\preccurlyeq$ を，偏束関係 $\vDash$ の最大束拡張と呼ぶ．補題 3.19.1 で定義した擬順序関係の最大束拡張を参照）．

注意 3.20.2 上記定義において $n=0$ の場合,「$y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ なる」は空疎な条件となる．従って $\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ なることは，任意の $z \in A$ に対して $\alpha \vDash z$ なることと同等である．

証明 (後出の別証参照) 拡張であることと反復律：$\alpha \vDash y$ なら，$y \vDash z$ なる任意の z に対して偏消去律によって $\alpha \vDash z$ が成り立つから，$\alpha \preccurlyeq y$ が成り立つ．逆に $\alpha \preccurlyeq y$ なら，反復律により $y \vDash y$ なので $\alpha \vDash y$ が成り立つ．よって $\preccurlyeq$ は $\vDash$ の拡張である．特に，$\preccurlyeq$ は反復律に従う．

劣空律：上記の注意と $\preccurlyeq$ が $\vDash$ の拡張であることにより，$\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ なることは，任意の $z \in A$ に対して $\alpha \preccurlyeq z$ なることと同等である．

付加律：$\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ と仮定して，任意の $x \in A$ をとる．このとき，$y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ なる任意の $z \in A$ に対して $\alpha \vDash z$，従って偏付加律により $x\alpha \vDash z$ が成り立つから，$x\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ が成り立つ．$x \vDash z$, $y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ なら，$y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ により $\alpha \vDash z$ が成り立つ．従って $\alpha \preccurlyeq xy_1 \cdots y_n$ も成り立つ．

巾等律：まず $xx\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ と仮定する．このとき，$y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ なる任意の $z \in A$ に対して $xx\alpha \vDash z$，従って偏巾等律により $x\alpha \vDash z$ が成り立つから，$x\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ が成り立つ．次に $\alpha \preccurlyeq xxy_1 \cdots y_n$ と仮定する．このとき，$x \vDash z$, $y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ なる任意の $z \in A$ に対して $\alpha \vDash z$ が成り立つから，$\alpha \preccurlyeq xy_1 \cdots y_n$ が成り立つ．

置換律：これは，$\vDash$ の偏置換律と $\preccurlyeq$ の定義が $y_1,\dots,y_n$ の番号付けに依らないことにより成り立つ．

消去律：まず $\alpha \preccurlyeq x$, $x\beta \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ と仮定する．このとき，$y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ なる任意の $z \in A$ に対して，$x\beta \vDash z$ が成り立ち，また，$\preccurlyeq$ が $\vDash$ の拡張であることにより $\alpha \vDash x$ が成り立つから，偏消去律によって $\alpha\beta \vDash z$ が成り立つ．つまり $\alpha\beta \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ が成り立つ．次に $x \preccurlyeq x_1 \cdots x_m$, $\delta \preccurlyeq xy_1 \cdots y_n$ と仮定する．このとき，$x_i \vDash z\ (i=1,\dots,m)$ であれば，$x \vDash z$ が成り立つから，$y_j \vDash z\ (j=1,\dots,n)$ でもあれば $\delta \vDash z$ が成り立つ．つまり $\delta \preccurlyeq x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_n$ が成り立つ．

最大性：$\vDash$ を拡張し束律に従う A^* 上の関係 R を任意にとる．$\alpha R \varepsilon$ なら，任意の $z \in A$ に対して，まず R についての付加律により $\alpha R z$ が成り立ち，次に R が $\vDash$ の拡張であることにより $\alpha \vDash z$ が成り立つから，$\preccurlyeq$ の定義により $\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つ．また，$\alpha R y_1 \cdots y_n\ (n \geq 1)$ なら，$y_i \vDash z\ (i=1,\dots,n)$ なる任意の $z \in A$ に対して，まず R が $\vDash$ の拡張であることにより $y_i R z\ (i=1,\dots,n)$ が成り立ち，従って R についての消去律・置換律・巾等律によって $\alpha R z$ が成り立ち，従ってまた R が $\vDash$ の拡張であることにより $\alpha \vDash z$ が成り立つから，$\preccurlyeq$ の定義により $\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ が成り立つ．これで $R \subseteq \preccurlyeq$ なることが示せた．

定理 3.20.2 束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ がさらに定理 3.19.8 の条件 (3.19.3) をみたすとする．このとき，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は偏 f 真関係 $\vDash_f$ の最大束拡張に等しい．

証明　問題 3.20.4 と問題 3.20.1 により $\vDash_f$ は偏束律に従うから，定理 3.20.1 により $\vDash_f$ の最大束拡張 ${\vDash_f}^*$ が存在する．それが $\preccurlyeq_f$ に等しいことは，α, $y_1 \cdots y_n \in A^*$ に対して $a = \inf f\alpha$, $b = \sup\{fy_1,\dots,fy_n\}$ と定めての次の推論によって示すことができる．

$$
\begin{aligned}
\alpha \vDash_f^* y_1 \cdots y_n &\iff y_i \vDash_f z\ (i=1,\dots,n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } \alpha \vDash_f z \\
&\iff fy_i \leq fz\ (i=1,\dots,n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } a \leq fz \\
&\iff b \leq fz \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } a \leq fz \\
&\iff a \leq \inf\bigl(fA \cap [b\to)\bigr)
\end{aligned}
$$

$$\iff a \leq b$$
$$\iff \alpha \preccurlyeq_f y_1 \cdots y_n$$

系　束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ がさらに次の二条件のいずれかをみたすとする．

1. $\mathbb{B} - \{1\} \subseteq fA$　　**2.** $0 = \inf fA$ **であって** fA **は** $\mathbb{B}$ **の結法** $\vee$ **で閉じている**

このとき，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は偏 f 真関係 $\vDash_f$ の最大束拡張に等しい．

証明　条件 1 の下では $A, \mathbb{B}, f$ は，定理 3.19.8 の条件 (3.19.3) より強い次の条件をみたす．

$$b \in \mathbb{B} \implies b = \inf\bigl(fA \cap [b\rightarrow)\bigr) \tag{3.20.1}$$

実際，$b \in fA$ なら $b = \min\bigl(fA \cap [b\rightarrow)\bigr)$ が成り立ち，$b \notin fA$ なら，$b = 1$ なので $\bigl(fA \cap [b\rightarrow)\bigr) = \emptyset$，従って $\inf\bigl(fA \cap [b\rightarrow)\bigr) = 1 = b$ が成り立つ．条件 2 の下では，$b = \sup f\beta$ $(\beta \neq \varepsilon)$ なら $b \in fA$ なることと注意 3.19.5 により，$A, \mathbb{B}, f$ は条件 (3.19.3) をみたす．いずれにしても，定理 3.20.2 によってこの系が成り立つ．

系 2　A を集合とし S を A と異なる A の部分集合とするとき，問題 3.19.12 で定義した S 関係 $\preccurlyeq_S$ は，問題 3.20.6 で定義した偏 S 関係 $\vDash_S$ の最大束拡張に等しい．

証明　問題 3.19.12 の略解に記した通り，三つ組み $(A, \mathbb{T}, 1_S)$ が束写系であり，1_S 真関係が $\preccurlyeq_S$ に等しい．また，問題 3.20.6 の略解に記したことと問題 3.20.4 により，偏 1_S 真関係が $\vDash_S$ に等しい．さらに，$S \neq A$ なることにより，$0 \in 1_S A$ が成り立つ．従って前系の条件 1, 2 がいずれもみたされ，この系が成り立つ．

注意 3.20.3　系 2 において，$\mathbb{T}$ は最小元と最大元とを持つ線形順序集合であり $0 \in 1_S A$ が成り立つ．従って系 2 は，後出の問題 3.20.12 から導くこともできる．

系 3　A を集合とし $\varphi \in \mathcal{P}A \rightarrow \mathcal{P}A$ を閉写とするとき，問題 3.19.13 において定義した A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ は，問題 3.20.7 において定義した A^*, A 間の関係 $\vDash_\varphi$ の最大束拡張に等しい．

証明　問題 3.19.13 の略解に記した通り，φ の留域を $\mathcal{B}$ とし，$\mathcal{B}$ 上の順序関係 $\leq$ を「$X \leq Y \iff X \supseteq Y$」と定義し，$f \in A \rightarrow \mathcal{B}$ を $fx = \varphi\{x\}$ と定義すれば，三つ組み $(A, \mathcal{B}, f)$ は束写系であり，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が $\preccurlyeq_\varphi$ に等しい．また，問題 3.20.7 の略解に記したことと問題 3.20.4 により，偏 f 真関係 $\vDash_f$ が $\vDash_\varphi$ に等しい．また，$Y \in \mathcal{B}$ なら $Y = \bigcup_{z \in Y}\{z\} = \varphi\bigl(\bigcup_{\varphi\{z\} \subseteq Y} \varphi\{z\}\bigr)$ が成り立つから，$A, \mathcal{B}, f$ は定理 3.20.2 系の証明中に記した条件 (3.20.1) をみたす．従って定理 3.20.2 からこの系が得られる．

別証　一般的な定理 3.20.2 から導くのでなく $\preccurlyeq_\varphi$ と $\vDash_\varphi$ の定義だけを使って次のように証明することもできる（定理 3.20.1 別証参照）．

$$\begin{aligned}
\alpha \preccurlyeq_\varphi y_1 \cdots y_n &\iff \varphi\alpha \supseteq \varphi\{y_1\} \cap \cdots \cap \varphi\{y_n\} \\
&\iff \varphi\{y_i\} \ni z\ (i = 1, \ldots, n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } \varphi\alpha \ni z \\
&\iff y_i \vDash_\varphi z\ (i = 1, \ldots, n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } \alpha \vDash_\varphi z
\end{aligned}$$

定理 3.20.3 A **を集合とし，**A^*, A **間の偏束関係** $\vDash$ **に対して，**A^* **上の関係** $\preccurlyeq$ **を**

$$\alpha \preccurlyeq \beta \iff \begin{cases} \alpha \vDash y \text{ なる } y \in \beta \text{ がある} & \cdots \quad \beta \neq \varepsilon \text{ のとき} \\ \text{任意の } z \in A \text{ に対して } \alpha \vDash z & \cdots \quad \beta = \varepsilon \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.20.2}$$

と定義すれば，$\preccurlyeq$ **は** $\vDash$ **を拡張し強束律と劣空律とに従う．また** $\preccurlyeq$ **は，**$\vDash$ **を拡張し束律と劣空律とに従う** A^* **上の関係の中で最小のものである（そこで** $\preccurlyeq$ **を，偏束関係** $\vDash$ **の最小束劣空拡張と呼ぶ）．また，**$\preccurlyeq$ **が準上限律に従うためには，各** $(x, y) \in A \times A$ **に対して** $x \vDash y$ **と** $y \vDash x$ **のどちらかの成り立つことが必要十分である．**

証明　(後出の別証参照) $\beta \neq \varepsilon$ の場合の $\alpha \preccurlyeq \beta$ の定義より，$\preccurlyeq$ は $\vDash$ の拡張であり，従って特に $\preccurlyeq$ は反復律に従う．また，$\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ の定義より，$\preccurlyeq$ は劣空律に従う

付加律：任意の $x \in A$ をとる．まず $\alpha \preccurlyeq \beta$ $(\beta \neq \varepsilon)$ と仮定する．そうすると，$\alpha \vDash y$ なる $y \in \beta$ があり，従って $\alpha \preccurlyeq x\beta$ が成り立つ．また，偏付加律により $x\alpha \vDash y$ が成り立つから，$x\alpha \preccurlyeq \beta$ も成り立つ．次に $\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ と仮定する．そうすると，任意の $z \in A$ に対して $\alpha \vDash z$，従って偏付加律により $x\alpha \vDash z$ が成り立つから，$x\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つ．また，特に $\alpha \vDash x$ が成り立つから，$\alpha \preccurlyeq x$ も成り立つ．

巾等律：まず $xx\alpha \preccurlyeq \beta$ $(\beta \neq \varepsilon)$ と仮定する．そうすると，$xx\alpha \vDash y$ なる $y \in \beta$ があり，それは偏巾等律により $x\alpha \vDash y$ をみたすから，$x\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．次に $xx\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ と仮定する．そうすると，任意の $z \in A$ に対して $xx\alpha \vDash z$，従って偏巾等律により $x\alpha \vDash z$ が成り立つから，$x\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つ．最後に $\alpha \preccurlyeq xx\beta$ と仮定する．そうすると，$\alpha \vDash x$ または $\alpha \vDash y$ なる $y \in \beta$ があるから，$\alpha \preccurlyeq x\beta$ が成り立つ．

置換律：これは，$\vDash$ の偏置換律と $\alpha \preccurlyeq \beta$ の定義が β を列便法によって集合とみなしたものにしか依らないこととにより成り立つ．

強消去律：$\alpha \preccurlyeq x\gamma$，$x\beta \preccurlyeq \delta$ と仮定する．そうすると，$\alpha \vDash x$ であるか $\alpha \vDash y$ なる $y \in \gamma$ がある．$\alpha \vDash y$ なる $y \in \gamma$ のある場合には，偏付加律と偏置換律とにより $\alpha\beta \vDash y$ が成り立つから，$\alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ が成り立つ．そこで $\alpha \vDash x$ と仮定する．$x\beta \vDash z$ なる $z \in \delta$ がある場合には，偏消去律により $\alpha\beta \vDash z$ が成り立つから，$\alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ が成り立つ．$\delta = \varepsilon$ すなわち $x\beta \preccurlyeq \varepsilon$ の場合には，任意の $z \in A$ に対して $x\beta \vDash z$ が成り立ち，従って偏消去律により $\alpha\beta \vDash z$ が成り立つから，$\alpha\beta \preccurlyeq \gamma$ が成り立つ．

最小性：$\vDash$ を拡張し束律と劣空律とに従う A^* 上の関係 R を任意にとる．$\alpha \preccurlyeq \beta$ $(\beta \neq \varepsilon)$ であれば，$\alpha \vDash y$ なる $y \in \beta$ があり，R が $\vDash$ の拡張であることにより $\alpha R y$ が成り立つから，R の付加律と置換律とによって $\alpha R \beta$ が成り立つ．$\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ であれば，$\preccurlyeq$ の付加律または $\preccurlyeq$ の定義によって任意の $z \in A$ に対して $\alpha \vDash z$，従って $\alpha R z$ が成り立つから，R の劣空律によって $\alpha R \varepsilon$ が成り立つ．以上により $\preccurlyeq$ は R に含まれる．

準上限律：任意の $(x, y) \in A \times A$ をとる．そしてまず，$x \preccurlyeq z$，$y \preccurlyeq z$，$z \preccurlyeq xy$ なる $z \in A$ があると仮定する．そうすると，$x \vDash z$，$y \vDash z$ が成り立ち，$z \vDash x$ と $z \vDash y$ のどちらかが成り立つ．従って $\vDash$ の偏消去律によって，$y \vDash x$ と $x \vDash y$ のどちらかが成り立つ．次に，$x \vDash y$ と $y \vDash x$ のどちらかが成り立つと仮定する．どちらが成り立つかに応じて $z = y$ または $z = x$ と定めれば，反復律により $x \vDash z$，$y \vDash z$ が共に成り立ち，$z \vDash x$ と $z \vDash y$ のどちらかが成り立つ．従って $x \preccurlyeq z$，$y \preccurlyeq z$，$z \preccurlyeq xy$ が成り立つ．

問題 3.20.11 束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ がさらに $\inf fA = 0$ をみたすとする．このとき，問題 3.19.7 でのように定義される A^* 上の関係 $\preccurlyeq_f$ は偏 f 真関係 $\vDash_f$ の最小束劣空拡張に等しい．

問題 3.20.12 束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ がさらに $\inf fA = 0$ をみたし $\mathbb{B}$ が線形順序集合であるとする（問題 3.9.22 参照）．このとき，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は偏 f 真関係 $\vDash_f$ の最大束拡張と最小束劣空拡張に等しい．従って，$\vDash_f$ を拡張し束律と劣空律に従う A^* 上の関係は $\preccurlyeq_f$ に限る．

略解　$\preccurlyeq_f$ が $\vDash_f$ の最大束拡張に等しいことは，定理 3.20.2 系から分かる．$\preccurlyeq_f$ が $\vDash_f$ の最小束劣空拡張に等しいことは，問題 3.19.7 と問題 3.20.11 から分かる．

問題 3.20.13 A を集合とし $\varphi \in \mathcal{P}A{\to}\mathcal{P}A$ を閉写とするとき，問題 3.19.15 において定義した A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ は，問題 3.20.7 において定義した A^*, A 間の関係 $\vDash_\varphi$ の最小束劣空拡張に等しい．

問題 3.20.14 集合 A 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ に対して，A^*, A 間の関係 $\vDash$ を

$$x_1 \cdots x_n \vDash y \iff z \sqsubseteq x_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } z \sqsubseteq y$$

と定義すれば，$\vDash$ は $\sqsubseteq$ を拡張し偏束律に従う A^*, A 間の関係の中で最大のものである（そこで $\vDash$ を，擬順序関係 $\sqsubseteq$ の**最大偏束拡張**と呼ぶ）．

問題 3.20.15 集合 A 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ の最大偏束拡張の最大束拡張は，$\sqsubseteq$ の最大束拡張（これは補題 3.19.1 で定義した）に等しい．

問題 3.20.16 問題 3.20.1 において $A, \mathbb{B}, f$ がさらに定理 3.19.8 の条件 (3.19.2) をみたすなら，$\vDash_f$ は $\mathbb{B}$ の順序関係 $\leq$ を f によって引き戻して得られる A 上の擬順序関係 $\leq_f$ の最大偏束拡張に等しい．

問題 3.20.17 問題 3.20.1 においてさらに fA が $1 = \sup fA$ をみたす $\mathbb{B}$ の部分偏束であれば，$\vDash_f$ は $\mathbb{B}$ の順序関係 $\leq$ を f によって引き戻して得られる A 上の擬順序関係 $\leq_f$ の最大偏束拡張に等しい．

略解　$a = \inf f\alpha \ (\alpha \neq \varepsilon)$ なら $a \in fA$ が成り立つから，条件 (3.19.2) がみたされる．

問題 3.20.18 A を集合とし，$\mathbb{B}$ を最大元を持つ偏束とし，$(f_v)_{v\in V}$ を A から $\mathbb{B}$ への写像の族とし，A から巾偏束 $\mathbb{B}^V$ への写像 f を $(fx)v = f_v x \ (x \in A,\ v \in V)$ と定める．このとき，偏 f 真関係 $\vDash_f$ は偏 f_v 真関係 $\vDash_{f_v}$ $(v \in V)$ すべての交わりに等しい．

略解　問題 3.19.22 と同様である．

3.21　ブール律の分析

＄ 第 3.19 節で，束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ が種々の代数的付加条件をみたすのに応じて f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が種々の法則に従うことを示した．この節では，それら法則と関連する法則について説明する．そこで**この節を通じて，そうでない旨断らない限り（定義 3.21.1，定義 3.21.2，定義 3.21.4，定義 3.21.5，定理 3.21.10 参照），A を集合とし $\preccurlyeq$ を A^* 上の束関係，すなわち次の五法則から成る束律に従う関係とする．**ただし，AZ 記法・列便法等の第 3.19 節の記法・便法を継承する．

$$x \preccurlyeq x \qquad \text{(反復律)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \preccurlyeq \beta \implies x\alpha \preccurlyeq \beta \\ \alpha \succcurlyeq \beta \implies x\alpha \succcurlyeq \beta \end{array}\right\} \qquad \text{(付加律)}$$

$$\left.\begin{array}{l} xx\alpha \preccurlyeq \beta \implies x\alpha \preccurlyeq \beta \\ xx\alpha \succcurlyeq \beta \implies x\alpha \succcurlyeq \beta \end{array}\right\} \qquad \text{(巾等律)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha xy\beta \preccurlyeq \gamma \implies \alpha yx\beta \preccurlyeq \gamma \\ \alpha xy\beta \succcurlyeq \gamma \implies \alpha yx\beta \succcurlyeq \gamma \end{array}\right\} \qquad \text{(置換律)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \preccurlyeq x,\ x\beta \preccurlyeq \delta \implies \alpha\beta \preccurlyeq \delta \\ \alpha \succcurlyeq x,\ x\beta \succcurlyeq \delta \implies \alpha\beta \succcurlyeq \delta \end{array}\right\} \qquad \text{(消去律)}$$

しばしば，束関係より狭い強束関係の範囲について考える．すなわち，$\preccurlyeq$ が束律中の消去律を

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \preccurlyeq x\gamma \\ x\beta \preccurlyeq \delta \end{array}\right\} \implies \alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma \qquad \text{(強消去律)}$$

に取り替えて得られる強束律に従う場合について考える..

なお，A^* の乗法記号はこれまで通り通常は記さないが，記す必要のある場合はコンマを乗法記号に代用する．たとえば，定理 3.21.1 の法則 a2 における $x \wedge y, \beta$ は，A の二元 x, y に A の二項算法 $\wedge$ を適用して出来た A の元 $x \wedge y$ と A^* の元 β の A^* における積を表す.

補題 3.21.1 **$\preccurlyeq$ を制限して出来る A 上の関係 $\sqsubseteq$ は擬順序関係である．従って $\sqsubseteq$ の対称核は同値関係である（これを以後 $\asymp$ で表す）.**

証明　$\preccurlyeq$ の反復律がすなわち $\sqsubseteq$ の反射律となり，$\preccurlyeq$ の消去律がすなわち $\sqsubseteq$ の推移律となる（従ってこの文脈では,「推移律」でなく「消去律」と呼ぶのが相応しい）．後半は問題 3.9.55 による.

注意 3.21.1 補題 3.21.1 では，$\preccurlyeq$ の $A \times A$ への制限 $\sqsubseteq$ の対称核を $\asymp$ で表したのであり，$\preccurlyeq$ 自身の対称核を $\asymp$ で表したのではない．どんな関係にも対称核があるから，$\preccurlyeq$ 自身の対称核を考えることもできる．しかし一般に，本書で何らかの集合 A に対して A^* 上の関係を考察する際には，それ自身の対称核は重要ではなく，それの $A \times A$ への制限の対称核が重要となる.

補題 3.21.2 **$\preccurlyeq$ は次の法則に従う** $(n = 1, 2, \ldots)$**.**

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i \preccurlyeq x_i\ (i = 1, \ldots, n) \\ x_1 \cdots x_n\beta \preccurlyeq \delta \end{array}\right\} \implies \alpha_1 \cdots \alpha_n\beta \preccurlyeq \delta \qquad \text{(重消去律)}$$

$\preccurlyeq$ は，強消去律に従う場合には次の法則に従う $(n = 1, 2, \ldots)$**.**

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i \preccurlyeq x_i\gamma_i\ (i = 1, \ldots, n) \\ x_1 \cdots x_n\beta \preccurlyeq \delta \end{array}\right\} \implies \alpha_1 \cdots \alpha_n\beta \preccurlyeq \delta\gamma_1 \cdots \gamma_n \qquad \text{(重強消去律)}$$

証明　まず，$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合を考える．$n = 1$ のときの重強消去律は強消去律そのものである．そこで，$n > 1$ と仮定し n についての帰納法を使う．$\alpha_1 \preccurlyeq x_1\gamma_1$ と $x_1 \cdots x_n\beta \preccurlyeq \delta$ に強消去律を使えば $\alpha_1 x_2 \cdots x_n\beta \preccurlyeq \delta\gamma_1$．これに置換律を繰り返し使って $x_2 \cdots x_n\alpha_1\beta \preccurlyeq \delta\gamma_1$ を得る．従って，帰納法の仮定により $\alpha_2 \cdots \alpha_n\alpha_1\beta \preccurlyeq \delta\gamma_1 \cdots \gamma_n$．これに置換律を繰り返し使って $\alpha_1 \cdots \alpha_n\beta \preccurlyeq \delta\gamma_1 \cdots \gamma_n$ を得る．以上で $\gamma_i = \varepsilon\ (i = 1, \ldots, n)$ とすれば，重消去律の証明となる.

注意 3.21.2 A が順序関係 $\leq$ について最小元と最大元とを持つ束であるとき，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ を問題 3.19.17 でのように定めると，$\preccurlyeq$ は束律に従い（つまりこの節の仮定をみたし），A が分配束で

あれば $\preccurlyeq$ は強消去律に従う．そこでこの $\preccurlyeq$ に補題 3.21.2 を適用することができて，A が分配束であれば A の束算法 $\wedge, \vee$ が次の法則に従うことが分かる $(n = 1, 2, \ldots)$.

$$\left.\begin{array}{l} a_i \le e_i \vee c_i \ (i = 1, \ldots, n) \\ e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \wedge b \le d \end{array}\right\} \implies a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b \le d \vee c_1 \vee \ldots \vee c_n$$

以下に示す命題からも同様に，束についての非自明な命題の得られる場合がある．なお，問題 3.19.5 によれば，上の法則の $n = 1$ の場合は分配律と同等である．

問題 3.21.1 $x_1, \ldots, x_n \in A$ と $\beta, \delta \in A^*$ についての次の四条件のうち，条件 1, 3, 4 は同等であり，条件 2 は他を含意する [61]．$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合には条件 2 も他と同等である．

1. $x_1 \cdots x_n \beta \preccurlyeq \delta$
2. $\alpha_i \preccurlyeq x_i \gamma_i \ (i = 1, \ldots, n) \implies \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta \preccurlyeq \delta \gamma_1 \cdots \gamma_n$
3. $\alpha_i \preccurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n) \implies \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta \preccurlyeq \delta$
4. $y_i \preccurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n) \implies y_1 \cdots y_n \beta \preccurlyeq \delta$

略解　$(1 \Longrightarrow 2)$ と $(1 \Longrightarrow 3)$ とはそれぞれ，重強消去律と重消去律との言い換えである．

$(4 \Longrightarrow 1)$ 反復律により $x_i \preccurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n)$．これを条件 4 の前提として使う．

補題 3.21.3 $x_1, \ldots, x_n, y \in A$ $(n \ge 1)$ **についての次の六条件のうち，条件 1 および 3 – 6 は同等であり，条件 2 は他を含意する．**$\preccurlyeq$ **が強消去律に従う場合には条件 2 も他と同等である（矢印の向きに注意）．**

1. $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$

2. $\alpha \preccurlyeq x_i \beta \ (i = 1, \ldots, n) \implies \alpha \preccurlyeq y\beta$

3. $\alpha \preccurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n) \implies \alpha \preccurlyeq y$

4. $x_1 \cdots x_n \beta \preccurlyeq \alpha \impliedby y\beta \preccurlyeq \alpha$

5. $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq \alpha \impliedby y \preccurlyeq \alpha$

6. $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq z \impliedby y \preccurlyeq z$

証明　まず，$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合を考える．

$(1 \Longrightarrow 2)$ $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ かつ $\alpha \preccurlyeq x_i \beta \ (i = 1, \ldots, n)$ とする．重強消去律により $\alpha \cdots \alpha \preccurlyeq y\beta \cdots \beta$．これに置換律と巾等律を繰り返し使って $\alpha \preccurlyeq y\beta$ を得る．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 条件 2 において $\beta = \varepsilon$ とすれば条件 3 となる．

$(3 \Longrightarrow 1)$ 反復律・付加律・置換律により $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n)$．これらを条件 3 の前提として使って $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ を得る．

$(1 \Longrightarrow 4)$ $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ と $y\beta \preccurlyeq \alpha$ とに消去律をつかって $x_1 \cdots x_n \beta \preccurlyeq \alpha$ を得る．

$(4 \Longrightarrow 5)$ 条件 4 において $\beta = \varepsilon$ とすれば条件 5 となる．

$(5 \Longrightarrow 6)$ 条件 5 において $\alpha = z$ とすれば条件 6 となる．

$(6 \Longrightarrow 1)$ $y \preccurlyeq y$ を条件 6 の前提として使って $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ を得る．

なお，条件 1 – 3 の間の上記の関係は，問題 3.21.1 から導くこともできる．

$\preccurlyeq$ が強消去律に従わない場合，重強消去律が使えないから $(1 \Longrightarrow 2)$ が証明できないが，代わりに重消去律を使えば $(1 \Longrightarrow 3)$ が同様に証明される．

---

[61] 条件・法則についての「含意する」という概念については定義 3.29.2 参照.

注意 3.21.3 補題 3.21.3 によれば，$x, y \in A$ についての次の三条件は同等である．

1. $x \preccurlyeq y$　　2. $\alpha \preccurlyeq x \implies \alpha \preccurlyeq y$　　3. $y \preccurlyeq \alpha \implies x \preccurlyeq \alpha$

実は，($1 \Longleftrightarrow 3$) なることは，($1 \Longleftrightarrow 2$) なることを $\preccurlyeq$ の双対関係 $\succcurlyeq$ に適用しても分かる．なぜなら，$\preccurlyeq$ が束律に従うことは $\succcurlyeq$ が束律に従うことと同等である（これを束律の**双対性**と呼ぶ．例 3.13.2 の双対性参照）．従って ($1 \Longleftrightarrow 2$) なることにより，$x \succcurlyeq y$ と「$\alpha \succcurlyeq x \implies \alpha \succcurlyeq y$」が同等であることが分かり，それから ($1 \Longleftrightarrow 3$) が得られる．そこで一般に，束律からある命題が導かれたとき，その中の $\preccurlyeq$ を $\succcurlyeq$ に書き換えて得られる命題（これをもとの命題の**双対命題**と呼ぶ）は取り立てて証明せずに使う．また，$\preccurlyeq$ が強束律に従うことは $\succcurlyeq$ が強束律に従うことと同等である（これを強束律の**双対性**と呼ぶ）から，強束律から導かれた命題についても同様にする．

問題 3.21.2 $\preccurlyeq$ は次の法則に従う ($n = 1, 2, \ldots$).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i \succcurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n) \\ x_1 \cdots x_n \beta \succcurlyeq \delta \end{array}\right\} \implies \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta \succcurlyeq \delta \qquad \text{(双対重消去律)}$$

$\succcurlyeq$ は，強消去律に従う場合には次の法則に従う ($n = 1, 2, \ldots$).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i \succcurlyeq x_i \gamma_i \ (i = 1, \ldots, n) \\ x_1 \cdots x_n \beta \succcurlyeq \delta \end{array}\right\} \implies \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta \succcurlyeq \delta \gamma_1 \cdots \gamma_n \qquad \text{(双対重強消去律)}$$

補題 3.21.4 $x_1, \ldots, x_n, y \in A$ ($n \geq 1$) **についての次の六条件は同等である（矢印の向きに注意）．**

1. $y \preccurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n)$

2. $\alpha \preccurlyeq x_i \beta \ (i = 1, \ldots, n) \Longleftarrow \alpha \preccurlyeq y\beta$

3. $\alpha \preccurlyeq x_i \ (i = 1, \ldots, n) \Longleftarrow \alpha \preccurlyeq y$

4. $x_1 \cdots x_n \beta \preccurlyeq \alpha \implies y\beta \preccurlyeq \alpha$

5. $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq \alpha \implies y \preccurlyeq \alpha$

6. $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq z \implies y \preccurlyeq z$

証明　($1 \implies 2$) $y \preccurlyeq x_i$ と $\alpha \preccurlyeq y\beta$ とに消去律を使って $\alpha \preccurlyeq x_i \beta$ を得る ($i = 1, \ldots, n$).

($2 \implies 3$) 条件 2 において $\beta = \varepsilon$ とすれば条件 3 となる．

($3 \implies 1$) $y \preccurlyeq y$ を条件 3 の前提として使って $y \preccurlyeq x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) を得る．

($1 \implies 4$) $y \preccurlyeq x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) と $x_1 \cdots x_n \beta \preccurlyeq \alpha$ とに重消去律を使って $y \cdots y\beta \preccurlyeq \alpha$．これに巾等律を繰り返し使って $y\beta \preccurlyeq \alpha$ を得る．

($4 \implies 5$) 条件 4 において $\beta = \varepsilon$ とすれば条件 5 となる．

($5 \implies 6$) 条件 5 において $\alpha = z$ とすれば条件 6 となる．

($6 \implies 1$) 反復律・付加律・置換律により $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq x_i$．これを条件 6 の前提として使って $y \preccurlyeq x_i$ を得る ($i = 1, \ldots, n$).

定理 3.21.1 A **上の二項汎算法** $x \wedge y$ **についての次の六法則は同等である（矢印の向きに注意）．**

a1. $x \wedge y \preccurlyeq x,\ x \wedge y \preccurlyeq y$

a2. $\alpha \preccurlyeq x\beta,\ \alpha \preccurlyeq y\beta \Longleftarrow \alpha \preccurlyeq x \wedge y, \beta$

a3. $\alpha \preccurlyeq x,\ \alpha \preccurlyeq y \Longleftarrow \alpha \preccurlyeq x \wedge y$

a4. $xy\beta \preccurlyeq \alpha \implies x \wedge y, \beta \preccurlyeq \alpha$

a5. $xy \preccurlyeq \alpha \implies x \wedge y \preccurlyeq \alpha$

a6. $xy \preccurlyeq z \implies x \wedge y \preccurlyeq z$

また，次の六法則のうち，b1 および b3 − b6 は同等であり，b2 は他を含意する．$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合には b2 も他と同等である（矢印の向きに注意）．

b1. $xy \preccurlyeq x \wedge y$

b2. $\alpha \preccurlyeq x\beta,\ \alpha \preccurlyeq y\beta \implies \alpha \preccurlyeq x \wedge y, \beta$

b3. $\alpha \preccurlyeq x,\ \alpha \preccurlyeq y \implies \alpha \preccurlyeq x \wedge y$

b4. $xy\beta \preccurlyeq \alpha \impliedby x \wedge y, \beta \preccurlyeq \alpha$

b5. $xy \preccurlyeq \alpha \impliedby x \wedge y \preccurlyeq \alpha$

b6. $xy \preccurlyeq z \impliedby x \wedge y \preccurlyeq z$

また，A 上の二項汎算法 $x \vee y$ についての次の六法則は同等である（矢印と $\succcurlyeq$ の向きに注意）．

c1. $x \vee y \succcurlyeq x,\ x \vee y \succcurlyeq y$

c2. $\alpha \succcurlyeq x\beta,\ \alpha \succcurlyeq y\beta \impliedby \alpha \succcurlyeq x \vee y, \beta$

c3. $\alpha \succcurlyeq x,\ \alpha \succcurlyeq y \impliedby \alpha \succcurlyeq x \vee y$

c4. $xy\beta \succcurlyeq \alpha \implies x \vee y, \beta \succcurlyeq \alpha$

c5. $xy \succcurlyeq \alpha \implies x \vee y \succcurlyeq \alpha$

c6. $xy \succcurlyeq z \implies x \vee y \succcurlyeq z$

また，次の六法則のうち，d1 および d3 − d6 は同等であり，d2 は他を含意する．$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合には d2 も他と同等である（矢印と $\succcurlyeq$ の向きに注意）．

d1. $xy \succcurlyeq x \vee y$

d2. $\alpha \succcurlyeq x\beta,\ \alpha \succcurlyeq y\beta \implies \alpha \succcurlyeq x \vee y, \beta$

d3. $\alpha \succcurlyeq x,\ \alpha \succcurlyeq y \implies \alpha \succcurlyeq x \vee y$

d4. $xy\beta \succcurlyeq \alpha \impliedby x \vee y, \beta \succcurlyeq \alpha$

d5. $xy \succcurlyeq \alpha \impliedby x \vee y \succcurlyeq \alpha$

d6. $xy \succcurlyeq z \impliedby x \vee y \succcurlyeq z$

証明　前半は，補題 3.21.3 と補題 3.21.4 とにおいて $n = 2$ として x_1, x_2, y をそれぞれ $x, y, x \wedge y$ に替えれば証明される．後半は，$\wedge$ を $\vee$ に替えた上で，前半の双対命題として得られる．

定義 3.21.1 A^* 上の束関係とは限らぬ任意の関係 $\preccurlyeq$ について，定理 3.21.1 の法則 a4, b2 を合わせた法則と法則 c4, d2 を合わせた法則を，それぞれ**強下限律**・**強上限律**と呼び，さらにこれらを合わせて**強両限律**と呼ぶ．

$$\left.\begin{array}{l} xy\alpha \preccurlyeq \beta \implies x \wedge y, \alpha \preccurlyeq \beta \\ \alpha \preccurlyeq x\beta,\ \alpha \preccurlyeq y\beta \implies \alpha \preccurlyeq x \wedge y, \beta \end{array}\right\} \qquad \text{(強下限律)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\alpha \preccurlyeq \beta,\ y\alpha \preccurlyeq \beta \implies x \vee y, \alpha \preccurlyeq \beta \\ \alpha \preccurlyeq xy\beta \implies \alpha \preccurlyeq x \vee y, \beta \end{array}\right\} \qquad \text{(強上限律)}$$

補題 3.21.5 **$x_1, \ldots, x_n, y \in A$ $(n \geq 1)$ についての次の六条件のうち，条件 1 および 3 − 6 は同等であり，条件 2 は他を含意する．$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合には条件 2 も他と同等である．**

1. $y \preccurlyeq x_i\ (i = 1, \ldots, n),\quad x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$

2. $\alpha \preccurlyeq x_i\beta\ (i = 1, \ldots, n) \iff \alpha \preccurlyeq y\beta$

3. $\alpha \preccurlyeq x_i\ (i = 1, \ldots, n) \iff \alpha \preccurlyeq y$

4. $x_1 \cdots x_n\beta \preccurlyeq \alpha \iff y\beta \preccurlyeq \alpha$

5. $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq \alpha \iff y \preccurlyeq \alpha$

6. $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq z \iff y \preccurlyeq z$

証明　これは補題 3.21.3 と補題 3.21.4 を合わせたものである．

定理 3.21.2 **A 上の二項汎算法 $x \wedge y$ に関する下限律 $x \wedge y \preccurlyeq x,\ x \wedge y \preccurlyeq y,\ xy \preccurlyeq x \wedge y$ は下記の法則のうちの e1 および e3 − e6 のいずれとも同等であり，e2 はこれらを含意する．$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合には，e2 も他の五法則と同等である．**

e1. $\gamma xy\beta \preccurlyeq \alpha \iff \gamma, x\wedge y, \beta \preccurlyeq \alpha$

e2. $\alpha \preccurlyeq x\beta,\ \alpha \preccurlyeq y\beta \iff \alpha \preccurlyeq x\wedge y, \beta$

e3. $\alpha \preccurlyeq x,\ \alpha \preccurlyeq y \iff \alpha \preccurlyeq x\wedge y$

e4. $xy\beta \preccurlyeq \alpha \iff x\wedge y, \beta \preccurlyeq \alpha$

e5. $xy \preccurlyeq \alpha \iff x\wedge y \preccurlyeq \alpha$

e6. $xy \preccurlyeq z \iff x\wedge y \preccurlyeq z$

また，A 上の二項汎算法 $x\vee y$ についての上限律 $x\vee y \succcurlyeq x,\ x\vee y \succcurlyeq y,\ xy \succcurlyeq x\vee y$ は下記の法則のうちの f1 および f3 − f6 のいずれとも同等であり，f2 はこれらを含意する．$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合には，f2 も他の五法則と同等である．

f1. $\gamma xy\beta \succcurlyeq \alpha \iff \gamma, x\vee y, \beta \succcurlyeq \alpha$

f2. $\alpha \succcurlyeq x\beta,\ \alpha \succcurlyeq y\beta \iff \alpha \succcurlyeq x\vee y, \beta$

f3. $\alpha \succcurlyeq x,\ \alpha \succcurlyeq y \iff \alpha \succcurlyeq x\vee y$

f4. $xy\beta \succcurlyeq \alpha \iff x\vee y, \beta \succcurlyeq \alpha$

f5. $xy \succcurlyeq \alpha \iff x\vee y \succcurlyeq \alpha$

f6. $xy \succcurlyeq z \iff x\vee y \succcurlyeq z$

また，$\preccurlyeq$ が算法 $x\wedge y$ と $x\vee y$ について両限律に従えば，次のことが成り立つ．ただし結論 g1 の $\preccurlyeq$ 式の両辺と結論 g2 の $\asymp$ 式の左辺と結論 g3 の $\asymp$ 式の両辺においては，算法 $\wedge,\vee$ を適用する順番（括弧の付け方）はそれぞれ任意であり，結論 g1 ではさらに，$m=0$ の場合の $x_1\cdots x_m$ と $x_1\wedge\cdots\wedge x_m$ と，$n=0$ の場合の $y_1\cdots y_n$ と $y_1\vee\cdots\vee y_n$ とは，共に A^* の空列 ε を表す．

g1. $x_1\cdots x_m \preccurlyeq y_1\cdots y_n \iff x_1\wedge\cdots\wedge x_m \preccurlyeq y_1\vee\cdots\vee y_n$

g2. $\begin{cases} x_1\wedge\cdots\wedge x_n \asymp (\cdots(x_1\wedge x_2)\wedge\cdots)\wedge x_n \\ x_1\vee\cdots\vee x_n \asymp (\cdots(x_1\vee x_2)\vee\cdots)\vee x_n \end{cases}$

g3. **n 次の任意の置換 ρ に対して** $\begin{cases} x_{\rho 1}\wedge\cdots\wedge x_{\rho n} \asymp x_1\wedge\cdots\wedge x_n \\ x_{\rho 1}\vee\cdots\vee x_{\rho n} \asymp x_1\vee\cdots\vee x_n \end{cases}$

g4. **$\preccurlyeq$ を制限して出来る A 上の関係は算法 $\wedge,\vee$ と両立する．すなわち，次のことが成り立つ．**

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \preccurlyeq y_1 \\ x_2 \preccurlyeq y_2 \end{array}\right\} \implies \begin{cases} x_1\wedge x_2 \preccurlyeq y_1\wedge y_2 \\ x_1\vee x_2 \preccurlyeq y_1\vee y_2 \end{cases}$$

証明　下限律と法則 e2 – e6 とは，補題 3.21.5 の六条件において $n=2$ として x_1, x_2, y をそれぞれ $x, y, x\wedge y$ に替えたものである．また，$\preccurlyeq$ が置換律に従うから，e1 と e4 とは同等である．従って，e1 – e6 についてのことが成り立つ．f1 – f6 についてのことは，$\wedge$ を $\vee$ に替えて双対性を使えば証明される．結論 g1 は法則 e1, f1 を繰り返し使えば証明される．結論 g2 については，$x_1\wedge\cdots\wedge x_n$ を y で表せば，反復律により $x_1\wedge\cdots\wedge x_n \preccurlyeq y$，従って結論 g1 により $x_1\cdots x_n \preccurlyeq y$，従ってまた結論 g1 により $(\cdots(x_1\wedge x_2)\wedge\cdots)\wedge x_n \preccurlyeq y$ が成り立つ．これの逆の $y \preccurlyeq (\cdots(x_1\wedge x_2)\wedge\cdots)\wedge x_n$ が同様にして得られるから，$\wedge$ についての式が成り立つ．$\vee$ についても同様である．結論 g3 については，$x_1\wedge\cdots\wedge x_n$ を y で表せば，反復律により $x_1\wedge\cdots\wedge x_n \preccurlyeq y$，従って結論 g1 により $x_1\cdots x_n \preccurlyeq y$，従って置換律により $x_{\rho 1}\cdots x_{\rho n} \preccurlyeq y$，従ってまた結論 g1 により $x_{\rho 1}\wedge\cdots\wedge x_{\rho n} \preccurlyeq y$ が成り立つ．これの逆の $y \preccurlyeq x_{\rho 1}\wedge\cdots\wedge x_{\rho n}$ が同様にして得られるから，$\wedge$ についての式が成り立つ．$\vee$ についても同様である．結論 g4 の $x_1\wedge x_2 \preccurlyeq y_1\wedge y_2$ を証明するには，まず仮定の $x_1 \preccurlyeq y_1$ と $x_2 \preccurlyeq y_2$ とに付加律と置換律を使って $x_1x_2 \preccurlyeq y_1$ と $x_1x_2 \preccurlyeq y_2$ とを得てから，法則 e3 を使って $x_1x_2 \preccurlyeq y_1\wedge y_2$ を得て，最後に法則 e1 を使えばいい．$x_1\vee x_2 \preccurlyeq y_1\vee y_2$ については，同様にするか，$\wedge$ を $\vee$ に替えて双対性を使えばいい．

補題 3.21.6 **$\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合，$x, x' \in A$ についての次の六条件は同等である．**

1. $xx' \preccurlyeq \varepsilon$

2. $\alpha \preccurlyeq x\beta,\ \alpha \preccurlyeq x'\beta \implies \alpha \preccurlyeq \beta$

3. $\alpha \preccurlyeq x,\ \alpha \preccurlyeq x' \implies \alpha \preccurlyeq \varepsilon$

4. $\alpha \preccurlyeq x\beta \implies x'\alpha \preccurlyeq \beta$

5. $\alpha \preccurlyeq x \implies x'\alpha \preccurlyeq \varepsilon$

6. $y \preccurlyeq x \implies x'y \preccurlyeq \varepsilon$

証明　$(1 \implies 2 \implies 3 \implies 1)$ 補題 3.21.3 における $(1 \implies 2 \implies 3 \implies 1)$ と同様に証明できる．
$(1 \implies 4)$ $\alpha \preccurlyeq x\beta$ と $xx' \preccurlyeq \varepsilon$ に強消去律を使って $\alpha x' \preccurlyeq \beta$ を得た後で置換律を使えばいい．
$(4 \implies 5)$ 条件 4 において $\beta = \varepsilon$ とすれば条件 5 を得る．
$(5 \implies 6)$ 条件 5 において $\alpha = y$ とすれば条件 6 を得る．
$(6 \implies 1)$ $x \preccurlyeq x$ を条件 6 の前提として使って $x'x \preccurlyeq \varepsilon$ を得た後で置換律を使えば条件 1 を得る．

定理 3.21.3 **$\preccurlyeq$ が強消去律に従うとする．このとき，A 上の単項汎算法 $x^\Diamond$ に関する下補律 $xx^\Diamond \preccurlyeq \varepsilon$ は次の八法則（これらを<u>矛盾律</u>と総称する）のいずれとも同等である．**

a1. $\alpha \preccurlyeq x\beta,\ \alpha \preccurlyeq x^\Diamond\beta \implies \alpha \preccurlyeq \beta$

a2. $\alpha \preccurlyeq x,\ \alpha \preccurlyeq x^\Diamond \implies \alpha \preccurlyeq \varepsilon$

a3. $\alpha \preccurlyeq x\beta \implies x^\Diamond\alpha \preccurlyeq \beta$

a4. $\alpha \preccurlyeq x \implies x^\Diamond\alpha \preccurlyeq \varepsilon$

a5. $y \preccurlyeq x \implies x^\Diamond y \preccurlyeq \varepsilon$

a6. $\alpha \preccurlyeq x^\Diamond\beta \implies x\alpha \preccurlyeq \beta$

a7. $\alpha \preccurlyeq x^\Diamond \implies x\alpha \preccurlyeq \varepsilon$

a8. $y \preccurlyeq x^\Diamond \implies xy \preccurlyeq \varepsilon$

また，上補律 $xx^\Diamond \succcurlyeq \varepsilon$ は次の八法則（これらを<u>排中律</u>と総称する）のいずれとも同等である（$\succcurlyeq$ の向きに注意）．

b1. $\alpha \succcurlyeq x\beta,\ \alpha \succcurlyeq x^\Diamond\beta \implies \alpha \succcurlyeq \beta$

b2. $\alpha \succcurlyeq x,\ \alpha \succcurlyeq x^\Diamond \implies \alpha \succcurlyeq \varepsilon$

b3. $\alpha \succcurlyeq x\beta \implies x^\Diamond\alpha \succcurlyeq \beta$

b4. $\alpha \succcurlyeq x \implies x^\Diamond\alpha \succcurlyeq \varepsilon$

b5. $y \succcurlyeq x \implies x^\Diamond y \succcurlyeq \varepsilon$

b6. $\alpha \succcurlyeq x^\Diamond\beta \implies x\alpha \succcurlyeq \beta$

b7. $\alpha \succcurlyeq x^\Diamond \implies x\alpha \succcurlyeq \varepsilon$

b8. $y \succcurlyeq x^\Diamond \implies xy \succcurlyeq \varepsilon$

従って，両補律は次の二法則のいずれとも同等である．

c1. $\alpha \preccurlyeq x\beta \iff x^\Diamond\alpha \preccurlyeq \beta$ **（背理律）**

c2. $\alpha \succcurlyeq x\beta \iff x^\Diamond\alpha \succcurlyeq \beta$ **（道理律）**

また，両補律は次の二法則を含意する．

d1. $x\alpha \preccurlyeq y\beta \iff y^\Diamond\alpha \preccurlyeq x^\Diamond\beta$ **（対偶律）**

d2. $(x^\Diamond)^\Diamond \asymp x$ **（重補律）**

証明　補題 3.21.6 における x' を $x^\Diamond$ に替えれば法則 a1 – a5 を得る．置換律により $xx^\Diamond \preccurlyeq \varepsilon$ と $x^\Diamond x \preccurlyeq \varepsilon$ とは同等であるから，a3 – a5 において x と $x^\Diamond$ とを取り替えて新たに法則 a6 – a8 を得る．法則 a1 – a8 から双対性によって b1 – b8 を得る．

定義 3.21.2 A^* 上の束関係とは限らぬ任意の関係 $\preccurlyeq$ について，定理 3.21.3 の法則 a3 と b3 を合わせた法則を**強両補律**と呼ぶ．

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \preccurlyeq x\beta \implies x^{\Diamond}\alpha \preccurlyeq \beta \\ x\alpha \preccurlyeq \beta \implies \alpha \preccurlyeq x^{\Diamond}\beta\end{array}\right\} \qquad \text{(強両補律)}$$

問題 3.21.3 $\preccurlyeq$ が A 上の二項汎算法 $x \wedge y$ についての下限律に従う場合，$\preccurlyeq$ が A 上の単項汎算法 $x^{\Diamond}$ についての下補律に従うことは，法則 $x \wedge x^{\Diamond} \preccurlyeq \varepsilon$ に従うことと同等である．従って，$\preccurlyeq$ が $x \wedge y$ についての下限律と $x^{\Diamond}$ についての下補律に従って $A \neq \emptyset$ であれば，$\preccurlyeq$ は下端律に従う．

$\preccurlyeq$ が A 上の二項汎算法 $x \vee y$ についての上限律に従う場合，$\preccurlyeq$ が $x^{\Diamond}$ についての上補律に従うことは，法則 $x \vee x^{\Diamond} \succcurlyeq \varepsilon$ に従うことと同等である．従って，$\preccurlyeq$ が $x \vee y$ についての上限律と $x^{\Diamond}$ についての上補律に従って $A \neq \emptyset$ であれば，$\preccurlyeq$ は上端律に従う．

略解　定理 3.21.2 による．

定義 3.21.3 $\preccurlyeq$ がこの節で仮定している束律だけでなく汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$ についての擬ブール律に従うとき（定理 3.19.6 参照），$\preccurlyeq$ の双対関係 $\succcurlyeq$ は算法 $x \vee y$, $x \wedge y$, $x^{\Diamond}$（順番に注意）に関して擬ブール関係である．従って，擬ブール律から導かれた命題は，$\preccurlyeq, \wedge, \vee$ を $\succcurlyeq, \vee, \wedge$ に書き換えても成り立つ（そうして得られた命題をもとの命題の**双対命題**と呼ぶ）．このことを擬ブール関係の**双対性**と呼ぶ．

問題 3.21.4 $\preccurlyeq$ が汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$ に関して擬ブール関係であれば，$\asymp$ は次の法則に従う（問題 3.13.7, 問題 3.19.17 と例 3.29.2 参照）．

$$(x \wedge y)^{\Diamond} \asymp x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond} \qquad (x \vee y)^{\Diamond} \asymp x^{\Diamond} \wedge y^{\Diamond} \qquad \text{(双対律)}$$

問題 3.21.5 $\preccurlyeq$ が汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$ に関して擬ブール関係であれば，任意の $\alpha, \beta \in A^*$ と $x \in A$ に対して次のことが成り立つ．

$$\alpha \preccurlyeq \beta \iff \alpha \preccurlyeq x \wedge x^{\Diamond}, \beta \iff x \vee x^{\Diamond}, \alpha \preccurlyeq \beta$$

補題 3.21.7 **$\preccurlyeq$ が強消去律に従い，かつ $x, x' \in A$ が $xx' \preccurlyeq \varepsilon$ と $xx' \succcurlyeq \varepsilon$ とをみたせば，x, x' と $y, z \in A$ とについての次の四条件は同等である（矢印の向きに注意）．**

1. $x' \preccurlyeq z, \quad y \preccurlyeq z$

2. $x\alpha \preccurlyeq y\beta \implies \alpha \preccurlyeq z\beta$

3. $x\alpha \preccurlyeq y \implies \alpha \preccurlyeq z$

4. $\beta \preccurlyeq x\alpha,\ y\beta \preccurlyeq \alpha \impliedby z\beta \preccurlyeq \alpha$

証明　($1 \implies 2$) $x' \preccurlyeq z$ に付加律と置換律を繰り返し使って $x'\alpha \preccurlyeq z\beta$ を得る．また，$x\alpha \preccurlyeq y\beta$ と $y \preccurlyeq z$ に消去律を使えば $x\alpha \preccurlyeq z\beta$．この二つの式に補題 3.21.6 の双対命題を使って $\alpha \preccurlyeq z\beta$ を得る．

($2 \implies 3$) 条件 2 において $\beta = \varepsilon$ とすれば条件 3 となる．

($3 \implies 1$) $xx' \preccurlyeq \varepsilon$ と付加律により $xx' \preccurlyeq y$ が成り立つから，これを条件 3 の前提として使って $x' \preccurlyeq z$ を得る．また，$xy \preccurlyeq y$ を条件 3 の前提として使って $y \preccurlyeq z$ を得る．

($1 \implies 4$) $x' \preccurlyeq z$ と $z\beta \preccurlyeq \alpha$ に消去律を使えば $x'\beta \preccurlyeq \alpha$．これに補題 3.21.6 の双対命題を x, x' の役割を入れ替えて使って $\beta \preccurlyeq x\alpha$ を得る．また，$y \preccurlyeq z$ と $z\beta \preccurlyeq \alpha$ に消去律を使って $y\beta \preccurlyeq \alpha$ を得る．

($4 \implies 1$) $z \preccurlyeq z$ を条件 4 の前提として使えば $\varepsilon \preccurlyeq xz$ かつ $y \preccurlyeq z$．前者に補題 3.21.6 を使って $x' \preccurlyeq z$ を得る．

補題 3.21.8 $x, y, z \in A$ **についての次の六条件のうち，条件 1, 3, 6 は同等であり条件 2, 4, 5 のそれぞれは条件 1, 3, 6 を含意する．** $\preccurlyeq$ **が強消去律に従う場合には条件 2, 4, 5 のそれぞれも他と同等である（矢印の向きに注意）．**

1. $xz \preccurlyeq y$

2. $x\alpha \preccurlyeq y\beta \iff \alpha \preccurlyeq z\beta$

3. $x\alpha \preccurlyeq y \iff \alpha \preccurlyeq z$

4. $\beta \preccurlyeq x\alpha,\ y\beta \preccurlyeq \alpha \implies z\beta \preccurlyeq \alpha$

5. $\alpha \preccurlyeq x\gamma,\ \beta \preccurlyeq z\delta \implies \alpha\beta \preccurlyeq y\gamma\delta$

6. $\alpha \preccurlyeq x,\ \beta \preccurlyeq z \implies \alpha\beta \preccurlyeq y$

さらに x **と** $x' \in A$ **が** $xx' \preccurlyeq \varepsilon$ **と** $xx' \succcurlyeq \varepsilon$ **をみたせば，条件 1 − 6 は次の条件とも同等である．**

7. $z \preccurlyeq x'y$

証明　まず，$xx' \preccurlyeq \varepsilon$ と $xx' \succcurlyeq \varepsilon$ が成り立って $\preccurlyeq$ が強消去律に従う場合を考える．

$(1 \implies 7)$ $xz \preccurlyeq y$ に補題 3.21.6 の双対命題を使って $z \preccurlyeq x'y$ を得る．

$(7 \implies 1)$ $xx' \preccurlyeq \varepsilon$ に置換律を使えば $x'x \preccurlyeq \varepsilon$．これと $z \preccurlyeq x'y$ に強消去律を使えば $zx \preccurlyeq y$，従って再び置換律を使って $xz \preccurlyeq y$ を得る．

次に，$\preccurlyeq$ が強消去律に従うとだけ仮定した場合を考える．

$(1 \implies 2)$ $xz \preccurlyeq y$ に置換律を使えば $zx \preccurlyeq y$．これと $\alpha \preccurlyeq z\beta$ に強消去律を使えば $\alpha x \preccurlyeq y\beta$．これに置換律を使って $x\alpha \preccurlyeq y\beta$ を得る．

$(2 \implies 3)$ 条件 2 において $\beta = \varepsilon$ とすれば条件 3 となる．

$(3 \implies 1)$ $z \preccurlyeq z$ を条件 3 の前提として使って $xz \preccurlyeq y$ を得る．

$(1 \implies 4)$ $\beta \preccurlyeq x\alpha$ と $xz \preccurlyeq y$ に強消去律を使えば $\beta z \preccurlyeq y\alpha$．これと $y\beta \preccurlyeq \alpha$ に強消去律を使えば $\beta z\beta \preccurlyeq \alpha\alpha$．これに置換律と巾等律を使って $z\beta \preccurlyeq \alpha$ を得る．

$(4 \implies 1)$ 反復律・付加律・置換律により成り立つ $x \preccurlyeq xy$ と $yx \preccurlyeq y$ を条件 4 の前提として使えば $zx \preccurlyeq y$．これに置換律を使って $xz \preccurlyeq y$ を得る．

$(1 \implies 5)$ $\alpha \preccurlyeq x\gamma$ と $xz \preccurlyeq y$ に強消去律を使えば $\alpha z \preccurlyeq y\gamma$．これに置換律を使って $z\alpha \preccurlyeq y\gamma$ とし，これと $\beta \preccurlyeq z\delta$ に強消去律を使えば $\beta\alpha \preccurlyeq y\gamma\delta$．これに置換律を使って $\alpha\beta \preccurlyeq y\gamma\delta$ を得る．

$(5 \implies 6)$ 条件 5 において $\gamma = \delta = \varepsilon$ とすれば条件 6 となる．

$(6 \implies 1)$ $x \preccurlyeq x$ と $z \preccurlyeq z$ を条件 6 の前提として使って $xz \preccurlyeq y$ を得る．

最後に，$\preccurlyeq$ が強消去律に従うとも仮定しない場合，$(1 \implies 2)(1 \implies 4)(1 \implies 5)$ の論法が使えないが，$(1 \implies 3)(1 \implies 6)$ が $(1 \implies 2)(1 \implies 5)$ と同様に証明でき，他の論法はそのまま使える．

定理 3.21.4 $\preccurlyeq$ **が強消去律と** A **上の単項汎算法** $x^{\Diamond}$ **に関する両補律に従うとし，** $x \Rightarrow y$ **を** A **上の二項汎算法とする．このとき，下記の法則 a1（すなわち下補導律と反復導律を合わせた法則）は法則 a2 − a4 のいずれとも同等である（矢印と** $\preccurlyeq, \succcurlyeq$ **の向きに注意）．**

a1. $x^{\Diamond} \preccurlyeq x \Rightarrow y,\quad y \preccurlyeq x \Rightarrow y$

a2. $x\alpha \preccurlyeq y\beta \implies \alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta$

a3. $x\alpha \preccurlyeq y \implies \alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y$ **(転位導律)**

a4. $x\alpha \succcurlyeq \beta,\ \alpha \succcurlyeq y\beta \iff \alpha \succcurlyeq x \Rightarrow y, \beta$

また，下記の法則 b1 は法則 b2 − b4 のいずれとも同等である（矢印と $\preccurlyeq, \succcurlyeq$ **の向きに注意）．**

b1. $x \Rightarrow y \preccurlyeq x^{\Diamond} y$ **（上補反復導律）**

b2. $x\alpha \preccurlyeq y\beta \iff \alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta$

b3. $x\alpha \preccurlyeq y \iff \alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y$ **（反転導律）**

b4. $x\alpha \succcurlyeq \beta,\ \alpha \succcurlyeq y\beta \implies \alpha \succcurlyeq x \Rightarrow y, \beta$

これら四法則は，さらに次の三法則とも同等である．

b5. $\alpha \preccurlyeq x\gamma,\ \beta \preccurlyeq x \Rightarrow y, \delta \implies \alpha\beta \preccurlyeq y\gamma\delta$

b6. $\alpha \preccurlyeq x,\ \beta \preccurlyeq x \Rightarrow y \implies \alpha\beta \preccurlyeq y$ **（複消去導律）**

b7. $x, x \Rightarrow y \preccurlyeq y$ **（消去導律）**

証明　補題 3.21.7 と補題 3.21.8 とにおいて $x' = x^{\Diamond}$, $z = x \Rightarrow y$ とすれば直ちに証明される．

注意 3.21.4 定理 3.21.4 によれば，ブール関係を定義する法則の中，特に上補反復導律は消去導律に置き換えることができる．

定義 3.21.4 A^* 上の束関係とは限らぬ任意の関係 $\preccurlyeq$ について，定理 3.21.4 の法則 b4, a2 を合わせた法則を**強三導律**と呼ぶ．

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \preccurlyeq x\beta,\ y\alpha \preccurlyeq \beta \implies x \Rightarrow y, \alpha \preccurlyeq \beta \\ x\alpha \preccurlyeq y\beta \implies \alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta \end{array}\right\} \qquad \text{(強三導律)}$$

問題 3.21.6 反復律・付加律・置換律の下では，強両限律・強両補律・強三導律は両限律・両補律・三導律を含意する．

略解　反復律・付加律・置換律により成り立つ $xy \preccurlyeq x$ と $xy \preccurlyeq y$ に強下限律を使って下限律を得る．下補律と付加律により成り立つ $xx^{\Diamond} \preccurlyeq y$ に強三導律を使って下補導律を得る．反復律と付加律により成り立つ $xy \preccurlyeq y$ に強三導律を使って反復導律を得る．上補律・反復律・付加律・置換律により成り立つ $\varepsilon \preccurlyeq xx^{\Diamond}y$ と $y \preccurlyeq x^{\Diamond}y$ に強三導律を使って上補反復導律を得る．

定理 3.21.5 $\preccurlyeq$ **が強消去律と** A **上の二項汎算法** $x \vee y$ **に関する上限律と** A **上の単項汎算法** $x^{\Diamond}$ **に関する両補律に従うとし，**$x \Rightarrow y$ **を** A **上の二項汎算法とする．このとき，次の二法則は同等である．**

1. $x^{\Diamond} \preccurlyeq x \Rightarrow y, \quad y \preccurlyeq x \Rightarrow y, \quad x \Rightarrow y \preccurlyeq x^{\Diamond} y$ 　**（三導律）**

2. $x^{\Diamond} \vee y \asymp x \Rightarrow y$

証明　定理 3.21.2 により $x^{\Diamond} \preccurlyeq x \Rightarrow y$ かつ $y \preccurlyeq x \Rightarrow y$ なることは $x^{\Diamond} \vee y \preccurlyeq x \Rightarrow y$ なることと同等であり，$x \Rightarrow y \preccurlyeq x^{\Diamond} y$ なることは $x \Rightarrow y \preccurlyeq x^{\Diamond} \vee y$ なることと同等である．

定理 3.21.6 $\preccurlyeq$ **は，**A **上の二項汎算法** $x \Rightarrow y$ **について消去導律と転位導律に従えば次の法則に従う．**

$$x \preccurlyeq y \implies \begin{cases} z \Rightarrow x \preccurlyeq z \Rightarrow y \\ y \Rightarrow z \preccurlyeq x \Rightarrow z \end{cases}$$

証明　$x \preccurlyeq y$ であれば，消去導律により成り立つ $z, z \Rightarrow x \preccurlyeq x$ とに消去律を使って $z, z \Rightarrow x \preccurlyeq y$，従って転位導律により $z \Rightarrow x \preccurlyeq z \Rightarrow y$ を得る．同様に，消去導律により成り立つ $y, y \Rightarrow z \preccurlyeq z$ とに消去律を使って $x, y \Rightarrow z \preccurlyeq z$，従って転位導律により $y \Rightarrow z \preccurlyeq x \Rightarrow z$ を得る．

定理 3.21.7 $\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\lozenge}$，$x \Rightarrow y$ **に関するブール律に従えば，** $\asymp$ **はこれらの算法と両立する．**

証明　$\asymp$ は，定理 3.21.2 により算法 $\wedge, \vee$ と両立し，定理 3.21.3 により算法 $\lozenge$ と両立し，定理 3.21.4 と定理 3.21.6 により算法 $\Rightarrow$ と両立する．

定理 3.21.8 $\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$ **に関する強下限律または** A **上の汎算法** $x \vee y$ **に関する強上限律に従ってさらに** A **上の汎算法** $x^{\lozenge}$ **に関する強両補律に従えば，** $\preccurlyeq$ **は強消去律に従う．**

証明　代表的に，$\preccurlyeq$ が強下限律と強両補律に従う場合を考え，$\preccurlyeq$ が強消去律に従うことを示すために，$\alpha \preccurlyeq x\gamma$ かつ $x\beta \preccurlyeq \delta$ と仮定する．そうすると，付加律と置換律により $\alpha\beta \preccurlyeq x\delta\gamma$ と $x\alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ が成り立ち，後者に強両補律を使って $\alpha\beta \preccurlyeq x^{\lozenge}\delta\gamma$ を得て，これと前者に強下限律を使って $\alpha\beta \preccurlyeq x^{\lozenge} \wedge x, \delta\gamma$ を得る．他方で，反復律と強両補律と強下限律により $x^{\lozenge} \wedge x \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つ．これらに消去律を使えば $\alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ を得る．

定理 3.21.9 $\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \Rightarrow y$ **に関する強三導律に従えば，** $\preccurlyeq$ **は強消去律に従う．**

証明　$\alpha \preccurlyeq x\gamma$ かつ $x\beta \preccurlyeq \delta$ と仮定する．そうすると，付加律と置換律により $\alpha\beta \preccurlyeq x\delta\gamma$ と $x\alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ が成り立ち，これらに強三導律を使って $x \Rightarrow x, \alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ を得る．他方で，反復律と強三導律より $\varepsilon \preccurlyeq x \Rightarrow x$ が成り立つ．これらに消去律を使えば $\alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ を得る．

定義 3.21.5 A^* 上の束関係とは限らぬ任意の関係について，反復律・付加律・巾等律・置換律と A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\lozenge}$，$x \Rightarrow y$ に関する強両限律・強両補律・強三導律を合わせた法則を算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\lozenge}$，$x \Rightarrow y$ に関する**弱ブール律**と呼び，これに従う関係をこれらの算法に関する**弱ブール関係**と呼ぶ．

注意 3.21.5 反復律・付加律・巾等律・置換律の下では，問題 3.21.6 により強両限律・強両補律・強三導律は実際に両限律・両補律・三導律より強いが，定理 3.21.10 で示すように弱ブール律は実際にブール律より弱い．また，弱ブール律がブール律と同等でないことが問題 3.22.4 と定理 3.22.4 と定理 3.22.5 から分かる．

定理 3.21.10 A^* **上の束関係とは限らぬ任意の関係** $\preccurlyeq$ **と** A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\lozenge}$，$x \Rightarrow y$ **についての次の二条件は同等である．**

1. **関係** $\preccurlyeq$ **は消去律と弱ブール律に従う（すなわち束律・強両限律・強両補律・強三導律に従う）．**
2. **関係** $\preccurlyeq$ **はブール律に従う（すなわち強束律・両限律・両補律・三導律に従う）．**

従って次のことが成り立つ．

a. **弱ブール関係が強消去律に従うためには消去律に従うことが必要十分である．**
b. **束関係については，弱ブール関係であることとブール関係であることは同等である．**

証明　$(1 \Longrightarrow 2)$ $\preccurlyeq$ は，定理 3.21.8 または定理 3.21.9 により強消去律に従い，定理 3.21.1・定理 3.21.3・定理 3.21.4 により両限律・両補律・三導律に従う．

$(2 \Longrightarrow 1)$ 定理 3.21.1 と定理 3.21.3 と定理 3.21.4 による．

補題 3.21.9 $\preccurlyeq$ **についての準下限律と準上限律はそれぞれ，下記の一般準下限律と一般準上限律に同等である（これら二法則における** y **をそれぞれ，**$x_1, \ldots, x_n$ **の** $\preccurlyeq$ **に関する<u>準下限</u>と<u>準上限</u>と呼ぶ）．**

（一般準下限律）各 $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ **に応じて，**$y \preccurlyeq x_i\ (i = 1, \ldots, n)$, $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ **なる** $y \in A$ **が存在する** $(n = 1, 2, \ldots)$**.**

（一般準上限律）各 $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ **に応じて，**$y \succcurlyeq x_i\ (i = 1, \ldots, n)$, $x_1 \cdots x_n \succcurlyeq y$ **なる** $y \in A$ **が存在する** $(n = 1, 2, \ldots)$**.**

証明　$n = 2$ の場合の一般準下限律が準下限律である．逆に準下限律がみたされる仮定して，一般準下限律がみたされることを n についての帰納法によって導く．$n = 1$ の場合の一般準下限律は，反復律によりみたされる．そこで $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ $(n \geq 2)$ とする．帰納法の仮定により，$y' \preccurlyeq x_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $x_1 \cdots x_{n-1} \preccurlyeq y'$ なる $y' \in A$ が存在する．また準下限律により，$y \preccurlyeq y'$, $y \preccurlyeq x_n$, $y' x_n \preccurlyeq y$ なる $y \in A$ が存在する．$y \preccurlyeq y'$ と $y' \preccurlyeq x_i$ とに消去律を使って $y \preccurlyeq x_i$ を得る $(i = 1, \ldots, n-1)$．また，$x_1 \cdots x_{n-1} \preccurlyeq y'$ と $y' x_n \preccurlyeq y$ とに消去律を使って $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ を得る．従って，一般準下限律が $n = 1, 2, \ldots$ に対して成り立つ．準上限律についても同様である．

問題 3.21.7 A を集合とするとき，A^*, A 間の偏束関係 $\vDash$ についての準下限律は一般準下限律と同等である．

略解　補題 3.21.9 の証明を繰り返してもいいが，$\vDash$ の最大束拡張 $\preccurlyeq$ に補題 3.21.9 を適用してもいい．

問題 3.21.8 y が $x_1, \ldots, x_n$ の $\preccurlyeq$ に関する準下限であれば「$x_1 \cdots x_n \preccurlyeq \alpha \iff y \preccurlyeq \alpha$」が成り立つ．$y$ が $x_1, \ldots, x_n$ の $\preccurlyeq$ に関する準上限であれば「$x_1 \cdots x_n \succcurlyeq \alpha \iff y \succcurlyeq \alpha$」が成り立つ．

定理 3.21.11 $\preccurlyeq$ **が準上限律と劣空律とに従えば，**$\preccurlyeq$ **は** $\preccurlyeq$ **を制限して出来る** A^*, A **間の偏束関係** $\vDash$ **の最大束拡張に等しい．**

証明　問題 3.20.5 により $\vDash$ は偏束律に従うから，定理 3.20.1 により $\vDash$ の最大束拡張 $\vDash^*$ が存在する．$\vDash^*$ が $\preccurlyeq$ に含まれることを示せばいい．そこでまず，$\alpha, y_1 \cdots y_n \in A^*$ が $\alpha \vDash^* y_1 \cdots y_n$ をみたすとする $(n \geq 1)$．そうすると，補題 3.21.9 により $y_1, \ldots, y_n$ の準上限 z が存在し，z は $i = 1, \ldots, n$ に対して $y_i \preccurlyeq z$，すなわち $y_i \vDash z$ をみたすから，$\vDash^*$ の定義により $\alpha \vDash z$，すなわち $\alpha \preccurlyeq z$ が成り立ち，問題 3.21.8 により $\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ が成り立つ．次に，$\alpha \in A^*$ が $\alpha \vDash^* \varepsilon$ をみたすとする．そうすると，$\vDash^*$ の付加律または定義により任意の $z \in A$ に対して $\alpha \vDash z$，すなわち $\alpha \preccurlyeq z$ が成り立つから，$\preccurlyeq$ の劣空律により $\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つ．以上により $\vDash^*$ は $\preccurlyeq$ に含まれる．

問題 3.21.9 $\preccurlyeq$ が準両限律と両空律に従えば，$\preccurlyeq$ は $\preccurlyeq$ を制限して出来る A 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ の最大束拡張 $\sqsubseteq^*$（これは補題 3.19.1 で定義した）に等しい．

略解　$x_1 \cdots x_m \sqsubseteq^* y_1 \cdots y_n$ $(m \geq 1;\ n \geq 1)$ なら $x_1 \cdots x_m \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ であることを示せばいい．$x_1, \ldots, x_m$ の準下限 x' と $y_1, \ldots, y_n$ の準上限 y' とに対して $x' \sqsubseteq x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ と $y_j \sqsubseteq y'$ $(j = 1, \ldots, n)$ とが成り立つので，$\sqsubseteq^*$ の定義により $x' \preccurlyeq y'$ が成り立つ．これと $x_1 \cdots x_m \preccurlyeq x'$ と $y' \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ とに消去律を使う．なお，問題 3.21.10 と定理 3.21.11 とから問題 3.20.15 によって導くこともできる．

問題 3.21.10 A を集合とし，$\models$ を A^*, A 間の偏束律・準下限律・優空律に従う関係とする．このとき $\models$ は，$\models$ を制限して出来る A 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ の最大偏束拡張 $\sqsubseteq^*$ に等しい．

問題 3.21.11 $\preccurlyeq$ が下端律に従えば $\preccurlyeq$ は劣空律に従い，$\preccurlyeq$ が上端律に従えば $\preccurlyeq$ は優空律に従う．

問題 3.21.12 劣空律と優空律は共に交閉的法則である．

定義 3.21.6 束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ が $\preccurlyeq$ に等しいとき，組み $(\mathbb{B}, f)$ は $\preccurlyeq$ の**表現**であると言う．また，$\preccurlyeq$ の表現 $(\mathbb{B}, f)$ が**極小**であるとは，f が全射であることを言う．

問題 3.21.13 $(\mathbb{B}, f)$ と $(\mathbb{C}, g)$ とが共に $\preccurlyeq$ の表現であって $(\mathbb{B}, f)$ が極小であれば，真増写 $h \in \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ で $g = hf$ なるものが唯一つ存在する．$(\mathbb{C}, g)$ も極小なら，h は同順写である．

略解　任意の $x, y \in A$ に対して，「$fx \leq fy \iff x \preccurlyeq y \iff gx \leq gy$」が成り立ち，特に「$fx = fy \implies gx = gy$」が成り立つ．従って，$h \in \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ を $h(fx) = gx$ と矛盾無く定義することができ，任意の $b, b' \in \mathbb{B}$ に対して「$b \leq b' \iff hb \leq hb'$」が成り立つ．

問題 3.21.14 $\preccurlyeq$ の極小表現が存在すれば，$\preccurlyeq$ は準両限律と両端律に従う．

略解　問題 3.19.11 による．

定理 3.21.12 $\preccurlyeq$ が準両限律と両端律に従えば，$\preccurlyeq$ の極小表現が存在する．

証明　補題 3.21.1 により，$\preccurlyeq$ を制限して出来る A 上の関係 $\sqsubseteq$ は擬順序関係である．従って，$\sqsubseteq$ の対称核を $\equiv$ で表せば，問題 3.9.55 により，$\equiv$ は同値関係であって，A から商集合 $\mathbb{B} = A/{\equiv}$ への類別写像を f で表せば，$\mathbb{B}$ 上の順序関係 $\leq$ を「$fx \leq fy \iff x \sqsubseteq y$」と定義することができる．従って，$\sqsubseteq$ は $\leq$ の f による引き戻し $\leq_f$ に等しい．

両端律により $\underline{x} \preccurlyeq \varepsilon \preccurlyeq \overline{x}$ なる $\underline{x}, \overline{x} \in A$ がある．そして付加律により，任意の $x \in A$ に対して $\underline{x} \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{x}$ すなわち $\underline{x} \sqsubseteq x \sqsubseteq \overline{x}$ が成り立つ．これは $f\underline{x} \leq fx \leq f\overline{x}$ を意味するから，$f\underline{x}$ と $f\overline{x}$ はそれぞれ $\mathbb{B}$ の最小元と最大元である．

任意の $x, y \in A$ をとる．準下限律により $z \preccurlyeq x$，$z \preccurlyeq y$，$xy \preccurlyeq z$ なる $z \in A$ がある．この z は $fz \leq fx$，$fz \leq fy$ をみたす．逆に $z' \in A$，$fz' \leq fx$，$fz' \leq fy$ とすると，$z' \preccurlyeq x$，$z' \preccurlyeq y$ が成り立ち，これらと $xy \preccurlyeq z$ を合わせて補題 3.21.4 の条件 1, 6 が同等であることを使えば，$z' \preccurlyeq z$ すなわち $fz' \leq fz$ を得る．これは $fz = \inf\{fx, fy\}$ なることを示す．同様に，準上限律により $w \succcurlyeq x$，$w \succcurlyeq y$，$xy \succcurlyeq w$ なる w があって $fw = \sup\{fx, fy\}$ が成り立つ．

以上により $(A, \mathbb{B}, f)$ は束写系であり，これに第 3.19 節の諸概念を適用することができる．

問題 3.21.11 により $\preccurlyeq$ が両空律に従うから，問題 3.21.9 により，$\preccurlyeq$ は $\sqsubseteq$ すなわち $\leq_f$ の最大束拡張 $\sqsubseteq^*$ に等しい．また定理 3.19.8 系により，$\sqsubseteq^*$ は f 真関係 $\preccurlyeq_f$ に等しい．従って $\preccurlyeq$ は $\preccurlyeq_f$ に等しい．$fA = \mathbb{B}$ でもあるから，$(\mathbb{B}, f)$ は $\preccurlyeq$ の極小表現である．

問題 3.21.15 A を集合とし，$\models$ を A^*, A 間の偏束律・準下限律・上端律に従う関係とする．このとき $\models$ は，f が全射であるようなある偏束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\models_f$ に等しい．

略解　問題 3.21.10 と問題 3.20.17 を使って定理 3.21.12 の証明を真似ればいい．

問題 3.21.16 集合 A とその部分集合 S に対して問題 3.19.12 で定義した S 関係 $\preccurlyeq_S$ （それは束律に従う）に極小表現が存在するためには，$\emptyset \neq S \neq A$ なることが必要十分であり，$\emptyset \neq S \neq A$ のとき，$\mathbb{T}$ と S の定義関数 $1_S \in A \to \mathbb{T}$ の組み $(\mathbb{T}, 1_S)$ は $\preccurlyeq_S$ の極小表現である．

問題 3.21.17 $(A, \mathbb{B}, f)$ を束写系とし，f 真関係 $\preccurlyeq_f$（それは束律に従う）が準両限律と両端律に従うと仮定する．このとき，(fA, f) は $\preccurlyeq_f$ の極小表現である（問題 3.19.13 参照）．

定理 3.21.13 **$\preccurlyeq$ が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\lozenge$，$x \Rightarrow y$ に関して A^* 上のブール関係であるとする．このとき，ブール束 $\mathbb{B}$ とこれら算法に関するブール表現 $f \in A \to \mathbb{B}$ から成る $\preccurlyeq$ の表現 $(\mathbb{B}, f)$ が存在する（このことの精密化について定理 3.22.17 参照）．特に $A \neq \emptyset$ であれば，$\preccurlyeq$ の極小表現 $(\mathbb{B}, f)$ が存在して，$\mathbb{B}$ はブール束であり，f はこれらの算法に関して A の $\mathbb{B}$ 上のブール表現である．**

証明　**$A \neq \emptyset$ の場合：**$\preccurlyeq$ は算法 $x \wedge y$ と $x \vee y$ についての両限律に，従って準両限律に従う．また，問題 3.21.3 により $\preccurlyeq$ は両端律に従う．従って定理 3.21.12 により $\preccurlyeq$ の極小表現 $(\mathbb{B}, f)$ がある．$fA = \mathbb{B}$ であるから，定理 3.19.6 系により $\mathbb{B}$ はブール束であって f は $\mathbb{B}$ 上のブール表現である．

　$A = \emptyset$ の場合：$A^* = \{\varepsilon\}$ であるから，$\preccurlyeq$ は空関係か最大関係かである．それぞれの場合に応じて $\mathbb{B}$ として $\mathbb{T}$ または $\{0\}$ をとる．そうすると $\mathbb{B}$ はブール束である．また，端書きに記した空集合律により $A \to \mathbb{B} = \{\emptyset\}$ であるので，$f \in A \to \mathbb{B}$ として $\emptyset$ をとる．そうすると，f は自明にブール表現である．また，$\varepsilon \preccurlyeq_f \varepsilon$ が $\mathbb{B} = \mathbb{T}$ なら成り立たず $\mathbb{B} = \{0\}$ なら成り立つので，$\preccurlyeq \,=\, \preccurlyeq_f$ が成り立つ．

問題 3.21.18 $\preccurlyeq$ が準両限律と両端律と強消去律に従えば，定理 3.21.12 により存在する $\preccurlyeq$ の極小表現 $(\mathbb{B}, f)$ において，$\mathbb{B}$ は分配束である．

略解　問題 3.19.6 による．

注意 3.21.6 f が A のブール表現であれば，定理 3.19.6 により f 関係 $\preccurlyeq_f$ は A^* 上のブール関係である．逆に $\preccurlyeq$ が A^* 上のブール関係であれば，定理 3.21.13 により，A のブール表現 f で $\preccurlyeq \,=\, \preccurlyeq_f$ なるものが存在する．従って，A^* 上のブール関係を調べることは A のブール表現を調べることと同等である．ブール関係とブール表現のこの対応関係は，ブール表現という A の**外側**の事柄がブール関係という A の**内側**の事柄で表されることを示している．これと同様の現象（これを**内外対応**と呼ぶ）は，代数学の色々な所で起きて重要な役割を演じている．たとえば，群 G の可移置換表現には G の部分群が対応し，G の複素線形表現には群多元環 $\mathbb{C}[G]$ の左イデアルが対応する．この二番目の例では，G 自身ではなく，G を形式的に拡大した $\mathbb{C}[G]$ の内部構造が問題となる．A のブール表現に A 自身ではなく A を形式的に拡大した A^* の内部構造が関わってきたことは，この G の複素線形表現の例と似ている．

補題 3.21.10 **束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ が A 上の二項汎算法 $x \wedge y$ についての強下限律と二項汎算法 $x \vee y$ についての強上限律のどちらかに従って $fA = \mathbb{B}$ であれば，$\mathbb{B}$ は分配束である．**

証明　代表的に，$\preccurlyeq_f$ が強下限律に従う場合を考える．反復律と付加律と置換律により成り立つ $xy \preccurlyeq_f x$ と $xy \preccurlyeq_f y$ を強下限律の前提として使って下限律を得る．従って定理 3.19.3 の証明中に示した通り，f は $\{\wedge\}$ 準写である．$\mathbb{B}$ の任意の元 a, b, c, d をとり $a \vee c \geq d$，$b \vee c \geq d$ と仮定する．そうすると，$a = fx$，$b = fy$，$c = fz$，$d = fw$ なる $x, y, z, w \in A$ があって $xz \succcurlyeq_f w$，$yz \succcurlyeq_f w$，従って強下限律により $x \wedge y, z \succcurlyeq_f w$，すなわち $f(x \wedge y) \vee fz \geq fw$ が成り立つ．$f(x \wedge y) = fx \wedge fy$ であるから，結局 $(a \wedge b) \vee c \geq d$ が成り立つ．従って問題 3.13.4 により，$\mathbb{B}$ は分配束である．

問題 3.21.19 束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ が A 上の二項汎算法 $x \wedge y$ と $x \vee y$ について強下限律と上限律に従うかまたは下限律と強上限律に従えば，f は $\{\wedge, \vee\}$ 準写であり，fA は $\mathbb{B}$ の部分束でかつ分配束である．

定理 3.21.14 **$\preccurlyeq$ が両端律に従い，A 上の二項汎算法 $x \wedge y$ と $x \vee y$ について，強下限律と上限律に従うかまたは下限律と強上限律に従うと仮定する．このとき，$\preccurlyeq$ は強消去律に従う．**

証明　定理 3.21.1 により $\preccurlyeq$ は両限律に従う．従って定理 3.21.12 により，$\preccurlyeq$ の極小表現 $(\mathbb{B}, f)$ が存在する．補題 3.21.10 により $\mathbb{B}$ は分配束であるから，定理 3.19.2 により $\preccurlyeq$ は強消去律に従う．

課題 3.21.1 束写系についての命題を介することなく定理 3.21.14 を証明せよ．また，定理 3.21.14 と定理 3.21.8 あるいは定理 3.21.9 との関係を探れ．

定理 3.21.15 **$\preccurlyeq$ が A 上の汎算法 $x \vee y$ と $x \Rightarrow y$ について次の三条件をみたすと仮定する．**

1. **$\preccurlyeq$ は三法則「$x \preccurlyeq x \vee y$」「$y \preccurlyeq x \vee y$」「$x \vee y, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq z$」に従う．**
2. **$\preccurlyeq$ は算法 $x \Rightarrow y$ についての転位導律に従う．**
3. **$\preccurlyeq$ は $\preccurlyeq$ を制限して出来る A^*, A 間の偏束関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい．**

このとき $\preccurlyeq$ は，算法 $x \vee y$ についての強上限律に従う．

証明　$x\alpha \preccurlyeq z$ かつ $y\alpha \preccurlyeq z$ と仮定すれば，転位導律により $\alpha \preccurlyeq x \Rightarrow z$ と $\alpha \preccurlyeq y \Rightarrow z$ が成り立ち，これらと条件 1 により成り立つ $x \vee y, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq z$ に重消去律等を使えば，$x \vee y, \alpha \preccurlyeq z$ が得られる．つまり，$\preccurlyeq$ は次の法則に従う．

$$x\alpha \preccurlyeq z,\ y\alpha \preccurlyeq z \implies x \vee y, \alpha \preccurlyeq z \tag{3.21.1}$$

特に，$\preccurlyeq$ はこの法則において $\alpha = \varepsilon$ として得られる

$$x \vDash z,\ y \vDash z \implies x \vee y \vDash z$$

なる法則に従うから，条件 3 により法則 $x \vee y \preccurlyeq xy$ に従う．これと条件 1 を合わて $\preccurlyeq$ は上限律に従うから，定理 3.21.1 により $\preccurlyeq$ は次の法則に従う．

$$\alpha \preccurlyeq xy\beta \iff \alpha \preccurlyeq x \vee y, \beta \tag{3.21.2}$$

従って，$\preccurlyeq$ が強上限律に従うことを示すには，$\preccurlyeq$ が次の法則に従うことを示せばいい．

$$x\alpha \preccurlyeq \beta,\ y\alpha \preccurlyeq \beta \implies x \vee y, \alpha \preccurlyeq \beta \tag{3.21.3}$$

この法則は $\beta \neq \varepsilon$ なら (3.21.2) により法則 (3.21.1) と同等である．$x\alpha \preccurlyeq \varepsilon,\ y\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ であれば，任意の $z \in A$ に対して付加律により $x\alpha \preccurlyeq z,\ y\alpha \preccurlyeq z$ 従って (3.21.1) により $x \vee y, \alpha \preccurlyeq z$ が成り立つから，条件 3 により $x \vee y, \alpha \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つ．よって $\preccurlyeq$ は法則 (3.21.3) に従う．

問題 3.21.20 定理 3.21.15 の仮定の条件 1 の下で，$\preccurlyeq$ は算法 $x \Rightarrow y$ ついて消去導律に従う．また，その消去導律と法則 (3.21.3) から定理 3.21.15 条件 1 の法則 $x \vee y, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq z$ が導かれる．

補題 3.21.11 A **が空集合でなくて** $\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$ **に関する擬ブール関係の場合，**$\preccurlyeq$ **が** A^* **上の最大関係に等しいためには，任意の** $x \in A$ **に対して** $\varepsilon \preccurlyeq x$ **が成り立つことも，任意の** $x \in A$ **に対して** $x \preccurlyeq \varepsilon$ **が成り立つことも，どちらも必要十分である．**

証明　必要なことは明らかである．十分であることを示すには，擬ブール関係の双対性によれば，任意の $x \in A$ に対して $\varepsilon \preccurlyeq x$ が成り立つ場合を考えればいい．その場合，A が空集合でないとの仮定により，$\varepsilon \preccurlyeq x$ かつ $\varepsilon \preccurlyeq x^{\Diamond}$ なる $x \in A$ がある．これらの式と下補律 $xx^{\Diamond} \preccurlyeq \varepsilon$ に消去律を使って $\varepsilon \preccurlyeq \varepsilon$ を得る．従って付加律により，任意の $\alpha, \beta \in A^*$ について $\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．つまり $\preccurlyeq$ は最大関係である．

問題 3.21.21 A が空集合でなくて $\preccurlyeq$ が A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$ に関する擬ブール関係の場合，$\preccurlyeq$ が A^* 上の最大関係に等しいためには，$\varepsilon \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つことも，$\varepsilon \preccurlyeq x$ かつ $\varepsilon \preccurlyeq x^{\Diamond}$ なる $x \in A$ があることも，$x \preccurlyeq \varepsilon$ かつ $x^{\Diamond} \preccurlyeq \varepsilon$ なる $x \in A$ があることも，$\varepsilon \preccurlyeq x \wedge x^{\Diamond}$ なる $x \in A$ があることも，$x \vee x^{\Diamond} \preccurlyeq \varepsilon$ なる $x \in A$ があることも，いずれも必要十分である．

定理 3.21.16 A **が空集合でない場合，**A **上の汎算法** $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$ **に関する** A^* **上の擬ブール関係** $\preccurlyeq$ **と** $\preccurlyeq'$ **が** $\preccurlyeq \subseteq \preccurlyeq'$ **をみたすためには，**$\preccurlyeq|_{A^* \times A} \subseteq \preccurlyeq'|_{A^* \times A}$ **をみたすことも，**$\preccurlyeq|_{A \times A^*} \subseteq \preccurlyeq'|_{A \times A^*}$ **をみたすことも，任意の** $x \in A$ **に対して「**$\varepsilon \preccurlyeq x \implies \varepsilon \preccurlyeq' x$**」をみたすことも，任意の** $x \in A$ **に対して「**$x \preccurlyeq \varepsilon \implies x \preccurlyeq' \varepsilon$**」をみたすことも，いずれも必要十分である．**

証明　擬ブール関係の双対性によれば，任意の $x \in A$ に対して「$\varepsilon \preccurlyeq x \implies \varepsilon \preccurlyeq' x$」が成り立つと仮定して，$x_1 \cdots x_m \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ ならば $x_1 \cdots x_m \preccurlyeq' y_1 \cdots y_n$ であることをを示せばいい．$m \geq 1$ または $n \geq 1$ のときは，$x = {x_m}^{\Diamond} \vee \cdots \vee {x_1}^{\Diamond} \vee y_1 \vee \cdots \vee y_n$ と定めれば，定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により $x_1 \cdots x_m \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ から $\varepsilon \preccurlyeq x$ が得られ，従って仮定により $\varepsilon \preccurlyeq' x$ が成り立つから，再びこの二定理により $x_1 \cdots x_m \preccurlyeq' y_1 \cdots y_n$ が確かに得られる．$m = n = 0$ なら，$x_1 \cdots x_m \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ は $\varepsilon \preccurlyeq \varepsilon$ を意味するから，任意の $x \in A$ に対して付加律により $\varepsilon \preccurlyeq x$ が成り立ち，従って仮定により $\varepsilon \preccurlyeq' x$ が成り立つから，補題 3.21.11 により $\preccurlyeq'$ は最大関係であり，従って $x_1 \cdots x_m \preccurlyeq' y_1 \cdots y_n$ が確かに成り立つ．

問題 3.21.22 A が空集合でない場合，A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$ に関する A の二つの擬ブール表現 $f \in A \to \mathbb{B}$ と $g \in A \to \mathbb{C}$ が f 真関係 $\preccurlyeq_f$ と g 真関係 $\preccurlyeq_g$ について $\preccurlyeq_f \subseteq \preccurlyeq_g$ をみたすためには，$f^{-1}(\max \mathbb{B}) \subseteq g^{-1}(\max \mathbb{C})$ をみたすことも，$f^{-1}(\min \mathbb{B}) \subseteq g^{-1}(\min \mathbb{C})$ をみたすことも，どちらも必要十分である．

問題 3.21.23 束律・強束律とそれらを成す反復律・付加律・巾等律・置換律・消去律・強消去律および包容律はそれぞれ交閉的法則である．また，A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関するブール律・弱ブール律とそれらを成す両限律・両補律・三導律・強両限律・強両補律・強三導律はそれぞれ交閉的法則である（定理 3.29.4 と定理 3.29.2 参照）．従って A^* 上の任意の関係 R に対して，A^* 上の R を含む最小のブール関係と最小の弱ブール関係が特に存在する．

略解　後半は前半と問題 3.9.48 による．

3.22　部分集合対と関係法則

$ **この節の三つの項を通じて A を集合とする．** ここでは，A の部分集合対から得られる A^* 上の「対関係」と，逆に A^* 上の関係から得られる A の部分集合対「切断」，それらと $\mathbb{T}$ 表現関係との関連，それらを使っての弱ブール関係の分析などについて説明する．なお，AZ 記法・列便法等の第 3.19 節の記法・便法を継承する．

3.22.1　対関係

§ 各 $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ に対して，A^* 上の関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ を列便法を使って

$$\alpha \preccurlyeq_{P,Q} \beta \iff \alpha \not\subseteq P \text{ または } \beta \not\subseteq Q \tag{3.22.1}$$

と定義し，(P, Q) **が定める関係**とか (P, Q) **関係**とかと呼ぶ（問題 3.9.58 で定義した A 上の (P, Q) 関係 $\sqsubseteq_{P,Q}$ を参照）．ただし $(P, A-P)$ 関係 $\preccurlyeq_{P,A-P}$ は，P **関係**とも呼び $\preccurlyeq_P$ でも表す（例 3.22.1 参照）．また，$(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ を色々に変えて出来る (P, Q) 関係を A^* 上の**対関係**と総称する．

例 3.22.1　(3.22.1) によれば任意の $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ に対して $\varepsilon \not\preccurlyeq_{P,Q} \varepsilon$ が成り立つので，A^* 上の対関係は最大関係ではない．しかし，(3.22.1) によれば任意の $(\alpha, \beta) \in A^* \times A^*$ に対して $\alpha \not\preccurlyeq_{A,A} \beta$ が成り立つので，A^* 上の最小関係は (A, A) 関係 $\preccurlyeq_{A,A}$ に等しい．また，A の部分集合 S に対して問題 3.19.12 で定義した S 関係 $\preccurlyeq_S$ は $(S, A-S)$ 関係 $\preccurlyeq_{S,A-S}$ に等しい．従って問題 3.19.12 の略解で示したことから，S を $\mathcal{P}A$ 全体に亘って動かして得られる $(S, A-S)$ 関係の全体は，A^* 上の $\mathbb{T}$ 写関係の全体に等しい．このことは定理 3.22.3 で精密に述べ直す．

問題 3.22.1　(Q, P) 関係 $\preccurlyeq_{Q,P}$ は (P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ の双対関係に等しい．

問題 3.22.2　(P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ は，A^* の部分集合とみなした (P^*, Q^*) から定義される (P^*, Q^*) 関係 $\sqsubseteq_{P^*,Q^*}$ に等しい．また，$\preccurlyeq_{P,Q}$ の $A \times A$ への制限は (P, Q) 関係 $\sqsubseteq_{P,Q}$ に等しい．

任意の $(\alpha, \beta) \in A^* \times A^*$ は，列便法により $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元とみなせて，任意の $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ との間に $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ の有無を云々することができる．従って，(3.22.1) は

$$\alpha \preccurlyeq_{P,Q} \beta \iff (\alpha, \beta) \not\subseteq (P, Q) \tag{3.22.2}$$

と書くこともできる．

定理 3.22.1　$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ **上の直積順序関係** $\subseteq$ **と** A^* **上の関係の間の包含関係** $\subseteq$ **について**

$$(P, Q) \subseteq (P', Q') \iff \preccurlyeq_{P,Q} \supseteq \preccurlyeq_{P',Q'}$$

が成り立つ．すなわち，$(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ **に** (P, Q) **関係** $\preccurlyeq_{P,Q}$ **を対応させる写像は真減写である．**

証明　(3.22.2) の対偶は「$\alpha \not\preccurlyeq_{P,Q} \beta \iff (\alpha, \beta) \subseteq (P, Q)$」となる．従って $\not\preccurlyeq_{P,Q} \subseteq \not\preccurlyeq_{P',Q'}$ なることは「$(\alpha, \beta) \subseteq (P, Q) \implies (\alpha, \beta) \subseteq (P', Q')$」なることと同等であり，これは $(P, Q) \subseteq (P', Q')$ なることと同等である．

定理 3.22.2 $\mathbb{T}$ **写系** $(A, \mathbb{T}, f)$ **が定める関係** $\preccurlyeq_f$ **は** $(f^{-1}1, f^{-1}0)$ **関係に等しい．すなわち**

$$\preccurlyeq_f = \preccurlyeq_{f^{-1}1, f^{-1}0}$$

注意 3.22.1 $f^{-1}0 = A - f^{-1}1$ であるから，$\preccurlyeq_{f^{-1}1, f^{-1}0}$ は $f^{-1}1$ 関係 $\preccurlyeq_{f^{-1}1}$ に等しい．

証明　$\not\preccurlyeq_f = \not\preccurlyeq_{f^{-1}1, f^{-1}0}$ なることを示せばいいが，$\alpha \not\preccurlyeq_f \beta$ なることは $\inf f\alpha = 1$ かつ $\sup f\beta = 0$ なることと同等であり，これは $(\alpha, \beta) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なることと同等であり，これは (3.22.2) によれば $\alpha \not\preccurlyeq_{f^{-1}1, f^{-1}0} \beta$ なることと同等である．

系　$(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ **と** $\mathbb{T}$ **写系** $(A, \mathbb{T}, f)$ **について次のことが成り立つ（定理 3.22.7 系参照）．**

$$\preccurlyeq_{P,Q} \supseteq \preccurlyeq_f \iff (P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$$

証明　$\preccurlyeq_{P,Q} \supseteq \preccurlyeq_f$ なることは定理 3.22.2 により $\preccurlyeq_{P,Q} \supseteq \preccurlyeq_{f^{-1}1, f^{-1}0}$ なることと同等であり，これは定理 3.22.1 により $(P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なることと同等である．

注意 3.22.2 定理 3.22.2 系の結論の包含関係を逆にした「$\preccurlyeq_{P,Q} \subseteq \preccurlyeq_f \iff (P, Q) \supseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$」も同様に成り立つが，これは重要ではない．同様に成り立つが重要ではない事柄は今後もあるが，そういう事柄は断りなしに省略する．　終

以上は対関係についての少々の，しかし重要な一般論であった．中でも定理 3.22.2 は，それ自体も重要であるが，対関係と束写関係の関連を窺わせる．そこで以下この項では対関係の特殊論に転じ，$(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ とし，(P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ が第 3.19 節や第 3.21 節で束写関係に関連して現れた諸法則に従うために (P, Q) のみたすべき条件を調べる．ただし，この特殊論には汎用的な考え方が含まれ，それに興味がある．この特殊論中の主たる定理は最後の定理 3.22.6 であるが，それは改めての準備なしに証明することができる．それに先立つ定理は，定理 3.22.6 をより広い文脈で眺めるための前置きである．

定理 3.22.3 $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ **について次のことが成り立つ．**

1. (P, Q) **関係** $\preccurlyeq_{P,Q}$ **は包容律・付加律・巾等律・置換律に従う．**
2. $\preccurlyeq_{P,Q}$ **が反復律に従うためには，**$P \cap Q = \emptyset$ **なることが必要十分である（こういう** (P, Q) **を** A **上の**<u>**乖対**</u>**と呼び，乖対の定める対関係を**<u>**乖対関係**</u>**と呼ぶ）．**
3. $\preccurlyeq_{P,Q}$ **が強消去律に従うためにも消去律に従うためにも，**$A = P \cup Q$ **なることが必要十分である（こういう** (P, Q) **を** A **上の**<u>**充対**</u>**と呼び，充対の定める対関係を**<u>**充対関係**</u>**と呼ぶ）．**
4. **次の六条件は同等である．**
   - **4a.** $\preccurlyeq_{P,Q}$ **は束律に従う．**
   - **4b.** $\preccurlyeq_{P,Q}$ **は強束律に従う．**
   - **4c.** $A = P \amalg Q$ **（こういう** (P, Q) **を** A **上の**<u>**充乖対**</u>**と呼び，充乖対の定める対関係を**<u>**充乖対関係**</u>**と呼ぶ）．**
   - **4d.** $\preccurlyeq_{P,Q}$ **は** P **の定義関数** 1_P **からできる束写系** $(A, \mathbb{T}, 1_P)$ **の定める関係** $\preccurlyeq_{1_P}$ **に等しい．**
   - **4e.** $\preccurlyeq_{P,Q}$ **は** $\mathbb{T}$ **写関係である．すなわち，ある** $\mathbb{T}$ **写系** $(A, \mathbb{T}, f)$ **の定める関係** $\preccurlyeq_f$ **に等しい．**

4f. $\preccurlyeq_{P,Q}$ **は束写関係である．すなわち，ある束写系** $(A, \mathbb{B}, f)$ **の定める関係** $\preccurlyeq_f$ **に等しい．**

また，条件 3e の写像 f **は** 1_P **に限り，従って** $(P, Q) = (f^{-1}1, f^{-1}0)$ **をみたし，条件 3f の写像** f **も** $(P, Q) = \bigl(f^{-1}(\max\mathbb{B}), f^{-1}(\min\mathbb{B})\bigr)$ **なるものに限る．**

証明　記号を簡単にするために，$\preccurlyeq_{P,Q}$ を $\preccurlyeq_*$ でも表す．

1. 問題 3.19.4 により，付加律・巾等律・置換律を合わせた法則は包容律と同等である．そこで $\alpha \preccurlyeq_* \beta$，$(\alpha, \beta) \subseteq (\alpha', \beta')$ とすれば，(3.22.2) により $(\alpha, \beta) \not\subseteq (P, Q)$ だから $(\alpha', \beta') \not\subseteq (P, Q)$，すなわち $\alpha' \preccurlyeq_* \beta'$ が成り立つ．つまり $\preccurlyeq_*$ は包容律に従う．

2. $P \cap Q = \{x \in A \mid x \not\preccurlyeq_* x\}$ が成り立つからである（問題 3.22.2 と問題 3.9.58 参照）．

3. $\alpha \preccurlyeq_* x\gamma$ かつ $x\beta \preccurlyeq_* \delta$ なら，$\alpha \not\subseteq P$ または $\{x\} \cup \gamma \not\subseteq Q$ が成り立ち，$\{x\} \cup \beta \not\subseteq P$ または $\delta \not\subseteq Q$ が成り立つ．従ってさらに $\alpha\beta \not\preccurlyeq_* \delta\gamma$ なら，$(\alpha \cup \beta, \delta \cup \gamma) \subseteq (P, Q)$，従って $x \notin P \cup Q$ が成り立つ．従って $A = P \cup Q$ なら，$\preccurlyeq_*$ は強消去律に従う．$\preccurlyeq_*$ が強消去律に従えば，$\preccurlyeq_*$ は消去律に従う．

$x \in A - P \cup Q$ なら，$\{x\} \not\subseteq Q$ と $\{x\} \not\subseteq P$，従って $\varepsilon \preccurlyeq_* x$ と $x \preccurlyeq_* \varepsilon$ が成り立つが，(3.22.1) により $\varepsilon \preccurlyeq_* \varepsilon$ は成り立たない．従って $\preccurlyeq_*$ が消去律に従えば，$A = P \cup Q$ が成り立つ．

4. 結論 1, 2, 3 により，条件 4a も条件 4b も条件 4c と同等である．条件 4c の下では，$(P, Q) = ({1_P}^{-1}1, {1_P}^{-1}0)$ であるから，定理 3.22.2 により条件 4d がみたされる．条件 4d が条件 4e を含意し条件 4e が条件 4f を含意するのは自明である．定理 3.19.1 と定理 3.19.2 により，条件 4f は条件 4a を含意する．条件 4f の下では，それと同等な条件 4c により $A - Q = P$ でもあるから「$x \in P \iff \varepsilon \preccurlyeq_{P,Q} x \iff \varepsilon \preccurlyeq_f x \iff fx = \max\mathbb{B}$」が成り立ち，同様に「$x \in Q \iff fx = \min\mathbb{B}$」，従って $(P, Q) = \bigl(f^{-1}(\max\mathbb{B}), f^{-1}(\min\mathbb{B})\bigr)$ が成り立つ．特に条件 4e の下では $(P, Q) = (f^{-1}1, f^{-1}0)$，従って f は P の定義関数 1_P に等しい．

問題 3.22.3 (✓)　$P \subset A$，$Q \subset A$，$P \cap Q = \emptyset$ であれば，(P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ は準両限律と両端律に従う（問題 3.19.11，定理 3.22.3，問題 3.21.14，定理 3.21.12 参照）．

補題 3.22.1　$x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\lozenge$，$x \Rightarrow y$ **を** A **上の汎算法とし，**(P, Q) **関係** $\preccurlyeq_{P,Q}$ **を** $\preccurlyeq_*$ **で表す．このとき，これらについての八法則**

a1. $xy\alpha \preccurlyeq_* \beta \implies x \wedge y, \alpha \preccurlyeq_* \beta$

a2. $\alpha \preccurlyeq_* x\beta$，$\alpha \preccurlyeq_* y\beta \implies \alpha \preccurlyeq_* x \wedge y, \beta$

a3. $\alpha \succcurlyeq_* x\beta$，$\alpha \succcurlyeq_* y\beta \implies \alpha \succcurlyeq_* x \vee y, \beta$

a4. $xy\alpha \succcurlyeq_* \beta \implies x \vee y, \alpha \succcurlyeq_* \beta$

a5. $\alpha \preccurlyeq_* x\beta \implies x^\lozenge\alpha \preccurlyeq_* \beta$

a6. $\alpha \succcurlyeq_* x\beta \implies x^\lozenge\alpha \succcurlyeq_* \beta$

a7. $\alpha \preccurlyeq_* x\beta$，$y\alpha \preccurlyeq_* \beta \implies x \Rightarrow y, \alpha \preccurlyeq_* \beta$

a8. $x\alpha \preccurlyeq_* y\beta \implies \alpha \preccurlyeq_* x \Rightarrow y, \beta$

（すなわち強両限律・強両補律・強三導律を成す法則）のそれぞれは，(P, Q) **と算法** $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ **についての次の八法則中の同番号のものと同等である（これら算法に関し，これら八法則を合わせた法則を**<u>**ブール対律**</u>**と呼び，これをみたす組み** (P, Q) **を** A **上の**<u>**ブール対**</u>**と呼ぶ）．**

b1. $x \wedge y \in P \implies x, y \in P$

b2. $x \wedge y \in Q \implies x \in Q$ **または** $y \in Q$

b3. $x \vee y \in P \implies x \in P$ **または** $y \in P$

b4. $x \vee y \in Q \implies x, y \in Q$

b5. $x^\lozenge \in P \implies x \in Q$

b6. $x^\lozenge \in Q \implies x \in P$

b7. $x \Rightarrow y \in P \implies x \in Q$ **または** $y \in P$

b8. $x \Rightarrow y \in Q \implies x \in P$，$y \in Q$

証明　(a1 $\Longrightarrow$ b1) $x \notin P$ または $y \notin P$ であれば，特に $\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる α, β に対して（そういう α, β はある）$xy\alpha \preccurlyeq_* \beta$，従って a1 により $x \wedge y, \alpha \preccurlyeq_* \beta$ となるから，$x \wedge y \notin P$ が成り立つ．

(b1 $\Longrightarrow$ a1) $x \wedge y, \alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ であれば，$\{x \wedge y\} \cup \alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$，従って b1 により $x, y \in P$ となるから，$xy\alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ が成り立つ．

(a2 $\Longrightarrow$ b2) $x, y \notin Q$ であれば，特に $\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる α, β に対して $\alpha \preccurlyeq_* x\beta$, $\alpha \preccurlyeq_* y\beta$，従って a2 により $\alpha \preccurlyeq_* x \wedge y, \beta$ となるから，$x \wedge y \notin Q$ が成り立つ．

(b2 $\Longrightarrow$ a2) $\alpha \not\preccurlyeq_* x \wedge y, \beta$ であれば，$\alpha \subseteq P$, $\{x \wedge y\} \cup \beta \subseteq Q$，従って b2 により $x \in Q$ または $y \in Q$ となるから，$\alpha \not\preccurlyeq_* x\beta$ または $\alpha \not\preccurlyeq_* y\beta$ が成り立つ．

(a3 $\Longleftrightarrow$ b3) (a4 $\Longleftrightarrow$ b4) 問題 3.22.1 により $\preccurlyeq_{Q,P}$ が $\preccurlyeq_{P,Q}$ の双対関係であるから，(a2 $\Longleftrightarrow$ b2) (a1 $\Longleftrightarrow$ b1) と同時に証明されている．

(a5 $\Longrightarrow$ b5) $x \notin Q$ であれば，特に $\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる α, β に対して $\alpha \preccurlyeq_* x\beta$，従って a5 により $\alpha \preccurlyeq_* x^{\Diamond}\beta$ となるから，$x^{\Diamond} \notin P$ が成り立つ．

(b5 $\Longrightarrow$ a5) $x^{\Diamond}\alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ であれば，$\{x^{\Diamond}\} \cup \alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$，従って b5 により $x \in Q$ となるから，$\alpha \not\preccurlyeq_* x\beta$ が成り立つ．

(a6 $\Longleftrightarrow$ b6) $\preccurlyeq_{Q,P}$ が $\preccurlyeq_{P,Q}$ の双対関係であるから，(a5 $\Longleftrightarrow$ b5) と同時に証明されている．

(a7 $\Longrightarrow$ b7) $x \notin Q$, $y \notin P$ であれば，特に $\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる α, β に対して $\alpha \preccurlyeq_* x\beta$, $y\alpha \preccurlyeq_* \beta$，従って a7 により $x \Rightarrow y, \alpha \preccurlyeq_* \beta$ となるから，$x \Rightarrow y \notin P$ が成り立つ．

(b7 $\Longrightarrow$ a7) $x \Rightarrow y, \alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ であれば，$\{x \Rightarrow y\} \cup \alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$，従って b7 により $x \in Q$ または $y \in P$ となるから，$\alpha \not\preccurlyeq_* x\beta$ または $y\alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ が成り立つ．

(a8 $\Longrightarrow$ b8) $x \notin P$ または $y \notin Q$ であれば，特に $\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる α, β に対して $x\alpha \preccurlyeq_* y\beta$，従って a8 により $\alpha \preccurlyeq_* x \Rightarrow y, \beta$ となるから，$x \Rightarrow y \notin Q$ が成り立つ．

(b8 $\Longrightarrow$ a8) $\alpha \not\preccurlyeq_* x \Rightarrow y, \beta$ であれば，$\alpha \subseteq P$, $\{x \Rightarrow y\} \cup \beta \subseteq Q$，従って b8 により $x \in P$, $y \in Q$ となるから，$x\alpha \not\preccurlyeq_* y\beta$ が成り立つ．

定理 3.22.4 **A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関して，(P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ が A^* 上の弱ブール関係であるためには，(P, Q) が A 上の $P \cap Q = \emptyset$ なるブール対であることが必要十分である（こういう (P, Q) をブール乖対と呼び，ブール乖対が定める対関係をブール乖対関係と呼ぶ）．**

証明　定理 3.22.3 により，$\preccurlyeq_{P,Q}$ が反復律・付加律・巾等律・置換律に従うためには，$P \cap Q = \emptyset$ なることが必要十分である．また補題 3.22.1 により，$\preccurlyeq_{P,Q}$ が強両限律・強両補律・強三導律に従うためには，(P, Q) がブール対であることが必要十分である．

問題 3.22.4 P, Q が A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関する余白の部分集合であれば，これら算法に関して (P, Q) は A 上のブール対である．特に $(\emptyset, \emptyset)$ は A 上のブール乖対である．

問題 3.22.5 (P, Q) が A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関する A 上のブール対であれば，$A - (P \cap Q)$ はこれら算法により閉ざされ，これら算法の $A - (P \cap Q)$ への制限に関して，$\big(P - (P \cap Q), Q - (P \cap Q)\big)$ は $A - (P \cap Q)$ 上のブール乖対である．

問題 3.22.6 (✓) 補題 3.22.1 における矢印 $\Longrightarrow$ をすべて逆向きにした命題も成り立つ．

問題 3.22.7 $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ が A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関するブール対律の矢印 $\Longrightarrow$ をすべて逆向きにした法則（それを**逆ブール対律**と呼ぶ）に従えば，$P \cup Q$ はこれら算法で閉じている．

補題 3.22.2 **A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ に関して，$P \in \mathcal{P}A$ が A のブール部分集合であるためには，$(P, A - P)$ が A 上のブール対であることが必要十分である．**

証明　補題 3.22.1 のブール対律 b1 – b8 は，$Q = A - P$ とすれば b2, b4, b6, b8 の対偶がそれぞれ b1, b3, b5, b7 の逆となるので，定理 3.19.7 のブール部分集合律となる．

定理 3.22.5 **A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ と $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ についての次の七条件は同等である．**

1. **(P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ は A^* 上のブール関係である．**
2. **(P, Q) は A 上の $A = P \amalg Q$ なるブール対である（こういう (P, Q) をブール充乖対と呼び，ブール充乖対が定める対関係をブール充乖対関係と呼ぶ）．**
3. **P は A のブール部分集合で $A = P \amalg Q$ が成り立つ．**
4. **P の定義関数 1_P は A の $\mathbb{T}$ 表現で $A = P \amalg Q$ が成り立つ．**
5. **1_P 真関係 $\preccurlyeq_{1_P}$ は A^* 上のブール関係で $A = P \amalg Q$ が成り立つ．**
6. **$\preccurlyeq_{P,Q}$ は $\mathbb{T}$ 表現関係である．即ち，ある $\mathbb{T}$ 表現系 $(A, \mathbb{T}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ に等しい．**
7. **$\preccurlyeq_{P,Q}$ はブール表現関係である．即ち，あるブール表現系 $(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ に等しい．**

また，条件 2 – 5 はそれぞれ「$A = P \amalg Q$」を「$\preccurlyeq_{P,Q} = \preccurlyeq_{1_P}$」に置き換えた条件とも同等であり，条件 6 の $\mathbb{T}$ 表現 f は 1_P に限り，従って $(P, Q) = (f^{-1}1, f^{-1}0)$ をみたし，条件 7 のブール表現 f も $(P, Q) = \big(f^{-1}(\max \mathbb{B}), f^{-1}(\min \mathbb{B})\big)$ なるものに限る．

証明　定理 3.21.10 により，条件 1 がみたされるためには $\preccurlyeq_{P,Q}$ が消去律と弱ブール律に従うことが必要十分であり，そのためには定理 3.22.3 と定理 3.22.4 により，条件 2 のみたされることが必要十分であり，そのためには補題 3.22.2 により，条件 3 のみたされることが必要十分である．$\mathbb{T}$ 写系 $(A, \mathbb{T}, 1_P)$ に適用した定理 3.19.7 により条件 3, 4, 5 は同等である．定理 3.22.3 により最後の注意が成り立つ．従って，条件 4 は条件 6 を含意する．条件 6 は条件 7 を自明に含意し，定理 3.19.6 により条件 7 は条件 1 を含意する．

問題 3.22.8 f が A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関する A の $\mathbb{T}$ 表現であれば，$(f^{-1}1, f^{-1}0)$ はこれら算法に関する A 上のブール充乖対であって $\preccurlyeq_f = \preccurlyeq_{f^{-1}1, f^{-1}0}$ が成り立つ．

略解　定理 3.19.7 と補題 3.22.2 と定理 3.22.2 によるか，定理 3.22.5 を $(f^{-1}1, f^{-1}0)$ に適用する．**終**

定理 3.22.5 はとりわけ，(P, Q) がブール充乖対なら A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $(P, Q) = (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なるものがあることを示す．次の定理はブール乖対について同様のことを示す．

定理 3.22.6 **(P, Q) が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ に関するブール乖対で A がこれら算法に関して普遍汎代数系であれば，A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $(P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なるものがある．**

注意 3.22.3 定理 3.22.6 のブール乖対という仮定も普遍性の仮定も特殊であり，結論の $(P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なる条件も定理 3.22.5 の $(P, Q) = (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なる条件より弱い．しかし，以下に示す定理 3.22.6 の証明や応用の考え方に汎用性があり，それに興味がある．なお定理 3.22.2 系によれば，$(P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なる条件は $\preccurlyeq_{P,Q} \supseteq \preccurlyeq_f$ なる条件と同等である．

証明　$P \cap Q = \emptyset$ なので，A の素元系 S について $P \cap Q \cap S = \emptyset$ が成り立つ（問題 3.22.10 参照）．従って，写像 $\varphi \in S \to \mathbb{T}$ で $(S \cap P, S \cap Q) \subseteq (\varphi^{-1}1, \varphi^{-1}0)$ なるものが存在し，A の普遍性により，φ は $\mathbb{T}$ 表現 $f \in A \to \mathbb{T}$ に拡張される（問題 3.22.11 参照）．$z \in P$ なら $fz = 1$ であって $z \in Q$ なら $fz = 0$ であることを示せばいい．これは $z \in S$ なら，$fz = \varphi z$ なので成り立つ．また，問題 3.8.6 により (A, S) は有基代数系である．そこで，z の階数についての帰納法を使い，$z \notin S$ と仮定する．そうすると定理 3.8.2 により，z は $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ の何れかの語形をしており，x と y の階数は z の階数より小さい．

1．$P \ni z = x \wedge y$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b1 により $x, y \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = fy = 1$，従って $fz = fx \wedge fy = 1$ が成り立つ．

2．$Q \ni z = x \wedge y$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b2 により $x \in Q$ または $y \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = 0$ または $fy = 0$，従って $fz = fx \wedge fy = 0$ が成り立つ．

3．$P \ni z = x \vee y$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b3 により $x \in P$ または $y \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = 1$ または $fy = 1$，従って $fz = fx \vee fy = 1$ が成り立つ．

4．$Q \ni z = x \vee y$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b4 により $x, y \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = fy = 0$，従って $fz = fx \vee fy = 0$ が成り立つ．

5．$P \ni z = x^\Diamond$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b5 により $x \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = 0$，従って $fz = (fx)^\Diamond = 1$ が成り立つ．

6．$Q \ni z = x^\Diamond$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b6 により $x \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = 1$，従って $fz = (fx)^\Diamond = 0$ が成り立つ．

7．$P \ni z = x \Rightarrow y$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b7 により $x \in Q$ または $y \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = 0$ または $fy = 1$，従って $fz = fx \Rightarrow fy = 1$ が成り立つ．

8．$Q \ni z = x \Rightarrow y$ の場合：補題 3.22.1 の法則 b8 により $x \in P$，$y \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $fx = 1$，$fy = 0$，従って $fz = fx \Rightarrow fy = 0$ が成り立つ．　**終**

以下の問題は定理 3.22.6 の別証や上記証明への注釈である．

問題 3.22.9 A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ に関して，次のことが成り立つ．

1. (P_i, Q_i) $(i \in I)$ が A 上のブール対であれば，$(\bigcup_{i \in I} P_i, \bigcup_{i \in I} Q_i)$ も A 上のブール対である．
2. A 上のブール乖対の全体を $\mathfrak{B}$ で表せば，$\mathfrak{B} \neq \emptyset$ であって，$\mathfrak{B}$ は $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ に関して帰納的である．

そこでツォルンの補題を踏まえて (P, Q) を順序集合 $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ の極大元とすれば，

3. A が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して単記代数系であれば，(P, Q) は逆ブール対律にも従う．
4. A が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して普遍汎代数系であれば，(P, Q) はブール充乖対である．

略解　2. $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ なることは問題 3.22.4 による．

3. $x, y \in P$ とする．そうすると，法則 b2 と $P \cap Q = \emptyset$ なることより $x \wedge y \notin Q$ が成り立つ．また，A が $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して単記代数系であるから，$x \wedge y$ が $x' \vee y'$ あるいは $x'^\Diamond$ あるいは $x' \Rightarrow y'$ と表されることはなく，$x \wedge y = x' \wedge y'$ であれば $(x, y) = (x', y')$ が成り立つ．以上のことから $(\{x \wedge y\} \cup P, Q) \in \mathfrak{B}$ であり，従って (P, Q) の極大性により $x \wedge y \in P$ が成り立つ．

4. A の素元系を S とする．S が A の算法余白なので，問題 3.22.4 と結論 1 により $\bigl(P, Q \cup (S - P)\bigr) \in \mathfrak{B}$，従って (P, Q) の極大性により $S - P \subseteq Q$，つまり $S \subseteq P \cup Q$ が成り立つ．問題 3.22.7 と結論 3 により $P \cup Q$ が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ で閉じているので $A = P \cup Q$ が成り立つ．

注意 3.22.4 問題 3.22.9 の結論 4 の仮定の下で，定理 3.22.5 により A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $(P, Q) = (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なるものがある．従って問題 3.22.9 とツォルンの補題の系 および定理 3.22.5 から定理 3.22.6 が導かれる．逆に問題 3.22.9 の結論 4 は，定理 3.22.6 と定理 3.22.5 から導かれる．

問題 3.22.9 の結論 4 の代用物をツォルンの補題無しに導くこともできる．すなわちまず，各 $(X, Y) \in \mathfrak{B}$ に対して $(\overline{X}, \overline{Y}) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ を次のように定めれば，$(\overline{X}, \overline{Y}) \in \mathfrak{B}$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}\overline{X} &= X \cup \{x \wedge y \mid x, y \in X\} \cup \{x \vee y \mid x \in X \text{ または } y \in X\} \\ &\quad \cup \{x^{\Diamond} \mid x \in Y\} \cup \{x \Rightarrow y \mid x \in Y \text{ または } y \in X\} \\ \overline{Y} &= Y \cup \{x \wedge y \mid x \in Y \text{ または } y \in Y\} \cup \{x \vee y \mid x, y \in Y\} \\ &\quad \cup \{x^{\Diamond} \mid x \in X\} \cup \{x \Rightarrow y \mid x \in X,\ y \in Y\}\end{aligned}$$

そこで次に $n = 0, 1, \ldots$ に対して $(X_n, Y_n) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ を帰納的に $(X_0, Y_0) = (X, Y)$，$(X_n, Y_n) = (\overline{X_{n-1}}, \overline{Y_{n-1}})$ $(n \geq 1)$ と定めてから $(P, Q) = (\bigcup_{n \geq 0} X_n, \bigcup_{n \geq 0} Y_n)$ と定めれば，(P, Q) は $\mathfrak{B}$ に属して逆ブール対律にも従う．問題 3.22.9 の結論 4 のようにして始めから $S \subseteq X \cup Y$ としておけば，$A = P \amalg Q$ が成り立つ．

問題 3.22.10 A がその上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ に関して部分集合 S で生成され，(P, Q) がこれら算法に関する A 上のブール対で $P \cap Q \cap S = \emptyset$ をみたせば，$P \cap Q = \emptyset$ が成り立つ．

略解　問題 3.22.5 により $A = [S]_{\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}} \subseteq A - (P \cap Q)$ が成り立つからである．

問題 3.22.11 A をその上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ に関する普遍代数系とし，S をその素元系とし，$\mathcal{T}$ をこれらの算法に関する A の $\mathbb{T}$ 表現の全体とし，$\mathcal{T}$ から $\mathcal{P}S$ への写像 $f \mapsto S_f$ を $S_f = f^{-1}1 \cap S$ と定義すれば，これは全単射である．

略解　全射であることは A の普遍性により，単射であることは問題 3.3.7 による．

3.22.2　関係による切断

§ **この項を通じて $\preccurlyeq$ を A^* 上の関係とする．** 第 3.22.1 項に記した通り，任意の $(\alpha, \beta) \in A^* \times A^*$ は，列便法により $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元とみなせて，任意の $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ との間に $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ の有無を云々することができる．以下ではこのことを断りなく使う．

定義 3.22.1 $A^* \times A^*$ の元 (α, β) が $\preccurlyeq$ に関する**特異対**であるとは，$\alpha \not\preccurlyeq \beta$ をみたすことを言う．また，$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (P, Q) が A の $\preccurlyeq$ による**切断**であるとは，次の条件をみたすことを言う．

$$(\alpha, \beta) \subseteq (P, Q) \implies \alpha \not\preccurlyeq \beta \tag{3.22.3}$$

また，$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (P, Q) が**有限**であるとは，$\mathcal{P}'A \times \mathcal{P}'A$ に属すことを言う．

そうすると列便法によれば，$A^* \times A^*$ の元は $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の有限な元と同一視される．また，$\preccurlyeq$ による A の切断は $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元であるから，特にそういう切断の有限性を云々することもできる．そこで，**$\preccurlyeq$ に関する特異対の全体を $\mathfrak{S}_{\preccurlyeq}$ で表し，A の $\preccurlyeq$ による切断の全体を $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ で表し，A の $\preccurlyeq$ による有限な切断の全体を $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ で表し，$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ の $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ への制限を矢張り $\subseteq$ で表し，順序集合 $(\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}, \subseteq)$ の極大元の全体を $\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ で表す．**

問題 3.22.12 $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属すためには，$A^* \times A^*$ の元とみなした (P^*, Q^*) が問題 3.9.59 の意味で A^* の $\preccurlyeq$ による切断であることが必要十分であり，(P, Q) が $\preccurlyeq$ の $A \times A$ への制限 $\sqsubseteq$ による問題 3.9.59 の意味での A の切断であることが必要である．

定理 3.22.7 **$\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ について次のことが成り立つ．**

1. **$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属すためには，(P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ が $\preccurlyeq$ を含むことが必要十分である．**
2. **A^* 上の関係 $\preccurlyeq'$ が $\preccurlyeq \subseteq \preccurlyeq'$ をみたせば $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq} \supseteq \mathfrak{C}_{\preccurlyeq'}$ が成り立つ．従って A^* 上の関係の族 $(\preccurlyeq_i)_{i \in I}$ が $\preccurlyeq \subseteq \bigcap_{i \in I} \preccurlyeq_i$ をみたせば，$\mathfrak{C}_{\preccurlyeq} \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_i}$ が成り立つ．**
3. **$\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ は順序関係 $\subseteq$ に関して帰納的であり，従って $\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ の $\subseteq$ に関する下方包 $\overleftarrow{\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}}$ に等しい．**

証明　1. (3.22.2) の対偶「$\alpha \not\preccurlyeq_{P,Q} \beta \iff (\alpha, \beta) \subseteq (P, Q)$」により (3.22.3) が「$\alpha \not\preccurlyeq_{P,Q} \beta \implies \alpha \not\preccurlyeq \beta$」と書き換えられるからである．

2. $\preccurlyeq \subseteq \preccurlyeq'$ であれば，任意の $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq'}$ に対して，結論 1 によりまず $\preccurlyeq \subseteq \preccurlyeq' \subseteq \preccurlyeq_{P,Q}$ を得て，従って次に $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ を得るから，$\mathfrak{C}_{\preccurlyeq} \supseteq \mathfrak{C}_{\preccurlyeq'}$ が成り立つ．

3. $\{(P_i, Q_i) \mid i \in I\}$ を $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の空でない線形部分順序集合とし，$P = \bigcup_{i \in I} P_i$，$Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$ と定める．$(\alpha, \beta) \in A^* \times A^*$ が $(\alpha, \beta) \subseteq (P, Q)$ をみたせば，$(\alpha, \beta) \subseteq (P_i, Q_i)$ なる $i \in I$ があるから，$\alpha \not\preccurlyeq \beta$ が成り立つ．従って (P, Q) は，$(\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}, \subseteq)$ における $\{(P_i, Q_i) \mid i \in I\}$ の上限である．これで前半が示された．後半は前半とツォルンの補題の系による．

系　**$(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ と $\mathbb{T}$ 写系 $(A, \mathbb{T}, f)$ について次のことが成り立つ（定理 3.22.2 系参照）．**

$$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f} \iff (P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$$

証明　定理 3.22.7 により「$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f} \iff \preccurlyeq_{P,Q} \supseteq \preccurlyeq_f$」が成り立つことと定理 3.22.2 系による．

系 2 **任意の $(P, Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ に対して $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq_{P,Q}} = \mathcal{P}P \times \mathcal{P}Q$ と $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq_{P,Q}} = \mathcal{P}'P \times \mathcal{P}'Q$ が成り立つ．**

証明　定理 3.22.7 と定理 3.22.1 により任意の $(X, Y) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ に対して「$(X, Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_{P,Q}} \iff \preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_{P,Q} \iff (X, Y) \subseteq (P, Q)$」が成り立つからである．

定理 3.22.8 **$\preccurlyeq$ が包容律に従えば，$\mathfrak{S}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ について次のことが成り立つ．**

1. **$A^* \times A^*$ の元 (α, β) が $\mathfrak{S}_{\preccurlyeq}$ に属すためには，列便法の下で $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ に属すことが必要十分である．**
2. **A 上の関係 $\preccurlyeq'$ が $\preccurlyeq \supseteq \preccurlyeq'$ をみたすためには，$\mathfrak{C}_{\preccurlyeq} \subseteq \mathfrak{C}_{\preccurlyeq'}$ をみたすことも $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \subseteq \mathfrak{D}_{\preccurlyeq'}$ をみたすことも必要十分である．**
3. **A^* 上の包容律に従う関係の族 $(\preccurlyeq_i)_{i \in I}$ に対して $\preccurlyeq = \bigcap_{i \in I} \preccurlyeq_i$ であれば，$\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_i}$ が成り立つ．**
4. **A^* 上の包容律に従う関係の任意の族 $(\preccurlyeq_i)_{i \in I}$ について「$\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{i \in I} \preccurlyeq_i \iff \mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_i}$」が成り立つ．**
5. $\preccurlyeq = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q} = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q} = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q}$

注意 3.22.5 結論 3 の仮定の下では，問題 3.21.23 により $\preccurlyeq$ は必然的に包容律に従うから，結論 3 については，$\preccurlyeq$ が包容律に従うというこの定理の仮定は不要である．

証明　1. (3.22.3) により，$(\alpha, \beta) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ であれば $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}_{\preccurlyeq}$ が成り立つ．$(\alpha', \beta') \subseteq (\alpha, \beta)$ なる $(\alpha', \beta') \in A^* \times A^*$ が $\alpha' \preccurlyeq \beta'$ をみたせば，包容律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．従って，$(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}_{\preccurlyeq}$ であれば $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ が成り立つ．

2. $\preccurlyeq \supseteq \preccurlyeq'$ であれば，定理 3.22.7 により $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq} \subseteq \mathfrak{C}_{\preccurlyeq'}$ が成り立ち，これは $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \subseteq \mathfrak{D}_{\preccurlyeq'}$ を含意する．そこで逆に $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \subseteq \mathfrak{D}_{\preccurlyeq'}$ と仮定する．そうすると $\alpha \not\preccurlyeq \beta$ であれば，結論 1 により $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$，従って $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq'}$，従って (3.22.3) により $\alpha \not\preccurlyeq' \beta$ が成り立つ．これで $\preccurlyeq \supseteq \preccurlyeq'$ が示された．

3. 定理 3.22.7 により $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_i}$ が成り立つ．逆の包含関係を示すために，任意の $(P, Q) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ をとり，列便法により P, Q を A^* の元 α, β とみなす．そうすると，(3.22.3) により $\alpha \not\preccurlyeq \beta$ であるから，$\alpha \not\preccurlyeq_i \beta$ なる $i \in I$ があり，従って結論 1 により，(α, β) すなわち (P, Q) は $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq_i}$ に属す．

4. $\preccurlyeq' = \bigcap_{i \in I} \preccurlyeq_i$ と定めれば，結論 3 と注意 3.22.5 により $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq'} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_i}$ が成り立つから，結論 2 により結論 4 が成り立つ．

5. 定理 3.22.7 によりまず $\preccurlyeq \subseteq \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立つ．定理 3.22.7 によりまた $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \subseteq \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} (\mathcal{P}'P \times \mathcal{P}'Q)$，従って定理 3.22.7 系 2 により $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \subseteq \bigcup_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_{P,Q}}$ が成り立つ．しかも定理 3.22.3 により対関係が包容律に従う．ゆえに結論 4 により $\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立つ．これで $\preccurlyeq = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が示された．他の式の証明も同様である．

問題 3.22.13 (✓) $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ について次のことが成り立つ．

1. $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属すためには，$\mathcal{P}P \times \mathcal{P}Q \subseteq \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ なることも $\mathcal{P}'P \times \mathcal{P}'Q \subseteq \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ なることも必要十分である（第 3.18.1 項の有限的の概念参照）．
2. A^* 上の関係 $\preccurlyeq'$ が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq} \supseteq \mathfrak{C}_{\preccurlyeq'}$ をみたすためには，$\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \supseteq \mathfrak{D}_{\preccurlyeq'}$ をみたすことが必要十分である．
3. $\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{Y}$ が $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の部分集合で $\mathfrak{Y}$ が直積順序関係 $\subseteq$ に関する $\mathfrak{X}$ の下方包 $\overleftarrow{\mathfrak{X}}$ に含まれれば，$\bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{Y}} \preccurlyeq_{P,Q} \supseteq \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{X}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立つ．
4. $\preccurlyeq$ が包容律に従い $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ が $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathfrak{X}$ の下方包 $\overleftarrow{\mathfrak{X}}$ に含まれれば $\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{X}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立ち，$\mathfrak{X}$ がさらに $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に含まれれば $\preccurlyeq = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{X}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立つ．

問題 3.22.14 $\mathfrak{S}_{\preccurlyeq}$ について次のことが成り立つ．

1. A^* 上の関係 $\preccurlyeq'$ が $\preccurlyeq \supseteq \preccurlyeq'$ をみたすためには，$\mathfrak{S}_{\preccurlyeq} \subseteq \mathfrak{S}_{\preccurlyeq'}$ をみたすことが必要十分である．
2. A^* 上の関係の任意の族 $(\preccurlyeq_i)_{i \in I}$ について「$\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{i \in I} \preccurlyeq_i \iff \mathfrak{S}_{\preccurlyeq} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\preccurlyeq_i}$」が成り立つ．

略解　1. $\preccurlyeq \supseteq \preccurlyeq'$ と $\not\preccurlyeq \subseteq \not\preccurlyeq'$ が同等だからである．

2. 結論 1 によれば，$\preccurlyeq = \bigcap_{i \in I} \preccurlyeq_i$ なら $\mathfrak{S}_{\preccurlyeq} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\preccurlyeq_i}$ であることを示せばいいが，それは $\not\preccurlyeq = \bigcup_{i \in I} \not\preccurlyeq_i$ なることより分かる．　**終**

以上は切断についての一般論であった．以下この項では切断の特殊論に転じ，$\preccurlyeq$ が第 3.19 節や第 3.21 節に現れた諸法則に従うために $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ のみたすべき条件を調べる．ただし，この特殊論には汎用的な考え方が含まれ，それに興味がある．この特殊論中の主定理は $\preccurlyeq$ が弱ブール律に従うための必要条件を示す定理 3.22.13 と二つの系である．定理 3.22.13 の証明の主要部は定理 3.22.11 にあ

り，それは取り立てての準備なしに証明することができる．その他の定理は，定理 3.22.13 をより広い文脈に置くためのものである．

定理 3.22.9 $\preccurlyeq$ **が反復律に従うと仮定する．このとき，任意の** $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ **が** $P \cap Q = \emptyset$ **をみたす（つまり乖対である）．従って，**$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ **が** $A = P \cup Q$ **をみたせば（つまり充対であれば），**(P, Q) **は** $\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ **に属す．**

証明　$x \in P \cap Q$ なら，$(\{x\}, \{x\}) \subseteq (P, Q)$，従って (3.22.3) により $x \not\preccurlyeq x$ となり，$\preccurlyeq$ が反復律に従うことに反する．
別証　(P, Q) 関係 $\preccurlyeq_{P,Q}$ は，定理 3.22.7 により $\preccurlyeq$ を含むから反復律に従う．従って定理 3.22.3 により $P \cap Q = \emptyset$ が成り立つ．

定理 3.22.10 $\preccurlyeq$ **が強消去律に従えば，任意の** $(P, Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ **が** $A = P \cup Q$ **をみたす（つまり充対である）．**

証明　$x \in A - P \cup Q$ なる x があると仮定する．そうすると $(P, \{x\} \cup Q)$, $(\{x\} \cup P, Q) \notin \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であるが，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は巾等律と置換律に従う．従って，$\alpha, \beta \subseteq P$, $\gamma, \delta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A^*$ を適当にとれば $\alpha \preccurlyeq x\gamma$, $x\beta \preccurlyeq \delta$，従って強消去律により $\alpha\beta \preccurlyeq \delta\gamma$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であるから $\alpha\beta \not\preccurlyeq \delta\gamma$ が成り立つ．これは矛盾であるから $A = P \cup Q$ が成り立つ．

問題 3.22.15 $\preccurlyeq$ が包容律に従って $\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ の任意の元が充対であれば，$\preccurlyeq$ は強消去律に従う．

略解　定理 3.22.8 により $\preccurlyeq = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立ち，定理 3.22.3 により各 $(P, Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ に対して $\preccurlyeq_{P,Q}$ が強消去律に従うから，問題 3.21.23 により $\preccurlyeq$ も強消去律に従う．

定理 3.22.11 $\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ **に関して弱ブール律に従えば，任意の** $(P, Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ **がこれら算法に関して** A **上のブール乖対である．**

証明　$P \cap Q = \emptyset$ なることは定理 3.22.9 による．(P, Q) が補題 3.22.1 のブール対律に従うことを背理法で証明するために，ブール対律を成す法則 b1 – b8 のそれぞれを否定して矛盾を導く．

1. $x \wedge y \in P$ **であるが** $x \notin P$ **または** $y \notin P$ **なる** x, y **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であるから，$x \notin P$ であるか $y \notin P$ であるかに応じて，$(\{x\} \cup P, Q)$ か $(\{y\} \cup P, Q)$ かが $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は巾等律と置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$x\alpha \preccurlyeq \beta$ か $y\alpha \preccurlyeq \beta$ かが成り立つ．何れにしても，$\preccurlyeq$ が付加律と置換律に従うから $xy\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立ち，$\preccurlyeq$ が強下限律に従うから $x \wedge y, \alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$, $x \wedge y \in P$ であるから，$x \wedge y, \alpha \not\preccurlyeq \beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

2. $x \wedge y \in Q$, $x, y \notin Q$ **なる** x, y **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であって $x, y \notin Q$ であるから，$(P, \{x\} \cup Q)$ も $(P, \{y\} \cup Q)$ も $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は付加律・巾等律・置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$\alpha \preccurlyeq x\beta$, $\alpha \preccurlyeq y\beta$ が成り立ち，$\preccurlyeq$ が強下限律に従うから $\alpha \preccurlyeq x \wedge y, \beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$, $x \wedge y \in Q$ であるから，$\alpha \not\preccurlyeq x \wedge y, \beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

3. $x \vee y \in P$, $x, y \notin P$ **なる** x, y **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であって $x, y \notin P$ であるから，$(\{x\} \cup P, Q)$ も $(\{y\} \cup P, Q)$ も $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は付加律・巾等律・置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$x\alpha \preccurlyeq \beta$, $y\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り

立ち，$\preccurlyeq$ が強上限律に従うから $x \vee y, \alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$，$x \vee y \in P$ であるから，$x \vee y, \alpha \not\preccurlyeq \beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

4. $x \vee y \in Q$ **であるが** $x \notin Q$ **または** $y \notin Q$ **なる** x, y **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であるから，$x \notin Q$ であるか $y \notin Q$ であるかに応じて，$(P, \{x\} \cup Q)$ か $(P, \{y\} \cup Q)$ かが $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は巾等律と置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$，$\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$\alpha \preccurlyeq x\beta$ か $\alpha \preccurlyeq y\beta$ かが成り立つ．何れにしても，$\preccurlyeq$ が付加律と置換律に従うから $\alpha \preccurlyeq xy\beta$ が成り立ち，$\preccurlyeq$ が強上限律に従うから $\alpha \preccurlyeq x \vee y, \beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$，$x \vee y \in Q$ であるから，$\alpha \not\preccurlyeq x \vee y, \beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

5. $x^{\Diamond} \in P$，$x \notin Q$ **なる** x **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であって $x \notin Q$ であるから，$(P, \{x\} \cup Q)$ は $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は巾等律と置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$，$\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$\alpha \preccurlyeq x\beta$ が成り立ち，$\preccurlyeq$ が強両補律に従うから $x^{\Diamond}\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$，$x^{\Diamond} \in P$ であるから，$x^{\Diamond}\alpha \not\preccurlyeq \beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

6. $x^{\Diamond} \in Q$，$x \notin P$ **なる** x **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であって $x \notin P$ であるから，$(\{x\} \cup P, Q)$ は $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は巾等律と置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$，$\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$x\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立ち，$\preccurlyeq$ が強両補律に従うから $\alpha \preccurlyeq x^{\Diamond}\beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$，$x^{\Diamond} \in Q$ であるから，$\alpha \not\preccurlyeq x^{\Diamond}\beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

7. $x \Rightarrow y \in P$，$x \notin Q$，$y \notin P$ **なる** x, y **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であって $x \notin Q$，$y \notin P$ であるから，$(P, \{x\} \cup Q)$ も $(\{y\} \cup P, Q)$ も $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は付加律・巾等律・置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$，$\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$\alpha \preccurlyeq x\beta$，$y\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立ち，$\preccurlyeq$ が強三導律に従うから $x \Rightarrow y, \alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$，$x \Rightarrow y \in P$ であるから，$x \Rightarrow y, \alpha \not\preccurlyeq \beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

8. $x \Rightarrow y \in Q$ **であるが** $x \notin P$ **または** $y \notin Q$ **なる** x, y **がある場合：**(P, Q) が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ の極大元であるから，$x \notin P$ であるか $y \notin Q$ であるかに応じて，$(\{x\} \cup P, Q)$ か $(P, \{y\} \cup Q)$ かが $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属さない．しかし $(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ であって，$\preccurlyeq$ は巾等律と置換律に従う．従って，$\alpha \subseteq P$，$\beta \subseteq Q$ なる $\alpha, \beta \in A^*$ を適当にとれば，$x\alpha \preccurlyeq \beta$ か $\alpha \preccurlyeq y\beta$ かが成り立つ．何れにしても，$\preccurlyeq$ が付加律に従うから $x\alpha \preccurlyeq y\beta$ が成り立ち，$\preccurlyeq$ が強三導律に従うから $\alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta$ が成り立つ．しかし他方で，$(P, Q) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$，$x \Rightarrow y \in Q$ であるから，$\alpha \not\preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta$ が成り立つ．これは矛盾である．

問題 3.22.16 $\preccurlyeq$ が包容律に従って $\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ の任意の元が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ に関してブール乖対であれば，$\preccurlyeq$ はこれら算法に関して弱ブール律に従う．

略解　定理 3.22.8 により $\preccurlyeq = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立ち，定理 3.22.4 により各 $(P, Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ に対して $\preccurlyeq_{P,Q}$ が弱ブール律に従うから，問題 3.21.23 により $\preccurlyeq$ も弱ブール律に従う．

定理 3.22.12 $\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ **に関して弱ブール律に従えば，各** $(X, Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ **に応じて，これら算法に関する** A **上のブール乖対** (P, Q) **で** $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ **なるものがある．**

証明　定理 3.22.7 により $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ なる $(P, Q) \in \mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ があって定理 3.22.11 により (P, Q) がブール乖対だからである．

定理 3.22.13 $\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ **に関して弱ブール律に従って** A **がこれら算法に関して普遍汎代数系であれば，各** $(X, Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ **に応じて，これら算法に関する** A **の** $\mathbb{T}$ **表現** f **で** $(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ **なるものがあり，こういう** f **は** $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ **と** $(X, Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f}$ **をみたす．**

注意 3.22.6 定理 3.22.13 の弱ブール関係という仮定も普遍性の仮定も特殊である．しかし，以下に示す定理 3.22.13 の証明や応用の考え方に汎用性があり，それに興味がある．

証明　定理 3.22.12 によりブール乖対 (P, Q) で $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ なるものがあり，定理 3.22.6 により A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $(P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なるものがある．この f が $(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ をみたす．こういう f は，定理 3.22.2 系と定理 3.22.7 系により $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ と $(X, Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f}$ をみたす．

系　$\preccurlyeq$ **が A 上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ **に関して弱ブール律に従って A がこれら算法に関して普遍汎代数系であれば，各** $(X, Y) \in \mathfrak{D}_\preccurlyeq$ **に応じて，これら算法に関する A の** $\mathbb{T}$ **表現 f で** $(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ **なるものがあり，こういう f は** $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ **と** $(X, Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ **をみたす．**

証明　定理 3.22.13 における $\mathfrak{C}_\preccurlyeq$ と $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f}$ を $\mathfrak{D}_\preccurlyeq$ と $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ に狭めたに過ぎない．

系 2　$\preccurlyeq$ **が A 上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ **に関して弱ブール律に従って A がこれら算法に関して普遍汎代数系であれば，これら算法に関する A の** $\mathbb{T}$ **表現の全体を** $\mathcal{T}$ **で表すとき，**$\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ **が成り立つ（**$\bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ **を算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関する** A^* **上の**<u>**ブール恒真関係**</u>**と呼ぶ）．**

証明　$\preccurlyeq$ が弱ブール関係との仮定と定理 3.19.1 と問題 3.19.4 により $\preccurlyeq$ と $\preccurlyeq_f$　$(f \in \mathcal{T})$ は包容律に従い，系により $\mathfrak{D}_\preccurlyeq \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{T}} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ が成り立つ．従って定理 3.22.8 により $\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ が成り立つ．
別証　$\preccurlyeq$ が弱ブール関係との仮定と問題 3.19.4 により $\preccurlyeq$ が包容律に従うから，定理 3.22.8 により $\preccurlyeq = \bigcap_{(X,Y) \in \mathfrak{D}_\preccurlyeq} \preccurlyeq_{X,Y}$ が成り立つ．系により，各 $(X, Y) \in \mathfrak{D}_\preccurlyeq$ に応じて $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ なる $f \in \mathcal{T}$ がある．従って $\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ が成り立つ．

注意 3.22.7 系 2 の上記二証明では系を使っているが，第一証明の論法を使えば，逆に系 2 から系を導くことができる．この意味でこの二つの系は同等である（注意 3.22.8 参照）．

定理 3.22.14　$\preccurlyeq$ **が A 上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ **に関してブール律に従えば，**$\mathfrak{M}_\preccurlyeq$ **の任意の元はこれら算法に関して A 上のブール充乖対である．**

証明　定理 3.21.10 により $\preccurlyeq$ が強消去律と弱ブール律に従うから，定理 3.22.10 と定理 3.22.11 によりこの定理が成り立つ．

問題 3.22.17　$\preccurlyeq$ が包容律に従って $\mathfrak{M}_\preccurlyeq$ の任意の元が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ に関してブール充乖対であれば，$\preccurlyeq$ はこれら算法に関してブール律に従う．

略解　定理 3.22.8 により $\preccurlyeq = \bigcap_{(P,Q) \in \mathfrak{M}_\preccurlyeq} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立ち，定理 3.22.5 により各 $(P, Q) \in \mathfrak{M}_\preccurlyeq$ に対して $\preccurlyeq_{P,Q}$ がブール律に従うから，問題 3.21.23 により $\preccurlyeq$ もブール律に従う．

定理 3.22.15　$\preccurlyeq$ **が A 上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ **に関してブール律に従えば，各** $(X, Y) \in \mathfrak{C}_\preccurlyeq$ **に応じて，これら算法に関する A 上のブール充乖対** (P, Q) **で** $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ **なるものがある．**

証明　定理 3.22.7 により $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ なる $(P, Q) \in \mathfrak{M}_\preccurlyeq$ があって定理 3.22.14 により (P, Q) がブール充乖対だからである．

定理 3.22.16　$\preccurlyeq$ **が A 上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ **に関してブール律に従えば，各** $(X, Y) \in \mathfrak{C}_\preccurlyeq$ **に応じて，これら算法に関する A の** $\mathbb{T}$ **表現 f で** $(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ **なるものがあり，こういう f は** $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ **と** $(X, Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f}$ **をみたす．**

証明　定理 3.22.15 によりブール充乖対 (P,Q) で $(X,Y) \subseteq (P,Q)$ なるものがあり，定理 3.22.5 により A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $(P,Q) = (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なるものがある．この f が $(X,Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ をみたす．こういう f は，定理 3.22.2 系と定理 3.22.7 系により $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ と $(X,Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f}$ をみたす．

系　$\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ **に関してブール律に従えば，各** $(X,Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ **に応じて，これら算法に関する** A **の** $\mathbb{T}$ **表現** f **で** $(X,Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ **なるものがあり，こういう** f **は** $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ **と** $(X,Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ **をみたす．**

証明　定理 3.22.16 における $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f}$ を $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ と $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ に狭めたに過ぎない．

系 2　$\preccurlyeq$ **が** A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ **に関してブール律に従えば，これら算法に関する** A **の** $\mathbb{T}$ **表現の全体を** $\mathcal{T}$ **で表すとき，**$\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ **が成り立つ．**

証明　$\preccurlyeq$ がブール関係との仮定と定理 3.19.1 と問題 3.19.4 により $\preccurlyeq$ と $\preccurlyeq_f$　$(f \in \mathcal{T})$ は包容律に従い，系により $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq} \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{T}} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ が成り立つ．従って定理 3.22.8 により $\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ が成り立つ．
別証　$\preccurlyeq$ がブール関係との仮定と問題 3.19.4 により $\preccurlyeq$ が包容律に従うから，定理 3.22.8 により $\preccurlyeq = \bigcap_{(X,Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{X,Y}$ が成り立つ．系により，各 $(X,Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ に応じて $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ なる $f \in \mathcal{T}$ がある．従って $\preccurlyeq \supseteq \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ が成り立つ．

問題 3.22.18　$\preccurlyeq$ が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ に関して A^* 上のブール関係の場合，$(P,Q) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属すためには，$(P \cup Q^{\Diamond}, \emptyset)$ が $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ に属すことが必要十分である．

略解　$x_1 \ldots x_m \preccurlyeq y_1 \ldots y_n \iff x_1 \ldots x_m {y_1}^{\Diamond} \ldots {y_n}^{\Diamond} \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つからである．

3.22.3　ブール恒真関係と最小弱ブール関係

§ ここでは，前項までに登場した色々な関係の関連について説明する．この説明中の主たる定理は，標記の二種の関係が等しいことを示す最後の定理 3.22.19 である．これは定理 3.22.13 系 2 から直ちに導かれる．その他の定理は，定理 3.22.19 をより広い文脈で考えるための前置きである．定理 3.22.19 は，第 3.30.4 項で命題論理学に現れる $\mathbb{T}$ 表現論対の特性法則を求めるのに使うためのもので，その意味では特殊な定理であるが，それを導くまでの考え方が一般的・汎用的で，それに興味がある．なお，$\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ などの第 3.22.2 項で定めた記号を継承する．

定理 3.22.17　A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ **と** A^* **上の関係** $\preccurlyeq$ **についての次の六条件は同等である．**

1. $\preccurlyeq$ **はブール関係である．**

2. $\preccurlyeq$ **は包容律に従い，**$\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ **の任意の元がブール充乖対である．**

3. $\preccurlyeq$ **は** A^* **上のブール充乖対関係の交わりである．**

4. $\preccurlyeq$ **は** A^* **上の** $\mathbb{T}$ **表現関係の交わりである．**

5. $\preccurlyeq$ **は** $\mathbb{T}$ **のある巾ブール束** $\mathbb{T}^V$ **から出来るブール表現系** $(A, \mathbb{T}^V, f)$ **の定める関係** $\preccurlyeq_f$ **に等しい．**

6. $\preccurlyeq$ **はブール表現関係である．**

証明　$\preccurlyeq$ が A^* 上の最大関係であればすべての条件がみたされる．なぜならまず条件 1 については，最大関係はブール律を自明にみたす（問題 3.21.23 参照）．次に条件 2 については，$\preccurlyeq$ が最大関係であれば (3.22.3) により $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq} = \emptyset$ である．次に条件 3, 4 については，零個の関係の交わりは最大関係である．次に条件 5, 6 については，極端な巾ブール束 $\mathbb{T}^{\emptyset}$ から出来るブール表現系の定める関係は，問題 3.19.1 により最大関係である．そこで以下，$\preccurlyeq$ が最大関係でないと仮定する．

(1 $\Longrightarrow$ 2) 問題 3.19.4 と定理 3.22.14 による．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 定理 3.22.8 により $\preccurlyeq = \bigcap_{(P,Q)\in\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}} \preccurlyeq_{P,Q}$ が成り立つからである．

(3 $\Longrightarrow$ 4) 定理 3.22.5 によりブール充乖対関係が $\mathbb{T}$ 表現関係だからである．

(4 $\Longrightarrow$ 5) 問題 3.19.22 と定理 3.10.6 による．

(5 $\Longrightarrow$ 6) 自明である．(1 $\Longrightarrow$ 6) の別証について定理 3.21.13 参照.

(6 $\Longrightarrow$ 1) 定理 3.19.6 による．

問題 3.22.19　A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ についての次の六条件は同等である．

1. $\preccurlyeq$ は強束律に従う．
2. $\preccurlyeq$ は包容律に従い，$\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ の任意の元が充乖対である．
3. $\preccurlyeq$ は A^* 上の充乖対関係の交わりである．
4. $\preccurlyeq$ は A^* 上の $\mathbb{T}$ 写関係の交わりである．
5. $\preccurlyeq$ は $\mathbb{T}$ のある巾束 $\mathbb{T}^V$ から出来る束写系 $(A, \mathbb{T}^V, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ に等しい．
6. $\preccurlyeq$ はある分配束 $\mathbb{B}$ から出来る束写系 $(A, \mathbb{B}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$ に等しい．

略解　$\preccurlyeq$ が最大関係でないと仮定していい．

(1 $\Longrightarrow$ 2) 問題 3.19.4 と定理 3.22.9 と定理 3.22.10 による．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 定理 3.22.8 による．

(3 $\Longrightarrow$ 4) 定理 3.22.3 により充乖対関係が $\mathbb{T}$ 写関係だからである．

(4 $\Longrightarrow$ 5) 問題 3.19.22 による．

(5 $\Longrightarrow$ 6) $\mathbb{T}^V$ が問題 3.13.8 によりブール束であり，特に分配律に従うからである．

(6 $\Longrightarrow$ 1) 定理 3.19.1 と定理 3.19.2 による．

問題 3.22.20　A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\diamond}$，$x \Rightarrow y$ と A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ についての次の三条件は同等である．

1. $\preccurlyeq$ は A^* 上の弱ブール関係である．
2. $\preccurlyeq$ は包容律に従い，$\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ の任意の元がブール乖対である．
3. $\preccurlyeq$ は A^* 上のブール乖対関係の交わりである．

略解　(1 $\Longrightarrow$ 2) は問題 3.19.4 と定理 3.22.11，(2 $\Longrightarrow$ 3) は定理 3.22.8，(3 $\Longrightarrow$ 1) は定理 3.22.4 と問題 3.21.23 による．

問題 3.22.21　A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ についての次の三条件は同等である．

1. $\preccurlyeq$ は包容律と強消去律に従う．

2. $\preccurlyeq$ は包容律に従い，$\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ の任意の元が充対である．

3. $\preccurlyeq$ は A^* 上の充対関係の交わりである．

略解　$(1 \Longrightarrow 2)$ は定理 3.22.10，$(3 \Longrightarrow 1)$ は定理 3.22.3 と問題 3.21.23 による．

問題 3.22.22 A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ についての次の三条件は同等である．

1. $\preccurlyeq$ は包容律と反復律に従う．

2. $\preccurlyeq$ は包容律に従い，$\mathfrak{M}_{\preccurlyeq}$ の任意の元が乖対である．

3. $\preccurlyeq$ は A^* 上の乖対関係の交わりである．

略解　$(1 \Longrightarrow 2)$ は定理 3.22.9，$(3 \Longrightarrow 1)$ は定理 3.22.3 による．

問題 3.22.23 A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ が包容律に従うためには，$\preccurlyeq$ が A^* 上の対関係の交わりであることが必要十分である．

略解　必要であることは定理 3.22.8 により，十分であることは定理 3.22.3 と問題 3.21.23 による．

定理 3.22.18 A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ **に関し，**A^* **上の次の六関係は同一である．**

1. **ブール恒真関係（すなわち $\mathbb{T}$ 表現関係すべての交わり）**

2. **ブール充乖対関係すべての交わり**

3. **ブール表現関係すべての交わり**

4. **ブール関係すべての交わり**

5. **最小のブール表現関係**

6. **最小のブール関係**

証明　関係 1 – 6 を R_1 – R_6 で表せば，定理 3.22.5 と問題 3.22.8 により $\mathbb{T}$ 表現関係とブール充乖対関係が同義から $R_1 = R_2$ が成り立ち，$\mathbb{T}$ 表現がブール表現の一部だから $R_1 \supseteq R_3$ が成り立ち，定理 3.22.17 によりブール表現関係とブール関係が同義だから $R_3 = R_4$ と $R_5 = R_6$ が成り立ち，問題 3.21.23 により R_6 が存在して $R_4 = R_6$ が成り立ち，定理 3.22.17 によりブール関係が $\mathbb{T}$ 表現関係の交わりだから $R_6 \supseteq R_1$ が成り立つ．従って R_1 – R_6 は等しい．

問題 3.22.24 定理 3.22.18 において算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して，A の $\mathbb{T}$ 表現の全体を $\mathcal{T}$ とし，A から巾ブール束 $\mathbb{T}^{\mathcal{T}}$ への写像 f を $(fx)\varphi = \varphi x$ $(x \in A,\ \varphi \in \mathcal{T})$ と定めれば，$(A, \mathbb{T}^{\mathcal{T}}, f)$ はブール表現系であり，これの定める関係 $\preccurlyeq_f$ が最小のブール表現関係である．

定理 3.22.19 A **上の汎算法** $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ **に関し，**A **が普遍汎代数系であれば，**A^* **上のブール恒真関係は** A^* **上の最小の弱ブール関係に等しい．従ってまた，**A^* **上の最小の弱ブール関係は最小のブール関係に等しい．**

証明　ブール恒真関係が定理 3.19.6 と定理 3.21.10 と問題 3.21.23 により弱ブール関係であって定理 3.22.13 系 2 により弱ブール関係すべてに含まれるからである．後半は定理 3.22.18 による．

注意 3.22.8 定理 3.22.19 の上記証明では定理 3.22.13 系 2 を使ったが，逆に定理 3.22.19 から定理 3.22.13 系 2 が導かれる．この意味でこれら二定理は同等である（注意 3.22.7 参照）．

問題 3.22.25 A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ に関し，A^* 上の次の三関係は同一である．

1. ブール乖対関係すべての交わり
2. 弱ブール関係すべての交わり
3. 最小の弱ブール関係

略解　関係 1, 2, 3 を R_1, R_2, R_3 で表せば，問題 3.21.23 により R_3 が存在して $R_2 = R_3$ が成り立ち，問題 3.22.20 により $R_1 = R_2$ が成り立つ．

問題 3.22.26 A^* 上の次の八関係は同一である．

1. 最小の強束関係
2. 充乖対関係すべての交わり
3. $\mathbb{T}$ 写関係すべての交わりである．
4. 分配束から出来る束写系の定める関係すべての交わり
5. 包容律と反復律に従う最小の関係
6. 乖対関係すべての交わり
7. 問題 3.19.23 で定義した束写系 $(A, \mathbb{T}^{\mathcal{P}A}, f)$ の定める関係 $\preccurlyeq_f$
8. 最小の束関係

略解　問題 3.22.19 により関係 1 – 4 が等しく，問題 3.22.22 により関係 5, 6 が等しく，問題 3.19.23 により関係 3, 5, 7 が等しい．関係 1, 5 が等しいので，これらは関係 8 にも等しい．

問題 3.22.27 A^* 上の次の五関係は同一である．

1. 包容律と強消去律に従う最小の関係
2. 充対関係すべての交わり
3. 包容律に従う最小の関係
4. 対関係すべての交わり
5. 最小関係（すなわち空関係）　**終**

以下の問題は以上のことの副産物に類するもので，この項の本題からは離れる．

問題 3.22.28 A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関し，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ についての次の三条件は同等である．

1. $\preccurlyeq$ は A^* 上の最大関係でないブール関係の中で極大のものである．
2. $\preccurlyeq$ は A^* 上の $\mathbb{T}$ 表現関係である．
3. $\preccurlyeq$ は A^* 上のブール充乖対関係である．

略解　問題 3.19.1 と定理 3.19.6 により，$\mathbb{T}$ 表現関係は最大関係でないブール関係である．定理 3.22.17 により，最大関係でないブール関係はある $\mathbb{T}$ 表現関係に含まれる．問題 3.19.2 により，$\mathbb{T}$ 表現関係の全体は包含関係 $\subseteq$ について離散的である．従って問題 3.9.21 により $(1 \iff 2)$ が成り立つ．定理 3.22.5 と問題 3.22.8 により $\mathbb{T}$ 表現関係がブール充乖対関係に他ならないから $(2 \iff 3)$ が成り立つ．

問題 3.22.29 A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ についての次の三条件は同等である．

1. $\preccurlyeq$ は A^* 上の最大関係でない強束関係の中で極大のものである．
2. $\preccurlyeq$ は A^* 上の $\mathbb{T}$ 写関係である．
3. $\preccurlyeq$ は A^* 上の充乖対関係である．

問題 3.22.30 $\preccurlyeq$ が A^* 上の最大関係でない強束関係なら，$\preccurlyeq$ を含む A^* 上の最大関係でない強束関係の中に極大のものがある．A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関して，$\preccurlyeq$ が A^* 上の最大関係でないブール関係なら，$\preccurlyeq$ を含む A^* 上の最大関係でないブール関係の中に極大のものがある．

略解　定理 3.22.17 と問題 3.22.28 による（問題 3.29.5 参照）．

問題 3.22.31 A 上の汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ に関して，次の四条件は同等である．

1. A^* 上の最大関係でないブール関係がある．
2. A の $\mathbb{T}$ 表現がある．
3. 非極端のブール表現系 $(A, \mathbb{B}, f)$ がある．
4. A 上のブール充乖対がある．

略解　定理 3.22.17 と問題 3.19.1 と定理 3.19.6 による．

問題 3.22.32 A がブール束であるとき，A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ を問題 3.19.17 でのように定めると，$\preccurlyeq$ は A のブール論法に関する A^* 上のブール関係の中で最小のものである．

略解　問題 3.19.17 により，$\preccurlyeq$ はブール論法に関してブール関係である．他方，$f \in A \to \mathbb{B}$ をブール論法に関するブール表現とし，$x \in A$ が $\varepsilon \preccurlyeq x$ をみたすとすれば，$x = \max A$ であるから，問題 3.13.6 によって $fx = \max \mathbb{B}$，すなわち $\varepsilon \preccurlyeq_f x$ が成り立つ．従って定理 3.21.16 により $\preccurlyeq$ は $\preccurlyeq_f$ に含まれる（問題 3.21.22 参照）．

問題 3.22.33 (ブール束の表現定理) A がブール束なら，A から $\mathbb{T}$ のある巾ブール束へのブール束としての単射準写が存在する（問題 3.13.14 と問題 3.13.17 参照）．

略解　$\#A \geq 2$ としていい．そうすると A のブール論法に関して，(A, A, id_A) が非極端のブール表現系であるから，問題 3.22.31 により A の $\mathbb{T}$ 表現が存在する．その全体を $\mathcal{T}$ で表し，A から巾ブール束 $\mathbb{T}^{\mathcal{T}}$ への写像 ρ を，各 $x \in A$ と各 $f \in \mathcal{T}$ に対して $(\rho x)f = fx$ なるよう定める．そうすると定理 3.10.6 により，ρ は A から $\mathbb{T}^{\mathcal{T}}$ へのブール束としての準写となる．問題 3.19.22 により $\preccurlyeq_\rho = \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \preccurlyeq_f$ が成り立つから，定理 3.22.18 により $\preccurlyeq_\rho$ は最小ブール関係に等しく，従って問題 3.22.32 により，$\preccurlyeq_\rho$ は問題 3.19.17 でのように定義した関係 $\preccurlyeq$ に等しい．特に，$x, y \in A$ が $\rho x \leq \rho y$ をみたすためには $x \leq y$ なることが必要十分である．従って ρ は単射である．

問題 3.22.34　A が順序関係 $\leq$ についてのブール束なら，$x, y \in A$ が $x \leq y$ をみたすことは，次のいずれのこととも同等である．

1. A のブール論法に関する任意のブール表現 f に対して $x \preccurlyeq_f y$ が成り立つ．
2. A のブール論法に関する任意の $\mathbb{T}$ 表現 f に対して $x \preccurlyeq_f y$ が成り立つ．

従って，$x \neq y$ なら，A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $fx \neq fy$ なるものがある．

3.23　展開列法と欠陥法

$ ここでは，前項の主定理の一つである定理 3.22.13 系の証明をもう二通り試みる．従って，この系から得られた定理 3.22.13 系 2 や今後得られることについても，実質三通りの証明があることになる．三通りの証明の違いは，定理 3.22.13 系の証明に先立つ定理 3.22.12，定理 3.23.1，定理 3.23.2 の証明にある．

この節を通じて，$x \wedge y$, $x \vee y$, $x^\diamond$, $x \Rightarrow y$ を A 上の汎算法とし，$\preccurlyeq$ をこれらの算法に関する A^* 上の弱ブール関係とする．そうすると，問題 3.19.4 により $\preccurlyeq$ は包容律に従う．

補題 3.23.1　**$\preccurlyeq$ に関する特異対について次のことが成り立つ．**

1. **(α, β) が特異対であれば，$\alpha \cap \beta = \emptyset$ が成り立つ．**
2. **(α, β) が特異対であれば，各 $x \in \alpha$ に対して $(x\alpha, \beta)$ も特異対であり，各 $y \in \beta$ に対して $(\alpha, y\beta)$ も特異対である**
3. **$(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_n)$ が特異対であって $A^* \times A^*$ の元 $(x'_1 \cdots x'_m, y'_1 \cdots y'_n)$ が $x_i \preccurlyeq x'_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ と $y'_j \preccurlyeq y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ をみたし，$\preccurlyeq$ が消去律に従えば，$(x'_1 \cdots x'_m, y'_1 \cdots y'_n)$ も特異対である．**

証明　結論 1 は $\preccurlyeq$ の反復律・付加律・置換律による（定理 3.22.8 と定理 3.22.9 参照）．結論 2 は $\preccurlyeq$ の巾等律と置換律による．結論 3 は $\preccurlyeq$ の消去律と置換律による．

補題 3.23.2　**$\preccurlyeq$ は次の二法則に従う（合わせて<u>一般強両限律</u>と呼ぶ）．ただし各法則において，$n = 1, 2, \ldots$ とし，算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．**

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdots x_n \alpha \preccurlyeq \beta \implies x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, \alpha \preccurlyeq \beta \\ \alpha \preccurlyeq x_i \beta \ (i = 1, \ldots, n) \implies \alpha \preccurlyeq x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, \beta \end{array}\right\} \qquad \text{(一般強下限律)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_i \alpha \preccurlyeq \beta \ (i = 1, \ldots, n) \implies x_1 \vee \cdots \vee x_n, \alpha \preccurlyeq \beta \\ \alpha \preccurlyeq x_1 \cdots x_n \beta \implies \alpha \preccurlyeq x_1 \vee \cdots \vee x_n, \beta \end{array}\right\} \qquad \text{(一般強上限律)}$$

証明　各法則は，$n = 1$ なら自明に成り立ち，強両限律と置換律を使って n についての帰納法によって容易に導かれる．

次の補題 3.23.3 などでの必要上，$A^* \times A^*$ の元 (α, β) を $\alpha \to \beta$ でも表して A 上の**矢式**とか**式**とかとも呼ぶ．そう呼ぶ場合には $\preccurlyeq$ に関する特異対も**特異式**と呼び変える．

補題 3.23.3 **$\preccurlyeq$ に関する特異式について次のことが成り立つ．ただし結論 1 − 4 においては，$n = 1, 2, \ldots$ とし，算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番は任意とする．**

1. **式 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, \alpha \to \beta$ が特異なら，式 $x_1 \cdots x_n \alpha \to \beta$ も特異である．**
2. **式 $\alpha \to x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, \beta$ が特異なら，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して式 $\alpha \to x_i \beta$ が特異である．**
3. **式 $x_1 \vee \cdots \vee x_n, \alpha \to \beta$ が特異なら，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して式 $x_i \alpha \to \beta$ が特異である．**
4. **式 $\alpha \to x_1 \vee \cdots \vee x_n, \beta$ が特異なら，式 $\alpha \to x_1 \cdots x_n \beta$ も特異である．**
5. **式 $x^\Diamond \alpha \to \beta$ が特異なら，式 $\alpha \to x\beta$ も特異である．**
6. **式 $\alpha \to x^\Diamond \beta$ が特異なら，式 $x\alpha \to \beta$ も特異である．**
7. **式 $x \Rightarrow y, \alpha \to \beta$ が特異なら，式 $\alpha \to x\beta$ または式 $y\alpha \to \beta$ が特異である．**
8. **式 $\alpha \to x \Rightarrow y, \beta$ が特異なら，式 $x\alpha \to y\beta$ も特異である．**

証明　補題 3.23.2 の一般強両限律と強両補律・強三導律による．

補題 3.23.4 **(α, β) が $\preccurlyeq$ に関する特異対であれば次のことが成り立つ．ただし結論 1 − 4 においては，$n = 1, 2, \ldots$ とし，算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番は任意とする．**

1. **$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in \alpha$ なら，$(x_1 \cdots x_n \alpha, \beta)$ は $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**
2. **$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in \beta$ なら，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $(\alpha, x_i \beta)$ が $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**
3. **$x_1 \vee \cdots \vee x_n \in \alpha$ なら，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $(x_i \alpha, \beta)$ が $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**
4. **$x_1 \vee \cdots \vee x_n \in \beta$ なら，$(\alpha, x_1 \cdots x_n \beta)$ は $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**
5. **$x^\Diamond \in \alpha$ なら，$(\alpha, x\beta)$ は $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**
6. **$x^\Diamond \in \beta$ なら，$(x\alpha, \beta)$ は $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**
7. **$x \Rightarrow y \in \alpha$ なら，$(\alpha, x\beta)$ または $(y\alpha, \beta)$ が $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**
8. **$x \Rightarrow y \in \beta$ なら，$(x\alpha, y\beta)$ は $\preccurlyeq$ に関する特異対である．**

証明　補題 3.23.1 と補題 3.23.3 による．

補題 3.23.5 **(α, β) が $\preccurlyeq$ に関する特異対であれば，$\preccurlyeq$ に関する特異対の列 $\big((\alpha_n, \beta_n)\big)_{n=0,1,\ldots}$ で $(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha, \beta)$ と次の九条件をみたすものがある（これを (α, β) の展開列と呼ぶ [62]）．**

[62] 条件 1 − 8 を見る限り「展開列」より「分解列」の方が相応しく思えるが，第 5 章以降の格論理学まで行けば「展開列」の方が相応しく思えてくる．

0. $\alpha_{n-1} \subseteq \alpha_n$，$\beta_{n-1} \subseteq \beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

1. $n \equiv 1 \mod 8$，$x \wedge y \in \alpha_{n-1}$ **なら** $x, y \in \alpha_n$

2. $n \equiv 2 \mod 8$，$x \wedge y \in \beta_{n-1}$ **なら** $x \in \beta_n$ **または** $y \in \beta_n$

3. $n \equiv 3 \mod 8$，$x \vee y \in \alpha_{n-1}$ **なら** $x \in \alpha_n$ **または** $y \in \alpha_n$

4. $n \equiv 4 \mod 8$，$x \vee y \in \beta_{n-1}$ **なら** $x, y \in \beta_n$

5. $n \equiv 5 \mod 8$，$x^{\Diamond} \in \alpha_{n-1}$ **なら** $x \in \beta_n$

6. $n \equiv 6 \mod 8$，$x^{\Diamond} \in \beta_{n-1}$ **なら** $x \in \alpha_n$

7. $n \equiv 7 \mod 8$，$x \Rightarrow y \in \alpha_{n-1}$ **なら** $x \in \beta_n$ **または** $y \in \alpha_n$

8. $n \equiv 8 \mod 8$，$x \Rightarrow y \in \beta_{n-1}$ **なら** $x \in \alpha_n$ **かつ** $y \in \beta_n$

証明　$(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha, \beta)$ をもとにして (α_n, β_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ を次のように帰納的に作ればいい．すなわち，ある自然数 n に対して特異対 $(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ が作れたとき，...

$n \equiv 1 \mod 8$ のときは，$x \wedge y \in \alpha_{n-1}$ なる $x \wedge y$ の全体を $x_i \wedge y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により $(x_1 y_1 \cdots x_k y_k \alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ が特異対であるから，これを (α_n, β_n) とする．

$n \equiv 2 \mod 8$ のときは，$x \wedge y \in \beta_{n-1}$ なる $x \wedge y$ の全体を $x_i \wedge y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により，特異対 $(\alpha_{n,i}, \beta_{n,i})$ $(i = 0, \ldots, k)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$(\alpha_{n,0}, \beta_{n,0}) = (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ とし，$i \geq 1$ で $(\alpha_{n,i-1}, \beta_{n,i-1})$ まで作れたとき，$(\alpha_{n,i-1}, x_i \beta_{n,i-1})$ または $(\alpha_{n,i-1}, y_i \beta_{n,i-1})$ が特異対であるから，特異対である方を $(\alpha_{n,i}, \beta_{n,i})$ とする．そして $(\alpha_{n,k}, \beta_{n,k})$ を (α_n, β_n) とする．

$n \equiv 3 \mod 8$ のときは，$x \vee y \in \alpha_{n-1}$ なる $x \vee y$ の全体を $x_i \vee y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により，特異対 $(\alpha_{n,i}, \beta_{n,i})$ $(i = 0, \ldots, k)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$(\alpha_{n,0}, \beta_{n,0}) = (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ とし，$i \geq 1$ で $(\alpha_{n,i-1}, \beta_{n,i-1})$ まで作れたとき，$(x_i \alpha_{n,i-1}, \beta_{n,i-1})$ または $(y_i \alpha_{n,i-1}, \beta_{n,i-1})$ が特異対であるから，特異対である方を $(\alpha_{n,i}, \beta_{n,i})$ とする．そして $(\alpha_{n,k}, \beta_{n,k})$ を (α_n, β_n) とする．

$n \equiv 4 \mod 8$ のときは，$x \vee y \in \beta_{n-1}$ なる $x \vee y$ の全体を $x_i \vee y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により $(\alpha_{n-1}, x_1 y_1 \cdots x_k y_k \beta_{n-1})$ が特異対であるから，これを (α_n, β_n) とする．

$n \equiv 5 \mod 8$ のときは，$x^{\Diamond} \in \alpha_{n-1}$ なる $x^{\Diamond}$ の全体を $x_i{}^{\Diamond}$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により $(\alpha_{n-1}, x_1 \cdots x_k \beta_{n-1})$ が特異対であるから，これを (α_n, β_n) とする．

$n \equiv 6 \mod 8$ のときは，$x^{\Diamond} \in \beta_{n-1}$ なる $x^{\Diamond}$ の全体を $x_i{}^{\Diamond}$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により $(x_1 \cdots x_k \alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ が特異対であるから，これを (α_n, β_n) とする．

$n \equiv 7 \mod 8$ のときは，$x \Rightarrow y \in \alpha_{n-1}$ なる $x \Rightarrow y$ の全体を $x_i \Rightarrow y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により，特異対 $(\alpha_{n,i}, \beta_{n,i})$ $(i = 0, \ldots, k)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$(\alpha_{n,0}, \beta_{n,0}) = (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ とし，$i \geq 1$ で $(\alpha_{n,i-1}, \beta_{n,i-1})$ まで作れたとき，$(\alpha_{n,i-1}, x_i \beta_{n,i-1})$ または $(y_i \alpha_{n,i-1}, \beta_{n,i-1})$ が特異対であるから，特異対である方を $(\alpha_{n,i}, \beta_{n,i})$ とする．そして $(\alpha_{n,k}, \beta_{n,k})$ を (α_n, β_n) とする．

$n \equiv 8 \mod 8$ のときは，$x \Rightarrow y \in \beta_{n-1}$ なる $x \Rightarrow y$ の全体を $x_i \Rightarrow y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 3.23.4 により $(x_1 \cdots x_k \alpha_{n-1}, y_1 \cdots y_k \beta_{n-1})$ が特異対であるから，これを (α_n, β_n) とする．

定理 3.23.1 (α, β) **を** $\preccurlyeq$ **に関する特異対とすれば，算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関する** A **上のブール乖対** (P, Q) **で** $(\alpha, \beta) \subseteq (P, Q)$ **をみたすものが存在する．**

注意 3.23.1 この節冒頭の仮定により $\preccurlyeq$ が包容律に従うから，定理 3.22.8 と列便法によれば，$\preccurlyeq$ に関する特異対は $\preccurlyeq$ による A の有限な切断と同一視される．従って定理 3.23.1 は，**$\preccurlyeq$ による A の有限な各切断 (X, Y) に応じて，算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する A 上のブール乖対 (P, Q) で $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ をみたすものがある**ことを示し，従って定理 3.22.12 に含まれるが，(P, Q) を定理 3.22.12 ではツォルンの補題で構成したのに対して定理 3.23.1 では展開列で構成するのが興味深い．

証明　補題 3.23.5 により (α, β) の展開列 $\big((\alpha_n, \beta_n)\big)_{n=0,1,\ldots}$ が存在する．$P = \bigcup_{n\geq 0} \alpha_n$，$Q = \bigcup_{n\geq 0} \beta_n$ と定める．そうすると，展開列の条件 $(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha, \beta)$ により $(\alpha, \beta) \subseteq (P, Q)$ が成り立つ．展開列の条件によりまた，任意の n に対して (α_n, β_n) が特異対であって $\alpha_{n-1} \subseteq \alpha_n$，$\beta_{n-1} \subseteq \beta_n$ が成り立つから，補題 3.23.1 により任意の m, n に対して $\alpha_m \cap \beta_n = \emptyset$，つまり $P \cap Q = \emptyset$ が成り立つ．以下，展開列の残りの条件により (P, Q) が補題 3.22.1 のブール対律を成す法則 b1 – b8 に従うことを確かめる．

b1. $x \wedge y \in P$ なら，$n \equiv 1 \mod 8$, $x \wedge y \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$x, y \in \alpha_n$，従って $x, y \in P$ が成り立つ．

b2. $x \wedge y \in Q$ なら，$n \equiv 2 \mod 8$, $x \wedge y \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$x \in \beta_n$ または $y \in \beta_n$，従って $x \in Q$ または $y \in Q$ が成り立つ．

b3. $x \vee y \in P$ なら，$n \equiv 3 \mod 8$, $x \vee y \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$x \in \alpha_n$ または $y \in \alpha_n$，従って $x \in P$ または $y \in P$ が成り立つ．

b4. $x \vee y \in Q$ なら，$n \equiv 4 \mod 8$, $x \vee y \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$x, y \in \beta_n$，従って $x, y \in Q$ が成り立つ．

b5. $x^{\Diamond} \in P$ なら，$n \equiv 5 \mod 8$, $x^{\Diamond} \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$x \in \beta_n$，従って $x \in Q$ が成り立つ．

b6. $x^{\Diamond} \in Q$ なら，$n \equiv 6 \mod 8$, $x^{\Diamond} \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$x \in \alpha_n$，従って $x \in P$ が成り立つ．

b7. $x \Rightarrow y \in P$ なら，$n \equiv 7 \mod 8$, $x \Rightarrow y \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$x \in \beta_n$ または $y \in \alpha_n$，従って $x \in Q$ または $y \in P$ が成り立つ．

b8. $x \Rightarrow y \in Q$ なら，$n \equiv 8 \mod 8$, $x \Rightarrow y \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$x \in \alpha_n$ かつ $y \in \beta_n$，従って $x \in P$ かつ $y \in Q$ が成り立つ．

定義 3.23.1 A の元 z が $A^* \times A^*$ の元 (α, β) の**欠陥**であるとは，次の八条件のいずれかをみたすをことを言う．

1. $z = x \wedge y \in \alpha$ であるが，$x \notin \alpha$ または $y \notin \alpha$.
2. $z = x \wedge y \in \beta$ であるが，$x \notin \beta$ かつ $y \notin \beta$.
3. $z = x \vee y \in \alpha$ であるが，$x \notin \alpha$ かつ $y \notin \alpha$.
4. $z = x \vee y \in \beta$ であるが，$x \notin \beta$ または $y \notin \beta$.
5. $z = x^{\Diamond} \in \alpha$ であるが，$x \notin \beta$.
6. $z = x^{\Diamond} \in \beta$ であるが，$x \notin \alpha$.
7. $z = x \Rightarrow y \in \alpha$ であるが，$x \notin \beta$ かつ $y \notin \alpha$.
8. $z = x \Rightarrow y \in \beta$ であるが，$x \notin \alpha$ または $y \notin \beta$.

さらに，A が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して普遍汎代数系の場合に，(α, β) の欠陥の階数の総和を (α, β) の**欠陥度**と呼ぶ．ただし，(α, β) に欠陥が無いときは，(α, β) の欠陥度を 0 と定める．

問題 3.23.1 $\preccurlyeq$ に関する特異対 (α, β) と (α', β') が $(\alpha, \beta) \subseteq (\alpha', \beta')$ をみたすとき，$z \in \alpha \cup \beta$ なる z は，(α', β') の欠陥であれば (α, β) の欠陥でもある．従って (α', β') の欠陥は，(α, β) の欠陥であるか $\alpha' \cup \beta' - \alpha \cup \beta$ に属す．

略解　z が (α', β') のたとえば 8 番目の型の欠陥であったとしよう．つまり，$z = x \Rightarrow y \in \beta'$ であるが，$x \notin \alpha'$ または $y \notin \beta'$．そうすると，補題 3.23.1 により $\alpha' \cap \beta' = \emptyset$ なので $z \in \beta$ であって，$x \notin \alpha$ または $y \notin \beta$ が成り立つ．従って，z は (α, β) のやはり 8 番目の型の欠陥である．

定理 3.23.2 A **が算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関して普遍汎代数系の場合，**(α, β) **が** $\preccurlyeq$ **に関する特異対であれば，**$\preccurlyeq$ **に関する欠陥の無い特異対** (α', β') **で** $(\alpha, \beta) \subseteq (\alpha', \beta')$ **なるものが存在する．**

注意 3.23.2 この節冒頭の仮定により $\preccurlyeq$ が包容律に従うから，定理 3.22.8 と列便法によれば，$\preccurlyeq$ に関する特異対は $\preccurlyeq$ による A の有限な切断と同一視される．また (α', β') は，欠陥が無いから A 上のブール対であり，$\preccurlyeq$ に関して特異であるから補題 3.23.1 により $\alpha' \cap \beta' = \emptyset$ をみたす．従って定理 3.23.2 は，A が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して普遍汎代数系であるという仮定の下で，$\preccurlyeq$ **による A の有限な各切断** (X, Y) **に応じて，算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関する A 上の有限なブール乖対** (P, Q) **で** $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ **をみたすものがある**ことを含意し，従って定理 3.23.1 を含み定理 3.22.12 に含まれない．(P, Q) が有限なことの意義はともかく，(P, Q) を定理 3.22.12 と定理 3.23.1 ではツォルンの補題と展開列で構成したのに対して定理 3.23.2 では欠陥を減らして構成するのが興味深い．

証明　欠陥の階数は 1 以上であるから，欠陥度が 0 なら欠陥は無い．従って，(α, β) の欠陥度 k が 0 なら，この補題は成り立つ．そこで，k についての帰納法を使い，$k \geq 1$ と仮定する．そうすると，(α, β) に欠陥 z がある．この z から欠陥度が k より小さい特異対 (α, β) で $\alpha \subseteq \alpha'$，$\beta \subseteq \beta'$ なるものを作って帰納法による証明を完成する．

1. $z = x \wedge y \in \alpha$ **であるが** $x \notin \alpha$ **または** $y \notin \alpha$ **の場合：**$xy\alpha \preccurlyeq \beta$ とすれば，強下限律により $x \wedge y, \alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立ち，$x \wedge y \in \alpha$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って $(xy\alpha, \beta)$ は特異対である．また，次の段落に記す理由で z はこの対の欠陥ではなく，問題 3.23.1 により，$(xy\alpha, \beta)$ の欠陥であって (α, β) の欠陥でないものは x, y しかないから，これらが $(xy\alpha, \beta)$ の欠陥であったとしても，$(xy\alpha, \beta)$ の欠陥度は k より小さい．そこで，(α', β') として $(xy\alpha, \beta)$ をとればいい．

A は仮定により普遍汎代数系であるから，定理 3.8.5 により有基代数系である．このことから，z が $(xy\alpha, \beta)$ の欠陥でないことが次のようにして分かる．$z = x \wedge y$ であるから，A が有基代数系であることにより，$z = x' \vee y'$，$z = x'^{\Diamond}$，$z = x' \Rightarrow y'$ なる x', y' は存在せず，$z = x' \wedge y'$ なら $x' = x$，$y' = y$ が成り立つ．また，補題 3.23.1 により $\alpha \cap \beta = \emptyset$ なので，$z \notin \beta$ も成り立つ．従って，z が $(xy\alpha, \beta)$ の欠陥となり得るのは $x \notin \{x, y\} \cup \alpha$ または $y \notin \{x, y\} \cup \alpha$ の場合であるが，こういう場合はもちろんない．なお，この段落の類の説明は以下では省略する．

2. $z = x \wedge y \in \beta$，$x \notin \beta$，$y \notin \beta$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq x\beta$ かつ $\alpha \preccurlyeq y\beta$ とすれば，強下限律により $\alpha \preccurlyeq x \wedge y, \beta$ が成り立ち，$x \wedge y \in \beta$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って，$(\alpha, x\beta)$ と $(\alpha, y\beta)$ のどちらかは特異対である．また，z はこれらの対の欠陥ではないから，$(\alpha, x\beta)$ と $(\alpha, y\beta)$ の欠陥度は共に k より小さい．そこで，(α', β') として $(\alpha, x\beta)$ または $(\alpha, y\beta)$ をとればいい．

3. $z = x \vee y \in \alpha,\ x \notin \alpha,\ y \notin \alpha$ **の場合：**$x\alpha \preccurlyeq \beta$ かつ $y\alpha \preccurlyeq \beta$ とすれば，強上限律により $x \vee y, \alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立ち，$x \vee y \in \alpha$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って，$(x\alpha, \beta)$ と $(y\alpha, \beta)$ のどちらかは特異対である．また，z はこれらの対の欠陥ではないから，$(x\alpha, \beta)$ と $(y\alpha, \beta)$ の欠陥度は共に k より小さい．そこで，(α', β') として $(x\alpha, \beta)$ または $(y\alpha, \beta)$ をとればいい．

4. $z = x \vee y \in \beta$ **であるが** $x \notin \beta$ **または** $y \notin \beta$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq xy\beta$ とすれば，強上限律により $\alpha \preccurlyeq x \vee y, \beta$ が成り立ち，$x \vee y \in \beta$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って，$(\alpha, xy\beta)$ は特異対である．また，z はこの対の欠陥ではないから，$(\alpha, xy\beta)$ の欠陥度は k より小さい．そこで，(α', β') として $(\alpha, xy\beta)$ をとればいい．

5. $z = x^{\Diamond} \in \alpha,\ x \notin \beta$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq x\beta$ とすれば，強両補律により $x^{\Diamond}\alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立ち，$x^{\Diamond} \in \alpha$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って，$(\alpha, x\beta)$ は特異対である．また，z はこの対の欠陥ではないから，$(\alpha, x\beta)$ の欠陥度は k より小さい．そこで，(α', β') として $(\alpha, x\beta)$ をとればいい．

6. $z = x^{\Diamond} \in \beta,\ x \notin \alpha$ **の場合：**$x\alpha \preccurlyeq \beta$ とすれば，強両補律により $\alpha \preccurlyeq x^{\Diamond}\beta$ が成り立ち，$x^{\Diamond} \in \beta$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って，$(x\alpha, \beta)$ は特異対である．また，z はこの対の欠陥ではないから，$(x\alpha, \beta)$ の欠陥度は k より小さい．そこで，(α', β') として $(x\alpha, \beta)$ をとればいい．

7. $z = x \Rightarrow y \in \alpha,\ x \notin \beta,\ y \notin \alpha$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq x\beta$ かつ $y\alpha \preccurlyeq \beta$ とすれば，強三導律により $x \Rightarrow y, \alpha \preccurlyeq \beta$ が成り立ち，$x \Rightarrow y \in \alpha$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って，$(\alpha, x\beta)$ と $(y\alpha, \beta)$ のどちらかは特異対である．また，z はこれらの対の欠陥ではないから，$(\alpha, x\beta)$ と $(y\alpha, \beta)$ の欠陥度は共に k より小さい．そこで，(α', β') として $(x\alpha, \beta)$ をとればいい．

8. $z = x \Rightarrow y \in \beta$ **であるが** $x \notin \alpha$ **または** $y \notin \beta$ **の場合：**$x\alpha \preccurlyeq y\beta$ とすれば，強三導律により $\alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta$ が成り立ち，$x \Rightarrow y \in \beta$ であるので置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq \beta$ となり，(α, β) が特異対であることに反する．従って，$(x\alpha, y\beta)$ は特異対である．また，z はこの対の欠陥ではないから，$(x\alpha, y\beta)$ の欠陥度は k より小さい．そこで，(α', β') として $(x\alpha, y\beta)$ をとればいい．

定理 3.22.13 系の定理 3.23.1 または定理 3.23.2 による証明　注意 3.23.1 と注意 3.23.2 を踏まえて定理 3.22.13 の証明を一部変えるに過ぎない．すなわち任意の $(X, Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq}$ をとると，定理 3.23.1 または定理 3.23.2 によりブール乖対 (P, Q) で $(X, Y) \subseteq (P, Q)$ なるものがあり，定理 3.22.6 により A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $(P, Q) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なるものがある．この f が $(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ をみたす．こういう f は，定理 3.22.2 系と定理 3.22.7 系により $\preccurlyeq_{X,Y} \supseteq \preccurlyeq_f$ と $(X, Y) \in \mathfrak{C}_{\preccurlyeq_f}$ をみたす．

3.24　界と閉部分界

$ 第 3.1 節と第 3.2 節で定義した代数系とその台部分系の概念は，算法個々を捨象することにより，界とその閉部分界の概念へと拡張される．

すなわちまず，集合 A と A^*, A 間の関係 R の組み (A, R) を**界**と呼ぶ．そして A と R をそれぞれこの界の**台**（または**台集合**）と**関係**（または**広義変換**）と呼ぶ．代数系と同様に界もその台のみで表すことがある．なお以後，特に断らずとも，第 3.19 節以降使ってきた AZ 記法や列便法を使う．

例 3.24.1 集合 A 上の算法 ρ に対し，A^*, A 間の関係 R で

$$x_1 \cdots x_n \, R \, y \iff \rho(x_1, \ldots, x_n) = y$$

なるものを ρ の**関係化**と呼ぶ．より一般に A 上の算法族 $(\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，A^*, A 間の関係 R で

$$x_1 \cdots x_n \, R \, y \iff \rho_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = y \text{ なる } \lambda \in \Lambda \text{ がある}$$

なるものを $(\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**関係化**と呼び，さらに界 (A, R) を代数系 $(A, (\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ の**界化**と呼ぶ．　**終**

次に，B が界 (A, R) の台 A の部分集合であるとき，B と R の $B^* \times B$ への制限 $R' = R|_{B^*\times B}$ の組み (B, R') は界である．これを (A, R) の**粗部分界**と呼ぶ．B がさらに

$$x_1, \ldots, x_n \in B,\ y \in A,\ x_1 \cdots x_n \, R \, y \implies y \in B \tag{3.24.1}$$

なる条件をみたすとき，すなわち列便法で略記すれば

$$\alpha \subseteq B,\ y \in A,\ \alpha \, R \, y \implies y \in B \tag{3.24.1}$$

なる条件をみたすとき，(B, R') を (A, R) の**閉部分界**と呼んだり，B を A の R **閉集合**と呼んだり，B **は** R **で閉じている**とか，R **は** B **を閉ざす**とかと言ったりする．

なお,「$\varepsilon \subseteq B$」なる条件は常に成り立つ．従って，(3.24.1) は次の条件を含意する．

$$y \in A,\ \varepsilon \, R \, y \implies y \in B$$

粗部分界も閉部分界も界であるので，それを台のみで表示することもある．また，閉部分界は条件 (3.24.1) をみたす部分集合 B によって定まるので，そういう部分集合のことを閉部分界と呼ぶこともある．

論理学的文脈では，A^*, A 間の関係 R を A 上の**論理**と呼び，界 (A, R) の閉部分界を R **理論**と呼ぶ（第 3.26 節参照）．従って集合 A を台とする界についての理論は，A 上の論理 R と R 理論についての理論に他ならない．

問題 3.24.1 代数系 A の台部分系は，A の界化の閉部分界に他ならない．

問題 3.24.2 界 $(A, \emptyset)$ においては，A の任意の部分集合が閉部分界である．界 $(A, A^* \times A)$ においては，閉部分界は A のみである．

問題 3.24.3 (✓) 集合 A 上の相等関係 $=$ を A^*, A 間の関係とみなして作った界 $(A, =)$ においては，A の任意の部分集合が閉部分界である．

以下，そうでない旨断らない限り，(A, R) を界として，これについての基本的な事柄を述べる． その八割は第 3.2 節で問題として述べた代数系についての事柄の拡張であるが，残りの二割は，代数系を界に一般化して始めて見出し得る事柄であり，それが論理学で核心の役割を演ずる．

定理 3.24.1 (問題 3.2.3 参照) **A の閉部分界の全体は A に関して交閉的である．特に，A はそれ自身が A の閉部分界である．**

証明　(3.24.1) は $B = A$ なら成り立つから，A は A の閉部分界である．そこで，B を A の閉部分界の族 $(B_i)_{i\in I}$ の交わりとする $(I \neq \emptyset)$．$\alpha \subseteq B$, $y \in A$, $\alpha \, R \, y$ であれば，各 $i \in I$ について，$\alpha \subseteq B_i$ であって B_i が R で閉じていることにより $y \in B_i$ が成り立つから，$y \in B$ が成り立つ．従って B も R で閉じている．　**終**

この定理により，A の任意の部分集合 S に対して，S を含む最小の A の閉部分界が存在する．S を含む A の閉部分界すべての交わりがそれである．これを，(A, R) における S の**界包**とか S の R **包**とか (A, R) の S によって**生成**される閉部分界とかと呼び，通常は $[S]$ で表すが，A や R を明示する必要があるときは $[S]_A$ や $[S]_R$ や $[S]_{(A,R)}$ で表す．また，$A = [S]$ のとき，A は S で**生成**されるとか S は A の**生成系**であるとか言う．その理由は，定理 3.24.6 – 定理 3.24.8 を見れば分かるであろう．

問題 3.24.4 代数系 A における部分集合 S の算包は，A の界化における S の界包に等しい．

定理 3.24.2 (問題 3.2.1 参照) **A の任意の部分集合 B, C について次の二つのことが成り立つ．**

1. **C が A の閉部分界なら，$C \cap B$ は粗部分界 B の閉部分界である．**
2. **B が A の閉部分界で C が B の閉部分界なら，C は A の閉部分界である．**

証明　1. $\alpha \subseteq C \cap B$, $y \in B$, $\alpha R y$ なら，$\alpha \subseteq C$, $y \in B$, $\alpha R y$ であって C が A の閉部分界であることにより $y \in C \cap B$ が成り立つ．従って $C \cap B$ は B の閉部分界である．

2. $\alpha \subseteq C$, $y \in A$, $\alpha R y$ なら，まず $\alpha \subseteq B$, $y \in A$, $\alpha R y$ であって B が A の閉部分界であることにより $y \in B$ が成り立ち，次に $\alpha \subseteq C$, $y \in B$, $\alpha R y$ であって C が B の閉部分界であることにより $y \in C$ が成り立つ．従って C は A の閉部分界である．

定理 3.24.3 (問題 3.2.4 参照) **$S \subseteq B \subseteq A$ なら，$[S]_B \subseteq [S]_A$ が成り立ち，特に B が A の閉部分界の場合には $[S]_B = [S]_A$ が成り立つ．**

証明　定理 3.24.2 により $[S]_A \cap B$ は B の閉部分界であって S を含むから，$[S]_B \subseteq [S]_A \cap B \subseteq [S]_A$ が成り立つ．B が閉部分界なら，やはり定理 3.24.2 により $[S]_B$ は A の閉部分界であって S を含むから，$[S]_A \subseteq [S]_B$ が成り立つ．　**終**

A^*, A 間の関係は $A^* \times A$ の部分集合であるから，それらの包含関係 $\subseteq$ や和 $\cup$ を云々することができる．このことを踏まえて以下のことを述べる．

定理 3.24.4 (問題 3.2.4 参照) **A^*, A 間の関係 R' が $R' \subseteq R$ をみたせば，(A, R) の閉部分界は界 (A, R') の閉部分界でもあり，従って，A の任意の部分集合 S に対して $[S]_{R'} \subseteq [S]_R$ が成り立つ．**

証明　B を (A, R) の閉部分界とする．$\alpha \subseteq B$, $y \in A$, $\alpha R' y$ であれば，$R' \subseteq R$ なることにより $\alpha R y$ が成り立ち，従って B が R で閉じていることにより $y \in B$ が成り立つ．つまり B は R' で閉じているから，(A, R') の閉部分界である．$[S]_R$ は (A, R) の閉部分界であるから (A, R') の閉部分界でもあり，しかも S を含むから，$[S]_{R'} \subseteq [S]_R$ が成り立つ．

定理 3.24.5 **A^*, A 間の関係の集合 $\mathcal{R}$ に対して $R = \bigcup \mathcal{R}$ の場合には（$\mathcal{R} = \emptyset$ のときは第 3.9.3 項の上限の定義により R は空関係である），A の部分集合 B が (A, R) の閉部分界であるためには，任意の $R' \in \mathcal{R}$ に対して B が界 (A, R') の閉部分界であることが必要十分である．**

証明　定理 3.24.4 により (A, R) の閉部分界は，任意の $R' \in \mathcal{R}$ に対して (A, R') の閉部分界である．そこで逆に，A の部分集合 B が任意の $R' \in \mathcal{R}$ に対して (A, R') の閉部分界であるとする．そうすると $\alpha \subseteq B$, $y \in A$, $\alpha R y$ であれば，$\alpha R' y$ なる $R' \in \mathcal{R}$ があって B が R' で閉じているから，$y \in B$ が成り立つ．つまり，B は (A, R) の閉部分界である．

問題 3.24.5 (✓ **問題 3.2.5 参照**) $A_{R,1} = \{y \in A \mid \alpha\, R\, y$ なる $\alpha \in A^*$ がある $\}$ と定めるとき（これは定理 3.24.7 で定義する A の 1 圏に等しい），$A_{R,1} \subseteq B \subseteq A$ なら，B は A の閉部分界である．

問題 3.24.6 (✓ **問題 3.2.6 参照**) $S \subseteq A$, $R' \subseteq R$ なら $[S]_R \subseteq [S \cup A_{R-R',1}]_{R'}$ が成り立つ．従って特に $[S]_R \subseteq S \cup A_{R,1}$ が成り立つ（このことは定理 3.24.6 と定理 3.24.7 により精密化される）．

定理 3.24.6 (**問題 3.2.7 参照**) **A の任意の部分集合 S に対して，A の部分集合 S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ を次のように帰納的に定め，S_n を S の<u>n 包</u>と呼び，$S_0, S_1, \ldots$ を S の<u>包列</u>と呼ぶ．すなわち，まず $S_0 = S$ と定め，$n \geq 1$ であって S_{n-1} が定められたとき，**

$$S_n = S_{n-1} \cup \{y \in A \mid \alpha\, R\, y \text{ なる } \alpha \subseteq S_{n-1} \text{ がある}\}$$

と定める．このとき $[S]_R = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ が成り立つ．また，S が A の閉部分界であるためには，$S_1 \subseteq S$ なることも $S_1 = S$ なることも必要十分である．

注意 3.24.1 $n \geq 1$ なら，$\varepsilon \subseteq S_{n-1}$ は成り立つので，n 包 S_n は $\varepsilon\, R\, y$ なる $y \in A$ をすべて含む．

注意 3.24.2 (✓) 実は，$n = 1, 2, \ldots$ について $S_n = S \cup \{y \in A \mid \alpha\, R\, y$ なる $\alpha \subseteq S_{n-1}$ がある $\}$，従って $[S]_R = S \cup \{y \in A \mid$ ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha\, R\, y$ なる $\alpha \subseteq S_{n-1}$ がある $\}$ が成り立つ．

証明　定義により $S_1 = S \cup \{y \in A \mid \alpha\, R\, y$ なる $\alpha \subseteq S$ がある $\}$ であるから，$S_1 \subseteq S$ と $S_1 = S$ は同等であり，$S_1 \subseteq S$ なるためには，「$\alpha \subseteq S$, $y \in A$, $\alpha\, R\, y \implies y \in S$」なる条件のみたされることが必要十分である．この条件は S が閉部分界であることと同等である．

$S_0 = S \subseteq [S]_R$ が成り立つ．そこで，任意の n に対して $S_n \subseteq [S]_R$ なることを，n についての帰納法で示す．そのために，任意の $y \in S_n$ $(n \geq 1)$ をとって $y \in [S]_R$ を示す．$y \in S_{n-1}$ なら，帰納法の仮定により $y \in [S]_R$ が成り立つ．そこで，$y \notin S_{n-1}$ と仮定する．そうすると，$\alpha\, R\, y$ なる $\alpha \subseteq S_{n-1}$ があり，帰納法の仮定により $\alpha \subseteq [S]_R$ が成り立つから，$[S]_R$ が R で閉じていることにより $y \in [S]_R$ が確かに成り立つ．

以上により，$B = \bigcup_{n \geq 0} S_n$ と定めれば，$S \subseteq B \subseteq [S]_R$ が成り立つ．従って $[S]_R = B$ を示すには，B が閉部分界であることを示せばいい．そのために，$x_1, \ldots, x_m \in B$, $y \in A$, $x_1 \cdots x_m\, R\, y$ なら $y \in B$ であることを示す．まず $m = 0$ の場合には，$\varepsilon\, R\, y$ であるから，注意 3.24.1 により $y \in S_1$ が成り立つ．次に $m \geq 1$ の場合には，$i = 1, \ldots, m$ に対して $x_i \in S_{n_i}$ なる非負整数 n_i があり，定義により $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots$ が成り立つので，$n = \max\{n_1, \ldots, n_m\} + 1$ と定めれば $y \in S_n$ が成り立つ．いずれの場合にも，$y \in B$ が確かに成り立つ．

問題 3.24.7 A の部分集合 S の包列 $S_0, S_1, \ldots$ において $S_n = S_{n+1}$ なる番号 n があれば，$S_n = S_{n+1} = \cdots$，従って $[S]_R = S_n$ が成り立つ．

定理 3.24.7 (**問題 3.2.8 参照**) **A の任意の部分集合 S に対して，A の部分集合 S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ を次のように帰納的に定め，S_n を S の<u>n 圏</u>と呼び，$S_0, S_1, \ldots$ を S の<u>圏列</u>と呼ぶ．すなわち，まず $S_0 = S$ と定め，$n \geq 1$ であって $S_0, \ldots, S_{n-1}$ が定められたとき，次の条件をみたす $y \in A$ の全体を S_n と定める．**

非負整数 $n_1, \ldots, n_m$ と S_{n_i} の元 x_i $(i = 1, \ldots, m)$ で
$x_1 \cdots x_m\, R\, y$, $n = \sum_{i=1}^m n_i + 1$ をみたすものがある

このとき，$[S]_R = \bigcup_{n\geq 0} S_n$ **が成り立つ．また，**S **が** A **の閉部分界であるためには，**$S_1 \subseteq S$ **なることが必要十分である．**

注意 3.24.3 $S_n\,(n \geq 1)$ の定義において $m = 0$ の場合には，$x_1 \cdots x_m\,R\,y$ は $\varepsilon\,R\,y$ を意味し，$n = \sum_{i=1}^{m} n_i + 1$ は $n = 1$ を意味する．従って，$\varepsilon\,R\,y$ なる $y \in A$ はすべて 1 圏 S_1 に含まれる．

証明　定義により $S_1 = \{y \in A \mid \alpha\,R\,y$ なる $\alpha \subseteq S$ がある $\}$ であるから，$S_1 \subseteq S$ なるためには，「$\alpha \subseteq S,\ y \in A,\ \alpha\,R\,y \implies y \in S$」なる条件のみたされることが必要十分であり，この条件は S が閉部分界であることと同等である．

$S_0 = S \subseteq [S]_R$ が成り立つ．そこで，任意の n に対して $S_n \subseteq [S]_R$ なることを，n についての帰納法で示す．そのために，任意の $y \in S_n\ (n \geq 1)$ をとって $y \in [S]_R$ を示す．$[S]_R$ が R で閉じているから，$\varepsilon\,R\,y$ なら $y \in [S]_R$ が成り立つ．そこで $\varepsilon\,R\,y$ でないと仮定する．そうすると，非負整数 $n_1, \ldots, n_m$ と S_{n_i} の元 $x_i\ (i = 1, \ldots, m)$ で $x_1 \cdots x_m\,R\,y,\ n = \sum_{i=1}^{m} n_i + 1$ をみたすものがあり $(m \geq 1)$，帰納法の仮定により $x_1, \ldots, x_m \in [S]_R$ が成り立つから，$[S]_R$ が R で閉じていることにより $y \in [S]_R$ が確かに成り立つ．

以上により，$B = \bigcup_{n\geq 0} S_n$ と定めれば，$S \subseteq B \subseteq [S]_R$ が成り立つ．従って $[S]_R = B$ を示すには，B が閉部分界であることを示せばいい．そのために，$x_1, \ldots, x_m \in B,\ y \in A,\ x_1 \cdots x_m\,R\,y$ なら $y \in B$ であることを示す．まず $m = 0$ の場合には，$\varepsilon\,R\,y$ であるから，注意 3.24.3 により $y \in S_1$ が成り立つ．次に $m \geq 1$ の場合には，$i = 1, \ldots, m$ に対して $x_i \in S_{n_i}$ なる非負整数 n_i があり，$n = \sum_{i=1}^{m} n_i + 1$ と定めれば $y \in S_n$ が成り立つ．いずれの場合にも，$y \in B$ が確かに成り立つ．

問題 3.24.8 (✓) S が A の部分集合なら，S の n 圏は S の n 包に含まれる $(n = 0, 1, \ldots)$．

定理 3.24.8 (問題 3.2.9 参照) A **の元** y **と部分集合** S **が** $y \in [S]_R$ **をみたすためには，**A **の元の列** $x_1, \ldots, x_n\ (n \geq 1)$ **で** $x_n = y$ **をみたして各** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **について次の二条件のいずれかをみたすものの存在することが必要十分である（こういう列を** y **の**<u>S **生成列**</u>**と呼ぶ）．**

1. $x_i \in S$　　　**2.** $x_{j_1} \cdots x_{j_k}\,R\,x_i$ **なる** $i - 1$ **以下の番号** $j_1, \ldots, j_k\ (k \geq 0)$ **が存在する．**

注意 3.24.4 条件 2 において $k = 0$ の場合には，$x_{j_1} \cdots x_{j_k}\,R\,x_i$ は $\varepsilon\,R\,x_i$ を意味する．従って x_1 は，S に属すか $\varepsilon\,R\,x_1$ をみたすかのどちらかである．

証明　$y \in A$ に S 生成列 $x_1, \ldots, x_n$ があれば $y \in [S]_R$ であることを，n についての帰納法で示す．$n = 1$ なら，$y = x_1$ なので $y \in S$ または $\varepsilon\,R\,y$ が成り立つ．$y \in S$ または $\varepsilon\,R\,y$ なら，$S \subseteq [S]_R$ なることと $[S]_R$ が R で閉じていることにより $y \in [S]_R$ が成り立つ．そこで $n > 1$ とし，$y \in S$ でも $\varepsilon\,R\,y$ でもないとする．そうすると，$x_{j_1} \cdots x_{j_k}\,R\,y$ なる $n - 1$ 以下の番号 $j_1, \ldots, j_k\ (k \geq 1)$ が存在する．$i = 1, \ldots, n - 1$ に対しても $x_1, \ldots, x_i$ は x_i の S 生成列であるから，帰納法の仮定により $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k} \in [S]_R$ が成り立ち，従って $y \in [S]_R$ が成り立つ．

$y \in A$ が S の n 包 S_n に属せば y に S 生成列のあることを，n についての帰納法で示す．$y \in S$ または $\varepsilon\,R\,y$ なら y 自身が y の S 生成列であるから，$y \in S$ でも $\varepsilon\,R\,y$ でもないと仮定する．そうすると $n \geq 1$ であり，$y \in S_{n-1}$ であるか，または $x_1 \cdots x_m\,R\,y$ なる $x_1, \ldots, x_m \in S_{n-1}$ がある．前の場合には，帰納法の仮定により y に S 生成列がある．後の場合には，帰納法の仮定により $x_1, \ldots, x_m$ のそれぞれに S 生成列があり，それらを繋げて最後に y を付け加えた列は y の S 生成列である．

定理 3.24.9 (問題 3.2.10 参照) **A の部分集合 S, U が $U \subseteq S$ をみたせば，S, U の包列と圏列それぞれについて $U_n \subseteq S_n$ が成り立ち $(n = 0, 1, \ldots)$，従って $[U]_R \subseteq [S]_R$ が成り立つ．**

証明　代表的に包列について考える．まず $U_0 = U \subseteq S = S_0$ が成り立つ．そこで，任意の n に対して $U_n \subseteq S_n$ なることを，n についての帰納法で示す．そのために，任意の $y \in U_n$ $(n \geq 1)$ をとって $y \in S_n$ なることを示す．$y \in U_{n-1}$ なら，帰納法の仮定と $S_{n-1} \subseteq S_n$ なることにより，$y \in S_n$ は成り立つ．そこで $y \in U_{n-1}$ でないと仮定する．そうすると，$\alpha R y$ なる $\alpha \subseteq U_{n-1}$ があって，帰納法の仮定により $\alpha \subseteq S_{n-1}$ が成り立つから，$y \in S_n$ が確かに成り立つ．なお $[U]_R \subseteq [S]_R$ だけなら，$[S]_R$ が U を含んで R で閉じていることから直ちに分かる．

定理 3.24.10 (問題 3.2.12 参照) **A の部分集合 S の n 包 S_n について $S_n = \bigcup_{U \in \mathcal{P}'S} U_n$ が成り立つ．ただし U_n は U の n 包である $(n = 0, 1, \ldots)$．圏列についても同様のことが成り立つ．従って $[S]_R = \bigcup_{U \in \mathcal{P}'S} [U]_R$ が成り立つ．**

証明　定理 3.24.9 により，証明すべき式 $S_n = \bigcup_{U \in \mathcal{P}'S} U_n$ の右辺は左辺に含まれる．左辺が右辺に含まれることを n についての帰納法で示そう．$S = \bigcup_{s \in S} \{s\}$ であるから，$n = 0$ のときはいい．そこで $n \geq 1$ とし，任意の $y \in S_n$ をとり，$y \in U_n$ なる $U \in \mathcal{P}'S$ があることを示す．まず包列の場合を考える．この場合，$y \in S_{n-1}$ なら，帰納法の仮定により $y \in U_{n-1}$ なる $U \in \mathcal{P}'S$ がある．そこで $y \notin S_{n-1}$ とする．そうすると，$\alpha R y$ なる $\alpha \subseteq S_{n-1}$ がある．$\alpha = \varepsilon$ なら，注意 3.24.1 により，任意の $U \in \mathcal{P}'S$ に対して $y \in U_n$ が成り立つ．そこで $\alpha = x_1 \cdots x_m$ $(m \geq 1)$ とする．そうすると，帰納法の仮定により $x_i \in {U^{(i)}}_{n-1}$ なる $U^{(i)} \in \mathcal{P}'S$ がある $(i = 1, \ldots, m)$．$U = \bigcup_{i=1}^m U^{(i)}$ と定めれば，$U \in \mathcal{P}'S$ であって，定理 3.24.9 により ${U^{(i)}}_{n-1} \subseteq U_{n-1}$ $(i = 1, \ldots, m)$，従って $\alpha \subseteq U_{n-1}$，従って $y \in U_n$ が成り立つ．次に圏列の場合を考える．この場合，$x_1 \cdots x_m R y$，$x_i \in S_{n_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$，$n = \sum_{i=1}^m n_i + 1$ となっている．$m = 0$ なら，注意 3.24.3 により $n = 1$ であって，任意の $U \in \mathcal{P}'S$ に対して $y \in U_1$ が成り立つ．そこで $m \geq 1$ と仮定する．そうすると帰納法の仮定により，$x_i \in {U^{(i)}}_{n_i}$ なる $U^{(i)} \in \mathcal{P}'S$ がある $(i = 1, \ldots, m)$．$U = \bigcup_{i=1}^m U^{(i)}$ と定めれば，$U \in \mathcal{P}'S$ であって，定理 3.24.9 により ${U^{(i)}}_{n_i} \subseteq U_{n_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$，従って $y \in U_n$ が成り立つ．

定理 3.24.11 **D が A の部分集合であれば，A の各部分集合 X に界包 $[X \cup D]_R$ を対応させる写像は $\mathcal{P}A$ 上の有限的な閉写であり，その留域は A の D を含む閉部分界の全体に等しく，これは A に関して交閉的かつ概有限である（問題 3.18.23 と問題 3.26.30 参照）．**

証明　各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して $[X]_R$ は X を含む最小の A の閉部分界であるから，定理 3.18.1 により，写像 $X \mapsto [X]_R$ は閉写であり，その留域は A の閉部分界の全体に等しい．また，定理 3.24.10 によりこの写像は有限的である．従って問題 3.18.22 により，写像 $X \mapsto [X \cup D]_R$ も有限的な閉写であり，その留域は A の D を含む閉部分界の全体に等しい．また問題 3.18.35 と問題 3.18.12 により，この留域は A に関して交閉的かつ概有限である．

定理 3.24.12 (注意 3.18.5 参照) **C と D を A の部分集合とする．このとき，A の閉部分界 B で $B \cap C = \emptyset$ と $B \supseteq D$ をみたすものがあれば，その中に包含関係 $\subseteq$ に関して極大のものがある．**

証明　定理 3.24.11 と問題 3.18.3 と問題 3.18.4 により，$A - C \supseteq B \supseteq D$ をみたす A の閉部分界 B の全体は，包含関係 $\subseteq$ に関して帰納的である．従ってそういう閉部分界があれば，ツォルンの補題により，その中に極大元がある．　**終**

界についての以上の概念や命題は，対応物が代数系についても存在する．しかし以下の命題や概念は，代数系を界に一般化して始めて見出し得るものであり，それが論理学で核心の役を演ずる．

定理 3.24.13 **R が偏束律に従うなら（こういう界 (A, R) を偏束界と呼ぶ），A の任意の部分集合 S に対し，S の界包 $[S]_R$ は 1 圏 S_1 に等しい．すなわち，A の元 y が $y \in [S]_R$ をみたすためには，S の有限個の元 $s_1, \dots, s_k$ $(k \geq 0)$ で $s_1 \cdots s_k \, R \, y$ なるもののあることが必要十分である．**

注意 3.24.5 「十分」であることを示すためには偏束律は不要であり,「必要」であることを示すためにも偏付加律と偏巾等律は不要である．なお，問題 3.24.16 はこの定理の精密化を含む．

証明　R が偏束律に従わずとも，S_1 は $[S]_R$ に含まれる．逆に $[S]_R \subseteq S_1$ なることを示すためには，S_1 が S を含み R で閉じていることを示せばいい．$y \in S$ なら反復律により $y \, R \, y$ が成り立つから，S_1 は確かに S を含む．そこで，$x_1, \dots, x_m \in S_1$，$y \in A$，$x_1 \cdots x_m \, R \, y$ と仮定する．そうすると，S の元 $s_{i1}, \dots, s_{ik_i}$ で $s_{i1} \cdots s_{ik_i} \, R \, x_i$ なるものがある $(i = 1, \dots, m)$．s_{ij} $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, k_i)$ を i, j の辞書式直積順序で並べたものを $s_1, \dots, s_k$ で表す（問題 3.9.6 参照）．そうすると，$x_1 \cdots x_m \, R \, y$ と $s_{i1} \cdots s_{ik_i} \, R \, x_i$ $(i = 1, \dots, m)$ に偏置換律と偏消去律を繰り返し使うことにより，$s_1 \cdots s_k \, R \, y$，従って $y \in S_1$ なることが分かる．つまり，S_1 は確かに R で閉じている．

系　**R が偏束律に従うなら，任意の $\alpha \in A^*$ に対して $[\alpha]_R = \{y \in A \mid \alpha \, R \, y\}$ が成り立つ．**

証明　α の有限個の元 $s_1, \dots, s_k$ $(k \geq 0)$ で $s_1 \cdots s_k \, R \, y$ なるものがあれば，R の偏付加律と偏巾等律と偏置換律により $\alpha \, R \, y$ が成り立つからである．

定理 3.24.14 **偏束界 (A, Q) と界 (A, R) についての次の三条件は同等である．**

1. $R \subseteq Q$
2. **A の任意の部分集合 S に対して $[S]_R \subseteq [S]_Q$ が成り立つ．**
3. **界 (A, Q) の閉部分界は界 (A, R) の閉部分界でもある．**

証明　定理 3.24.4 により条件 1 から条件 2, 3 が導かれる．定理 3.24.11 により写像 $X \mapsto [X]_Q$ は $\mathcal{P}A$ 上の（有限的な）閉写であり，その留域は (A, Q) の閉部分界全体に等しい．R についても同様である．従って定理 3.18.1 により条件 2, 3 は同等である．そこで，条件 2 がみたされると仮定する．そうすると，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ が $\alpha \, R \, y$ をみたせば，y は α の 1 圏に属すから $y \in [\alpha]_R$，従って $y \in [\alpha]_Q$，従って定理 3.24.13 系により $\alpha \, Q \, y$ となって，条件 1 がみたされる．

問題 3.24.9 定理 3.24.14 の同等な三条件は，条件 2 において「部分集合」を「有限部分集合」に書き換えて得られる条件とも同等である．

略解　問題 3.18.12 による．

定義 3.24.1 界 (A, R) に対して，A の部分集合 A_R を

$$A_R = \{y \in A \mid \varepsilon \, R \, y\}$$

と定め，これを (A, R) の**核**または A の R **核**と呼ぶ（これは名前の通りに核心の役を実際に演ずる）．そして，$A_R = \emptyset$ であるとき，(A, R) は**特異**であるとか R は**特異**であるとか言う．

定理 3.24.15 界 (A, R) の核 A_R について次のことが成り立つ．

1. A_R **は** $\emptyset$ **の 1 包にも 1 圏にも等しい．従って** $A_R \subseteq [\emptyset]_R$**．つまり，**$A_R$ **は** (A, R) **の閉部分界すべてに含まれる．**

2. (A, R) **が特異であるためには，**$[\emptyset]_R = \emptyset$ **なることが，つまり** $\emptyset$ **が** (A, R) **の閉部分界であることが必要十分である．**

3. R **が偏束律に従うなら，**$A_R = [\emptyset]_R$**，つまり** A_R **は** (A, R) **の最小の閉部分界に等しい．**

証明　定理 3.24.6 と定理 3.24.7 およびその証明冒頭に示したことから，A_R は $\emptyset$ の 1 包 $\emptyset_1$ にも 1 圏にも等しく，従って $[\emptyset]_R$ に含まれる．問題 3.24.7 により，$\emptyset_1 = \emptyset$ なるためには $[\emptyset]_R = \emptyset$ なることが必要十分である．結論 3 は，定理 3.24.13 または定理 3.24.13 系から得られる．

定理 3.24.16 界 (A', R') **と** (A, R) **が** $A \subseteq A'$ **と** $R = R'|_{A^* \times A}$ **をみたすとき（このとき，**(A', R') **は** (A, R) **の<u>拡大</u>であるとか** (A, R) **は** (A', R') **の<u>縮小</u>であるとかと言う），次のことが成り立つ．**

1. B' **が** (A', R') **の閉部分界であれば，**$B' \cap A$ **は** (A, R) **の閉部分界である．**

2. (A', R') **が偏束界であれば，**A **の任意の部分集合** S **について，**$[S]_{(A,R)} = [S]_{(A',R')} \cap A$ **が成り立ち，特に，**(A, R) **の任意の閉部分界** B **について** $B = [B]_{(A',R')} \cap A$ **が成り立つ．**

3. $A_R = A'_{R'} \cap A$

証明　1. 定理 3.24.2 による．

2. $B = [S]_{(A,R)}$，$B' = [S]_{(A',R')}$ と定める．$S \subseteq B' \cap A$ であって結論 1 により $B' \cap A$ が (A, R) の閉部分界であるから，$B \subseteq B' \cap A$ が成り立つ．逆に $y \in B' \cap A$ であれば，(A', R') が偏束界との仮定と定理 3.24.13 により S の元 $x_1, \ldots, x_n$ で $x_1 \cdots x_n \, R' \, y$ すなわち $x_1 \cdots x_n \, R \, y$ をみたすものが存在するから，$y \in B$ が成り立つ．従って $B = B' \cap A$ が成り立つ．

3. A の元 y が $\varepsilon \, R \, y$ をみたすためには $\varepsilon \, R' \, y$ をみたすことが必要十分であるから，$A_R = A'_{R'} \cap A$ が成り立つ．

問題 3.24.10 界 (A', R') が (A, R) の拡大であるとする．そうすると，A の任意の部分集合 S に対し，S の (A, R) における 1 圏は，S の (A', R') における 1 圏と A の交わりに等しい．また，(A', R') が偏束界であれば，(A, R) も偏束界である．

問題 3.24.11 界 (A', R') が (A, R) の拡大であって「$(\alpha, y) \in A'^* \times A,\ \alpha \, R' \, y \implies \alpha \in A^*$」なる条件をみたせば，$A$ の任意の部分集合 S について，$[S]_{(A,R)} = [S]_{(A',R')} \cap A$ が成り立つ．

注意 3.24.6 この節では代数系を一般化して界について考察したが，この一般化は，数学的に便利である反面で数理心理学の観点からは少し逸脱することになる．なぜなら数理心理学では，第 1 章で説明したように人間機械論に立脚して思考機械・人間を代数系として抽象するのであり，界として抽象するのではない．従っていずれは，界の中でも代数系とみなされるものに注目することになる．そこで，界が代数系とみなされるための条件が問われるが，代数系の界化は明らかに特異であり，逆に特異な界は，下に示すようにある代数系の界化であり，従って代数系とみなされる．例 3.30.1 などで分数式に定義する関係は，分子が空でないから特異な関係であり，従って算法族とみなされる．

(A, R) を特異な界とする．そうするとまず，A^*, A 間の関係の族 $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であって $R = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ をみたし，かつ各 $\lambda \in \Lambda$ と各 $x_1 \cdots x_n \in A^*$ に対して $x_1 \cdots x_n \, R_\lambda \, y$ なる $y \in A$ が高々一つしかないようなものがある（この R_λ の性質を**単価性**と呼ぶ）．たとえば，$\Lambda = A$ として R_λ を

$$x_1 \cdots x_n \, R_\lambda \, y \iff x_1 \cdots x_n \, R \, y, \; \lambda = y$$

と定義すればいい．そこで，$\Lambda \times \mathbb{N}$ の各元 (λ, n) に対し，A^n の部分集合 $A_{(\lambda,n)}$ を

$$A_{(\lambda,n)} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n \mid x_1 \cdots x_n \, R_\lambda \, y \text{ なる } y \in A \text{ が唯一つある }\}$$

と定義し，$A_{(\lambda,n)}$ を定義域とする A 上の n 項算法 $\alpha_{(\lambda,n)}$ を

$$\alpha_{(\lambda,n)}(x_1, \ldots, x_n) = y \iff x_1 \cdots x_n \, R_\lambda \, y$$

と定義する．そうすると (A, R) は，代数系 $(A, (\alpha_{(\lambda,n)})_{(\lambda,n)\in\Lambda\times\mathbb{N}})$ の界化である．実際，$x_1 \cdots x_n \, R \, y$ なら，$x_1 \cdots x_n \, R_\lambda \, y$ なる λ があり，(A, R) が特異であることより $n \neq 0$ であり，R_λ の単価性により $(x_1, \ldots, x_n) \in A_{(\lambda,n)}$ であって，$\alpha_{(\lambda,n)}(x_1, \ldots, x_n) = y$ が成り立つ．逆にある (λ, n) に対して $\alpha_{(\lambda,n)}(x_1, \ldots, x_n) = y$ であれば，$x_1 \cdots x_n \, R_\lambda \, y$ であるから $x_1 \cdots x_n \, R \, y$ が成り立つ．

問題 3.24.12 (✓) 界 (A, R) に対して A^*, A 間の関係 R' を「$\alpha \, R' \, y \iff \alpha \, R \, y$ かつ $\alpha \neq \varepsilon$」と定めれば，次のことが成り立つ．

1. R' は R に含まれる特異な A^*, A 間の関係の中で最大のものである（そこでこういう R' を R の**特異核**と呼ぶ）．
2. (A, R) の閉部分界は界 (A, R') の A_R を含む閉部分界に他ならない．
3. R が付加律に従えば，界 (A, R') の空でない閉部分界は A_R を含む．
4. (A, R) が偏束界なら，(A, R') もそうである．

略解　2. B を (A, R') の A_R を含む閉部分界とし，$\alpha \subseteq B$, $y \in A$, $\alpha \, R \, y$ とする．$\alpha \neq \varepsilon$ なら，$\alpha \, R' \, y$ であるから $y \in B$ が成り立つ．$\alpha = \varepsilon$ なら，$y \in A_R$ であるから，やはり $y \in B$ が成り立つ．　終

第 3.6.2 項での代数系上の計算図の定義に倣って，界 (A, R) 上の**計算図**なる図とその**始点集合**なる A の部分集合と**終点**なる A の元と**階数**なる非負整数とを，次のように階数についての帰納法で定義する．あらかじめ計算図 d の始点集合と終点と階数とを $\mathrm{sp}\, d$ と $\mathrm{tp}\, d$ と $\mathrm{rk}\, d$ とで表す．

まず，階数 0 の計算図とは A の任意の元 y のことを指し，その始点集合は $\{y\}$ で終点は y であるとする．そして，各自然数 n に対して，階数 $0, \ldots, n-1$ の計算図とその始点集合と終点が何であるかを定義した後，階数 n の計算図とは，計算図 $d_1, \ldots, d_m$ $(m \geq 0)$ と $y \in A$ で

$$n = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rk}\, d_i + 1 \qquad\qquad \mathrm{tp}\, d_1 \cdots \mathrm{tp}\, d_m \, R \, y$$

なる二条件をみたすもの（それは既に定めてある）を任意にとって出来る

$$\frac{d_1, \ldots, d_m}{y}$$

なる図のことと定義し，この計算図の始点集合は $\bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{sp}\, d_i$ で終点は y と定める．ただし $m = 0$ の場合には，上記の二条件は $n = 1$ と $\varepsilon \, R \, y$ を意味する．

問題 3.24.13 (問題 3.6.3 参照) 界 (A, R) 上の任意の計算図 d について $\mathrm{tp}\, d \in [\mathrm{sp}\, d]_R$ が成り立つ．逆に，S が A の部分集合であるとき，$[S]_R$ の各元 y に対して，$y = \mathrm{tp}\, d$ かつ $\mathrm{sp}\, d \subseteq S$ なる (A, R) 上の計算図 d が存在する．従って，S を A の部分集合とし y を A の元とするとき，$y \in [S]_R$ なるためには，$y = \mathrm{tp}\, d$ かつ $\mathrm{sp}\, d \subseteq S$ なる (A, R) 上の計算図 d の存在することが必要十分である．

問題 3.24.14 A^*, A 間の関係 R が問題 3.20.2 の偏包容律に従うとする（こういう関係を**偏包容的関係**と呼ぶ）．このとき，R が反復律に従うことは，次の法則に従うことと同等である．

$$x_1 \cdots x_n \, R \, x_i \ (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(偏抽出律)}$$

これら同等な条件の下で，R が偏消去律に従うためには，次の法則に従うことが必要十分である．

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \, R \, x_i \ (i = 1, \ldots, n) \\ x_1 \cdots x_n \, R \, y \end{array}\right\} \implies \alpha \, R \, y \qquad \text{(偏重消去律)}$$

略解　R が偏抽出律と偏重消去律に従うと仮定し，R が偏消去律に従うことを示すために，さらに $\alpha \, R \, x_0$, $x_0 x_1 \cdots x_n \, R \, y$ と仮定する．このとき，$\alpha \, R \, x_0$ と偏付加律・偏置換律・偏抽出律により $\alpha x_1 \cdots x_n \, R \, x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$．これと $x_0 x_1 \cdots x_n \, R \, y$ に偏重消去律を使って $\alpha x_1 \cdots x_n \, R \, y$ を得る．

問題 3.24.15 A^*, A 間の各関係 R に対し，A^*, A 間の関係 $\overline{R}$ を次のように定める．

$$\alpha \, \overline{R} \, y \iff \beta \, R \, y \text{ なる } \beta \subseteq \alpha \text{ がある}$$

そうすると $\overline{R}$ は，R を含む偏包容的関係の中で最小のものであり（そこで $\overline{R}$ を R の**偏包容包**と呼ぶ），R 閉集合は $\overline{R}$ 閉集合に他ならない．

問題 3.24.16 A^*, A 間の各関係 R に対し，各 $X \in \mathcal{P}A$ に界 (A, R) における X の 1 圏を対応させる $\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への写像を φ_R で表す（これを R による **1 圏写像**と呼ぶ）．すなわち

$$\varphi_R X = \{ y \in A \mid \alpha \, R \, y \text{ なる } \alpha \subseteq X \text{ がある} \}$$

また，各写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ に対し，A^*, A 間の関係 R_φ を

$$\alpha \, R_\varphi \, y \iff \varphi \alpha \ni y$$

と定める（これを φ **に伴う関係**と呼ぶ．問題 3.20.7 参照）．そうすると次のことが成り立つ [63]．

1. $X \in \mathcal{P}A$ が R で閉じているためには，X が φ_R で閉じていることが必要十分である．また，$\varphi_R \emptyset$ は A の R 核に等しい．すなわち $\varphi_R \emptyset = A_R$．
2. φ_R は有限的，従って $\mathcal{P}A$ における包含関係について増写であり，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して $[X]_R = {\varphi_R}^\infty X$ が成り立つ（${\varphi_R}^\infty$ は φ_R の閉写包を表す）．また，$\varphi_{\overline{R}} = \varphi_R$ が成り立つ．
3. φ の増写包 $\overline{\varphi}$ について $R_{\overline{\varphi}} = \overline{R_\varphi}$ が成り立つ．従って，φ が増調なら R_φ は偏包容的である．
4. R が偏包容的であれば，任意の $\alpha \in A^*$ に対して $\varphi_R \alpha = \{ y \in A \mid \alpha \, R \, y \}$ が成り立つ．
5. R による 1 圏写像に伴う関係は $\overline{R}$ に等しい．すなわち $R_{\varphi_R} = \overline{R}$．

[63] この問題は佐々木謙氏の着想に基づく．結論 10 は定理 3.24.13 の精密化である．

6. φ に伴う関係による 1 圏写像は $\overline{\varphi}$ の有限核 $\overline{\varphi}'$ に等しい．すなわち $\varphi_{R_\varphi} = \overline{\varphi}'$.

7. A^*, A 間の二つの関係 R, Q が $R \subseteq Q$ をみたせば，$\mathcal{P}A{\to}\mathcal{P}A$ 上の巾順序関係について $\varphi_R \subseteq \varphi_Q$ が成り立つ．逆に $\varphi_R \subseteq \varphi_Q$ が成り立って Q が偏包容的であれば，$R \subseteq Q$ が成り立つ．

8. 二つの写像 $\varphi, \psi \in \mathcal{P}A{\to}\mathcal{P}A$ が $\varphi \subseteq \psi$ をみたせば，$R_\varphi \subseteq R_\psi$ が成り立つ．逆に $R_\varphi \subseteq R_\psi$ が成り立って φ が有限的で ψ が増写であれば，$\varphi \subseteq \psi$ が成り立つ．

9. 写像 $R \mapsto \varphi_R$ と写像 $\varphi \mapsto R_\varphi$ とから，A^*, A 間の偏包容的関係の全体と，$\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への有限的写像全体との間の，包含関係 $\subseteq$ と巾順序関係 $\subseteq$ とについての同順写が出来て，それらは互いに他の逆写像である．

10. A^*, A 間の偏包容的関係 R が偏束律に従うためには，φ_R が閉写であることも，任意の $X \in \mathcal{P}A$ について $[X]_R = \varphi_R X$ の成り立つことも，共に必要十分である．

略解　1. 一番目のことは定理 3.24.7 で示した．

2. φ_R は定理 3.24.10 により有限的であり，従って問題 3.18.12 により増写であり，結論 1 と問題 3.18.34 により，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して $[X]_R = \varphi_R{}^\infty X$ が成り立つ．$\varphi_{\overline{R}} = \varphi_R$ であることは，任意の $(X, y) \in \mathcal{P}A \times A$ をとっての次の推論で示すことができる．

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{R}} X \ni y &\iff \alpha\,\overline{R}\,y \text{ なる } \alpha \subseteq X \text{ がある}\\ &\iff \beta\,R\,y \text{ なる } \beta \subseteq X \text{ がある} \iff \varphi_R X \ni y\end{aligned}$$

3. 任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ をとっての次の推論で示すことができる．

$$\begin{aligned}\alpha\,R_{\overline{\varphi}}\,y &\iff \overline{\varphi}\alpha \ni y\\ &\iff \varphi\beta \ni y \text{ なる } \beta \subseteq \alpha \text{ がある}\\ &\iff \beta\,R_\varphi\,y \text{ なる } \beta \subseteq \alpha \text{ がある} \iff \alpha\,\overline{R_\varphi}\,y\end{aligned}$$

5. 任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ をとっての次の推論で示すことができる．

$$\begin{aligned}\alpha\,R_{\varphi_R}\,y &\iff \varphi_R\alpha \ni y\\ &\iff \beta\,R\,y \text{ なる } \beta \subseteq \alpha \text{ がある} \iff \alpha\,\overline{R}\,y\end{aligned}$$

6. 結論 2, 3 により $\varphi_{R_\varphi} = \varphi_{\overline{R_\varphi}} = \varphi_{R_{\overline{\varphi}}}$，従って $\varphi_{R_{\overline{\varphi}}} = \overline{\varphi}'$ を示せばいい．それには，任意の $(X, y) \in \mathcal{P}A \times A$ をとって次のように推論すればいい．

$$\begin{aligned}\varphi_{R_{\overline{\varphi}}} X \ni y &\iff \alpha\,R_{\overline{\varphi}}\,y \text{ なる } \alpha \subseteq X \text{ がある}\\ &\iff \overline{\varphi}\alpha \ni y \text{ なる } \alpha \subseteq X \text{ がある} \iff \overline{\varphi}' X \ni y\end{aligned}$$

7 と 8. それぞれの前半は自明．それ等を使って，結論 7 の後半は $R \subseteq \overline{R} = R_{\varphi_R} \subseteq R_{\varphi_Q} = \overline{Q} = Q$ と示され，結論 8 の後半は $\varphi = \overline{\varphi}' = \varphi_{R_\varphi} \subseteq \varphi_{R_\psi} = \overline{\psi}' = \psi' \subseteq \psi$ と示される．

9. 結論 2 により，A^*, A 間の任意の関係 R に対し φ_R は増写である．結論 7 により，A^*, A 間の関係 R, Q が $R \subseteq Q$ をみたせば $\varphi_Q \supseteq \varphi_R$ が成り立つ．結論 8 により，増写 $\varphi, \psi \in \mathcal{P}A{\to}\mathcal{P}A$ が $\psi \supseteq \varphi$ をみたせば $R_\varphi \subseteq R_\psi$ が成り立つ．結論 5 により，任意の関係 R に対し $R \subseteq \overline{R} = R_{\varphi_R}$ が成り立つ．結論 6 により，任意の増写 φ に対し $\varphi \supseteq \varphi' = \overline{\varphi}' = \varphi_{R_\varphi}$ が成り立つ．従って写像 $R \mapsto \varphi_R$ と $\varphi \mapsto R_\varphi$ とから，A^*, A 間の関係全体が包含関係 $\subseteq$ によって成す順序集合と，$\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への

増写全体が巾順序関係 $\subseteq$ の双対順序関係 $\supseteq$ によって成す順序集合との間のガロア対が出来て，それに伴う閉写対は $R \mapsto \overline{R}$ と $\varphi \mapsto \varphi'$ とから成る（写像 $\varphi \mapsto \varphi'$ は，$\subseteq$ については開写であるが $\supseteq$ については閉写である）．従って定理 3.18.2 から結論 9 が得られる．

10. R を偏包容的関係とする．問題 3.24.14 により，R が反復律に従うためには偏抽出律に従うことが必要十分である．R が偏抽出律に従うためには，結論 4 により，φ_R が法則 (3.18.1) に従うことが必要十分であり，そのためには，問題 3.18.47 により，φ_R が拡大律に従うことが必要十分である．R が反復律に従い φ_R が拡大律に従うという仮定の下では，問題 3.24.14 により，R が偏消去律に従うためには，R が偏重消去律に従うことが必要十分である．R が偏重消去律に従うためには，結論 4 により，φ_R が法則 (3.18.2) に従うことが必要十分であり，そのためには問題 3.18.47 により，φ_R が巾閉律に従うことが必要十分である．結論 2 により φ_R は常に増写である．従って，R が偏束律に従うためには φ_R が閉写であることが必要十分である．φ_R が閉写であれば，A の任意の部分集合 X に対して，拡大律と巾閉律により $X \subseteq \varphi_R X \subseteq [X]_R$ と $\varphi_R(\varphi_R X) \subseteq \varphi_R X$ が成り立ち，後者の式より $\varphi_R X$ は R で閉じているから，$\varphi_R X = [X]_R$ となる．逆に，A の任意の部分集合 X に対して $\varphi_R X = [X]_R$ が成り立てば，定理 3.24.11 により φ_R は閉写である．

問題 3.24.17 各増写 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ に対し，φ に伴う関係 R_φ は $\varphi_R = \varphi'$ をみたす A^*, A 間の関係 R の中で最大のものであり，A^*, A 間の各関係 R に対し，R による 1 圏写像 φ_R は $R_\varphi = \overline{R}$ をみたす増写 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ の中で最小のものである．また，A^*, A 間の二つの関係 R, Q が $\varphi_R = \varphi_Q$ をみたすためには，$\overline{R} = \overline{Q}$ であることが必要十分であり，二つの増写 $\varphi, \psi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が $R_\varphi = R_\psi$ をみたすためには，$\varphi' = \psi'$ であることが必要十分である．

定理 3.20.1 別証　$\preccurlyeq$ が $\vDash$ を拡張し束律と劣空律に従うことは，以下のように証明することもできる [64]．$\vDash$ による 1 圏写像を φ で表せば，$\vDash$ が偏束律に従うから，問題 3.24.16 により

$$\begin{aligned} \alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n &\iff y_i \vDash z\ (i = 1, \ldots, n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } \alpha \vDash z \\ &\iff \varphi\{y_i\} \ni z\ (i = 1, \ldots, n) \text{ なる任意の } z \in A \text{ に対して } \varphi\alpha \ni z \\ &\iff \varphi\alpha \supseteq \varphi\{y_1\} \cap \cdots \cap \varphi\{y_n\} \end{aligned}$$

つまり $\preccurlyeq$ は問題 3.19.13 で定めた A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ に等しい．問題 3.24.16 により φ が閉写であるから，問題 3.19.13 により $\preccurlyeq$ は束律と劣空律に従う．また，$\preccurlyeq$ の $A^* \times A$ への制限は φ に伴う関係 R_φ に等しく（問題 3.20.7 略解参照），問題 3.24.16 により R_φ は $\vDash$ に等しい．

定理 3.20.3 別証　$\preccurlyeq$ が $\vDash$ を拡張し強束律と劣空律に従うことは，以下のように証明することもできる．$\vDash$ による 1 圏写像を φ で表せば，$\vDash$ が偏束律に従うから，問題 3.24.16 により

$$\begin{aligned} \alpha \preccurlyeq \varepsilon &\iff \text{任意の } z \in A \text{ に対して } \alpha \vDash z \\ &\iff \text{任意の } z \in A \text{ に対して } \varphi\alpha \ni z \\ &\iff \varphi\alpha = A \end{aligned}$$

$\beta \neq \varepsilon$ のときも，問題 3.24.16 により

$$\begin{aligned} \alpha \preccurlyeq \beta &\iff \alpha \vDash y \text{ なる } y \in \beta \text{ がある} \\ &\iff \varphi\alpha \ni y \text{ なる } y \in \beta \text{ がある} \end{aligned}$$

[64] この証明は佐々木謙氏による．

$$\iff \varphi\alpha \cap \beta \neq \emptyset$$

つまり $\preccurlyeq$ は問題 3.19.15 で定めた A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ に等しい．問題 3.24.16 により φ が閉写であるから，問題 3.19.15 により $\preccurlyeq$ は強束律と劣空律に従う．また，$\preccurlyeq$ の $A^* \times A$ への制限は φ に伴う関係 R_φ に等しく，問題 3.24.16 により R_φ は $\vDash$ に等しい．

3.25　偏生成関係

＄ この節では，代数系 A に対して問題 3.20.8 で定義した A^*, A 間の関係 $\vDash_D$ と問題 3.19.14 で定義した A^* 上の関係 $\preccurlyeq_D$ とを，第 3.24 節で定義した界の概念によって一般化して論ずる．

そのために**以下この節を通じて，A を任意の集合とし，AZ 記法・列便法を含めて第 3.19 節と同様の記法・便法を用いる．**そして，A^*, A 間の関係 R と A の部分集合 D の組み (R, D) を A 上の**生成対**と呼び，A 上の各生成対 (R, D) に対し，まず A^*, A 間の関係 R^D を次のように定める．すなわち，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対し

$$\alpha\, R^D\, y \iff [\alpha \cup D]_R \ni y \tag{3.25.1}$$

ただし，列便法を用いており，$[\alpha \cup D]_R$ は界 (A, R) における $\alpha \cup D$ の界包，すなわち (A, R) の $\alpha \cup D$ によって生成される閉部分界である．そこで，R^D を (R, D) に関する**偏生成関係**と呼ぶ.「偏」を冠するのは，R^D がある偏束写系 $(A, \mathcal{B}, f)$ の定める関係 $\vDash_f$ に等しいからである（定理 3.25.2 参照）．なお論理学的文脈では，生成対 (R, D) を**論拠**と呼び替えたり R^D を $\vDash_{R,D}$ で表したりすることがある（問題 3.26.30 や第 3.28 節参照).

(3.25.1) は次のことを含意する．

$$\varepsilon\, R^D\, y \iff [D]_R \ni y \tag{3.25.2}$$

つまり定義 3.24.1 の言葉で言い換えれば，A の R^D 核 A_{R^D} は $[D]_R$ に等しい（定理 3.25.1 参照）.

後で証明するが，D が A の部分集合であるとき，A^*, A 間の各関係 R に偏生成関係 R^D を対応させる写像は，関係間の包含関係 $\subseteq$ に関する閉写である．そこで，R^D を R の D **包**とも呼び，$R^D = R$ であるとき，R は D **で閉じている**と言う．

A 上の各生成対 (R, D) に対してさらに，A^* 上の関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ を，次のように定めて (R, D) に関する**生成関係**と呼ぶ．すなわち，$(\alpha, \beta) \in A^* \times A^*$ に対し，

$$\alpha \preccurlyeq_{R,D} \beta \iff [\alpha \cup D]_R \supseteq \bigcap_{y \in \beta} [\{y\} \cup D]_R \tag{3.25.3}$$

$\beta \in A^0 \cup A^1$ の場合は注意を要する．まず，$\beta \in A^0$ すなわち $\beta = \varepsilon$ のとき，$\bigcap_{y\in\beta} [\{y\} \cup D]_R$ は $\bigcap$ の定義により A に等しい．従って $\alpha \preccurlyeq_{R,D} \varepsilon$ なることは，$[\alpha \cup D]_R = A$ なることと同等である．次に $\beta \in A^1$ の場合については，$y \in A$ に対して $\alpha \preccurlyeq_{R,D} y$ なることは，$[\alpha \cup D]_R \ni y$ すなわち $\alpha\, R^D\, y$ なることと同等である．つまり，関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ の $A^* \times A$ への制限は R^D に等しい．

問題 3.25.1 A 上の生成対 (R, D) に対し，偏生成関係 R^D が最大関係であるためにも，生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ が最大関係であるためにも，$[D]_R = A$ なることが必要十分である．

定理 3.25.1 A **上の生成対** (R, D) **について次のことが成り立つ．**

1. $R^D = \bigcup_{E \in \mathcal{P}'D} R^E$

2. $R \subseteq R^D$

3. $[D]_R = A_{R^D}$**．従って特に** $D \subseteq A_{R^D}$**．**

4. A **上の生成対** (Q, C) **が「**$R \subseteq Q$ **かつ** $D \subseteq C$**」をみたせば，**$R^D \subseteq Q^C$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.24.11 により，各 $\alpha \in A^*$ に対して $[\alpha \cup D]_R = \bigcup_{E \in \mathcal{P}'D} [\alpha \cup E]_R$ が成り立つ．従って結論 1 が成り立つ．$(\alpha, y) \in A^* \times A$ が $\alpha\, R\, y$ をみたせば，y は $\alpha \cup D$ の 1 圏に属すから，定理 3.24.7 により $y \in [\alpha \cup D]_R$，すなわち $\alpha\, R^D\, y$ が成り立つ．従って結論 2 が成り立つ．結論 3 の成り立つわけは (3.25.2) の後に記した．A 上の生成対 (Q, C) が $R \subseteq Q$ と $D \subseteq C$ をみたせば，定理 3.24.4 と定理 3.24.9 により任意の $\alpha \in A^*$ に対して $[\alpha \cup D]_R \subseteq [\alpha \cup C]_Q$ であるから，$R^D \subseteq Q^C$ が成り立つ．

定理 3.25.2 A **上の生成対** (R, D) **に対し，**R^D **は偏束律に従い，**$\preccurlyeq_{R,D}$ **は束律に従い，**$\preccurlyeq_{R,D}$ **は** R^D **の最大束拡張に等しい（従って定理 3.20.1 により** $\preccurlyeq_{R,D}$ **は劣空律に従う）．**

証明　写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ を $\varphi X = [X \cup D]_R$ によって定義すれば，定理 3.24.11 により φ は閉写であって，φ を用いて問題 3.20.7 でのように定義した A^*, A 間の関係 $\vDash_\varphi$ が R^D に等しく，問題 3.19.13 でのように定義した A^* 上の関係 $\preccurlyeq_\varphi$ が $\preccurlyeq_{R,D}$ に等しい．従って，問題 3.20.7 により R^D は偏束律に従い，問題 3.19.13 により $\preccurlyeq_{R,D}$ は束律に従う．また定理 3.20.2 系 3 により，$\preccurlyeq_{R,D}$ は R^D の最大束拡張に等しい．

系　A **上の生成対** (Q, C) **と** (R, D) **についての次の二条件は同等である．**

1. $Q^C = R^D$ **が成り立つ．**　　**2.** $\preccurlyeq_{Q,C} = \preccurlyeq_{R,D}$ **が成り立つ．**

証明　$Q^C = R^D$ であれば，両辺の最大束拡張をとり定理 3.25.2 を使って $\preccurlyeq_{Q,C} = \preccurlyeq_{R,D}$ を得る．逆に $\preccurlyeq_{Q,C} = \preccurlyeq_{R,D}$ であれば，両辺の $A^* \times A$ への制限をとって $Q^C = R^D$ を得る．

定理 3.25.3 A **上の生成対** (R, D) **について次のことが成り立つ．**

1. A **の任意の部分集合** X **に対して** $[X]_{R^D} = [X \cup D]_R$ **が成り立つ．**

2. **界** (A, R^D) **の閉部分界の全体は界** (A, R) **の** D **を含む閉部分界の全体に等しい．**

従って，A **の任意の部分集合** X **に対して** $[X]_{R^\emptyset} = [X]_R$ **が成り立ち，**$(A, R^\emptyset)$ **の閉部分界の全体は** (A, R) **の閉部分界の全体に等しい．**

証明　定理 3.25.2 により R^D が偏束律に従うから，定理 3.24.13 により，A の元 y が $y \in [X]_{R^D}$ をみたすためには，X の元 $x_1, \ldots, x_n$ で $x_1 \cdots x_n\, R^D\, y$ すなわち $y \in [\{x_1, \ldots, x_n\} \cup D]_R$ なるもののあることが必要十分であり，そのためにはまた，定理 3.24.11 により，$y \in [X \cup D]_R$ なることが必要十分である．従って $[X]_{R^D} = [X \cup D]_R$ が成り立つ．

定理 3.24.11 により写像 $X \mapsto [X]_{R^D}$ と $X \mapsto [X \cup D]_R$ は共に $\mathcal{P}A$ 上の閉写であり，それぞれの留域は (A, R^D) の閉部分界全体と (A, R) の D を含む閉部分界の全体に等しい．従って，結論 1 から結論 2 が導かれる．

定理 3.25.4 A **上の生成対** (R, D) **が** $R^D = R$ **をみたすためには，次の二条件のいずれもが必要十分である．**

1. R **は偏束律に従い** $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{A}_\mathrm{R}$ **をみたす．**

2. R **は偏束律に従い，界** (A, R) **の閉部分界はすべて** D **を含む．**

従って，A^*, A **間の関係** R **が** $\mathrm{R}^\emptyset = \mathrm{R}$ **をみたすためには，偏束律に従うことが必要十分である．**

証明　定理 3.25.2 により R^D は偏束律に従うから，$\mathrm{R} = \mathrm{R}^\mathrm{D}$ なるためには，R が偏束律に従うことが必要である．そこで以下，R も偏束律に従うと仮定する．そうすると定理 3.24.14 と定理 3.25.3 により，$\mathrm{R} = \mathrm{R}^\mathrm{D}$ なるためには，(A, R) の閉部分界がすべて D を含むことが必要十分である．定理 3.24.15 により $[\emptyset]_\mathrm{R} = \mathrm{A}_\mathrm{R}$ が成り立つから，(A, R) の閉部分界がすべて D を含むことは，$\mathrm{D} \subseteq \mathrm{A}_\mathrm{R}$ なることと同等である．

系　A **上の生成対** (R, D) **について** $(\mathrm{R}^\mathrm{D})^\mathrm{D} = \mathrm{R}^\mathrm{D}$ **が成り立つ（このことは問題 3.25.4 で一般化する）．**

注意 3.25.1　この系と定理 3.25.1 により，D が A の部分集合であるとき，A^*, A 間の各関係 R に偏生成関係 R^D を対応させる写像は，関係間の包含関係 $\subseteq$ に関する閉写である．

証明　$\mathrm{Q} = \mathrm{R}^\mathrm{D}$ と定めれば，Q は定理 3.25.2 により偏束律に従い定理 3.25.1 により $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{A}_\mathrm{Q}$ をみたすから，定理 3.25.4 によって $\mathrm{Q}^\mathrm{D} = \mathrm{Q}$ すなわち $(\mathrm{R}^\mathrm{D})^\mathrm{D} = \mathrm{R}^\mathrm{D}$ が成り立つ．

系 2　A **上の生成対** (R, D) **に対し** R^D **は，**A^*, A **間の関係** Q **で**

1. $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{Q}$　　**2.** Q **は偏束律に従う**　　**3.** $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{A}_\mathrm{Q}$

なる三条件をみたすものの中で最小のものである．従って $\mathrm{R}^\emptyset$ **は，**R **を含み偏束律に従う** A^*, A **間の関係の中で最小のものである．**

証明　$\mathrm{Q} = \mathrm{R}^\mathrm{D}$ なら，定理 3.25.1 と定理 3.25.2 により，Q は条件 1 – 3 をみたす．逆に Q が条件 1 – 3 をみたせば，定理 3.25.1 と定理 3.25.4 により $\mathrm{R}^\mathrm{D} \subseteq \mathrm{Q}^\mathrm{D} = \mathrm{Q}$ が成り立つ．
別証　条件 2, 3 をみたす A^*, A 間の関係 Q の全体を $\mathcal{B}$ で表せば，定理 3.25.4 により $\mathcal{B}$ が注意 3.25.1 で触れた閉写の留域であるから，定理 3.18.1 により R^D は $\{\mathrm{Q} \in \mathcal{B} \mid \mathrm{R} \subseteq \mathrm{Q}\}$ の最小元である．

問題 3.25.2　A 上の生成対 (R, D) に対し $\mathrm{R}^\mathrm{D} = \overline{\mathrm{R}}^\mathrm{D}$ が成り立つ．ただし $\overline{\mathrm{R}}$ は R の偏包容包を表す．

略解　R^D は，偏束律に従うから特に偏包容的であり，また R を含む．従って $\mathrm{R} \subseteq \overline{\mathrm{R}} \subseteq \mathrm{R}^\mathrm{D}$，従って $\mathrm{R}^\mathrm{D} \subseteq \overline{\mathrm{R}}^\mathrm{D} \subseteq (\mathrm{R}^\mathrm{D})^\mathrm{D} = \mathrm{R}^\mathrm{D}$ が成り立つ．

定理 3.25.5　A **上の生成対** (Q, C) **と** (R, D) **についての次の四条件は同等である．**

1. $\mathrm{R}^\mathrm{D} \subseteq \mathrm{Q}^\mathrm{C}$ **が成り立つ．**

2. A **の任意の部分集合** X **に対して** $[\mathrm{X} \cup \mathrm{D}]_\mathrm{R} \subseteq [\mathrm{X} \cup \mathrm{C}]_\mathrm{Q}$ **が成り立つ．**

3. **界** (A, Q) **の** C **を含む閉部分界は界** (A, R) **の** D **を含む閉部分界でもある．**

4. $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{Q}^\mathrm{C}$ **と** $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{Q}^\mathrm{C}}$ **が成り立つ．**

従って，(Q, C) **と** (R, D) **についての次の四条件は同等である（これら四条件がみたされるとき，**(Q, C) **と** (R, D) **は同値であると言う）．**

5. $R^D = Q^C$ **が成り立つ．**

6. A **の任意の部分集合** X **に対して** $[X \cup D]_R = [X \cup C]_Q$ **が成り立つ．**

7. 界 (A, Q) **の** C **を含む閉部分界の全体は界** (A, R) **の** D **を含む閉部分界の全体に等しい．**

8. $R \subseteq Q^C$，$D \subseteq A_{Q^C}$，$Q \subseteq R^D$，$C \subseteq A_{R^D}$ **が成り立つ．**

これら同等な四条件の下で $[C]_Q = [D]_R$ **が成り立つ（この条件がみたされるとき，**(Q, C) **と** (R, D) **は弱同値であると言う）．また，**A **上の生成対** (Q, C) **に対し** A **上の生成対** (Q^C, A_{Q^C}) **は，条件 1 – 4 をみたす** A **上の生成対** (R, D) **の中で** $\mathcal{P}(A^* \times A) \times \mathcal{P}A$ **上の直積順序関係** $\subseteq$ **について最大のものであり（定理 3.25.1 参照），条件 5 – 8 をみたす．**

証明　定理 3.25.2 により Q^C が偏束律に従うから，定理 3.24.14 と定理 3.25.3 により条件 1 – 3 は同等であり，定理 3.25.4 系 2 により条件 4 から条件 1 が導かれる．また条件 1 から，定理 3.25.1 により $R \subseteq R^D \subseteq Q^C$，$D \subseteq A_{R^D} \subseteq A_{Q^C}$ として，条件 4 が導かれる．また，$R = Q^C$ かつ $D = A_{Q^C}$ であれば，$R \subseteq Q^C$ と $D \subseteq A_{Q^C}$ は自明にみたされ，定理 3.25.1 により $Q \subseteq Q^C \subseteq (Q^C)^D = R^D$，$C \subseteq A_{Q^C} = D \subseteq A_{R^D}$ となって，条件 8 がみたされる．

系　A **上の生成対** (R, D) **と** A^*, A **間の偏束関係** Q **についての次の四条件は同等である．**

1. $R^D \subseteq Q$ **が成り立つ．**

2. A **の任意の部分集合** X **に対して** $[X \cup D]_R \subseteq [X]_Q$ **が成り立つ．**

3. 界 (A, Q) **の閉部分界は界** (A, R) **の** D **を含む閉部分界でもある．**

4. $R \subseteq Q$ **と** $D \subseteq A_Q$ **が成り立つ．**

また，次の三条件は同等である．

5. $Q \subseteq R^D$ **が成り立つ．**

6. A **の任意の部分集合** X **に対して** $[X]_Q \subseteq [X \cup D]_R$ **が成り立つ．**

7. 界 (A, R) **の** D **を含む閉部分界は界** (A, Q) **の閉部分界でもある．**

従って，次の四条件は同等である．

8. $Q = R^D$ **が成り立つ．**

9. A **の任意の部分集合** X **に対して** $[X]_Q = [X \cup D]_R$ **が成り立つ．**

10. 界 (A, Q) **の閉部分界の全体は界** (A, R) **の** D **を含む閉部分界の全体に等しい．**

11. $R \subseteq Q$，$D \subseteq A_Q$，$Q \subseteq R^D$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.25.4 により $Q^\emptyset = Q$ が成り立つ．従って，定理 3.25.5 の条件 1 – 4 において $C = \emptyset$ とすれば，この系の条件 1 – 4 が同等であることが分かる．また，定理 3.25.5 の条件 1 – 3 において (Q, C) と (R, D) を交換してから $C = \emptyset$ とすれば，この系の条件 5 – 7 が同等であることが分かる．

問題 3.25.3　定理 3.25.5 とその系は,「部分集合 X」を「有限部分集合 X」に書き換えても成り立つ．

略解　定理 3.24.11 と問題 3.18.12 による．

問題 3.25.4 A^*, A 間の関係 R と A の部分集合 C, D について $(R^C)^D = (R^D)^C = R^{C\cup D}$，従って特に $(R^D)^D = R^D$ が成り立つ（定理 3.25.4 系参照）．

略解　定理 3.25.3 により，界 (A, R^C) の D を含む閉部分界の全体も，界 (A, R^D) の C を含む閉部分界の全体も，界 (A, R) の $C \cup D$ を含む閉部分界の全体に等しい．従って定理 3.25.5 によりこの定理が成り立つ．

問題 3.25.5 R を A^*, A 間の関係とし，C, D を A の部分集合とする．このとき，次の四条件は同等である（その他の同等な条件については定理 3.25.5 参照）！

1. $R^C \subseteq R^D$ が成り立つ．
2. A^*, A 間のある関係 Q に対して $Q^C \subseteq R^D$ が成り立つ．
3. $[C]_R \subseteq [D]_R$ が成り立つ．
4. $(R^D)^C = R^D$ が成り立つ．

従って，$D \subseteq C \subseteq [D]_R$ であれば，$R^C = R^D$，従って $\preccurlyeq_{R,C} = \preccurlyeq_{R,D}$ が成り立つ．

略解　$(2 \Longrightarrow 3)$ 定理 3.25.5 により $C \subseteq A_{R^D} = [D]_R$，従って $[C]_R \subseteq [D]_R$．
$(3 \Longrightarrow 4)$ R^D が偏束律に従い $C \subseteq [D]_R = A_{R^D}$ であるから，定理 3.25.4 により $(R^D)^C = R^D$．
$(4 \Longrightarrow 1)$ $R^C \subseteq (R^C)^D = (R^D)^C = R^D$．

問題 3.25.6 (✓) (R, D) が A 上の生成対で R が偏束律に従うとする．このとき，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ が $\alpha\, R^D\, y$ をみたすためには，$\alpha\delta\, R\, y$ をみたす $\delta \subseteq D$ のあることが必要十分である．特に D が有限集合の場合には，D の元をすべて並べて出来る A^* の元を δ で表すとき，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ が $\alpha\, R^D\, y$ をみたすためには，$\alpha\delta\, R\, y$ をみたすことが必要十分である．

略解　後半は定理 3.24.13 系により $\alpha\, R^D\, y \iff [\alpha \cup D]_R \ni y \iff [\alpha\delta]_R \ni y \iff \alpha\delta\, R\, y$ と推論して証明される．後半と定理 3.25.1 により前半が成り立つ．

問題 3.25.7 写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が有限的であるとし，$D \subseteq A$ とする．このとき，φ の閉写包 φ^∞ により写像 $\varphi^D \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ を $\varphi^D X = \varphi^\infty(X \cup D)$ と定めれば，φ^D は次の三条件をみたす写像 $\psi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ の中で巾順序関係 $\subseteq$ について最小のものである（そこで φ^D を φ の D **包**と呼ぶ）．

1. $\varphi \subseteq \psi$　　2. ψ は閉写である　　3. $D \subseteq \psi\emptyset$

さらに φ^D は有限的であり，φ^D の留域は，A の D を含む φ 閉集合の全体にも，A の φ^D 閉集合の全体にも等しい．

略解　φ^∞ は φ より大きい閉写の中で最小かつ有限的であり，問題 3.18.34 により φ^∞ の留域は A の φ 閉集合の全体に等しい．このことと問題 3.18.22 により，φ^D は条件 1, 2, 3 をみたし，かつ有限的であり，φ^D の留域は A の D を含む φ 閉集合の全体に等しい．φ^D が拡大律に従うので，φ^D の留域は A の φ^D 閉集合の全体にも等しい．$\psi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が条件 1, 2, 3 をみたせば，条件 1, 2 により $\varphi^\infty \subseteq \psi$ であって，条件 2, 3 により任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $X, D \subseteq \psi X$ であるから，$\varphi^D X \subseteq \varphi^D(\psi X) = \varphi^\infty(\psi X \cup D) = \varphi^\infty(\psi X) \subseteq \psi(\psi X) = \psi X$，従って $\varphi^D \subseteq \psi$ が成り立つ．

問題 3.25.8 任意の有限的写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ と任意の $D \subseteq A$ に対し，φ の D 包 φ^D に伴う A^*, A 間の関係は，φ に伴う A^*, A 間の関係 R_φ の D 包に等しい．すなわち $R_{\varphi^D} = {R_\varphi}^D$ が成り立つ．

略解　問題 3.24.16 により，任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対して「$\alpha \, R_{\varphi^D} \, y \iff \varphi^D \alpha \ni y \iff \varphi^\infty(\alpha \cup D) \ni y$」が成り立って $\varphi = \overline{\varphi}' = \varphi_{R_\varphi}$，従って $\varphi^\infty(\alpha \cup D) = {\varphi_{R_\varphi}}^\infty(\alpha \cup D) = [\alpha \cup D]_{R_\varphi}$，従って「$\alpha \, R_{\varphi^D} \, y \iff \alpha \, {R_\varphi}^D \, y$」が成り立つ．

問題 3.25.9 A 上の任意の生成対 (R, D) に対し，R の D 包 R^D による 1 圏写像は R による 1 圏写像 φ_R の D 包に等しい．すなわち $\varphi_{R^D} = {\varphi_R}^D$ が成り立つ．

略解　$Q = R^D$，$\psi = \varphi_R$ と定めれば，問題 3.24.16 と定理 3.25.2 と問題 3.25.2 と問題 3.25.8 と問題 3.25.7 により $R_{\varphi_Q} = \overline{Q} = Q = \overline{R}^D = {R_\psi}^D = R_{\psi^D}$，従って $\varphi_Q = \psi^D$ が成り立つ．

3.26　論対

＄ 第 3.24 節で界の概念について説明した．それを利用してここでは，論理学における意味論が「論対論」として著しく抽象されることを説明しよう．

空でない集合 A と $\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}$ の組み $(A, \mathcal{B})$ を**論対**と呼び，$\mathcal{B}$ の元と A をそれぞれこの論対の**与論**と**言語**と呼ぶ [65]．次に，すべての与論の交わり $\bigcap \mathcal{B}$ を $(A, \mathcal{B})$ の **核**または A の $\mathcal{B}$ **核**と呼び，核の元を $(A, \mathcal{B})$ の **恒真元**または A の $\mathcal{B}$ **恒真元**と呼ぶ．次に，すべての与論を閉ざす A^*, A 間の関係を $(A, \mathcal{B})$ の**論理**または A の $\mathcal{B}$ **論理**と呼ぶ．また，$(A, \mathcal{B})$ の核を閉ざす A^*, A 間の関係を $(A, \mathcal{B})$ の**弱論理**と呼ぶ．また，A 上の算法の関係化が $(A, \mathcal{B})$ の論理であるとき，その算法を $(A, \mathcal{B})$ の**算法論理**と呼ぶ．また，すべての与論を閉ざす $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ の元を $(A, \mathcal{B})$ の**写像論理**と呼ぶ．次に，すべての $\mathcal{B}$ 論理で閉じている A の部分集合を $(A, \mathcal{B})$ の **理論**または A の $\mathcal{B}$ **理論**と呼ぶ．さらに，$\mathcal{B}$ 論理について説明するために，$\mathcal{R}$ が A^*, A 間の関係の集合であるとき，すべての $R \in \mathcal{R}$ で閉じている A の部分集合を A の $\mathcal{R}$ **理論**と呼ぶ．ただし $\mathcal{R}$ が単元集合 $\{R\}$ の場合には，$\{R\}$ 理論ではなく R 理論と呼ぶ．同様に，$\mathbb{F} \subseteq \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ のとき，すべての $\varphi \in \mathbb{F}$ で閉じている A の部分集合を A の $\mathbb{F}$ **理論**と呼ぶ．ただし $\mathbb{F}$ が単元集合 $\{\varphi\}$ の場合にはやはり，$\{\varphi\}$ 理論ではなく φ 理論と呼ぶ．

なお，A^*, A 間の関係は，特に $\mathcal{B}$ 論理は，第 3.9 節における「関係」の定義により $A^* \times A$ の部分集合であるから，それらの包含関係 $\subseteq$ や結び $\cup$ や交わり $\cap$ を云々することができる．同様に，問題 3.9.38 により $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ はそれ上の巾順序関係 $\subseteq$ について完備束であるから，$\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ の元の，特に写像論理の，大小関係 $\subseteq$ や結び $\cup$ や交わり $\cap$ を云々することもできる．

論理・弱論理・算法論理・写像論理の中では論理が主役を演ずる．特に，写像論理に関する事柄はすべて排除することもできる．しかし写像論理を使うと，定理幾つかについては極めてよい見通しが得られる（定理 3.26.12 と定理 3.27.3 の証明参照）．また，論理と写像論理を対比させることで，論理の本質・特長を理解することができる．

例 3.26.1 論対論は，論理学一般における意味論を抽象したものであり，個々特別な論理学において具体化されて中心的役割を演ずる．論対の出来方を第 4.7.1 項を先取りして説明しよう．

$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ を真偽 ϕ のある論理系とする．すなわち，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ は形式言語であり，$\mathcal{W}$ は A にとっての認識可能世界の範囲を限定して定めた認識対象世界の領域であり，$(\lambda_W)_{\lambda, W}$ は T の各可変子 λ の各 $W \in \mathcal{W}$ での意味の族であり，$\phi \in T$ であり，$A_\phi \neq \emptyset$ であり，

[65]「論対」と「与論」とは「論理学対」と「所与理論」との短縮形であり,「論対」の英語名は「logical space」である．

各 $W \in \mathcal{W}$ に対して $W_\phi = \mathbb{T}$ が成り立つものとする．そうするとこれから，A_ϕ を言語とする論対が次のように作られる．すなわちまず $W \in \mathcal{W}$ とすれば，$W^{\mathrm{Val}_W} = \bigcup_{t \in T}(\mathrm{Val}_W \to W_t)$ の T 型代数構造が定まる．次に Φ を A から W への定付値とすれば，意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}_W}$ が定まり，これが保型準写であって各 $t \in T$ に対して W^{Val_W} の t 部分が $\mathrm{Val}_W \to W_t$ であるから，特に $\Phi^* A_\phi \subseteq \mathrm{Val}_W \to W_\phi$ が成り立つ．従ってさらに $\nu \in \mathrm{Val}_W$ とすれば，各 $a \in A_\phi$ に対して $(\Phi^* a)\nu$ が W_ϕ $(= \mathbb{T})$ に属すから，A_ϕ から $\mathbb{T}$ への写像 $a \mapsto (\Phi^* a)\nu$ が出来る．この写像を Φ^ν で表し，W, Φ, ν を任意に動かして得られる Φ^ν の全体を $\mathcal{F}$ で表す．そうすると $\mathcal{F}$ は，$A_\phi \to \mathbb{T}$ の部分集合であるから，$\mathcal{P}A_\phi$ の部分集合とみなせる．そうみなせば $(A_\phi, \mathcal{F})$ は論対であり，そうみなさなければ $(A_\phi, \mathcal{F})$ は，第 3.30.1 項で定義する $\mathbb{T}$ 値論対である．

以下この節では，そうでない旨断らない限り，A を集合とする．

問題 3.26.1 R が A^*, A 間の関係であるとき，A の R 理論は界 (A, R) の閉部分界に他ならない．従って，A の R 理論の全体は A に関して交閉的かつ概有限である．さらに，D が A の部分集合であるとき，R の D 包 R^D の理論は，D を含む R 理論に他ならない．

略解　二番目の結論は定理 3.24.11 により，三番目の結論は定理 3.25.3 による．

定理 3.26.1 A^*, A **間の関係** R **と** R' **が** $R' \subseteq R$ **をみたせば，A の R 理論は A の** R' **理論でもある．**

証明　問題 3.26.1 によって定理 3.24.4 の一部を言い換えたに過ぎない．

問題 3.26.2 $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ の二元 φ と ψ が $\varphi \subseteq \psi$ をみたせば，A の ψ 理論は A の φ 理論でもある．

略解　問題 3.18.21 の一部の特殊化に過ぎない．

問題 3.26.3 (✓) R が A^*, A 間の関係であれば，A の R 理論は A の $\overline{R}$ 理論に他ならない．

略解　問題 3.24.15 の一部の言い換えに過ぎない．

定理 3.26.2 $\mathcal{R}$ **が** A^*, A **間の関係の集合であれば，A の** $\mathcal{R}$ **理論は A の** $\bigcup\mathcal{R}$ **理論に他ならない．**

証明　定理 3.24.5 と問題 3.26.1 により，$X \in \mathcal{P}A$ が $\bigcup\mathcal{R}$ 理論であるためには，X が各 $R \in \mathcal{R}$ に対して R 理論であることが必要十分であり，そのためには定義により，X が $\mathcal{R}$ 理論であることが必要十分である．

問題 3.26.4 $\mathbb{F} \subseteq \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ であれば，A の $\mathbb{F}$ 理論は A の $\bigcup_{\varphi \in \mathbb{F}} \varphi$ 理論に他ならない．

以下この節では，そうでない旨断らない限り，$(A, \mathcal{B})$ を論対とし，C を $(A, \mathcal{B})$ の核とする．また，AZ 記法・列便法を含めて，第 3.19 節の記法・便法を継承する．

問題 3.26.5 $(A, \mathcal{B})$ の弱論理は論対 $(A, \{C\})$ の論理に他ならない．$(A, \mathcal{B})$ の論理は $(A, \mathcal{B})$ の弱論理である．

略解　R を $\mathcal{B}$ 論理とすれば，$\mathcal{B}$ の元は R 理論であるから，問題 3.26.1 により C も R 理論である．

問題 3.26.6 $(A, \mathcal{B})$ の論理について次のことが成り立つ．

1. A^*, A 間の関係の集合 $\mathcal{R}$ が $(A, \mathcal{B})$ の論理から成るためには，$(A, \mathcal{B})$ の任意の与論が $\mathcal{R}$ 理論であることが必要十分である．特に，A^*, A 間の関係 R が $(A, \mathcal{B})$ の論理であためには，$(A, \mathcal{B})$ の任意の与論が R 理論であることが必要十分である．
2. R が $(A, \mathcal{B})$ の論理で D が C の部分集合であれば，R の D 包 R^D も $(A, \mathcal{B})$ の論理である．
3. A の部分集合 X が $(A, \mathcal{B})$ の理論であるためには，$(A, \mathcal{B})$ の任意の論理 R に対して X が R 理論であることが必要十分である．
4. $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathbb{F}$ が $(A, \mathcal{B})$ の写像論理から成るためには，$(A, \mathcal{B})$ の任意の与論が $\mathbb{F}$ 理論であることが必要十分である．
5. A^*, A 間の関係 R による 1 圏写像 φ_R が $(A, \mathcal{B})$ の写像論理であるためには，R が $(A, \mathcal{B})$ の論理であることが必要十分である．

略解　結論 2 は結論 1 と問題 3.26.1 により，結論 5 は問題 3.24.16 による．

問題 3.26.7 A^*, A 間の関係 R が $(A, \mathcal{B})$ の論理であれば，A^*, A 間の R に含まれる関係は $(A, \mathcal{B})$ の論理である．$\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が $(A, \mathcal{B})$ の写像論理であれば，φ より小さい $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ の元は $(A, \mathcal{B})$ の写像論理である．

略解　R に含まれる関係 R' を任意にとる．$\mathcal{B}$ の任意の元は，問題 3.26.6 により R 理論であるから，定理 3.26.1 により R' 理論でもある．従って再び問題 3.26.6 により，R' も $\mathcal{B}$ 論理である．

問題 3.26.8 $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が写像の合成について成す単位半群において，増調な写像論理の全体も有限的写像論理の全体も部分単位半群である．より一般に，φ が写像論理で ψ が増調な写像論理であれば，$\psi\varphi$ は写像論理である．また，有限的写像論理は増写である．

略解　φ, ψ が増調な写像論理であれば，$X \subseteq Y$ なる任意の $X, Y \in \mathcal{P}A$ に対して $\varphi X \subseteq \varphi Y$，従って $\psi(\varphi X) \subseteq \psi(\varphi Y)$ が成り立つので，$\psi\varphi$ も増写である．φ が写像論理で ψ が増調な写像論理であれば，任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $\varphi B \subseteq B$，従って $\psi(\varphi B) \subseteq \psi B \subseteq B$ が成り立つので，$\psi\varphi$ も写像論理である．問題 3.18.12 により，有限的写像の合成は有限的であり，有限的写像は増写である．

定理 3.26.3 $(A, \mathcal{B})$ **の与論は** $(A, \mathcal{B})$ **の理論である．**

証明　定義により任意の与論は，任意の $\mathcal{B}$ 論理で閉じており，従って $(A, \mathcal{B})$ の理論である．

系　$(A, \mathcal{B})$ **の理論をすべて閉ざす** A^*, A **間の関係は** $(A, \mathcal{B})$ **の論理に他ならない．**

証明　論理は定義によりすべての理論を閉ざす．逆に，すべての理論を閉ざす関係は，定理 3.26.3 により特にすべての与論を閉ざし，従って論理である．

問題 3.26.9 A を集合とし，$\mathcal{P}A$ の各部分集合 $\mathcal{B}$ に対し，論対 $(A, \mathcal{B})$ の論理の全体を $f\mathcal{B}$ で表す（従って $f\mathcal{B}$ は $\mathcal{P}(A^* \times A)$ の部分集合である）．逆に，$\mathcal{P}(A^* \times A)$ の各部分集合 $\mathcal{R}$ に対し，$\mathcal{R}$ を A^*, A 間の関係の集合とみなして，A の $\mathcal{R}$ 理論の全体を $g\mathcal{R}$ で表す（従って $g\mathcal{R}$ は $\mathcal{P}A$ の部分集合である）．このとき，写像 $f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}A) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A^* \times A))$ と $g \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A^* \times A)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ は包含関係 $\subseteq$ に関してガロア対を成し，各 $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ に対し，$g(f\mathcal{B})$ は $(A, \mathcal{B})$ の理論の全体に等しい．

略解　$B \in \mathcal{P}A$ と $R \in \mathcal{P}(A^* \times A)$ に対して，B が A^*, A 間の関係とみなした R で閉じているとき $B\,\mathcal{C}\,R$ と書く．こうして得られる $\mathcal{P}A, \mathcal{P}(A^* \times A)$ 間の関係 $\mathcal{C}$ に問題 3.18.28 を使えばいい．

注意 3.26.1 この節の概念の中には，問題 3.26.9 のガロア対 (f, g) に関連付けられるものがある．たとえば，ガロア対の要件により $\mathcal{B} \subseteq g(f\mathcal{B})$ であるが，これが定理 3.26.3 である．また，定理 3.18.2 により $fgf = f$ が成り立つが，これが定理 3.26.3 系である．定理 3.26.11 の証明でこのガロア対を重用する．

定理 3.26.4 A^*, A **間の関係の集合** $\mathcal{R}$ **に対して和** $\bigcup \mathcal{R}$ **が** $(A, \mathcal{B})$ **の論理であるためには，各** $R \in \mathcal{R}$ **が** $(A, \mathcal{B})$ **の論理であることが必要十分である．**

証明　定理 3.26.2 と問題 3.26.6 による．

問題 3.26.10 $\mathcal{P}A {\rightarrow} \mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathbb{F}$ に対して和 $\bigcup_{\varphi \in \mathbb{F}} \varphi$ が $(A, \mathcal{B})$ の写像論理であるためには，各 $\varphi \in \mathbb{F}$ が $(A, \mathcal{B})$ の写像論理であることが必要十分である．各 $\varphi \in \mathbb{F}$ が増調な写像論理であれば $\bigcup_{\varphi \in \mathbb{F}} \varphi$ も増調な写像論理であり，有限的な写像論理についても同様のことが成り立つ．

略解　後半は問題 3.18.18 による（問題 3.9.39 参照）．

定理 3.26.5 $(A, \mathcal{B})$ **の論理の中に最大のものがある．これを** Q **で表せば，**A^*, A **間の関係** R **が** $(A, \mathcal{B})$ **の論理であるためには，**$R \subseteq Q$ **なることが必要十分である．**

証明　$\mathcal{B}$ 論理すべての和を Q とすれば，定理 3.26.4 により Q が最大 $\mathcal{B}$ 論理である．問題 3.26.7 により，A^*, A 間の関係 R が $R \subseteq Q$ をみたせば，R は $\mathcal{B}$ 論理である．

注意 3.26.2 問題 3.18.3 によれば，定理 3.26.5 も定理 3.26.4 も「$(A, \mathcal{B})$ の論理の全体は $\mathcal{P}(A^* \times A)$ の部分集合として $A^* \times A$ に関して覆閉的である」を意味する．また，問題 3.26.7 の前半は「$(A, \mathcal{B})$ の論理の全体は下方的である」を意味する．

系　$(A, \mathcal{B})$ **の弱論理の中に最大のものがある．これを** P **で表せば，**A^*, A **間の関係** R **が** $(A, \mathcal{B})$ **の弱論理であるためには，**$R \subseteq P$ **なることが必要十分である．**

証明　問題 3.26.5 と定理 3.26.5 による．

問題 3.26.11 $(A, \mathcal{B})$ の写像論理の中に最大のものがある（これを以後 λ で表す）．写像 $\varphi \in \mathcal{P}A {\rightarrow} \mathcal{P}A$ が $(A, \mathcal{B})$ の写像論理であるためには，$\varphi \subseteq \lambda$ なることが必要十分である．また，$(A, \mathcal{B})$ の増調な写像論理の中にも有限的な写像論理の中にも最大のものがあり（これらを以後それぞれ μ, ν で表す），これらについて次のことが成り立つ．

1. $\lambda X = \begin{cases} X & \cdots \quad X \in \mathcal{B} \text{ のとき} \\ A & \cdots \quad X \notin \mathcal{B} \text{ のとき} \end{cases}$
2. 任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対し $\mu X = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ が成り立つ．従って，μ は閉写であり，A の μ 理論の全体は μ の留域に，すなわち $\mathcal{B}$ の A に関する交包 $\mathcal{B}^{\cap}$ に等しい．従ってまた，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対し，μX は X を含む最小の A の μ 理論である．

3. ν は μ の有限核に等しい．従って，ν は閉写であり，A の ν 理論の全体は ν の留域に，すなわち $\mathcal{B}^{\cap}$ の概有限包 $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$（これはすなわち $\mathcal{B}$ の A に関する交概有限包である）に等しい．従ってまた，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対し，νX は X を含む最小の A の ν 理論である．

略解　2. 写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ を $\varphi X = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ と定める．問題 3.18.35 により，φ は閉写であり，特に増写であり，その留域は $\mathcal{B}^{\cap}$ に等しい．φ はまた写像論理である．従って $\varphi \subseteq \mu$ が成り立つ．$X \subseteq B \in \mathcal{B}$ なら $\mu X \subseteq \mu B \subseteq B$ であるから，逆に $\mu \subseteq \varphi$ が成り立ち，従って $\mu = \varphi$ である．特に μ は拡大律に従うから，A の μ 理論の全体は μ の留域に等しい．

3. μ が閉写であるから，問題 3.18.48 により，μ の有限核 μ' が存在し，μ' も閉写であり，μ' の留域は μ の留域 $\mathcal{B}^{\cap}$ の概有限包 $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ に等しい．ν も増調な写像論理なので $\nu \subseteq \mu$ が成り立ち，ν が有限的なので $\nu \subseteq \mu'$ が成り立つ．他方，$\mu' \subseteq \mu \subseteq \lambda$ なので μ' は写像論理である．従って $\nu = \mu'$ が成り立つ．特に ν は拡大律に従うから，A の ν 理論の全体は ν の留域に等しい．

問題 3.26.12　$\mu = \lambda$ であるためには，$\mathcal{B} - \{A\}$ が下方的であることが必要十分である．$\nu = \mu$ であるためには，$\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{B}^{\cap}$ であることが必要十分である．

略解　$\mu = \lambda$ であれば，$Y \subseteq X \in \mathcal{B} - \{A\}$ のとき，$\lambda Y = \mu Y \subseteq X \neq A$ であるから，$Y \in \mathcal{B} - \{A\}$ が成り立つ．逆に $\mathcal{B} - \{A\}$ が下方的であれば，$X \in \mathcal{P}A - \mathcal{B}$ に対し，$X \subseteq B \in \mathcal{B}$ なる B は A に限るから，$\mu X = A$ が成り立つ．後半は定理 3.18.1 による．

定理 3.26.5 とその系を踏まえて**以下この節では，そうでない旨断らない限り，**(A, B) **の最大論理と最大弱論理を** Q **と** P **で表す．**問題 3.26.5 により $Q \subseteq P$ が成り立つ．

問題 3.26.13　$\mathcal{B} \subseteq \{A\}$ であることは，$C = A$ であることとも，$Q = A^* \times A$ であることとも，$(A, \mathcal{B})$ の理論が A に限ることとも同等である．

定理 3.26.6　$(A, \mathcal{B})$ **の理論は** A **の** Q **理論（すなわち界** (A, Q) **の閉部分界）に他ならない．従って各** $X \in \mathcal{P}A$ **に対し，**$[X]_Q$ **は** X **を含む最小の** $(A, \mathcal{B})$ **の理論である．**

証明　$(A, \mathcal{B})$ の論理の全体を $\mathcal{R}$ で表せば，$Q = \bigcup \mathcal{R}$ であって，$(A, \mathcal{B})$ の理論は A の $\mathcal{R}$ 理論に他ならない．従って定理 3.26.2 によりこの定理が成り立つ．

問題 3.26.14　Q による 1 圏写像 φ_Q は ν に等しく，Q は偏束律に従い，A の Q 理論は ν 理論に他ならず，任意の $X \in \mathcal{P}A$ について $[X]_Q = \varphi_Q X = \nu X$ が成り立つ．

略解　φ_Q は問題 3.24.16 により有限的であり，問題 3.26.6 により写像論理である．従って $\varphi_Q \subseteq \nu$ が成り立つ．問題 3.24.16 によりまた，A^*, A 間の偏包容的関係 R で $\varphi_R = \nu$ なるものがあって $Q \subseteq R$ をみたす．ν が写像論理であるから R は $\mathcal{B}$ 論理であり，従って $Q = R$，従って Q は偏包容的で $\varphi_Q = \nu$，従って問題 3.26.11 により φ_Q は閉写である．従ってまた問題 3.24.16 により，A の Q 理論は ν 理論に他ならず，Q は偏束律に従い，$X \in \mathcal{P}A$ について $[X]_Q = \varphi_Q X = \nu X$ が成り立つ．

定理 3.26.7　$(\alpha, y) \in A^* \times A$ **が** $\alpha \, Q \, y$ **をみたすためには，任意の** $B \in \mathcal{B}$ **に対して条件**

$$\alpha \not\subseteq B \text{ または } y \in B \tag{3.26.1}$$

をみたすことが必要十分である．

注意 3.26.3 (3.26.1) は $B = A$ の場合は任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ によってみたされる．従って定理 3.26.7 は,「$B \in \mathcal{B}$」を「$B \in \mathcal{B} - \{A\}$」に換えても成り立つ．

(3.26.1) は，(α, y) が問題 3.20.6 のように定義した偏 B 関係 $\models_B$ をみたすことと同等である．従って定理 3.26.7 は

$$Q = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \models_B \qquad \text{とも} \qquad Q = \bigcap_{B \in \mathcal{B} - \{A\}} \models_B$$

とも書ける．(3.26.1) はまた

$$\alpha \subseteq B \implies y \in B$$

とも書け，従って定理 3.26.7 は

$$\alpha \, Q \, y \iff y \in \bigcap_{\alpha \subseteq B \in \mathcal{B}} B \qquad \text{とも} \qquad \alpha \, Q \, y \iff y \in \bigcap_{\alpha \subseteq B \in \mathcal{B} - \{A\}} B$$

とも書けて（問題 3.26.15 と問題 3.26.25 と定理 3.26.11 参照），特に次のことを含意する．

$$\varepsilon \, Q \, y \iff y \in C$$

定理 3.26.7 の証明　A^*, A 間の関係 Q' を「$\alpha \, Q' \, y \iff \alpha \subseteq B$ なる任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $y \in B$」と定義する．任意の $B \in \mathcal{B}$ をとって $\alpha \subseteq B$, $y \in A$, $\alpha \, Q' \, y$ と仮定すれば，Q' の定義により $y \in B$ が成り立つ．つまり任意の与論が Q' で閉じているから，Q' は $\mathcal{B}$ 論理であり，従って $Q' \subseteq Q$ が成り立つ．次に $\alpha \, Q \, y$ と仮定すれば，任意の与論が Q で閉じていることにより $\alpha \subseteq B$ なる任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し $y \in B$ となるから，$\alpha \, Q' \, y$ が成り立つ．つまり $Q \subseteq Q'$ も成り立つ．

写像論理を使う別証　問題 3.26.14 と問題 3.24.16 により $R_\nu = R_{\varphi_Q} = \overline{Q} = Q$ であるから，任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対して，問題 3.26.11 と問題 3.18.48 を使って次のように推論することができる．

$$\alpha \, Q \, y \iff \alpha \, R_\nu \, y \iff \nu\alpha \ni y \iff \mu\alpha \ni y \iff y \in \bigcap_{\alpha \subseteq B \in \mathcal{B}} B$$

系　$(\alpha, y) \in A^* \times A$ **が** $\alpha \, P \, y$ **をみたすためには，**$\alpha \not\subseteq C$ **または** $y \in C$ **をみたすことが必要十分である．**

証明　問題 3.26.5 と定理 3.26.7 による．

問題 3.26.15　A の任意の部分集合 X に対して $\bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B} - \{A\}} B$ が成り立つ．

問題 3.26.16　A を集合とし，$\mathcal{P}A$ の各部分集合 $\mathcal{B}$ に対し，論対 $(A, \mathcal{B})$ の最大論理を $F\mathcal{B}$ で表す（従って $F\mathcal{B}$ は $A^* \times A$ の部分集合である）．逆に，$A^* \times A$ の各部分集合 R に対し，R を A^*, A 間の関係とみなして，A の R 理論の全体を GR で表す（従って GR は $\mathcal{P}A$ の部分集合である）．このとき，写像 $F \in \mathcal{P}(\mathcal{P}A) \to \mathcal{P}(A^* \times A)$ と $G \in \mathcal{P}(A^* \times A) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ は，包含関係 $\subseteq$ に関してガロア対を成し，これから出来る $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写 GF は問題 3.26.9 のガロア対から出来る閉写 gf に等しい．

略解　$B \in \mathcal{P}A$ と $(\alpha, y) \in A^* \times A$ が「$\alpha \not\subseteq B$ または $y \in B$」をみたすことを $B \, \mathcal{C} \, (\alpha, y)$ で表す．こうして得られる $\mathcal{P}A$, $A^* \times A$ 間の関係 $\mathcal{C}$ に問題 3.18.28 を使えばいい．なぜなら，$R \in \mathcal{P}(A^* \times A)$ のとき，$B \in \mathcal{P}A$ が任意の $(\alpha, y) \in R$ に対して $B \, \mathcal{C} \, (\alpha, y)$ をみたすことは，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ が $\alpha \, R \, y$ と $\alpha \subseteq B$ をみたせば $y \in B$ であることと，つまり B が R 理論であることと同等だからである．

問題 3.26.17 (✓) $\mathcal{R}$ を A^*, A 間の関係の集合とし $\mathcal{B}$ を $\mathcal{R}$ 理論の全体とすれば，論対 $(A, \mathcal{B})$ の最大論理は $(\bigcup \mathcal{R})^\emptyset$ に等しい．従って，問題 3.26.9 のガロア対から出来る $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A^* \times A))$ 上の閉写 fg は写像 $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{P}\big((\bigcup \mathcal{R})^\emptyset\big)$ に等しく，問題 3.26.16 のガロア対から出来る $\mathcal{P}(A^* \times A)$ 上の閉写 FG は写像 $R \mapsto R^\emptyset$ に等しい．

略解　定理 3.26.2 により $\mathcal{R} = \{R\}$ としていい．$(A, \mathcal{B})$ の最大論理を Q で表すと，定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により，任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対し「$\alpha\, Q\, y \iff [\alpha]_R \ni y \iff \alpha\, R^\emptyset\, y$」が成り立つ．

定理 3.26.8　最大論理 Q は偏束律に従い，A の任意の部分集合 X と任意の $\alpha \in A^*$ について

$$[X]_Q = \{y \in A \mid \beta\, Q\, y \text{ かつ } \beta \subseteq X \text{ なる } \beta \in A^* \text{ がある }\}$$
$$[\alpha]_Q = \{y \in A \mid \alpha\, Q\, y\}$$

なる二式が成り立つ．

証明　第二式以外のことは問題 3.26.14 に既に記してある．第二式は定理 3.24.13 系による．
写像論理を使わない別証　問題 3.26.6 により Q の $\emptyset$ 包 $Q^\emptyset$ も $\mathcal{B}$ 論理であるから，$Q^\emptyset = Q$ であり，従って定理 3.25.2 により Q は偏束律に従う．後半の第一式は定理 3.24.13 による．
写像論理も偏生成関係も使わない別証 1（前半のみ） 定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により $Q = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \vDash_B$ が成り立つ．問題 3.20.6 により各 $\vDash_B$ が偏束律に従うから，問題 3.20.3 により Q も偏束律に従う．
写像論理も偏生成関係も使わない別証 2（前半のみ） 各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して $\varphi X = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ と定義して出来る写像 $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ は問題 3.18.35 により閉写であり，定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により「$\alpha\, Q\, y \iff \varphi\alpha \ni y$」が成り立つから，問題 3.20.7 により Q は偏束律に従う．

定理 3.26.9　核 C は，界 (A, Q) の核 $A_Q = \{y \in A \mid \varepsilon\, Q\, y\}$ にも，A の最小の Q 理論（すなわち界 (A, Q) の最小の閉部分界 $[\emptyset]_Q$）にも，$(A, \mathcal{B})$ の最小の理論にも等しい．

証明　注意 3.26.3 に記した通り，$C = A_Q$ なることは定理 3.26.7 で示されている．定理 3.26.8 により $A_Q = [\emptyset]_Q$ が成り立ち，定理 3.26.6 により $[\emptyset]_Q$ は $(A, \mathcal{B})$ の最小の理論に等しい．

問題 3.26.18　$C = \mu\emptyset = \nu\emptyset$ が成り立つ．

略解　問題 3.18.48 と問題 3.26.11 により $\nu\emptyset = \mu\emptyset = C$.

問題 3.26.19　A の任意の部分集合 X と C の任意の部分集合 D に対して $[X]_Q = [X \cup D]_Q$ が成り立つ．

略解　$[X]_Q \supseteq [\emptyset]_Q = C$ が成り立つからである．

問題 3.26.20 (✓)　Q の特異核を Q' で表せば，$(A, \mathcal{B})$ の理論は A の C を含む Q' 理論に他ならず，また A の空でない Q' 理論に他ならない．

略解　問題 3.24.12 などによる．

問題 3.26.21 (✓) A が代数系で $\mathcal{B}$ が A の台部分系の全体であるとき，A の代数構造の関係化を R で表せば $Q = R^{\emptyset}$ が成り立ち，「$a \, Q \, y \iff [a]_A \ni y$」が成り立ち，$A$ の任意の部分集合 X に対して $[X]_Q = [X]_A$ が成り立ち，$\mathcal{B}$ が $(A, \mathcal{B})$ の理論の全体に等しく，$C = \emptyset$ が成り立つ．

A が第一分離公理をみたす位相空間で $\mathcal{B}$ が A の開集合系または閉集合系であれば，「$a \, Q \, y \iff a \ni y$」が成り立ち（つまり Q は A^*, A 間の最小偏束関係であり），A の任意の部分集合 X に対して $[X]_Q = X$ が成り立ち，$\mathcal{P}A$ が $(A, \mathcal{B})$ の理論の全体に等しく，$C = \emptyset$ が成り立つ．

略解　Q についてのことは定理 3.26.7 あるいは問題 3.26.17 と定理 3.26.8 などによる．

定理 3.26.10 **A の P 理論は C と A に限る．**

証明　後出の定理 3.26.12 と問題 3.26.28 を使う方が見通しがいいが，ここでは次のようにする．論対 $(A, \{C\})$ の核は C であり，最大論理は問題 3.26.5 により P に等しい．従って定理 3.26.9 により，C は A の最小の P 理論である．X を A の C と異なる P 理論とする．そうすると $x \in X - C$ なる x があり，任意の $y \in A$ は，定理 3.26.7 系により $x \, P \, y$ をみたすから X に属す．従って $X = A$ が成り立つ．

定理 3.26.11 **論対 $(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ についての次の三条件は同等である（これら条件がみたされるとき，$(A, \mathcal{B})$ は $(A, \mathcal{B}')$ に覆われると言う）．**

1. **$(A, \mathcal{B})$ の論理は $(A, \mathcal{B}')$ の論理でもある．**
2. **$(A, \mathcal{B}')$ の理論は $(A, \mathcal{B})$ の理論でもある．**
3. **$(A, \mathcal{B})$ の最大論理は $(A, \mathcal{B}')$ の最大論理に含まれる．**

$(A, \mathcal{B})$ が $(A, \mathcal{B}')$ に覆われれば，$(A, \mathcal{B})$ の核は $(A, \mathcal{B}')$ の核に含まれる．また，次の三条件は同等である（これら条件がみたされるとき，$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ は同値であると言う [66]）．

4. **$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ の論理の全体は等しい．**
5. **$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ の理論の全体は等しい．**
6. **$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ の最大論理は等しい．**

また，$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ が同値であれば，$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ の核は等しい（すなわち $(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ は次の系で定める意味で弱同値である）．

証明　後半は前半から直ちに得られる．定理 3.18.2 により問題 3.26.9 と 問題 3.26.16のガロア対 (f, g) と (F, G) について $fgf = f$ と $FGF = F$，従って「$f\mathcal{B} \subseteq f\mathcal{B}' \iff g(f\mathcal{B}) \supseteq g(f\mathcal{B}')$」と「$F\mathcal{B} \subseteq F\mathcal{B}' \iff G(F\mathcal{B}) \supseteq G(F\mathcal{B}')$」が成り立つ．問題 3.26.16 により $gf = GF$ であり，問題 3.26.9 により $g(f\mathcal{B})$ と $g(f\mathcal{B}')$ はそれぞれ $(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ の理論の全体であるから，条件 1 – 3 は同等である．定理 3.26.9 により，条件 2 または条件 3 の下で $(A, \mathcal{B})$ の核は $(A, \mathcal{B}')$ の核に含まれる．

系　**論対 $(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ についての次の三条件は同等である．**

1. **$(A, \mathcal{B})$ の弱論理は $(A, \mathcal{B}')$ の弱論理である．**

[66] 論対間の「覆われる」という関係は擬順序関係であり，その対称核が「同値」という関係である．問題 3.9.55 参照．

2. $(A,\mathcal{B}')$ **の核は** $(A,\mathcal{B})$ **の核または** A **に等しい．**

3. $(A,\mathcal{B})$ **の最大弱論理は** $(A,\mathcal{B}')$ **の最大弱論理に含まれる．**

これら条件の下で $(A,\mathcal{B})$ **の核は** $(A,\mathcal{B}')$ **の核に含まれる．また，次の三条件は同等である（これら条件がみたされるとき，**$(A,\mathcal{B})$ **と** $(A,\mathcal{B}')$ **は弱同値であると言う）．**

4. $(A,\mathcal{B})$ **と** $(A,\mathcal{B}')$ **の弱論理の全体は等しい．**

5. $(A,\mathcal{B})$ **と** $(A,\mathcal{B}')$ **の核は等しい．**

6. $(A,\mathcal{B})$ **と** $(A,\mathcal{B}')$ **の最大弱論理は等しい．**

証明　条件 2 は $\{C',A\}\subseteq\{C,A\}$ と同等である．また，$C\cap A=C$ かつ $C'\cap A=C'$ であるから，$\{C,A\}=\{C',A\}$ なることは $C=C'$ なることと同等である．従って問題 3.26.5 と定理 3.26.6 と定理 3.26.10 と定理 3.26.11 によりこの系が成り立つ．

注意 3.26.4 論対についての概念の中で同値な論対によって共有されるものを**同値普遍**な概念と呼ぶ．たとえば定理 3.26.11 とその系によれば，論理の全体・理論の全体・最大論理・弱論理の全体・核・最大弱論理は，同値な論対によって共有されるから同値普遍な概念である．

問題 3.26.22 論対 $(A,\mathcal{B})$, $(A,\mathcal{B}')$ の最大論理を Q,Q' とするとき，$(A,\mathcal{B})$ と $(A,\mathcal{B}')$ が同値であるためには生成対 $(Q,\emptyset)$ と $(Q',\emptyset)$ が同値であることが必要十分であり，最大弱論理と弱同値性の関係についても同様である．

問題 3.26.23 $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ を $\mathcal{B}$ の部分集合族で $\mathcal{B}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{B}_i$ なるものとし，$\mathcal{B}'=\left\{\bigcap_{B\in\mathcal{B}_i}B \mid i\in I\right\}$ と定めれば，$(A,\mathcal{B})$ は論対 $(A,\mathcal{B}')$ に覆われ $(A,\mathcal{B}')$ と弱同値である．

問題 3.26.24 (✓) 定理 3.26.11 の同等な三条件 1 – 3 は，$(A,\mathcal{B})$ の最大有限的写像論理が $(A,\mathcal{B}')$ の最大有限的写像論理に含まれることとも同等である．従って，$(A,\mathcal{B})$ と $(A,\mathcal{B}')$ が同値であるためには，$(A,\mathcal{B})$ と $(A,\mathcal{B}')$ の最大有限的写像論理が等しいことが必要十分である．

問題 3.26.25 $(A,\mathcal{B})$ は論対 $(A,\mathcal{B}-\{A\})$ とも論対 $(A,\mathcal{B}\cup\{A\})$ とも同値である（問題 3.28.9 参照）．

略解　注意 3.26.3 による．

補題 3.26.1 $\mathcal{B}'\subseteq\mathcal{B}$ **であって** $\mathcal{B}$ **が** $\mathcal{B}'$ **の** A **に関する交概有限包** $\overline{\mathcal{B}'^{\cap}}$ **に含まれれば，論対** $(A,\mathcal{B}')$ **は** $(A,\mathcal{B})$ **と同値である．**

証明　$\mathcal{B}'\subseteq\mathcal{B}$ なので，$\mathcal{B}$ 論理は定義により $\mathcal{B}'$ 論理である．逆に R が $\mathcal{B}'$ 論理であれば，問題 3.26.6 により $\mathcal{B}'$ の任意の元が R 理論であり，従って問題 3.26.1 と問題 3.18.49 により $\overline{\mathcal{B}'^{\cap}}$ の任意の元が R 理論であり，特に $\mathcal{B}$ の任意の元が R 理論であるから，再び問題 3.26.6 により，R は $\mathcal{B}$ 論理である．

定理 3.26.12 $(A,\mathcal{B})$ **の理論の全体は，**$\mathcal{B}$ **の** A **に関する交概有限包** $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ **に等しい！**

証明　定理 3.26.6 と問題 3.26.14 と問題 3.26.11 による．

写像論理を使わない別証　補題 3.26.1 と定理 3.26.11 における「同値」の定義により，$(A, \mathcal{B})$ の理論の全体は論対 $(A, \overline{\mathcal{B}^\cap})$ の理論の全体に等しい．従って，$\mathcal{B}$ が A に関して交閉的かつ概有限であると仮定して $(A, \mathcal{B})$ の理論の全体が $\mathcal{B}$ に等しいことを示せばいいが，定理 3.26.3 により $\mathcal{B}$ の元は $(A, \mathcal{B})$ の理論なので，$(A, \mathcal{B})$ の任意の理論 X が $\mathcal{B}$ に属すことを示せばいい．それには，$\mathcal{B}$ が概有限なので，X が $\mathcal{B}$ によって超被覆されることを示せばいい．そこで，任意の $Y \in \mathcal{P}'X$ をとる．そうすると，$\mathcal{B}$ が A に関して交閉的であるから，$B' = \bigcap_{Y \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ が $Y \subseteq B' \in \mathcal{B}$ をみたす．従って $B' \subseteq X$ を示せばいい．示すために，Y の元をすべて並べて出来る A^* の元を α で表す．そうすると $B' = \bigcap_{\alpha \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ であるので，定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により，任意の $y \in B'$ が $\alpha \, Q \, y$ をみたす．$\alpha \subseteq X$ であって X が Q で閉じているから，$B' \subseteq X$ が確かに成り立つ．

系　$(A, \mathcal{B})$ **が論対** $(A, \mathcal{B}')$ **に覆われるためには** $\overline{\mathcal{B}^\cap} \supseteq \overline{\mathcal{B}'^\cap}$ **なることが必要十分であり，**$(A, \mathcal{B})$ **が** $(A, \mathcal{B}')$ **と同値であるためには，**$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \overline{\mathcal{B}'^\cap}$ **なることが必要十分である．**

証明　定理 3.26.11 における「覆われ」と「同値」の定義と定理 3.26.12 による．

問題 3.26.26 (✓)　問題 3.26.9 と問題 3.26.16 のガロア対から出来る $\mathcal{P}(\mathcal{P}A)$ 上の閉写 gf と GF は，共に写像 $\mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{B}^\cap}$ に等しい．

問題 3.26.27 (✓)　A を集合とするとき，次のことが成り立つ．

1. $\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が A に関して交閉的かつ概有限であるためには，A^*, A 間のある関係 R に対して $\mathcal{B}$ が A の R 理論の全体（これを $\mathcal{B}_R$ で表す）に等しいことが必要十分である（問題 3.26.30 参照）．

2. A^*, A 間の関係 R が偏束律に従うためには，$\mathcal{P}A$ のある部分集合 $\mathcal{B}$ に対して R が論対 $(A, \mathcal{B})$ の最大論理（これを $Q_{\mathcal{B}}$ で表す）に等しいことが必要十分である．

3. $\mathcal{P}A$ の A に関して交閉的かつ概有限な部分集合の全体を $\mathfrak{B}$ で表し，A^*, A 間の偏束関係の全体を $\mathfrak{R}$ で表し，これらを包含関係 $\subseteq$ によって順序集合と成す．また，写像 $\mathcal{B} \mapsto Q_{\mathcal{B}}$ の $\mathfrak{B}$ への制限を $\mathfrak{q}$ で表し，写像 $R \mapsto \mathcal{B}_R$ の $\mathfrak{R}$ への制限を $\mathfrak{b}$ で表す．そうすると $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{b}$ とは，$\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{R}$ の間の逆順写であって互いに他の逆写像である．

略解　定理 3.18.2 のガロア対の一般論を問題 3.26.16 のガロア対 (F, G) に適用すればいい．まず問題 3.26.26 により，G の像は閉写 $\mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{B}^\cap}$ の留域すなわち $\mathfrak{B}$ に等しい．次に，F の像は，問題 3.26.17 により閉写 $R \mapsto R^\emptyset$ の留域に等しく，それは定理 3.25.4 により $\mathfrak{R}$ に等しい．

問題 3.26.28　$\mathcal{B} = \{B\}$ であれば $\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap = \{A, B\}$ が成り立つ．

略解　問題 3.18.2 による．

定義 3.26.1　論対の全体を言語 A と与論系 $\mathcal{B}$ の性質によって次の三種に分類する．

第一種　$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}$ であるもの．つまり $\mathcal{B}$ が A に関して交閉的かつ概有限のもの．

第二種　$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap \neq \mathcal{B}$ であるもの．つまり $\mathcal{B}$ が A に関して非交閉的で $\mathcal{B}^\cap$ が概有限のもの．

第三種　$\overline{\mathcal{B}^\cap} \neq \mathcal{B}^\cap$ であるもの．つまり $\mathcal{B}^\cap$ が非概有限のもの．

$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}$ であることは $\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap = \mathcal{B}$ であることと同等である．従って，任意の論対はこの三種のどれか唯一つに属し，$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap$ であることは第二種以下であることと同等である．

問題 3.26.29 論対の種別について次のことが成り立つ．

1. $A \notin \mathcal{B}$ なら $(A, \mathcal{B})$ は第一種ではない．従って論対 $(A, \mathcal{B} - \{A\})$ は第一種ではない．
2. $A \in \mathcal{B}$ の場合，$(A, \mathcal{B})$ が第一種であるためには，$\mathcal{B} - \{A\}$ の元の空でない族の交わりがすべて $\mathcal{B} - \{A\}$ に属して $\mathcal{B}$ が概有限であることが必要十分である．従ってさらに $\mathcal{B} - \{A\}$ が包含関係 $\subseteq$ に関して離散的の場合，$(A, \mathcal{B})$ が第一種であるためには，$\mathcal{B} = \{A, B\}$ なる B のあることが必要十分である．
3. $(A, \mathcal{B})$ が第二種以下であるためには，$(A, \mathcal{B} - \{A\})$ が第二種であることも，論対 $(A, \mathcal{B}^\cap)$ が第一種であることも，共に必要十分である．
4. $(A, \mathcal{B})$ が第三種なら論対 $(A, \mathcal{B}^\cap)$ も第三種である．
5. 論対 $(A, \overline{\mathcal{B}^\cap})$ は第一種である．
6. 任意の論対は第一種の論対とも第二種以上の論対とも同値である．従って論対の種別は同値普遍な概念ではない．

略解　1. $A \notin \mathcal{B}$ なら $\mathcal{B}^\cap \neq \mathcal{B}$ となるからである．
2. 問題 3.9.34 と問題 3.18.3 による．
3. $(A, \mathcal{B} - \{A\})$ についてのことは $\mathcal{B}^\cap = (\mathcal{B} - \{A\})^\cap$ が成り立つことによる．
6. 結論 5 と定理 3.26.12 系および結論 1 と問題 3.26.25 による．

問題 3.26.30 論対 $(A, \mathcal{B})$ についての次の諸条件は同等である．

1. $(A, \mathcal{B})$ は第一種である．
2. $\mathcal{B}$ は $(A, \mathcal{B})$ の理論の全体に等しい．
3. $\mathcal{B}$ は A を言語とするある論対の理論の全体に等しい．
4. $\mathcal{B}$ は A を台とするある偏束界の閉部分界の全体に等しい．
5. $\mathcal{B}$ は A を台とするある界の閉部分界の全体に等しい．
6. A 上のある論拠 (R, D) に対して，$\mathcal{B}$ は A の R 理論で D を含むものの全体に等しい．

略解　$(1 \Longrightarrow 2)$ は定理 3.26.12 により，$(3 \Longrightarrow 4)$ は定理 3.26.6 と定理 3.26.8 により，$(5 \Longrightarrow 6)$ は $D = \emptyset$ とすればよく，$(6 \Longrightarrow 1)$ は問題 3.26.1 と定理 3.24.11 による．

問題 3.26.31 (✓) 論対 $(A, \mathcal{B})$ が第二種以下であるためには，$(A, \mathcal{B})$ の最大有限的写像論理 ν と最大増調写像論理 μ が等しいことが必要十分である．

略解　問題 3.26.12 による．

問題 3.26.32 (✓) A が代数系で $\mathcal{B}$ が A の台部分系の全体であれば，論対 $(A, \mathcal{B})$ は第一種である．
A が第一分離公理をみたす非離散位相空間であるとき，$\mathcal{B}$ が A の開集合系であれば論対 $(A, \mathcal{B})$ は第二種であり，$\mathcal{B}$ が A の閉集合系であれば論対 $(A, \mathcal{B})$ は第三種である．

略解　前半は問題 3.24.1 と問題 3.26.30 により，後半は問題 3.18.46 による．

定理 3.26.13 論対 $(A', \mathcal{B}')$ と $(A, \mathcal{B})$ が $A \subseteq A'$ と $\mathcal{B} = \{B' \cap A \mid B' \in \mathcal{B}'\}$ をみたすとき（このとき，$(A', \mathcal{B}')$ は $(A, \mathcal{B})$ の<u>拡大</u>であるとか $(A, \mathcal{B})$ は $(A', \mathcal{B}')$ の<u>縮小</u>であるとかと言い，$\{B' \cap A \mid B' \in \mathcal{B}'\}$ を時に $\mathcal{B}' \cap A$ と略記する），次のことが成り立つ．

1. **C は $(A', \mathcal{B}')$ の核 C' と A の交わりに等しい．**
2. **Q は $(A', \mathcal{B}')$ の最大論理 Q' の $A^* \times A$ への制限に等しい．**
3. **$(A, \mathcal{B})$ の論理の全体は，$(A', \mathcal{B}')$ の論理の $A^* \times A$ への制限の全体に等しい．**
4. **$(A, \mathcal{B})$ の理論の全体は，$(A', \mathcal{B}')$ の理論と A の交わりの全体に等しい．また，A の任意の部分集合 X に対して $[X]_{(A,Q)} = [X]_{(A',Q')} \cap A$ が成り立つ．**

証明　1. $C = \bigcap \mathcal{B} = \bigcap_{B' \in \mathcal{B}'} (B' \cap A) = (\bigcap \mathcal{B}') \cap A = C' \cap A$ と証明される．
2. 任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対し，定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により次のようにして証明される．

$$\begin{aligned} \alpha\, Q'\, y &\iff y \in \textstyle\bigcap_{\alpha \subseteq B' \in \mathcal{B}'} B' \iff y \in \bigcap_{\alpha \subseteq B' \in \mathcal{B}'} (B' \cap A) \\ &\iff y \in \textstyle\bigcap_{\alpha \subseteq B' \cap A,\ B' \in \mathcal{B}'} (B' \cap A) \iff y \in \bigcap_{\alpha \subseteq B \in \mathcal{B}} B \iff \alpha\, Q\, y \end{aligned}$$

3. R が $(A, \mathcal{B})$ の論理であれば，$R \subseteq Q$ であるから，結論 2 により $R \subseteq Q'$ が成り立ち，従って定理 3.26.5 により R は $(A', \mathcal{B}')$ の論理であって，$R = R|_{A^* \times A}$ が成り立つ．逆に R' が $(A', \mathcal{B}')$ の論理であれば，$R' \subseteq Q'$ であるから，結論 2 により $R'|_{A^* \times A} \subseteq Q$ となって，定理 3.26.5 により $R'|_{A^* \times A}$ は $(A, \mathcal{B})$ の論理である．従って結論 3 が成り立つ．
4. 定理 3.26.6 により，$(A, \mathcal{B})$ の理論の全体は界 (A, Q) の閉部分界の全体に等しく，$(A', \mathcal{B}')$ の理論の全体は界 (A', Q') の閉部分界の全体に等しい．結論 2 により (A', Q') が (A, Q) の拡大であって定理 3.26.8 により Q' が偏束律に従うから，定理 3.24.16 により結論 4 が成り立つ．

問題 3.26.33 論対 $(A', \mathcal{B}'_i)$ が論対 $(A, \mathcal{B}_i)$ の拡大であるとする $(i = 1, 2)$．このとき，$(A', \mathcal{B}'_1)$ が $(A', \mathcal{B}'_2)$ に覆われれば $(A, \mathcal{B}_1)$ は $(A, \mathcal{B}_2)$ に覆われ，$(A', \mathcal{B}'_1)$ が $(A', \mathcal{B}'_2)$ と同値であれば $(A, \mathcal{B}_1)$ は $(A, \mathcal{B}_2)$ と同値である．

問題 3.26.34 論対 $(A', \mathcal{B}')$ が $(A, \mathcal{B})$ の拡大であれば，論対 $(A', \mathcal{B}'^{\cap})$ は論対 $(A, \mathcal{B}^{\cap})$ の拡大であり，論対 $(A', \overline{\mathcal{B}'^{\cap}})$ は論対 $(A, \overline{\mathcal{B}^{\cap}})$ の拡大である．

略解　条件 $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cap A$ の下では，交包の定義により $\mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{B}'^{\cap} \cap A$ が成り立ち，定理 3.26.12 と定理 3.26.13 により $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \overline{\mathcal{B}'^{\cap}} \cap A$ が成り立つ．

問題 3.26.35 論対 $(A', \mathcal{B}')$ が $(A, \mathcal{B})$ の拡大であるとする．このとき，$(A', \mathcal{B}')$ が第一種なら $(A, \mathcal{B})$ も第一種であり，$(A', \mathcal{B}')$ が第二種なら $(A, \mathcal{B})$ は第二種以下である．従って，$(A, \mathcal{B})$ が第三種なら $(A', \mathcal{B}')$ も第三種である．

略解　問題 3.26.34 による．

問題 3.26.36 (✓) A' を代数系とし，A を A' の台部分系とし，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ をそれぞれ A と A' の台部分系の全体とする．このとき論対 $(A,\mathcal{B})$ は論対 $(A',\mathcal{B}')$ の縮小である．

A' を位相空間とし，A を A' の部分位相空間とし，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ をそれぞれ A と A' の開集合全体とする．このとき論対 $(A,\mathcal{B})$ は論対 $(A',\mathcal{B}')$ の縮小である．$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ をそれぞれ A と A' の閉集合全体としても同様に成り立つ．

定義 3.26.2 (✓) A の各部分集合 G に対し，$\mathcal{B}$ の G 上方 $\mathcal{B}^G = \{B \in \mathcal{B} \mid G \subseteq B\}$ から出来る論対 $(A,\mathcal{B}^G)$ を $(A,\mathcal{B})$ の G **上方**と呼ぶ．

定理 3.26.14 (✓) **G を A の部分集合とする．このとき，$(A,\mathcal{B})$ が第二種以下であるか，または G が有限集合であれば，$(A,\mathcal{B})$ の G 上方 $(A,\mathcal{B}^G)$ について次のことが成り立つ．**

1. **$(A,\mathcal{B}^G)$ の最大論理は Q^G に等しい．**
2. **$(A,\mathcal{B}^G)$ の理論の全体は $(A,\mathcal{B})$ の G を含む理論の全体に等しい．**
3. **$(A,\mathcal{B}^G)$ の核は $[G]_Q$ に等しい．**
4. **$(A,\mathcal{B})$ が第二種以下の場合，$(A,\mathcal{B}^G)$ も第二種以下である．**

証明　G が有限集合であるか，または $\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap$ であれば，問題 3.18.44 により $\overline{(\mathcal{B}^\cap)^G} = \overline{\mathcal{B}^\cap}^G$ が成り立ち，他方で無条件に $(\mathcal{B}^\cap)^G = (\mathcal{B}^G)^\cap$ であるから，$\overline{(\mathcal{B}^G)^\cap} = \overline{\mathcal{B}^\cap}^G$ が成り立つ．これは定理 3.26.12 によれば，結論 2 が成り立つことを示す．

$(A,\mathcal{B}^G)$ の最大論理を Q' で表す．そうすると定理 3.26.6 により結論 2 は，界 (A,Q') の閉部分界の全体が界 (A,Q) の G を含む閉部分界の全体に等しいことと同等であり，これは定理 3.26.8 と定理 3.25.5 系によれば，$Q' = Q^G$ なることと同等である．従って結論 1 が成り立つ．

$(A,\mathcal{B}^G)$ の核は，結論 1 と定理 3.26.9 により $[\emptyset]_{Q^G}$ に等しく，従って定理 3.25.3 により $[G]_Q$ に等しい．

$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap$ の場合，問題 3.18.44 により $\overline{(\mathcal{B}^\cap)^G} = (\mathcal{B}^\cap)^G$ が成り立ち，また $(\mathcal{B}^\cap)^G = (\mathcal{B}^G)^\cap$ であるから，$\overline{(\mathcal{B}^G)^\cap} = (\mathcal{B}^G)^\cap$ が成り立つ．

注意 3.26.5 (✓) 定理 3.26.14 の証明が示す通り，A の任意の部分集合 G に対し，定理 3.26.14 の条件 1, 2 は同等である．

3.27　無矛盾集合・実例・完全集合・補法

＄ **この節を通じて，$(A,\mathcal{B})$ を論対とし，Q をその最大論理とする．** また，AZ 記法・列便法を含めて第 3.19 節と同様の記法・便法を用いる．

定義 3.27.1 A の部分集合 X が $[X]_Q = A$ をみたすとき，X を $(A,\mathcal{B})$ の**矛盾集合**と呼んだり X は $\mathcal{B}$ **矛盾**であると言ったりする（その理由は定理 3.30.26 を見れば分かるであろう）．特に，A の元 x に対し $\{x\}$ が $\mathcal{B}$ 矛盾であるとき，x を $(A,\mathcal{B})$ の**矛盾元**と呼んだり x は $\mathcal{B}$ **矛盾**であると言ったりする．さらに,「矛盾」の対立概念を「無矛盾」で表す．以上より一般に，しかし以上とは違う趣旨で，A の任意の部分集合 X に対し，A の部分集合 Y で $[Y]_Q = X$ をみたすものを X の $\mathcal{B}$ **公理**と呼ぶ．

問題 3.27.1 $(A, \mathcal{B})$ が論対 $(A, \mathcal{B}')$ に覆われれば，$(A, \mathcal{B})$ の矛盾集合は $(A, \mathcal{B}')$ の矛盾集合でもある．従って $(A, \mathcal{B})$ が $(A, \mathcal{B}')$ と同値であれば，$(A, \mathcal{B})$ の矛盾集合全体は $(A, \mathcal{B}')$ の矛盾集合全体に等しい（これの逆について定理 3.30.31 参照）．つまり，論対の矛盾集合の概念は同値普遍である．

問題 3.27.2 A の部分集合 Y が A の部分集合 X の $\mathcal{B}$ 公理であるためには，X が $(A, \mathcal{B})$ の理論であって Y が $(A, \mathcal{B})$ の縮小 $(X, \mathcal{B} \cap X)$ の矛盾集合であることが必要十分である．

略解　論対 $(X, \mathcal{B} \cap X)$ の最大論理を Q' で表せば，定理 3.26.13 により $Q' = Q|_{X^* \times X}$ が成り立つ．従って定理 3.24.3 により，X が A の Q 理論で $Y \subseteq X$ のとき，$[Y]_Q = [Y]_{Q'}$ が成り立つ．

問題 3.27.3 (✓) A が代数系で $\mathcal{B}$ が A の台部分系の全体であれば，$(A, \mathcal{B})$ の矛盾集合は A の生成系に他ならない．A が第一分離公理をみたす位相空間で $\mathcal{B}$ が A の開集合系または閉集合系であれば，$(A, \mathcal{B})$ の矛盾集合は A のみである．

略解　問題 3.26.21 による．

定理 3.27.1 $(A, \mathcal{B})$ **の矛盾集合について次のことが成り立つ．**

1. A **の部分集合** X **が** $\mathcal{B}$ **矛盾であるためには，各** $y \in A$ **に応じて** $\alpha\, Q\, y$ **かつ** $\alpha \subseteq X$ **なる** $\alpha \in A^*$ **の存在することが必要十分である．**

2. A **の有限部分集合** $\{x_1, \ldots, x_n\}$ **が** $\mathcal{B}$ **矛盾であるためには，任意の** $y \in A$ **に対して** $x_1 \cdots x_n\, Q\, y$ **をみたすことが必要十分である．**

証明　定理 3.26.8 による．

定理 3.27.2 $(A, \mathcal{B})$ **の有限矛盾集合** $\{x_1, \ldots, x_n\}$ **が存在すれば，**A **の部分集合** X **についての次の五条件は同等である！**

1. X **は** $(A, \mathcal{B})$ **の矛盾集合である．**

2. $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [X]_Q$

3. $\alpha \subseteq X$ **なるある** $\alpha \in A^*$ **が任意の** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して** $\alpha\, Q\, x_i$ **をみたす．**

4. $\alpha \subseteq X$ **なるある** $\alpha \in A^*$ **が任意の** $y \in A$ **に対して** $\alpha\, Q\, y$ **をみたす．**

5. X **のある有限部分集合が** $(A, \mathcal{B})$ **の矛盾集合である．**

従って，$(A, \mathcal{B})$ **の有限矛盾集合が存在すれば，**$(A, \mathcal{B})$ **の無矛盾集合の全体は** $\mathcal{P}A$ **の有限的部分集合である（このことは定理 3.27.4 で精密化する）．**

証明　最後の注意は，条件 1, 5 が同等であることと問題 3.18.3 による．

(1 $\Longrightarrow$ 2) $[X]_Q = A$ だからである．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 定理 3.26.8 による．

(3 $\Longrightarrow$ 4) 任意の $y \in A$ に対して，定理 3.27.1 により $x_1 \cdots x_n\, Q\, y$ が成り立ち，これと条件 3 の $\alpha\, Q\, x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に問題 3.24.14 の偏重消去律を使って $\alpha\, Q\, y$ を得るからである．

(4 $\Longrightarrow$ 5) 条件 4 の α が定理 3.27.1 により $\mathcal{B}$ 矛盾だからである．

(5 $\Longrightarrow$ 1) $Y \subseteq X \subseteq A$ なら $[Y]_Q \subseteq [X]_Q$ だからである．

問題 3.27.4 $(A, \mathcal{B})$ の理論 X に有限な $\mathcal{B}$ 公理 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ が存在するとき，X の部分集合 Y についての次の五条件は同等である．

1. Y は X の $\mathcal{B}$ 公理である．
2. $x_1, \ldots, x_n \in [Y]_Q$
3. $\alpha \subseteq Y$ なるある $\alpha \in A^*$ が任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\alpha \, Q \, x_i$ をみたす．
4. $\alpha \subseteq Y$ なるある $\alpha \in A^*$ が任意の $y \in X$ に対して $\alpha \, Q \, y$ をみたす．
5. Y のある有限部分集合が X の $\mathcal{B}$ 公理である．

従って，$(A, \mathcal{B})$ の理論 X に有限な $\mathcal{B}$ 公理が有れば，X の任意の $\mathcal{B}$ 公理は X の有限な $\mathcal{B}$ 公理を含む．

略解　問題 3.27.2 とその略解に記したように，$(A, \mathcal{B})$ の縮小 $(X, \mathcal{B} \cap X)$ の最大論理 Q' は Q の制限に等しく，$Y \subseteq X$ のとき $[Y]_Q = [Y]_{Q'}$ が成り立ち，X の部分集合が X の $\mathcal{B}$ 公理であるためには，$(X, \mathcal{B} \cap X)$ の矛盾集合であることが必要十分である．従って定理 3.27.2 により上のことが成り立つ．

問題 3.27.5 (✓) 代数系 A が有限生成であれば，A の任意の生成系は A の有限生成系を含む．

問題 3.27.6 $(A, \mathcal{B})$ に矛盾元が有れば（この仮定について問題 3.27.24 参照），$(A, \mathcal{B})$ の任意の無矛盾集合 X に対して，$A - X$ は $(A, \mathcal{B})$ の矛盾集合である．

略解　$(A, \mathcal{B})$ の矛盾元がすべて $A - X$ に属すからである（このことを問題 3.27.11 で精密化する）．

定理 3.27.3 A **の部分集合の** Q **包について次のことが成り立つ．**

1. **任意の** $Y \in \mathcal{P}'A$ **について** $[Y]_Q = \bigcap_{Y \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ **が成り立つ！**
2. A **の任意の部分集合** X **について** $[X]_Q = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \left(\bigcap_{Y \subseteq B \in \mathcal{B}} B \right)$ **が成り立つ．**
3. $(A, \mathcal{B})$ **が第二種以下であるためには，任意の** $X \in \mathcal{P}A$ **について** $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ **の成り立つことが必要十分である．**
4. $(A, \mathcal{B})$ **が第一種であるためには，任意の** $X \in \mathcal{P}A$ **に対して** $[X]_Q$ **が** $\{B \in \mathcal{B} \mid X \subseteq B\}$ **の包含関係** $\subseteq$ **についての最小元に等しいことが必要十分である．**
5. A **の任意の部分集合** X **について** $[X]_Q \subseteq \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ **が成り立つ．従って** X **が** $(A, \mathcal{B})$ **の矛盾集合であれば，**$[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B = A$ **が成り立つ．従ってまた結論 3 は，「任意の** $X \in \mathcal{P}A$**」を「**$(A, \mathcal{B})$ **の任意の無矛盾集合」と書き換えても成り立つ．**

証明　1. Y の元をすべて並べて出来る A^* の元を α で表して，定理 3.26.8 と定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により，$[Y]_Q = [\alpha]_Q = \{y \in A \mid \alpha \, Q \, y\} = \bigcap_{\alpha \subseteq B \in \mathcal{B}} B = \bigcap_{Y \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ と証明される．
結論 1 の別証　$[Y]_Q$ は定理 3.26.6 と定理 3.26.12 により $\bigcap_{Y \subseteq Z \in \overline{\mathcal{B}^\cap}} Z$ に等しく，これが問題 3.18.37 により $\bigcap_{Y \subseteq W \in \mathcal{B}^\cap} W$ に等しく，これが問題 3.18.35 により $\bigcap_{Y \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ に等しいからである．
2. 定理 3.24.10 により $[X]_Q = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} [Y]_Q$ が成り立つことと結論 1 による．
3. $\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap$ であれば，結論 1 の別証と同様に，任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq Y \in \overline{\mathcal{B}^\cap}} Y = \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{B}^\cap} Y = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ が成り立つ．逆に任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ であれば，

$X \in \overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ については定理 3.26.12 により $X = [X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{B}^{\cap}$ であるから，$\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{B}^{\cap}$ が成り立つ．

4. $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{B}$ であれば，定理 3.26.6 と定理 3.26.12 により $X \subseteq [X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{B}$，従って $[X]_Q$ は $\{B \in \mathcal{B} \mid X \subseteq B\}$ の最小元に等しい．逆に任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $[X]_Q$ が $\{B \in \mathcal{B} \mid X \subseteq B\}$ の最小元に等しければ，$X \in \overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ については $X = [X]_Q \in \mathcal{B}$ であるから，$\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{B}$ が成り立つ．

5. $\mathcal{B}$ の任意の元が Q で閉じているからである．

結論 1 − 3 の写像論理を使う別証　問題 3.26.11 と問題 3.26.14 により，任意の $Y \in \mathcal{P}'A$ について $\nu Y = \mu Y$ が成り立ち，A の任意の部分集合 X について $\nu X = [X]_Q$ と $\mu X = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ と $\nu X = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}'X} \mu Y$ が成り立つ．このことから結論 1, 2 が得られる．さらに問題 3.26.11 と定理 3.18.1 により $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{B}^{\cap}$ なることが $\nu = \mu$ なることと同等であるから，結論 3 が成り立つ．

定義 3.27.2 各 $X \in \mathcal{P}A$ に対し，$X \subseteq B$ をみたす $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ を X の $\mathcal{B}$ **実例**と呼び [67]，$X \subseteq A - B$ をみたす $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ を X の $\mathcal{B}$ **反例**と呼ぶ．ただし X が単元集合 $\{x\}$ の場合には，$\{x\}$ の $\mathcal{B}$ 実例・$\mathcal{B}$ 反例を x の $\mathcal{B}$ 実例・$\mathcal{B}$ 反例とも呼ぶ．また，各 $(X, Y) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ に対し，$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ について $(X, Y) \subseteq (B, A - B)$ をみたす $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ を (X, Y) の $\mathcal{B}$ **実例**と呼ぶ．これはすなわち，X の $\mathcal{B}$ 実例であると共に Y の $\mathcal{B}$ 反例であるものである．

注意 3.27.1 「実例」の概念は「model」と呼ばれる概念を抽象したものである．それを「モデル」とか「模型」とかではなく「実例」と呼ぶ理由は，例 4.7.3 を見れば分かるであろう [68]．

注意 3.27.4 で説明するように，論対 $(A, \mathcal{B}')$ が $(A, \mathcal{B})$ と同値のとき，$X \in \mathcal{P}A$ に $\mathcal{B}$ 実例が有っても $\mathcal{B}'$ 実例が有るとは限らない．つまり，実例の概念は同値普遍ではない（ただし問題 3.27.7 参照）．

問題 3.27.7 A の部分集合 X と Y が $[X]_Q = [Y]_Q$ をみたすとき（このとき X と Y は $\mathcal{B}$ **同値**であると言う），X の $\mathcal{B}$ 実例の全体と Y の $\mathcal{B}$ 実例の全体は等しい．

略解　$X \in \mathcal{P}A$ と $B \in \mathcal{B}$ について「$X \subseteq B \iff [X]_Q \subseteq B$」が成り立つからである．

以下この節では，$(A, \mathcal{B})$ の無矛盾集合の全体を $\mathcal{C}$ で表し [69]，$\mathcal{C}$ の包含関係 $\subseteq$ に関する極大元の全体を $\mathcal{D}$ で表す．ただし，$\mathcal{C} \neq \emptyset$ でも $\mathcal{D} = \emptyset$ かも知れない．さらに $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を次のように定める．

$$\mathcal{C}_1 = \left\{X \in \mathcal{P}A \;\middle|\; \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B \neq A\right\}$$
$$\mathcal{C}_2 = \left\{X \in \mathcal{P}A \;\middle|\; [X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B \neq A\right\}$$

なお，問題 3.27.1 により $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は同値普遍な概念であるが，注意 3.27.4 で説明するように，$\mathcal{C}_1$ も $\mathcal{C}_2$ も同値普遍な概念ではない．

問題 3.27.8 $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_i$ $(i = 1, 2), \mathcal{D}$ について次のことが成り立つ．

1. $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}_2$ （このことは定理 3.27.4 で敷衍する）．
2. $\mathcal{C}$ は下方的である（このことは定理 3.27.4 で精密化する）．
3. $\mathcal{C}_1$ は $\mathcal{B} - \{A\}$ の下方包 $\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ に，すなわち $\mathcal{B}$ 実例の有る A の部分集合の全体に等しい．

[67] 別の意味の「実例」について第 3.13.3 項参照．
[68] 岩波国語辞典によれば「模型」は，論理学・数学で抽象的理論体系の「実例」となるものを意味する．
[69] 記号「$\mathcal{C}$」は「consistency」に因む．

4. $X \in \mathcal{C}$ なることは $[X]_Q \in \mathcal{C}$ なることと同等であり，$X \in \mathcal{D}$ なら $[X]_Q = X$ が成り立つ．

略解　$\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}_1$ なることは定理 3.27.3 による．結論 2 は定理 3.24.9 による．結論 3 は問題 3.26.15 による．結論 4 の前半は $[[X]_Q]_Q = [X]_Q$ なることにより，後半は前半と $X \subseteq [X]_Q$ なることによる．

問題 3.27.9 (✓) A が代数系で $\mathcal{B}$ が A の台部分系の全体であるか，A が第一分離公理をみたす位相空間で $\mathcal{B}$ が A の開集合系であれば，$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ が成り立つ．A が第一分離公理をみたす位相空間で $\mathcal{B}$ が A の閉集合系であれば，$(A, \mathcal{B})$ の無矛盾集合 X に $\mathcal{B}$ 実例が存在するためには X が A において稠密でないことが必要十分であり，X が $\mathcal{C}_2$ に属すためには X が閉集合であることが必要十分である（問題 3.27.8 参照）．

略解　問題 3.27.3 と問題 3.26.21 による．

定理 3.27.4 $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_i\ (i = 1, 2), \mathcal{D}$ **について次のことが成り立つ．**

1. $\mathcal{P}'A \cap \mathcal{C} = \mathcal{P}'A \cap \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}} = \mathcal{P}'A \cap \mathcal{C}_2$ **が成り立つ．従って，**A **の有限部分集合** X **が** $\mathcal{B}$ **無矛盾であるためには** X **に** $\mathcal{B}$ **実例のあることが必要十分であり，**A **の元** x **が** $\mathcal{B}$ **無矛盾であるためには，**x **が** $\bigcup(\mathcal{B} - \{A\})$ **に属すことが必要十分である．また，**$(A, \mathcal{B})$ **の有限矛盾集合が存在しないことは，**$\mathcal{P}'A \subseteq \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ **なることとも，**$\mathcal{P}A = \overline{\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}}$ **なることとも同等である．**
2. $(A, \mathcal{B})$ **が第二種以下であるためには，**$\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ **なることが必要十分である．従って** $(A, \mathcal{B})$ **が第二種以下であれば，**$\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$**，つまり，**$A$ **の部分集合** X **が** $\mathcal{B}$ **無矛盾であるためには，**X **に** $\mathcal{B}$ **実例のあることが必要十分である（このことの逆について定理 3.27.7 系参照）．**
3. $\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}} \subseteq \mathcal{C} = \overleftarrow{\overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}} \subseteq \overline{\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}}$ **が成り立つ．特に** $\mathcal{C}$ **は下方的である．また，**$\mathcal{D}$ **は** $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}$ **の包含関係** $\subseteq$ **に関する極大元の全体に等しい．**
4. $(A, \mathcal{B})$ **の有限矛盾集合が存在すれば，**$\mathcal{C} = \overline{\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}} = \overleftarrow{\mathcal{D}}$ **が成り立ち，特に** $\mathcal{C}$ **は有限的である．**

証明　1. 定理 3.27.3 により $\mathcal{P}'A \cap \mathcal{C} = \mathcal{P}'A \cap \mathcal{C}_2$ が成り立ち，従って問題 3.27.8 により $\mathcal{P}'A \cap \mathcal{C} = \mathcal{P}'A \cap \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ が成り立つ．従って，有限矛盾集合が存在しないことは，$\mathcal{P}'A \subseteq \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ なることと同等であり，これは問題 3.18.39 により，$\mathcal{P}A = \overline{\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}}$ なることと同等である．

2. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ なるためには，$\mathcal{C}$ の任意の元が $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B}} B$ をみたすことが必要十分であり，定理 3.27.3 によればそのためには，$(A, \mathcal{B})$ が第二種以下であることが必要十分である．問題 3.27.8 により，$\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ であれば $\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ が成り立つ．

3. 問題 3.27.8 により $\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}} \subseteq \mathcal{C}$ が成り立つ．$X \in \mathcal{C}$ であれば，定理 3.26.6 と定理 3.26.12 により $X \subseteq [X]_Q \in \overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}$ であるから，X は $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}$ の下方包に属す．逆に X が $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}$ の下方包に属せば，$X \subseteq Y \in \overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}$ なる Y があって $[X]_Q \subseteq Y \neq A$ であるから，X は $\mathcal{C}$ に属す．従って $\mathcal{C} = \overleftarrow{\overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}}$ が成り立つ．これまたは問題 3.27.8 により $\mathcal{C}$ は下方的であるから，$X \in \mathcal{C}$ であれば，結論 1 により $\mathcal{P}'X \subseteq \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ が成り立ち，従って問題 3.18.39 により $\mathcal{C} \subseteq \overline{\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}}$ が成り立つ．問題 3.18.38 により，$\mathcal{D}$ は $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\}$ の極大元の全体に等しい．

4. 有限矛盾集合があるとする．このとき定理 3.27.2 により $\mathcal{C}$ は有限的である．従って，結論 3 と問題 3.18.39 により $\mathcal{C} = \overline{\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}}$ が成り立ち，問題 3.18.3 と問題 3.18.45 により $\mathcal{C} \subseteq \overleftarrow{\mathcal{D}}$ が成り立つ．$\mathcal{C}$ が下方的であるから，逆に $\mathcal{C} \supseteq \overleftarrow{\mathcal{D}}$ が成り立つ．

問題 3.27.10 論対 $(A, \mathcal{B} \cup \mathcal{D})$ は $(A, \mathcal{B})$ と同値である．

略解　定理 3.27.4 と補題 3.26.1 または定理 3.26.12 系による．

問題 3.27.11 $(A, \mathcal{B})$ の無矛盾元の全体 $\bigcup(\mathcal{B} - \{A\})$ は，$\bigcup \mathcal{C}$ にも $\bigcup(\overline{\mathcal{B}^{\cap}} - \{A\})$ にも等しく，さらに，$(A, \mathcal{B})$ の有限矛盾集合が有れば $\bigcup \mathcal{D}$ に等しく，無ければ A に等しい．

略解　問題 3.18.36, 問題 3.18.37, 問題 3.18.38 と定理 3.27.4 による．

問題 3.27.12 (✓) $\#\mathcal{B} < \infty$ であれば $(A, \mathcal{B})$ の有限矛盾集合が存在する．

略解　各 $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ に対して $x_B \in A - B$ をとれば，$\{x_B \mid B \in \mathcal{B} - \{A\}\}$ が有限矛盾集合である．

定義 3.27.3 A 上の単項汎算法 $x^{\Diamond}$ で Q を二法則

$$x x^{\Diamond} \, Q \, y \tag{偏矛盾律}$$

$$x\alpha \, Q \, y,\ x^{\Diamond}\alpha \, Q \, y \implies \alpha \, Q \, y \tag{偏排中律}$$

に従わせるものを $(A, \mathcal{B})$ の**補法**または A 上の $\mathcal{B}$ **補法**と呼ぶ．また，A 上の単項汎算法 $x^{\Diamond}$ で任意の $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ を法則

$$x^{\Diamond} \in B \iff x \notin B \tag{否定律}$$

に従わせるものを $(A, \mathcal{B})$ の**否法**または A 上の $\mathcal{B}$ **否法**と呼ぶ．なお，$(A, \mathcal{B})$ の補法 $x^{\Diamond}$ についても否法 $x^{\Diamond}$ についても，各 $X \in \mathcal{P}A$ に対して集合 $\{x^{\Diamond} \mid x \in X\}$ を $X^{\Diamond}$ で表す．

注意 3.27.2 定理 3.27.5 で証明するように，$\mathcal{B}$ 否法は $\mathcal{B}$ 補法である．また，$\mathcal{B}$ 補法も $\mathcal{B}$ 否法も複数存在し得るが，それらは問題 3.27.23 によればすべて「同値」である．なお，$\emptyset \in \mathcal{B} - \{A\}$ であれば $\mathcal{B}$ 否法は存在しない．

$\mathcal{B}$ 補法・$\mathcal{B}$ 否法の概念はブール束における補法の概念（例 3.13.5 参照）を念頭において定義したものであり，これらの間の関係と $\mathcal{B}$ 補法・$\mathcal{B}$ 否法の重要な例は第 3.30.3 項で示される．

論対 $(A, \mathcal{B}')$ が $(A, \mathcal{B})$ と同値であれば，$(A, \mathcal{B}')$ の最大論理も Q であるから，$(A, \mathcal{B})$ の補法は $(A, \mathcal{B}')$ の補法でもある．つまり，論対の補法の概念は同値普遍である．しかし問題 3.27.21 に記すように，論対の否法の概念は同値普遍ではない．

補題 3.27.1 **A 上の単項汎算法 $x^{\Diamond}$ について次のことが成り立つ．**

1. **Q が $\Diamond$ についての偏矛盾律に従うことは，任意の $x \in A$ に対して $\{x, x^{\Diamond}\} \notin \mathcal{C}$ なることとも $\{x, x^{\Diamond}\} \notin \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ なることとも同等である．**

2. **Q が $\Diamond$ についての偏排中律に従うことは，Q が任意の $x \in A$ と $X \in \mathcal{P}A$ に対し**

$$\left[\{x\} \cup X\right]_Q \cap \left[\{x^{\Diamond}\} \cup X\right]_Q \subseteq [X]_Q \tag{3.27.1}$$

をみたすこととも，任意の $x \in A$ と $X \in \mathcal{P}'A$ に対し (3.27.1) をみたすこととも同等である．

3. **$\Diamond$ が $(A, \mathcal{B})$ の否法であることは，任意の $x \in A$ に対して $\{x, x^{\Diamond}\}$ に $\mathcal{B}$ 実例も $\mathcal{B}$ 反例も存在しないことと同等であり，従って $\{x, x^{\Diamond}\} \notin \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ すなわち $\{x, x^{\Diamond}\} \notin \mathcal{C}$ なることを含意する．**

証明　1. 定理 3.27.1 と定理 3.27.4 による．

2. $y \in \left[\{x\} \cup X\right]_Q \cap \left[\{x^\lozenge\} \cup X\right]_Q$ であれば，定理 3.26.8 により $\alpha \subseteq X$ なるある $\alpha \in A^*$ に対して $x\alpha \, Q \, y$ と $x^\lozenge \alpha \, Q \, y$ が成り立ち，従って偏排中律の下では $\alpha \, Q \, y$，従って $y \in [X]_Q$ が成り立つ．逆に $x, y \in A$ と $\alpha \in A^*$ が $x\alpha \, Q \, y$ と $x^\lozenge \alpha \, Q \, y$ をみたせば，$y \in \left[\{x\} \cup \alpha\right]_Q \cap \left[\{x^\lozenge\} \cup \alpha\right]_Q$ であるから，(3.27.1) が $X = \alpha$ として成り立てば $y \in [\alpha]_Q$，従って定理 3.26.8 により $\alpha \, Q \, y$ が成り立つ．

3. 否定律が $\{x, x^\lozenge\} \not\subseteq B$ かつ $\{x, x^\lozenge\} \not\subseteq A - B$ なることと同等なのは自明である．

問題 3.27.13 $(A, \mathcal{B})$ に補法 $x^\lozenge$ が存在すれば，A の部分集合 X と元 y についての次の三条件は同等である（同様の問題について定理 3.27.5 と定理 3.27.8 と定理 3.27.9 参照）．

1. $X \notin \mathcal{C}$
2. $\{y, y^\lozenge\} \subseteq [X]_Q$
3. $\alpha \subseteq X$ なるある $\alpha \in A^*$ が $\alpha \, Q \, y$ と $\alpha \, Q \, y^\lozenge$ をみたす．

略解　補題 3.27.1 と定理 3.27.2 による．

問題 3.27.14 A の $\mathcal{B}$ 補法で閉じている空でない部分集合は $(A, \mathcal{B})$ の矛盾集合である．

略解　問題 3.27.8 と補題 3.27.1 によるか問題 3.27.13 による．

問題 3.27.15 $(A, \mathcal{B})$ に否法 $x^\lozenge$ が有る場合，$B \in \mathcal{B}$ が $X \in \mathcal{P}A$ の $\mathcal{B}$ 実例であるためには $X^\lozenge$ の $\mathcal{B}$ 反例であることが必要十分であり，X の $\mathcal{B}$ 反例であるためには，$X^\lozenge$ の $\mathcal{B}$ 実例であることが必要十分である．また，B が $(X, Y) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の $\mathcal{B}$ 実例であるためには，$(Y^\lozenge, X^\lozenge)$ の $\mathcal{B}$ 実例であることも，$X \cup Y^\lozenge$ の $\mathcal{B}$ 実例であることも，$X^\lozenge \cup Y$ の $\mathcal{B}$ 反例であることも，いずれも必要十分である．

問題 3.27.16 $(A, \mathcal{B})$ に否法が存在するためには，$\mathcal{B} - \{A\} = \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$ なる任意の $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ に対して「$\bigcap \mathcal{X} \not\subseteq \bigcup \mathcal{Y} \implies \bigcap \mathcal{Y} \not\subseteq \bigcup \mathcal{X}$」の成り立つことが必要十分である．この条件は，$\mathcal{B} - \{A\} = \{B\}$ の場合には $B \neq \emptyset$ なることと同等であり，$\mathcal{B} - \{A\} = \{B_1, B_2\}$，$B_1 \neq B_2$ の場合には，$B_1 \not\subseteq B_2$ と $B_2 \not\subseteq B_1$ と「$B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \iff B_1 \cup B_2 \neq A$」が成り立つことと同等である．

略解　$\mathcal{B}$ 否法 $x^\lozenge$ が有れば，$\mathcal{B} - \{A\}$ の任意の部分集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ と任意の $x \in (\bigcap \mathcal{X} - \bigcup \mathcal{Y})$ に対して $x^\lozenge \in (\bigcap \mathcal{Y} - \bigcup \mathcal{X})$ が成り立つ．

各 $x \in A$ に対して $\mathcal{B}^x = \left\{B \in \mathcal{B} - \{A\} \mid x \in B\right\}$，$\mathcal{B}_x = \left\{B \in \mathcal{B} - \{A\} \mid x \notin B\right\}$ と定める．そうすると $\mathcal{B} - \{A\} = \mathcal{B}^x \amalg \mathcal{B}_x$ と $\bigcap \mathcal{B}^x \not\subseteq \bigcup \mathcal{B}_x$ が成り立つ．そして，各 $x \in A$ に応じて $\bigcap \mathcal{B}_x - \bigcup \mathcal{B}^x$ に元が有れば，その任意の一つを $x^\lozenge$ と定めるとき，$\lozenge$ は $\mathcal{B}$ 否法である．

問題 3.27.17 (✓) A が代数系で $\mathcal{B}$ が A の台部分系の全体であるか，A が位相空間で $\mathcal{B}$ が A の開集合系または閉集合系であれば，$(A, \mathcal{B})$ に否法は存在しない．A が第一分離公理をみたす非離散位相空間で $\mathcal{B}$ が A の開集合系または閉集合系であれば，$(A, \mathcal{B})$ に補法は存在しない．

略解　$\mathcal{B}$ 否法が無いのは $\emptyset \in \mathcal{B} - \{A\}$ だからである．$\mathcal{B}$ 補法が無いのは問題 3.27.3 による．

補題 3.27.2 各 $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ に対して問題 3.19.12 のように定義した B 関係 $\preccurlyeq_B$ すべての交わり $\bigcap_{B \in \mathcal{B} - \{A\}} \preccurlyeq_B$ を $\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ で表す（これを $(A, \mathcal{B})$ の恒真関係と呼ぶ．例 3.22.1 と問題 3.30.18 参照）．そうすると，$\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は Q の拡張であって強束律に従う．また，$(A, \mathcal{B})$ に否法 $x^\lozenge$ が存在する場合，それに関して $\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は両補律 $xx^\lozenge \preccurlyeq_{\mathcal{B}} \varepsilon$ と $\varepsilon \preccurlyeq_{\mathcal{B}} xx^\lozenge$ に従う．

証明　定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により $\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は Q の拡張である．定理 3.22.2 または問題 3.19.12 の略解に記したことにより，各 $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ に対し，$A, \mathbb{T}$ と B の定義関数 $1_B \in A \to \mathbb{T}$ から成る三つ組み $(A, \mathbb{T}, 1_B)$ が束写系であり，その定める関係 $\preccurlyeq_{1_B}$ が $\preccurlyeq_B$ に等しい．$\mathbb{T}$ がブール束であるから，定理 3.19.1 と定理 3.19.2 により各 $\preccurlyeq_B$ は強束律に従う．従って問題 3.21.23 により，$\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ も強束律に従う．$\mathcal{B}$ 否法 $x^\Diamond$ が存在すれば，各 $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ に対して，「$x^\Diamond \in B \iff x \notin B$」なることにより $1_B(x^\Diamond) = \big(1_B(x)\big)^\Diamond$ が成り立つ．ただし，右辺の $\Diamond$ はブール束 $\mathbb{T}$ の補法を表す．従って定理 3.19.4 により，各 $\preccurlyeq_B$ は両補律に従う．従ってまた問題 3.21.23 により，$\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ も両補律に従う．

問題 3.27.18 (✓) A が有限生成でない代数系で $\mathcal{B}$ が A の台部分系の全体であれば，$(A, \mathcal{B})$ の恒真関係 $\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は，「$\alpha \preccurlyeq_{\mathcal{B}} \beta \iff [\alpha]_A \cap \beta \neq \emptyset$」をみたし，A の代数構造の関係化を含む A^* 上の最小の束関係である．

A が第一分離公理をみたす非離散位相空間で $\mathcal{B}$ が A の開集合系または閉集合系であれば，$\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は「$\alpha \preccurlyeq_{\mathcal{B}} \beta \iff \alpha \cap \beta \neq \emptyset$」をみたし，$A^*$ 上の最小の束関係である（問題 3.22.26 参照）．

略解　問題 3.26.21 による．すなわちまず任意の論対について，$\alpha \not\preccurlyeq_{\mathcal{B}} \beta$ のとき，$\alpha \subseteq B$ かつ $\beta \subseteq A - B$ なる $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ が存在して $[\alpha]_Q \subseteq B$ であるから，$[\alpha]_Q \cap \beta = \emptyset$ が成り立つ．逆に $[\alpha]_Q \cap \beta = \emptyset$ のとき，A が代数系の場合は $B = [\alpha]_Q$ と定め，A が位相空間の場合は，$\mathcal{B}$ が開集合系なら $\beta \subseteq \gamma \subseteq A - \alpha$ なる $\gamma \in A^* - \{\varepsilon\}$ をとって $B = A - \gamma$ と定め，$\mathcal{B}$ が閉集合系なら $B = \alpha$ と定めれば，$B \in \mathcal{B} - \{A\}$, $\alpha \subseteq B$, $\beta \subseteq A - B$ なので $\alpha \not\preccurlyeq_{\mathcal{B}} \beta$ が成り立つ．A が代数系の場合，$\preccurlyeq_*$ を A の代数構造の関係化を含む A^* 上の束関係とすれば，α の n 圏 α_n について「$\alpha_n \ni y \implies \alpha \preccurlyeq_* y$」の成り立つことが，n についての帰納法で示される．

定理 3.27.5 $(A, \mathcal{B})$ **の補法と否法の関係について次のことが成り立つ．**

1. $(A, \mathcal{B})$ **の否法は** $(A, \mathcal{B})$ **の補法である．**
2. $(A, \mathcal{B})$ **に補法** $x^\Diamond$ **が存在するとき，A の部分集合 X についての次の三条件は同等である．**
   - **a.** $X \in \mathcal{D}$
   - **b.** X **は** $[X]_Q = X$ **をみたし** $\Diamond$ **についての否定律「**$x^\Diamond \in X \iff x \notin X$**」に従う．**
   - **c.** X **は** $\mathcal{C}$ **に属して任意の** $x \in A$ **に対して** $x \in X$ **または** $x^\Diamond \in X$ **をみたす．**
3. $(A, \mathcal{B})$ **の否法が存在すれば** $\mathcal{B} - \{A\} \subseteq \mathcal{D}$ **が成り立つ．逆に** $\mathcal{B} - \{A\} \subseteq \mathcal{D}$ **が成り立てば，**$(A, \mathcal{B})$ **の補法は** $(A, \mathcal{B})$ **の否法である．**

証明　1. 補題 3.27.2 により，$(A, \mathcal{B})$ の恒真関係 $\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は Q の拡張であって強束律と任意の $\mathcal{B}$ 否法 $x^\Diamond$ についての下補律 $xx^\Diamond \preccurlyeq_{\mathcal{B}} \varepsilon$ と上補律 $\varepsilon \preccurlyeq_{\mathcal{B}} xx^\Diamond$ に従う．下補律と付加律により，Q は $\Diamond$ に関し偏矛盾律に従う．上補律から定理 3.21.3 により，Q が $\Diamond$ に関し偏排中律に従うことが導かれる．

結論 1 の別証　補題 3.27.1 により，Q は $\mathcal{B}$ 否法 $\Diamond$ について偏矛盾律に従う．また，$\mathcal{B} - \{A\}$ の各元が $\Diamond$ についての否定律に従うことにより，任意の $x \in A$ と $X \in \mathcal{P}A$ に対し

$$\big\{B \in \mathcal{B} - \{A\} \bigm| \{x\} \cup X \subseteq B\big\} \amalg \big\{B \in \mathcal{B} - \{A\} \bigm| \{x^\Diamond\} \cup X \subseteq B\big\} = \big\{B \in \mathcal{B} - \{A\} \bigm| X \subseteq B\big\}$$

従って $X \in \mathcal{P}'A$ であれば，定理 3.27.3 により (3.27.1) が成り立つ．従って補題 3.27.1 により，Q は $\Diamond$ について偏排中律にも従う．

2. (a $\Longrightarrow$ b) 問題 3.27.8 により $[X]_Q = X$ が成り立つ．そこで任意の $x \in A$ をとる．そうすると，補題 3.27.1 により $\{x, x^\lozenge\} \notin \mathcal{C}$ であるから，問題 3.27.8 により $\{x, x^\lozenge\} \nsubseteq X$，つまり「$x^\lozenge \in X \implies x \notin X$」が成り立つ．この逆を示すために $x \notin X$ と仮定する．そうすると $\{x\} \cup X \notin \mathcal{C}$，すなわち $[\{x\} \cup X]_Q = A$ であるから，(3.27.1) により $x^\lozenge \in [X]_Q$，従って $x^\lozenge \in X$ が確かに成り立つ．

(b $\Longrightarrow$ c) 否定律と $A \neq \emptyset$ なることにより $X \neq A$ であるから，$X \in \mathcal{C}$ が成り立つ．後のことは自明である．

(c $\Longrightarrow$ a) $X \subset Y \subseteq A$ であれば，$y \in Y - X$ に対して $y^\lozenge \in X \subseteq Y$，従って $\{y, y^\lozenge\} \subseteq Y$，従って補題 3.27.1 と問題 3.27.8 により $Y \notin \mathcal{C}$ が成り立つ．これで $X \in \mathcal{D}$ が示された．

3. 問題 3.27.8 と結論 1, 2 による．

問題 3.27.19 $(A, \mathcal{B})$ の補法 $x^\lozenge$ があるとき，A の部分集合 X が $\lozenge$ についての否定律に従えば，$[X]_Q$ は X または A に等しく，$A - X$ も $\lozenge$ についての否定律に従う（問題 3.27.20 参照）．

略解　$x \in [X]_Q - X$ であれば，$x^\lozenge \in X \subseteq [X]_Q$，従って $\{x, x^\lozenge\} \subseteq [X]_Q$ となるからである．

問題 3.27.20 $(A, \mathcal{B})$ の恒真元が存在すれば（この仮定について問題 3.27.24 参照），A の部分集合 X が $[X]_Q = X$ かつ $[A - X]_Q = A - X$ をみたすことはない（問題 3.27.6 参照）．

略解　$(A, \mathcal{B})$ の核が $[\emptyset]_Q$ に等しく $[X]_Q \cap [A - X]_Q$ に含まれるからである．

定理 3.27.6 $(A, \mathcal{B})$ **が否法を持って第一種であるためには，**$\mathcal{B} = \{A, B\}$ **かつ** $B \neq \emptyset$ **なる** B **の存在することが必要十分である．**

証明　$(A, \mathcal{B})$ の否法が存在すれば，定理 3.27.5 により $\mathcal{B} - \{A\}$ は包含関係 $\subseteq$ に関して離散的である．問題 3.27.16 により，$\mathcal{B} = \{A, B\}$ なる B が存在する場合には，$(A, \mathcal{B})$ の否法が存在するためには $B \neq \emptyset$ なることが必要十分である．従って，問題 3.26.29 によりこの定理が成り立つ．

問題 3.27.21 論対 $(A, \mathcal{B}')$ が $(A, \mathcal{B})$ と同値のとき，$(A, \mathcal{B})$ の否法が存在しても $(A, \mathcal{B}')$ の否法が存在するとは限らない．つまり，論対の否法の概念は同値普遍ではない．

略解　論対 $(A, \overline{\mathcal{B}^\cap})$ が $(A, \mathcal{B})$ と同値で第一種であることと定理 3.27.6 による．

定理 3.27.7 $(A, \mathcal{B})$ **に補法** $x^\lozenge$ **が存在すると仮定する．このとき，**$\mathcal{P}A$ **の部分集合** $\mathcal{Y}$ **についての次の三条件は同等である．**

1. **論対** $(A, \mathcal{Y})$ **は** $(A, \mathcal{B})$ **と同値で第二種以下である．**

2. $\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{Y} - \{A\}}$ **かつ** $\mathcal{Y} \subseteq \overline{\mathcal{B}^\cap}$

3. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \overline{\mathcal{B}^\cap}$

またこれら条件の下で，$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{Y}^\cap$ **が成り立ち，任意の** $X \in \mathcal{P}A$ **に対して** $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{Y}} Y$ **が成り立ち，**$\lozenge$ **は** $(A, \mathcal{Y})$ **の補法である．特に，論対** $(A, \mathcal{D})$ **は** $(A, \mathcal{B})$ **と同値で第二種以下であり，**$\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{D}^\cap$ **が成り立ち，任意の** $X \in \mathcal{P}A$ **に対して** $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{D}} Y$ **が成り立ち，**$\lozenge$ **は** $(A, \mathcal{D})$ **の否法である．**

証明　($1 \Longrightarrow 2$) 問題 3.27.1 と定理 3.27.4 と定理 3.26.12 系による．

($2 \Longrightarrow 3$) 問題 3.18.38 による．

($3 \Longrightarrow 1$) $\mathcal{Y} \subseteq \overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ なることと定理 3.26.12 により $\mathcal{Y}$ の各元は Q で閉じている．従って $\mathcal{Y}-\{A\} \subseteq \mathcal{C}$ が成り立つ．従ってまた，補題 3.27.1 と問題 3.27.8 により，任意の $x \in A$ に対して $\{x, x^{\Diamond}\} \notin \overleftarrow{\mathcal{Y}-\{A\}}$ が成り立つ．また，$A \notin \mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y}$ なることより $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y}-\{A\}$ であって補題 3.27.1 と定理 3.27.4 により $\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{D}}$ であるから，$\mathcal{C} \subseteq \overleftarrow{\mathcal{Y}-\{A\}}$ が成り立つ．

任意の $X \in \mathcal{P}A$ をとる．そうすると，$\mathcal{Y}$ の各元が Q で閉じていたから $[X]_Q \subseteq \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{Y}} Y$ が成り立つ．この逆を示すために，任意の $x \in \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{Y}} Y$ をとる．そうすると $X \subseteq Y \in \mathcal{Y}-\{A\}$ なら，$x \in Y$ であるから，$\{x, x^{\Diamond}\} \notin \overleftarrow{\mathcal{Y}-\{A\}}$ だったことにより $x^{\Diamond} \notin Y$ が成り立つ．従って $\{x^{\Diamond}\} \cup X \subseteq Y \in \mathcal{Y}-\{A\}$ なる Y は無い．従って $\mathcal{C} \subseteq \overleftarrow{\mathcal{Y}-\{A\}}$ だったことにより $\{x^{\Diamond}\} \cup X \notin \mathcal{C}$，つまり $[\{x^{\Diamond}\} \cup X]_Q = A$，従って (3.27.1) により $x \in [X]_Q$ が成り立つ．これで $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{Y}} Y$ が示された[70]．

論対 $(A, \mathcal{Y})$ の最大論理を Q' で表す．そうすると任意の $\alpha \in A^*$ に対して，定理 3.27.3 により $\bigcap_{\alpha \subseteq Y \in \mathcal{Y}} Y = [\alpha]_{Q'}$ であるから，$[\alpha]_Q = [\alpha]_{Q'}$ が成り立つ．従って定理 3.26.8 により $Q = Q'$ が成り立つ．従って $(A, \mathcal{Y})$ は $(A, \mathcal{B})$ と同値であり，また，任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $[X]_{Q'} = \bigcap_{X \subseteq Y \in \mathcal{Y}} Y$ であるから，定理 3.27.3 により $(A, \mathcal{Y})$ は第二種である．

以上により条件 1 – 3 は同等である．これら条件の下でさらに，定理 3.26.12 系と定義 3.26.1 により $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{Y}^{\cap}$ が成り立ち，注意 3.27.2 により $\Diamond$ は $(A, \mathcal{Y})$ の補法である．論対 $(A, \mathcal{D})$ についてのことは，定理 3.27.4 により $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ なることと定理 3.27.5 による．

系　$(A, \mathcal{B})$ **に補法が存在すれば，次の三条件は同等である．**

1. $(A, \mathcal{B})$ **は第二種以下である．**
2. $\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}}$
3. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$

証明　定理 3.27.7 と $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ なることによる．

注意 3.27.3　定理 3.27.7 系の条件 $\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}}$ は，「$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{B}$ 無矛盾であるためには X に $\mathcal{B}$ 実例の有ることが必要十分である」ことを意味する．また，定理 3.27.4 と補題 3.27.1 によれば，定理 3.27.7 系の仮定の下で $\overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}} \subseteq \mathcal{C} = \overleftarrow{\overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}}} = \overleftarrow{\mathcal{D}}$ が成り立つ．従って，定理 3.27.7 系の同等な三条件はさらに

4. $\mathcal{C} \subseteq \overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}}$（つまり，$(A, \mathcal{B})$ の無矛盾集合には $\mathcal{B}$ 実例が有る）

なることとも $\overleftarrow{\overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}}} = \overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}}$ なることとも同等である（その他の同等な条件について定理 3.27.3 参照）．この後者の条件は，問題 3.18.3 によれば次の条件と同等である．

5. $\overleftarrow{\mathcal{B}-\{A\}}$ は有限的である．

これはやはり問題 3.18.3 によれば，「$X \in \mathcal{P}A$ に $\mathcal{B}$ 実例が有るためには X の有限部分集合すべてに $\mathcal{B}$ 実例の有ることが必要十分である」ことを意味する．さらに以上の同等な五条件の下で，$X \in \mathcal{C}$ であれば，$\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{D}}$ であったから $X \subseteq Y$ なる $Y \in \mathcal{D}$ が存在し，条件 3 により $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}-\{A\}$ であるから，Y が X の $\mathcal{B}$ 実例となる．また，A 上の $\mathcal{B}$ 否法が存在する場合には，定理 3.27.5 により $\mathcal{B}-\{A\} \subseteq \mathcal{D}$ であるから，上記五条件はさらに次の条件と同等である．

---

[70] この論法は高岡洋介氏による．

6. $\mathcal{D} = \mathcal{B} - \{A\}$

なお，条件 2 が条件 1 を含意することは，定理 3.27.4 で示した「$(A, \mathcal{B})$ が第二種以下であれば $\mathcal{C} = \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ が成り立つ」ということの逆である．

注意 3.27.4 問題 3.27.8 により，$X \in \mathcal{P}A$ に $\mathcal{B}$ 実例が存在すれば X は $\mathcal{B}$ 無矛盾である．しかしこの逆は真ではない．定理 3.27.7 系と注意 3.27.3 によれば，$(A, \mathcal{B})$ に補法が有るとき，$(A, \mathcal{B})$ の任意の無矛盾集合に $\mathcal{B}$ 実例が存在するためには，$(A, \mathcal{B})$ が第二種以下であることが必要十分である．定理 5.7.1 によれば，補法の有る第三種の論対が存在する．従って，$(A, \mathcal{B})$ の無矛盾集合に $\mathcal{B}$ 実例が存在するとは限らない．ただし定理 3.27.4 によれば，$(A, \mathcal{B})$ の有限無矛盾集合には $\mathcal{B}$ 実例が存在する．

問題 3.26.29 により任意の論対は第一種の論対と同値であり，定理 3.27.4 により，第二種以下の論対では任意の無矛盾集合に実例が存在する．従って，実例の概念は同値普遍ではない．従って問題 3.27.8 により，$\mathcal{C}_1$ も同値普遍な概念ではない．定理 3.27.4 によりまた，$(A, \mathcal{B})$ が第二種以下であるためには $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ なることが必要十分である．従って $\mathcal{C}_2$ も同値普遍な概念ではない．

注意 3.27.5 (✓) 定理 3.26.14 の結論 1, 2 は，$(A, \mathcal{B})$ が第三種かつ G が無限集合であれば，必ずしも成り立たない．たとえば，$(A, \mathcal{B})$ に補法が存在して $(A, \mathcal{B})$ が第三種であるとする（定理 5.7.1 によりこういう $(A, \mathcal{B})$ は実在する）．そうすると，定理 3.27.7 系により $G \in \mathcal{C} - \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ なる G が存在し，定理 3.27.4 により G は無限集合である．そして，$G \notin \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ なることにより $\mathcal{B}^G \subseteq \{A\}$，従って問題 3.26.13 により $(A, \mathcal{B}^G)$ の理論は A だけであるが，他方で $G \in \mathcal{C}$ なることより，$[G]_Q$ は $(A, \mathcal{B})$ の G を含む理論であって A と異なる．つまり，この G については定理 3.26.14 の結論 2 が成り立たない．

問題 3.27.22 定理 3.27.7 系において同等な三条件は，次のいずれの条件とも同等である．

1. $\nu = \mu$
2. 任意の $X \in \mathcal{P}A$ について「$\nu X = A \iff \mu X = A$」が成り立つ．

略解　問題 3.26.12 により，条件 1 は定理 3.27.7 系の条件 1 と同等である．問題 3.26.11 と問題 3.26.14 と注意 3.27.3 により，条件 2 は定理 3.27.7 系の条件 2 と同等である．

定理 3.27.8 $(A, \mathcal{B})$ **に補法が存在すれば，**A **の部分集合** X **についての次の三条件は同等である．ただし，(1 $\Longrightarrow$ 2) は補法が存在しなくても成り立つ．**

1. $X \in \mathcal{C}$

2. A^* **上の強束関係** $\preccurlyeq$ **が** Q **の拡張であれば，**$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ **の元** $(X, \emptyset)$ **は** $\preccurlyeq$ **による** A **の切断である．**

3. $(X, \emptyset)$ **は論対** $(A, \mathcal{D})$ **の恒真関係** $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ **による** A **の切断である．**

証明　(1 $\Longrightarrow$ 2) これの対偶を証明するために $\alpha \subseteq X$ なる $\alpha \in A^*$ が $\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ をみたすと仮定すれば，任意の $y \in A$ に対して $\alpha \preccurlyeq y$，従って $\alpha\, Q\, y$，従って定理 3.27.1 により $X \notin \mathcal{C}$ が成り立つ．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 定理 3.27.7 と補題 3.27.2 により $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ が Q を拡張する強束関係であることによる．

(3 $\Longrightarrow$ 1) これの対偶を証明するために $X \notin \mathcal{C}$ と仮定する．そうすると問題 3.27.13 により，$\alpha \subseteq X$ なるある $\alpha \in A^*$ と $y \in A$ が $\alpha\, Q\, y$ と $\alpha\, Q\, y^\Diamond$ をみたす．$\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ が Q の拡張であるから，$\alpha \preccurlyeq_{\mathcal{D}} y$ と $\alpha \preccurlyeq_{\mathcal{D}} y^\Diamond$ が成り立つ．また，定理 3.27.5 により $(A, \mathcal{B})$ の補法 $x^\Diamond$ は $(A, \mathcal{D})$ の否法である．従って補題 3.27.2 により $yy^\Diamond \preccurlyeq_{\mathcal{D}} \varepsilon$ も成り立つ．従って強消去律等により $\alpha \preccurlyeq_{\mathcal{D}} \varepsilon$ を得る．これは $(X, \emptyset)$ が $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ による A の切断ではないことを示す．

定理 3.27.9 $(A, \mathcal{B})$ **に補法が存在すると仮定する．このとき，**A **の部分集合** X **についての次の三条件は同等である．ただし，(1** $\Longrightarrow$ **2) は補法が存在しなくても成り立つ．**

1. $X \in \mathcal{D}$

2. A^* **上の強束関係** $\preccurlyeq$ **が** Q **の拡張であれば，**$(X, A - X)$ **は** $\preccurlyeq$ **による** A **の切断である．**

3. $(X, A - X)$ **は論対** $(A, \mathcal{D})$ **の恒真関係** $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ **による** A **の切断である．**

また $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ **は，**Q **を拡張する** A^* **上の強束関係の中で包含関係** $\subseteq$ **に関して最大のものである．**

証明　$(1 \Longrightarrow 2)$ これの対偶を証明するために，$\alpha \subseteq X$ なる $\alpha \in A^*$ と $y_1, \ldots, y_n \in A - X$ が $\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ をみたすと仮定する．そうすると各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対し，$\{y_i\} \cup X \notin \mathcal{C}$ であるから $[\{y_i\} \cup X]_Q = A$ が成り立つ．従って定理 3.26.8 により，各 $z \in A$ と $i \in \{1, \ldots, n\}$ に応じて，$\alpha_i \subseteq X$ なるある $\alpha_i \in A^*$ が $y_i \alpha_i \preccurlyeq z$ をみたす．これらと $\alpha \preccurlyeq y_1 \cdots y_n$ に強消去律等を繰り返し使って $\alpha\alpha_1 \cdots \alpha_n \preccurlyeq z$ を得る．従って定理 3.27.1 により $X \notin \mathcal{C}$ が成り立つ．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 定理 3.27.7 と補題 3.27.2 により $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ が Q を拡張する強束関係であることによる．

$(3 \Longrightarrow 1)$ $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ が Q の拡張であって，$\alpha \subseteq X$ なる任意の $\alpha \in A^*$ と任意の $y \in A - X$ に対して $\alpha \not\preccurlyeq_{\mathcal{D}} y$ が成り立つから，定理 3.26.8 により $[X]_Q = X$ が成り立つ．また，定理 3.27.5 により $(A, \mathcal{B})$ の補法 $x^\Diamond$ は $(A, \mathcal{D})$ の否法である．従って補題 3.27.2 により，$\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ は両補律 $xx^\Diamond \preccurlyeq_{\mathcal{D}} \varepsilon$ と $\varepsilon \preccurlyeq_{\mathcal{D}} xx^\Diamond$ に従う．従って，任意の $x \in A$ に対して $\{x, x^\Diamond\} \nsubseteq X$ と $\{x, x^\Diamond\} \nsubseteq A - X$ が成り立つ．すなわち，X は $\Diamond$ についての否定律「$x^\Diamond \in X \iff x \notin X$」に従う．以上のことと定理 3.27.5 により $X \in \mathcal{D}$ が成り立つ．

以上により条件 1 – 3 は同等である．従って $\preccurlyeq$ が Q を拡張する強束関係であれば，任意の $X \in \mathcal{D}$ に対して，$(X, A - X)$ が $\preccurlyeq$ による A の切断であるから，定理 3.22.7 により，$\preccurlyeq$ は X 関係 $\preccurlyeq_X$ に含まれる．従って $\preccurlyeq$ は $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ に含まれる．

問題 3.27.23 A の二元 x, y が $x \, Q \, y$ と $y \, Q \, x$ をみたすとき（これは $\{x\}$ と $\{y\}$ が問題 3.27.7 の意味で $\mathcal{B}$ 同値であることと同等である），x と y は $\mathcal{B}$ **同値**であると言う．そうすると，$(A, \mathcal{B})$ に補法 $x^\Diamond$ があれば，次のことが成り立つ．

1. A のある元 x が $x^\Diamond$ と $\mathcal{B}$ 同値であるためには，$\mathcal{B} \subseteq \{A\}$ なることが必要十分である．
2. 任意の $x \in A$ に対して，x と $(x^\Diamond)^\Diamond$ は $\mathcal{B}$ 同値である．
3. A の二元 x, y が $\mathcal{B}$ 同値であるためには，$x^\Diamond$ と $y^\Diamond$ が $\mathcal{B}$ 同値であることが必要十分である．
4. $(A, \mathcal{B})$ に補法 $x^\blacklozenge$ がもう一つあれば，任意の $x \in A$ に対して $x^\Diamond$ と $x^\blacklozenge$ は $\mathcal{B}$ 同値である．
5. 各 $x \in A$ に応じて $x^\Diamond$ と $\mathcal{B}$ 同値な A の元 $x^\blacklozenge$ を任意に一つとれば，これによって出来る単項汎算法 $\blacklozenge$ は $(A, \mathcal{B})$ の補法である．

略解　結論 1 – 4 については，Q が偏束律・偏矛盾律・偏排中律に従うことのみを使う素朴な証明法もあるが，以下のようにする方が見通しがいい．まず定理 3.27.7 と定理 3.27.5 によれば，$\Diamond$ と $\blacklozenge$ が $\mathcal{B}$ 否法であると仮定していい．そう仮定すると，$(A, \mathcal{B})$ の恒真関係 $\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は補題 3.27.2 により Q の拡張であって強束律と $\Diamond$ と $\blacklozenge$ についての両補律に従い，定理 3.21.3 によりさらに $\Diamond$ と $\blacklozenge$ について背理律・道理律・対偶律・重補律に従う．結論 1 については，x が $x \preccurlyeq_{\mathcal{B}} x^\Diamond$ と $x^\Diamond \preccurlyeq_{\mathcal{B}} x$ をみたせば，背理律・道理律・偏巾等律・偏消去律により $\varepsilon \preccurlyeq_{\mathcal{B}} \varepsilon$，従って $Q = A^* \times A$ が得られ，従っ

て問題 3.26.13 により $\mathcal{B} \subseteq \{A\}$ が成り立つ．結論 2 は重補律により，結論 3 は対偶律により，結論 4 は反復律・背理律・道理律による．結論 5 については，$x^{\blacklozenge}\alpha\,Q\,y$ であれば，これと $x^{\lozenge}\,Q\,x^{\blacklozenge}$ から偏消去律により $x^{\lozenge}\alpha\,Q\,y$ が得られる．また，$xx^{\lozenge}\,Q\,y$ と $x^{\blacklozenge}\,Q\,x^{\lozenge}$ から $xx^{\blacklozenge}\,Q\,y$ が得られる．

問題 3.27.24 $(A, \mathcal{B})$ に補法 $x^{\lozenge}$ があれば，A の元 x が $\mathcal{B}$ 矛盾であるためには $x^{\lozenge}$ が $\mathcal{B}$ 恒真であることが必要十分であり，$x^{\lozenge}$ が $\mathcal{B}$ 矛盾であるためには，x が $\mathcal{B}$ 恒真であることが必要十分である．

略解　問題 3.27.23 と同様，$\lozenge$ が $\mathcal{B}$ 否法であると仮定していい．そう仮定すると，x が $\mathcal{B}$ 矛盾であるためには，定理 3.27.4 によれば，x が $\bigcup(\mathcal{B} - \{A\})$ に属さないことが必要十分であり，そのためには $x^{\lozenge}$ が $(A, \mathcal{B})$ の核 $\bigcap(\mathcal{B} - \{A\})$ に属すことが必要十分である．

問題 3.27.25 論対 $(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ が補法を共有すると仮定する．このとき次の二条件は同等である（定理 3.30.31 参照）．

1. $(A, \mathcal{B})$ の核は $(A, \mathcal{B}')$ の核に含まれる．
2. $(A, \mathcal{B})$ の矛盾元は $(A, \mathcal{B}')$ の矛盾元でもある．

従って，$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ が弱同値であるためには，$(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ の矛盾元の全体が等しいことが必要十分である．

略解　問題 3.27.24 による．

定義 3.27.4 A の部分集合 X が $[X]_Q \in \mathcal{D}$ をみたすとき，X を $(A, \mathcal{B})$ の**完全集合**と呼んだり X は $\mathcal{B}$ **完全**であると言ったりする（定義 3.28.1 の論拠の $\mathcal{B}$ **完全性**参照）．

以下この節では，A の $\mathcal{B}$ 完全な部分集合の全体を $\mathcal{E}$ で表す． なお，Q と $\mathcal{D}$ が同値普遍な概念であるから，$\mathcal{E}$ も同値普遍な概念である．

定理 3.27.10 $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ **について次のことが成り立つ．**

1. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$
2. $X \in \mathcal{E}$ **なら，**$X \subseteq Y \in \mathcal{D}$ **なる** Y **は存在して** $[X]_Q$ **に限る．**
3. $X \in \mathcal{E}$ **に** $\mathcal{B}$ **実例が存在すれば，**$[X]_Q$ **が** X **の唯一つの** $\mathcal{B}$ **実例である．**

証明　問題 3.27.8 による．つまりまず $X \in \mathcal{D}$ なら，$[X]_Q = X \in \mathcal{D}$ であるから $X \in \mathcal{E}$ が成り立つ．次に $X \in \mathcal{E}$ なら，$X \subseteq [X]_Q \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ であるから，$X \in \mathcal{C}$ が成り立って $X \subseteq Y \in \mathcal{D}$ なる Y が有る．次に $\mathcal{E} \ni X \subseteq Y \in \mathcal{D}$ なら，$\mathcal{D} \ni [X]_Q \subseteq [Y]_Q = Y \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ であるから $[X]_Q = Y$ となる．最後に，$X \in \mathcal{E}$ に $\mathcal{B}$ 実例 B が有れば，$\mathcal{D} \ni [X]_Q \subseteq B \in \mathcal{C}$ であるから $B = [X]_Q$ が成り立つ．

定理 3.27.11 $(A, \mathcal{B})$ **に補法** $x^{\lozenge}$ **が有れば，**A **の部分集合** X **についての次の五条件は同等である．**

1. $X \in \mathcal{E}$
2. $[X]_Q$ **は** $\lozenge$ **についての否定律「**$x^{\lozenge} \in [X]_Q \iff x \notin [X]_Q$**」に従う．**
3. X **は** $\mathcal{C}$ **に属して任意の** $x \in A$ **に対して** $x \in [X]_Q$ **または** $x^{\lozenge} \in [X]_Q$ **をみたす．**

4. $X \subseteq Y \in \mathcal{D}$ **なる** Y **が存在して** $[X]_Q$ **に限る．**

5. $X \subseteq Y \in \mathcal{D}$ **なる** Y **が唯一つ存在する．**

証明　$\big[[X]_Q\big]_Q = [X]_Q$ が成り立つ．また，問題 3.27.8 により「$X \in \mathcal{C} \iff [X]_Q \in \mathcal{C}$」が成り立つ．従って定理 3.27.5 により条件 1 – 3 は同等である．定理 3.27.10 により $(1 \Longrightarrow 4)$ が成り立ち，$(4 \Longrightarrow 5)$ は自明に成り立ち，定理 3.27.7 により $(5 \Longrightarrow 1)$ が成り立つ．

定理 3.27.12 $(A, \mathcal{B})$ **に否法が存在すれば，**X **を** A **の部分集合とし，**X **が有限集合であるかまたは** $(A, \mathcal{B})$ **が第二種以下であると仮定するとき，次の四条件は同等である．**

1. $X \in \mathcal{E}$

2. $[X]_Q$ **が** X **の唯一つの** $\mathcal{B}$ **実例である．**

3. X **に** $\mathcal{B}$ **実例が唯一つ存在する．**

4. $[X]_Q \in \mathcal{B} - \{A\}$

また，$(A, \mathcal{B})$ **に補法が存在して** $(A, \mathcal{B})$ **が第二種以下であれば，**$X \in \mathcal{P}A$ **についての条件 1 – 3 は同等であって条件 4 を含意する．**

証明　$(1 \Longrightarrow 2)$ $X \in \mathcal{E}$ であれば，定理 3.27.10 により $X \in \mathcal{C}$ であるから，定理 3.27.4 により X に $\mathcal{B}$ 実例が存在し，従ってまた定理 3.27.10 により，$[X]_Q$ が X の唯一つの $\mathcal{B}$ 実例である．

$(2 \Longrightarrow 3)$ これは自明である．

$(3 \Longrightarrow 4)$ 定理 3.27.3 と問題 3.26.15 により $[X]_Q = \bigcap_{X \subseteq B \in \mathcal{B} - \{A\}} B$ が成り立つ．従って，X の $\mathcal{B}$ 実例が B 唯一つであれば $[X]_Q = B \in \mathcal{B} - \{A\}$ が成り立つ．

$(4 \Longrightarrow 1)$ 定理 3.27.5 により $\mathcal{B} - \{A\} \subseteq \mathcal{D}$ が成り立つからである．

以上で前半が証明された．後半については，$(1 \Longrightarrow 2)$ と $(2 \Longrightarrow 3)$ は上と同様に証明されて $(2 \Longrightarrow 4)$ は自明であるから，$(3 \Longrightarrow 1)$ を示せばいいが，定理 3.27.7 系と注意 3.27.3 に記したことから $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B} - \{A\} \subseteq \overleftarrow{\mathcal{D}}$ であるから，条件 3 の下では，$X \subseteq Y \in \mathcal{D}$ なる Y が唯一つ存在し，従って定理 3.27.11 により条件 1 がみたされる．

定理 3.27.13 論対 $(A', \mathcal{B}')$ **が** $(A, \mathcal{B})$ **の拡大であって** A **が** $(A', \mathcal{B}')$ **の補法** $x^{\Diamond}$ **で閉じていれば，**A **は** $(A', \mathcal{B}')$ **の矛盾集合であり（定理 3.27.14 参照），**$\Diamond$ **の** A **への制限は** $(A, \mathcal{B})$ **の補法である．「補法」を「否法」に換えても同様に成り立つ．**

証明　定理 3.27.5 と問題 3.27.14 により A は $(A', \mathcal{B}')$ の矛盾集合である．

$\Diamond$ が $\mathcal{B}'$ 補法の場合：定理 3.26.13 により，Q は $(A', \mathcal{B}')$ の最大論理 Q' の $A^* \times A$ への制限に等しい．Q' が $\Diamond$ に関し偏排中律と偏矛盾律に従うから，Q は $\Diamond$ の A への制限に関し偏排中律と偏矛盾律に従う．

$\Diamond$ が $\mathcal{B}'$ 否法の場合：任意の $x \in A$ と $B \in \mathcal{B} - \{A\}$ に対し，$B = B' \cap A$ なる $B' \in \mathcal{B}' - \{A'\}$ が存在し $x^{\Diamond} \in A$ であるから，「$x^{\Diamond} \in B' \iff x \notin B'$」が成り立つことにより「$x^{\Diamond} \in B \iff x \notin B$」も成り立つ．

定理 3.27.14 論対 $(A', \mathcal{B}')$ **が** $(A, \mathcal{B})$ **の拡大であって** A **が** $(A', \mathcal{B}')$ **の矛盾集合であれば（定理 3.27.13 参照），**A **の部分集合** X **と** $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ **の元** (X, Y) **について次のことが成り立つ．**

1. **X が $(\mathrm{A},\mathcal{B})$ の矛盾集合であるためには，$(\mathrm{A}',\mathcal{B}')$ の矛盾集合であることが必要十分である．**

2. **X が $(\mathrm{A}',\mathcal{B}')$ の完全集合であれば，$(\mathrm{A},\mathcal{B})$ の完全集合でもである．**

3. **$B \in \mathcal{B}$ と $B' \in \mathcal{B}'$ が $B = B' \cap A$ をみたすとき，B が X の $\mathcal{B}$ 実例であるためには B' が X の $\mathcal{B}'$ 実例であることが必要十分であり，B が (X,Y) の $\mathcal{B}$ 実例であるためには，B' が (X,Y) の $\mathcal{B}'$ 実例であることが必要十分である．**

証明　$(A',\mathcal{B}')$ の最大論理を Q' で表す．そうすると定理 3.26.13 により，Q は Q' の $A^* \times A$ への制限であり，$[X]_{(A,Q)} = [X]_{(A',Q')} \cap A$ が成り立つ．

1. 上のことから，$[X]_{(A,Q)} \neq A$ であれば $[X]_{(A',Q')} \neq A'$ が成り立つ．逆に $[X]_{(A,Q)} = A$ であれば，$A \subseteq [X]_{(A',Q')}$，従って $[A]_{(A',Q')} \subseteq [X]_{(A',Q')}$ であるから，A が $(A',\mathcal{B}')$ の矛盾集合であることにより $[X]_{(A',Q')} = A'$ が成り立つ．

2. $(A',\mathcal{B}')$ において $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$ に相当する集合を $\mathcal{C}',\mathcal{D}',\mathcal{E}'$ で表し，$X \in \mathcal{E}'$ と仮定する．そうすると，定理 3.27.10 により $X \in \mathcal{C}'$ であるから，結論 1 により $X \in \mathcal{C}$，従って問題 3.27.8 により $[X]_{(A,Q)} \in \mathcal{C}$ が成り立つ．そこで $[X]_{(A,Q)} \subseteq Y \in \mathcal{C}$ とする．そうすると，$X \subseteq [X]_{(A,Q)} \subseteq Y$ であるから $[X]_{(A',Q')} \subseteq [Y]_{(A',Q')}$ が成り立ち，$A \neq [Y]_{(A,Q)} = [Y]_{(A',Q')} \cap A$ であるから $[Y]_{(A',Q')} \neq A'$，すなわち $Y \in \mathcal{C}'$ が成り立ち，従って問題 3.27.8 により $[Y]_{(A',Q')} \in \mathcal{C}'$ が成り立つ．$X \in \mathcal{E}'$，すなわち $[X]_{(A',Q')} \in \mathcal{D}'$ と仮定していたから，$[X]_{(A',Q')} = [Y]_{(A',Q')}$，従って $[X]_{(A,Q)} = [Y]_{(A,Q)} \supseteq Y$，従って $[X]_{(A,Q)} = Y$ が成り立つ．これで $[X]_{(A,Q)} \in \mathcal{D}$，すなわち $X \in \mathcal{E}$ が示された．

3. $B = B' \cap A$ であるから $Y \cap B = Y \cap B'$ が成り立つ．従って $B \neq A$ かつ $(X,Y) \subseteq (B, A-B)$ であれば，$B' \neq A'$ と $(X,Y) \subseteq (B', A'-B')$ が成り立つ．逆に $B' \neq A'$ かつ $(X,Y) \subseteq (B', A'-B')$ であれば，A が $(A',\mathcal{B}')$ の矛盾集合であることにより $A \not\subseteq B'$ であるから $B \neq A$ であり，$(X,Y) \subseteq (B, A-B)$ が成り立つ．これで (X,Y) についてのことが示された．X についてのことも同様でより易しい．

3.28　論拠の完全性

$ 第 3.26 節では，論理学における意味論が論対論として著しく抽象されることを説明した．ここでは，論対の概念と第 3.25 節の偏生成関係の概念を使って，論理学における演繹論の中心である完全性論が「論拠論」としてやはり著しく抽象されることを説明しよう．

この節を通じて，そうでない旨断らない限り，$(A,\mathcal{B})$ を論対とし，その核と最大論理をそれぞれ C と Q で表す．また，A^*, A 間の関係 R と A の部分集合 D の組み (R,D) を，第 3.25 節では A 上の生成対と呼んだが，ここでは論理学的文脈に合わせて A 上の**論拠**と呼び替える．すなわち論拠は，論理学における推論規則と論理的公理系の組みを抽象した概念である（第 3.30.5 項参照）．なお，第 3.19 節以降使ってきた AZ 記法や列便法を引き続いて使う．

定義 3.28.1　A 上の論拠 (R,D) について次の六項の定義を設ける．

1. (R,D) が $\mathcal{B}$ **健全**であるとは，$R^D \subseteq Q$ をみたすことを言う．問題 3.28.2 を先取りすれば，$R^D \subseteq Q$ なることは $R \subseteq Q$ かつ $D \subseteq C$ なることと同等である．そこで，$R \subseteq Q$ のとき R は $\mathcal{B}$ **健全**であると言い，$D \subseteq C$ のとき D は $\mathcal{B}$ **健全**であると言う．なお定理 3.26.5 によれば，$R \subseteq Q$ であることは R が $\mathcal{B}$ 論理であることに他ならない．

2. (R,D) が $\mathcal{B}$ **充分**であるとは，$Q \subseteq R^D$ をみたすことを言う．

3. (R, D) が $\mathcal{B}$ **完全**であるとは，(R, D) が $\mathcal{B}$ 健全かつ $\mathcal{B}$ 充分であることを，すなわち $Q = R^D$ をみたすことを言う（定義 3.27.4 の A の部分集合の $\mathcal{B}$ 完全性参照）.

4. (R, D) が $\mathcal{B}$ **弱完全**あるいは $\mathcal{B}$ **核完全**であるとは，$C = [D]_R$ をみたすことを言う.

5. (R, D) が $\mathcal{B}$ **強完全**であるとは，(R, D) が $\mathcal{B}$ 健全であって A の D を含む R 理論がすべて $\mathcal{B}$ の A に関する交包 $\mathcal{B}^{\cap}$ に属すことを言う.

6. (R, D) が $\mathcal{B}$ **超完全**であるとは，A の D を含む R 理論の全体が $\mathcal{B}$ に等しいことを言う.

また,「$\mathcal{B}$ 健全」等を「$\mathcal{B}$ に関して健全」「$(A, \mathcal{B})$ に関して健全」等と言うこともある．さらに，A 上の算法族 $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と A の部分集合 D の組み $((\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, D)$ を A 上の**算法論拠**と呼び，$(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の関係化 R と A の部分集合 D から成る論拠 (R, D) の $(A, \mathcal{B})$ に関する四種の完全性（修飾なしの完全性と弱完全性・強完全性・超完全性）・健全性・充分性のそれぞれを以て，算法論拠 $((\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, D)$ の $(A, \mathcal{B})$ に関する四種の**完全性・健全性・充分性**と定義する.

問題 3.28.1 (✓) A が代数系で $\mathcal{B}$ が A の台部分系の全体であるとき，A の代数構造の関係化を R で表せば，A 上の論拠 $(R, \emptyset)$ は $\mathcal{B}$ 超完全である.

A が第一分離公理をみたす非離散位相空間で $\mathcal{B}$ が A の開集合系または閉集合系であるとき，A^*, A 間の関係 R を「$\alpha R y \implies \alpha \ni y$」をみたすよう任意にとれば，A 上の論拠 $(R, \emptyset)$ は，$\mathcal{B}$ が開集合系であれば $\mathcal{B}$ 強完全であるが $\mathcal{B}$ 超完全でなく，$\mathcal{B}$ が閉集合系であれば $\mathcal{B}$ 完全であるが $\mathcal{B}$ 強完全でない.

略解　前半は問題 3.24.1 による．後半では，問題 3.26.21 により $R \subseteq Q$ であって Q が最小偏束関係であるから，定理 3.25.4 系 2 により $Q = R^{\emptyset}$ が成り立つ．また，R 理論の全体は $\mathcal{P}A$ である.

定理 3.28.1 **A 上の論拠 (R, D) についての次の四条件は同等である.**

1. **(R, D) は $\mathcal{B}$ 完全である.**

2. **A の任意の部分集合 X に対して $[X]_Q = [X \cup D]_R$ が成り立つ.**

3. **$(A, \mathcal{B})$ の理論の全体は A の D を含む R 理論の全体に等しい.**

4. **$R \subseteq Q,\ D \subseteq C,\ Q \subseteq R^D$ が成り立つ.**

証明　定理 3.26.8 により Q は偏束律に従う．そして，定理 3.26.6 により $(A, \mathcal{B})$ の理論は界 (A, Q) の閉部分界に他ならず，問題 3.26.1 により A の R 理論は界 (A, R) の閉部分界に他ならない．また，定理 3.26.9 により $C = A_Q$ が成り立つ．従って，定理 3.25.5 系により条件 1 – 4 は同等である.

写像論理を使う別証　条件 1 – 4 が次の条件 5 と同等であることを示そう．ただし，ν は $(A, \mathcal{B})$ の最大の有限的写像論理であり，${\varphi_R}^D$ は R による 1 圏写像 φ_R の D 包である.

5. $\nu = {\varphi_R}^D$ が成り立つ.

$(1 \Longleftrightarrow 5)$ $Q = R^D$ であれば，問題 3.26.14 と問題 3.25.9 により $\nu = \varphi_Q = \varphi_{R^D} = {\varphi_R}^D$ が成り立つ．逆に $\nu = {\varphi_R}^D$ であれば，$\varphi_Q = \nu = {\varphi_R}^D = \varphi_{R^D}$ であり，また定理 3.26.8 と定理 3.25.2 により Q と R^D が偏束律に従うから，問題 3.24.16 により $Q = R^D$ が成り立つ.

$(5 \iff 2)$ 条件 5 は，任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $\nu X = \varphi_R{}^D X$ の成り立つことと同等である．問題 3.26.14 により $\nu X = [X]_Q$ である．問題 3.25.7 と問題 3.24.16 により $\varphi_R{}^D X = [X \cup D]_R$ である．従って，条件 5 と条件 2 は同等である．

$(5 \iff 3)$ 問題 3.26.11 と問題 3.25.7 により ν と $\varphi_R{}^D$ は閉写であるから，定理 3.18.1 により，条件 5 は ν と $\varphi_R{}^D$ の留域が一致することと同等である．A の ν 留元はすなわち A の ν 理論であり，それは問題 3.26.14 によりすなわち A の Q 理論であり，それはすなわち $(A, \mathcal{B})$ の理論である．他方，A の $\varphi_R{}^D$ 留元はすなわち A の $\varphi_R{}^D$ 理論であり，問題 3.25.7 と問題 3.24.16 によりそれはすなわち A の D を含む R 理論である．従って，条件 5 と条件 3 は同等である．

$(5 \iff 4)$ 条件 5 は $\nu \subseteq \varphi_R{}^D$ かつ $\nu \supseteq \varphi_R{}^D$ なることと同等である．$(1 \iff 5)$ でと同様，$\nu \subseteq \varphi_R{}^D$ なることは $Q \subseteq R^D$ なることと同等である．また，ν が閉写であるから，問題 3.25.7 により，$\nu \supseteq \varphi_R{}^D$ なることは $\nu \supseteq \varphi_R$ かつ $D \subseteq \nu\emptyset$ なることと同等である．$(1 \iff 5)$ でと同様，$\nu \supseteq \varphi_R$ なることは $Q \supseteq R$ なることと同等であり，それは R が $\mathcal{B}$ 論理であることと同等である．問題 3.26.18 により $\nu\emptyset = C$ が成り立つ．従って，条件 5 と条件 4 は同等である．

注意 3.28.1 定理 3.28.1 の同等な四条件は，条件 2 において「部分集合」を「有限部分集合」に書き換えて得られる条件とも同等である．

問題 3.28.2 A 上の論拠 (R, D) についての次の三条件はいずれも，(R, D) が $\mathcal{B}$ 健全であることと同等である．

1. A の任意の部分集合 X に対して $[X]_Q \supseteq [X \cup D]_R$ が成り立つ．
2. $(A, \mathcal{B})$ の理論は A の D を含む R 理論でもある．
3. $R \subseteq Q$ と $D \subseteq C$ が成り立つ．

また，次の二条件はいずれも，(R, D) が $\mathcal{B}$ 充分であることと同等である．

4. A の任意の部分集合 X に対して $[X]_Q \subseteq [X \cup D]_R$ が成り立つ．
5. A の D を含む R 理論は $(A, \mathcal{B})$ の理論でもある．

略解　定理 3.25.5 系などによる．

問題 3.28.3 A 上の論拠 (Q, C) は，$\mathcal{B}$ 健全な A 上の論拠の中で $\mathcal{P}(A^* \times A) \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ について最大のものであり，$\mathcal{B}$ 完全である．

略解　(Q, C) が $\mathcal{B}$ 完全であることは問題 3.26.19 などによる．

問題 3.28.4 (✓) Q の特異核 Q' と C から成る論拠は $\mathcal{B}$ 完全である（注意 3.24.6 参照）．

略解　問題 3.26.20 による．

定理 3.28.2 A **上の論拠** (R, D) **は，**$\mathcal{B}$ **完全なら** $\mathcal{B}$ **弱完全である．**

証明　(R, D) が $\mathcal{B}$ 完全なら，A の任意の部分集合 X に対して $[X]_Q = [X \cup D]_R$，特に $[\emptyset]_Q = [D]_R$ が成り立つが，定理 3.26.9 により $C = [\emptyset]_Q$ であるから，$C = [D]_R$ が成り立つ．

問題 3.28.5 A 上の論拠 (R, D) は，$\mathcal{B}$ 健全なら $C \supseteq [D]_R$ をみたし，$\mathcal{B}$ 充分なら $C \subseteq [D]_R$ をみたす．

問題 3.28.6 A 上の論拠 (R, D) が $\mathcal{B}$ 弱完全であれば，R は $(A, \mathcal{B})$ の弱論理であって $D \subseteq C$ が成り立つ．

略解　$C = [D]_R$ であるから，特に C は R によって閉じており，従って R は $(A, \mathcal{B})$ の弱論理である．

定理 3.28.3 (R, D) **が** A **上の** $\mathcal{B}$ **弱完全な論拠であって，写像** $\phi \in A^* \times A \to A$ **で**

$$\alpha\, Q\, y \iff \varepsilon\, Q\, \phi(\alpha, y) \qquad\qquad \alpha\, R^D\, y \iff \varepsilon\, R^D\, \phi(\alpha, y)$$

なる二条件をみたすものがあれば，(R, D) **は** $\mathcal{B}$ **完全である．**

証明　定理 3.26.9 と (R, D) が $\mathcal{B}$ 弱完全であることより，任意の $y \in A$ に対して

$$\varepsilon\, Q\, y \iff y \in C \iff y \in [D]_R \iff \varepsilon\, R^D\, y$$

が成り立つ．従って，任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対して次のことが成り立つ．

$$\alpha\, Q\, y \iff \varepsilon\, Q\, \phi(\alpha, y) \iff \varepsilon\, R^D\, \phi(\alpha, y) \iff \alpha\, R^D\, y$$

従って $Q = R^D$，すなわち (R, D) は $\mathcal{B}$ 完全である．

問題 3.28.7 (R, D) が A 上の $C \subseteq [D]_R$ なる論拠であって，写像 $\phi \in A^* \times A \to A$ で

$$\alpha\, Q\, y \implies \varepsilon\, Q\, \phi(\alpha, y) \qquad\qquad \alpha\, R^D\, y \impliedby \varepsilon\, R^D\, \phi(\alpha, y)$$

なる二条件をみたすものがあれば（矢印の向きに注意），(R, D) は $\mathcal{B}$ 充分である．

問題 3.28.8 A 上の論拠 (R, D') が $\mathcal{B}$ 完全であるとする．このとき，R と A の部分集合 D から成る論拠 (R, D) は，$\mathcal{B}$ 弱完全なら $\mathcal{B}$ 完全である！

略解　(R, D) が $\mathcal{B}$ 弱完全なら，$[D]_R = C = [D']_R$ なので，問題 3.25.5 により $R^D = R^{D'} = Q$ が成り立つ．

定理 3.28.4 A **上の論拠** (R, D) **が** $\mathcal{B}$ **強完全であるためには，**(R, D) **が** $\mathcal{B}$ **完全であって** $(A, \mathcal{B})$ **が第二種以下であることが必要十分である．従って，**(R, D) **が** $\mathcal{B}$ **強完全であれば，**(R, D) **は** $\mathcal{B}$ **完全である．**

証明　A の D を含む R 理論の全体を $\mathcal{D}$ で表す．そしてまず，(R, D) が $\mathcal{B}$ 強完全であると仮定する．そうすると，$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}^\cap \subseteq \overline{\mathcal{B}^\cap}$ が成り立つ．特に $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathcal{B}^\cap}$ であるから，定理 3.26.12 と問題 3.28.2 により $Q \subseteq R^D$，従ってまた仮定と定理 3.28.1 により $Q = R^D$ と $\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{D}$ が成り立つ．後者の式と先の $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}^\cap \subseteq \overline{\mathcal{B}^\cap}$ から $\overline{\mathcal{B}^\cap} = \mathcal{B}^\cap$，すなわち $(A, \mathcal{B})$ は第二種以下である．

次に，(R, D) が $\mathcal{B}$ 完全であると仮定する．そうすると，(R, D) は $\mathcal{B}$ 健全であり，定理 3.28.1 により $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{B}^\cap}$ が成り立つ．従ってさらに $(A, \mathcal{B})$ が第二種以下であれば，$\mathcal{D} = \mathcal{B}^\cap$ が成り立つから，(R, D) は $\mathcal{B}$ 強完全である．

定理 3.28.5 $\mathcal{A}$ **上の論拠** $(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **についての次の三条件は同等である．**

1. $(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **は** $\mathcal{B}$ **超完全である．**
2. $(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **が** $\mathcal{B}$ **完全であって** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **は第一種である．**
3. $(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **が** $\mathcal{B}$ **強完全であって** $\mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{B}$ **である．**

従って，$(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **が** $\mathcal{B}$ **超完全であれば，**$(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **は** $\mathcal{B}$ **強完全である．**

証明　定理 3.28.4 により，(R, D) が $\mathcal{B}$ 強完全であって $\mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{B}$ であるためには，(R, D) が $\mathcal{B}$ 完全であって $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{B}$ であることが必要十分であり，この式は $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ が第一種であることと同等である．従って，条件 2, 3 は同等である．

(1 $\Longrightarrow$ 2) (R, D) が $\mathcal{B}$ 超完全であると仮定する．そうすると，A の D を含む R 理論の全体が $\mathcal{B}$ に等しいことから，次の三つのことが分かる．第一に，R は $\mathcal{B}$ の各元を閉ざすから $\mathcal{B}$ 論理であり，従って Q に含まれる．第二に，D は $\mathcal{B}$ の各元に含まれるから C に含まれる．第三に，A の D を含む R 理論は $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ の理論でもある．従って問題 3.28.2 により，(R, D) は $\mathcal{B}$ 完全である．従ってさらに定理 3.26.12 と定理 3.28.1 により $\overline{\mathcal{B}^{\cap}} = \mathcal{B}$，すなわち $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ は第一種である．

(2 $\Longrightarrow$ 1) (R, D) が $\mathcal{B}$ 完全で $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ が第一種であると仮定する．そうすると定理 3.28.1 と定理 3.26.12 により，A の D を含む R 理論の全体は $\mathcal{B}$ に等しい．つまり，(R, D) は $\mathcal{B}$ 超完全である．

定理 3.28.6 **論対** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **について次のことが成り立つ．**

1. $\mathcal{A}$ **上のある論拠が** $\mathcal{B}$ **超完全であれば，**$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **は第一種である．逆に** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **が第一種であれば，**$\mathcal{A}$ **上の** $\mathcal{B}$ **完全な論拠はどれも** $\mathcal{B}$ **超完全である．**
2. $\mathcal{A}$ **上のある論拠が** $\mathcal{B}$ **強完全であって** $\mathcal{B}$ **超完全でなければ，**$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **は第二種である．逆に** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **が第二種であれば，**$\mathcal{A}$ **上の** $\mathcal{B}$ **完全な論拠はどれも** $\mathcal{B}$ **強完全であって** $\mathcal{B}$ **超完全でない．**
3. $\mathcal{A}$ **上のある論拠が** $\mathcal{B}$ **完全であって** $\mathcal{B}$ **強完全でなければ，**$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **は第三種である．逆に** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **が第三種であれば，**$\mathcal{A}$ **上の論拠はどれも** $\mathcal{B}$ **強完全でない．**

証明　結論 1 と結論 3 はそれぞれ，定理 3.28.5 と定理 3.28.4 の一部の言い換えに過ぎない．結論 2 については，論拠 (R, D) が $\mathcal{B}$ 強完全であって $\mathcal{B}$ 超完全でなければ，まず定理 3.28.4 により (R, D) は $\mathcal{B}$ 完全であって $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ は第二種以下であり，次に定理 3.28.5 により $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ は第二種である．逆に $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ が第二種であれば，$\mathcal{B}$ 完全な論拠は，まず定理 3.28.4 により $\mathcal{B}$ 強完全であり，次に定理 3.28.4 により $\mathcal{B}$ 超完全でない．従って結論 2 が成り立つ．

定理 3.28.7 **論対** $(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$ **が** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **と同値であれば，**$\mathcal{A}$ **上の論拠** $(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **の** $\mathcal{B}$ **に関する完全性・健全性・充分性はそれぞれ，**$\mathcal{B}'$ **に関する完全性・健全性・充分性と同義である．また，**$(\mathcal{A}, \mathcal{B}')$ **が** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ **と弱同値であれば，**$(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ **の** $\mathcal{B}$ **に関する弱完全性は** $\mathcal{B}'$ **に関する弱完全性と同義である．従って，完全性・健全性・充分性・弱完全性は同値普遍な概念である．**

証明　定理 3.26.11 とその系により，$(\mathrm{A}, \mathcal{B}')$ と $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ が同値であれば $(\mathrm{A}, \mathcal{B}')$ と $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ の最大論理が等しく $(\mathrm{A}, \mathcal{B}')$ と $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ は弱同値であり，$(\mathrm{A}, \mathcal{B}')$ と $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ が弱同値であれば，$(\mathrm{A}, \mathcal{B}')$ と $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ の核が等しい．従って定義 3.28.1 によりこの定理が成り立つ．

系　$\mathcal{P}A$ **の部分集合** $\mathcal{B}'$ **が** $\mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{B}'^{\cap}$ **をみたせば，**A **上の論拠** (R, D) **の** $\mathcal{B}$ **に関する完全性・強完全性・弱完全性・健全性・充分性はそれぞれ，**$\mathcal{B}'$ **に関する完全性・強完全性・弱完全性・健全性・充分性と同義である．特に** $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^{\cap}$ **であれば，上と同じ結論が成り立つ．**

証明　論対 $(A, \mathcal{B}')$ が定理 3.26.12 系により $(A, \mathcal{B})$ と同値，従って定理 3.26.11 により $(A, \mathcal{B})$ と弱同値であるから，強完全性以外のことは定理 3.28.7 により成り立つ．$\mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{B}'^{\cap}$ だから，強完全性についてのことも定義により成り立つ．問題 3.18.36 により $\mathcal{B}^{\cap} = (\mathcal{B}^{\cap})^{\cap}$ であるから，前半により後半が成り立つ．

系 2　A **上の論拠** (R, D) **について次のことが成り立つ．**

1. (R, D) **が** $\mathcal{B}$ **完全であるためには，**$\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ **超完全であることが必要十分である．**
2. (R, D) **が** $\mathcal{B}$ **強完全であるためには，**$\mathcal{B}^{\cap}$ **超完全であることが必要十分である．**

証明　(R, D) が $\mathcal{B}$ 完全であることは，定理 3.28.1 と定理 3.26.12 により，A の R 理論で D を含むものの全体が $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ に等しいことと同等であり，このことは定義により，(R, D) が $\overline{\mathcal{B}^{\cap}}$ 超完全であることと同等である．

(R, D) が $\mathcal{B}$ 強完全なら，系により $\mathcal{B}^{\cap}$ に関しても強完全であって $\mathcal{B}^{\cap}$ が A に関して交閉的であるから，定理 3.28.5 により (R, D) は $\mathcal{B}^{\cap}$ 超完全である．逆に (R, D) が $\mathcal{B}^{\cap}$ 超完全であれば，定理 3.28.5 により $\mathcal{B}^{\cap}$ 強完全であるから，$\mathcal{B}$ に関しても強完全である．

問題 3.28.9　$\mathcal{B}' = \mathcal{B} - \{A\}$ について，定理 3.28.7 系前半と同じ結論が成り立つ（問題 3.26.25 参照）．

略解　第 3.9.3 項の上限の定義により A は $\mathcal{B}'$ 元零個の交わりだから，$\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'^{\cap}$ が成り立ち，従って $\mathcal{B}^{\cap} = \mathcal{B}'^{\cap}$ だからである．

問題 3.28.10 (✓)　$\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}'$ が $\mathcal{B}^{\cap} \subseteq \mathcal{B}'^{\cap}$ をみたし A 上の論拠 (R, D) が $\mathcal{B}'$ 健全であれば，(R, D) は $\mathcal{B}$ に関しても健全であり，(R, D) の $\mathcal{B}$ に関する完全性・強完全性・弱完全性はそれぞれ，$\mathcal{B}'$ に関する完全性・強完全性・弱完全性を含意する．

略解　$\overline{\mathcal{B}^{\cap}} \subseteq \overline{\mathcal{B}'^{\cap}}$ が成り立つので，定理 3.26.12 系により論対 $(A, \mathcal{B}')$ は $(A, \mathcal{B})$ に覆われ，$(A, \mathcal{B}')$ の最大論理と核を Q' と C' で表せば，$Q' \subseteq Q$ と $C' \subseteq C$ が成り立つ．

3.29　関係の法則と生成対

$ ここでは，集合 A, B 間の関係についてのある種の法則が $A \times B$ 上の生成対と捉えられることを説明する．

3.29.1　関係の生成的法則

§ 第 3.19 節で定めた束律・強束律・ブール律・擬ブール律や第 3.20 節で定めた偏束律や第 3.21 節で定めた弱ブール律に共通する性質を，次の定義のように捉えることができる．

定義 3.29.1 集合 A, B の直積 $A' = A \times B$ の部分集合 D' と A'^*, A' 間の関係 R' の組み (R', D') を A, B 間の関係についての**生成的法則**とも呼ぶ．そして，A, B 間の関係 R がこの**法則** (R', D') **に従う**とは，A' の部分集合としての R が界 (A', R') の D' を含む閉部分界であることと定める．また，法則 (R', D') に従う A, B 間の関係を (R', D') **関係**と呼ぶ．

なおこういう組み (R', D') を，第 3.25 節では A' 上の生成対と呼び，第 3.28 節では A' 上の論拠と呼んだ．今後も文脈によっては，上の定義に拘わらず呼び方を色々に変える．

例 3.29.1 同値律とそれを成す反射律・対称律・推移律が生成的法則であることを説明しよう．

集合 A 上の関係の場合には，定義 3.29.1 における A' は $A \times A$ である．そこでまず

$$D' = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

と定める．次に，A'^*, A' 間の関係 S' と T' を第 3.9.7 項で説明した分数式定義法により

$$S' = \frac{(x, y)}{(y, x)} \qquad (x, y \in A)$$

$$T' = \frac{(x, y)\ (y, z)}{(x, z)} \qquad (x, y, z \in A)$$

と定め，これらの和を R' で表す．そうすると，A 上の関係 R が反射律に従うことは $D' \subseteq R$ なることに他ならず，R が対称律に従うことは R が S' で閉じていることに他ならず，R が推移律に従うことは R が T' で閉じていることに他ならない．従って定理 3.24.5 により，R が同値関係であることは R が D' を含み R' で閉じていることに他ならない．つまり，A 上の関係についての同値律は生成的法則 (R', D') に等しく，同値関係は (R', D') 関係に他ならない．同様に，推移律は生成的法則 $(T', \emptyset)$ に等しく，対称律は生成的法則 $(S', \emptyset)$ に等しく，反射律は生成的法則 $(\emptyset, D')$ に等しい．なお次の問題 3.29.1 での定義によれば，$(R', D') = (\emptyset, D') \cup (S', \emptyset) \cup (T', \emptyset)$ が成り立つ．

問題 3.29.1 集合 A, B 間の関係についての生成的法則の族 (R_i, D_i) $(i \in I)$ に対して，同じく集合 A, B 間の関係についての生成的法則 $\left(\bigcup_{i \in I} R_i,\ \bigcup_{i \in I} D_i\right)$ を (R_i, D_i) $(i \in I)$ の**和**と呼んで $\bigcup_{i \in I}(R_i, D_i)$ で表す．そうすると，A, B 間の関係がすべての $i \in I$ に対して法則 (R_i, D_i) に従うためには，$\bigcup_{i \in I}(R_i, D_i)$ に従うことが必要十分である．

定理 3.29.1 **(R', D') を集合 A, B 間の関係についての生成的法則とし，$A' = A \times B$ と定める．このとき，界 (A', R') における D' の界包 $[D']_{R'}$ を A, B 間の関係とみなしたものは，最小の (R', D') 関係である．より一般に，R が A, B 間の関係であれば，$[R \cup D']_{R'}$ は R を含む最小の (R', D') 関係である．**

証明　$[R \cup D']_{R'}$ が (A', R') の R と D' を含む閉部分界の中で最小のものだからである．

問題 3.29.2 問題 3.9.50 について例 3.29.1 と定理 3.29.1 に基づいて考えよ．

略解　例 3.29.1 の記号を用いれば，界 $(A', \emptyset)$ における $R \cup D'$ の界包は $R \cup D'$ に等しい．また，$(x, y) \in A'$ が界 (A', S') における R の n 圏に属すためには，n が偶数のときには $(x, y) \in R$ なることが必要十分であり，n が奇数のときには $(y, x) \in R$ なることが必要十分である．また，$(x, y) \in A'$ が界 (A', T') における R の n 圏に属すためには，A の元の列 $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ で $x_0 = x, x_{n+1} = y$，$(x_{i-1}, x_i) \in R$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ なるものの存在することが必要十分である．

定理 3.29.2 集合 A, B 間の関係の集合 $\mathcal{R}$ についての次の二条件は同等である．

1. **$\mathcal{R}$ は，ある一つの生成的法則に従う A, B 間の関係の全体に等しい．**

2. **$\mathcal{R}$ は $\mathcal{P}(A \times B)$ の部分集合として $A \times B$ に関して交閉的かつ概有限である．**

従って特に，集合 A, B 間の関係についての生成的法則は交閉的である．

証明　問題 3.26.30 により，条件 2 がみたされるためには，$A \times B$ 上のある論拠 (R', D') に対して，$\mathcal{R}$ が $A \times B$ の R' 理論で D' を含むものの全体に等しいことが必要十分であり，それは，$\mathcal{R}$ が生成的法則 (R', D') に従う A, B 間の関係の全体に等しいこととと同等である．

問題 3.29.3 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ を汎代数系とし，$A' = A \times A$ とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して A'^*, A' 間の関係 R'_λ を分数式に次のように定める．ただし，n_λ は α_λ の項数である．

$$\frac{(a_1, a'_1) \ldots (a_{n_\lambda}, a'_{n_\lambda})}{\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_{n_\lambda}), \alpha_\lambda(a'_1, \ldots, a'_{n_\lambda})\bigr)}$$

さらに $R' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R'_\lambda$ と定める．そうすると，代数構造 $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と両立する A 上の関係は $(R', \emptyset)$ 関係に他ならない．従って汎代数系については，代数構造と両立する関係の全体は交閉的である（問題 3.11.4 と注意 3.11.2 参照）．

定義 3.29.2 集合 A, B 間の関係についての二組の生成的法則 (Q', C') と (R', D') について，(Q', C') 関係がすべて (R', D') 関係であるとき，法則 (Q', C') は法則 (R', D') より**強い**とか，法則 (Q', C') は法則 (R', D') を**含意する**とか，法則 (R', D') は法則 (Q', C') より**弱い**とかと言う．また，(Q', C') 関係の全体が (R', D') 関係の全体に等しいとき，法則 (Q', C') は法則 (R', D') と**同等**であるとか**同値**であるとかと言う．また，最小 (Q', C') 関係最小 (R', D') 関係に等しいとき，法則 (Q', C') は法則 (R', D') と**弱同値**であると言う．さらに，(Q', C') と (R', D') が $R' \subseteq Q'$ と $D' \subseteq C'$ をみたすとき，(Q', C') は (R', D') より**豊富**であると言う．

この「強い」「含意する」「弱い」という関係は擬順序関係であり,「同値」という関係は同値関係であり,「豊富」という関係は順序関係である．

問題 3.29.4 (Q', C') を集合 A, B 間の関係についての生成的法則とするとき，次のことが成り立つ．

1. (Q', C') が A, B 間の関係についての生成的法則 (R', D') より豊富であれば，(Q', C') は (R', D') より強い．

2. (Q', C') が A, B 間の関係についての生成的法則 (R', D') より強いためには，偏生成関係について ${R'}^{D'} \subseteq {Q'}^{C'}$ の成り立つことが必要十分である．

3. A, B 間の関係についての生成的法則 $({Q'}^{C'}, [C']_{Q'})$ は，(Q', C') より弱い生成的法則の中で最も豊富なものであると共に，(Q', C') と同値である．

略解　結論 2, 3 は定理 3.25.5 による．

定理 3.29.3 R を集合 A, B 間の関係とし，(R', D') を A, B 間の関係についての生成的法則とし，E' を $A \times B$ の部分集合とする．このとき，A, B 間の関係 Q で

1. $R \subseteq Q$　　**2.** **Q は法則 (R', D') に従う**　　**3.** **$x \, Q \, y$ なる $(x, y) \in E'$ は存在しない**

なる三条件をみたすものがあれば，その中に包含関係 $\subseteq$ について極大のものがある．

証明　$A' = A \times B$ と定めると，Q が上の三条件をみたすことは，Q が界 (A', R') の閉部分界であって $Q \supseteq R \cup D'$ と $Q \cap E' = \emptyset$ をみたすことと同等である．従って，定理 3.24.12 によりこの定理が成り立つ．

3.29.2　生成的法則としての類ブール律

§ ここでは，定理 3.29.1 をブール律等の具体例に即して敷衍する．そのために第 3.23 節の記法を拡張し，一般に集合 A に対し，$A^* \times A^*$ の元 (α, β) を $\alpha \to \beta$ だけでなく $\beta \leftarrow \alpha$ でも表して A 上の矢式とか式とかと呼ぶ（それが好ましい理由は定理 3.29.4 の証明を見れば分かるであろう）．それに合わせて $A^* \times A^*$ を $\vec{A}$ で表す．

$$\vec{A} = A^* \times A^*$$

また，第 3.19 節以降使ってきた AZ 記法や列便法を引き続いて使う．

定理 3.29.4　**［{強，偏}］束律・［{擬，弱}］ブール律およびこれらの法則を成す反復律・［偏］付加律・［偏］巾等律・［偏］置換律・［{強，偏}］消去律・［強］両限律・［強］両補律・［強］三導律はそれぞれ生成的法則である（角括弧［　］と中括弧｛　｝の意味については端書き参照）．**

注意 3.29.1　証明は長いが，最後の二行を除き，「集合 A, B の直積 $A \times B$ の部分集合 R を A, B 間の関係とも呼び，$A \times B$ の元 (a, b) が R に属することを $a\,R\,b$ で表す」という定義と束律・…・弱ブール律の定義の言い換えに過ぎない．

証明　A を任意の集合とし，A^* 上の任意の関係 R をとる．すなわち，R は $\vec{A}$ の部分集合である．そして，A 上の $x \to x$ なる形の式を**反復式**と呼ぶ $(x \in A)$．また，$\vec{A}^*, \vec{A}$ 間の五種九個の関係を分数式に次のように定める（矢式の向きに注意）．

$$\frac{\alpha \to \beta}{x\alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow \beta}{x\alpha \leftarrow \beta} \qquad \text{(付加関係)}$$

$$\frac{xx\alpha \to \beta}{x\alpha \to \beta} \qquad \frac{xx\alpha \leftarrow \beta}{x\alpha \leftarrow \beta} \qquad \text{(巾等関係)}$$

$$\frac{\alpha xy\beta \to \gamma}{\alpha yx\beta \to \gamma} \qquad \frac{\alpha xy\beta \leftarrow \gamma}{\alpha yx\beta \leftarrow \gamma} \qquad \text{(置換関係)}$$

$$\frac{\alpha \to x \quad x\beta \to \delta}{\alpha\beta \to \delta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow x \quad x\beta \leftarrow \delta}{\alpha\beta \leftarrow \delta} \qquad \text{(消去関係)}$$

$$\frac{\alpha \to x\gamma \quad x\beta \to \delta}{\alpha\beta \to \delta\gamma} \qquad \text{(強消去関係)}$$

そうすると，R が反復律に従うことは，反復式がすべて R に属すことと同等である．また，R が付加律・巾等律・置換律・消去律・強消去律のそれぞれに従うことは，R が付加関係・巾等関係・置換関係・消去関係・強消去関係のそれぞれで閉じていることと同等である．以上のことと問題 3.29.1

により，束律と強束律およびそれらを成す付加律・⋯・強消去律は生成的法則である．特に，付加・巾等・置換・強消去の四関係の和を $\vec{R}_0$ で表し反復式の全体を $\vec{D}_0$ で表せば，生成的法則 $(\vec{R}_0, \vec{D}_0)$ が強束律に他ならない．偏束律とそれらを成す法則についても同様である．

ブール律・擬ブール律・弱ブール律について考えるために，以下，$x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ を A 上の汎算法とする．そして，四種十一類の式を次のように定義する（矢式の向きに注意）．

$$x \wedge y \to x \qquad x \wedge y \to y \qquad xy \to x \wedge y \qquad \text{(下限式)}$$

$$x \vee y \leftarrow x \qquad x \vee y \leftarrow y \qquad xy \leftarrow x \vee y \qquad \text{(上限式)}$$

$$xx^{\Diamond} \to \varepsilon \qquad xx^{\Diamond} \leftarrow \varepsilon \qquad \text{(両補式)}$$

$$x^{\Diamond} \to x \Rightarrow y \qquad y \to x \Rightarrow y \qquad x, x \Rightarrow y \to y \qquad \text{(三導式)}$$

三導式中の初めの二式はそれぞれ三導律中の初めの下補導律と反復導律の式化であるが，三番目の式は，三導律中の三番目の法則である上補反復導律の式化でなく，注意 3.21.4 を踏まえて消去導律の式化に変えてあることに注意されたい．そう変える特段の必要はこの項では無いが，後々の便利のためにそうしておくのである．そうすると，R が下限律・上限律・両補律・下補導律・反復導律・消去導律のそれぞれに従うことは，R が下限式・上限式・両補式・三導式のそれぞれをすべて含むことと同等である．従って，ブール律と擬ブール律およびそれらを成す法則は生成的法則である．特に，反復・下限・上限・両補・三導の五種の式の全体を $\vec{D}_1$ で表せば，生成的法則 $(\vec{R}_0, \vec{D}_1)$ がブール律に他ならない．

弱ブール律について考えるために，$\vec{A}^*, \vec{A}$ 間の四種八個の関係を次のように定める．

$$\frac{xy\alpha \to \beta}{x \wedge y, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to x\beta \quad \alpha \to y\beta}{\alpha \to x \wedge y, \beta} \qquad \text{(下限関係)}$$

$$\frac{x\alpha \to \beta \quad y\alpha \to \beta}{x \vee y, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to xy\beta}{\alpha \to x \vee y, \beta} \qquad \text{(上限関係)}$$

$$\frac{\alpha \to x\beta}{x^{\Diamond}\alpha \to \beta} \qquad \frac{x\alpha \to \beta}{\alpha \to x^{\Diamond}\beta} \qquad \text{(両補関係)}$$

$$\frac{\alpha \to x\beta \quad y\alpha \to \beta}{x \Rightarrow y, \alpha \to \beta} \qquad \frac{x\alpha \to y\beta}{\alpha \to x \Rightarrow y, \beta} \qquad \text{(三導関係)}$$

そうすると，R が強下限律・強上限律・強両補律・強三導律のそれぞれに従うことは，R が下限関係・上限関係・両補関係・三導関係のそれぞれで閉じていることと同等である．従って，弱ブール律とそれらを成す法則は生成的法則である．特に，付加・巾等・置換・下限・上限・両補・三導の七種十四個の関係の和を $\vec{R}_1$ で表せば，生成的法則 $(\vec{R}_1, \vec{D}_0)$ が弱ブール律に他ならない．

なお，定理 3.21.10 によりブール関係は［強］消去律に従う弱ブール関係に他ならないから，$\vec{R}_1$ と［強］消去関係の和を $\vec{R}_2$ で表せば，ブール律は生成的法則 $(\vec{R}_2, \vec{D}_0)$ と同値である．

問題 3.29.5 (✓) 定理 3.29.4 と定理 3.29.3 を用いて問題 3.22.30 の命題を証明せよ．

略解　定理 3.29.4 により，ブール律は A^* 上の関係についての何らかの生成的法則 (R', D') とみなされる．他方で問題 3.21.21 により，A^* 上のブール関係 Q が最大関係でないためには，$\varepsilon\, Q\, x \wedge x^{\Diamond}$ なる $x \in A$ の存在しないことが必要十分である．そこで $\vec{A}$ の部分集合 E' を $E' = \{\varepsilon \to x \wedge x^{\Diamond} \mid x \in A\}$ と定めて定理 3.29.3 を使えばいい．

定理 3.29.5 A **を集合とし，**$x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ **を** A **上の汎算法とし，これらの算法に関する** A^* **上の最小ブール関係を** $\vec{C}$ **で表す（従って** $\vec{C}$ **は** $\vec{A}$ **の部分集合である）．そうすると，定理 3.29.4 の証明の記号法の下で** $\vec{C} = [\vec{D}_1]_{\vec{R}_0} = [\vec{D}_0]_{\vec{R}_2}$ **が成り立つ．また，**A **がさらに算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関して普遍汎代数系であれば，**$\vec{C} = [\vec{D}_0]_{\vec{R}_1}$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.29.4 の証明によりブール律は生成的法則 $(\vec{R}_0, \vec{D}_1)$ とも生成的法則 $(\vec{R}_2, \vec{D}_0)$ とも同値であるから，最小ブール関係は最小 $(\vec{R}_0, \vec{D}_1)$ 関係かつ最小 $(\vec{R}_2, \vec{D}_0)$ 関係である．従って定理 3.29.1 により $\vec{C} = [\vec{D}_1]_{\vec{R}_0} = [\vec{D}_0]_{\vec{R}_2}$ が成り立つ．そこで，A がさらに算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して普遍汎代数系であると仮定する．そうすると，定理 3.22.19 により最小ブール関係は最小の弱ブール関係に等しい．他方で定理 3.29.4 の証明により，弱ブール律は生成的法則 $(\vec{R}_1, \vec{D}_0)$ に等しい．従って最小ブール関係は最小 $(\vec{R}_1, \vec{D}_0)$ 関係であり，定理 3.29.1 により $\vec{C} = [\vec{D}_0]_{\vec{R}_1}$ が成り立つ．

補題 3.29.1 A **を集合とし，**$x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ **を** A **上の汎算法とし，**$\preccurlyeq$ **をこれらの算法に関する** A^* **上のブール関係とする．このとき，**$\preccurlyeq$ **は次の法則に従う（これらの法則は，強下限律・強上限律・強両補律・強三導律における矢印を逆向きにしたものである）．**

$$\left.\begin{aligned} xy\alpha \preccurlyeq \beta &\iff x \wedge y, \alpha \preccurlyeq \beta \\ \alpha \preccurlyeq x\beta,\ \alpha \preccurlyeq y\beta &\iff \alpha \preccurlyeq x \wedge y, \beta \end{aligned}\right\} \quad \text{(逆下限律)}$$

$$\left.\begin{aligned} x\alpha \preccurlyeq \beta,\ y\alpha \preccurlyeq \beta &\iff x \vee y, \alpha \preccurlyeq \beta \\ \alpha \preccurlyeq xy\beta &\iff \alpha \preccurlyeq x \vee y, \beta \end{aligned}\right\} \quad \text{(逆上限律)}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha \preccurlyeq x\beta &\iff x^{\Diamond}\alpha \preccurlyeq \beta \\ x\alpha \preccurlyeq \beta &\iff \alpha \preccurlyeq x^{\Diamond}\beta \end{aligned}\right\} \quad \text{(逆両補律)}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha \preccurlyeq x\beta,\ y\alpha \preccurlyeq \beta &\iff x \Rightarrow y, \alpha \preccurlyeq \beta \\ x\alpha \preccurlyeq y\beta &\iff \alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta \end{aligned}\right\} \quad \text{(逆三導律)}$$

証明　定理 3.21.1，定理 3.21.3，定理 3.21.4 による．

定理 3.29.6 A **を集合とし，**$x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ **を** A **上の汎算法とし，**A **がこれら算法に関して普遍汎代数系であると仮定する．このときこれらの算法に関して，**A^* **上の最小ブール関係は，**A^* **上の反復律・付加律・置換律・強両限律・強両補律・強三導律（すなわち弱ブール律から巾等律を除いた法則）に従う関係の中で最小のものである．**

証明　A^* 上の最小ブール関係を $\preccurlyeq$ で表す．$\preccurlyeq$ はブール関係であるから，特に上記七個の法則に従う．従って，それら法則に従う任意の関係 $\leqq$ をとって，$\preccurlyeq$ が $\leqq$ に含まれることを示せばいい．それに背理法を使うために，$\alpha \preccurlyeq \beta$, $\alpha \nleqq \beta$ なる A 上の式 $\alpha \to \beta$ があると仮定する．こういう式を**反例式**と呼ぶ．

$\alpha = x_1 \cdots x_m$, $\beta = y_1 \cdots y_n$ とする．A が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して普遍汎代数系であるから A には $\mathbb{T}$ 表現 f が存在し，f の定めるブール関係 $\preccurlyeq_f$ について問題 3.21.21 と問題 3.19.1 により $\varepsilon \preccurlyeq_f \varepsilon$ が成り立たないから，$\varepsilon \preccurlyeq \varepsilon$ も成り立たず，従って $\alpha \neq \varepsilon$ または $\beta \neq \varepsilon$ が成り立つ．そこで反例式 $\alpha \to \beta$ を，普遍汎代数系 A における $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ の階数の総和 k（これを $\alpha \to \beta$ の**階数**と呼ぶ）が最小になるようにとる．

$x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ がすべて素元であれば，次のようにして矛盾が導かれる．すなわちまず，$\alpha \nleqq \beta$ であって $\leqq$ が反復律・付加律・置換律に従うから，$\alpha \cap \beta = \emptyset$ が成り立つ．これと A が普

遍汎代数系であることにより，A の $\mathbb{T}$ 表現 f であって $f\alpha \subseteq \{1\}$ かつ $f\beta \subseteq \{0\}$ なるものが存在する．しかしこれは，$\alpha \preccurlyeq \beta$ であって特に $\alpha \preccurlyeq_f \beta$ であることに反する．

従って，$x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ のどれかが素元でないと仮定していい．さらに，$\preccurlyeq$ と $\leqq$ が置換律に従うから，x_1 または y_1 が素元でないと仮定していい．そう仮定すると，x_1 または y_1 が $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ の何れかの形をしている．以下，これらそれぞれの場合に矛盾を導いて背理法による証明を完結する．なお，$\alpha' = x_2 \cdots x_n$，$\beta' = y_2 \cdots y_n$ と定める．

1. $x_1 = x \wedge y$ **の場合：**$x \wedge y, \alpha' \preccurlyeq \beta$ であるから，補題 3.29.1 により $xy\alpha' \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．また，$x \wedge y, \alpha' \nleqq \beta$ であって $\leqq$ が強下限律に従うから，$xy\alpha' \nleqq \beta$ が成り立つ．従って $xy\alpha' \to \beta$ は反例式であるが，階数が $k-1$ であるから矛盾である．

2. $y_1 = x \wedge y$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq x \wedge y, \beta'$ であるから，補題 3.29.1 により $\alpha \preccurlyeq x\beta'$ と $\alpha \preccurlyeq y\beta'$ が成り立つ．また，$\alpha \nleqq x \wedge y, \beta'$ であって $\leqq$ が強下限律に従うから，$\alpha \nleqq x\beta'$ と $\alpha \nleqq y\beta'$ のどちらかが成り立つ．従って，$\alpha \to x\beta'$ と $\alpha \to y\beta'$ のどちらかは反例式であるが，どちらも階数が k より小さいから矛盾である．

3. $x_1 = x \vee y$ **の場合：**$x \vee y, \alpha' \preccurlyeq \beta$ であるから，補題 3.29.1 により $x\alpha' \preccurlyeq \beta$ と $y\alpha' \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．また，$x \vee y, \alpha' \nleqq \beta$ であって $\leqq$ が強上限律に従うから，$x\alpha' \nleqq \beta$ と $y\alpha' \nleqq \beta$ のどちらかが成り立つ．従って，$x\alpha' \to \beta$ と $y\alpha' \to \beta$ のどちらかは反例式であるが，どちらも階数が k より小さいから矛盾である．

4. $y_1 = x \vee y$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq x \vee y, \beta'$ であるから，補題 3.29.1 により $\alpha \preccurlyeq xy\beta'$ が成り立つ．また，$\alpha \nleqq x \vee y, \beta'$ であって $\leqq$ が強上限律に従うから，$\alpha \nleqq xy\beta'$ が成り立つ．従って $\alpha \to xy\beta'$ は反例式であるが，階数が $k-1$ であるから矛盾である．

5. $x_1 = x^{\Diamond}$ **の場合：**$x^{\Diamond}\alpha' \preccurlyeq \beta$ であるから，補題 3.29.1 により $\alpha' \preccurlyeq x\beta$ が成り立つ．また，$x^{\Diamond}\alpha' \nleqq \beta$ であって $\leqq$ が強両補律に従うから，$\alpha' \nleqq x\beta$ が成り立つ．従って $\alpha' \to x\beta$ は反例式であるが，階数が $k-1$ であるから矛盾である．

6. $y_1 = x^{\Diamond}$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq x^{\Diamond}\beta'$ であるから，補題 3.29.1 により $x\alpha \preccurlyeq \beta'$ が成り立つ．また，$\alpha \nleqq x^{\Diamond}\beta'$ であって $\leqq$ が強両補律に従うから，$x\alpha \nleqq \beta'$ が成り立つ．従って $x\alpha \to \beta'$ は反例式であるが，階数が $k-1$ であるから矛盾である．

7. $x_1 = x \Rightarrow y$ **の場合：**$x \Rightarrow y, \alpha' \preccurlyeq \beta$ であるから，補題 3.29.1 により $\alpha' \preccurlyeq x\beta$ と $y\alpha' \preccurlyeq \beta$ が成り立つ．また，$x \Rightarrow y, \alpha' \nleqq \beta$ であって $\leqq$ が強三導律に従うから，$\alpha' \nleqq x\beta$ と $y\alpha' \nleqq \beta$ のどちらかが成り立つ．従って $\alpha' \to x\beta$ と $y\alpha' \to \beta$ のどちらかは反例式であるが，どちらも階数が k より小さいから矛盾である．

8. $y_1 = x \Rightarrow y$ **の場合：**$\alpha \preccurlyeq x \Rightarrow y, \beta'$ であるから，補題 3.29.1 により $x\alpha \preccurlyeq y\beta'$ が成り立つ．また，$\alpha \nleqq x \Rightarrow y, \beta'$ であって $\leqq$ が強三導律に従うから，$x\alpha \nleqq y\beta'$ が成り立つ．従って $x\alpha \to y\beta'$ は反例式であるが，階数が $k-1$ であるから矛盾である．

問題 3.29.6 A を集合とし，$x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ を A 上の汎算法とし，A がこれら算法に関して普遍汎代数系であると仮定する．また，これらの算法に関する A^* 上の最小ブール関係を $\vec{C}$ で表し，定理 3.29.4 の証明の記号法に加えて，付加・置換・下限・上限・両補・三導の六種の関係の和を $\vec{R}_3$ で表す．そうすると，$\vec{C} = [\vec{D}_0]_{\vec{R}_3}$ が成り立つ．

注意 3.29.2 定理 3.29.5 によれば問題 3.29.6 と同じ仮定の下で $\vec{C} = [\vec{D}_0]_{\vec{R}_1}$ が成り立つが，$\vec{R}_3$ と巾等関係の和が $\vec{R}_1$ であるから，問題 3.29.6 の $\vec{C} = [\vec{D}_0]_{\vec{R}_3}$ という結論の方が強い．

注意 3.29.3 A が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して普遍汎代数系であるとの仮定の下でこれまでに証明した $\vec{C} = [\vec{D}_j]_{\vec{R}_i}$ なる式が何を具体的に意味するかは，定理 3.24.6, 定理 3.24.7, 定理 3.24.8, 問題 3.24.13

から分かる．たとえば問題 3.24.13 からは次のことが分かる．ただし，最小ブール関係をみたす式を**ブール恒真式**と呼ぶ（第 3.30.1 項で定義する「恒真式」と第 3.30.4 項参照）．

問題 3.29.7 A 上の式 $\alpha \to \beta$ がブール恒真式であるためには，界 $(\vec{A}, \vec{R}_i)$ 上の計算図であって，始点が $\vec{D}_j$ に含まれ終点が $\alpha \to \beta$ であるもの（これを $\alpha \to \beta$ の $\vec{R}_i, \vec{D}_j$ による**証明図**と呼ぶ）の存在することが必要十分である $\big((i,j) = (0,1), (1,0), (2,0), (3,0)\big)$．

例 3.29.2 ブール束においては，ブール算法 $\wedge, \vee, \Diamond$ について可換式・結合式・吸収式・分配式・相補式が成り立ち，その結果，巾等律や双対律なども導かれる（例 3.13.5，問題 3.13.7，注意 3.13.1 参照）．さらに，導法 $a \Rightarrow b$ についても色々な式が成り立つ．等式だけでなく不等式にも目を向ければ，さらに色々な式が，たとえば $a \wedge (a \Rightarrow b) \leq b$ のような式が導かれる．ブール束において恒に成り立つこれら等式・不等式を**ブール恒等式・ブール恒不等式**と呼ぶ．

それでは，ブール恒等式・ブール恒不等式はどれくらいあるだろうか．第 3.13 節で「ブール恒等式」より一般に「恒等式」の概念を定義した考え方と問題 3.29.7 を合わせれば，この問に答えることができる．

第 3.13 節において可算基普遍型付代数系 $\mathfrak{A}(T)$ なるものを定義した．いまは T として，単元集合に二項汎算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項汎算法 $\Diamond$ を与えたものをとる．そうすると，$\mathfrak{A}(T)$ は二項汎算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項汎算法 $\Diamond$ から成る代数構造を持つ普遍汎代数系である．

$\mathfrak{A}(T) \times \mathfrak{A}(T)$ の元 (ξ, η) を，T 型代数系についての恒不等式と呼び $\xi \leqq \eta$ または $\eta \geqq \xi$ で表す（第 3.13 節で**恒等式**を定義する際には，(ξ, η) を $\xi \equiv \eta$ で表した）．そして，任意のブール束 B と任意のブール表現 $f \in \mathfrak{A}(T) \to B$ に対して $f\xi \leq f\eta$ が成り立つとき，$\xi \leqq \eta$ は**ブール恒不等式**であるものと定義する．

そうすると，$\xi \equiv \eta$ がブール恒等式であることは，$\xi \leqq \eta$ と $\xi \geqq \eta$ が共にブール恒不等式であることと同等である．また，$\xi \leqq \eta$ がブール恒不等式であることは，$\xi \to \eta$ がブール恒真式であることと同等であり，従って問題 3.29.7 により，$\xi \to \eta$ の $\vec{R}_i, \vec{D}_j$ による証明図が存在することと同等である $\big((i,j) = (0,1), (1,0), (2,0), (3,0)\big)$．たとえば図 3.10 は，ブール恒不等式 $(x \wedge y)^\Diamond \leqq x^\Diamond \vee y^\Diamond$ の $\vec{R}_3, \vec{D}_0$ による証明図である．

図 3.10: $(x \wedge y)^\Diamond \leqq x^\Diamond \vee y^\Diamond$ の証明図

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \to x}{yx \to x}}{xy \to x} \qquad \dfrac{y \to y}{xy \to y}}{xy \to x \wedge y} \\ \hline
(x \wedge y)^\Diamond xy \to \varepsilon \\ \hline
(x \wedge y)^\Diamond yx \to \varepsilon \\ \hline
y(x \wedge y)^\Diamond x \to \varepsilon \\ \hline
yx(x \wedge y)^\Diamond \to \varepsilon \\ \hline
x(x \wedge y)^\Diamond \to y^\Diamond \\ \hline
(x \wedge y)^\Diamond \to x^\Diamond y^\Diamond \\ \hline
(x \wedge y)^\Diamond \to x^\Diamond \vee y^\Diamond
\end{array}$$

なお，ここに示したものは，与えられた恒不等式がブール恒不等式であるかどうかを判定する一般的な手順の説明ではない．そういう手順は，定理 3.22.18 から別に得られるが割愛する．

問題 3.29.8 ブール恒不等式 $(x\wedge y)^\Diamond \geqq x^\Diamond \vee y^\Diamond$ の $\vec{R}_3, \vec{D}_0$ による証明図を描け．また，ブール恒不等式 $(x\wedge y)^\Diamond \leqq x^\Diamond \vee y^\Diamond$ の $\vec{R}_0, \vec{D}_1$ による証明図を描け．

3.30　束値論対への拡張

＄ ここでは，論対の概念と関連概念を拡張すると共にその理論を深化して完全性等の核心に迫る．なお，第 3.19 節以降使ってきた AZ 記法や列便法を引き続いて使う．

3.30.1　束値論対

§ 論対は空でない集合 A と $\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}$ の組みであるが，$\mathcal{P}A$ は $A\to\mathbb{T}$ と同一視される．このことを利用して，論対の概念と関連概念を次のように拡張する．すなわち，$\mathbb{B}$ が最小元 0 と最大元 1 を持ち $\#\mathbb{B} \geq 2$ をみたす束であるとき，空でない集合 A と $A\to\mathbb{B}$ の部分集合 $\mathcal{F}$ の組み $(A,\mathcal{F})$ を $\mathbb{B}$ **値論対**とか $\mathbb{B}$ の元を**真理値**とする論対とかと呼び，$\mathcal{F}$ の元と A をそれぞれこの $\mathbb{B}$ 値論対の**真理値関数**と**言語**と呼ぶ．そして，$\mathbb{B}$ を色々に変えて得られる $\mathbb{B}$ 値論対を**束値論対**と総称する．

$(A,\mathcal{F})$ が $\mathbb{B}$ 値論対であれば，各真理値関数 $f \in \mathcal{F}$ に対して $(A,\mathbb{B},f)$ は束写系である．逆に $(A,\mathbb{B},f_i)$ $(i\in I)$ が束写系の族で $A\neq\emptyset$ と $\#\mathbb{B}\geq 2$ をみたせば，$\mathcal{F}=\{f_i \mid i\in I\}$ と定めるとき，$(A,\mathcal{F})$ は $\mathbb{B}$ 値論対である．後掲の問題 3.30.8 と問題 3.30.12 によればさらに，任意の束値論対は，族ではなく単独の束写系 $(A,\mathbb{B},f)$ からこうして出来る束値論対 $(A,\{f\})$ と「同値」である．

以下この節では，そうでない旨断らない限り，$(A,\mathcal{F})$ を $\mathbb{B}$ 値論対とする．そして，これについて定義をさらに設ける．まず，言語 A の元 x の真理値関数 f による像 $fx\in\mathbb{B}$ を，x の f **の下での真理値**または f **真理値**と呼ぶ．そして，各真理値関数 $f\in\mathcal{F}$ と各真理値 $a\in\mathbb{B}$ に対して，f 真理値が a 以上の A の元の全体を $A_{f,a}$ で表す．

$$A_{f,a}=\{x\in A \mid fx\geq a\}$$

ただし $A_{f,1}$ は A_f でも表す．すなわち

$$A_f=\{x\in A \mid fx=1\}=f^{-1}1$$

A_f の元を f **の下で真である元**または f **真元**と呼ぶ（問題 3.30.1 参照）．また，$\mathcal{P}A$ の部分集合 $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B}=\begin{cases}\{A_{f,a} \mid f\in\mathcal{F},\ a\in\mathbb{B}\} & \cdots \quad \mathcal{F}\neq\emptyset \text{ のとき}\\ \{A\} & \cdots \quad \mathcal{F}=\emptyset \text{ のとき}\end{cases}$$

と定める．そうすると，組み $(A,\mathcal{B})$ は従来の意味の論対であり（そこでこれを $(A,\mathcal{F})$ の**論対化**と呼ぶ），従ってその与論・核・恒真元・論理（弱論理を含む）・理論・最大論理と，第一種・第二種・第三種の別と，矛盾集合・矛盾元・完全集合・補法・否法と，四種の完全性（修飾なしの完全性・弱完全性・強完全性・超完全性）・健全性・充分性の概念が定まる．これらそれぞれを以て，$(A,\mathcal{F})$ の**与論・核・恒真元・論理・理論・最大論理**と，**第一種・第二種・第三種**の別と，**矛盾集合・矛盾元・完全集合・補法・否法**と，**四種の完全性・健全性・充分性**の定義とする．従来の論対から派生した上記以外の概念に当たるものは，後に束値論対に即して別途に定義する．なお**以後，A の各元に $\mathbb{B}$ の最小元 0 を対応させる写像と A の各元に $\mathbb{B}$ の最大元 1 を対応させる写像をやはり 0 と 1 で表す．**それらは問題 3.9.12 によれば巾束 $\mathbb{B}^A$ の最小元と最大元に他ならない．

注意 3.30.1 $a, b \in \mathbb{B}$ が $a \leq b$ をみたせば，各 $f \in \mathcal{F}$ に対して $A_{f,a} \supseteq A_{f,b}$ が成り立つ．また，各 $f \in \mathcal{F}$ に対して $A_{f,0} = A$ が成り立つ．従って，$(A, \mathcal{F})$ の論対化 $(A, \mathcal{B})$ は $A \in \mathcal{B}$ をみたし，$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ なら $\mathcal{B} - \{A\} = \{f^{-1}1 \mid 1 \neq f \in \mathcal{F}\}$ が成り立つ．　**終**

$\mathbb{B}$ 値論対 $(A, \mathcal{F})$ について定義をさらに設ける．まず各真理値関数 $f \in \mathcal{F}$ に対し，$(A, \mathbb{B}, f)$ を偏束写系とみなしての偏 f 真関係を $\vDash_f$ で表す．すなわち，$(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対して

$$\alpha \vDash_f y \iff \inf f\alpha \leq fy \tag{3.30.1}$$

次に，f を $\mathcal{F}$ 全体に亘らせての $\vDash_f$ の交わりを，$\vDash$ で表して $(A, \mathcal{F})$ の**偏恒真関係**と呼ぶ．すなわち

$$\alpha \vDash y \iff \text{任意の } f \in \mathcal{F} \text{ に対して } \alpha \vDash_f y \tag{3.30.2}$$

以下この節では，そうでない旨断らない限り，$(A, \mathcal{F})$ の核を C で表す．

問題 3.30.1 $(A, \mathcal{F})$ について次のことが成り立つ．

1. 各 $f \in \mathcal{F}$ に対して $A_f = \{x \in A \mid \varepsilon \vDash_f x\}$ が成り立つ．
2. $C = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} A_f = \{x \in A \mid \varepsilon \vDash x\}$ が成り立つ．

定理 3.30.1 **$(A, \mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ は $(A, \mathcal{F})$ の最大論理に等しい．また，$x_1, \ldots, x_n, y \in A$ が $x_1 \cdots x_n \vDash y$ をみたすためには，次の条件をみたすことが必要十分である．**

$$fx_1 \geq a,\ \ldots,\ fx_n \geq a \implies fy \geq a \qquad (f \in \mathcal{F},\ a \in \mathbb{B}) \tag{3.30.3}$$

証明　最大論理を Q で表す．定理 3.26.7 と注意 3.26.3 と問題 3.30.1 により，$x_1 \cdots x_n\, Q\, y$ なることは次の条件のみたされることと同等である．

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A_{f,a} \implies y \in A_{f,a} \qquad (f \in \mathcal{F},\ a \in \mathbb{B})$$

この条件は (3.30.3) と同等であり，(3.30.3) はさらに，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $\inf\{fx_1, \ldots, fx_n\} \leq fy$，すなわち $x_1 \cdots x_n \vDash_f y$ なることと同等である．従って，$x_1 \cdots x_n\, Q\, y$ なることは $x_1 \cdots x_n \vDash y$ なることとも (3.30.3) とも同等である．

問題 3.30.2 $(A, \mathcal{F})$ の最大弱論理を P で表せば，$x_1, \ldots, x_n, y \in A$ が $x_1 \cdots x_n\, P\, y$ をみたすためには，条件「$fx_i = 1\ (f \in \mathcal{F},\ i \in \{1, \ldots, n\}) \implies fy = 1\ (f \in \mathcal{F})$」をみたすことが必要十分である．

略解　定理 3.26.7 系と問題 3.30.1 による．

定理 3.30.2 **$(A, \mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ について次のことが成り立つ．**

1. **A^*, A 間の関係 R が $(A, \mathcal{F})$ の論理であるためには，「$(\alpha, y) \in A^* \times A,\ \alpha R y \implies \alpha \vDash y$」をみたすことが，すなわち $\vDash$ に含まれることが必要十分である．**
2. **A の部分集合 B が $(A, \mathcal{F})$ の理論であるためには，「$(\alpha, y) \in A^* \times A,\ \alpha \subseteq B,\ \alpha \vDash y \implies y \in B$」をみたすことが，すなわち $\vDash$ で閉じていることが必要十分である．**
3. **A の元 x が $(A, \mathcal{F})$ の恒真元であるためには，$\varepsilon \vDash x$ をみたすことが必要十分である．**

証明　定理 3.30.1 により $\vDash$ が最大論理に等しいので，結論 1, 2, 3 はそれぞれ，定理 3.26.5，定理 3.26.6，定理 3.26.9 の一部または全部の言い換えに過ぎない．結論 3 は問題 3.30.1 からも分かる．

系　A **上の算法** ρ **が** $(A, \mathcal{F})$ **の算法論理であるためには，任意の** $(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Dom} \rho$ **に対して** $x_1 \cdots x_n \vDash \rho(x_1, \ldots, x_n)$ **をみたすことが必要十分である．**

証明　算法 ρ が $(A, \mathcal{F})$ の論理であるとは ρ の関係化が $(A, \mathcal{F})$ の論理であることを意味し，例 3.24.1 で定めた通り，ρ の関係化とは「$x_1 \cdots x_n \, R \, y \iff \rho(x_1, \ldots, x_n) = y$」なる A^*, A 間の関係 R のことだからである．

定理 3.30.3　$(A, \mathcal{F})$ **の偏恒真関係** $\vDash$ **は偏束律に従う．**

証明　定理 3.30.1 と定理 3.26.8 による．あるいは，問題 3.20.1 と問題 3.20.3 による．

なお，第 3.25 節冒頭で触れた通り，A 上の論拠すなわち生成対 (R, D) の定める偏生成関係 R^D は，論理学的文脈では $\vDash_{R,D}$ で表すこともある．すなわち，任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対して

$$\alpha \vDash_{R,D} y \iff \alpha \, R^D \, y \iff y \in [\alpha \cup D]_R \tag{3.30.4}$$

問題 3.30.3　$\alpha \vDash_{R,D} y$ なることは，界 (A, R) 上の計算図 c で $\operatorname{sp} c \subseteq \alpha \cup D$，$\operatorname{tp} c = y$ なるものの存在することとも，A の元の列 $y_1, \ldots, y_m$ で $y_m = y$ をみたして各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ について次の二条件のいずれかをみたすものの存在することとも同等である．

1. $y_i \in \alpha \cup D$
2. $y_{j_1} \cdots y_{j_k} \, R \, y_i$ なる $i - 1$ 以下の番号 $j_1, \ldots, j_k$ $(k \geq 0)$ がある

略解　前半は問題 3.24.13 により，後半は定理 3.24.8 による．

定理 3.30.4　A **上の論拠** (R, D) **と** $(A, \mathcal{F})$ **の偏恒真関係** $\vDash$ **について次のことが成り立つ．**

1. (R, D) **が** $\mathcal{F}$ **健全であるためには，偏生成関係** $\vDash_{R,D}$ **が** $\vDash$ **に含まれることが，すなわち任意の** $(\alpha, y) \in A^* \times A$ **に対して「**$\alpha \vDash_{R,D} y \implies \alpha \vDash y$**」の成り立つことが必要十分である．**
2. (R, D) **が** $\mathcal{F}$ **充分であるためには，**$\vDash_{R,D}$ **が** $\vDash$ **を含むことが，すなわち任意の** $(\alpha, y) \in A^* \times A$ **に対して「**$\alpha \vDash y \implies \alpha \vDash_{R,D} y$**」の成り立つことが必要十分である．**
3. (R, D) **が** $\mathcal{F}$ **完全であるためには，**$\vDash_{R,D}$ **が** $\vDash$ **に等しいことが，すなわち任意の** $(\alpha, y) \in A^* \times A$ **に対して「**$\alpha \vDash_{R,D} y \iff \alpha \vDash y$**」の成り立つことが必要十分である．**

証明　$\vDash_{R,D}$ が R^D に等しく，定理 3.30.1 により $\vDash$ が $(A, \mathcal{F})$ の最大論理に等しいから，定義 3.28.1 によりこの定理が成り立つ．

問題 3.30.4　A 上の論拠 (R, D) が $\mathcal{F}$ 健全であるためには A の任意の部分集合 X に対して

$$\{y \in A \mid \alpha \vDash y,\ \alpha \subseteq X \text{ なる } \alpha \in A^* \text{ がある }\} \supseteq [X \cup D]_R$$

をみたすことが必要十分であり，(R, D) が $\mathcal{F}$ 充分であるためには，A の任意の部分集合 X に対して次の条件をみたすことが必要十分である．ただし $[\cdots]_R$ は，界 (A, R) における界包を表す．

$$\{y \in A \mid \alpha \vDash y,\ \alpha \subseteq X \text{ なる } \alpha \in A^* \text{ がある }\} \subseteq [X \cup D]_R$$

問題 3.30.5 A 上の算法論拠 $((\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, D)$ が $\mathcal{F}$ 健全であるためには，任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対して次の条件をみたすことが必要十分である．

$$y \in [\alpha \cup D]_\Lambda \implies \alpha \vDash y$$

また，$(\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, D$ が $\mathcal{F}$ 充分であるためには，任意の $(\alpha, y) \in A^* \times A$ に対して次の条件をみたすことが必要十分である．ただし $[\cdots]_\Lambda$ は，代数系 $(A, (\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ における算包を表す．

$$\alpha \vDash y \implies y \in [\alpha \cup D]_\Lambda$$

略解　$(A, (\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ の界化を (A, R) で表すと，問題 3.24.4 により，A の部分集合 X の $(A, (\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ における算包 $[X]_\Lambda$ は，X の (A, R) における界包 $[X]_R$ に等しい．

問題 3.30.6 問題 3.30.5 中の条件 $y \in [\alpha \cup D]_\Lambda$ は，代数系 $(A, (\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ 上の計算図 c で $\operatorname{sp} c \subseteq \alpha \cup D$，$\operatorname{tp} c = y$ なるものの存在することとも，A の元の列 $y_1, \ldots, y_m$ で $y_m = y$ をみたして各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ について次の二条件のいずれかをみたすものの存在することとも同等である．

1. $y_i \in \alpha \cup D$　　2. $y_i = \rho_\lambda(y_{j_1}, \ldots, y_{j_k})$ なる $\lambda \in \Lambda$ と $i-1$ 以下の番号 $j_1, \ldots, j_k$ がある

略解　前半は問題 3.6.3 または問題 3.8.17 により，後半は問題 3.2.9 による．

定理 3.30.5 (R, D) **が** A **上の** $\mathcal{F}$ **弱完全な論拠であって，写像** $\phi \in A^* \times A \to A$ **で**

$$\alpha \vDash y \iff \varepsilon \vDash \phi(\alpha, y) \qquad\qquad \alpha \vDash_{R,D} y \iff \varepsilon \vDash_{R,D} \phi(\alpha, y)$$

なる二条件をみたすものがあれば，(R, D) **は** $\mathcal{F}$ **完全である．**

証明　$\vDash_{R,D}$ が R^D に等しく定理 3.30.1 により $\vDash$ が $(A, \mathcal{F})$ の最大論理に等しいから，定理 3.28.3 によりこの定理が成り立つ．

問題 3.30.7 (R, D) が A 上の論拠で $C \subseteq [D]_R$ をみたすものであって，写像 $\phi \in A^* \times A \to A$ で

$$\alpha \vDash y \implies \varepsilon \vDash \phi(\alpha, y) \qquad\qquad \alpha \vDash_{R,D} y \impliedby \varepsilon \vDash_{R,D} \phi(\alpha, y)$$

なる二条件をみたすものがあれば（矢印の向きに注意），(R, D) は $\mathcal{F}$ 充分である．　**終**

$\mathbb{B}$ 値論対 $(A, \mathcal{F})$ について定義をさらに設ける．すなわち，$(A, \mathcal{F})$ が束値論対 $(A, \mathcal{F}')$ に**覆われる**とは，$(A, \mathcal{F})$ の論対化が $(A, \mathcal{F}')$ の論対化に覆われることと定める．また，$(A, \mathcal{F})$ が $(A, \mathcal{F}')$ と**同値**であるとは，それぞれの論対化が同値であることと定める．また，$(A, \mathcal{F})$ が $(A, \mathcal{F}')$ と**弱同値**であるとは，それぞれの論対化が弱同値であることと定める．なお,「覆われる」という関係は擬順序関係であり，その対称核が「同値」という関係である（問題 3.9.55 参照）．

問題 3.30.8 $(A, \mathcal{F})$ は $\mathbb{B}$ 値論対 $(A, \mathcal{F} - \{1\})$ とも $(A, \mathcal{F} \cup \{1\})$ とも同値である．

略解　問題 3.26.25 による．

問題 3.30.9 $(A, \mathcal{B})$ を論対とし，$\mathcal{F} = \{1_B \mid B \in \mathcal{B}\}$ と定める．ただし，$1_B \in A \to \mathbb{T}$ は B の定義関数である．そうすると，$(A, \mathcal{F})$ は $\mathbb{T}$ 値論対であって（そこでこれを $(A, \mathcal{B})$ の $\mathbb{T}$ **値論対化**と呼ぶ），その論対化は $(A, \mathcal{B} \cup \{A\})$ に等しい．

問題 3.30.10 $(A,\mathcal{F})$ は，その論対化の $\mathbb{T}$ 値論対化と同値である．従って，束値論対はすべて $\mathbb{T}$ 値論対と同値である（より深い事柄について定理 3.30.19 と定理 3.30.29 参照）．

問題 3.30.11 $(A,\mathcal{F})$ が束値論対 $(A,\mathcal{F}')$ に覆われるためには，$(A,\mathcal{F})$ の偏恒真関係が $(A,\mathcal{F}')$ の偏恒真関係に含まれることが必要十分である．従って $(A,\mathcal{F})$ が $(A,\mathcal{F}')$ と同値であるためには，$(A,\mathcal{F})$ と $(A,\mathcal{F}')$ の偏恒真関係が等しいことが必要十分である（定理 3.30.31 参照）．

略解　定理 3.30.1 による．

問題 3.30.12 $\mathcal{F} \neq \emptyset$ のとき，A から巾束 $\mathbb{B}^{\mathcal{F}}$ への写像 φ を $(\varphi x)f = fx$ $(x \in A,\ f \in \mathcal{F})$ と定めれば，束写系 $(A, \mathbb{B}^{\mathcal{F}}, \varphi)$ は $A \neq \emptyset$ と $\#\mathbb{B}^{\mathcal{F}} \geq 2$ をみたし，$(A,\mathcal{F})$ は $\mathbb{B}^{\mathcal{F}}$ 値論対 $(A,\{\varphi\})$ と同値である．

略解　問題 3.20.18 により $(A,\mathcal{F})$ と $(A,\{\varphi\})$ の偏恒真関係が等しいからである．あるいは次の問題 3.30.13 による．

問題 3.30.13 $\mathbb{B}$ が束 $\mathbb{B}'$ の巾束 $\mathbb{B}'^{V}$ に等しいとし，$\mathcal{F} \times V$ の各元 (f,ν) の定める A から $\mathbb{B}'$ への写像 $x \mapsto (fx)\nu$ の全体を $\mathcal{F}'$ で表す．このとき，$\mathbb{B}'$ も最小元と最大元を持って $\#\mathbb{B}' \geq 2$ をみたし，$(A,\mathcal{F})$ は $\mathbb{B}'$ 値論対 $(A,\mathcal{F}')$ と同値である．

略解　$\mathbb{B}'$ が最小元と最大元を持って $\#\mathbb{B}' \geq 2$ をみたすことは問題 3.9.12 による．各 $f \in \mathcal{F}$ に対して A から $\mathbb{B}'$ への写像の族 $(f_\nu)_{\nu \in V}$ を $f_\nu x = (fx)\nu$ $(\nu \in V,\ x \in A)$ と定めれば，問題 3.20.18 により偏 f 真関係 $\vDash_f$ は偏 f_ν 真関係 $\vDash_{f_\nu}$ $(\nu \in V)$ すべての交わりに等しい．定義により $\mathcal{F}' = \{f_\nu \mid (f,\nu) \in \mathcal{F} \times V\}$ であるから，$(A,\mathcal{F})$ と $(A,\mathcal{F}')$ の偏恒真関係は等しい．

問題 3.30.14 $\mathbb{B}$ から最小元と最大元を持ち $\#\mathbb{B}' \geq 2$ をみたす束 $\mathbb{B}'$ への束としての単射準写 ρ があるとし，$\mathcal{F}$ の各元 f の定める A から $\mathbb{B}'$ への写像 $x \mapsto \rho(fx)$ の全体を $\mathcal{F}'$ で表す．そうすると，$(A,\mathcal{F})$ は $\mathbb{B}'$ 値論対 $(A,\mathcal{F}')$ と同値である．

略解　問題 3.13.14 により ρ が真増写であるから

$$fx_1 \wedge \ldots \wedge fx_n \leq fy \iff \rho(fx_1 \wedge \ldots \wedge fx_n) \leq \rho(fy) \iff \rho(fx_1) \wedge \ldots \wedge \rho(fx_n) \leq \rho(fy)$$

従って $(A,\mathcal{F})$ と $(A,\mathcal{F}')$ の偏恒真関係は等しい．

問題 3.30.15 $\mathbb{B}$ から $\mathbb{T}$ の巾束 $\mathbb{T}^V$ への束としての単射準写 ρ があるとし（問題 3.22.33 参照），$\mathcal{F} \times V$ の各元 (f,ν) の定める A から $\mathbb{T}$ への写像 $x \mapsto \big(\rho(fx)\big)\nu$ の全体を $\mathcal{F}'$ で表す．そうすると，$(A,\mathcal{F})$ は $\mathbb{T}$ 値論対 $(A,\mathcal{F}')$ と同値である．

略解　$\mathcal{F}$ の各元 f の定める A から $\mathbb{T}^V$ への写像 $x \mapsto \rho(fx)$ の全体を $\mathcal{F}''$ で表す．問題 3.30.14 により $(A,\mathcal{F})$ は $\mathbb{T}^V$ 値論対 $(A,\mathcal{F}'')$ と同値である．また，$\mathcal{F}'' \times V$ の各元 (g,ν) の定める A から $\mathbb{T}$ への写像 $x \mapsto (gx)\nu$ の全体が $\mathcal{F}'$ に等しく，問題 3.30.13 により $(A,\mathcal{F}'')$ は $(A,\mathcal{F}')$ と同値である．　終

$\mathbb{B}$ 値論対 $(A,\mathcal{F})$ について定義をさらに設ける．すなわち，$\mathbb{B}$ 値論対 $(A',\mathcal{F}')$ が

$$A \subseteq A' \qquad\qquad \mathcal{F} = \left\{ f'|_A \;\middle|\; f' \in \mathcal{F}' \right\}$$

をみたすとき，$(A',\mathcal{F}')$ は $(A,\mathcal{F})$ の**拡大**であるとか $(A,\mathcal{F})$ は $(A',\mathcal{F}')$ の**縮小**であるとかと言う．

問題 3.30.16 $(A, \mathcal{F})$ と $(A', \mathcal{F}')$ を $\mathbb{B}$ 値論対とし，その論対化をそれぞれ $(A, \mathcal{B})$ と $(A', \mathcal{B}')$ とする．このとき，$(A, \mathcal{F})$ が $(A', \mathcal{F}')$ の縮小であれば，$(A, \mathcal{B})$ は $(A', \mathcal{B}')$ の縮小である．逆に $(A, \mathcal{B})$ が $(A', \mathcal{B}')$ の縮小であれば，$(A, \mathcal{F})$ は $(A', \mathcal{F}')$ の縮小と同値である．

略解　$A \subseteq A'$ であるとする．このとき，$f \in \mathcal{F}$ と $f' \in \mathcal{F}'$ が $f = f'|_A$ をみたせば，任意の $a \in \mathbb{B}$ に対して $A_{f,a} = A'_{f',a} \cap A$ が成り立つ．このことから第一の結論が導かれる．また，$(A, \mathcal{B})$ が $(A', \mathcal{B}')$ の縮小であれば，$\mathcal{G} = \left\{ f'|_A \;\middle|\; f' \in \mathcal{F}' \right\}$ と定めるとき，上のことから $(A, \mathcal{B})$ は $(A, \mathcal{G})$ の論対化でもあり，従って $(A, \mathcal{F})$ は $(A, \mathcal{G})$ と同値である．

定理 3.30.6 A 上の単項汎算法 $x^{\Diamond}$ が $(A, \mathcal{F})$ の否法であるためには，各 $f \in \mathcal{F}$ に応じて $\mathbb{B}$ の元 a_f で $fA \subseteq \{a_f, 1\}$ をみたすものが存在して任意の $f \in \mathcal{F} - \{1\}$ と $x \in A$ に対して

$$f(x^{\Diamond}) = 1 \iff fx \neq 1$$

の成り立つことが必要十分である．従って $\mathbb{B} = \mathbb{T}$ の場合，算法 $x^{\Diamond}$ が $(A, \mathcal{F})$ の否法であるためには，この算法と $\mathbb{T}$ 上の補法に関して任意の $f \in \mathcal{F} - \{1\}$ が準写であることが必要十分である．

証明　算法 $x^{\Diamond}$ が $(A, \mathcal{F})$ の否法であると仮定し，$(A, \mathcal{B})$ を $(A, \mathcal{F})$ の論対化とする．そうすると，定義により算法 $x^{\Diamond}$ は $(A, \mathcal{B})$ の否法であるから，定理 3.27.5 により $\mathcal{B} - \{A\}$ は包含関係 $\subseteq$ に関して離散的である．従って注意 3.30.1 により，任意の $f \in \mathcal{F}$ と $a \in \mathbb{B}$ に対して $A_{f,a} = A$ または $A_{f,a} = A_f$ が成り立つ．これは $\mathcal{B} - \{A\} = \left\{ A_f \;\middle|\; f \in \mathcal{F} - \{1\} \right\}$ を示す．従って，任意の $f \in \mathcal{F} - \{1\}$ と $x \in A$ に対して「$f(x^{\Diamond}) = 1 \iff fx \neq 1$」が成り立つ．

任意の $f \in \mathcal{F}$ をとる．$fA \subseteq \{1\}$ の場合には，$a_f \in \mathbb{B}$ を任意に定めれば $fA \subseteq \{a_f, 1\}$ が成り立つ．そこで $fA \not\subseteq \{1\}$ と仮定する．そうすると，$fx \neq 1$ なる $x \in A$ があり，$a = fx$ と定めれば $x \in A_{f,a} - A_f$ であるから $A_{f,a} = A$ が成り立つ．$y \in A$ が $fy \neq 1$ をみたせば，同様に $A_{f,fy} = A$ であるから $fy = a$ が成り立つ．従って，$a_f = a$ とすれば $fA \subseteq \{a_f, 1\}$ が成り立つ．

逆を証明するために，まず $x \in A_{f,a} \neq A$ と仮定する．そうすると，$fx \geq a$ かつ $a_f \not\geq a$ であるから $fx = 1$，従って $f(x^{\Diamond}) \neq 1$，従って $f(x^{\Diamond}) = a_f \not\geq a$，従って $x^{\Diamond} \notin A_{f,a}$ が成り立つ．次に $x \notin A_{f,a}$ と仮定する．そうすると，$fx \neq 1$ であるから $f(x^{\Diamond}) = 1$，従って $x^{\Diamond} \in A_{f,a}$ が成り立つ．これで算法 $x^{\Diamond}$ が $(A, \mathcal{F})$ の否法であることが示された．

定義 3.30.1 $f \in \mathcal{F}$ が $X \in \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ **実例**であるとは $X \subseteq A_{f,a} \neq A$ なる $a \in \mathbb{B}$ があることを言い，f が X の $\mathcal{F}$ **反例**であるとは，$X \subseteq A - A_{f,a} \neq \emptyset$ なる $a \in \mathbb{B}$ があることを言う．ただし X が単元集合 $\{x\}$ の場合には，$\{x\}$ の $\mathcal{F}$ 実例・$\mathcal{F}$ 反例を x の $\mathcal{F}$ 実例・$\mathcal{F}$ 反例とも呼ぶ．また，f が $(X, Y) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ **実例**であるとは，$(X, Y) \subseteq (A_{f,a}, A - A_{f,a})$ かつ $A_{f,a} \neq A$ なる $a \in \mathbb{B}$ があることを言う．

注意 3.30.2 $(A, \mathcal{F})$ の論対化を $(A, \mathcal{B})$ とし $f \in \mathcal{F}$ とする．このとき，f が $X \in \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ 実例であるためには，ある $a \in \mathbb{B}$ に対して $A_{f,a}$ が X の $\mathcal{B}$ 実例であることが必要十分である．従って，X に $\mathcal{F}$ 実例が存在するためには，$\mathcal{B}$ 実例が存在することが必要十分である．「実例」を「反例」に換えても同様に成り立つ．また，$(X, Y) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ 実例についても同様のことが成り立つ．

$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ の場合には，f が $X \in \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ 実例であるためには $X \subseteq f^{-1}1$ かつ $f \neq 1$ であることが必要十分であり，f が $X \in \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ 反例であるためには，$X \subseteq f^{-1}0$ かつ $f \neq 1$ であることが必要十分である．また，f が $(X, Y) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ 実例であるためには，$(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ かつ $f \neq 1$ であることが必要十分である．　**終**

$\mathbb{B}$ 値論対 $(A,\mathcal{F})$ に関する定義と規約をさらに設ける．束値論対についての以上の概念は，対応物が論対にも存在した．しかし以下の概念は，論対を束値論対に一般化して始めて見出し得るものであり，それが論理学で核心の役を演ずる．

まず第 3.29.2 項のように，

$$\vec{A} = A^* \times A^*$$

と定め，$\vec{A}$ の元 (α,β) を $\alpha \to \beta$ や $\beta \leftarrow \alpha$ でも表して矢式とか式とかと呼ぶ．次に各真理値関数 $f \in \mathcal{F}$ に対し，束写系 $(A,\mathbb{B},f)$ の定める f 真関係を $\preccurlyeq_f$ で表す．すなわち，任意の $\alpha \to \beta \in \vec{A}$ に対して

$$\alpha \preccurlyeq_f \beta \iff \inf f\alpha \le \sup f\beta$$

また，$\alpha \preccurlyeq_f \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ を f **真式**と呼ぶ．次に，f を $\mathcal{F}$ 全体に亘らせての f 真関係 $\preccurlyeq_f$ の交わりを，$\preccurlyeq$ で表して $(A,\mathcal{F})$ の**恒真関係**と呼ぶ [71]．

$$\alpha \preccurlyeq \beta \iff \text{任意の } f \in \mathcal{F} \text{ に対して } \alpha \preccurlyeq_f \beta \tag{3.30.5}$$

また，$\alpha \preccurlyeq \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ を**恒真式**と呼ぶ．そうすると，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ と恒真関係 $\preccurlyeq$ の $A^* \times A$ への制限はそれぞれ，偏 f 真関係 $\vDash_f$ と偏恒真関係 $\vDash$ に等しい．次に，第 3.9 節における「関係」の定義により $\preccurlyeq_f$ と $\preccurlyeq$ は $\vec{A}$ の部分集合であるが，記号 $\preccurlyeq_f$ と $\preccurlyeq$ が集合を表すのにそぐわないので，$\preccurlyeq_f$ と $\preccurlyeq$ を記号 $\vec{A}_f$ と $\vec{C}$ でも表すことにする．

$$\vec{A}_f = \{\alpha \to \beta \in \vec{A} \mid \alpha \preccurlyeq_f \beta\} \qquad \vec{C} = \{\alpha \to \beta \in \vec{A} \mid \alpha \preccurlyeq \beta\}$$

すなわち，$\vec{A}_f$ は f 真式の全体であり，$\vec{C}$ は恒真式の全体である．最後に，f を $\mathcal{F}$ 全体に亘らせての $\vec{A}_f$ の全体を $\vec{\mathcal{F}}$ で表す．

$$\vec{\mathcal{F}} = \{\vec{A}_f \mid f \in \mathcal{F}\}$$

そうすると，$\vec{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{P}\vec{A}$ の部分集合であるから，$(\vec{A},\vec{\mathcal{F}})$ は論対である．この論対を $(A,\mathcal{F})$ に随伴する**式論対**と呼ぶ．そうすると，$\vec{C}$ は式論対 $(\vec{A},\vec{\mathcal{F}})$ の核に他ならない．実際，以上の定義により

$$\vec{C} = \textstyle\bigcap_{f\in\mathcal{F}} \vec{A}_f = \bigcap \vec{\mathcal{F}}$$

式論対 $(\vec{A},\vec{\mathcal{F}})$ の最大論理を $\vec{Q}$ で表す．

定理 3.30.7 **$(A,\mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ と各 $f \in \mathcal{F}$ に対する f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は束律に従う．また，$\mathcal{F} \neq \emptyset$ なら $\preccurlyeq$ は最大関係ではない．**

証明　定理 3.19.1 と定理 3.19.2 により各 $f \in \mathcal{F}$ に対する f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が束律に従うから，それらの交わりである $\preccurlyeq$ も，定理 3.29.4 と定理 3.29.2 により束律に従う．$\mathcal{F} \neq \emptyset$ なら，問題 3.19.1 により各 $f \in \mathcal{F}$ に対して f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が最大関係でないから，$\preccurlyeq$ も最大関係ではない．

定理 3.30.8 **$(A,\mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が準上限律と劣空律に従えば，$\preccurlyeq$ は $(A,\mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい．**

証明　定理 3.30.7 と定理 3.21.11 による．

[71] 補題 3.27.2 において論対の恒真関係の概念が既に定めてある．このことは上に「以下の概念は論対を束値論対に一般化して始めて見出し得る」と書いたことに反するように見えるが，実はそうではない．束値論対の恒真関係が自ずと見出された後に，それを参考に論対の恒真関係の概念を拵えたのである．問題 3.30.18 参照．

問題 3.30.17 A^*, A 間の関係 R が $\mathcal{F}$ 健全であるためには,「$\alpha R y \implies \alpha \to y \in \vec{C}$」をみたすことが必要十分である．また，$A$ の部分集合 D が $\mathcal{F}$ 健全であるためには，任意の $x \in D$ に対して $\varepsilon \to x \in \vec{C}$ であることが必要十分である．

略解　$(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ について「$\alpha \to \beta \in \vec{C} \iff \alpha \preccurlyeq \beta$」が成り立って $\preccurlyeq$ が $(A, \mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ の拡張だからである．

問題 3.30.18 論対 $(A, \mathcal{B})$ に対して補題 3.27.2 で定義した恒真関係 $\preccurlyeq_{\mathcal{B}}$ は，論対 $(A, \mathcal{B} - \{A\})$ の $\mathbb{T}$ 値論対化の恒真関係に等しい．

定理 3.30.9 $\mathbb{B}$ 値論対 $(A', \mathcal{F}')$ を $(A, \mathcal{F})$ の拡大とすれば次のことが成り立つ．

1. **$\vDash$ は $(A', \mathcal{F}')$ の偏恒真関係 $\vDash'$ の $A^* \times A$ への制限に等しく，$\preccurlyeq$ は $(A', \mathcal{F}')$ の恒真関係 $\preccurlyeq'$ の $A^* \times A^*$ への制限に等しい．**
2. **$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (X, Y) が $\preccurlyeq$ による A の切断であるためには，$\preccurlyeq'$ による A' の切断であることが必要十分である．**
3. **C は $(A', \mathcal{F}')$ の核 C' と A の交わりに等しい．**
4. **$(A, \mathcal{F})$ の論理の全体は，$(A', \mathcal{F}')$ の論理の $A^* \times A$ への制限の全体に等しい．**
5. **$(A, \mathcal{F})$ の理論の全体は，$(A', \mathcal{F}')$ の理論と A の交わりの全体に等しい．**
6. **A が $(A', \mathcal{F}')$ の矛盾集合であるときには，A の部分集合 X と $\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (X, Y) について次のことが成り立つ．**
   a. **X が $(A, \mathcal{F})$ の矛盾集合であるためには，$(A', \mathcal{F}')$ の矛盾集合であることが必要十分である．**
   b. **X が $(A', \mathcal{F}')$ の完全集合であれば，$(A, \mathcal{F})$ の完全集合でもある．**
   c. **$f \in \mathcal{F}$ と $f' \in \mathcal{F}'$ が $f = f'|_A$ をみたすとき，f が X の $\mathcal{F}$ 実例であるためには f' が X の $\mathcal{F}'$ 実例であることが必要十分であり，f が (X, Y) の $\mathcal{F}$ 実例であるためには，f' が (X, Y) の $\mathcal{F}'$ 実例であることが必要十分である．**

証明　結論 1 は偏恒真関係と恒真関係の定義により成り立つ．それにより結論 2 も成り立つ．$(A, \mathcal{F})$ と $(A', \mathcal{F}')$ それぞれの論対化を $(A, \mathcal{B})$ と $(A, \mathcal{B}')$ とする．そうすると問題 3.30.16 により，$(A, \mathcal{B}')$ は $(A, \mathcal{B})$ の拡大である．従って，定理 3.26.13 により結論 3, 4, 5 が成り立つ．$f \in \mathcal{F}$ と $f' \in \mathcal{F}'$ が $f = f'|_A$ をみたせば，任意の $a \in \mathbb{B}$ に対して $A_{f,a} = A'_{f',a} \cap A$ が成り立つ．従って定理 3.27.14 と注意 3.30.2 により結論 6 が成り立つ．

定理 3.30.10 $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ についての次の三条件は同等である．

1. **$(\vec{R}, \vec{D})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 健全である[72]．なおこのことは，定義 3.28.1 に注記した通り，$\vec{R}$ が式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の論理であって $\vec{D} \subseteq \vec{C}$ の成り立つことと同等である．**
2. **A^* 上の関係についての生成的法則とみなした $(\vec{Q}, \emptyset)$ は，同じくそうみなした $(\vec{R}, \vec{D})$ を含意する．**

[72] $(\vec{R}, \vec{D})$ の $\vec{\mathcal{F}}$ に関する充分性については定理 3.30.23 参照.

3. 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して f 真関係 $\preccurlyeq_f$ が生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従う

証明　$(1 \iff 2)$ 定理 3.26.8 と定理 3.25.4 により $\vec{Q}^{\emptyset} = \vec{Q}$ であるから，条件 1 は $\vec{R}^{\vec{D}} \subseteq \vec{Q}^{\emptyset}$ なることと同等である．従って問題 3.29.4 により，条件 1 は条件 2 と同等である．

$(1 \iff 3)$ $\preccurlyeq_f$ が生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従うためには，$\vec{A}_f$ が $\vec{D}$ を含み $\vec{R}$ で閉じていることが必要十分である．任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $\vec{A}_f$ が $\vec{D}$ を含むことは，$\vec{D}$ が $\vec{C}$ に含まれることと同等である．任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $\vec{A}_f$ が $\vec{R}$ で閉じていることは，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$\alpha_i \to \beta_i \in \vec{A}_f \ (i = 1, \ldots, n),\ (\alpha_1 \to \beta_1) \cdots (\alpha_n \to \beta_n)\, \vec{R}\, (\alpha \to \beta) \implies \alpha \to \beta \in \vec{A}_f$$

が成り立つことと同等である．このことは，$(\alpha_1 \to \beta_1) \cdots (\alpha_n \to \beta_n)\, \vec{R}\, (\alpha \to \beta)$ であれば任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$\{\alpha_i \to \beta_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subseteq \vec{A}_f \implies \alpha \to \beta \in \vec{A}_f$$

が成り立つことと同等である．このことは，さらに定理 3.26.7 と注意 3.26.3 によれば，

$$(\alpha_1 \to \beta_1) \cdots (\alpha_n \to \beta_n)\, \vec{R}\, (\alpha \to \beta) \implies (\alpha_1 \to \beta_1) \cdots (\alpha_n \to \beta_n)\, \vec{Q}\, (\alpha \to \beta)$$

が成り立つことと，すなわち $\vec{R} \subseteq \vec{Q}$ なることと同等である．以上により，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $\preccurlyeq_f$ が法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従うことは，$\vec{R} \subseteq \vec{Q}$ かつ $\vec{D} \subseteq \vec{C}$ なることと同等であり，このことは問題 3.28.2 によれば，$(\vec{R}, \vec{D})$ が $\mathcal{F}$ 健全であることと同等である．

3.30.2　完全性と生成関係・恒真関係

§ **前項に引き続き $(A, \mathcal{F})$ を $\mathbb{B}$ 値論対とする．** 定理 3.30.4 では，A 上の論拠 (R, D) の $\mathcal{F}$ 完全性等を，(R, D) の定める偏生成関係 $\vDash_{R,D}$ と $(A, \mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ の間の包含関係によって説明した．この項では，$\vDash_{R,D}$ と $\vDash$ を生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ と $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ で置き換えて同様の説明をする．そのために，前項で $\preccurlyeq$ を $\vec{C}$ でも表したのと同じ理由で，$\preccurlyeq_{R,D}$ を $\vec{A}_{R,D}$ でも表す．

$$\vec{A}_{R,D} = \{\alpha \to \beta \in \vec{A} \mid \alpha \preccurlyeq_{R,D} \beta\}$$

定理 3.30.11 **A 上の論拠 (R, D) は，生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ が $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ に含まれれば $\mathcal{F}$ 健全であり，$\preccurlyeq_{R,D}$ が $\preccurlyeq$ を含めば $\mathcal{F}$ 充分である．従って，$\preccurlyeq_{R,D}$ が $\preccurlyeq$ に等しければ，(R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．**

証明　定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{R,D}$ の $A^* \times A$ への制限は偏生成関係 $\vDash_{R,D}$ に等しく，定義により $\preccurlyeq$ の $A^* \times A$ への制限は偏恒真関係 $\vDash$ に等しい．従って定理 3.30.4 によりこの定理が成り立つ．

問題 3.30.19 $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい場合，A 上の論拠 (R, D) が $\mathcal{F}$ 完全であれば，生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ は $\preccurlyeq$ に等しい．

注意 3.30.3 (R, D) が $\mathcal{F}$ 健全であれば $\preccurlyeq_{R,D}$ が $\preccurlyeq$ に含まれるかどうか，(R, D) が $\mathcal{F}$ 充分であれば $\preccurlyeq_{R,D}$ が $\preccurlyeq$ を含むかどうか，一般には不明である（定理 3.30.20 参照）．

略解　定理 3.30.4 により偏生成関係 $\vDash_{R,D}$ が $\vDash$ に等しく，定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{R,D}$ が $\vDash_{R,D}$ の最大束拡張だからである．

定義 3.30.2 $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ で $\vec{C} = [\vec{D}]_{\vec{R}}$ をみたすものを，A^* 上の関係についての生成的法則とみなして $(A, \mathcal{F})$ の**特性法則**または**固有法則**と呼ぶ．これは定義 3.28.1 によれば，すなわち $\vec{A}$ 上の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全な論拠であり，また定理 3.29.1 によれば，すなわち $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ を A^* 上の最小 $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係と成す生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ である．

定理 3.30.12 $(A, \mathcal{F})$ **には特性法則が存在する．**

証明　問題 3.28.3 と定理 3.28.2 により，$\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全な $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ は何かしら存在し，それは $(A, \mathcal{F})$ の特性法則である．

注意 3.30.4 定義 3.30.2 と定義 3.29.2 によれば，$(A, \mathcal{F})$ の特性法則は生成的法則としてすべて弱同値である．しかし，生成的法則として同値ではない特性法則を持つ $(A, \mathcal{F})$ の例がある．ただし，定理 3.28.2 と問題 3.29.4 によれば，$\vec{A}$ 上の $\vec{\mathcal{F}}$ 完全な論拠は，$(A, \mathcal{F})$ の特性法則であって，生成的法則としてすべて同値である（定理 3.30.24 参照）．

問題 3.30.20 $(A, \mathcal{F})$ が束値論対 $(A, \mathcal{F}')$ と特性法則を共有すれば，$(A, \mathcal{F})$ と $(A, \mathcal{F}')$ は同値である．$(A, \mathcal{F})$ と $(A, \mathcal{F}')$ の恒真関係がそれぞれの偏恒真関係の最大束拡張であれば，逆も成り立つ．

略解　前半は，特性法則を共有すれば恒真関係を共有し，従って偏恒真関係を，すなわち最大論理を共有するからである．

問題 3.30.21 (✓) 有限生成でない代数系 A とその台部分系の全体 $\mathcal{B}$ に対し，論対 $(A, \mathcal{B} - \{A\})$ の $\mathbb{T}$ 値論対化を $(A, \mathcal{F})$ とし，A^* 上の関係についての生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ として束律をとり，A の代数構造の関係化 R を $\vec{A}$ の部分集合とみなせば，生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D} \cup R)$ は $(A, \mathcal{F})$ の特性法則である．

第一分離公理をみたす非離散位相空間 A とその開集合系 $\mathcal{B}$ または閉集合系 $\mathcal{B}$ に対し，論対 $(A, \mathcal{B} - \{A\})$ の $\mathbb{T}$ 値論対化を $(A, \mathcal{F})$ とすれば，束律 $(\vec{R}, \vec{D})$ は $(A, \mathcal{F})$ 特性法則である．

略解　問題 3.30.18 と問題 3.27.18 による．

定理 3.30.13 (完全性の基本定理) A **上の** $\mathcal{F}$ **健全な論拠** (R, D) **は，生成関係** $\preccurlyeq_{R,D}$ **が** $(A, \mathcal{F})$ **のある特性法則に従えば，**$\mathcal{F}$ **完全である．より一般に，**A **上の** $\mathcal{F}$ **健全な論拠** (R, D) **と** $\vec{A}$ **上の論拠** $(\vec{R}, \vec{D})$ **が次の二条件をみたせば，**(R, D) **は** $\mathcal{F}$ **完全である．**

1. $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}}$
2. $\preccurlyeq_{R,D}$ **は** A^* **上の関係についての生成的法則とみなした** $(\vec{R}, \vec{D})$ **に従う．**

証明　条件 2 は $\vec{D} \subseteq \vec{A}_{R,D}$ であって $\vec{A}_{R,D}$ が $\vec{R}$ で閉じていることを意味する．これと条件 1 から $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}} \subseteq \vec{A}_{R,D}$，従って $\vec{C} \subseteq \vec{A}_{R,D}$ が成り立つ．これは，$(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が $\preccurlyeq_{R,D}$ に含まれることを意味する．従って定理 3.30.11 により，(R, D) は $\mathcal{F}$ 充分である．(R, D) が $\mathcal{F}$ 健全との仮定と合わせて，(R, D) は $\mathcal{F}$ 完全となる．

問題 3.30.22 $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい場合，A 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠 (R, D) と $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ についての次の四条件は同等である．

1. (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全であって $(\vec{R}, \vec{D})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全である．

2. $(\vec{R}, \vec{D})$ は $(A, \mathcal{F})$ の特性法則であって生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ は A^* 上の最小 $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係に等しい.

3. $(\vec{R}, \vec{D})$ は $(A, \mathcal{F})$ の特性法則であって $\preccurlyeq_{R,D}$ は $(\vec{R}, \vec{D})$ に従う.

4. (R, D) と $(\vec{R}, \vec{D})$ は定理 3.30.13 の条件 1, 2 をみたす.

略解　$(1 \Longrightarrow 2)$ 問題 3.30.19 により $\vec{A}_{R,D} = \vec{C}$，従って $\vec{A}_{R,D} = [\vec{D}]_{\vec{R}}$ が成り立つ.
　$(4 \Longrightarrow 1)$ 定理 3.30.13 により (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．従って問題 3.30.19 により $\vec{A}_{R,D} = \vec{C}$ が成り立ち，定理 3.30.13 の証明で $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}} \subseteq \vec{A}_{R,D}$ が示してあるから $\vec{C} = [\vec{D}]_{\vec{R}}$ が成り立つ.

問題 3.30.23 $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい場合，(R, D) が A 上の $\mathcal{F}$ 完全な論拠であれば，$(A, \mathcal{F})$ の任意の特性法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に対して，生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ は A^* 上の最小 $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係に等しい.

略解　$(\vec{R}, \vec{D})$ は $\vec{A}$ 上の論拠として $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全である．従って (R, D) が $\mathcal{F}$ 完全であれば，問題 3.30.22 により $\preccurlyeq_{R,D}$ は最小 $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係に等しい.

問題 3.30.24 (✓)　定理 3.30.13 において，条件 1 を条件 $\vec{C} \subseteq [R \cup \vec{D}]_{\vec{R}}$ に替えても，同じ結論が成り立つ．ただし $R \cup \vec{D}$ は，$A^* \times A$ の部分集合の R を $\vec{A}$ の部分集合とみなしての $\vec{D}$ との和を表す.

略解　定理 3.25.1 により，$\vec{A}$ の部分集合とみなした R は $\vec{A}_{R,D}$ に含まれる．そこで，A 上の論拠 (R, D) と $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, R \cup \vec{D})$ に定理 3.30.13 を使う.

問題 3.30.25 (✓)　定理 3.30.13 の仮定に加えて，$(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が劣空律に従うと共に写像 $\varphi \in \vec{A} {\to} A^*$ で二条件

$$\alpha \preccurlyeq \beta \iff \varphi(\alpha, \beta) \preccurlyeq \varepsilon \qquad\qquad \alpha \preccurlyeq_{R,D} \beta \iff \varphi(\alpha, \beta) \preccurlyeq_{R,D} \varepsilon$$

をみたすものがあると仮定すれば，$\vec{C} = [\vec{D}]_{\vec{R}} = \vec{A}_{R,D}$ が成り立つ.

略解　$\preccurlyeq$ が劣空律に従うことにより，$\alpha \preccurlyeq \beta$ なることは，任意の $z \in A$ に対して $\varphi(\alpha, \beta) \preccurlyeq z$ すなわち $\varphi(\alpha, \beta) \vDash z$ なることと同等である．定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{R,D}$ も劣空律に従うから同様に，$\alpha \preccurlyeq_{R,D} \beta$ なることは，任意の $z \in A$ に対して $\varphi(\alpha, \beta) \vDash_{R,D} z$ なることと同等である．定理 3.30.13 により $\vDash$ と $\vDash_{R,D}$ が等しいから，$\preccurlyeq$ と $\preccurlyeq_{R,D}$ が等しい.

補題 3.30.1 **$(A, \mathcal{F})$ が $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対の場合，A^* 上の包容律に従う関係 $\preccurlyeq_*$ が $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ を含むためには，$\preccurlyeq_*$ による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例のあることが必要十分である.**

証明　(3.30.5) により $\preccurlyeq = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \preccurlyeq_f$ であり，定理 3.30.7 と問題 3.19.4 により各 $\preccurlyeq_f$ $(f \in \mathcal{F})$ は包容律に従う．従って定理 3.22.8 により，$\preccurlyeq_* \supseteq \preccurlyeq$ なることは $\mathfrak{D}_{\preccurlyeq_*} \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ なることと，つまり各 $(X, Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_*}$ に応じて $(X, Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ なる $f \in \mathcal{F}$ があることと同等である．定理 3.22.7 系と $1 \notin \mathcal{F}$ との仮定と注意 3.30.2 により，$(X, Y) \in \mathfrak{D}_{\preccurlyeq_f}$ なることは f が (X, Y) の $\mathcal{F}$ 実例であることと同等である.

問題 3.30.26 $(A, \mathcal{F})$ が $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対の場合，A^* 上の関係 $\preccurlyeq_*$ が $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ を含めば，$\preccurlyeq_*$ による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例が存在する.

略解　$\preccurlyeq$ が包容律に従い定理 3.22.7 により $\mathfrak{C}_{\preccurlyeq_*} \subseteq \mathfrak{C}_{\preccurlyeq}$ が成り立つ．そこで補題 3.30.1 を使う．

問題 3.30.27 A^* 上の関係 $\preccurlyeq_*$ が $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ を含むためには，$\preccurlyeq_*$ に関する各特異対がそれに応じたある $f \in \mathcal{F}$ に対して $\preccurlyeq_f$ に関する特異対であることが必要十分である．

略解　問題 3.22.14 による．

定理 3.30.14 **$(A, \mathcal{F})$ を $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対とし，(R, D) を A 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠とし，生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例があると仮定する．このとき (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．**

証明　$\preccurlyeq_{R,D}$ は，定理 3.25.2 と問題 3.19.4 により包容律に従うから，切断についての仮定と補題 3.30.1 により $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係を含む．従って (R, D) は，定理 3.30.11 により $\mathcal{F}$ 充分であり，$\mathcal{F}$ 健全との仮定と合わせて，$\mathcal{F}$ 完全である．

問題 3.30.28 $(A, \mathcal{F})$ が $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対で $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい場合，(R, D) が A 上の $\mathcal{F}$ 完全な論拠であれば，生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例がある．

略解　問題 3.30.19 により $\preccurlyeq_{R,D} = \preccurlyeq$ であるから，問題 3.30.26 によりこの結論が成り立つ．

定理 3.30.15 **$(A, \mathcal{F})$ が $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対で，$(\vec{R}, \vec{D})$ が A^* 上の関係についての生成的法則で次の二条件をみたせば，$(\vec{R}, \vec{D})$ と付加律・巾等律・置換律の和は $(A, \mathcal{F})$ の特性法則である．**

1. **$(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従う．**
2. **A^* 上の $\preccurlyeq$ に含まれる任意の $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例がある．**

注意 3.30.5 定理 3.29.4 により付加律・巾等律・置換律がそれぞれ生成的法則 $(R_1, \emptyset)$, $(R_2, \emptyset)$, $(R_2, \emptyset)$ として表されるから，$(\vec{R}, \vec{D})$ と付加律・巾等律・置換律の和

$$(\vec{R}, \vec{D}) \cup (R_1, \emptyset) \cup (R_2, \emptyset) \cup (R_3, \emptyset) = (\vec{R} \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3, \vec{D})$$

が問題 3.29.1 でのように生成的法則として定義される．

証明　注意 3.30.5 における和を $(\vec{S}, \vec{D})$ で表す．条件 1 と定理 3.30.7 により $\preccurlyeq$ は $(\vec{S}, \vec{D})$ に従い，問題 3.29.4 により $(\vec{S}, \vec{D})$ は $(\vec{R}, \vec{D})$ より強い．$[\vec{D}]_{\vec{S}}$ を A^* 上の関係とみなしたものを $\preccurlyeq_*$ で表す．そうすると $\preccurlyeq_*$ は，定理 3.29.1 により最小 $(\vec{S}, \vec{D})$ 関係であるから，$\preccurlyeq_* \subseteq \preccurlyeq$ をみたし，$(\vec{R}, \vec{D})$ 関係であって，問題 3.19.4 により包容律に従う．従って条件 2 と補題 3.30.1 により $\preccurlyeq_* \supseteq \preccurlyeq$ が成り立つ．これで $\preccurlyeq = \preccurlyeq_*$，すなわち $\vec{C} = [\vec{D}]_{\vec{S}}$ が示された．

問題 3.30.29 $(A, \mathcal{F})$ を $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対とし，$(\vec{R}, \vec{D})$ を $(A, \mathcal{F})$ の特性法則とすれば，A^* 上の任意の $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例がある．

略解　$(A, \mathcal{F})$ の恒真関係が A^* 上の最小 $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係であることと問題 3.30.26 による．

定理 3.30.16 **$(A, \mathcal{F})$ を $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対とし，(R, D) を A 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠とし，A^* 上の関係についての生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ で次の二条件をみたすものが存在すると仮定する．**

1. 生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ と $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従う．

2. A^* 上の $\preccurlyeq$ に含まれる任意の $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例がある．

このとき (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．

証明　$(\vec{R}, \vec{D})$ が定理 3.30.15 の二条件をみたすから，$(\vec{R}, \vec{D})$ と付加律・巾等律・置換律の和 $(\vec{S}, \vec{D})$ は $(A, \mathcal{F})$ の特性法則である．$\preccurlyeq_{R,D}$ は，定理 3.25.2 により付加律・巾等律・置換律に従い，条件 1 と合わせて法則 $(\vec{S}, \vec{D})$ に従う．従って定理 3.30.13 により，(R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．

別証　(X, Y) を $\preccurlyeq_{R,D}$ による A の有限な切断とすれば，定理 3.22.7 により (X, Y) は $\preccurlyeq_{R,D} \cap \preccurlyeq$ による A の切断であって，条件 1 と定理 3.29.2 により $\preccurlyeq_{R,D} \cap \preccurlyeq$ も法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従うから，条件 2 により (X, Y) に $\mathcal{F}$ 実例がある．従って定理 3.30.14 により，(R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．

問題 3.30.30　$(A, \mathcal{F})$ が $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対で $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい場合，(R, D) が A 上の $\mathcal{F}$ 完全な論拠であれば，$(A, \mathcal{F})$ の特性法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ は定理 3.30.16 の条件 1, 2 をみたす．

略解　問題 3.30.23 と問題 3.30.29 による．

注意 3.30.6 (完全性の基本定理 3.30.13 の意味するもの)　完全性の基本定理 3.30.13 は，A 上の $\mathcal{F}$ 完全な論拠 (R, D) を見つけるために実際上必要にして十分な手順を示している．

実際の論理学においては，$(A, \mathcal{F})$ が $1 \notin \mathcal{F}$ なる $\mathbb{T}$ 値論対で $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張に等しい場合が重要である．その場合には，まず定理 3.30.13 と問題 3.30.23 によれば，A 上の論拠 (R, D) で $\mathcal{F}$ 完全なものを見つけるには，次の二つの手順を踏むことが必要かつ十分である．

手順 1. $(A, \mathcal{F})$ の特性法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ を見つける．これはすなわち，$\vec{A}$ 上の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全な論拠であり，$(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ を A^* 上の最小 $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係と成す生成的法則である．

手順 2. A 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠 (R, D) で生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ が法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従うものを見つける．

次に定理 3.30.15 と問題 3.30.29 によれば，手順 1 のためには次の方法が理に適っている．

> A^* 上の関係についての生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ で $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ を $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係と成すものを適当にとって，A^* 上の $\preccurlyeq$ に含まれる任意の $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係による A の任意の有限な切断に $\mathcal{F}$ 実例のあることを示す．

いずれの方法をとるにしても手順 1 では，$(A, \mathcal{F})$ に随伴する式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ に関して弱完全な論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ を探せばいい．そして定理 3.28.2 により，$\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全性は $\vec{\mathcal{F}}$ 完全性より文字通りに弱い性質である [73]．特に $\vec{R}$ は，問題 3.28.6 と問題 3.26.5 によれば，式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の論理の範囲より広い弱論理の範囲から探せばいい（$\vec{D}$ は $\vec{C}$ の中から探す）．また手順 2 でも，問題 3.30.17 によれば，R は「$\alpha R y \implies \alpha \to y \in \vec{C}$」をみたすものの中から探し，$D$ は $\varepsilon \to x \in \vec{C}$ をみたす元 x を探し集めて作ればいい．従って $(A, \mathcal{F})$ に関し完全な論拠 (R, D) を探す限り，式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ については，核 $\vec{C}$ すなわち恒真関係 $\preccurlyeq$ が重要なのであり，与論 $\vec{A}_f$ すなわち f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は，(3.30.5) によって $\preccurlyeq$ を決める限りにおいて重要であるに過ぎない．従って，$\vec{A}$ を言語とする別の論対 $(\vec{A}, \mathcal{B})$ の核が $\vec{C}$ に等しければ，つまり $(\vec{A}, \mathcal{B})$ が $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ と弱同値なら，それを式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の代わりに使ってもいい．実際，第 5.6.1 項ではそういう論対を使う．

[73] ただし (R, D) についても $(\vec{R}, \vec{D})$ についても，妥当な仮定の下では弱完全性が完全性を含意する．定理 3.28.3, 問題 3.28.7, 問題 3.28.8, 定理 3.30.5, 問題 3.30.7, 定理 3.30.22, 問題 3.30.33, 定理 3.30.23 参照．

3.30.3　ブール表現論対

§ **以下この節では，**$(A,\mathcal{F})$ **が** $\mathbb{B}$ **値論対であるというこれまでの仮定に加え，**$\mathbb{B}$ **がブール束であると仮定してそのブール論法を** $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ **で表し，また，**$x\wedge y$, $x\vee y$, $x^{\Diamond}$, $x\Rightarrow y$ **を** A **上の汎算法とし，**$\mathcal{F}$ **の各元がこれらの算法について** A **の** $\mathbb{B}$ **上のブール表現であると仮定する**（ただし「これらの算法について」の類の断り書きは，今後しばしば省略する）．こういう $\mathbb{B}$ 値論対を，$\mathbb{B}$ 上の**ブール表現論対**とか $\mathbb{B}$ **表現論対**とかと呼ぶ．

第 4.7.1 項で説明するように真偽のある論理系から $\mathbb{T}$ 値論対が出来るが（例 3.26.1 参照），本書で例示する真偽のある論理系から出来る $\mathbb{T}$ 値論対は，どれも $\mathbb{T}$ 表現論対である．

問題 3.30.31 $0,1\notin\mathcal{F}$ が成り立つ．

略解　$\mathcal{F}$ が $\{\Diamond\}$ 準写から成って $\#\mathbb{B}\geq 2$ であることによる．

定理 3.30.17 $(A,\mathcal{F})$ **の恒真関係** $\preccurlyeq$ **は，算法** $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ **についてブール関係であり，**$(A,\mathcal{F})$ **の偏恒真関係** $\vDash$ **の最大束拡張である．**

証明　定理 3.19.6 により，各 $f\in\mathcal{F}$ に対して f 真関係 $\preccurlyeq_f$ はブール関係である．従ってそれらの交わりである $\preccurlyeq$ も，問題 3.21.23 によりブール関係であり，特に準上限律に従い，また問題 3.21.3 により下端律に従うので，問題 3.21.11 により劣空律に従う．従って定理 3.30.8 により，$\preccurlyeq$ は $\vDash$ の最大束拡張である．

系　**各** $f\in\mathcal{F}$ **に対して** f **真関係** $\preccurlyeq_f$ **は，算法** $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ **についてブール関係であり，偏** f **真関係** $\vDash_f$ **の最大束拡張である．**

証明　$(A,\{f\})$ が $\mathbb{B}$ 表現論対だからである．

定理 3.30.18 束値論対 $(A,\mathcal{G})$ **の恒真関係が** A **上の汎算法** $x\wedge y$, $x\vee y$, $x^{\Diamond}$, $x\Rightarrow y$ **についてブール関係であれば，**$(A,\mathcal{G})$ **はこれら算法についてのある** $\mathbb{T}$ **表現論対と同値である．**

証明　定理 3.22.17 により，$(A,\mathcal{G})$ の恒真関係はある $\mathbb{T}$ 表現論対 $(A,\mathcal{H})$ の恒真関係に等しい．従って問題 3.30.11 により $(A,\mathcal{G})$ は $(A,\mathcal{H})$ と同値である．

注意 3.30.7 定理 3.30.17 と定理 3.30.18 は，束値論対の中でブール表現論対が「恒真関係がブール関係である」という性質によって特徴付けられることを示すと共に，ブール表現論対は $\mathbb{T}$ 表現論対と同値であることを示すが，この後者のことより精密に定理 3.30.19 が成り立つ．ただし，これより深いことが定理 3.30.29 で分かる．

定理 3.30.19 $\mathbb{B}$ **の** $\mathbb{T}$ **表現の全体を** $\mathcal{T}$ **で表し，**$f\in\mathcal{F}$ **と** $g\in\mathcal{T}$ **の合成写像** $gf\in A{\rightarrow}\mathbb{T}$ **の全体を** $\mathcal{F}'$ **で表せば，**$(A,\mathcal{F}')$ **は** $\mathbb{T}$ **表現論対であって** $(A,\mathcal{F})$ **と同値である．**

証明　問題 3.3.4 により $\mathcal{F}'$ は $\mathbb{T}$ 表現から成る．問題 3.22.33 の略解によれば，$\mathcal{T}\neq\emptyset$ であり，$\mathbb{B}$ から $\mathbb{T}$ の巾ブール束 $\mathbb{T}^{\mathcal{T}}$ への写像 ρ を，各 $a\in\mathbb{B}$ と各 $g\in\mathcal{T}$ に対して $(\rho a)g=ga$ なるよう定めれば，ρ はブール束としての単射準写 ρ となる．各 $(f,g)\in\mathcal{F}\times\mathcal{T}$ と各 $x\in A$ に対して $g(fx)=\big(\rho(fx)\big)g$ であるから，問題 3.30.15 により $(A,\mathcal{F})$ は $(A,\mathcal{F}')$ と同値である．

定理 3.30.20 A **上の論拠** (R,D) **の** $\mathcal{F}$ **完全性について次のことが成り立つ．**

1. (R,D) **が** $\mathcal{F}$ **完全であるためには，生成関係** $\preccurlyeq_{R,D}$ **が** $(A,\mathcal{F})$ **の恒真関係** $\preccurlyeq$ **に等しいことが必要十分であり，** $\preccurlyeq_{R,D}$ **が算法** $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ **についてブール関係であることが必要である．**

2. $\preccurlyeq_{R,D}$ **が算法** $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ **についてブール関係であれば，**(R,D) **が** $\mathcal{F}$ **健全であるためには** $\preccurlyeq_{R,D}$ **が** $\preccurlyeq$ **に含まれることが必要十分であり，**(R,D) **が** $\mathcal{F}$ **充分であるためには，**$\preccurlyeq_{R,D}$ **が** $\preccurlyeq$ **を含むことが必要十分である．**

証明　定理 3.30.17 により $\preccurlyeq$ が $\vDash$ の最大束拡張かつブール関係であるから，定理 3.30.11 と問題 3.30.19 により結論 1 が成り立つ．

$\preccurlyeq$ がブール関係であるから，$\preccurlyeq_{R,D}$ もブール関係であれば，定理 3.21.16 により，$\preccurlyeq_{R,D}$ が $\preccurlyeq$ に含まれるためには $\vDash_{R,D}$ が $\vDash$ に含まれることが必要十分であり，$\preccurlyeq_{R,D}$ が $\preccurlyeq$ を含むためには，$\vDash_{R,D}$ が $\vDash$ を含むことが必要十分である．従って定理 3.30.4 により結論 2 が成り立つ．

定理 3.30.21 $(A,\mathcal{F})$ **に随伴する式論対** $(\vec{A},\vec{\mathcal{F}})$ **の最大論理** $\vec{Q}$ **と** $\emptyset$ **から成る組み** $(\vec{Q},\emptyset)$ **は，**A^* **上の関係についての生成的法則としてブール律を含意する．**

証明　定理 3.29.4 により，ブール律は何らかの生成的法則 $(\vec{R},\vec{D})$ として表される．定理 3.30.17 系により，各 $f\in\mathcal{F}$ に対して f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は法則 $(\vec{R},\vec{D})$ に従う．従って定理 3.30.10 によりこの定理が成り立つ．

例 3.30.1　定理 3.30.21 と定理 3.30.10 によれば，A^* 上の関係についての生成的法則 $(\vec{R},\vec{D})$ がブール律と同値であれば，$\vec{R}$ は $(A,\mathcal{F})$ に随伴する式論対 $(\vec{A},\vec{\mathcal{F}})$ の論理，従って弱論理であって $\vec{D}\subseteq\vec{C}$ が成り立つ．このことを利用して注意 3.30.6 の手順 1, 2 に関し，$(A,\mathcal{F})$ と $(\vec{A},\vec{\mathcal{F}})$ の論理と弱論理にどういうものがあるか例示しよう．

定理 3.29.4 の証明の記号法の下で，ブール律は生成的法則 $(\vec{R}_0,\vec{D}_1)$ とも生成的法則 $(\vec{R}_2,\vec{D}_0)$ とも同値である．従ってまず，$\vec{R}_0\cup\vec{R}_2$ を成す付加・巾等・置換・消去・強消去・下限・上限・両補・三導の九種十七個の $\vec{A}^*,\vec{A}$ 間の関係は $(\vec{A},\vec{\mathcal{F}})$ の論理，従って弱論理である．次に，$\vec{D}_1$ に属す $\alpha\to y$ なる形の式については $\alpha\to y\in\vec{C}$ が成り立つから，そういう式を集めて A^*,A 間の関係 R を作れば，問題 3.30.17 により R は $(A,\mathcal{F})$ の論理となる．たとえば，$\vec{D}_1$ の中の下限式・上限式・三導式から，次の三組八個の $(A,\mathcal{F})$ の論理が得られる．ただし，分数式表示法を使っている．

$$\frac{x\wedge y}{x}\qquad\frac{x\wedge y}{y}\qquad\frac{x\quad y}{x\wedge y}\qquad\text{(下限論理)}$$

$$\frac{x}{x\vee y}\qquad\frac{y}{x\vee y}\qquad\text{(上限論理)}$$

$$\frac{x^{\Diamond}}{x\Rightarrow y}\qquad\frac{y}{x\Rightarrow y}\qquad\frac{x\quad x\Rightarrow y}{y}\qquad\text{(三導論理)}$$

これらの中でも特に重要な三導論理と下限論理の右端のものを記号 $\wp$ と & で表す．

$$\wp=\frac{x\quad x\Rightarrow y}{y}\qquad\qquad \&=\frac{x\quad y}{x\wedge y}$$

論理 $\wp$ は第 1.2.3 項や第 1.2.4 項で触れたいわゆる **modus ponens** であり，論理 & は算法 $\wedge$ の関係化に他ならない [74]．

[74] 記号「$\wp$（ペー）」は「ponens」の「p」に因んで使うが，元々は楕円関数の一種を表す.「& (ampersand)」は言うまでもないが「and」の代用記号である．

問題 3.30.32 関係 $\wp' = \dfrac{x \quad x^\diamond \vee y}{y}$ も $\dfrac{x \;\; x^\diamond}{y}$ も $\dfrac{y}{x \vee x^\diamond}$ も $(A, \mathcal{F})$ の論理である．

定理 3.30.22 **A 上の論拠 (R, D) が $C \subseteq [D]_R$ をみたして R が modus ponens $\wp$ を含めば，(R, D) は $\mathcal{F}$ 充分である．**

証明　定理 3.30.17 により $\preccurlyeq$ はブール関係である．そこで，写像 $\phi \in A^* \times A \to A$ を次のように定める．ただし $n = 0$ の場合，右辺は y を意味する．

$$\phi(x_1 \cdots x_n, y) = x_n \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_1 \Rightarrow y)) \cdots)$$

そうすると，定理 3.21.4 と $\vDash$ が $\preccurlyeq$ の $A^* \times A$ への制限であることにより

$$x_1 \cdots x_n \vDash y \iff \varepsilon \vDash \phi(x_1 \cdots x_n, y)$$

が成り立つ．特に，ϕ は問題 3.30.7 の条件「$\alpha \vDash y \implies \varepsilon \vDash \phi(\alpha, y)$」をみたす．そこで次に $\varepsilon \vDash_{R,D} \phi(x_1 \cdots x_n, y)$ と仮定する．そうすると，

$$x_n \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_1 \Rightarrow y)) \cdots) \in [D]_R \subseteq [\{x_1, \ldots, x_n\} \cup D]_R$$

が成り立って R が $\wp$ を含むから，$i = 1, \ldots, n$ に対して

$$x_{n-i} \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_1 \Rightarrow y)) \cdots) \in [\{x_1, \ldots, x_n\} \cup D]_R$$

なることが帰納的に分かり，特に $y \in [\{x_1, \ldots, x_n\} \cup D]_R$，すなわち $x_1 \cdots x_n \vDash_{R,D} y$ が成り立つ．つまり，ϕ は問題 3.30.7 の条件「$\alpha \vDash_{R,D} y \impliedby \varepsilon \vDash_{R,D} \phi(\alpha, y)$」をみたす（矢印の向きに注意）．従ってこの定理が成り立つ．

系　**modus ponens $\wp$ と $(A, \mathcal{F})$ の核 C から成る A 上の論拠 $(\wp, C)$ は $\mathcal{F}$ 完全である．**

証明　$(\wp, C)$ は $\mathcal{F}$ に関して，定義 3.28.1 に注記したことと例 3.30.1 により健全であって定理 3.30.22 により充分である．

問題 3.30.33 A 上の論拠 (R, D) が $C \subseteq [D]_R$ をみたして R が論理 $\wp'$ と & を含めば，(R, D) は $\mathcal{F}$ 充分である．

略解　定理 3.30.22 の証明を，$x_n \Rightarrow (\cdots \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_1 \Rightarrow y)) \cdots)$ を $((\cdots (x_1 \wedge x_2) \wedge \cdots) \wedge x_n)^\diamond \vee y$ に替えて真似る．

定理 3.30.23 **$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ の場合，$\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ についての次の三条件は同等である．**

1. **$(\vec{R}, \vec{D})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 充分である．**
2. **$(\vec{R}, \vec{D})$ が $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}}$ をみたし，A^* 上の関係についての生成的法則とみなした $(\vec{R}, \vec{D})$ がブール律を含意する．**
3. **$(\vec{R}, \vec{D})$ が $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}}$ をみたし，$\vec{R}^{\vec{D}}$ が $\vec{A}^*, \vec{A}$ 間の関係として次の四関係を含む（これらの関係を<u>片消去</u>・<u>片下限</u>・<u>片上限</u>・<u>片補</u>と呼ぶ[75]）．**

$$\frac{\alpha \to x \qquad x\beta \to \delta}{\alpha\beta \to \delta} \qquad \frac{xy\alpha \to \beta}{x \wedge y, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to xy\beta}{\alpha \to x \vee y, \beta} \qquad \frac{x\alpha \to \beta}{\alpha \to x^\diamond \beta}$$

[75] これらの関係はそれぞれ，定理 3.29.4 の証明中の消去関係・下限関係・上限関係・両補関係の片割れである．

注意 3.30.8 片消去・片下限・片上限・片補の四関係の中の任意の一つを R' で表せば，定理 3.25.5 により，$R' \subseteq \vec{R}^{\vec{D}}$ なることは $R'^{\emptyset} \subseteq \vec{R}^{\vec{D}}$ なることと同等である．従って問題 3.29.4 により，$\vec{R}^{\vec{D}}$ が片消去・片下限・片上限・片補の四関係を含むことは，生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ が次の四法則含意することと同等である．

$$\alpha \, R \, x,\ x\beta \, R \, \delta \implies \alpha\beta \, R \, \delta \qquad \textbf{(片消去律)}$$

$$xy\alpha \, R \, \beta \implies x \wedge y, \alpha \, R \, \beta \qquad \textbf{(片下限律)}$$

$$\alpha \, R \, xy\beta \implies \alpha \, R \, x \vee y, \beta \qquad \textbf{(片上限律)}$$

$$x\alpha \, R \, \beta \implies \alpha \, R \, x^{\Diamond}\beta \qquad \textbf{(片補律)}$$

証明　$(1 \Longrightarrow 2)$ 定理 3.29.4 により，A^* 上の関係についてのブール律は何らかの生成的法則 (R', D') として表される．定理 3.30.17 系により任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して f 真関係 $\preccurlyeq_f$ はブール律に従うから，定理 3.30.10 により，$\vec{A}$ 上の論拠とみなした (R', D') は $\vec{\mathcal{F}}$ 健全，すなわち $R'^{D'} \subseteq \vec{Q}$ をみたす．これを条件 1 と合わせれば $R'^{D'} \subseteq \vec{R}^{\vec{D}}$ が得られ，これは問題 3.29.4 によれば，生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ がブール律を含意することと同等である．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 定理 3.21.2 と定理 3.21.3 によりブール律が片消去律・片下限律・片上限律・片補律を含意することと注意 3.30.8 による．

$(3 \Longrightarrow 1)$ まず写像 $z \in \vec{A} {\to} A^*$ を次のように定める．

$$z(x_1 \cdots x_m \to y_1 \cdots y_n) = ((\cdots(x_1 \wedge x_2) \wedge \cdots) \wedge x_m)^{\Diamond} \vee ((\cdots(y_1 \vee y_2) \vee \cdots) \vee y_n)$$

ただし右辺は，$m = n = 0$ の場合は空列 ε を意味し，$m = n = 0$ でない場合は，$m = 0$ なら $((\cdots(y_1 \vee y_2) \vee \cdots) \vee y_n)$ を意味し，$n = 0$ なら $((\cdots(x_1 \wedge x_2) \wedge \cdots) \wedge x_m)^{\Diamond}$ を意味する．従って $z(x_1 \cdots x_m \to y_1 \cdots y_n)$ は，A に属すか空列かである．さらに，写像 $\phi \in \vec{A}^* \times \vec{A} \to \vec{A}$ を

$$\phi\big((\alpha_1 \to \beta_1) \cdots (\alpha_n \to \beta_n), (\alpha_0 \to \beta_0)\big) = z(\alpha_1 \to \beta_1) \cdots z(\alpha_n \to \beta_n)\alpha_0 \to \beta_0$$

と定める．そして，$(A, \mathcal{F})$ に随伴する式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の核 $\vec{C}$ と最大論理 $\vec{Q}$ と $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ と写像 ϕ に問題 3.28.7 を使いたい．そこで，この問題の条件がみたされることを示すために，まず

$$(\alpha_1 \to \beta_1) \cdots (\alpha_n \to \beta_n) \, \vec{Q} \, (\alpha_0 \to \beta_0)$$

と仮定する．そうするとこれは，定理 3.26.7 と注意 3.26.3 により

$$\alpha_1 \preccurlyeq_f \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n \preccurlyeq_f \beta_n \implies \alpha_0 \preccurlyeq_f \beta_0 \qquad (f \in \mathcal{F})$$

と書き換えられ，これは，定理 3.30.17 系により $\preccurlyeq_f$ がブール関係であるから，定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により

$$\varepsilon \preccurlyeq_f z(\alpha_1 \to \beta_1),\ \ldots,\ \varepsilon \preccurlyeq_f z(\alpha_n \to \beta_n) \implies \alpha_0 \preccurlyeq_f \beta_0 \qquad (f \in \mathcal{F})$$

と書き換えられ，これは，$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ で $z(\alpha_i \to \beta_i) \in A \cup \{\varepsilon\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるから

$$z(\alpha_1 \to \beta_1) \cdots z(\alpha_n \to \beta_n)\alpha_0 \preccurlyeq_f \beta_0 \qquad (f \in \mathcal{F})$$

と書き換えられ，これは式 $z(\alpha_1 \to \beta_1) \cdots z(\alpha_n \to \beta_n)\alpha_0 \to \beta_0$ が恒真式であることと，すなわち $\vec{C}$ に属すことと同等であり，従って写像 ϕ の定義と定理 3.26.9 により，

$$\varepsilon \, \vec{Q} \, \phi\big((\alpha_1 \to \beta_1) \cdots (\alpha_n \to \beta_n), (\alpha_0 \to \beta_0)\big)$$

なることと同等である．従って，問題 3.28.7 の条件の一つ目がみたされる．そこで次に

$$\varepsilon\, \vec{R}^{\vec{D}}\, \phi\big((\alpha_1 \to \beta_1)\cdots(\alpha_n \to \beta_n), (\alpha_0 \to \beta_0)\big)$$

と仮定する．そうすると，生成関係 $\vec{R}^{\vec{D}}$ と写像 ϕ の定義により

$$z(\alpha_1 \to \beta_1)\cdots z(\alpha_n \to \beta_n)\alpha_0 \to \beta_0 \in [\vec{D}]_{\vec{R}} \subseteq \big[\{(\alpha_1 \to \beta_1), \ldots, (\alpha_n \to \beta_n)\} \cup \vec{D}\big]_{\vec{R}}$$

が成り立つ．そこで

$$R = \big[\{(\alpha_1 \to \beta_1), \ldots, (\alpha_n \to \beta_n)\} \cup \vec{D}\big]_{\vec{R}}$$

と定める．そうすると，これは A^* 上の $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係とみなせて，

$$z(\alpha_1 \to \beta_1)\cdots z(\alpha_n \to \beta_n)\alpha_0\, R\, \beta_0 \qquad\qquad \alpha_i\, R\, \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ．また，$\vec{R}^{\vec{D}}$ が片消去・片下限・片上限・片補の四関係を含むから，注意 3.30.8 により，R は片消去律・片下限律・片上限律・片補律に従う．そこで $\alpha_i\, R\, \beta_i$ に片下限・片上限・片補の三律を使えば，$\varepsilon\, R\, z(\alpha_i \to \beta_i)$ が得られる $(i = 1, \ldots, n)$．そして，これらと $z(\alpha_1 \to \beta_1)\cdots z(\alpha_n \to \beta_n)\alpha_0\, R\, \beta_0$ に片消去律を使えば $\alpha_0\, R\, \beta_0$，すなわち

$$(\alpha_0 \to \beta_0) \in \big[\{(\alpha_1 \to \beta_1), \ldots, (\alpha_n \to \beta_n)\} \cup \vec{D}\big]_{\vec{R}}$$

すなわち

$$(\alpha_1 \to \beta_1)\cdots(\alpha_n \to \beta_n)\, \vec{R}^{\vec{D}}\, (\alpha_0 \to \beta_0)$$

が得られる．これで問題 3.28.7 の条件がすべてみたされたので，この定理が成り立つ．

定理 3.30.24 **$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ の場合，$(A, \mathcal{F})$ の次の二条件をみたす特性法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ はすべて同値である．**

1. **任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，f 真関係 $\preccurlyeq_f$ は法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従う．**
2. **法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ はブール律を含意するか片消去律・片下限律・片上限律・片補律を含意する．**

証明　条件 1 の下では定理 3.30.10 により，$(\vec{R}, \vec{D})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 健全である．$(\vec{R}, \vec{D})$ が $(A, \mathcal{F})$ の特性法則あって条件 2 をみたせば，定理 3.30.23 と注意 3.30.8 により，$(\vec{R}, \vec{D})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 充分である．従って $(A, \mathcal{F})$ の特性法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ で条件 1, 2 をみたすものは，$\vec{\mathcal{F}}$ 完全であり，従って $\vec{D}^{\vec{R}} = \vec{Q}$ をみたす．これで証明された．　終

以上はブール表現論対における論拠の完全性についての説明であった．以下ではブール表現論対における無矛盾集合・実例・補法などについて説明する．

定理 3.30.25 **算法 $\Diamond$ は $(A, \mathcal{F})$ の補法である．また，$\Diamond$ が $(A, \mathcal{F})$ の否法であるためには，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $fA \subseteq \{0, 1\}$ の成り立つことが必要十分である．従って $\mathbb{B} = \mathbb{T}$ であれば，$\Diamond$ は $(A, \mathcal{F})$ の否法である．**

注意 3.30.9 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $fA \subseteq \{0, 1\}$ が成り立てば，$\{0, 1\}$ が $\mathbb{T}$ と同一視できるから，$(A, \mathcal{F})$ は $\mathbb{T}$ 表現論対とみなせる．

証明　定理 3.30.17 により $(A,\mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ についてブール関係であるから，定理 3.21.3 により，$(A,\mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ は $\Diamond$ について偏矛盾律と偏排中律に従う．定理 3.30.1 により $\vDash$ が $(A,\mathcal{F})$ の最大論理であるから，$\Diamond$ は $(A,\mathcal{F})$ の補法である．

$\mathcal{F}$ が $\{\Diamond\}$ 準写から成って問題 3.30.31 により $1 \notin \mathcal{F}$ であるから，定理 3.30.6 によれば，算法 $\Diamond$ が $(A,\mathcal{F})$ の否法であるためには，各 $f \in \mathcal{F}$ に応じて $\mathbb{B}$ の元 a_f で $fA \subseteq \{a_f, 1\}$ をみたすものが存在して任意の $f \in \mathcal{F}$ と $x \in A$ に対して「$fx = 0 \iff fx \neq 1$」の成り立つことが必要十分であり，そのためには，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $fA \subseteq \{0,1\}$ の成り立つことが必要十分である．

定理 3.30.26 $(A,\mathcal{F})$ **の矛盾集合と矛盾元について次のことが成り立つ．**

1. **A の有限部分集合 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ が矛盾集合であるためには，$(A,\mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ について，任意の $y \in A$ に対して $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ をみたすことも，$x_1 \cdots x_n \preccurlyeq \varepsilon$ をみたすことも，算法 $\wedge$ を適用する順番（括弧の付け方）によらずに $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \preccurlyeq \varepsilon$ をみたすことも，$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ が矛盾元であることも，いずれも必要十分である．**

2. **A の任意の元 x に対して，$\{x, x^{\Diamond}\}$ は矛盾集合であって $x \wedge x^{\Diamond}$ は矛盾元である．**

3. **A の部分集合 X が矛盾集合であるためには，X のある有限部分集合が矛盾集合であることも，$\alpha \subseteq X$ なるある $\alpha \in A^*$ が任意の $y \in A$ に対して $\alpha \preccurlyeq y$ をみたすことも，$\alpha \preccurlyeq \varepsilon$ をみたすことも，A のある元 x に対して $\alpha \preccurlyeq x$ と $\alpha \preccurlyeq x^{\Diamond}$ をみたすことも，$\alpha \preccurlyeq x \wedge x^{\Diamond}$ をみたすことも，いずれも必要十分である．**

4. **A の部分集合 X が無矛盾集合であるためには，$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 $(X, \emptyset)$ が A の $\preccurlyeq$ による切断であることが必要十分である．**

5. **A の $\Diamond$ で閉じている空でない部分集合は矛盾集合である．**

証明　1. 定理 3.30.1 により $(A,\mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ が $(A,\mathcal{F})$ の最大論理であるから，定理 3.27.1 により，$\{x_1,\ldots,x_n\}$ が矛盾集合であることは，任意の $y \in A$ に対して $x_1 \cdots x_n \preccurlyeq y$ をみたすことと同等である．このことは，定理 3.30.17 により $\preccurlyeq$ が $\vDash$ の最大束拡張であるから，$x_1 \cdots x_n \preccurlyeq \varepsilon$ なることと同等である．このことは，定理 3.30.17 により $\preccurlyeq$ がブール関係であるから，定理 3.21.2 により，$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \preccurlyeq \varepsilon$ なることと同等である．以上により特に，x が矛盾元であることは $x \preccurlyeq \varepsilon$ なることと同等である．従って $\{x_1,\ldots,x_n\}$ が矛盾集合であることは，$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ が矛盾元であることとも同等である．

2. 定理 3.30.25 により算法 $\Diamond$ が $(A,\mathcal{F})$ の補法であることと補題 3.27.1 により，あるいは下補律により $xx^{\Diamond} \preccurlyeq \varepsilon$ が成り立つことと結論 1 により，任意の $x \in A$ に対して $\{x, x^{\Diamond}\}$ は矛盾集合であり，従って結論 1 により $x \wedge x^{\Diamond}$ は矛盾元である．

3. 結論 1, 2 と定理 3.27.2 による．

4. 結論 3 と定義 3.22.1 によるか，後出の問題 3.30.34 と定理 3.30.25 と定理 3.27.8 による．

5. 定理 3.30.25 と問題 3.27.14 による．

以下，$(A,\mathcal{F})$ の無矛盾集合の全体を $\mathcal{C}$ で表し，$\mathcal{C}$ の包含関係 $\subseteq$ に関する極大元の全体を $\mathcal{D}$ で表す．また，$(A,\mathcal{F})$ の最大論理と核と論対化をそれぞれ Q と C と $(A,\mathcal{B})$ で表す． そうすると，$\mathcal{C}$ と Q と C はそれぞれ $(A,\mathcal{B})$ の無矛盾集合の全体と最大論理と核に等しい．

定理 3.30.27 $\mathbb{B}=\mathbb{T}$ **の場合，次のことが成り立つ．**

$$\mathcal{B}-\{A\}=\{f^{-1}1 \mid f\in\mathcal{F}\} \qquad \emptyset\notin\mathcal{B}-\{A\} \qquad \mathcal{C}=\overline{\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(f^{-1}1)}$$

証明　$\mathcal{B}$ についてのことは注意 3.30.1 と問題 3.30.31 による．定理 3.30.26 により $(A,\mathcal{F})$ に有限矛盾集合があるから，定理 3.27.4 により $\mathcal{C}=\overleftarrow{\overline{\mathcal{B}-\{A\}}}$ が成り立つ．これと $\mathcal{B}$ についての式から $\mathcal{C}$ についての式が得られる．

定理 3.30.28 A **の部分集合** X **とその定義関数** $1_X\in A\to\mathbb{T}$ **についての次の二条件は同等である．**

1. $X\in\mathcal{D}$
2. 1_X **は算法** $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ **に関して** A **の** $\mathbb{T}$ **表現であって** C **の各元を** 1 **にうつす．**

また，$\mathbb{B}=\mathbb{T}$ **の場合，**$\mathcal{F}\subseteq\{1_X\mid X\in\mathcal{D}\}$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.30.25 により算法 $\Diamond$ は $(A,\mathcal{F})$ の補法であり，$(A,\mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は定理 3.30.17 によりブール関係である．

(1 $\Longrightarrow$ 2) 恒真関係 $\preccurlyeq$ はさらに定理 3.30.1 により Q の拡張である．従って定理 3.27.9 と定理 3.22.9 により，$(X,A-X)$ は $\preccurlyeq$ による A の極大の切断である．定理 3.21.10 により $\preccurlyeq$ が弱ブール関係であるから，定理 3.22.11 により $(X,A-X)$ はブール充乖対であり，従って補題 3.22.2 により X はブール部分集合であり，従って定理 3.19.7 により 1_X は $\mathbb{T}$ 表現である．また，$x\in C$ なら，問題 3.30.1 により $\varepsilon\preccurlyeq x$ であるから $x\notin A-X$，従って $1_X(x)=1$ が成り立つ．

(2 $\Longrightarrow$ 1) X は，定理 3.19.7 により A のブール部分集合であり，C を含む．そこで，$x_1,\ldots,x_n\in X$ が $x_1\cdots x_n\preccurlyeq\varepsilon$ をみたすと仮定する．そうすると $\preccurlyeq$ がブール関係であるから，定理 3.21.3 と定理 3.21.2 により $\varepsilon\preccurlyeq x_1{}^\Diamond\vee\cdots\vee x_n{}^\Diamond$，従って $x_1{}^\Diamond\vee\cdots\vee x_n{}^\Diamond\in C\subseteq X$ が成り立つ．しかしそうするとブール部分集合律により，ある $i\in\{1,\ldots,n\}$ に対して $x_i{}^\Diamond\in X$ が成り立ち，従って $x_i\notin X$ が成り立って矛盾である．この矛盾は，定理 3.30.26 によれば $X\in\mathcal{C}$ を意味する．また，やはり $\preccurlyeq$ がブール関係であることにより，任意の $x\in A$ に対して $\varepsilon\preccurlyeq x\vee x^\Diamond$，従って $x\vee x^\Diamond\in C\subseteq X$ が成り立つから，ブール部分集合律により $x\in X$ または $x^\Diamond\in X$ が成り立つ．従って定理 3.27.5 により $X\in D$ が成り立つ．

以上により条件 1, 2 は同等である．$\mathbb{B}=\mathbb{T}$ の場合，定理 3.30.25 により算法 $\Diamond$ は $(A,\mathcal{F})$ の否法である．従って定理 3.27.5 により $\mathcal{B}-\{A\}\subseteq\mathcal{D}$ が成り立つ．定理 3.30.27 により $\mathcal{B}-\{A\}=\{f^{-1}1\mid f\in\mathcal{F}\}$ であるから，$\mathcal{F}\subseteq\{1_X\mid X\in\mathcal{D}\}$ が成り立つ．

注意 3.30.10 定理 3.30.28 の同等な二条件は，暗に示したように，次の二条件とも同等である．

3. X は算法 $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ に関する A のブール部分集合であって C を含む．
4. $\preccurlyeq_{1_X}$ は算法 $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ に関するブール関係であって各 $x\in C$ に対して $\varepsilon\preccurlyeq_{1_X}x$ をみたす．

なお条件 3 に関して，定理 3.27.7 により $C=\bigcap\mathcal{D}$ が成り立つ．

問題 3.30.34 $(A,\mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は，論対 $(A,\mathcal{D})$ の恒真関係 $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ に等しい（定理 3.22.17 参照）．

略解　定理 3.30.17 により $\preccurlyeq$ が強束律に従い $(A,\mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張であり，定理 3.27.9 と定理 3.30.1 により $\preccurlyeq_{\mathcal{D}}$ が $\vDash$ を拡張する強束関係の中で最大だからである．

定理 3.30.29 $\mathcal{G} = \{1_X \mid X \in \mathcal{D}\}$ **と定めれば，**$(A, \mathcal{G})$ **は算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関する** $\mathbb{T}$ **表現論対であり，**$(A, \mathcal{F})$ **と同値で第二種以下である．**

証明　定理 3.30.28 により，$(A, \mathcal{G})$ は算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する $\mathbb{T}$ 表現論対である．問題 3.30.9 により，$(A, \mathcal{G})$ の論対化は $(A, \mathcal{D} \cup \{A\})$ であり，問題 3.26.25 により $(A, \mathcal{D} \cup \{A\})$ は $(A, \mathcal{D})$ と同値である．また，$\mathcal{D}^\cap = (\mathcal{D} \cup \{A\})^\cap$ が成り立つ．定理 3.30.25 と定理 3.27.7 により，論対 $(A, \mathcal{D})$ は $(A, \mathcal{B})$ と同値で第二種以下である．従って，$(A, \mathcal{D} \cup \{A\})$ も $(A, \mathcal{B})$ と同値で第二種以下である．以上により，$(A, \mathcal{G})$ は $(A, \mathcal{F})$ と同値で第二種以下である．

注意 3.30.11　定義 3.30.1 で $\mathbb{B}$ 値論対 $(A, \mathcal{F})$ について $\mathcal{F}$ 実例の概念を定義したが，それをここで $\mathbb{T}$ 表現論対 $(A, \mathcal{F})$ に特殊化して考える．そうすると，問題 3.30.31 により $1 \notin \mathcal{F}$ であるから，注意 3.30.2 により，$f \in \mathcal{F}$ が $X \in \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ 実例であることは $X \subseteq f^{-1}1$ なることと同等であり，f が X の $\mathcal{F}$ 反例であることは $X \subseteq f^{-1}0$ なることと同等であり，f が $(X, Y) \in \mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の $\mathcal{F}$ 実例であることは，$(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なることと同等である．

問題 3.30.35　$\mathbb{B} = \mathbb{T}$ とする．このとき，$f \in \mathcal{F}$ が A の有限部分集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ の $\mathcal{F}$ 実例であるためには，A の元 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ の $\mathcal{F}$ 実例であることが必要十分である．また，f が $\{x_1, \ldots, x_n\}$ の $\mathcal{F}$ 反例であるためには，$x_1 \vee \cdots \vee x_n$ の $\mathcal{F}$ 反例であることが必要十分である（問題 3.27.15 参照）．ただし，算法 $\wedge$ と $\vee$ を適用する順番（括弧の付け方）にはよらない．

定理 3.30.30 $\mathbb{B} = \mathbb{T}$ **の場合，**$(A, \mathcal{F})$ **が第一種であるためには** $\#\mathcal{F} \leq 1$ **なることが必要十分であり，次の四条件は同等である．**

1. $(A, \mathcal{F})$ **は第二種以下である．**
2. $\mathcal{C} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(f^{-1}1)$
3. $\{1_X \mid X \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{F}$
4. $(A, \mathcal{F})$ **の恒真関係** $\preccurlyeq$ **による** A **の任意の切断に** $\mathcal{F}$ **実例が存在する．**

証明　定理 3.30.25 により算法 $\Diamond$ は $(A, \mathcal{F})$ の否法である．また，定理 3.30.27 により $\mathcal{B} - \{A\} = \{f^{-1}1 \mid f \in \mathcal{F}\}$ と $\emptyset \notin \mathcal{B} - \{A\}$ が成り立つ．従って，定理 3.27.6 により第一種についてのことが成り立ち，$\overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(f^{-1}1)$ が成り立ち，条件 3 は $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ なることと同等である．従って定理 3.27.7 系により条件 1 – 3 は同等である

(3 $\Longrightarrow$ 4) (X, Y) を $\preccurlyeq$ による A の切断とする．そうすると，定理 3.30.17 により $\preccurlyeq$ がブール関係であるから，問題 3.22.18 により $(X \cup Y^\Diamond, \emptyset)$ が $\preccurlyeq$ による A の切断であり，従って定理 3.30.26 により，$X \cup Y^\Diamond \in \mathcal{C}$ が成り立つから，条件 2 により $X \cup Y^\Diamond$ の $\mathcal{F}$ 実例 f があり，f が (X, Y) の $\mathcal{F}$ 実例となる（問題 3.27.15 参照）．

(4 $\Longrightarrow$ 3) $X \in \mathcal{C}$ とすれば，定理 3.30.26 により $(X, \emptyset)$ が $\preccurlyeq$ による A の切断であり，従って条件 4 により $(X, \emptyset)$ の $\mathcal{F}$ 実例 f があり，f が X の $\mathcal{F}$ 実例となる．

注意 3.30.12　注意 3.30.11 により，定理 3.30.30 の条件 $\mathcal{C} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(f^{-1}1)$ は「$X \in \mathcal{P}A$ が $\mathcal{F}$ 無矛盾であるためには X に $\mathcal{F}$ 実例の存在することが必要十分である」ことを意味する．また，定理 3.30.30 の証明に記したように $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(f^{-1}1) = \overleftarrow{\mathcal{B} - \{A\}}$ が成り立つ．従って注意 3.27.3 と定理 3.30.28 によれば，定理 3.30.30 の同等な四条件はさらに次の三条件のいずれとも同等である．

5. $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{P}(f^{-1}1)$．つまり，$(A,\mathcal{F})$ の任意の無矛盾集合に $\mathcal{F}$ 実例が存在する．

6. $\{1_X \mid X \in \mathcal{D}\} = \mathcal{F}$

7. $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{P}(f^{-1}1)$ は有限的である．つまり，$X \in \mathcal{P}A$ に $\mathcal{F}$ 実例が有るためには X の有限部分集合すべてに $\mathcal{F}$ 実例の有ることが必要十分である

また，これら同等な条件の下で X を $(A,\mathcal{F})$ の無矛盾集合とするとき，$X \subseteq Y$ なる $Y \in \mathcal{D}$ が存在し，Y の定義関数が $\mathcal{F}$ に属して X の $\mathcal{F}$ 実例となる．

一般に束値論対 $(A,\mathcal{F})$ の論対化を $(A,\mathcal{B})$ とすれば，注意 3.30.2 により，$X \in \mathcal{P}A$ に $\mathcal{F}$ 実例が存在するためには $\mathcal{B}$ 実例が存在することが必要十分である．従って問題 3.27.8 により，X に $\mathcal{F}$ 実例が存在すれば X は $(A,\mathcal{F})$ の無矛盾集合である．しかしこの逆は真ではない．定理 3.30.30 と上記注意によれば，$\mathbb{T}$ 表現論対 $(A,\mathcal{F})$ のどの無矛盾集合にも $\mathcal{F}$ 実例が存在するためには，$(A,\mathcal{F})$ が第二種以下であることが必要十分である．定理 5.7.1 によれば，第三種の $\mathbb{T}$ 表現論対が存在する．従って，$\mathbb{T}$ 表現論対 $(A,\mathcal{F})$ の無矛盾集合に $\mathcal{F}$ 実例が存在するとは限らない．

定理 3.30.31 $(A,\mathcal{F}')$ **を算法** $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ **についてのもう一つのブール表現論対とすれば，次の五条件は同等である．**

1. $(A,\mathcal{F})$ **は** $(A,\mathcal{F}')$ **に覆われる．**

2. $(A,\mathcal{F})$ **の恒真関係は** $(A,\mathcal{F}')$ **の恒真関係に含まれる．**

3. $(A,\mathcal{F})$ **の核は** $(A,\mathcal{F}')$ **の核に含まれる．**

4. $(A,\mathcal{F})$ **の矛盾元は** $(A,\mathcal{F}')$ **の矛盾元でもある．**

5. $(A,\mathcal{F})$ **の矛盾集合は** $(A,\mathcal{F}')$ **の矛盾集合でもある．**

従って $(A,\mathcal{F})$ **が** $(A,\mathcal{F}')$ **と同値であるためには，**$(A,\mathcal{F})$ **と** $(A,\mathcal{F}')$ **の恒真関係が等しいことも，**$(A,\mathcal{F})$ **と** $(A,\mathcal{F}')$ **の核が等しい（つまり** $(A,\mathcal{F})$ **と** $(A,\mathcal{F}')$ **が弱同値である）ことも，**$(A,\mathcal{F})$ **と** $(A,\mathcal{F}')$ **の矛盾元全体が等しいこととも，**$(A,\mathcal{F})$ **と** $(A,\mathcal{F}')$ **の矛盾集合全体が等しいこととも，いずれも必要十分である．**

証明　$(1 \Longrightarrow 5)$ 問題 3.27.1 による．

$(5 \Longrightarrow 4)$ これは自明である．

$(4 \Longrightarrow 3)$ 定理 3.30.25 と問題 3.27.25 による．

$(3 \Longrightarrow 2)$ $(A,\mathcal{F})$ と $(A,\mathcal{F}')$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ と $\preccurlyeq'$ は，定理 3.30.17 により共にブール関係であって問題 3.30.1 により「$\varepsilon \preccurlyeq x \implies \varepsilon \preccurlyeq' x$」をみたすから，定理 3.21.16 により $\preccurlyeq \subseteq \preccurlyeq'$ をみたす．

$(2 \Longrightarrow 1)$ $(A,\mathcal{F}')$ の偏恒真関係 $\vDash$ が $(A,\mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash'$ に含まれるから，問題 3.30.11 により $(A,\mathcal{F})$ は $(A,\mathcal{F}')$ に覆われる．

問題 3.30.36 定理 3.30.31 において $(1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 1)$ の順に証明せよ．

略解　$(4 \Longrightarrow 5)$ X を $(A,\mathcal{F})$ の矛盾集合とすれば，定理 3.30.26 により，X のある有限部分集合 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ が $(A,\mathcal{F})$ の矛盾集合であり，従って $x_1 \wedge\cdots\wedge x_n$ は $(A,\mathcal{F})$ の矛盾元であり，従ってこれは $(A,\mathcal{F}')$ の矛盾元でもあり，従って $\{x_1,\ldots,x_n\}$ は $(A,\mathcal{F}')$ の矛盾集合であり，従って X は $(A,\mathcal{F}')$ の矛盾集合である．

$(5 \Longrightarrow 1)$ $x_1\cdots x_n \vDash y$ とすれば，$y^{\Diamond}x_1\cdots x_n \preccurlyeq \varepsilon$，つまり $\{y^{\Diamond},x_1,\ldots,x_n\}$ が $(A,\mathcal{F})$ の矛盾集合であるから，これは $(A,\mathcal{F}')$ の矛盾集合でもあり，従って $x_1\cdots x_n \vDash' y$ が成り立つ．

3.30.4 最大 $\mathbb{T}$ 表現論対

§ この項では例 4.7.2 に記すことを踏まえ，$(A, \mathcal{F})$ **が** A **上の算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **についてブール束** $\mathbb{B}$ **上のブール表現論対であるという前項からの仮定を強め，まず** $\mathbb{B} = \mathbb{T}$ **とし，さらに** $\mathcal{F}$ **はこれらの算法についての** A **の** $\mathbb{T}$ **表現の全体であるとする．** 表題の「最大 $\mathbb{T}$ 表現論対」はその趣旨である．従って，$(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は A^* 上の $\mathbb{T}$ 表現関係すべての交わり，すなわちブール恒真関係に等しい．

問題 3.30.37 最大 $\mathbb{T}$ 表現論対 $(A, \mathcal{F})$ の論対化を $(A, \mathcal{B})$ で表せば，$\mathcal{B} - \{A\}$ は算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する A のブール部分集合の全体に等しい．

略解　定理 3.19.7 による．

補題 3.30.2 A **が算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関して普遍汎代数系であれば，これら算法についての** A^* **上の任意の弱ブール関係** $\preccurlyeq_*$ **による** A **の任意の切断** (X, Y) **に** $\mathcal{F}$ **実例が存在する．**

証明　$\preccurlyeq_*$ が弱ブール関係であるから，定理 3.22.13 により，A の $\mathbb{T}$ 表現 f で $(X, Y) \subseteq (f^{-1}1, f^{-1}0)$ なるものがある．従って注意 3.30.11 により，f は (X, Y) の $\mathcal{F}$ 実例である．

定理 3.30.32 A **が算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関して普遍汎代数系であれば，次のことが成り立つ．**

1. **弱ブール律は** $(A, \mathcal{F})$ **の特性法則である．**
2. A **上の** $\mathcal{F}$ **健全な論拠** (R, D) **の定める生成関係** $\preccurlyeq_{R,D}$ **が算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **について弱ブール関係であれば，**(R, D) **は** $\mathcal{F}$ **完全である．**
3. $(A, \mathcal{F})$ **は第二種である．**
4. $(A, \mathcal{F})$ **の任意の無矛盾集合に** $\mathcal{F}$ **実例が存在する．**

証明　A の素元 s を任意に一つとると，A の普遍性により，$\mathcal{F}$ の二元 f と g で $fs = 1 \neq gs$ なるものがある．従って $\#\mathcal{F} \geq 2$ であるから，定理 3.30.30 により $(A, \mathcal{F})$ は第一種ではない．従って結論 3 を示すには，$(A, \mathcal{F})$ が第二種以下であることを示せばいい．

定理 3.29.4 により弱ブール律は何らかの生成的法則として表される．定理 3.22.19 により $(A, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は最小の弱ブール関係である．従って弱ブール律は $(A, \mathcal{F})$ の特性法則である．従ってまた，健全な論拠 (R, D) に対し $\preccurlyeq_{R,D}$ が弱ブール関係であれば，定理 3.30.13 により (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．また，補題 3.30.2 により，$\preccurlyeq$ による A の任意の切断に $\mathcal{F}$ 実例がある．従って定理 3.30.30 により，$(A, \mathcal{F})$ は第二種以下であり，$(A, \mathcal{F})$ の任意の無矛盾集合に $\mathcal{F}$ 実例が存在する．

注意 3.30.13 定理 3.30.32 の結論 2 は次のように示すこともできる．$\preccurlyeq$ が最小弱ブール関係であるから，$\preccurlyeq_{R,D}$ が弱ブール関係であれば，$\preccurlyeq_{R,D}$ は $\preccurlyeq$ を含み，従って (R, D) は，定理 3.30.11 により $\mathcal{F}$ 充分であり，$\mathcal{F}$ 健全との仮定と合わせて $\mathcal{F}$ 完全である．

また結論 3, 4 は次のように示すこともできる．定理 3.30.28 により，各 $X \in \mathcal{D}$ の定義関数 1_X は A の $\mathbb{T}$ 表現である．$\mathcal{F}$ が A の $\mathbb{T}$ 表現の全体であるから $\{1_X \mid X \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{F}$ が成り立つ．従って定理 3.30.30 により，$(A, \mathcal{F})$ は第二種以下であり，$(A, \mathcal{F})$ の任意の無矛盾集合に $\mathcal{F}$ 実例が存在する．

定理 3.30.32 の証明で使った定理 3.22.19 より定理 3.29.6 の方が強力であるが，これを使っても定理 3.30.32 は改善されない．定理 3.22.19 と定理 3.29.6 の違いは結論に巾等律が有るか無いかだけであって $\preccurlyeq_{R,D}$ は定理 3.25.2 により巾等律に従うからである．

定理 3.30.33 ブール律は $(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ の特性法則である．また，(R, D) を A 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠とするとき，算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ について生成関係 $\preccurlyeq_{\mathrm{R},\mathrm{D}}$ が A^* 上のブール関係であることと弱ブール関係であることは同等であり，この同等な二条件の下で (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．

証明　定理 3.29.4 によりブール律は何らかの生成的法則として表される．定理 3.22.18 により，$(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は最小のブール関係である．従ってブール律は $(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ の特性法則である．定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{\mathrm{R},\mathrm{D}}$ が束律に従うから，定理 3.21.10 により，$\preccurlyeq_{\mathrm{R},\mathrm{D}}$ がブール関係であることと弱ブール関係であることは同等である．健全な論拠 (R, D) に対し $\preccurlyeq_{\mathrm{R},\mathrm{D}}$ がブール関係であれば，定理 3.30.13 により (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．　**終**

最大 $\mathbb{T}$ 表現論対 $(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ がブール恒真関係であるのに合わせて，$(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ の恒真元・論理・完全等の概念を,「ブール」を冠して**ブール恒真元・ブール論理・ブール完全**等とも呼ぶ．注意 3.29.3 で最小ブール関係をみたす式を**ブール恒真式**と呼んだのもこの伝である．

問題 3.30.38 A のブール恒真元とブール論理はそれぞれ，A を言語とする任意のブール表現論対の恒真元と論理である．

定理 3.30.34 A 上の論拠 (R, D) についての次の四条件のうち，条件 1 – 3 は同等であって条件 4 を含意する．R が modus ponens $\wp$ を含めば，条件 4 も条件 1 – 3 と同等である．

1. **(R, D) はブール完全である．**
2. **(R, D) はブール健全で生成関係 $\preccurlyeq_{\mathrm{R},\mathrm{D}}$ は A^* 上の最小ブール関係である．**
3. **(R, D) はブール健全で生成関係 $\preccurlyeq_{\mathrm{R},\mathrm{D}}$ は A^* 上のブール関係である．**
4. **(R, D) はブール健全かつブール弱完全である．**

証明　$(1 \Longrightarrow 2)$ は定理 3.30.20 と定理 3.22.18 により，$(2 \Longrightarrow 3)$ は自明であり，$(3 \Longrightarrow 1)$ は定理 3.30.33 による．定理 3.28.2 により $(1 \Longrightarrow 4)$ が成り立ち，R が $\wp$ を含めば，定理 3.30.22 により $(4 \Longrightarrow 1)$ が成り立つ．

問題 3.30.39 $(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ に随伴する式論対 $(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathcal{F}})$ は第二種以下である．また，$\vec{\mathrm{A}}$ 上の論拠 $(\vec{\mathrm{R}}, \vec{\mathrm{D}})$ が A^* 上の関係についての生成的法則としてブール律と同値であれば，$(\vec{\mathrm{R}}, \vec{\mathrm{D}})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 強完全である．

略解　前半は後半と定理 3.28.4 による．定理 3.30.10 により $(\vec{\mathrm{R}}, \vec{\mathrm{D}})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 健全である．$\vec{\mathcal{F}}$ を A^* 上の関係の集合とみなしたものは，A の $\mathbb{T}$ 表現の定めるブール関係の全体に他ならない．従って $\vec{\mathcal{F}}$ の $\vec{\mathrm{A}}$ に関する交包 $\vec{\mathcal{F}}^{\cap}$ は，A の $\mathbb{T}$ 表現の定めるブール関係の交わりの全体であり，これは定理 3.22.17 により A^* 上のブール関係の全体であり，これは $\vec{\mathrm{A}}$ の $\vec{\mathrm{D}}$ を含む $\vec{\mathrm{R}}$ 理論の全体に等しい．
別解　定理 3.30.10 と定理 3.30.23 により $(\vec{\mathrm{R}}, \vec{\mathrm{D}})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 完全である．上の論法と定理 3.29.2 により $\vec{\mathcal{F}}^{\cap}$ が概有限であることが分かるので，$(\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathcal{F}})$ は第二種以下であり，従って $(\vec{\mathrm{R}}, \vec{\mathrm{D}})$ は $\vec{\mathcal{F}}$ 強完全である．

3.30.5　完全性の意味するもの

§ 例 3.26.1 に記した事情で，形式言語の意味論には一般に $\mathbb{T}$ 値論対が現れる．そこでここでは，$\mathbb{T}$ 値論対 $(A, \mathcal{F})$ に即して，A 上の論拠 (R, D) が $\mathcal{F}$ 完全であることの意味を敷衍する．

定義 3.28.1 によれば，論拠 (R, D) が $\mathcal{F}$ 完全であるためには，$\mathcal{F}$ 健全であることが必要である．また，問題 3.28.2 と定理 3.26.5 によれば，(R, D) が $\mathcal{F}$ 健全であることは，R が $(A, \mathcal{F})$ の論理であって D が $(A, \mathcal{F})$ の核 C に含まれることと同等である．このことの意味は定理 3.30.2 から分かる．まず D が C に含まれるためには，各 $x \in D$ が任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して f 真であることが，つまり f の下での x の真理値 fx が 1 であることが必要十分である．

そこで，R が $(A, \mathcal{F})$ の論理であることの意味について説明しよう．定理 3.26.4 によれば，R が A^*, A 間の関係の族 $(R_i)_{i \in I}$ の和である場合，R が $(A, \mathcal{F})$ の論理であるためには，任意の $i \in I$ に対して R_i が $(A, \mathcal{F})$ の論理であることが必要十分である．例 3.30.1 によれば，$(A, \mathcal{F})$ が A 上の汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^{\Diamond}$，$x \Rightarrow y$ についてのブール表現論対であるとの仮定の下では，分数式に定義した二つの関係

$$\wp = \frac{x \quad x \Rightarrow y}{y} \qquad\qquad \& = \frac{x \quad y}{x \wedge y}$$

は $(A, \mathcal{F})$ の論理であり（定理 3.30.22 参照），従ってこれらの和を R とすれば，R は $(A, \mathcal{F})$ の論理である．論理学では，この例のように分数式に定義された論理の族の和を考察することが多い．そこで，分数式に定義された A^*, A 間の関係

$$\frac{x_1 \cdots x_n}{y}$$

を考え，これを改めて R で表すことにする．この R が $(A, \mathcal{F})$ の論理であるための条件は，定理 3.30.2 と定理 3.30.1 から分かる．それらによれば，R が $(A, \mathcal{F})$ の論理であるためには，R の分数式定義の分子の元 $x_1, \ldots, x_n$ がある $f \in \mathcal{F}$ について f 真であれば R の分母の元 y も f 真であることが必要十分である．特に R が算法とみなされる場合には（注意 3.24.6 参照），R が $(A, \mathcal{F})$ の論理であるためには，R が任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して f 真元を f 真元にうつすことが必要十分である．

次に，A の部分集合 B が $(A, \mathcal{F})$ の理論であることの意味について説明する．$(A, \mathcal{F})$ の最大論理を Q で表せば，定理 3.26.6 により，$(A, \mathcal{F})$ の理論は界 (A, Q) の閉部分界に他ならない．従って，B が $(A, \mathcal{F})$ の理論であれば，B の部分集合 X で $B = [X]_Q$ をみたすものがある．ただし，そういう X は一般に複数存在し，$X = B$ は極端な例である．逆に，A の任意の部分集合 X に対して，$[X]_Q$ は $(A, \mathcal{F})$ の理論である．つまり $(A, \mathcal{F})$ の理論とは，A の何らかの部分集合 X によって $[X]_Q$ と表される集合に他ならない．

集合 $[X]_Q$ の意味は定理 3.26.8 から分かる．すなわち，A の元 y が $[X]_Q$ に属すためには，

$$x_1 \cdots x_n \, Q \, y$$

なる $x_1, \ldots, x_n \in X$ のあることが必要十分である．特に X が有限集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ に等しい場合には，定理 3.26.8 により Q が偏付加律・偏巾等律・偏置換律に従うので，y が $[X]_Q$ に属すためには，$x_1 \cdots x_n \, Q \, y$ の成り立つことが必要十分である．また，定理 3.30.1 により Q は $(A, \mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ に他ならないから，$x_1 \cdots x_n \, Q \, y$ なるためには，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して条件

$$x_1, \ldots, x_n \text{ が } f \text{ の下で真なら } y \text{ も } f \text{ の下で真である}$$

のみたされることが必要十分である．

従って，数学で「理論」と呼ばれるものは，たとえば自然数論は，この節の意味での理論である（問題 3.8.1 参照）．なぜならまずそれら数学的理論は，何等かの「公理」に基づき，その公理をみたす数学的対象すべてについて成り立つ「命題」の全体を指す．それら公理の全体と命題の全体とは，何等かの形式言語 L の文の全体 A の部分集合 X と B として表される．そして，L の素元を数学的対象の成す世界へ対応付けることによって，A の各元の真偽が，すなわち A から $\mathbb{T}$ への真理値関数が定まる（第 4 章参照）．世界も，それへの素元の対応付け方も多様であるから真理値関数は一般に複数出来て，その全体を $\mathcal{F}$ とすれば，$\mathbb{T}$ 値論対 $(A, \mathcal{F})$ が出来る．そして A の元 y が B に属すためには,「理論」の意味によれば,

$$\text{任意の } x \in X \text{ 対し } fx = 1 \text{ をみたす } f \in \mathcal{F} \text{ に対しては } fy = 1$$

なる条件をみたすことが必要十分である．この条件は X が有限集合の場合には，さっき示した $y \in [X]_Q$ なるための条件と同等である．自然数論においては，X はペアノの公理系に当たり有限なので，自然数論は確かにこの節の意味での理論である．

そこで，B を $\mathbb{T}$ 値論対 $(A, \mathcal{F})$ の理論とし，$B = [X]_Q$ なる X をとる．また，(R, D) を A 上の $\mathcal{F}$ 完全な論拠とする．そうすると，定理 3.28.1 により

$$B = [X \cup D]_R$$

が成り立つ．$B = [X \cup D]_R$ であることの意味は定理 3.24.6, 定理 3.24.7, 定理 3.24.8, 問題 3.24.13 から分かる（注意 3.29.3，問題 3.30.3，問題 3.30.6 参照）．ことに問題 3.24.13 によれば，B は，界 (A, R) 上の $X \cup D$ の元を始点とする計算図の終点となり得る A の元の全体である．

以上のことを数学的理論に適用すれば，論拠の $\mathcal{F}$ 完全性の意味がよく分かる．つまり，A 上の健全な論拠 (R, D) は，数学的理論を研究する時に使う正しい推論規則と論理的真理の総体に相当する．また (A, R) 上の計算図は，その終点を成す命題をその始点を成す命題から推論規則系 R によって導き出す証明に相当する（問題 3.29.7 参照）．論拠 (R, D) が $\mathcal{F}$ 完全であれば，任意の数学的理論 B とその任意の有限公理系 X に対して，$B = [X \cup D]_R$ が成り立つ．つまり，理論 B に属す任意の命題を $X \cup D$ に属す命題から推論規則系 R によって導き出す証明が存在する．また逆に，$X \cup D$ に属す命題から推論規則系 R によって導き出される命題は理論 B に属す．これが論拠の $\mathcal{F}$ 完全性の意味である．

注意 3.30.14 (数理模型とその研究のための道具) ここでは，次節に進む前に理解しておくべき根本的な事柄を第 1 章の内容を振り返りつつ述べる．

論理学を使う様々な学問分野，たとえば哲学・数理心理学・数学基礎論・計算機理論などでは，研究者がそうと意識するにせよ意識しないにせよ，思考機械を研究対象とする．哲学・数理心理学では人間一般を思考機械とみなし，数学基礎論では数学者を思考機械とみなし（第 1.2.4 項参照），計算機理論では本当の機械を研究対象とする．そして機械を代数系と抽象するが，適当な仮定の下ではさらに，この代数系の部分系として形式言語が得られ，その形式言語上の論理学の研究が必要になる．そして論理学における意味論と演繹論は，抽象し尽くせば，何らかの束値論対 $(A, \mathcal{F})$ と A 上の論拠 (R, D) の研究となる．こういう観点からは，論対 $(A, \mathcal{F})$ の言語 A も A 上の論拠 (R, D) も思考機械の一部分の数理模型なのであり，論拠 (R, D) を研究することはこの思考機械の思考能力を研究することなのであって，(R, D) の $\mathcal{F}$ に関する完全性の研究はその重要な一部である．

ただしこの研究の際には，論対 $(A, \mathcal{F})$ や A 上の論拠 (R, D) を直接調べるのでなく，式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ や $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ の研究を経由する方がやり易いことがある．定理 3.30.13 がまさにそのことを示している．実際この定理によれば，$\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ の $\vec{\mathcal{F}}$ に関する弱完全性の証明を介して A 上の論拠 (R, D) の $\mathcal{F}$ に関する完全性を証明することができる．

しかしそうであっても，$\vec{A}$ や $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R},\vec{D})$ は，元々の研究対象であった思考機械の数理模型ではない．思考機械の数理模型は飽くまで A や A 上の論拠 (R,D) であって，$\vec{A},\vec{R},\vec{D}$ は A,R,D を研究するための道具に過ぎない．従って特に**完全性についても，**(R,D) **の** $\mathcal{F}$ **に関する完全性（修飾なしの完全性と弱完全性・強完全性・超完全性）についての結論を導くことが必要なのであり，**$(\vec{R},\vec{D})$ **の** $\vec{\mathcal{F}}$ **に関する完全性についての結論を導いて事足れりとしてはならない** [76]．

一般化して言えば，数理科学は第 1 章で説明した通り自然界の現象の数理模型を研究する学問分野であるから，数理科学者にとっては，何が研究すべき数理模型であって何が研究のための道具であるのかを見過たないようにすることが重要なのである．

以上のことを踏まえて次節に進む．

3.31　生成関係とブール関係

$ **この節を通じて，そうでないと断らない限り，**A **を空でない集合とし，**$x \wedge y$, $x \vee y$, $x^{\Diamond}$, $x \Rightarrow y$ **を** A **上の汎算法とし，**(R,D) **を** A **上の論拠・生成対とする．**また，AZ 記法・列便法を含めて第 3.19 節と同様の記法・便法を用いる．

ここでは，注意 3.30.6 の手順 2 や定理 3.30.20 の結論 1 や定理 3.30.33 と定理 3.30.32 の結論 2 の仮定の条件に焦点を合わせ，(R,D) の定める生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ が算法 $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ についてブール関係や弱ブール関係になるために (R,D) がみたすべき条件について調べる．ただし，定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{R,D}$ はすでに束律に従うので，定理 3.21.10 に記した理由でブール関係だけについて考えれば十分であり，束律以外のブール律すなわち強消去律・両限律・両補律・三導律の計八法則について調べればよく，第 3.21 節の内容を $\preccurlyeq_{R,D}$ に適用することができる．

記法を簡単にするために，$x_1,\ldots,x_m \in A$ に対して $\bigl[\{x_1,\ldots,x_m\} \cup D\bigr]_R$ を $[x_1,\ldots,x_m,D]_R$ で表す．そうすると，

$$x_1 \cdots x_m \preccurlyeq_{R,D} y_1 \cdots y_n \iff [x_1,\ldots,x_m,D]_R \supseteq [y_1,D]_R \cap \cdots \cap [y_n,D]_R$$

従って，第 3.25 節冒頭の注意と定理 3.25.1 により，次のことが成り立つ．

$$\begin{gathered} x_1 \cdots x_m \preccurlyeq_{R,D} y \iff [x_1,\ldots,x_m,D]_R \ni y \\ \varepsilon \preccurlyeq_{R,D} y \iff [D]_R \ni y \\ x_1 \cdots x_m \, R \, y \implies x_1 \cdots x_m \preccurlyeq_{R,D} y \end{gathered}$$

以下では，例 3.30.1 で定めた A^*, A 間の関係 $\wp$ と $\&$ が重要な役割を演ずる．

$$\wp = \frac{x \quad x \Rightarrow y}{y} \qquad\qquad \& = \frac{x \quad y}{x \wedge y}$$

$\wp$ は modus ponens である．例 3.30.1 によれば，$(A,\mathcal{F})$ が算法 $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ についてブール表現論対であれば，$\wp$ も $\&$ も $(A,\mathcal{F})$ の論理である．特に，$\wp$ も $\&$ もブール論理である．しかしこの節では，論対は陽には登場せず，$\wp$ と $\&$ の純粋に関係として面を問題とする．

補題 3.31.1 R **が** $\wp$ **を含めば** $\preccurlyeq_{R,D}$ **は次の二法則に従う（定理 3.21.4 参照）．**

1. $x, x \Rightarrow y \preccurlyeq_{R,D} y$ **（消去導律）**　　**2.** $\alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y \implies x\alpha \preccurlyeq_{R,D} y$ **（反転導律）**

---

[76] この意味で，たとえばいわゆるゲンツェン (Gentzen) 亜流の論理学は，いささか不満足なものである．

証明　$x, x \Rightarrow y \wp y$ かつ $\wp \subseteq R$ であるから $x, x \Rightarrow y\, R\, y$ が成り立つ．従って $\preccurlyeq_{R,D}$ は消去導律に従う．補題 3.21.8 により消去導律は反転導律と同等である．

定理 3.31.1 R **が** $\wp$ **を含むときに** $\preccurlyeq_{R,D}$ **が定理 3.21.4 の転位導律「**$x\alpha \preccurlyeq_{R,D} y \implies \alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$**」に従うためには，**$(R, D)$ **が次の三条件をみたすことが必要十分である．**

1. **任意の** $x \in A$ **に対して** $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow x$ **が成り立つ（これを導反復律と呼ぶ）．**
2. $\preccurlyeq_{R,D}$ **は反復導律** $y \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ **に従う．**
3. $x, y, z_1, \ldots, z_k \in A,\ z_1 \cdots z_k\, R\, y$ **なら，**$x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ **が成り立つ．**

証明　**必要性：**反復律と付加律により $x \preccurlyeq_{R,D} x$ と $xy \preccurlyeq_{R,D} y$ が成り立つから，転位導律の下では $\preccurlyeq_{R,D}$ は条件 1, 2 をみたす．次に条件 3 の前提の下では，$z_1 \cdots z_k \preccurlyeq_{R,D} y$ が成り立ち，これと補題 3.31.1 の消去導律に付加律と置換律を合わせて得られる $x, x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq_{R,D} z_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ に重消去律・巾等律・置換律を使えば $x, x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq_{R,D} y$ が得られ，従って転位導律の下では $x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ が成り立つ．

十分性：$x\alpha \preccurlyeq_{R,D} y$ であると仮定する．また，$\alpha = x_1 \cdots x_m$ として $S = \{x, x_1, \ldots, x_m\} \cup D$ と定める．そうすると，$x\alpha \preccurlyeq_{R,D} y$ なることは $[S]_R \ni y$ なることに他ならず，従って定理 3.24.7 により，ある非負正数 n に対して y は界 (A, R) における S の n 圏 S_n に属す．そこで，n についての帰納法により $\alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ なることを示そう．

$n = 0$ **すなわち** $y \in S$ **の場合：**条件 1 と付加律により $\alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow x$ が成り立つので，$y = x$ なら $\alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ が成り立つ．そこで $y \in \{x_1, \ldots, x_m\} \cup D$ と仮定する．そうすると，$\alpha \preccurlyeq_{R,D} y$ が成り立ち，これと条件 2 により成り立つ $y \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ に消去律を使えば，$\alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ が得られる．

$n \geq 1$ **の場合：**$z_1 \cdots z_k\, R\, y,\ z_i \in S_{n_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n - 1$ なる $z_1, \ldots, z_k \in A$ と $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_0$ がある．従って，帰納法の仮定により $\alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow z_i$ が成り立つ $(i = 1, \ldots, k)$．これと条件 3 により成り立つ $x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ に重消去律・巾等律・置換律を使えば，$\alpha \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ が得られる．

補題 3.31.2 (R, D) **が次の二条件をみたせば，**(R, D) **は定理 3.31.1 の仮定の条件 1, 2 をみたす．**

1. **任意の** $x \in A$ **に対して** $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} x^{\Diamond} \vee x$ **が成り立つ．**
2. **任意の** $x, y \in A$ **に対して** $y \preccurlyeq_{R,D} x \vee y$ **と** $x^{\Diamond} \vee y \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ **が成り立つ．**

証明　条件 1, 2 により成り立つ $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} x^{\Diamond} \vee x$ と $x^{\Diamond} \vee x \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow x$ に消去律を使えば，$\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow x$ が導かれる．条件 2 により成り立つ $y \preccurlyeq_{R,D} x^{\Diamond} \vee y$ と $x^{\Diamond} \vee y \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ に消去律を使えば，$y \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ が得られる．

補題 3.31.3 R **が** $\&$ **を含めば** $\preccurlyeq_{R,D}$ **は次の二法則に従う．**

1. $xy \preccurlyeq_{R,D} x \wedge y$
2. $x \wedge y, \beta \preccurlyeq_{R,D} \alpha \implies xy\beta \preccurlyeq_{R,D} \alpha$

証明　$xy \,\&\, x \wedge y$ かつ $\& \subseteq R$ であるから $xy\, R\, x \wedge y$，従って法則 1 が成り立つ．定理 3.21.1 により法則 1 は法則 2 と同等である．

定理 3.31.2 R **が** $\wp$ **と** $\&$ **を含み** (R, D) **が次の四条件をみたせば，**$\preccurlyeq_{R,D}$ **は算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **についてブール関係である．**

1. **任意の** $x \in A$ **に対して** $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} x^{\Diamond} \vee x$ **が成り立つ．**
2. **任意の** $x, y \in A$ **に対して次のことが成り立つ．**
$$x \wedge y \preccurlyeq_{R,D} x \quad x \wedge y \preccurlyeq_{R,D} y \quad x \preccurlyeq_{R,D} x \vee y \quad y \preccurlyeq_{R,D} x \vee y \quad x^{\Diamond} \vee y \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$$
3. **任意の** $x, y, z \in A$ **に対して** $x \vee y, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{R,D} z$ **が成り立つ．**
4. $x, y, z_1, \ldots, z_k \in A,\ z_1 \cdots z_k \, R \, y$ **なら，**$x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ **が成り立つ．**

証明　$\preccurlyeq_{R,D}$ は，定理 3.25.2 により反復律・付加律・巾等律・置換律に従い，補題 3.31.2 と条件 1, 2 により反復導律に従い，補題 3.31.1 により消去導律に従う．従って注意 3.21.4 によれば，$\preccurlyeq_{R,D}$ がブール関係であることを示すには，$\preccurlyeq_{R,D}$ が強消去律・両限律・両補律・下補導律に従うことを示せばいい．

なお定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{R,D}$ は，消去律にも従い，$\preccurlyeq_{R,D}$ を $A^* \times A$ に制限して出来る偏束関係の最大束拡張でもあり，特に劣空律にも従う．また補題 3.31.1 により $\preccurlyeq_{R,D}$ は反転導律にも従う．さらに，補題 3.31.2 と条件 1, 2, 4 により (R, D) が定理 3.31.1 の三条件をみたすので，$\preccurlyeq_{R,D}$ は転位導律にも従う．

下限律：条件 2 により $x \wedge y \preccurlyeq_{R,D} x$ と $x \wedge y \preccurlyeq_{R,D} y$ が成り立ち，補題 3.31.3 により $xy \preccurlyeq_{R,D} x \wedge y$ が成り立つ．

上限律：$\preccurlyeq_{R,D}$ は，定理 3.21.15 と条件 3 により強上限律に従うので，定理 3.21.1 により上限律にも従う．

下補導律：条件 2 により成り立つ $x^{\Diamond} \preccurlyeq_{R,D} x^{\Diamond} \vee y$ と $x^{\Diamond} \vee y \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ に消去律を使えば $x^{\Diamond} \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ が得られる．

下補律：下補導律 $x^{\Diamond} \preccurlyeq_{R,D} x \Rightarrow y$ に反転導律を使えば $xx^{\Diamond} \preccurlyeq_{R,D} y$ が得られる．y が任意であるから，劣空律により $xx^{\Diamond} \preccurlyeq_{R,D} \varepsilon$ が成り立つ．

上補律：$\preccurlyeq_{R,D}$ が上限律に従い条件 1 により $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} x^{\Diamond} \vee x$ が成り立つので，定理 3.21.1 により $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} x^{\Diamond}x$，従って $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} xx$ が成り立つ．

強消去律：$\preccurlyeq_{R,D}$ は，両限律と両補律に従うので問題 3.21.3 により両端律にも従い，既に示した通り下限律と強上限律に従う．従って定理 3.21.14 により，$\preccurlyeq_{R,D}$ は強消去律に従う．

系　R **が** $\wp$ **と** $\&$ **を含み** $[D]_R$ **が** A **の次表に示す形の元をすべて含めば，**$\preccurlyeq_{R,D}$ **は算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **についてブール関係である．**

$$\begin{array}{ll}
x^{\Diamond} \vee x & \\
(x \wedge y) \Rightarrow x & \\
(x \wedge y) \Rightarrow y & \\
x \Rightarrow (x \vee y) & \\
y \Rightarrow (x \vee y) & \\
(x^{\Diamond} \vee y) \Rightarrow (x \Rightarrow y) & \\
\big((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\big) \Rightarrow \big((x \vee y) \Rightarrow z\big) & \\
\big((x \Rightarrow z_1) \wedge \cdots \wedge (x \Rightarrow z_k)\big) \Rightarrow (x \Rightarrow y) & \qquad (z_1 \cdots z_k \, R \, y)
\end{array}$$

証明　R が $\wp$ と & を含めば，補題 3.31.1 の反転導律と補題 3.31.3 の法則が使える．従って，

$$\bigl((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\bigr) \Rightarrow \bigl((x \vee y) \Rightarrow z\bigr) \in [D]_R$$

すなわち $\varepsilon \preccurlyeq_{R,D} \bigl((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\bigr) \Rightarrow \bigl((x \vee y) \Rightarrow z\bigr)$ であることから，$x \vee y, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{R,D} z$ が導かれる．上表のその他の元が $[D]_R$ に属すことから同様にして，定理 3.31.2 の四条件がすべてみたされることが示される．従って $\preccurlyeq_{R,D}$ はブール関係である．

系 2 $R = \wp \cup \&$ **とし，**$[D]_R$ **が** A **の次表に示す形の元（これらを算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **についての** A **のブール元と呼ぶ）をすべて含むとすれば，**$\preccurlyeq_{R,D}$ **は算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **についてブール関係である．**

$$\begin{aligned}
&x^{\Diamond} \vee x \\
&(x \wedge y) \Rightarrow x \\
&(x \wedge y) \Rightarrow y \\
&x \Rightarrow (x \vee y) \\
&y \Rightarrow (x \vee y) \\
&(x^{\Diamond} \vee y) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \\
&\bigl((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\bigr) \Rightarrow \bigl((x \vee y) \Rightarrow z\bigr) \\
&\bigl((z \Rightarrow x) \wedge (z \Rightarrow y)\bigr) \Rightarrow \bigl(z \Rightarrow (x \wedge y)\bigr) \\
&\bigl((z \Rightarrow x) \wedge \bigl(z \Rightarrow (x \Rightarrow y)\bigr)\bigr) \Rightarrow (z \Rightarrow y)
\end{aligned}$$

証明　$R = \wp \cup \&$ であるから，$z_1 \cdots z_k \, R \, y$ なることは，$z_1 \cdots z_k \, \wp \, y$ または $z_1 \cdots z_k \, \& \, y$ なることと同等である．従って，前系の表の $\bigl((x \Rightarrow z_1) \wedge \cdots \wedge (x \Rightarrow z_k)\bigr) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ に当たるものは

$$\bigl((x \Rightarrow y) \wedge \bigl(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)\bigr)\bigr) \Rightarrow (x \Rightarrow z) \qquad \bigl((x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)\bigr) \Rightarrow \bigl(x \Rightarrow (y \wedge z)\bigr)$$

である．これらの元の表記と並べ方を少し変えたものが上表である．従ってこの系が成り立つ．

注意 3.31.1 定理 3.31.2 系 2 の表の下三種の元には，いろいろな元を代用することができる．たとえば，$\bigl((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\bigr) \Rightarrow \bigl((x \vee y) \Rightarrow z\bigr)$ には $(x \vee y) \Rightarrow \Bigl(\bigl((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\bigr) \Rightarrow z\Bigr)$ を代用することもでき，$\bigl((z \Rightarrow x) \wedge (z \Rightarrow y)\bigr) \Rightarrow \bigl(z \Rightarrow (x \wedge y)\bigr)$ には $(z \Rightarrow x) \Rightarrow \bigl((z \Rightarrow y) \Rightarrow \bigl(z \Rightarrow (x \wedge y)\bigr)\bigr)$ を代用することもでき，$\bigl((z \Rightarrow x) \wedge \bigl(z \Rightarrow (x \Rightarrow y)\bigr)\bigr) \Rightarrow (z \Rightarrow y)$ には $\bigl(z \Rightarrow (x \Rightarrow y)\bigr) \Rightarrow \bigl((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)\bigr)$ を代用することもできる．

問題 3.31.1 算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ について，ブール元とその注意 3.31.1 における代用元はいずれもブール恒真元である．また定理 3.31.2 系の表の下端の元は，R がブール論理ならばブール恒真元である（問題 3.30.38 参照）．

略解　任意のブール関係 $\preccurlyeq$ をとる．そうすると定理 3.21.4 により，$\preccurlyeq$ は特に転位導律と消去導律に従う．転位導律と定理 3.21.5 により $\varepsilon \preccurlyeq (x^{\Diamond} \vee y) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ が成り立つ．また，消去導律・付加律・置換律により $x, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq z$ と $y, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq z$ が成り立つから，定理 3.21.1 により $x \vee y, (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z) \preccurlyeq z$，従って転位導律により $\varepsilon \preccurlyeq \bigl((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\bigr) \Rightarrow \bigl((x \vee y) \Rightarrow z\bigr)$ が成り立つ．また，R がブール論理で $z_1 \cdots z_k \, R \, y$ であれば，$z_1 \cdots z_k \preccurlyeq y$ が成り立ち，これと消去導律・付加律・置換律により得られる $x, x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq z_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ に重消去律・巾等律・置換律を使えば $x, x \Rightarrow z_1, \cdots, x \Rightarrow z_k \preccurlyeq y$ が得られ，従って定理 3.21.2 と転位導律により $\varepsilon \preccurlyeq \bigl((x \Rightarrow z_1) \wedge \cdots \wedge (x \Rightarrow z_k)\bigr) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ が成り立つ．

例 3.31.1 $R=\wp\cup\&$ とし，D を算法 $\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow$ についての A のブール元の全体とすれば，定理 3.31.2 系 2 により $\preccurlyeq_{R,D}$ はブール関係であり，そのことから次の各式を容易に導くことができる．

$$y\preccurlyeq_{R,D}x\Rightarrow y \qquad\qquad x\Rightarrow y,y\Rightarrow z\preccurlyeq_{R,D}x\Rightarrow z \qquad\qquad x\wedge y\preccurlyeq_{R,D}y\wedge x$$

すなわち次のことが導かれる．

$$[y,D]_R\ni x\Rightarrow y \qquad\qquad [x\Rightarrow y,y\Rightarrow z,D]_R\ni x\Rightarrow z \qquad\qquad [x\wedge y,D]_R\ni y\wedge x$$

そして $[y,D]_R\ni x\Rightarrow y$ なることと問題 3.24.13 により，界 (A,R) 上の計算図で $x\Rightarrow y$ を終点として始点集合が $\{y\}\cup D$ に含まれるものが存在するはずであり，$[x\Rightarrow y,y\Rightarrow z,D]_R\ni x\Rightarrow z$ なることや $[x\wedge y,D]_R\ni y\wedge x$ なることやその他のことについても同様である．そういう計算図を求める一般的手順については分かっていないが，上記の三式に対応する計算図は以下のように求まる．

$$\dfrac{\dfrac{y \quad y\Rightarrow(x^{\Diamond}\vee y)}{x^{\Diamond}\vee y} \qquad (x^{\Diamond}\vee y)\Rightarrow(x\Rightarrow y)}{x\Rightarrow y}$$

従ってまた，$[y\Rightarrow z,D]_R\ni x\Rightarrow(y\Rightarrow z)$ なることに対応する計算図は，上の計算図の y を $y\Rightarrow z$ に変えれば得られる．下の計算図で点線を使って示したのはそれである．

$$\dfrac{\dfrac{x\Rightarrow y \qquad \dfrac{\dfrac{y\Rightarrow z \quad \cdots}{\vdots}}{x\Rightarrow(y\Rightarrow z)}}{(x\Rightarrow y)\wedge\big(x\Rightarrow(y\Rightarrow z)\big)} \qquad \Big((x\Rightarrow y)\wedge\big(x\Rightarrow(y\Rightarrow z)\big)\Big)\Rightarrow(x\Rightarrow z)}{x\Rightarrow z}$$

下の計算図では $z=\big((x\wedge y)\Rightarrow y\big)\wedge\big((x\wedge y)\Rightarrow x\big)$ とする．

$$\dfrac{x\wedge y \qquad \dfrac{\dfrac{(x\wedge y)\Rightarrow y \quad (x\wedge y)\Rightarrow x}{z} \qquad z\Rightarrow\big((x\wedge y)\Rightarrow(y\wedge x)\big)}{(x\wedge y)\Rightarrow(y\wedge x)}}{y\wedge x}$$

問題 3.31.2 例 3.31.1 に倣って次の三式に対応する計算図を見つけよ．

$$x^{\Diamond}\preccurlyeq_{R,D}x\Rightarrow y \qquad\qquad xx^{\Diamond}\preccurlyeq_{R,D}y \qquad\qquad x\vee y\preccurlyeq_{R,D}y\vee x$$

補題 3.31.4 D を A の部分集合とし，$[D]_{\wp}$ が A の

$$y\Rightarrow(x\Rightarrow y) \qquad\qquad \big(z\Rightarrow(x\Rightarrow y)\big)\Rightarrow\big((z\Rightarrow x)\Rightarrow(z\Rightarrow y)\big)$$

なる形の元をすべて含むと仮定する（右側の形の元について注意 3.31.1 参照）．このとき $\preccurlyeq_{\wp,D}$ は次の法則に従う．ただし記号 $\asymp_{\wp,D}$ は，$\preccurlyeq_{\wp,D}$ の $A\times A$ への制限の対称核を表す．

1. $y\preccurlyeq_{\wp,D}x\Rightarrow y$ **（反復導律）**

2. $\varepsilon\preccurlyeq_{\wp,D}x\Rightarrow x$ **（導反復律）**

3. $x\alpha\preccurlyeq_{\wp,D}y \implies \alpha\preccurlyeq_{\wp,D}x\Rightarrow y$ **（転位導律）**

4. $x \Rightarrow (x \Rightarrow y) \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$（**導巾等律**）

5. $x \Rightarrow y, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow z$（**推移導律**）

6. $x \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x'$，$y \asymp_{\wp,\mathrm{D}} y' \implies x \Rightarrow y \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x' \Rightarrow y'$（**導両立律**）

$[\mathrm{D}]_\wp$ **がさらに** A **の** $(y^\Diamond \Rightarrow x^\Diamond) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ **なる形の元をすべて含めば，**$\preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}}$ **は次の法則に従う．**

7. $x^\Diamond \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$（**下補導律**）

8. $x^{\Diamond\Diamond} \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x$（**重補律**）

9. $y^\Diamond \Rightarrow x^\Diamond \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$（**対偶律**）

10. $x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y \implies y^\Diamond \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^\Diamond$（**補逆転律**）

11. $y \Rightarrow x, y^\Diamond \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$（**上補導律**）

注意 3.31.2 導両立律は関係 $\asymp_{\wp,\mathrm{D}}$ が算法 $\Rightarrow$ と両立することを示すに他ならない．またブール関係 $\preccurlyeq$ については，$\varepsilon \preccurlyeq y \Rightarrow (y \vee y^\Diamond)$ と $\varepsilon \preccurlyeq y^\Diamond \Rightarrow (y \vee y^\Diamond)$ が成り立つので，上補導律から消去律などにより上補律 $\varepsilon \preccurlyeq yy^\Diamond$ が導かれる．これが「導両立律」「上補導律」の名の由来である．なお，$\bigl(z \Rightarrow (x \Rightarrow y)\bigr) \Rightarrow \bigl((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)\bigr)$ には $(z \Rightarrow x) \Rightarrow \bigl((z \Rightarrow (x \Rightarrow y)) \Rightarrow (z \Rightarrow y)\bigr)$ を代用することができる．

証明　$\preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}}$ は，この節冒頭に記した通り束律に従い，補題 3.31.1 により反転導律に従う．従って，$\asymp_{\wp,\mathrm{D}}$ は同値関係である．また，$y \Rightarrow (x \Rightarrow y) \in [\mathrm{D}]_\wp$ との仮定により次のことが成り立つ．

$$\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y \Rightarrow (x \Rightarrow y) \tag{3.31.1}$$

また，$\bigl(z \Rightarrow (x \Rightarrow y)\bigr) \Rightarrow \bigl((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)\bigr) \in [\mathrm{D}]_\wp$ との仮定と反転導律により次のことが成り立つ．

$$z \Rightarrow x,\ z \Rightarrow (x \Rightarrow y) \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} z \Rightarrow y \tag{3.31.2}$$

1. (3.31.1) から反転導律により反復導律 $y \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$ を得る．

2. (3.31.1) により $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow (x \Rightarrow x)$ と $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow \bigl((x \Rightarrow x) \Rightarrow x\bigr)$ が成り立って (3.31.2) により $x \Rightarrow (x \Rightarrow x), x \Rightarrow \bigl((x \Rightarrow x) \Rightarrow x\bigr) \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow x$ が成り立つから，消去律により導反復律 $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow x$ を得る．

3. (3.31.2) と 1, 2 により $(\wp, \mathrm{D})$ が定理 3.31.1 の三条件をみたすので，$\preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}}$ は転位導律にも従う．

4. (3.31.2) により成り立つ $x \Rightarrow x, x \Rightarrow (x \Rightarrow y) \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$ と導反復律に消去律を使って，導巾等律 $x \Rightarrow (x \Rightarrow y) \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$ を得る．

5. 反復導律により $y \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$ が成り立って (3.31.2) により $x \Rightarrow y, x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow z$ が成り立つから，消去律により推移導律 $x \Rightarrow y, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow z$ を得る．

6. $x \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x'$，$y \asymp_{\wp,\mathrm{D}} y'$ と仮定する．そうすると，転位導律により $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x' \Rightarrow x$ と $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y \Rightarrow y'$ が成り立つ．また，推移導律により $x' \Rightarrow x, x \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x' \Rightarrow y$ と $x' \Rightarrow y, y \Rightarrow y' \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x' \Rightarrow y'$ が成り立つ．これらに消去律を使って $x \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x' \Rightarrow y'$ を得る．同様に $x' \Rightarrow y' \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$ を得るから，$x \Rightarrow y \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x' \Rightarrow y'$ となる．つまり導両立律が成り立つ．

以下，$[\mathrm{D}]_\wp$ がさらに $(y^\Diamond \Rightarrow x^\Diamond) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ なる形の元をすべて含むと仮定する．そうすると $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} (y^\Diamond \Rightarrow x^\Diamond) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$，従って反転導律により次のことが成り立つ．

$$y^\Diamond \Rightarrow x^\Diamond \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y \tag{3.31.3}$$

7. 反復導律により $x^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}$ が成り立つ．これと (3.31.3) に消去律を使って下補導律 $x^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$ を得る．

8. $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y$ なる y をとる（そういう y はある）．下補導律により $x^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond}$ が成り立って (3.31.3) により $x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y \Rightarrow x$ が成り立つから，消去律により $x^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y \Rightarrow x$，従って反転導律により $yx^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ が成り立つ．これと $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y$ に消去律を使って $x^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ を得る．ここで x を $x^{\Diamond}$ で置き換えてから転位導律を使えば $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond\Diamond\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}$ が得られ，他方で (3.31.3) により $x^{\Diamond\Diamond\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow x^{\Diamond\Diamond}$ が成り立つから，消去律により $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow x^{\Diamond\Diamond}$，従って反転導律により $x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond\Diamond}$ を得る．以上により重補律 $x^{\Diamond\Diamond} \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x$ が成り立つ．

9. 重補律と導両立律により $x \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond\Diamond}$ が成り立ち (3.31.3) により $x^{\Diamond\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}$ が成り立つから，消去律により $x \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}$ を得る．これと (3.31.3) を合わせれば対偶律 $y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond} \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$ となる．

10. $x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y$ であれば，転位導律により $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \Rightarrow y$ が成り立ち，これと対偶律により成り立つ $x \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}$ に消去律を使って $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}$，従って反転導律により $y^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond}$ を得る．

11. 対偶律により $y \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond}$ が成り立ち，推移導律により $x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond}, y^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow x$ が成り立つ．従って $x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ を示せば，消去律により上補導律 $y \Rightarrow x, y^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ が得られる（$x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ は逆に上補導律から導反復律と消去律により得られる）．

$x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ は以下のように示される．(3.31.3) と反転導律により $x^{\Diamond}, x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond\Diamond}$ が成り立ち，下補導律により $x^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond}$ が成り立つ．これらに消去律を使って $x^{\Diamond}, x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond}$，従って転位導律により $x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow (x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond})$ を得る．さらに，導巾等律により $x^{\Diamond} \Rightarrow (x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond}) \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond}$ が成り立ち，(3.31.3) により $x^{\Diamond} \Rightarrow y^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y \Rightarrow x$ が成り立つ．これら三式に消去律を使って $x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y \Rightarrow x$，従って反転導律により $y, x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ を得る．従って $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} y$ なる y をとっておけば，消去律により $x^{\Diamond} \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x$ を得る．

定理 3.31.3　**D を A の部分集合とし，$[\mathrm{D}]_{\wp}$ が A の次表に示す形の元（これらを算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ についての A のルカシェヴィチ元と呼ぶ[77]）をすべて含むと仮定する．**

$$
\begin{aligned}
& y \Rightarrow (x \Rightarrow y) \\
& \bigl(z \Rightarrow (x \Rightarrow y)\bigr) \Rightarrow \bigl((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)\bigr) \\
& (y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \\
& (x \vee y) \Rightarrow (x^{\Diamond} \Rightarrow y) \\
& (x^{\Diamond} \Rightarrow y) \Rightarrow (x \vee y) \\
& (x \wedge y) \Rightarrow (x \Rightarrow y^{\Diamond})^{\Diamond} \\
& (x \Rightarrow y^{\Diamond})^{\Diamond} \Rightarrow (x \wedge y)
\end{aligned}
$$

このとき，$[\mathrm{D}]_{\wp}$ は算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ についての A のブール元をすべて含み，法則 $xy \preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}} x \wedge y$ が成り立ち，$\preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}}$ はブール関係である．

証明　$\preccurlyeq_{\wp,\mathrm{D}}$ は束律に従い，補題 3.31.1 により反転導律に従い，上記の表の上三種の元が $[\mathrm{D}]_{\wp}$ に属すとの仮定により，補題 3.31.4 の十一法則とその証明中の (3.31.2) にも従う．また，$\asymp_{\wp,\mathrm{D}}$ は同値関係である．さらに，上記の表の下四種の元が $[\mathrm{D}]_{\wp}$ に属すとの仮定により，$\asymp_{\wp,\mathrm{D}}$ は

$$x \vee y \asymp_{\wp,\mathrm{D}} x^{\Diamond} \Rightarrow y \tag{3.31.4}$$

[77]「ルカシェヴィチ」は，この表の上三種の形の元を考案したルカシェヴィチ (Jan Lukasiewicz) に因む．

$$x \wedge y \asymp_{\wp,D} (x \Rightarrow y^{\Diamond})^{\Diamond} \tag{3.31.5}$$

なる二法則に従う．(3.31.4) により $x^{\Diamond} \vee y \asymp_{\wp,D} x^{\Diamond\Diamond} \Rightarrow y$ が成り立ち，重補律と導両立律により $x^{\Diamond\Diamond} \Rightarrow y \asymp_{\wp,D} x \Rightarrow y$ が成り立つ．これらに消去律を使って

$$x^{\Diamond} \vee y \asymp_{\wp,D} x \Rightarrow y \tag{3.31.6}$$

を得る．従って $x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond} \asymp_{\wp,D} x \Rightarrow y^{\Diamond}$ が成り立ち，これと補逆転律により $(x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond} \asymp_{\wp,D} (x \Rightarrow y^{\Diamond})^{\Diamond}$ が成り立ち，これと (3.31.5) に消去律を使って

$$(x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond} \asymp_{\wp,D} x \wedge y \tag{3.31.7}$$

を得る．以上のことを使って，$\preccurlyeq_{\wp,D}$ が次の十一法則に従うことを示そう．

1. $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \vee x$
2. $x \wedge y \preccurlyeq_{\wp,D} x$
3. $x \wedge y \preccurlyeq_{\wp,D} y$
4. $x \preccurlyeq_{\wp,D} x \vee y$
5. $y \preccurlyeq_{\wp,D} x \vee y$
6. $x^{\Diamond} \vee y \preccurlyeq_{\wp,D} x \Rightarrow y$
7. $x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,D} (x \vee y) \Rightarrow z$
8. $z \Rightarrow x, z \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,D} z \Rightarrow (x \wedge y)$
9. $z \Rightarrow x,\ z \Rightarrow (x \Rightarrow y) \preccurlyeq_{\wp,D} z \Rightarrow y$
10. $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \preccurlyeq_{\wp,D} (x \wedge y) \Rightarrow z$
11. $xy \preccurlyeq_{\wp,D} x \wedge y$

法則 1 – 10 により，ブール元がすべて $[D]_{\wp}$ に属すことが分かる．例えば，法則 7 に転位導律を使えば $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} (x \Rightarrow z) \Rightarrow \big((y \Rightarrow z) \Rightarrow \big((x \vee y) \Rightarrow z\big)\big)$ が得られ，これと法則 10 と消去律により $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} \big((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\big) \Rightarrow \big((x \vee y) \Rightarrow z\big)$，すなわち $\big((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\big) \Rightarrow \big((x \vee y) \Rightarrow z\big) \in [D]_{\wp}$ が得られる．従って定理 3.31.2 系 2 により，$\preccurlyeq_{\wp\cup\&,D}$ はブール関係である．他方で法則 11 と消去律により，$\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} x$ かつ $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} y$ なら $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} x \wedge y$ が成り立つ．つまり $[D]_{\wp}$ は & で閉じているから，$[D]_{\wp} = [D]_{\wp\cup\&}$ が成り立つ．任意の $\alpha \in A^*$ に対し，$[\alpha \cup D]_{\wp}$ もルカシェヴィチ元をすべて含むから $[\alpha \cup D]_{\wp} = [\alpha \cup D]_{\wp\cup\&}$ を得る．従って偏生成関係について $\wp^D = (\wp \cup \&)^D$ が成り立ち，従ってさらに定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{\wp,D} = \preccurlyeq_{\wp\cup\&,D}$ が成り立つ．従って $\preccurlyeq_{\wp,D}$ もブール関係である

そこで以下，$\preccurlyeq_{\wp,D}$ が法則 1 – 11 に従うことを示す．ただし，法則の番号とは違う順番で行なう．

9. 法則 9 は (3.31.2) に他ならない．

6. (3.31.6) により特に第六法則 $x^{\Diamond} \vee y \preccurlyeq_{\wp,D} x \Rightarrow y$ が成り立つ．

1. (3.31.6) によりまた特に $x \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \vee x$ が成り立つ．これと導反復律に消去律を使って第一法則 $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \vee x$ を得る．

4. 重補律により $x \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond\Diamond}$ が成り立ち，下補導律により $x^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \Rightarrow y$ が成り立ち，(3.31.4) により $x^{\Diamond} \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,D} x \vee y$ が成り立つ．これら三式に消去律を使って $x \preccurlyeq_{\wp,D} x \vee y$ を得る．

5. 反復導律により $y \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \Rightarrow y$ が成り立ち，(3.31.4) により $x^{\Diamond} \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,D} x \vee y$ が成り立つ．これらに消去律を使って $y \preccurlyeq_{\wp,D} x \vee y$ を得る．

2. 法則 4 により $x^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond}$ が成り立ち，これと補逆転律により $(x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond\Diamond}$ が成り立ち，これと (3.31.7) と重補律により成り立つ $x \wedge y \preccurlyeq_{\wp,D} (x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond}$ と $x^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} x$ に消去律を使って $x \wedge y \preccurlyeq_{\wp,D} x$ を得る．

3. 法則 5 により $y^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond}$ が成り立ち，これと補逆転律により $(x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} y^{\Diamond\Diamond}$ が成り立ち，これと (3.31.7) と重補律により成り立つ $x \wedge y \preccurlyeq_{\wp,D} (x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond}$ と $y^{\Diamond\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} y$ に消去律を使って $x \wedge y \preccurlyeq_{\wp,D} y$ を得る．

7. (3.31.4) により $x \vee y \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \Rightarrow y$ が成り立ち，推移導律により $x^{\Diamond} \Rightarrow y, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \Rightarrow z$ が成り立ち，上補導律により $x \Rightarrow z, x^{\Diamond} \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,D} z$ が成り立つ．これら三式に消去律を使って $x \vee y, x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,D} z$，従って転位導律により $x \Rightarrow z, y \Rightarrow z \preccurlyeq_{\wp,D} (x \vee y) \Rightarrow z$ を得る．

8. 法則 7 により $x^{\Diamond} \Rightarrow z^{\Diamond}, y^{\Diamond} \Rightarrow z^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} (x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond}) \Rightarrow z^{\Diamond}$ が成り立ち，対偶律により $z \Rightarrow x \preccurlyeq_{\wp,D} x^{\Diamond} \Rightarrow z^{\Diamond}$ と $z \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,D} y^{\Diamond} \Rightarrow z^{\Diamond}$ と $(x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond}) \Rightarrow z^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} z^{\Diamond\Diamond} \Rightarrow (x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond}$ が成り立ち，重補律と (3.31.7) と導両立律により $z^{\Diamond\Diamond} \Rightarrow (x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond} \preccurlyeq_{\wp,D} z \Rightarrow x \wedge y$ が成り立つ．これらに消去律を使って $z \Rightarrow x, z \Rightarrow y \preccurlyeq_{\wp,D} z \Rightarrow (x \wedge y)$ を得る．

11. 反復導律により $x \preccurlyeq_{\wp,D} z \Rightarrow x$ と $y \preccurlyeq_{\wp,D} z \Rightarrow y$ が成り立つ．これと法則 8 に消去律を使って $xy \preccurlyeq_{\wp,D} z \Rightarrow (x \wedge y)$，従って反転導律により $zxy \preccurlyeq_{\wp,D} x \wedge y$ を得る．従って z を $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} z$ なるようとっておけば，消去律により $xy \preccurlyeq_{\wp,D} x \wedge y$ を得る．

10. $x \preccurlyeq_{\wp,D} z$ かつ $y \preccurlyeq_{\wp,D} z$ であれば，転位導律により $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} x \Rightarrow z$ と $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} y \Rightarrow z$ が成り立ち，これと法則 7 に消去律を使って $\varepsilon \preccurlyeq_{\wp,D} (x \vee y) \Rightarrow z$，従って反転導律により $x \vee y \preccurlyeq_{\wp,D} z$ を得る．つまり次のことが成り立つ．

$$x \preccurlyeq_{\wp,D} z,\ y \preccurlyeq_{\wp,D} z \implies x \vee y \preccurlyeq_{\wp,D} z$$

そこで $w = x \vee (y \vee z)$ とすれば，法則 4, 5 と消去律により $x \preccurlyeq_{\wp,D} w$，$y \preccurlyeq_{\wp,D} w$，$z \preccurlyeq_{\wp,D} w$ が成り立つから，上記のことによりまず $x \vee y \preccurlyeq_{\wp,D} w$，次に $(x \vee y) \vee z \preccurlyeq_{\wp,D} w$ を得る．すなわち $(x \vee y) \vee z \preccurlyeq_{\wp,D} x \vee (y \vee z)$ が成り立つ．逆の $x \vee (y \vee z) \preccurlyeq_{\wp,D} (x \vee y) \vee z$ も同様に示せるから，

$$x \vee (y \vee z) \asymp_{\wp,D} (x \vee y) \vee z \qquad (\vee \text{ 結合律})$$

が成り立つ．そこで，次のように推論して法則 10 を証明することができる．

$$\begin{aligned}
x \Rightarrow (y \Rightarrow z) &\asymp_{\wp,D} x \Rightarrow (y^{\Diamond} \vee z) && ((3.31.6) \text{ と導両立律による}) \\
&\asymp_{\wp,D} x^{\Diamond} \vee (y^{\Diamond} \vee z) && ((3.31.6) \text{ による}) \\
&\asymp_{\wp,D} (x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond}) \vee z && (\vee \text{ 結合律による}) \\
&\asymp_{\wp,D} (x^{\Diamond} \vee y^{\Diamond})^{\Diamond} \Rightarrow z && ((3.31.4) \text{ による}) \\
&\asymp_{\wp,D} (x \wedge y) \Rightarrow z && ((3.31.7) \text{ と導両立律による})
\end{aligned}$$

系　**D を A の部分集合とし，$[D]_{\wp}$ が A の次の形の元をすべて含むと仮定する（これらを算法 $\Diamond, \Rightarrow$ についての A のルカシェヴィチ元と呼ぶ）．**

$$\begin{gathered}
y \Rightarrow (x \Rightarrow y) \\
\bigl(z \Rightarrow (x \Rightarrow y)\bigr) \Rightarrow \bigl((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)\bigr) \\
(y^{\Diamond} \Rightarrow x^{\Diamond}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)
\end{gathered}$$

また，任意の $x, y \in A$ に対して

$$x \vee y = x^{\Diamond} \Rightarrow y \qquad x \wedge y = (x \Rightarrow y^{\Diamond})^{\Diamond} \tag{3.31.8}$$

が成り立つと仮定する．このとき，定理 3.31.3 と同じ結論が成り立つ..

証明　補題 3.31.4 により $\preccurlyeq_{\wp,D}$ が導反復律に従うから，$x \vee y = x^{\Diamond} \Rightarrow y$ と $x \wedge y = (x \Rightarrow y^{\Diamond})^{\Diamond}$ が成り立つとの仮定により，$[D]_{\wp}$ は算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ についてのルカシェヴィチ元をすべて含む．従ってこの系が成り立つ．

注意 3.31.3 この節では A 上に汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^\Diamond$, $x \Rightarrow y$ があると仮定したが，代わりに A 上に汎算法 $x^\Diamond$ と $x \Rightarrow y$ があると仮定してから，これらを使って A 上の汎算法 $x \vee y$ と $x \wedge y$ を (3.31.8) により定義すれば，A 上に汎算法 $x \wedge y$, $x \vee y$, $x^\Diamond$, $x \Rightarrow y$ があって当然に (3.31.8) が成り立つから，さらに D を A の部分集合として $[D]_\wp$ が算法 $\Diamond, \Rightarrow$ についての A のルカシェヴィチ元をすべて含むと仮定すれば，定理 3.31.3 系により定理 3.31.3 と同じ結論が成り立つ．

問題 3.31.3 定理 3.31.3 系において，$(x \Rightarrow y^\Diamond)^\Diamond$ を $(x^\Diamond \vee y^\Diamond)^\Diamond$ で置き換えても同じ結論が成り立つ．

問題 3.31.4 算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ についての A のルカシェヴィチ元はいずれもブール恒真元である．

定理 3.31.4 算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ についての A のブール元の全体とルカシェヴィチ元の全体をそれぞれ B と L で表す．このとき，A 上の論拠 $(\wp \cup \&, B)$ と $(\wp, L)$ は共にブール完全であり，従って互いに同値，すなわち偏生成関係について $(\wp \cup \&)^B = \wp^L$ が成り立つ（定理 3.25.5 参照）．

証明　例 3.30.1 と問題 3.31.1 と問題 3.31.4 により，$(\wp \cup \&, B)$ も $(\wp, L)$ もブール健全である．また，定理 3.31.2 系 2 により $\preccurlyeq_{\wp \cup \&, B}$ がブール関係であり，定理 3.31.3 により $\preccurlyeq_{\wp, L}$ がブール関係である．従って定理 3.30.34 により $(\wp \cup \&, B)$ と $(\wp, L)$ は共にブール完全である．

3.32　量系と測度

$ 論理学においては一般に，限量をどう扱うかが重要課題の一つとなる．この節では，第 5 章以降で論ずる格論理学において限量を扱うために必要な概念について説明する．

3.32.1　量と量系

§ この項では，長さ・容量・質量などの量概念のもととなる代数系について説明する．

定義 3.32.1 可換単位半群 P 上の線形順序関係 $\leq$ が次の二条件 ad, ps をみたすとき，P は $\leq$ に関して**量系**であると言う [78]．ただし，半群 P の算法と単位元を $+$ と 0 で表す．

ad. P の二元 a, b が $a \leq b$ をみたせば，任意の $c \in P$ に対して $a + c \leq b + c$ が成り立つ．

ps. P の任意の元 a に対して $0 \leq a$ が成り立つ（つまり 0 は P の最小元である）．

また，量系に最大元があるときは，それを ∞ で表す．

注意 3.32.1 格論理学においては将来，定義 3.32.1 の $\leq$ を線形順序関係とは限らぬ任意の順序関係とすることによって量系の概念を広げることになるだろう．そう広げた場合，定義 3.32.1 の意味での狭義の量系は**線形量系**と呼ぶ．たとえば，P が上束で最小元を持てば，P は結法 $\vee$ と上束順序関係 $\leq$ について広義の量系である．特に，任意の集合 S の巾集合 $\mathcal{P}S$ は，結法 $\cup$ と包含関係 $\subseteq$ について広義の量系である．

問題 3.32.1 条件 ad は，次のいずれの条件にも置き換えられる．ただし，P の二元 a, b が $a \leq b$ かつ $a \neq b$ をみたすことを $a < b$ で表す．

[78]記号「ad」「ps」は「additive」「positive」に因む．

ad-1. 関係 $\leq$ が算法 $+$ と両立する．

ad-2. P の二元 a, b がある $c \in P$ に対して $a + c < b + c$ をみたせば，$a < b$ が成り立つ．

また，量系においては，任意の元 a, b について次のことが成り立つ．

1. $b \leq a + b$.
2. $a + b = 0$ なら $a = b = 0$.
3. $0a \leq 1a \leq 2a \leq \cdots$.
4. $a \leq b$ なら $na \leq nb$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

また，量系 P の元 a が P の最大元であるためには，任意の $b \in P$ に対して $b + a = a$ をみたすことが必要十分である．

例 3.32.1 非負実数の全体 $\mathbb{R}_0$ に加法 $+$ だけを与えて代数系としたものの台部分系で 0 を含むものを $(\mathbb{R}_0, +)$ **系**と呼ぶ．たとえば $\mathbb{R}_0$ 自身や $\{0\}$ や非負整数の全体 $\mathbb{Z}_0$ や非負有理数の全体 $\mathbb{Q}_0$ は $(\mathbb{R}_0, +)$ 系である．$(\mathbb{R}_0, +)$ 系は数の大小関係 $\leq$ に関して量系になる．また，任意の単元集合は，唯一の方法で量系とみなせて，そうみなしたものは $\{0\}$ と同形である（「同形」の定義は省略する）．

問題 3.32.2 量系 P の部分半群 Q に単位元があれば，Q は制限順序関係について量系である．従って P の任意の部分半群 Q に対して，$Q \cup \{0\}$ は制限順序関係について量系である．

略解　Q の単位元を e とすれば，任意の $a \in Q$ に対して $e \leq a + e = a$，従って e は Q の最小元である．

問題 3.32.3 量系 P の元 a に対して，P の区間 $[0a]$ が P の部分半群であるためには，$a + a = a$ なることが必要十分である．また，P の区間 $[a\rightarrow)$ は P の部分半群であり，これに単位元があるためには，任意の元 $b \in [a\rightarrow)$ に対して $a + b = b$ なることが必要十分である．

略解　$[a\rightarrow)$ に単位元 e があれば，$e \leq a + e = a$，従って $e = a$ が成り立ち，従って任意の元 $b \in [a\rightarrow)$ に対して $a + b = b$ が成り立つ．

例 3.32.2 可換単位半群 P 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ が P の算法 $+$ と両立するとき，$\sqsubseteq$ の対称核を $\equiv$ で表せば，問題 3.9.55 により $\equiv$ は P 上の同値関係であり，やはり P の算法 $+$ と両立する．従って，類別写像 $/\!\equiv$ による P の元あるいは部分集合 X の像を $\overline{X}$ で表せば，定理 3.11.2 により，$\overline{P}$ 上の算法 $+$ を次のように定義することができる．

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$$

そして，定理 3.13.2 系により $\overline{P}$ は可換半群であり，P の単位元 0 の像 $\overline{0}$ は $\overline{P}$ の単位元である．また，問題 3.9.55 により $\overline{P}$ 上の順序関係 $\leq$ を

$$\overline{a} \leq \overline{b} \iff a \sqsubseteq b$$

と定義することができ，$\leq$ は $\overline{P}$ の算法と両立する．さらに任意の $a, b \in P$ に対して $a \sqsubseteq b$ と $b \sqsubseteq a$ のどちらかが成り立つなら，$\leq$ は線形順序関係であり，さらにまた任意の $a \in P$ に対して $0 \sqsubseteq a$ が成り立つなら，$\overline{0}$ は $\overline{P}$ の最小元であり，従って $\overline{P}$ は量系である．

問題 3.32.4 P を線形順序関係 $\leq$ に関する量系とし，$\leq$ と任意にとった P の元 m を用いて，P 上の関係 $\leq_m$ を次のように定義する．

$$a \leq_m b \iff a \leq b \text{ または } m \leq b$$

この $\leq_m$ は P の算法と両立する擬順序関係であり，任意の $a, b \in P$ に対して $a \leq_m b$ と $b \leq_m a$ のどちらかが成り立ち，任意の $a \in P$ に対して $0 \leq_m a$ が成り立つ．従って，例 3.32.2 の一般論を $P, \leq_m$ に適用して新しい量系を作ることができる（出来た量系を P_m で表し P の m **切り捨て**と呼ぶ）．そして，$\leq_m$ の対称核を $=_m$ で表せば，

$$a =_m b \iff a = b \text{ または } m \leq \min\{a, b\}$$

が成り立つ．また，P の区間 $[0, m]$ と P_m は，写像 $a \mapsto a/{=_m}$ により同順である．

定理 3.32.1 二つの量系 P, P' に対して，直和 $P \amalg P'$ を作り，P, P' の算法 $+$ と順序関係 $\leq$ を次のように $P \amalg P'$ の算法と順序関係に拡張する．すなわち，任意の $a \in P,\ a' \in P'$ に対して

$$a + a' = a' + a = a' \qquad\qquad a \leq a' \qquad\qquad a' \nleq a$$

そうすると $P \amalg P'$ は量系になる．

これを P, P' の量系としての**直和**と呼び $P \oplus P'$ で表す（問題 3.9.7 参照）．特に，量系 P と単元集合 $\{\infty\}$ を量系とみなしたものとの直和 $P \oplus \{\infty\}$ を P_∞ でも表す．なお，P_∞ においては ∞ が最大元になる．

証明　$P \amalg P'$ 上の算法 $+$ については，P の単位元 0 が単位元になることは明らかである．この算法が可換律 $a + b = b + a$ に従うことを確かめるには，P と P' それぞれの中では可換律に従うから a, b の一方が P に属し他方が P' に属す場合を考えればいいが，その場合，$a + b$ と $b + a$ は共に，a, b の中の P' に属す方に等しい．従って $+$ は可換律に従う．次に，$+$ が結合律

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{3.32.1}$$

に従うことを確かめる．P と P' それぞれの中では結合律に従うから，a, b, c がすべて P に属す場合とすべて P' に属す場合は考えなくていい．a, b, c の中の一つが P' に属し他の二つが P に属す場合は，(3.32.1) の両辺とも a, b, c の中の P' に属す元に等しい．a, b, c の中の二つが P' に属し他の一つが P に属す場合は，(3.32.1) の両辺とも a, b, c の中の P' に属す元に P' の算法 $+$ を適用したものに等しい．以上により，$P \amalg P'$ が可換単位半群であることが分かった．

$P \amalg P'$ 上の関係 $\leq$ は問題 3.9.7 の辞書式直和であるが，これが順序関係であることを確かめる．$\leq$ が反射律に従うことは，P と P' それぞれの中では反射律に従うことから直ちに分かる．$P \amalg P'$ の二元 a, b が $a \leq b$ と $b \leq a$ をみたせば，$a, b \in P$ または $a, b \in P'$ であり，P または P' の中での反対称律により $a = b$ が成り立つ．つまり，$\leq$ は反対称律に従う．次に，$\leq$ が推移律

$$a \leq b \text{ かつ } b \leq c \implies a \leq c$$

に従うことを確かめる．P と P' それぞれの中では推移律に従うから，a, b, c がすべて P に属す場合とすべて P' に属す場合は考えなくていい．従ってまた，$a \in P'$ の場合と $c \in P$ の場合は考えなくていい．$a \in P$ かつ $c \in P'$ の場合には，b の如何によらずに $a \leq c$ が成り立つ．これで $\leq$ が順

序関係であることが分かった．P の元同士も P' の元同士も P と P' の元も比較可能だから，$\leq$ は線形順序関係である（第 3.33.2 項参照）．

$P \amalg P'$（と P）の単位元 0 が $P \amalg P'$ の最小元であるから，$P \amalg P'$ は条件 ps をみたす（対照的に，P' の単位元 $0'$ は $P \amalg P'$ においては P の上界である）．そこで最後に，条件 ad すなわち

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

が成り立つことを確かめる．P と P' それぞれの中では条件 ad が成り立つから，a, b, c がすべて P に属す場合とすべて P' に属す場合は考えなくていい．そこで，$a, b \in P$ の場合には $c \in P'$ としてよく，この場合 $a + c = c = b + c$ が成り立つ．また，$a, b \in P'$ の場合には $c \in P$ としてよく，この場合 $a + c = a \leq b = b + c$ が成り立つ．残るのは $a \in P$，$b \in P'$ の場合である．この場合，$c \in P$ なら $a + c \in P$ だから $a + c \leq b = b + c$ が成り立つ．$c \in P'$ なら，P' が条件 ad, ps をみたすことより，$a + c = c = 0' + c \leq b + c$ が成り立つ．

問題 3.32.5 量系 P の元 a が次の二条件をみたすとする．

1. $a \leq b$ なる任意の $b \in P$ に対して $a + b = b$ が成り立つ．
2. $a = b + c$ なる $b, c \in P$ は a に限る．

このとき，P の区間 $[0a)$ と $[a\rightarrow)$ は P の算法と順序に関して量系であり，$P = [0a) \oplus [a\rightarrow)$ が成り立つ．

略解　条件 1 により特に $a + a = a$ であるから，問題 3.32.3 により $[0a]$ は部分半群であるが，条件 2 のために $[0a)$ も部分半群である．従って問題 3.32.2 により $[0a)$ と $[a\rightarrow)$ は量系である．また，$b \in [0a)$，$c \in [a\rightarrow)$ なら，$c \leq b + c \leq a + c = c$，従って $b + c = c$ が成り立つ．

次の定理は水村泰明氏の東京大学 2000 年度修士論文「論理体系 MCL の完全性」の一補題である．

定理 3.32.2 Q が量系 P の有限生成部分半群であれば，Q は制限順序関係について整列集合である．

証明　$b_1, \ldots, b_k$ を Q の有限生成系とし，k についての帰納法を使う．$b_1 \geq b_j$ $(j = 2, \ldots, k)$ と仮定していい．$k = 1$ であれば，$Q = \{nb_1 \mid n = 1, 2, \ldots\}$ であるから，問題 3.32.1 により整列集合 $\mathbb{N}$ から Q への全射の増写 $n \mapsto nb_1$ があり，従って問題 3.9.30 により Q は整列集合である．そこで $k > 1$ と仮定し，$b_2, \ldots, b_k$ の生成する部分半群を Q' で表す．そうすると，帰納法の仮定により Q' は整列集合である．再び問題 3.9.30 によれば，Q の任意の下方閉区間 $(\leftarrow c]$ が整列集合であることを示せばいい．$c = n_1 b_1 + \cdots + n_k b_k$ なる $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_0$ があり，$n_0 = n_1 + \cdots + n_k$ と定めれば，問題 3.32.1 により $c \leq n_0 b_1$ が成り立つ．任意の $a \in (\leftarrow c]$ をとると，$a = nb_1 + a'$，$n \in \mathbb{Z}_0$，$a' \in Q'$ と書けるが，$a \leq c$ であるから，さらに n を $n \leq n_0$ なるようにすることができる．なぜなら $n_0 < n$ であれば，問題 3.32.1 により $c \leq n_0 b_1 \leq n b_1 \leq n b_1 + a' = a$，従って $a = c = n_1 b_1 + \cdots + n_k b_k$ となって $n_1 \leq n_0$ だからである．従って，$Q'_n = \{nb_1 + a' \mid a' \in Q'\}$ $(n = 0, \ldots, n_0)$ と定めれば，$(\leftarrow c] \subseteq \bigcup_{n=0}^{n_0} Q'_n$ が成り立つ．各 $n \in \{0, \ldots, n_0\}$ に応じて整列集合 Q' から Q'_n への全射の増写 $a' \mapsto nb_1 + a'$ があるから，問題 3.9.30 により $(\leftarrow c]$ は確かに整列集合である．

定義 3.32.2 量系 P がさらに次の条件 st をみたすとき，P は**厳密な量系**であると言う [79]．

[79]記号「st」は「strict」に因む．

st. P の二元 a, b がある $c \in P$ に対して $a + c = b + c$ をみたせば，$a = b$ が成り立つ．

問題 3.32.6 可換単位半群 P がその上の線形順序関係 $\leq$ に関して厳密な量系であるためには，$\leq$ が条件 ps と次の三条件のいずれかをみたすことが必要十分である（問題 3.9.27 参照）．

st-1. P の二元 a, b が $a < b$ をみたせば，任意の $c \in P$ に対して $a + c < b + c$ が成り立つ．

st-2. P の元 a, b, a', b' が $a < b$ かつ $a' \leq b'$ をみたせば，$a + a' < b + b'$ が成り立つ．

st-3. P の二元 a, b がある $c \in P$ に対して $a + c \leq b + c$ をみたせば，$a \leq b$ が成り立つ．

また，厳密な量系においては，任意の元 a, b について次の四つのことが成り立つ．

1. $0 < a$ なら $b < a + b$.
2. $0 < a$ なら $0a < 1a < 2a < \cdots$.
3. $a < b$ なら $na < nb$ $(n = 1, 2, \ldots)$.
4. $na \leq nb$ なる $n \in \mathbb{N}$ があれば $a \leq b$.

例 3.32.3 先ほど例にあげた量系の中では，$(\mathbb{R}_0, +)$ 系はすべて厳密である．しかし量系の直和 $P \oplus P'$ は厳密ではない．実際，$a \in P$ とし $0'$ を P' の単位元とすれば，$a \neq 0'$ であって $a + 0' = 0' = 0' + 0'$ が成り立つ．

問題 3.32.7 最大元を持ち $\{0\}$ と異なる量系は厳密でない．特に問題 3.32.4 の m 切り捨て P_m は，$m \neq 0$ なら厳密ではない．

問題 3.32.8 厳密な量系 P の単位元を含む P の部分半群は，P の順序に関して厳密な量系である．

問題 3.32.9 厳密な量系の直積半群は，辞書式直積順序関係に関して厳密な量系である．しかし厳密でない量系の直積半群は，辞書式直積順序関係に関しては，量系とさえならないことがある．

定義 3.32.3 量系 P の元 e が次の条件 qu をみたすとき，e を P の**量単位**と呼ぶ [80]．

qu. P の二元 a, b が $a < b$ をみたせば，$na < me \leq nb$ なる自然数 m, n が存在する．

量単位を持つ厳密な量系を**実量系**と呼ぶ（その理由は定理 3.32.3 を見れば分かるであろう）．

例 3.32.4 $\mathbb{P}$ を $(\mathbb{R}_0, +)$ 系とし $0 \neq e \in \mathbb{P}$ とすれば，$\mathbb{R}$ における $\mathbb{Q}$ の稠密性により，$\mathbb{P}$ は e を量単位とする実量系である．そこで以後，1 を含む $(\mathbb{R}_0, +)$ 系は，原則として 1 を量単位とする実量系とみなす．なお，$\{0\}$ も実量系である．また，例 3.32.5 で示す通り，厳密な量系であるが実量系でないものが存在する．

問題 3.32.10 $\{0\}$ と異なる量系の量単位 e は $0 < e$ をみたす．

ここでこれまでの諸定義の背景を説明しよう．

太さの無い剛体の棒（これを以後は**線分**と呼ぶ）すべてからなる集合 P について考える．ただし，違う位置にあっても動かしてぴったり重ね合わせられる線分は同じものとみなす（私たちは普段そういう見方を実際にすることが多い）．また便宜上，一点も線分とみなす．点はすべて重ね合わせられるから，点を線分とみなしたものは唯一つに定まる．これを 0 で表す．

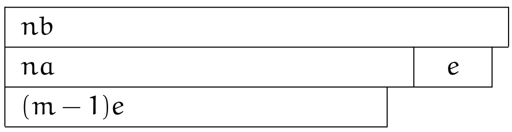
[80] 記号「qu」は「quantitative unit」に因む．

P の二元 a, b をつなげて出来る線分を $a+b$ で表す．線分 a, a' がぴったり重なり線分 b, b' がぴったり重なれば，a と b をつなげた線分と a' と b' をつなげた線分とは，やはりぴったり重なるであろう（この背景説明のあちこちで「であろう」と書くのは，数学の話をしているのではなく直感を話しているからである）．従って $a+b$ の定義は，重なる線分を同一視することと矛盾しない．そして，P は算法 $+$ に関して可換半群になり，0 はこの半群の単位元になるであろう．P が可換半群になるのは，同じ取り合わせの線分はどういう順でつなげても同じ線分になるからである．

また，P の二元 a, b を重ねたときにぴったり重なるかまたは b の方がはみ出る場合，$a \le b$ と書く．そうすると，$\le$ は P における線形順序関係になるであろう．実際，線分 a, b が相異なるなら，すなわちぴったり重ならなければ，重ねたとき一方がはみ出て他方ははみ出ないであろう．つまり，a, b は比較可能であり，$\le$ は反対称律に従う．また，a より b がはみ出て b より線分 c がはみ出れば，a より c がはみ出るであろう．つまり，$\le$ は推移律に従う．

また，一点ではない線分 e を任意にとる．そうすると，P は e を量単位とする実量系になるであろう．実際，線分 a, b が $a < b$ をみたすなら，つまり重ねたときに b がはみ出るなら，a, b に同じ線分 c をつなげて出来る線分 $a+c$ と $b+c$ を重ねたとき，$b+c$ の方がはみ出るであろう．つまり，条件 st-1 が成り立つ．また，任意の線分 a を一点 0 と重ねれば，a が一点でない限り a の方がはみ出るであろう．つまり，条件 ps が成り立つ．また，線分 a より線分 b がはみ出るとき，a を n 本つなげて出来る線分 na と b を同じく n 本つなげて出来る線分 nb を重ねれば，nb の方がはみ出し，はみ出す部分は n が増えると共に増えて，遂には，そのはみ出す部分に線分 e がすっぽり入るであろう．つまり，na に e をつなげても nb を越えない．そういう n に対して，$(m-1)e \le na$

図 3.11: $na < me \le nb$ の図．見やすくするために線分に太さを付す．



をみたす最大の自然数 m があるであろう．そういう m をとれば，m の最大性により $na < me$ となり，また，$me = (m-1)e + e \le na + e \le nb$ であるから $me \le nb$ が成り立つ．つまり，条件 qu が成り立つ．

要するに，私たちが重なり合う線分を同じものとみなして線分をつなぎ合わせたり重ねて比較したりするとき，そこには実量系が存在しているのである．

一般化して大雑把に言えば，何らかの種類の物体の何らかの属性を実際にか仮想的にか比較することができて，それらの物体の間で「つなげる」とか「くっつける」とかの操作が実際にか仮想的にか可能であれば，そこに実量系が存在する．ただし，実量系が存在しても，まだそこには「量」という数値は存在していない．

しかし実は，さっきの線分の作る実量系からは「長さ」という数値が定まり，その他の色々な実量系から「容量」「質量」などの数値が定まる [81]．その仕組みを説明するのが次の定理である．この定理は，実量系は $(\mathbb{R}_0, +)$ 系に限ることを示すと同時に，実量系があればそこに「量」なる数値が存在することを示す．

定義 3.32.4 P_i が e_i を量単位とする実量系であり $(i = 1, 2)$，$f \in P_1 \to P_2$ が半群としての準写で

[81] たとえば，滑りブロックを空気溝の上で衝突させて比較すれば，ある実量系が出来，この実量系から質量という数値が定まる．岩波書店刊「ファインマン物理学（I. 力学）」第 10-3 節に，このことが暗示的に書いてある．第 3.32.1 項の内容は，実は，これに触発されて出来たものである．

あると同時に真増写であり，かつ $fe_1 = e_2$ をみたすとき，f は P_1 から P_2 への実量系としての**埋め込み写像**であると言う．f がさらに全射であるとき，f は実量系としての**同写**であると言う．二つの実量系の間に同写が存在するとき，それら実量系は**同形**であると言う．

定理 3.32.3 **P が $\{0\}$ と異なる実量系で e がその量単位であれば，P から $\mathbb{R}_0$ への実量系としての埋め込み写像が，すなわち写像 $f \in P{\to}\mathbb{R}_0$ で次の三条件をみたすものが唯一つ存在する（この写像を P の e 計量写像と呼ぶ）．**

1. **P の任意の二元 a, b について $f(a+b) = fa + fb$ が成り立つ．**
2. **P の任意の二元 a, b について「$a \leq b \iff fa \leq fb$」が成り立つ．**
3. **$fe = 1$ が成り立つ．**

また，各 $a \in P$ と各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{Z}_0$ の元 a_n で $a_n e \leq na < (a_n + 1)e$ なるものが唯一つ存在し（こういう数列 $\{a_n\}$ を a の e 近似列と呼ぶ），次の式が成り立つ．

$$fa = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

問題 3.32.11 量系 P と写像 $f \in P{\to}\mathbb{R}_0$ について，定理 3.32.3 の条件 1 の下で，$f0 = 0$ および任意の $a \in P$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(na) = n(fa)$ が成り立つ．また定理 3.32.3 の条件 2 は，P の任意の二元 a, b について「$a < b \iff fa < fb$」の成り立つことと同等である（問題 3.9.27 参照）．

定理 3.32.3 の証明　(A) から (G) までの七段階に分ける．なお，問題 3.32.10 により $0 < e$ である．

(A)　各 $a \in P$ に対して，$(m-1)e \leq a < me$ なる自然数 m が唯一つ存在する．

証明　$m < m'$ なる自然数 m と m' とが $(m-1)e \leq a < me$ と $(m'-1)e \leq a < m'e$ とをみたせば，$m \leq m'-1$ であるから問題 3.32.1 により $a < me \leq (m'-1)e \leq a$ となって矛盾である．従って，$(m-1)e \leq a < me$ なる自然数 m は高々一つしか存在しない．

上記の通り $0 < e$ であるから，$(1-1)e = 0 < 1e$ が成り立つ．つまり，$m = 1$ とすれば $(m-1)e \leq 0 < me$ が成り立つ．そこで $0 \neq a \in P$ なる任意の a をとる．そうすると，条件 ps により $0 < a$ であるから，条件 st-1 により $a < 2a$，従って条件 qu により $na < m'e \leq n(2a)$ なる自然数 m', n が存在し，問題 3.32.1 により $a \leq na$ であるから $a < m'e$ が成り立つ．そこで $a < me$ なる最小の自然数 m をとる．$a < (m-1)e$ とすれば，条件 ps により $m > 1$，従って $m-1$ も自然数となって m の最小性に反する．$\leq$ が線形順序関係であるから，$(m-1)e \leq a$ が成り立つ．

(B)　各 $a \in P$ に対して非負有理数から成る集合 $\mathbb{Q}_a$ を

$$\mathbb{Q}_a = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}_0,\ n \in \mathbb{N},\ me \leq na \right\}$$

と定めれば，$0 \in \mathbb{Q}_a$ が成り立つ．また，$\mathbb{Q}_a$ の元 s を $s = k/l$ $(k \in \mathbb{Z}_0,\ l \in \mathbb{N})$ と書けば，$ke \leq la$ が成り立つ．

証明　条件 ps により $0e = 0 \leq a = 1a$ であるから，$0 = 0/1 \in \mathbb{Q}_a$ が成り立つ．

$s \in \mathbb{Q}_a$ であるから，$s = m/n$，$me \leq na$ なる $m \in \mathbb{Z}_0$，$n \in \mathbb{N}$ が存在する．そして，問題 3.32.1 により $l(me) \leq l(na)$ すなわち $(lm)e \leq (ln)a$ が成り立つ．他方で，$s = k/l = m/n$ であるから，$nk = lm$，従って $(nk)e = (lm)e$ が成り立つ．これら二式によって $(nk)e \leq (ln)a$，すなわち $n(ke) \leq n(la)$ が成り立つから，問題 3.32.6 によって $ke \leq la$ が成り立つ．

(C)　各 $a \in P$ に対して，$r \notin \mathbb{Q}_a$ なる非負有理数 r が存在し，そういう r はすべて，$\mathbb{Q}_a$ の $\mathbb{R}$ における上界である．

証明　(A) により $a < m'e$ なる自然数 m' が存在し，$m'e \leq 1a$ が成り立たないから，(B) により $m' = m'/1 \notin \mathbb{Q}_a$ が成り立つ．従って，$r \notin \mathbb{Q}_a$ なる非負有理数 r は存在する．そういう r を任意にとる．(B) により $r > 0$ だから，$r = k/l$ $(k, l \in \mathbb{N})$ と書ける．

$0 \neq s \in \mathbb{Q}_a$ なる $s \in \mathbb{Q}_a$ を任意にとる．$s = m/n$，$me \leq na$ なる自然数 m, n が存在し，問題 3.32.1 により $k(me) \leq k(na)$，すなわち $(km)e \leq (kn)a$ が成り立つ．他方で，$r \notin \mathbb{Q}_a$ であって $\leq$ が線形順序関係だから，$la < ke$ が成り立ち，$m \in \mathbb{N}$ であるから，問題 3.32.6 により $m(la) < m(ke)$，すなわち $(ml)a < (km)e$ が成り立つ．これら二つの不等式により $(ml)a < (kn)a$ が成り立つから，問題 3.32.1 により $ml < kn$，すなわち $s < r$ が成り立つ．

(D)　各 $a \in P$ に対して，(B) により $\mathbb{Q}_a \neq \emptyset$ であって (C) により $\mathbb{Q}_a$ は $\mathbb{R}$ において上に有界であるから，$\mathbb{Q}_a$ の $\mathbb{R}$ における上限が存在する．それを Fa で表す．また，(A) により，各 $a \in P$ と各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{Z}_0$ の元 a_n で $a_n e \leq na < (a_n + 1)e$ なるものが唯一つ存在する．これらについて次の式が成り立つ．

$$Fa = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

また，$a \leq b$ なら $Fa \leq Fb$ が成り立つ．

証明　$\mathbb{Q}_a$ の定義により $a_n/n \in \mathbb{Q}_a$ であり，(B) により $(a_n + 1)/n \notin \mathbb{Q}_a$ であるから，Fa の定義と (C) により

$$\frac{a_n}{n} \leq Fa \leq \frac{a_n + 1}{n} \qquad \text{すなわち} \qquad 0 \leq Fa - \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

が成り立つ．これから極限の式が得られる．

$a \leq b$ なら，問題 3.32.1 により，任意の自然数 n に対して $na \leq nb$ が成り立ち，従って $\mathbb{Q}_a \subseteq \mathbb{Q}_b$ が成り立ち，従って F の定義により $Fa \leq Fb$ が成り立つ．

(E)　P の任意の二元 a, b について $F(a + b) = Fa + Fb$ が成り立つ．また，$Fe = 1$ が成り立つ．

証明　n を任意の自然数とする．そうすると，

$$a_n e \leq na < (a_n + 1)e \qquad\qquad b_n e \leq nb < (b_n + 1)e$$

が成り立つから，問題 3.32.6 により次の式が成り立つ．

$$(a_n + b_n)e \leq n(a + b) < (a_n + b_n + 2)e$$

また，$\leq$ は線形順序関係だから，次の二つの場合に分かれる（問題 3.9.23 参照）．

$$n(a + b) < (a_n + b_n + 1)e \qquad\qquad (a_n + b_n + 1)e \leq n(a + b)$$

前の場合なら $(a + b)_n = a_n + b_n$ であり，後の場合なら $(a + b)_n = a_n + b_n + 1$ である．従って $a_n + b_n \leq (a + b)_n \leq a_n + b_n + 1$ すなわち

$$\frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n} \leq \frac{(a + b)_n}{n} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{b_n}{n} + \frac{1}{n}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ として (D) を使えば $F(a + b) = Fa + Fb$ なることが分かる．また，$0 < e$ であったから問題 3.32.6 により $ne \leq ne < (n + 1)e$，従って $e_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるから，やはり (D) により $Fe = 1$ なることが分かる．

(F)　P の任意の二元 a, b について「$a \leq b \iff Fa \leq Fb$」が成り立つ．

証明　$\leq$ が線形順序関係であって (D) により F が増写であるから，問題 3.9.27 によれば，F が単射であることを示せばいい．そこで,「$a < b$ かつ $Fa = Fb$」と仮定して矛盾を導く．

この仮定の下では，まず条件 qu により

$$na < me \leq nb$$

なる自然数 m, n が存在する．そして，$\mathbb{Q}_b$ の定義と (B) により次のことが成り立つ．

$$m/n \in \mathbb{Q}_b - \mathbb{Q}_a$$

従って，(C) と Fa, Fb の定義により $Fa \leq m/n \leq Fb$ が成り立ち，$Fa = Fb$ との仮定と合わせて

$$Fa = Fb = \frac{m}{n} \tag{3.32.2}$$

を得る．従ってまた次のことが成り立つ．

$$Fa \notin \mathbb{Q}_a \tag{3.32.3}$$

(3.32.2) により $Fb = m/n$ であることに留意して，$Fb = k/l$ なる自然数 k, l を任意にとる．そうすると，(E) により

$$F(ke) = k(Fe) = k = l(Fb) = F(lb)$$

が成り立つ．従って，もしも $ke < lb$ なら，a, b をそれぞれ ke, lb に置き換えてさっきの論法を使うことができて，特に (3.32.3) により $k = F(ke) \notin \mathbb{Q}_{ke}$ を得る．しかし，$ke \leq ke$ だから $k \in \mathbb{Q}_{ke}$ は成り立つ．これは矛盾であるから $ke < lb$ は成り立たない．他方，$k/l = Fb = m/n \in \mathbb{Q}_b$ であるから，(B) により $ke \leq lb$ は成り立つ．従って

$$ke = lb \tag{3.32.4}$$

でなければならない．$Fb = m/n$ であるから，特に $me = nb$ が成り立つ．また，そもそも $na < me$ であった．従って条件 st-1 により $nb + na < me + me$，すなわち次の式が成り立つ．

$$n(b + a) < 2me$$

他方で，$a < b$ なる仮定と条件 st-1 により $2a < b + a$ が成り立つ．また，(E) と (3.32.2) により

$$F(2a) = Fa + Fa = \frac{2m}{n} = Fb + Fa = F(b + a)$$

が成り立つ．従って，a, b をそれぞれ $2a$, $b + a$ で置き換えて以上の論法を使うことができる．特に，$F(b + a) = 2m/n$ であるから，(3.32.4) により $(2m)e = n(b + a)$ を得る．これは矛盾である．

(G)　以上により，写像 $F \in P \to \mathbb{R}_0$ が定理 3.32.3 の三条件 1, 2, 3 をみたすことが分かったが，逆に，これらの条件をみたす写像 $f \in P \to \mathbb{R}_0$ は F に限る．

証明　任意の $a \in P$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ をとる．$a_n e \leq na < (a_n + 1)e$ であるから，問題 3.32.11 を使って次のように計算することができる．

$$\begin{aligned} a_n = a_n(fe) = f(a_n e) &\leq f(na) = n(fa) \\ &< f\big((a_n + 1)e\big) = (a_n + 1)(fe) = a_n + 1 \end{aligned}$$

従って $a_n/n \leq fa < (a_n + 1)/n$ であり，(D) により $fa = \lim_{n\to\infty} a_n/n = Fa$ が成り立つ．

系　**$\{0\}$ と異なる実量系は 1 を含む $(\mathbb{R}_0,+)$ 系と同形である．**

証明　P を $\{0\}$ と異なる実量系とし，e をその量単位とする．そうすると，定理 3.32.3 の三条件 1, 2, 3 をみたす写像 $f \in P{\to}\mathbb{R}_0$ が存在する．f の像 fP を $\mathbb{P}$ で表す．そうすると，条件 1 と問題 3.32.11 により $\mathbb{P}$ は $(\mathbb{R}_0,+)$ 系であり，条件 3 により $1 \in \mathbb{P}$ が成り立つ．また，条件 1, 2, 3 により，f は P から $\mathbb{P}$ への実量系としての同写である．

系 2　**実量系においては，0 と異なる任意の元が量単位になる．**

証明　P を実量系とし $0 \neq e \in P$ とする．そうすると系により，P から $(\mathbb{R}_0,+)$ 系 $\mathbb{P}$ への同写 f が存在する．問題 3.32.11 により $0 = f0 \neq fe \in \mathbb{P}$ であるから，例 3.32.4 により fe は $\mathbb{P}$ の量単位となる．そこで，P の二元 a, b が $a < b$ をみたせば，$fa < fb$ であるから，自然数 m, n で $n(fa) < m(fe) \leq n(fb)$ なるものが存在し，問題 3.32.11 により $f(na) < f(me) \leq f(nb)$，従ってまた問題 3.32.11 により $na < me \leq nb$ が成り立つ．つまり，e は P の量単位である．

問題 3.32.12　量系 P とその元 e に対して写像 $f \in P{\to}\mathbb{R}_0$ で定理 3.32.3 の三条件 1, 2, 3 をみたすものがあれば，P は $\{0\}$ と異なり e を量単位とする実量系であり，f は P の e 計量写像である．

略解　定理 3.32.3 系 2 の証明と同様である．すなわちまず，$fe = 1 \neq 0 = f0$ だから $e \neq 0$，特に $P \neq \{0\}$ が成り立つ．次に，P の元 a, b, c が $a + c = b + c$ をみたせば，$fa + fc = fb + fc$ であるから $fa = fb$，従って $a = b$ が成り立つ．つまり，P は厳密である．P の二元 a, b が $a < b$ をみたせば，$fa < fb$，$fe = 1$ であるから，自然数 m, n で $n(fa) < m(fe) \leq n(fb)$ なるものが存在し，$f(na) < f(me) \leq f(nb)$，従って $na < me \leq nb$ が成り立つ．つまり，e は P の量単位である．

問題 3.32.13　$\mathbb{P}$ を $(\mathbb{R}_0,+)$ 系とし $0 \neq e \in \mathbb{P}$ とすれば，例 3.32.4 により $\mathbb{P}$ は e を量単位とする実量系であるが，さらに $\mathbb{P}$ の e 計量写像 $f \in \mathbb{P}{\to}\mathbb{R}_0$ は，任意の $x \in \mathbb{P}$ に対して $fx = xe^{-1}$ をみたす．

略解　この式で定義される写像 f が e 計量写像の三条件をみたし，e 計量写像が唯一つだからである．

問題 3.32.14　$\{0\}$ と異なる実量系 P が条件 qu より強い「$0 < a$ なら $me = na$ をみたす自然数 m, n がある」なる条件をみたすなら，P から $\mathbb{Q}_0$ への埋め込み写像がある．また，P がさらに強い「$0 < a$ なら $me = a$ をみたす自然数 m がある」なる条件をみたすなら，P は $\mathbb{Z}_0$ と同形である．

定義 3.32.5　P を実量系とし $0 \neq a \in P$ とする．このとき，定理 3.32.3 系 2 により a は P の量単位であるから，定理 3.32.3 により P の a 計量写像 f が存在する．そこで，各 $b \in P$ に対して，非負実数 fb を **b の a に対する比**と呼んで b/a で表す．

問題 3.32.15　$\mathbb{P}$ を $(\mathbb{R}_0,+)$ 系とすれば，例 3.32.4 により $\mathbb{P}$ は実量系であるが，さらに $a, b \in \mathbb{P}$，$a \neq 0$ であれば，比について $b/a = ba^{-1}$ が成り立つ．

問題 3.32.16　実量系 P における比について次のことが成り立つ．ただし，$a, b, c \in P$，$a \neq 0$，$n \in \mathbb{N}$ とし，結論 7 においてはさらに $b \neq 0$ とする．

1. $(b+c)/a = b/a + c/a$
2. $b \le c \iff b/a \le c/a$
3. $b/a = 1 \iff b = a$
4. $b/a = 0 \iff b = 0$
5. $(nb)/a = n(b/a)$
6. $(nb)/(na) = b/a$
7. $(c/b)(b/a) = c/a$

略解　6. $na \neq 0$ なので $(nb)/(na)$ も定義される．写像 $f \in P {\to} \mathbb{R}_0$ を $fx = n^{-1}(x/a)$ と定義すれば，これが na 計量写像の三条件をみたす．従って，$(nb)/(na) = n^{-1}\big((nb)/a\big) = n^{-1}\big(n(b/a)\big) = b/a$.

7. $b/a \neq 0$ なので写像 $g \in P {\to} \mathbb{R}_0$ を $gx = (x/a)(b/a)^{-1}$ と定義することができ，これが b 計量写像の三条件をみたす．従って，$(c/b)(b/a) = \big((c/a)(b/a)^{-1}\big)(b/a) = c/a$ が成り立つ．

問題 3.32.17 量系 P において比様のものが定義されれば，P は実量系であって，この比様のものは比に等しい．つまり，P のある元 a と P の任意の元 b に非負実数 $b/\!/a$ が対応付けられてこれらが問題 3.32.16 の三条件 1, 2, 3 に相当する三条件

1. $(b+c)/\!/a = b/\!/a + c/\!/a$
2. $b \le c \iff b/\!/a \le c/\!/a$
3. $a/\!/a = 1$

をみたせば，P は実量系であり，$a \neq 0$ であって，任意の $b \in P$ に対して $b/\!/a = b/a$ が成り立つ．

注意 3.32.2 問題 3.32.16 と問題 3.32.17 によれば，量系 $P \neq \{0\}$ の 0 と異なる任意の元 a と任意の元 b に非負実数 $b/\!/a$ が対応付けられて問題 3.32.17 の三条件をみたせば，P は実量系であって $b/\!/a = b/a$ が成り立ち，従って問題 3.32.16 により $(c/\!/b)(b/\!/a) = (c/\!/a)$ 等のことが成り立つ．これは，問題 3.32.17 の三条件が「比」の基本条件であることを意味する．

問題 3.32.18 実量系は次の条件 ar をみたす（記号「ar」は「Archimedes」に因む）．

ar. $0 < a$, $0 < b$ なら $b < na$ なる自然数 n が存在する．

問題 3.32.19 $\{0\}$ と異なる厳密な量系二つの直積半群は，問題 3.32.9 により厳密な量系であるが，辞書式直積順序関係に関して条件 ar をみたさない．

例 3.32.5 「条件 ar をみたす厳密な量系はすべて実量系であるか」．答は否定的であって，条件 ar をみたす厳密な量系であるが実量系でないものを次のように作ることができる．

直積半群 $\mathbb{Z}_0^2$ 上の関係 $<_d$ を次のように定義する．すなわち，$\mathbb{Z}_0^2$ の元 (a_1, a_2) と (b_1, b_2) が $(a_1, a_2) <_d (b_1, b_2)$ をみたすとは，$a_1 + a_2 < b_1 + b_2$ であるか，または $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ かつ $a_2 < b_2$ であることとする．そうすると，$<_d$ の反射包 $\le_d$ は線形順序関係であって，$\le_d$ に関して $\mathbb{Z}_0^2$ は条件 ar をみたす厳密な量系である．しかし $\mathbb{Z}_0^2$ は実量系ではない．なぜなら $\mathbb{Z}_0^2$ が実量系であるとすると，定理 3.32.3 とその系 2 により $\mathbb{Z}_0^2$ の $(1,0)$ 計量写像 f が存在するが，任意の自然数 n に対して $n(1,0) <_d n(0,1) <_d (n+1)(1,0)$ が成り立つから，$(0,1)$ の $(1,0)$ 近似列は $1, 2, \ldots$ であり，従って $f(0,1) = 1 = f(1,0)$ となって，f が単射であることに反するからである．

問題 3.32.20 直積半群 $\mathbb{Z}_0^2$ の部分半群 $\{(a_1, a_2) \mid a_1 \ge a_2\}$ は，$\mathbb{Z}_0^2$ の辞書式直積順序関係に関して条件 ar をみたす厳密な量系である．また，これは例 3.32.5 で構成した量系と同形である．

3.32.2　測度

§ **この項を通じて，S を空でない集合とし，P を量系とし，P の順序関係と最小元を $\leq$ と 0 で表す．** そして，$\mathcal{P}S$ から P への写像 $X \mapsto |X|$ で次の四法則に従うものを，S 上の P **測度**と呼び [82]，値 $|X|$ を X の P **測値**と呼ぶ．ただし,「P 測度」からも「P 測値」からも P を省略することがある．

$$|\emptyset| = 0 \qquad \textbf{(零値律)}$$

$$X \neq \emptyset \implies |X| > 0 \qquad \textbf{(正値律)}$$

$$X \subseteq Y \implies |X| \leq |Y| \qquad \text{(増加律)}$$

$$|X \cup Y| \leq |X| + |Y| \qquad \textbf{(劣加法律)}$$

$S \neq \emptyset$ と仮定しているので，正値律の下では $0 < |S|$ が成り立つ．従って，$\#P = 1$ なら S 上の P 測度は存在しない（問題 3.32.30 によれば，$\#P > 1$ なら S 上の P 測度が有る）．また，増加律の下では，任意の $X \in \mathcal{P}S$ に対して $|X| \leq |S|$ が成り立つ．劣加法律は次の二法則に関連する [83]．

$$X \cap Y = \emptyset \implies |X \cup Y| = |X| + |Y| \qquad \textbf{(加法律)}$$

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y| \qquad \textbf{(厳加法律)}$$

問題 3.32.21 加法律は増加律と厳加法律を含意する．厳加法律は劣加法律を含意する．零値律と厳加法律を合わせた法則は加法律を含意する．

略解　加法律の下では，$X \subseteq Y$ なら $|X| \leq |X| + |Y - X| = |X \cup (Y - X)| = |Y|$ が成り立ち，任意の X, Y に対して $|X \cup Y| + |X \cap Y| = \big(|X - (X \cap Y)| + |X \cap Y|\big) + \big(|Y - (X \cap Y)| + |X \cap Y|\big) = |X| + |Y|$ が成り立つ．

問題 3.32.22 零値律・増加律・劣加法律を合わせた法則は，次の 6 法則のいずれとも同等である．ただし $n = 0, 1, \ldots$ とし，$n = 0$ のときは，$\bigcup_{i=1}^{n} Y_i = \emptyset$，$\sum_{i=1}^{n} |Y_i| = \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ とする．

1. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i \implies |X| \leq \sum_{i=1}^{n} |Y_i|$
2. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$，$\sum_{i=1}^{n} |Y_i| \leq b \implies |X| \leq b$
3. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$，$|Y_i| \leq a_i \ (i = 1, \ldots, n) \implies |X| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$
4. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$，$|Y_i| \leq a_i \ (i = 1, \ldots, n)$，$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq b \implies |X| \leq b$
5. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$，$b \leq |X| \implies b \leq \sum_{i=1}^{n} |Y_i|$
6. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$，$|Y_i| \leq a_i \ (i = 1, \ldots, n)$，$b \leq |X| \implies b \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$

注意 3.32.3 問題 3.32.22 の第三法則の対偶として次の法則が得られる（定理 3.21.3 の対偶律参照）．

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i < |X| \implies a_i < |Y_i| \text{ なる } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ がある} \qquad \textbf{(鳩ノ巣原理)}$$

つまり，零値律・増加律・劣加法律を合わせた法則は鳩ノ巣原理と同等である．問題 3.32.22 の他の法則も対偶をとって色々に変形することができる．なお鳩ノ巣原理は，**引き出し論法**の原理とか**部屋割り論法**の原理とも呼ぶ．

[82]「測度」は「measure」の訳語である．
[83]積分論では劣加法律・加法律に当たるものは「有限」を冠して有限劣加法律・有限加法律と呼ばれる．

問題 3.32.23 零値律・加法律を合わせた法則は，次の二法則を合わせた法則と同等である．ただし $n=0$ のときは，$\bigcup_{i=1}^{n} Y_i = \emptyset$，$\sum_{i=1}^{n} |Y_i| = 0$ とする．

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i,\ Y_i \cap Y_j = \emptyset\ (i,j \in \{1,\ldots,n\},\ i \neq j) \implies |X| \leq \sum_{i=1}^{n} |Y_i| \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$
$$X \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} Y_i,\ Y_i \cap Y_j = \emptyset\ (i,j \in \{1,\ldots,n\},\ i \neq j) \implies |X| \geq \sum_{i=1}^{n} |Y_i| \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

問題 3.32.24 増加律と劣加法律はそれぞれ次の法則と同等である [84]．

$$X \subseteq Y \text{ かつ } |Y| \leq a \implies |X| \leq a \qquad \text{(増加律に同等)}$$
$$|X| \leq a \text{ かつ } |Y| \leq b \implies |X \cup Y| \leq a + b \qquad \text{(劣加法律に同等)}$$

問題 3.32.25 $X \mapsto |X|$ を S 上の P 測度とし，$\mathcal{P}S, P$ 間の関係 R を「$X\,R\,a \iff |X| \leq a$」と定義すれば，次のことが成り立つ．

1. $X = \emptyset \iff X\,R\,0$
2. $X \subseteq Y$ かつ $Y\,R\,a \implies X\,R\,a$
3. $X\,R\,a$ かつ $Y\,R\,b \implies (X \cup Y)\,R\,(a+b)$
4. 任意の $X \in \mathcal{P}S$ と P の区間 $\big[|S|{\rightarrow}\big)$ の任意の部分集合 O に対し $|X| = \min\big(\{a \in P \mid X\,R\,a\} \cup O\big)$ が成り立つ．

問題 3.32.26 $\mathcal{P}S, P$ 間の関係 R が問題 3.32.25 の三条件 1, 2, 3 をみたし，$0 \notin O \subseteq P$ であると仮定する．また，任意の $X \in \mathcal{P}S$ に対して，P の部分集合 $\{a \in P \mid X\,R\,a\} \cup O$ に最小値が存在すると仮定し，この最小値を $|X|$ で表す．このとき，写像 $X \mapsto |X|$ は P 測度であり，$O \subseteq \big[|S|{\rightarrow}\big)$ と「$X\,R\,a \implies |X| \leq a$」が成り立つ．また,「$X\,R\,a \impliedby |X| \leq a$」が成り立つためには，$R, O$ が次の二条件 4, 5 をみたすことが必要十分である．

4. $X\,R\,a$ かつ $a \leq b \implies X\,R\,b$
5. $o \in O \implies$ 任意の $X \in \mathcal{P}S$ に対して $X\,R\,o$

略解　写像 $X \mapsto |X|$ の定義により,「$X\,R\,a \implies |X| \leq a$」と $O \subseteq \big[|X|{\rightarrow}\big)$ が成り立つ．

$X = \emptyset$ であれば，条件 1 により $X\,R\,0$ であるから $|X| = 0$ が成り立つ．逆に $|X| = 0$ であれば，$0 \notin O$ との仮定により $X\,R\,0$，従って条件 1 により $X = \emptyset$ が成り立つ．

$X \subseteq Y$ と仮定し $a = |Y|$ と定める．$Y\,R\,a$ であれば，条件 2 により $X\,R\,a$ であるから $|X| \leq a$ が成り立つ．$a \in O$ であれば，$O \subseteq \big[|X|{\rightarrow}\big)$ であるから $|X| \leq a$ が成り立つ．

$a = |X|$，$b = |Y|$ と定める．$X\,R\,a$ かつ $Y\,R\,b$ であれば，条件 3 により $(X \cup Y)\,R\,(a+b)$ であるから $|X \cup Y| \leq a + b$ が成り立つ．$a \in O$ であれば，$O \subseteq \big[|X \cup Y|{\rightarrow}\big)$ であるから $|X \cup Y| \leq a \leq a + b$ が成り立つ．

$b = |X| \leq a$ とすれば，条件 5 によれば $X\,R\,b$，従って条件 4 によれば $X\,R\,a$ が成り立つ．

---

[84] この問題以降問題 3.32.28 までは，水村泰明氏の東京大学 2000 年度修士論文「論理体系 MCL の完全性」に示唆されて高岡洋介氏・高橋和大氏と共作したものである．

問題 3.32.27 (✓) S 上の P 測度の全体を $\mathcal{M}$ で表し，これに $\mathcal{P}S{\to}P$ 上の巾順序関係の制限 $\leq$ を与えて順序集合と成す．また $\mathcal{Q}$ を，$\mathcal{P}S, P$ 間の関係 R で問題 3.32.25 の条件 1, 2, 3 をみたすものと，$0 \notin O \subseteq P$ なる O で任意の $X \in \mathcal{P}S$ に対して $\min\bigl(\{a \in P \mid X\,R\,a\} \cup O\bigr)$ の存在するものの組み (R, O) の全体とし，$\mathcal{Q}$ に $\mathcal{P}(\mathcal{P}S \times P) \times \mathcal{P}P$ 上の直積順序関係 $\subseteq$ の制限によって順序集合と成す．また，$\mathcal{M}$ の任意の元 $X \mapsto |X|$ を $|\cdot|$ で表して，$\mathcal{P}S, P$ 間の関係 $R_{|\cdot|}$ を「$X\,R_{|\cdot|}\,a \iff |X| \leq a$」と定義する．また，各 $(R, O) \in \mathcal{Q}$ に対して，問題 3.32.26 により S 上の P 測度 $X \mapsto \min\bigl(\{a \in P \mid X\,R\,a\} \cup O\bigr)$ が出来るから，これを $|\cdot|_{R,O}$ で表す．そうすると，写像 $|\cdot| \mapsto \bigl(R_{|\cdot|}, \bigl[|S|{\to}\bigr)\bigr)$ と写像 $(R, O) \mapsto |\cdot|_{R,O}$ は $\mathcal{M}, \mathcal{Q}$ 間のガロア対を成し，それから定理 3.18.2 でのように出来る $\mathcal{M}$ 上の閉写は $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ に等しい．

問題 3.32.28 (✓) $\mathcal{P}S, P$ 間の関係 R が問題 3.32.25 の条件 3 をみたすためには，$\mathcal{P}S, P^+$ 間の関係 Q で次の二条件をみたすものの存在することが必要十分である．

1. $X \in \mathcal{P}S$ と $a \in P$ が $X\,R\,a$ をみたすことは，P の元 $a_1, \ldots, a_m$ で $X\,Q\,a_1 \cdots a_m$ と $a = \sum_{i=1}^m a_i$ をみたすものの存在することと同等である．
2. $X, Y \in \mathcal{P}S$ と $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in P$ が $X\,Q\,a_1 \cdots a_m$ と $Y\,Q\,b_1 \cdots b_n$ をみたせば，$(X \cup Y)\,Q\,a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n$ が成り立つ．

問題 3.32.29 $\mathcal{P}S$ から P への写像 $X \mapsto \|X\|$ が零値律・増加律・劣加法律に従うとき，P の元 $\eta > 0$ を任意に一つとって $\mathcal{P}S$ から P への写像 $X \mapsto |X|_\eta$ を

$$|X|_\eta = \begin{cases} 0 & \cdots \quad X = \emptyset \text{ のとき} \\ \|X\| + \eta & \cdots \quad X \neq \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めれば P 測度になる．

問題 3.32.30 $0 < \eta \in P$ なら，$\mathcal{P}S$ から P への写像 $X \mapsto |X|_\eta$ を

$$|X|_\eta = \begin{cases} 0 & \cdots \quad X = \emptyset \text{ のとき} \\ \eta & \cdots \quad X \neq \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めれば P 測度になる．

略解　問題 3.32.29 において任意の X に対して $\|X\| = 0$ と定めればいい．

問題 3.32.31 各 $Y \in \mathcal{P}'S$ に P の元 $\lfloor Y \rfloor$ を対応させる写像が零値律・正値律・増加律・劣加法律に従うとする．また，$\mathcal{P}S$ の各元 X に対し

$$|X| = \sup\bigl\{\lfloor Y \rfloor \bigm| Y \in \mathcal{P}'X\bigr\}$$

が存在するとする．ただし sup は P での上限を表す．このとき，$\mathcal{P}S$ の各元 X に $|X|$ を対応させる写像は，P 測度であって写像 $Y \mapsto \lfloor Y \rfloor$ の拡張である．

問題 3.32.32 $\mathcal{P}S$ から $\mathbb{Z}_{0\infty}$ への写像 $X \mapsto |X|_n$ を

$$|X|_n = \begin{cases} \#X & \cdots \quad X \text{ が有限集合のとき} \\ \infty & \cdots \quad X \text{ が無限集合のとき} \end{cases}$$

と定めれば $\mathbb{Z}_{0\infty}$ 測度になる（添え字「n」は「natural」の頭文字である）．

問題 3.32.33 P が最大元 ∞ $(\neq 0)$ を持つとき，$\mathcal{P}S$ から P への写像 $X \mapsto |X|_\infty$ を

$$|X|_\infty = \begin{cases} 0 & \cdots \quad X = \emptyset \text{ のとき} \\ \infty & \cdots \quad X \neq \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めれば P 測度になる．

問題 3.32.34 f を S から $\mathbb{R}_{0\infty}$ への写像で $0 \notin fS$ なるものとし，$\mathcal{P}S$ から $\mathbb{R}_{0\infty}$ への写像 $X \mapsto |X|_f$ を $|X|_f = \sup(fX)$ と定めれば，$|X \cup Y|_f \leq \max\{|X|_f, |Y|_f\}$ なる法則に従う $\mathbb{R}_{0\infty}$ 測度になる．

例 3.32.6 (直感に合致した測度) S が一次元ユークリッド空間（たとえば $\mathbb{R}$）であり $P = \mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ であるという特別な場合に，S 上の P 測度 $X \mapsto |X|_{\hat{t}}$ を以下のように構成する．ただし第 3.32.1 項で定義した通り，$\oplus$ は量系の直和を表し，$\mathbb{R}_{0\infty}$ は $\mathbb{R}_0 \oplus \{\infty\}$ を表す．なおこの例は，第 5.9 節や第 6.6 節で重要な役割を演ずる．

積分論のための測度論によれば，$\mathcal{P}\mathbb{R}$ の各元 U に $\mathbb{R}_{0\infty}$ の元 $\|U\|$ を対応させる**外測度**なる写像が存在する．これは，増加律と可算劣加法律 $\left\|\bigcup_{n\geq 1} U_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n\|$ をみたし，平行移動により不変であり，さらに，a, b を端とする任意の区間 I に対して $\|I\| = |b - a|$ をみたす．

他方，S は一次元ユークリッド空間であるから，S^2 から $\mathbb{R}$ への写像 $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ で次の二条件をみたすものが存在する．

1. $S \times \mathbb{R}$ の各元 (x, u) に対して，$\overrightarrow{xy} = u$ なる $y \in S$ が唯一つ存在する．
2. 任意の $x, y, z \in S$ に対して $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ が成り立つ．

そこで，S の元 o を一つ決めると（これを S の**基準点**と呼ぶ），条件 1 によって S から $\mathbb{R}$ への全単射 $x \mapsto \overrightarrow{ox}$ が出来る．この全単射による $X \in \mathcal{P}S$ の像を X_o で表す．

以上のことを使って $\mathcal{P}S$ から $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ への写像 $X \mapsto |X|_{\hat{t}}$ を次のように定義する．

$$|X|_{\hat{t}} = \begin{cases} \#X & \cdots \quad X \text{ が有限集合のとき} \\ \|X_o\| & \cdots \quad X \text{ が無限集合のとき} \end{cases}$$

ただしこの式において，$\#X$ は $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ の部分集合 $\mathbb{Z}_0$ の元とみなし，$\|X_o\|$ は $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ の部分集合 $\mathbb{R}_{0\infty}$ の元とみなす．

$|X|_{\hat{t}}$ の定義は S の基準点 o の選び方によらない．基準点を o' に取り替えれば，上の条件 2 によって $X \in \mathcal{P}S$ に対する $X_{o'}$ は X_o を $\overrightarrow{o'o}$ だけ平行移動したものになり，外測度は平行移動によって変わらないからである．

直ぐ後で示す通り，写像 $X \mapsto |X|_{\hat{t}}$ は S 上の P 測度である．測度であるから零値律と正値律により，$|X|_{\hat{t}} = 0$ となるのは $X = \emptyset$ の場合に限る．また，X が有限集合で Y が無限集合なら $|X|_{\hat{t}} < |Y|_{\hat{t}}$ が成り立つ．これらのことは，すべての可算集合 $U \in \mathcal{P}\mathbb{R}$ に対し $\|U\|$ が一定値ゼロになるのと著しく異なる．と言うよりはむしろ，外測度 $U \mapsto \|U\|$ より P 測度 $X \mapsto |X|_{\hat{t}}$ の方が,「S に含まれる実在物の量」についての私達の直感に合致しているように思われる．そして直感に合致しているということが，数理心理学の観点からは何よりも望ましい性質なのである．

写像 $X \mapsto |X|_{\hat{t}}$ が実際に測度の条件をみたすことを確かめる．そのために，$\mathbb{Z}_0, \mathbb{R}_{0\infty}$ の単位元をそれぞれ $0, 0'$ で表す．これらは，直和 $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ の中では等しくなく，$0 < 0'$ をみたす．

さて，0 が $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ の単位元になり，$b \in \mathbb{R}_{0\infty}$ なら $0 < 0' \leq b$ であるから，$|X|_{\hat{t}} = 0$ となるのは X が空集合のときに限る．つまり写像 $X \mapsto |X|_{\hat{t}}$ は零値律と正値律に従う．次に，増加律に従う

ことを確かめるために，$X \subseteq Y$ なる $X, Y \in \mathcal{P}S$ を任意にとる．写像 $X \mapsto \#X$ と $X \mapsto \|X_{\circ}\|$ は共に増加律に従うから，X, Y が共に有限集合である場合や共に無限集合である場合は考えなくていい．そこで，X が有限集合で Y が無限集合の場合が残る．この場合，さっき注意した通り $|X|_{\hat{t}} < |Y|_{\hat{t}}$ が確かに成り立つ．最後に，劣加法律に従うことを確かめるために，任意の $X, Y \in \mathcal{P}S$ をとる．写像 $X \mapsto \#X$ と $X \mapsto \|X_{\circ}\|$ は共に劣加法律に従うから，X, Y が共に有限集合である場合や共に無限集合である場合は考えなくていい．従って，X が有限集合で Y が無限集合であると仮定していい．そう仮定すると，$\|X_{\circ}\| = 0'$ であるから，$|X \cup Y|_{\hat{t}} = \|(X \cup Y)_{\circ}\| = \|X_{\circ} \cup Y_{\circ}\| \leq \|X_{\circ}\| + \|Y_{\circ}\| = \|Y_{\circ}\|$ が成り立つ．他方，$|X|_{\hat{t}} = \#X \in \mathbb{Z}_0$，$|Y|_{\hat{t}} = \|Y_{\circ}\| \in \mathbb{R}_{0\infty}$ であるから，$|X|_{\hat{t}} + |Y|_{\hat{t}} = |Y|_{\hat{t}} = \|Y_{\circ}\|$ が成り立つ．従って，$|X \cup Y|_{\hat{t}} \leq |X|_{\hat{t}} + |Y|_{\hat{t}}$ が確かに成り立つ．

なお，S として特に $\mathbb{R}$ をとれば，$|\cdot|_{\hat{t}}$ は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ 測度であって，異なる二点 a, b を端とする任意の区間 I に対して $|I|_{\hat{t}} = |b - a|$ をみたす．

問題 3.32.35 $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}_{0\infty}$ 測度 $X \mapsto |X|$ で異なる二点 a, b を端とする任意の区間 I に対して $|I| = |b-a|$ をみたすものは存在しない．

略解　存在したとすれば，正値律と増加律により，任意の自然数 n に対して $0 < |\{0\}| \leq |[0, 1/n]| = 1/n$ が成り立つ．これは矛盾である．

3.33　関係特論

$ この節には第 3.9 節に続けて，関係についてのやや特殊な事柄を記す．

3.33.1　ラッセルの定理

§ 次の定理は集合論におけるラッセルの逆理を定理にしつらえ直したものである．

定理 3.33.1 $\ni$ **が集合** A **上の関係なら，**A **の元** a **で任意の** $x \in A$ **に対して条件「**$a \ni x \iff x \not\ni x$**」をみたすものは存在しない．**

証明　括弧内の条件で $x = a$ とすれば「$a \ni a \iff a \not\ni a$」という矛盾に逢着するからである．

注意 3.33.1 定理 3.33.1 は論理学や数学の色々なところで暗暗裡に重要な役割を演じている．たとえば定理 4.10.1 はゲーデルの不完全性定理の一般化であるが，その証明は，完結部で定理 3.33.1 の上記証明法を繰り返しているので，定理 3.33.1 を暗暗裡に使っている．

定理 3.33.1 は次の定理と同等である．

定理 3.33.2 f **を集合** A **から** $A \to \mathbb{T}$ **への写像とすれば，**A **の元** a **で任意の** $x \in A$ **に対して条件「**$(fa)x = 1 \iff (fx)x = 0$**」（これを**<u>**ラッセルの条件**</u>**と呼ぶ）をみたすものは存在しない．**

証明　ラッセルの条件で $x = a$ とすれば「$(fa)a = 1 \iff (fa)a = 0$」という矛盾に逢着するからである．なお，この定理が定理 3.33.1 と同等なのは，A 上の関係が $(A \times A) \to \mathbb{T}$ の元とみなされ，補題 3.10.1 により $(A \times A) \to \mathbb{T}$ が $A \to (A \to \mathbb{T})$ と同一視できるからである．

系　**集合** A **から** $A \to \mathbb{T}$ **への全射は存在しない．**

証明　背理法でそういう全射 f が存在したと仮定し，$A \to \mathbb{T}$ の元 g を「$gx = 1 \iff (fx)x = 0$」と定義する．そうすると $fa = g$ なる $a \in A$ が存在してこれがラッセルの条件をみたす．

注意 3.33.2 周知の通り定理 3.33.2 系から，任意の集合 A に対して $\#A < \#(A \to \mathbb{T})$ なることや $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$ なること等が導かれる．

3.33.2　整列集合と順序数

§ この項には，標記の概念についての周知の事実を便宜のために記す．その内容は主に，第 1.2.5 項と第 3.34 節で参考文献として挙げる「現代数学概説 I」（これを以後「**概説**」と呼ぶ）からの抜き書きである．まず，次の定理が容易に証明される．

定理 3.33.3 (超限帰納法の原理．「概説」第 1 章定理 14) **A を整列集合とし，$P(x)$ を A の元 x についての命題とし，「$y < x$ なるすべての $y \in A$ に対して $P(y)$ が真なら $P(x)$ も真である」が成り立つとすれば，A のすべての元 x に対して $P(x)$ は真である．**

なお，定理 3.33.3 の括弧内の条件は $x = \min A$ の場合は「$P(\min A)$ は真である」と同等である．

すべての順序集合の作る領域（＝広義の集合）を $\mathcal{O}$ で表し [85]，$A, B \in \mathcal{O}$ が同順であることを $A \approx B$ で表す．そうすると $\sim$ は同値関係であるので，これによる同値類を**順序型**と呼び，$A \in \mathcal{O}$ の属す順序型を $\mathfrak{o}(A)$ で表す．このように順序型はドイツ文字で表すことにする．ただし，空集合 $\emptyset$ の順序型は 0 で表し，各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ を普通に順序集合とみなしたときの順序型は n で表し，非負整数の全体 $\mathbb{Z}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ を普通に順序集合とみなしたときの順序型は ω で表す．

整列集合の順序型を**順序数**と呼び，順序数の全体の領域を $\mathbb{O}$ で表す [86]．特に，有限整列集合の順序型を**有限順序数**と呼び，無限整列集合の順序型を**超限順序数**と呼ぶ．有限整列集合は $\emptyset$ と $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ $(n \in \mathbb{N})$ のどれかと同順であるから，有限順序数は 0 と n $(n \in \mathbb{N})$ に他ならず，従って $\mathbb{Z}_0$ の元と同一視される．他方，ω は超限順序数である．

順序集合 A における元 a の前組 $(\leftarrow a)$ を A^a で表す．そうすると次の定理（「概説」第 1 章定理 16）が成り立つ．これは問題 3.33.2 – 問題 3.33.6 で証明される．

定理 3.33.4 (比較定理) **A と B が整列集合なら，次の三つの中のいずれか一つだけが成り立つ．**

1. $A \approx B$　　**2.** $A \approx B^b$ **なる** $b \in B$ **がある．**　　**3.** $B \approx A^a$ **なる** $a \in A$ **がある．**

また，条件 2 と 3 における b と a はそれぞれ一意に定まる．

そこで，順序数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ の間の関係 $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ を次のように定義する．すなわち，A, B を $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(A)$，$\mathfrak{b} = \mathfrak{o}(B)$ なる整列集合とするとき，

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \iff A \approx B^b \text{ なる } b \in B \text{ がある} \tag{3.33.1}$$

この定義は A, B のとり方によらず，$<$ の反射包 $\leq$ は線形順序関係となる．

問題 3.33.1 いま定義した順序数間の関係 $\leq$ は実際に線形順序関係である．

---

[85]記号「$\mathcal{O}$」は「順序集合」を意味する「ordered set」に因む．
[86]記号「$\mathbb{O}$」は「順序数」を意味する「ordinal number」に因む．

略解　比較定理と問題 3.9.52 によれば，$<$ が推移律に従うことを示せばいい．整列集合 A, B, C に対して $A \approx B^b$，$B \approx C^c$ なる $b \in B$，$c \in C$ があれば，$B \approx C^c$ なることより $B^b \approx (C^c)^d$ なる $d \in C^c$ があり，$(C^c)^d = C^d$ なので，$A \approx C^d$ が成り立つ．従って $<$ は推移律に従う．

比較定理は次の五問で証明される．

問題 3.33.2 整列集合 A の部分集合 B について次の二つのことが成り立つ．

1. B と $a \in A$ が $B \subseteq A^a$ をみたせば $A \not\approx B$ が成り立つ．
2. $A \approx B^b$ なる $b \in B$ は無い．

略解　1. 同順写 $f \in A {\to} B$ があると，$a > fa$ が成り立ち，これから無限降鎖 $a > fa > f^2a > \cdots$ が出来て，$\{f^n a \mid n = 0, 1, \ldots\}$ に最小元が存在しない．
2. こういう $b \in B$ が有ると，$b \in A$ かつ $A \approx B^b \subseteq A^b$ となって結論 1 に矛盾する．

問題 3.33.3 整列集合 A について次の二つのことが成り立つ．

1. $A \approx A^a$ なる $a \in A$ は無い．
2. $a, b \in A$，$a \neq b$ なら $A^a \not\approx A^b$

従って，比較定理の条件 2 と 3 における b と a はそれぞれ一意に定まる．

略解　2. $a < b$ とすれば，$a \in A^b$ と $A^a = (A^b)^a$ が成り立つ．そこで A^b に結論 1 を使う．

問題 3.33.4 比較定理の三つの場合のどの二つも両立しない．

略解　$A \approx B^b$ かつ $A^a \approx B$ とすると，$B \approx A^a$ なることより $B^b \approx (A^a)^c$ なる $c \in A^a$ が有り，$(A^a)^c = A^c$ なので $A \approx A^c$ となり矛盾である．

問題 3.33.5 A と B を整列集合とし，A の各元 x に応じて $A^x \approx B^y$ なる $y \in B$ が有ると仮定する．このとき，$A \approx B$ であるか，または，$A \approx B^b$ なる $b \in B$ が有る．

略解　各 $x \in A$ に応じて $A^x \approx B^y$ なる $y \in B$ は唯一つに限る．各 $x \in A$ にそういう $y \in B$ を対応させる写像を f で表す．そうすると $A^x \approx B^{fx}$ が成り立つ．従って $x' < x$ なら，$A^{x'} = (A^x)^{x'}$ だから $A^{x'} \approx (B^{fx})^{y'}$ なる $y' \in B^{fx}$ が有り，$(B^{fx})^{y'} = B^{y'}$ だから $fx' = y' < fx$ が成り立つ．従って問題 3.9.27 により $A \approx fA$ が成り立つ．そこで，$fA \neq B$ と仮定して $b = \min(B - fA)$ と定める．そうすると $fA \supseteq B^b$ が成り立つ．逆の $fA \subseteq B^b$ を示せばいい．背理法で $b \leq fx$ なる $x \in A$ が有ると仮定すると，$b < fx$ だから $B^b = (B^{fx})^b$，従って $B^b \approx (A^x)^{x'}$ なる $x' \in A^x$ が有り，$(A^x)^{x'} = A^{x'}$ だから $b = fx' \in fA$ となって矛盾である．

問題 3.33.6 A と B を整列集合とし，A のある元 x に対しては $A^x \approx B^y$ なる $y \in B$ が無いと仮定する．このとき，$A^a \approx B$ なる $a \in A$ が有る．

略解　$A^x \approx B^y$ なる $y \in B$ が無いような $x \in A$ の中で最小のものを a とする．$x \in A^a$ なら，$(A^a)^x = A^x \approx B^y$ なる $y \in B$ が有る．そこで問題 3.33.5 を A^a と B に使う．

問題 3.33.7 順序数間の大小関係について次のことが成り立つ．

1. 任意の順序数 a は $0 \leq a$ をみたす．つまり 0 は最小の順序数である．

2. 順序数 $\mathfrak{a}$ が有限順序数であるためには，$\mathfrak{a} < \omega$ をみたすことが必要十分である．従って ω は最小の超限順序数である．

3. 有限順序数を $\mathbb{Z}_0$ の元と同一視すれば，有限順序数 $\mathfrak{n}$ と順序数 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{a} < \mathfrak{n}$ をみたすことは，$\mathfrak{a}$ も有限順序数であって $\mathbb{Z}_0$ における普通の順序関係に関し $\mathfrak{a} < \mathfrak{n}$ なることと同等である．

4. 各有限順序数 $\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}_0$ に対して，$\mathfrak{n}+1$ は $\mathfrak{n}$ の直後の順序数であり，$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{n}+1$ の直前の順序数である．他方，ω には直前の順序数が存在しない．

略解　1. 任意の整列集合 $A \neq \emptyset$ と $\mathfrak{a} = \min A$ に対し $A^{\mathfrak{a}} = \emptyset$ が成り立つからである．
2. 任意の $\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}_0$ に対し $\mathbb{Z}_0^{\mathfrak{n}} = \{0, 1, \ldots, \mathfrak{n}-1\}$ だからである．
3. 任意の $k \in \{0, 1, \ldots, \mathfrak{n}-1\}$ に対し $\{0, 1, \ldots, \mathfrak{n}-1\}^k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ だからである．
4. 順序数 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{n} < \mathfrak{a} < \mathfrak{n}+1$ をみたせば結論 3 に矛盾する．　**終**

各順序数 $\mathfrak{a}$ に応じて，$\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ をみたす順序数 $\mathfrak{b}$ の全体を $\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ で表す．つまり，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ は $\mathbb{O}$ における $\mathfrak{a}$ の前組である [87]．そうすると以下のことが成り立つ．

定理 3.33.5　A を整列集合とし $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(A)$ とすれば，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{o}(A^x) \mid x \in A\}$ であって，任意の $x, y \in A$ に対して「$x \leq y \iff \mathfrak{o}(A^x) \leq \mathfrak{o}(A^y)$」が成り立つ．つまり，写像 $x \mapsto \mathfrak{o}(A^x)$ は A から $\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ への同順写である．

証明　(3.33.1) により，$x \in A$ なら $\mathfrak{o}(A^x) \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ が成り立つ．逆に $\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ なら，(3.33.1) により $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}(B)$ なる整列集合 B に対して $B \approx A^x$ なる $x \in A$ が有って $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}(A^x)$ が成り立つ．これで $\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{o}(A^x) \mid x \in A\}$ が示された．A の二元 x, y が $x < y$ をみたせば，$x \in A^y$ かつ $A^x = (A^y)^x$ であるから，(3.33.1) により $\mathfrak{o}(A^x) < \mathfrak{o}(A^y)$ が成り立つ．従って問題 3.9.27 によりこの定理が成り立つ（問題 3.9.28 参照）．

系　(「概説」第 1 章定理 26 補題)　各順序数 $\mathfrak{a}$ に対し，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ は整列集合で $\mathfrak{o}(\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}$ をみたす．

証明　$\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(A)$ なる整列集合 A をとれば定理 3.33.5 により $A \approx \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ だからである．

定義 3.33.1　定理 3.33.5 系に留意して，各順序数 $\mathfrak{a}$ に対し，$\#\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ を $\mathfrak{a}$ の**濃度**と呼んで $\#\mathfrak{a}$ で表す．

定理 3.33.6　各集合 A に応じて，$\#\mathfrak{m} = \#A$ をみたす最小の順序数 $\mathfrak{m}$ が存在し（これを A の位数と呼ぶ [88]），任意の $\mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ に対して $\#\mathfrak{n} < \#A$ が成り立つ．また，$\#\mathfrak{m}' > \#A$ をみたす順序数 $\mathfrak{m}'$ が存在する．

証明　ツェルメロの整列定理により A を整列集合にしてから $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(A)$ と定める．そうすると，定理 3.33.5 により $\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ が A と同順であるから，特に $\#\mathfrak{a} = \#\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} = \#A$ が成り立つ．$\{\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \mid \#\mathfrak{b} = \#A\}$ が空でなければ，それに定理 3.33.5 系により最小元が有る．従って $\#\mathfrak{m} = \#A$ をみたす最小の順序数 $\mathfrak{m}$ が有る．$\mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ なら，$\mathbb{O}^{\mathfrak{n}} \subseteq \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ であるから $\#\mathfrak{n} \leq \#\mathfrak{m} = \#A$ であるが，$\mathfrak{m}$ の最小性により $\#\mathfrak{n} \neq \#A$ であるから，$\#\mathfrak{n} < \#A$ が成り立つ．注意 3.33.2 により $\#A' > \#A$ なる集合 A' が有るから，A' の位数を $\mathfrak{m}'$ とすれば $\#\mathfrak{m}' > \#A$ が成り立つ．

[87] 従って，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ は $\mathbb{O}$ の $\mathfrak{a}$ 個の直積を表すのではない．注意 3.1.1 参照．
[88] 従って各基数 $\mathbf{a}$ に応じて，$\mathbf{a} = \#\mathfrak{m}$ をみたす最小の順序数 $\mathfrak{m}$ がある．これを $\mathbf{a}$ の**始数**と呼ぶ．

注意 3.33.3 集合 A の位数を $\mathfrak{m}$ とすれば，$\#A = \#\mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ であるから，$\mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ を添数集合とする A の相異なる元の族 $(a_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\mathbb{O}^{\mathfrak{m}}}$ で $A = \{a_{\mathfrak{n}} \mid \mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}\}$ をみたすものが有る．　**終**

A, B が順序集合であるとき，A, B の順序関係を直和 $A \amalg B$ の順序関係に拡張して $A \amalg B$ を順序集合にすることができる．すなわち，$a \in A$, $b \in B$ に対しては

$$a \leq b \qquad\qquad b \not\leq a$$

と定める．こうして出来る順序集合は，問題 3.9.7 の辞書式直和であるが，ここでは単に**直和**と呼んで $A \oplus B$ で表す（定理 3.32.1 の量系の直和参照）．A, B が共に線形順序集合なら，$A \oplus B$ も線形順序集合となる．さらに A, B が共に整列集合なら，問題 3.9.30 により $A \oplus B$ も整列集合となる．そこで順序数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対して，順序数 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ を次のように定義して $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ の**和**と呼ぶ（順序数の積等のその他の算法の定義は割愛する）．すなわち，$\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(A)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}(B)$ なる整列集合 A, B に対して

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{o}(A \oplus B)$$

この定義は A, B のとり方によらない．$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が有限順序数なら $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ もそうであり，有限順序数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ を $\mathbb{Z}_0$ の元と同一視すれば，$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ なることは，$\mathbb{Z}_0$ における普通の加法に関して $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ なることと同等である．順序数のこの加法は，結合律 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c} = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ と単位律 $\mathfrak{a}+0 = 0+\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ には従うが，可換律 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ には従わない．

問題 3.33.8 順序数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ をみたすためには，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ かつ $0 < \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ のあることが必要十分である．

略解　$\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(A)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}(B)$ なる整列集合 A, B をとる．$\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ のときには，$B = A^{a}$ なる $a \in A$ があるとしてよく，そうすると $A \approx B \oplus (A - B)$, $A - B \neq \emptyset$ が成り立つので，$\mathfrak{c} = \mathfrak{o}(A - B)$ と定めれば $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}+\mathfrak{c}$, $0 < \mathfrak{c}$ が成り立つ．逆に $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}+\mathfrak{c}$, $0 < \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ があるときには，$A = B \oplus C$, $C \neq \emptyset$ なる整列集合 C があるとしてよく，そうすると $a = \min C$ に対して $B = A^{a}$ であるので，$\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ が成り立つ．

問題 3.33.9 任意の順序数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ について次のことが成り立つ．

1. $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ なら，任意の順序数 $\mathfrak{c}$ に対して $\mathfrak{c} + \mathfrak{b} < \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$.
2. ある順序数 $\mathfrak{c}$ に対して $\mathfrak{c} + \mathfrak{b} < \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ なら $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$.
3. ある順序数 $\mathfrak{c}$ に対して $\mathfrak{c} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ なら $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.
4. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ なるためには $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ の存在することが必要十分である．
5. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ は高々一つしか存在しない（そこでそういう $\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ で表す）．

略解　1. $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(A)$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}(B)$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}(C)$ なる整列集合 A, B, C をとる．$B = A^{a}$ なる $a \in A$ が有るとしてよく，$C \oplus B \approx (C \oplus A)^{a}$ であるので，$\mathfrak{c} + \mathfrak{b} < \mathfrak{c} + \mathfrak{a}$ が成り立つ．

問題 3.33.10 $\mathfrak{a}$ が順序数なら，$\mathfrak{a} + 1$ は $\mathfrak{a}$ の直後の（従って $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a} + 1$ の直前の）順序数である．

略解　$0 < 1$ なので $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}+0 < \mathfrak{a}+1$ が成り立つ．順序数 $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ をみたせば，$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $0 < \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ が有り，1 は 0 の直後の順序数なので $1 \leq \mathfrak{c}$ が成り立ち，従って $\mathfrak{a}+1 \leq \mathfrak{a}+\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$ が成り立つ．括弧内のことは問題 3.9.11 による．

順序数 $\mathfrak{a}$ に直前の順序数が有るとき $\mathfrak{a}$ は**孤立数**であると言い，$\mathfrak{a}$ に直前の順序数が無くて $\mathfrak{a} \neq 0$ のとき，$\mathfrak{a}$ は**極限数**であると言う．従って 0 は，孤立数でも極限数でもない唯一の順序数である．問題 3.33.7 によれば，0 と異なる有限順序数は孤立数であり，ω は極限数である．

問題 3.33.11 $\mathfrak{a}$ が孤立数なら，その直前の順序数は唯一で，それを $\mathfrak{b}$ とすれば $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + 1$ が成り立つ．逆に，順序数 $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + 1$ なる順序数 $\mathfrak{b}$ が有れば，$\mathfrak{a}$ は孤立数で $\mathfrak{b}$ がその直前の順序数である．

略解　順序数の大小関係は線形順序関係なので，順序数の直前の順序数も直後の順序数も高々一つである．従って前半については，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}+1$ が共に $\mathfrak{b}$ の直後の順序数なので，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}+1$ が成り立つ．

問題 3.33.12 順序数 $\mathfrak{a} \neq 0$ が極限数であるためには，$\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ なる各順序数 $\mathfrak{b}$ に応じて $\mathfrak{b} < \mathfrak{c} < \mathfrak{a}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ があることも，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} = \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}} \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}$ が成り立つことも，共に必要十分である．

問題 3.33.13 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を順序数とし $\mathfrak{b} \neq 0$ とする．$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ が孤立数であるためには $\mathfrak{b}$ が孤立数であることが必要十分であり，$\mathfrak{c}$ が $\mathfrak{b}$ の直前の順序数なら $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ が $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ の直前の順序数である．

略解　まず $\mathfrak{c}$ が $\mathfrak{b}$ の直前の順序数であると仮定する．そうすると $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ が成り立つ．順序数 $\mathfrak{d}$ が $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{d} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ をみたせば，$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{e}$ と書けて $\mathfrak{c} < \mathfrak{e} < \mathfrak{b}$ が成り立ってしまう．従って $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ は $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ の直前の順序数である．

逆に $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ に直前の順序数 $\mathfrak{d}$ があると，$\mathfrak{b} \neq 0$ なることにより $\mathfrak{a} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$，従って $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{d} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ であるから，$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ が有って $\mathfrak{c} < \mathfrak{b}$ が成り立つ．順序数 $\mathfrak{e}$ が $\mathfrak{c} < \mathfrak{e} < \mathfrak{b}$ をみたせば，$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} < \mathfrak{a} + \mathfrak{e} < \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ となってしまう．従って $\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{b}$ の直前の順序数である．

定理 3.33.7 (順序数についての帰納法の原理) 順序数 $\mathfrak{x}$ についての命題 $P(\mathfrak{x})$ が「$\mathfrak{y} < \mathfrak{x}$ なるすべての順序数 $\mathfrak{y}$ に対して $P(\mathfrak{y})$ が真なら $P(\mathfrak{x})$ も真である」をみたすなら，任意の順序数 $\mathfrak{a}$ に対して $P(\mathfrak{a})$ は真である．

証明　任意の順序数 $\mathfrak{a}$ をとる．定理 3.33.5 系により $\mathbb{O}^{\mathfrak{a}+1}$ は整列集合であって，$\mathfrak{x} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}+1}$ のとき「$\mathfrak{y} < \mathfrak{x}$ なるすべての $\mathfrak{y} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}+1}$ に対して $P(\mathfrak{y})$ が真なら $P(\mathfrak{x})$ も真である」が成り立つ．従って超限帰納法により，任意の $\mathfrak{x} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}+1}$ に対して $P(\mathfrak{x})$ は真であり，特に $P(\mathfrak{a})$ は真である．

定理 3.33.8 (「概説」第 1 章定理 28) A を集合とし，$a \in A$ とし，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a} \geq 1$ なる順序数とし，$F \in \left(\bigcup_{1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a}} (\mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \to A)\right) \to A$ とするとき，次の二条件をみたす $f \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \to A$ が唯一つ存在する．

1. $f0 = a$　　　　**2.** $1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ **なら** $f\mathfrak{b} = F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$

注意 3.33.4 定理 3.33.8 の条件 2 において $F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$ は確かに定義される．なぜなら，$1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ なら，$\mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \subseteq \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ であって $f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \to A$ だからである．なお,「概説」では $\mathfrak{a} > 1$ と仮定しているが，$\mathfrak{a} = 1$ でも，F に関わる仮定や結論が無いものとみなせばこの定理は明らかに成り立つ．$\mathfrak{a} = 1$ なら $1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ なる順序数 $\mathfrak{b}$ は存在せず $\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} = \{0\}$ だからである．

例 3.33.1 定理 3.33.8 は，集合 A と順序数 $\mathfrak{a}$ に対して A の元の族 $(a_{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}}$ を超限帰納法で作る方法の原理を示す．この方法は，数列 $(a_0, a_1, \ldots)$ すなわち数の族 $(a_n)_{n \in \mathbb{O}^{\omega}}$ を帰納法で作る周知の方法の一般化である．定理 3.33.8 で $\mathfrak{a}$ として ω をとれば，$\bigcup_{1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a}} (\mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \to A)$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{O}^n \to A)$ となるが，$\mathbb{O}^n \to A$ は A の元の n 列 $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ の全体であるから，$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{O}^n \to A)$ は A の

元の有限列の全体に等しい．従って $F \in (\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{O}^n \to A)) \to A$ は，A の元の任意長の任意有限列 $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ に A の元 $F(a_0, \ldots, a_{n-1})$ を対応させる写像である．そういう写像 F と A の元 a が一組み与えられたときに A の元の無限列 $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ で二条件

1. $a_0 = a$　　　2. $a_n = F(a_0, \ldots, a_{n-1})$　$(n = 1, 2, \ldots)$

をみたすものが帰納的に作れることは自明である．これら二条件が定理 3.33.8 の二条件に当たる．たとえば $A = \mathbb{R}$ とし，$a = 0$ として F を

$$F(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad n = 1 \text{ のとき} \\ a_{n-2} + a_{n-1} & \cdots \quad n \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めれば，条件 1, 2 は

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

となり，これをみたす無限列 $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ はすなわちフィボナッチ数列である．

定理 3.33.9 A **を集合とし，**$\mathfrak{a}$ **を順序数とし，**$F \in \left(\bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}}(\mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \to A)\right) \to A$ **とするとき，**$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \to A$ **の元** f **で任意の** $\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ **に対して** $f\mathfrak{b} = F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$ **をみたすものが唯一つ存在する．**

これは定理 3.33.8 の変形である．なぜならまず $\mathbb{O}^0 = \emptyset$ であるから，空集合律により $\mathbb{O}^0 \to A = \{\emptyset\}$ と $\left(\bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^0}(\mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \to A)\right) \to A = \{\emptyset\}$ が成り立つ．従って $\mathfrak{a} = 0$ なら，定理 3.33.9 は自明に成り立つ．そこで $\mathfrak{a} \geq 1$ と仮定する．そうすると，定理 3.33.9 の結論の条件 $f\mathfrak{b} = F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$ は，$\mathfrak{b} = 0$ のときは $f0 = F\emptyset$ となる．従って定理 3.33.9 の仮定の下では，$a = F\emptyset$ と定めて定理 3.33.8 を使えば定理 3.33.9 の結論が導かれる．逆に定理 3.33.8 の仮定の下では，$F\emptyset = a$ と定めて F を $\left(\bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}}(\mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \to A)\right) \to A$ の元に拡張して定理 3.33.9 を使えば定理 3.33.8 の結論が導かれる．

定理 3.33.8 は次の定理で $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$ とすれば得られる．

定理 3.33.10 A **を集合とし，**$a \in A$ **とし，**$\mathfrak{d}$ **を** $\mathfrak{d} \geq 1$ **なる順序数とし，**$F \in \left(\bigcup_{1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{d}}(\mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \to A)\right) \to A$ **とする．このとき** $1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{d}$ **なる各順序数** $\mathfrak{a}$ **に応じて，次の二条件をみたす** $f \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \to A$ **が唯一つ存在する．**

1. $f0 = a$　　　**2.** $1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ **なら** $f\mathfrak{b} = F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$

また，この f **を** $f_{\mathfrak{a}}$ **で表すとき，**$1 \leq \mathfrak{c} \leq \mathfrak{a}$ **なる任意の順序数** $\mathfrak{c}$ **に対して** $f_{\mathfrak{a}}|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}} = f_{\mathfrak{c}}$ **が成り立つ．**

証明　まず，$1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{d}$ なる順序数 $\mathfrak{a}$ に対し $f \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \to A$ が条件 1, 2 をみたして，$1 \leq \mathfrak{c} \leq \mathfrak{a}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ に対し $g \in \mathbb{O}^{\mathfrak{c}} \to A$ が次の二条件をみたすと仮定して，$f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}} = g$ を示そう．

3. $g0 = a$　　　4. $1 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ なら $g\mathfrak{b} = F(g|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$

そうすればまず $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ とすることにより，$1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{d}$ なる各順序数 $\mathfrak{a}$ に対して条件 1, 2 をみたす $f \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \to A$ が高々一つしか無いことが分かる．また，前半を証明した後で $g = f_{\mathfrak{c}}$ とすれば g が条件 3, 4 をみたすから，後半が成り立つことが分かる．定理 3.33.5 系により $\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}$ は整列集合である．そこで $f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}} = g$ を示すために $\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}$ での超限帰納法を使って，任意の $\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{c}}$ に対して $f\mathfrak{b} = g\mathfrak{b}$ であることを示そう．つまり，$\mathfrak{b}' < \mathfrak{b}$ なる任意の順序数 $\mathfrak{b}'$ に対して $f\mathfrak{b}' = g\mathfrak{b}'$ であると仮定して $f\mathfrak{b} = g\mathfrak{b}$ を示そう．この仮定により $f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}} = g|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}$ が成り立つ．また，条件 1, 3 により $f0 = g0$ であ

るから $0<\mathfrak{b}$ と仮定していい．そうすると，問題 3.33.7 により 1 が 0 の直後の順序数であるから，$1\le\mathfrak{b}<\mathfrak{c}\le\mathfrak{a}$ が成り立つ．従って条件 2, 4 により，確かに $f\mathfrak{b}=g\mathfrak{b}$ が成り立つ．

$1\le\mathfrak{a}\le\mathfrak{d}$ なる各順序数 $\mathfrak{a}$ に応じて条件 1, 2 をみたす $f\in\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}\to A$ が有ることを整列集合 $\mathbb{O}^{\mathfrak{d}+1}$ についての超限帰納法で示そう．つまり，$1\le\mathfrak{c}<\mathfrak{a}$ なる各順序数 $\mathfrak{c}$ に応じて条件 3, 4 をみたす $g\in\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}\to A$ が有ると仮定して（これを超限帰納法の仮定と呼ぶ），条件 1, 2 をみたす $f\in\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}\to A$ が有ることを示そう．条件 1 をみたす $f\in\mathbb{O}^1\to A$ は有って条件 2 は $\mathfrak{a}=1$ なら自明にみたされるから，$1<\mathfrak{a}$ と仮定していい．

まず $\mathfrak{a}$ が孤立数の場合を考え，$\mathfrak{a}$ の直前の順序数 $\mathfrak{c}$ をとる．$1<\mathfrak{a}$ であったから $1\le\mathfrak{c}<\mathfrak{a}$ が成り立つ．従って超限帰納法の仮定により，条件 3, 4 をみたす $g\in\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}\to A$ が有る．$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}=\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}\amalg\{\mathfrak{c}\}$, $1\le\mathfrak{c}<\mathfrak{d}$ であるから，$f\in\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}\to A$ を $f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}}=g$, $f\mathfrak{c}=F(g)$ と定義することができる．こう定義した f は，直ちに $f\mathfrak{c}=F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}})$ をみたし，$0\in\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}$ であるから条件 3 により条件 1 をみたす．また，$1\le\mathfrak{b}<\mathfrak{c}$ なら，f の定義により $f\mathfrak{b}=g\mathfrak{b}$, $g|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}=f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}$ であるから，条件 4 により $f\mathfrak{b}=F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$ が成り立つ．従って f は条件 2 もみたす．

次に $\mathfrak{a}$ が極限数の場合を考え，$f\in\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}\to A$ を次のように定義する．すなわち $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ なら，$\mathfrak{b}<\mathfrak{c}<\mathfrak{a}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ が有り，1 が 0 の直後の順序数であることにより $1\le\mathfrak{c}<\mathfrak{a}$ であるから，超限帰納法の仮定により条件 3, 4 をみたす $g\in\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}\to A$ が有る．そういう $g,\mathfrak{c}$ を一組み任意にとって $f\mathfrak{b}=g\mathfrak{b}$ と定める．$\mathfrak{b}<\mathfrak{c}'<\mathfrak{a}$ なる順序数 $\mathfrak{c}'$ と $g'\in\mathbb{O}^{\mathfrak{c}'}\to A$ で条件

5. $g'0=a$　　　　6. $1\le\mathfrak{b}'<\mathfrak{c}'$ なら $g'\mathfrak{b}'=F(g'|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}'}})$

をみたすものをもう一組みとると，たとえば $\mathfrak{c}\le\mathfrak{c}'$ の場合には，始めに示したことにより $g'|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{c}}}=g$ が成り立つから，$g\mathfrak{b}=g'\mathfrak{b}$ が成り立つ．従って f のこの定義には矛盾が無い．こう定義した f は条件 3 により $f0=a$ をみたす．また $1\le\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ なら，さっきのように $g,\mathfrak{c}$ をとると，f の定義により $f\mathfrak{b}=g\mathfrak{b}$, $f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}=g|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}$ であるから，条件 4 により $f\mathfrak{b}=F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$ が成り立つ．

3.33.3　留元定理

§ **この項を通じて，次の三条件をみたす三つ組み A,φ,a について考える．**

a. $(A,\le)$ **は完備束である．**

b. $\varphi\in A\to A$ **は増写である．**

c. a **は** $\varphi a\ge a$ **をみたす** A **の元である（$\ge$ は $\le$ の双対を表す）．**

これらの条件の下で任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}}a$ なる記号で表される A の元を定義してその性質を調べるのが目標である．

$\varphi^{\mathfrak{b}}a$ の定義のために，まず $\mathfrak{a}\ge 1$ なる任意の順序数 $\mathfrak{a}$ に前項の定理 3.33.8 を適用する（順序数の大小関係も $\le$ や $\ge$ で表す）．適用するために，$F\in\left(\bigcup_{1\le\mathfrak{b}<\mathfrak{a}}(\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\to A)\right)\to A$ を次のように定義する．すなわち，$1\le\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$, $g\in\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\to A$ のとき，まず $\mathfrak{b}$ に直前の順序数 $\mathfrak{c}$ がある場合には，

$$Fg=\varphi(g\mathfrak{c})$$

と定義する．直前の順序数 $\mathfrak{c}$ は唯一つで $\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}$ に属すからこの定義は可能である．次に $\mathfrak{b}$ に直前の順序数が無い場合（$\mathfrak{b}\ne 0$ だから「$\mathfrak{b}$ が極限数の場合」と同じ）には，条件 a を踏まえて

$$Fg=\sup\{g\mathfrak{c}\mid\mathfrak{c}\in\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\}$$

と定義する．そうすると定理 3.33.8 により，次の二条件をみたす $f \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \to A$ が唯一つ存在する．

$$f0 = a \qquad\qquad 1 \le \mathfrak{b} < \mathfrak{a} \text{ なら } f\mathfrak{b} = F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}})$$

F の定義により，$\mathfrak{b}$ に直前の順序数 $\mathfrak{c}$ があれば $F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}) = \varphi(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}\mathfrak{c}) = \varphi(f\mathfrak{c})$ が成り立ち，$\mathfrak{b}$ が極限数なら $F(f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}) = \sup\{f|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{b}}}\mathfrak{c} \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\} = \sup\{f\mathfrak{c} \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\}$ が成り立つ．従って，f についての二番目の条件は次の二条件に分割される．

$$1 \le \mathfrak{b} < \mathfrak{a} \text{ かつ } \mathfrak{b} \text{ に直前の順序数 } \mathfrak{c} \text{ があれば } f\mathfrak{b} = \varphi(f\mathfrak{c})$$
$$1 \le \mathfrak{b} < \mathfrak{a} \text{ かつ } \mathfrak{b} \text{ が極限数なら } f\mathfrak{b} = \sup\{f\mathfrak{c} \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\}$$

f はこの二条件と $f0 = a$ なる条件とで特徴付けられる $\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} \to A$ の元である．

　これを踏まえて，各順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}}a$ を次のように定義する．すなわち，$\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ なる順序数 $\mathfrak{a}$ をとり，$1 \le \mathfrak{a}$ なることに留意してこの $\mathfrak{a}$ に対して写像 f をさっきのように定め，

$$\varphi^{\mathfrak{b}}a = f\mathfrak{b}$$

と定める．この定義は $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ なる順序数 $\mathfrak{a}$ のとり方によらない．$\mathfrak{b} < \mathfrak{a}'$ なる順序数 $\mathfrak{a}'$ をとって，$\mathfrak{a}$ に対して f を定めたと同様に $\mathfrak{a}'$ に対して写像 f' を定めれば，たとえば $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}'$ のときには，f を特徴付けるさっきの三条件を $f'|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}}$ がみたし，従って $f'|_{\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}} = f$ が成り立つからである．

　さて，$\varphi^{\mathfrak{b}}a$ をこう定めると，必然的に次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\varphi^{0}a = a \\
&\mathfrak{b} \text{ に直前の順序数 } \mathfrak{c} \text{ があれば } \varphi^{\mathfrak{b}}a = \varphi(\varphi^{\mathfrak{c}}a) \\
&\mathfrak{b} \text{ が極限数なら } \varphi^{\mathfrak{b}}a = \sup\{\varphi^{\mathfrak{c}}a \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\}
\end{aligned}$$

　なおここまでは，φ は $A \to A$ の元であればよく，$\varphi a \ge a$ である必要もないが，以下では，φ が増写で $\varphi a \ge a$ をみたすことが必要になる．

補題 3.33.1 任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}a) \ge \varphi^{\mathfrak{b}}a$ が成り立つ．

証明　順序数についての帰納法を使う．つまり，任意の $\mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}$ に対して $\varphi(\varphi^{\mathfrak{c}}a) \ge \varphi^{\mathfrak{c}}a$ であると仮定して（こういう仮定を**帰納法の仮定**と呼ぶ），$\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}a) \ge \varphi^{\mathfrak{b}}a$ であることを示せばいい．まず，$\varphi(\varphi^{0}a) = \varphi a \ge a = \varphi^{0}a$ が成り立つから，$\mathfrak{b} \ne 0$ と仮定する．そうすると $\mathfrak{b}$ は孤立数か極限数である．まず $\mathfrak{b}$ が孤立数でその直前の順序数が $\mathfrak{c}$ であるときには，帰納法の仮定により $\varphi^{\mathfrak{b}}a = \varphi(\varphi^{\mathfrak{c}}a) \ge \varphi^{\mathfrak{c}}a$ であるから，φ の増調性により $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}a) \ge \varphi(\varphi^{\mathfrak{c}}a) = \varphi^{\mathfrak{b}}a$ が成り立つ．次に $\mathfrak{b}$ が極限数の場合には，$\varphi^{\mathfrak{b}}a = \sup\{\varphi^{\mathfrak{c}}a \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\}$ である．特に，$\mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}$ なら $\varphi^{\mathfrak{b}}a \ge \varphi^{\mathfrak{c}}a$ であり，従って φ の増調性と帰納法の仮定により $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}a) \ge \varphi(\varphi^{\mathfrak{c}}a) \ge \varphi^{\mathfrak{c}}a$ が成り立つ．従って $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}a) \ge \sup\{\varphi^{\mathfrak{c}}a \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\} = \varphi^{\mathfrak{b}}a$ が成り立つ．これで帰納法による証明が終わった．

補題 3.33.2 順序数 $\mathfrak{b}$，$\mathfrak{b}'$ が $\mathfrak{b} \ge \mathfrak{b}'$ をみたせば $\varphi^{\mathfrak{b}}a \ge \varphi^{\mathfrak{b}'}a$ が成り立つ．

証明　各順序数 $\mathfrak{b}$ に対して次の命題が成り立つことを示せばいい．

$$\mathfrak{b}' \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}} \implies \varphi^{\mathfrak{b}}a \ge \varphi^{\mathfrak{b}'}a$$

補題 3.33.1 と同様に順序数についての帰納法を使う．まず，$\mathbb{O}^{0} = \emptyset$ であるから，$\mathfrak{b} = 0$ のときにはこの命題は自明に成り立つ．そこで $\mathfrak{b} \ne 0$ と仮定する．まず $\mathfrak{b}$ に直前の順序数 $\mathfrak{c}$ がある場合に

は，$\mathfrak{b}' \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}$ なら，$\mathfrak{c} \geq \mathfrak{b}'$ であるから帰納法の仮定により $\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a} \geq \varphi^{\mathfrak{b}'}\mathfrak{a}$ が成り立ち，従って φ の増調性と補題 3.33.1 により $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \varphi(\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}) \geq \varphi(\varphi^{\mathfrak{b}'}\mathfrak{a}) \geq \varphi^{\mathfrak{b}'}\mathfrak{a}$ が成り立つ．次に $\mathfrak{b}$ が極限数の場合には，$\mathfrak{b}' \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}$ なら，$\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \sup\{\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a} \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\} \geq \varphi^{\mathfrak{b}'}\mathfrak{a}$ が明らかに成り立つ．

補題 3.33.3 順序数 $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ が $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$，$\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}$ をみたせば $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．

証明　$\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ との仮定により $\mathfrak{b} < \mathfrak{b}+1 \leq \mathfrak{c}$ だから，補題 3.33.2 により $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \leq \varphi^{\mathfrak{b}+1}\mathfrak{a} \leq \varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}$ が成り立ち，$\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}$ との仮定により $\varphi^{\mathfrak{b}+1}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．他方で，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{b}+1$ の直前の順序数だから，$\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}+1}\mathfrak{a}$ が成り立つ．従って $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．

補題 3.33.4 順序数 $\mathfrak{a}$ が $\#\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} > \#A$ をみたせば，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ の元 $\mathfrak{b}$ で $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ をみたすものが存在する．

証明　この定理の仮定の下では $\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ に $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \in A$ を対応させる写像は単射ではあり得ないから，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ の相異なる元 $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ で $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}$ なるものが存在する．$\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ であると仮定していい．こう仮定すると，補題 3.33.3 により $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．

定理 3.33.11 (留元定理) 順序数 $\mathfrak{r}$ で次の二条件をみたすものが唯一つ存在する．

1. $\varphi(\varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$
2. **$\mathfrak{b} < \mathfrak{r}$ なる任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) \neq \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．**

この定理によれば，$\varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$ は第 3.18.2 項で定めた意味で φ 留元であり，これが「留元定理」の名の由来である．

証明　定理 3.33.6 により，$\#\mathbb{O}^{\mathfrak{a}} > \#A$ をみたす順序数 $\mathfrak{a}$ が存在する．従って補題 3.33.4 により，$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ の元 $\mathfrak{b}$ で $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ をみたすものが存在する．$\mathbb{O}^{\mathfrak{a}}$ は整列集合だから，そういう $\mathfrak{b}$ の中に最小のものがある．それを $\mathfrak{r}$ と定めれば，これが定理の二条件をみたす．この二条件をみたす順序数 $\mathfrak{r}$ が唯一つなのは明らかである．

定義 3.33.2 定理 3.33.11 で存在の証明された順序数 $\mathfrak{r}$ を φ に関する $\mathfrak{a}$ の**階数**と呼び $\mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$ で表す．

補題 3.33.5 A の元 b が $\mathfrak{a} \leq \mathrm{b}$ と $\varphi\mathrm{b} \leq \mathrm{b}$ をみたせば，任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \leq \mathrm{b}$ が成り立つ．

証明　やはり順序数についての帰納法を使う．$\varphi^{0}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \leq \mathrm{b}$ であるから，$\mathfrak{b} \neq 0$ と仮定する．まず $\mathfrak{b}$ に直前の順序数 $\mathfrak{c}$ がある場合には，帰納法の仮定により $\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a} \leq \mathrm{b}$ であるから，φ の増調性により $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \varphi(\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}) \leq \varphi\mathrm{b}$ となり，従って $\varphi\mathrm{b} \leq \mathrm{b}$ なる仮定により $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \leq \mathrm{b}$ が成り立つ．$\mathfrak{b}$ が極限数の場合には，帰納法の仮定により任意の $\mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a} \leq \mathrm{b}$ が成り立つから，$\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \sup\{\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a} \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\} \leq \mathrm{b}$ が成り立つ．

定理 3.33.12 $\mathfrak{a}$ の階数 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$ について次の三つのことが成り立つ．

1. **$\mathfrak{b} < \mathfrak{r}$ なる任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} < \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$．**
2. **$\mathfrak{c} < \mathfrak{b} < \mathfrak{r}$ なる任意の順序数 $\mathfrak{c}$，$\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a} < \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$．**

3. **$\mathfrak{r} \le \mathfrak{b}$ なる任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$.**

証明　補題 3.33.3 により $\mathfrak{b} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{r}}$ なら $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{c}$ は存在しない．このことと補題 3.33.2 を合わせれば，結論 1, 2 の成り立つことが分かる．

補題 3.33.2 により $\mathfrak{a} = \varphi^0\mathfrak{a} \le \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$ が成り立ち，階数の定義により $\varphi(\varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}) \le \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．従って補題 3.33.5 により，任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \le \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．これと補題 3.33.2 を合わせれば，結論 3 の成り立つことが分かる．

問題 3.33.14　$\mathfrak{a}$ の階数 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$ について次の二つのことが成り立つ．

1. $\#\mathbb{O}^{\mathfrak{r}} \le \#A$.
2. $\mathfrak{b} < \mathfrak{r}$ なら $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) > \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ であり，$\mathfrak{r} \le \mathfrak{b}$ なら $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ である．

問題 3.33.15　任意の順序数 $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{c}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$ が成り立つ．

略解　$\mathfrak{c}$ についての帰納法を使う．$\mathfrak{c} \neq 0$ としていい．まず $\mathfrak{c}$ に直前の順序数 $\mathfrak{d}$ があると仮定する．そうすると，$\mathfrak{b}+\mathfrak{d}$ が $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ の直前の順序数だから，$\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\mathfrak{a} = \varphi(\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}}\mathfrak{a})$ が成り立つ．また，帰納法の仮定により $\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{d}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$ が成り立つ．従って，$\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\mathfrak{a} = \varphi\bigl(\varphi^{\mathfrak{d}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})\bigr) = \varphi^{\mathfrak{c}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$.

次に $\mathfrak{c}$ が極限数であると仮定する．そうすると，$\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ も極限数であって $\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\mathfrak{a} = \sup\{\varphi^{\mathfrak{d}}\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \le \mathfrak{d} < \mathfrak{b}+\mathfrak{c}\}$ が成り立つ．$\mathfrak{b} \le \mathfrak{d} < \mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{d}$ は $\mathfrak{e} < \mathfrak{c}$ なる順序数 $\mathfrak{e}$ によって $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}+\mathfrak{e}$ と書け，帰納法の仮定により $\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{e}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{e}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$ が成り立つ．従って，$\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\mathfrak{a} = \sup\{\varphi^{\mathfrak{e}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{e} < \mathfrak{c}\} = \varphi^{\mathfrak{c}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$.

問題 3.33.16　順序数 $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{b} < \mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$ をみたせば $\mathfrak{r}_{\varphi}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a}) - \mathfrak{b}$ が成り立ち，$\mathfrak{b} \ge \mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$ をみたせば $\mathfrak{r}_{\varphi}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = 0$ が成り立つ ($\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) \ge \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ が成り立つので，$\mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$ と同様に $\mathfrak{r}_{\varphi}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$ が定まる）.

略解　$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_{\varphi}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$ と定める．$\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{s}}\mathfrak{a}) = \varphi\bigl(\varphi^{\mathfrak{s}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})\bigr) = \varphi^{\mathfrak{s}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{b}+\mathfrak{s}}\mathfrak{a}$ が成り立つので $\mathfrak{r} \le \mathfrak{b}+\mathfrak{s}$ が成り立つ．$\mathfrak{b} < \mathfrak{r}$ の場合，$\mathfrak{r} = \mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ と書けて $\varphi\bigl(\varphi^{\mathfrak{c}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})\bigr) = \varphi(\varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}) = \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{c}}(\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$ が成り立つので $\mathfrak{c} \ge \mathfrak{s}$，従って $\mathfrak{r} \ge \mathfrak{b}+\mathfrak{s}$ が成り立つ．

問題 3.33.17　A を完備束とし，写像 $\varphi \in A \to A$ が拡大律と増加律に従うとする．このとき任意の $\mathfrak{a} \in A$ に対して三つ組み $A, \varphi, \mathfrak{a}$ はこの項の仮定の条件 a, b, c をみたし，従って任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して A の元 $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ が定義される．そこで各順序数 $\mathfrak{b}$ に対して，各 $\mathfrak{a} \in A$ に $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ を対応させる写像を $\varphi^{\mathfrak{b}}$ で表す．そうすると，$A \to A$ における巾順序関係についての上限 $\sup\{\varphi^{\mathfrak{b}} \mid \mathfrak{b} \in \mathbb{O}\}$ は φ の閉写包 φ^{∞} に等しく，任意の $\mathfrak{a} \in A$ に対して $\varphi^{\infty}\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}$ が成り立つ [89].

注意 3.33.5　問題 3.18.34 によれば，A が集合で $\varphi \in \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$ が有限的で拡大律に従えば，$\varphi^{\infty} = \varphi^{\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_0} \varphi^n$ が成り立つ．つまり，任意の $X \in \mathcal{P}A$ の φ に関する階数は ω を超えない．

略解　問題の写像を ψ で表し，任意の $\mathfrak{a} \in A$ をとって $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\varphi}(\mathfrak{a})$ とする．そうすると，定理 3.33.12 により $\psi\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$ が成り立つ．従ってまず $\mathfrak{a} = \varphi^0\mathfrak{a} \le \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a} = \psi\mathfrak{a}$ が成り立つ．次に，$\psi\mathfrak{a} = \varphi^{\mathfrak{r}}\mathfrak{a}$ の階数は 0 なので，$\psi(\psi\mathfrak{a}) = \varphi^0(\psi\mathfrak{a}) = \psi\mathfrak{a}$ が成り立つ．次に $\mathfrak{a} \le \mathfrak{a}'$ なる任意の $\mathfrak{a}' \in A$ をとる．そうすると，任意の順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \le \varphi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}'$ の成り立つことが超限帰納法によって示される．そ

[89] この問題は高岡洋介氏の着想に基づく．

こで $\mathfrak{a}'$ の階数を $\mathfrak{r}'$ で表し $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ の大きい方を $\mathfrak{s}$ で表すと，$\psi a = \varphi^{\mathfrak{r}} a = \varphi^{\mathfrak{s}} a \leq \varphi^{\mathfrak{s}} a' = \varphi^{\mathfrak{r}'} a' = \psi a'$ が成り立つ．また，φ が拡大律に従うことと定理 3.33.11 により $\varphi a \leq \varphi(\varphi^{\mathfrak{r}} a) = \varphi^{\mathfrak{r}} a = \psi a$ が成り立ち，補題 3.33.5 と定理 3.18.3 と定理 3.18.1 により $\varphi^{\infty} a = \min\{b \in A \mid a \leq b,\ \varphi b \leq b\} \geq \psi a$ が成り立つ．以上により $\varphi^{\infty} = \psi$ である．　**終**

以上，この項では条件 a, b, c の下で考えたが，次の三条件 a*, b*, c*の下でも同様に考えることができる．

a*. $(A, \leq)$ は完備束である（これは条件 a と同等である）．

b*. $\varphi \in A \to A$ は増写である（これは条件 b と同じである）．

c*. a は $\varphi a \leq a$ をみたす A の元である．

これらの条件の下で A 上の順序関係 $\leq$ の双対関係を $\leq^*$ で表せば（つまり「$x \leq^* y \iff y \leq x$」），条件 a*, b*, c*は $\leq^*$ に関してはそれぞれ条件 a, b, c となる．従って，この項で証明した命題において $\leq$ を $\geq$ に書き換えたり sup を inf に書き換えたりすれば，それは三条件 a*, b*, c*の下では正しい命題である（そういう命題をもとの命題の**双対命題**と呼ぶ）．たとえば，三条件 a*, b*, c*の下で，各順序数 $\mathfrak{b}$ に対して $\varphi^{\mathfrak{b}} a$ を定めて次のことが成り立つようにすることができる．

$$\begin{aligned}
&\varphi^0 a = a \\
&\mathfrak{b} \text{ に直前の順序数 } \mathfrak{c} \text{ があれば } \varphi^{\mathfrak{b}} a = \varphi(\varphi^{\mathfrak{c}} a) \\
&\mathfrak{b} \text{ が極限数なら } \varphi^{\mathfrak{b}} a = \inf\{\varphi^{\mathfrak{c}} a \mid \mathfrak{c} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{b}}\}
\end{aligned}$$

また，たとえば留元定理の双対命題としては，次の定理が得られる．

定理 3.33.13 (双対留元定理)　三条件 a*, b*, c*の下で，順序数 $\mathfrak{r}$ で次の二条件をみたすものが唯一つ存在する．

1. $\varphi(\varphi^{\mathfrak{r}} a) = \varphi^{\mathfrak{r}} a$

2. $\mathfrak{b} < \mathfrak{r}$ **なる任意の順序数** $\mathfrak{b}$ **に対して** $\varphi(\varphi^{\mathfrak{b}} a) \neq \varphi^{\mathfrak{b}} a$ **が成り立つ．**

3.33.4　関係の基底

§ **この項を通じて，集合 A とその上の関係 $\ni$ との組み $(A, \ni)$ について考える．**なおこういう考察を行なうのは，第 5 章以降で論ずる格世界の基本関係を念頭に置いてのことである．

定義 3.33.3　$E = \{e \in A \mid \text{任意の } x \in A \text{ に対して } e \not\ni x\}$ と定め，E の元を**空元**と呼ぶ．

定義 3.33.4　A の部分集合 B が E を含み，かつ次の二条件をみたすとき，B は A の $\ni$ に関する**基底**であると言う．ただし，$\ni\ni$ は $\ni$ の推移包を表す．

下界条件： $A - E$ の各元 a に対して $a \ni\ni x \in B$ なる x が存在する．

極小条件： $E \subseteq B' \subset B$ なる B' は下界条件をみたさない．

問題 3.33.18　各 $e \in E$ に対して「$a \ni x \iff x = e$」をみたす $a \in A$ が存在すれば，下界条件をみたす B は E を含む．

問題 3.33.19 $\ni$ が同値関係であれば，基底は同値類の完全代表系に他ならない．

補題 3.33.6 $E \subseteq B \subseteq A$ **なる** B **が下界条件をみたすとする．このとき，**B **が基底であるためには，次の条件が必要十分である．**

排他条件： $B \ni x \ni\ni y \in B$ **なら** $x = y$ **が成り立つ．**

そして，B **が基底であれば** B **は次の条件をみたす．**

回帰条件： $x \in B - E$ **なら** $x \ni\ni x$ **が成り立つ．**

証明　前半：この補題の仮定の下では極小条件と排他条件が同等であることを示せばいい．もしも $B \ni x \ni\ni y \in B$ かつ $x \neq y$ なる y があれば，$\ni\ni$ は推移的な関係であるから $B - \{x\}$ が下界条件をみたし，$E \subseteq B - \{x\} \subset B$ だから B は極小条件をみたさない．逆に，$E \subseteq B' \subset B$ なる B' が下界条件をみたすとき，$x \in B - B'$ なる x をとれば，$x \notin E$ であるから $x \ni\ni y \in B'$ をみたす y があり，$x \notin B' \ni y$ 従って $x \neq y$ であるから B は排他条件をみたさない．

後半：$x \in B - E$ なら，下界条件により $x \ni\ni y \in B$ なる y がある．B が基底であれば，排他条件により $x = y$ であるから，$x \ni\ni x$ が成り立つ．

補題 3.33.7 B **と** B' **を** A **の基底とすれば，各** $x \in B - B'$ **に対して，**$x \ni\ni x' \in B'$ **なる** x' **が唯一つ存在し，この** x' **は** $x' \in B' - B$ **かつ** $x' \ni\ni x$ **をみたす．**

証明　補題 3.33.6 により B と B' は排他条件をみたす．$x \notin B' \supseteq E$ 従って $x \notin E$ であるから，B' の下界条件により $x \ni\ni x' \in B'$ なる x' が存在する．$x \notin B' \ni x'$ 従って $x \neq x'$ であるから，B の排他条件により $x' \in B' - B$ が成り立つ．x と x' を取り替えて考えれば，$x' \ni\ni y \in B$ なる y が存在する．$\ni\ni$ の推移性により y は $x \ni\ni y$ をみたすから，B の排他条件により $x = y$ であり，従って $x' \ni\ni x$ が成り立つ．$x \ni\ni x'' \in B'$ でもあるとすれば，$\ni\ni$ の推移性により $x' \ni\ni x''$ となるから，B' の排他条件により $x' = x''$ でなければならない．

定理 3.33.14 A **の基底は，もし複数存在するなら，すべて同じ濃度を持つ．**

証明　B と B' を A の基底とする．このとき補題 3.33.7 により，$B - B'$ の各元 x に対し，$x \ni\ni x'$ なる $x' \in B' - B$ が唯一つ存在する．x にこの x' を対応させる写像 f が $B - B'$ から $B' - B$ への全単射であることを示せばいい．まず補題 3.33.7 により，任意の $x' \in B' - B$ に対して $x' \ni\ni x$ なる $x \in B - B'$ があり，この x が $x \ni\ni x'$ をみたすから，f は全射である．$x' \in B' - B$ に対して $x \ni\ni x'$ をみたす $x \in B - B'$ は，やはり補題 3.33.7 により $x' \ni\ni x$ をもみたし，従って唯一つに限られる．すなわち，f は単射である．

定義 3.33.5 A が唯一つの基底 B を持つとき，B は A の**固有基底**であると言う．

定理 3.33.15 $E \subseteq B \subseteq A$ **なる** B **が下界条件をみたすとする．このとき，**B **が** A **の固有基底であるためには，次の条件が必要十分である．**

強排他条件： $B \ni x \ni y \in A$ **なら** $x = y$ **が成り立つ．**

この条件は「$B \ni x \ni\ni y \in A \implies x = y$**」なる条件と同等である．また，**$B$ **が固有基底であれば** B **は次の条件をみたす．**

強回帰条件：$x \in B - E$ **なら** $x \ni x$ **が成り立つ．**

証明　まず，B が強排他条件をみたすと仮定する．$B \ni x \ni\ni y \in A$ なら，

$$x = y_0 \ni y_1 \ni \cdots \ni y_n = y$$

なる y_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ が存在する．強排他条件により，まず $x = y_1$ が分かり，次に $x = y_2$ が分かり，$\ldots$，最後に $x = y$ が分かる（正確には n についての帰納法による）．つまり

$$B \ni x \ni\ni y \in A \implies x = y \tag{3.33.2}$$

が成り立つ．特に B は排他条件をみたすから，補題 3.33.6 により B は基底となる．

B' も基底であるとする．$x \in B - B'$ なら，補題 3.33.7 により $x \ni\ni x'$ なる $x' \in B' - B$ があるが，これは (3.33.2) に反する．従って $B \subseteq B'$ であり，B' の極小性により $B = B'$ が成り立つ．従って B は固有基底である．

逆に，B が固有基底であると仮定する．補題 3.33.6 により，B は排他条件はみたす．強排他条件もみたすことを背理法で示すために，$B \ni x \ni y \neq x$ なる x, y があると仮定する．そして，$C = \{z \in B \mid z \ni\ni y\}$, $D = (B - C) \cup \{y\}$ と定める．従って $x \in C$ と $E \subseteq D$ が成り立つ．B の排他性により $y \notin B$ であるから，D は B と異なる．D は $\ni\ni$ の推移性により下界条件をみたすが，さらに排他条件もみたす．なぜなら，$D \ni u \ni\ni v \in D$, $u \neq v$ とすれば，B の排他性により u, v の一方は y であり，他方は $B - C$ に属す．そうすると，C の定義により $u = y$, $v \in B - C$ でなければならない．しかしこのとき，$\ni\ni$ の推移性により $x \ni\ni v$ となり，B の排他性に反する．従って D は排他条件をみたし，補題 3.33.6 により D も A の基底となる．しかし，これは B が固有基底であるという仮定に矛盾する．従って B は強排他条件をみたす．

$x \in B - E$ なら，$x \notin E$ であるから $x \ni y$ なる $y \in A$ があり，強排他条件により $x = y$ であるから $x \ni x$ が成り立つ．つまり，強回帰条件が成り立つ．

問題 3.33.20　E が下界条件をみたせば，E は固有基底である．

問題 3.33.21　B が固有基底のとき，各 $x \in A$ に対して $A^x = \{y \in A \mid x \ni y\}$ と定めれば，$B - E = \left\{x \in A \mid A^x = \{x\}\right\}$ が成り立つ．

問題 3.33.22　代数系 A について定義 3.2.3 で定義した算法余白は，第 3.15 節で定義した「現れ」の関係 $\succ$ に関しての A の固有基底である．

3.34　この章の参考文献

$ この章の内容は，第 1.2.5 項でも引用した言語学書

形式意味論入門　：白井賢一郎 著，産業図書，1985 年

を通じて普遍型付代数系という概念の重要性を知ったことが契機となって生まれたものである．ただし，この書は言語学者向けの概説書なので，数学的に正確な説明は含んでいないし，普遍型付代数系という概念も暗にしか示していない．本書の普遍型付代数系の定義などは私が新規に工夫したものであり，上記の書が暗示しているものとはかなり異なる．

代数学の教科書では，これまた第 1.2.5 項で引用した

現代数学概説 I ：彌永昌吉・小平邦彦 共著，岩波書店，1961 年

に，高々二項の算法を持つ汎代数系についての普遍代数系の存在定理が証明されている [90]．普遍型付代数系の存在と一意性定理の定式化等はこの教科書の書き方に倣っている．第 3.15 節より前の内容の多くは，この教科書に述べられている汎代数系についての事項を型付代数系にまで拡張したものである．これに対し，第 3.15 節から第 3.31 節までの内容は，元来は論理学に現れる議論の一部を代数系の話として述べたものである．第 3.32 節以降では，第 5 章以降の格論理学に関わる事柄を，やはり代数系あるいは関係の話として述べた．なお，この章の所々で位相空間論を引用したり積分論のための測度論に触れたりしたが，これについては「現代数学概説 I」の姉妹書

現代数学概説 II ：河田敬義・三村征雄 共著，岩波書店，1965 年

を推薦する．また，その他の数学概念については

数学辞典 ：日本数学会 編集，岩波書店，1954 年初版

を推薦する．これは，この章に限らず本書全体の数学的内容について参考になるであろう．

[90] ただしその定理では，内的二項算法と外的算法とを区別している．例 3.1.1 で注意した通り外的算法は内的単項算法とみなせるので，この定理は高々二項の算法を持つ汎代数系についての普遍代数系の存在定理となるのである．

第4章　代数論理学

¢ 前章では，論理学を一般的に論ずるために必要な代数学について説明した．この章では，そういう代数学が論理学全般にわたって使われる様子を，程よく一般的に説明する．

4.1　形式言語

$ 第 1.4.1 項で触れたように論理学の三本柱は形式言語の文法論・意味論・演繹論であるが，この節では，文法論に前章の代数学がどう使われるかを説明する．

定理 3.5.1 によれば，集合 S と代数系 T と型分割写像 $\tau \in S \to T$ を任意に定めれば，普遍型付代数系 (A, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ なるものが一意に定まる．そこで三つ組み S, T, τ を普遍型付代数系の文法と呼んだ．このことを踏まえて「形式言語」を，程よく一般的な条件をみたす普遍型付代数系として次のように定義する．ただし，S に当たるものをここでは Prm で表す [1]．

定義 4.1.1 次の三条件をみたす普遍型付代数系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を**形式言語**と呼ぶ．

1. 素元系 Prm は二つの部分集合 Con と Var $(\neq \emptyset)$ によって直和分割されている．
2. T の算号系 Λ は，ある集合 Γ と Prm の直和 $\Gamma \amalg \mathrm{Prm}$ 上の普遍半群 $(\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^+$ の部分集合 $\Gamma \cup \Gamma\mathrm{Var}$ に含まれる．ただし，$\Gamma\mathrm{Var} = \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma,\ x \in \mathrm{Var}\}$ である [2]．
3. 任意の $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ は単項算号である．

つまり形式言語は，普遍型付代数系を定める文法 Prm, T, τ に条件 1, 2, 3 をみたす助変数 Con, Var, Γ を加えることによって定まる．そこで六つ組み $\mathrm{Prm}, T, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ を形式言語の**文法**と呼ぶ．

集合 Con, Var それぞれの元を**定数・変数**と呼ぶ．また，Γ を**算号基**と呼び，$\Lambda \cap \Gamma$ に属す算号を**不変子**と呼び，T の算部分系 $T_{\Lambda\cap\Gamma}$ を U で表す．ただし，算法を制限するだけだから，集合としては T と U は等しい．他方，$\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ に属す算号を**可変子**と呼ぶ．従って可変子は単項算号である．また，$\Lambda \cap \Gamma x \neq \emptyset$ なる $x \in \mathrm{Var}$ を**修飾変数**と呼び，修飾変数の全体を Qvar で表す．従って $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} = \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Qvar}$ が成り立つ [3]．

以後，**形式言語** $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **に言及するときは，そうでない旨断らない限り，記号** Con, Var, Γ, Λ, U, Qvar **は上記の意味で使う．**

定義 4.1.1 は，形式言語を構成するには次の四手順が必要かつ十分であることも示している（このことを形式言語の**構成原理**と呼ぶ）．

---

[1]記号「Prm」「Con」「Var」「Qvar」はそれぞれ「prime」「constant」「variable」「qualifying variable」に因む．

[2]端書きに記した通り $(\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^+$ を乗法半群とみなしている．一般に，乗法半群 S の部分集合 X と Y に対し，XY は X の元と Y の元の積の全体を，すなわち S の部分集合 $\{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$ を表す．

[3]本章では可変子を算号基 Γ の元と変数系 Var の元一つずつの積と定めたが，堀川智史氏は 2006 年度東京大学修士論文「修飾変数が任意個の可変子を持つ形式言語の基礎理論」で，Γ の元任意個と Var の元一つ以上の任意の順での積を可変子と定めて，本章第 4.6 節までの内容を拡張した．

手順 1. 集合 Con と $\mathrm{Var} \neq \emptyset$ を任意にとって $\mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \amalg \mathrm{Var}$ と定める．

手順 2. 集合 Λ と Γ を $\Lambda \subseteq \Gamma \cup \Gamma\mathrm{Var}$ なるよう任意にとる．

手順 3. 集合 T を任意にとって，Λ の各元に T 上の算法を一つずつあてがう．ただし，$\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ の元には単項算法をあてがう．

手順 4. 写像 $\tau \in \mathrm{Prm} {\to} \mathsf{T}$ を任意にとる．

必ずしもこの順番通りでなくともいいが，これだけの手順を踏めば，集合 Prm と Λ 代数系 T と写像 $\tau \in \mathrm{Prm} {\to} \mathsf{T}$ が定まり，従って定理 3.5.1 により普遍型付 Λ 代数系 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ で $\sigma|_{\mathrm{Prm}} = \tau$ なるものが一意に定まり，しかも条件 1 – 3 がみたされるから，$\mathrm{Prm}, \mathsf{T}, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ を文法とする形式言語 A を抽象的にではあるが構成したことになる．なお，定理 3.7.1 の証明のようにすれば，A と σ を記号列の集合と変換として具象的に構成することもできる．ただし，そういう具象的構成は一般論展開上は有害である．また特殊論においても，例 4.1.1 – 例 4.1.3 で説明するように文法 $\mathrm{Prm}, \mathsf{T}, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ に基づいて A と σ を具象化することができる．従って，定理 3.7.1 の証明のような具象的構成は，その証明以外では無用である．

$(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ が形式言語であれば，$\Lambda \subseteq \Gamma \cup \Gamma\mathrm{Var} \subseteq (\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^+$ であるから第 3.16 節と第 3.17 節で設けた仮定の条件がみたされ，そこでの定義や定理を適用することができる．特に，第 3.16 節冒頭で定めた S^λ $(\lambda \in \Lambda)$ と S^M $(M \subseteq \Lambda)$ に相当するものは Prm^λ と Prm^M であるが，これについては次のことが成り立つ．

$$\mathrm{Prm}^\lambda = \begin{cases} \emptyset & \cdots \quad \lambda \in \Lambda \cap \Gamma \text{ のとき} \\ \{x\} & \cdots \quad \lambda \in \Lambda \cap \Gamma x \text{ のとき } (x \in \mathrm{Var}) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

$$\mathrm{Prm}^\Lambda = \mathrm{Qvar} \tag{4.1.2}$$

さて論理学では，定義 4.1.1 のままの一般的な形式言語を研究するのではなく，様々に特殊化した形式言語を取り上げて研究する．どう特殊化した形式言語を取り上げるかは問題意識に応じて異なり，問題意識に応じて行なう「どういう形式言語を取り上げるか」の論がすなわち文法論である．そして取り上げる形式言語によって，論理学は命題論理学・述語論理学等に呼び分けられる．以下では，形式言語のそういう特殊化の例を主に挙げよう．ただし，それら特殊化がどういう問題意識によるものかには触れない．それは，それら問題意識が窺い知れないか数理心理学の観点からは重要でないからである．

例 4.1.1 **命題言語**を次のような文法 $\mathrm{Prm}, \mathsf{T}, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ を持つ形式言語 A と定義し，その元を**論理式**または**式**と呼ぶ．まず素元系 Prm については，$\mathrm{Con} = \emptyset$ すなわち $\mathrm{Prm} = \mathrm{Var}$ とする．次に型代数系 T については，台は単元集合 $\{\phi\}$ であり，算号系 Λ は二項算号 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項算号 $\Diamond$（これらを**論理記号**と呼ぶ）から成り，これらが

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dom}\wedge = \mathrm{Dom}\vee = \mathrm{Dom}\Rightarrow = \{\phi\}^2 && \phi \wedge \phi = \phi \vee \phi = \phi \Rightarrow \phi = \phi \\ &\mathrm{Dom}\Diamond = \{\phi\} && \phi^\Diamond = \phi \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

をみたすとし（ここでは算号と算法を同一視しており，今後もしばしば断り無くそうする），算号基 Γ は Λ と定める．従って不変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma$ は Λ に等しく，集合としてだけでなく代数系としても $\mathsf{U} = \mathsf{T}$ であり，可変子と修飾変数は無い．最後に型分割写像 $\tau \in \mathrm{Prm} {\to} \mathsf{T}$ は，T が単元集合であるから，唯一可能の仕方で定める．

上のように定義した命題言語 A は問題 3.5.3 により，変数系 Var を素元系とし二項算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項算法 $\Diamond$ から成る代数構造を持つ普遍汎代数系に他ならない．特に A は Var によって生成されるから，問題 3.2.8 と定理 3.8.5 により，A は Var の n 圏 A_n $(n = 0, 1, \ldots)$ の直和であって，A_n は次のように帰納的に記述される．すなわちまず $A_0 = \mathrm{Var}$ である．そして $n \geq 1$ のときは，A_n は次のような元の全体である．

$$a_1 \wedge a_2 \qquad a_1 \vee a_2 \qquad a_1 \Rightarrow a_2 \qquad a^{\Diamond}$$

ただし，a_1, a_2, a は次の条件をみたすものとする．

$$a_i \in A_{n_i}\ (i = 1, 2) \qquad n_1 + n_2 = n - 1 \qquad a \in A_{n-1}$$

なお命題論理学の通常の教程では，式を変数・論理記号・括り記号の列として帰納的に定義する．それは，普遍汎代数系 A を定理 3.7.1 の証明の方法で具象的に構成しているのである．

例 4.1.2 一階述語言語を次のような文法 $\mathrm{Prm}, T, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ を持つ形式言語 A と定義する．まず，素元系 Prm は任意とする．次に型代数系 T については，台は二点集合 $\{\epsilon, \phi\}$ であり，算号系 Λ は，(4.1.3) をみたす四つの算号 $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond$ （これらを**ブール子**と呼ぶ）と，

$$\mathrm{Dom}\,\forall x = \mathrm{Dom}\,\exists x = \{\phi\} \qquad\qquad \forall x\phi = \exists x\phi = \phi \tag{4.1.4}$$

をみたす二種の単項算号 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ （これらは例 4.3.2 で「極量子」と命名するが，ここではブール子と合わせて**論理記号**と呼ぶ）と，n 変数**関数記号**・n 変数**述語記号**という名の二種の n 項算号幾つかから成るものとする $(n = 1, 2, \ldots)$．T 上の算法としての n 変数関数記号 f と n 変数述語記号 p は

$$\mathrm{Dom}\,f = \{\epsilon\}^n \qquad\qquad f(\epsilon, \ldots, \epsilon) = \epsilon$$
$$\mathrm{Dom}\,p = \{\epsilon\}^n \qquad\qquad p(\epsilon, \ldots, \epsilon) = \phi$$

をみたすものとする．ただし，関数記号は零個であってもいいが，述語記号は少なくとも一つ有るものとする．算号基 Γ はブール子 $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond$ と関数記号・述語記号および記号 $\forall, \exists$ から成るものとする．従って，不変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma$ は $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond$ と関数記号・述語記号から成り，可変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ は $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ から成り，$\mathrm{Qvar} = \mathrm{Var}$ が成り立つ．型分割写像 $\tau \in \mathrm{Prm} \to T$ は，各 $x \in \mathrm{Prm}$ に対して $\tau x = \epsilon$ と定める．

以下，上のように定義した一階述語言語 A の構造を調べる．そうするとまず (4.1.3) と (4.1.4) により，A 上の算法としての $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ は

$$\mathrm{Dom} \wedge = \mathrm{Dom} \vee = \mathrm{Dom} \Rightarrow = (A_\phi)^2 \qquad\qquad \mathrm{Im} \wedge,\ \mathrm{Im} \vee,\ \mathrm{Im} \Rightarrow\ \subseteq A_\phi$$
$$\mathrm{Dom}\,\Diamond = \mathrm{Dom}\,\forall x = \mathrm{Dom}\,\exists x = A_\phi \qquad\qquad \mathrm{Im}\,\Diamond,\ \mathrm{Im}\,\forall x,\ \mathrm{Im}\,\exists x \subseteq A_\phi$$

をみたす．同様に，A 上の算法としての n 変数関数記号 f と n 変数述語記号 p は

$$\mathrm{Dom}\,f = (A_\epsilon)^n \qquad\qquad \mathrm{Im}\,f \subseteq A_\epsilon$$
$$\mathrm{Dom}\,p = (A_\epsilon)^n \qquad\qquad \mathrm{Im}\,p \subseteq A_\phi$$

をみたす $(n = 1, 2, \ldots)$．これを踏まえて，台 A に関数記号だけを算号として与えて出来る算部分系における Prm の算包を B と書く．従って例 4.1.1 でと同様に，$B = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ であって（後で直

和であることが分かる)，B_n は次のように帰納的に記述される．すなわちまず $B_0 = \mathrm{Prm}$ である．そして，$n \geq 1$ のときは，B_n は次のような元の全体である．

$$f(b_1, \ldots, b_j)$$

ただし，f は j 変数関数記号であり，$b_k \in B_{n_k}$ $(k = 1, \ldots, j)$，$\sum_{k=1}^{j} n_k = n - 1$ である．$B_0 \supseteq \mathrm{Var} \neq \emptyset$ であるから $B \neq \emptyset$ が成り立つ．B の元を**項**と呼び，Prm の元を**素項**とも呼ぶ．関数記号が無ければ $B = \mathrm{Prm}$ である．$\mathrm{Prm} = \mathrm{Prm}_\epsilon$ であって関数記号は算法としては ϵ 型の元に施されて ϵ 型の元を生ずるから，項は A の ϵ 部分 A_ϵ に属す．すなわち $B \subseteq A_\epsilon$ が成り立つ．

次に，台 A に述語記号だけを算号として与えて出来る算部分系における B の算包を C と書く．そうすると先程と同様に $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$ であって，C_n は次のように帰納的に記述される．すなわちまず $C_0 = B$ であり，$n \geq 1$ のときは，C_n は $p(c_1, \ldots, c_j)$ なる元の全体である．ただし，p は j 変数述語記号であり，$c_k \in C_{n_k}$ $(k = 1, \ldots, j)$，$\sum_{k=1}^{j} n_k = n - 1$ である．特に，C_1 は

$$p(b_1, \ldots, b_j) \qquad\qquad (b_1, \ldots, b_j \in B)$$

なる元の全体である．述語記号が少なくとも一つあるものとしていて $B \neq \emptyset$ であったから $C_1 \neq \emptyset$ が成り立つ．C_1 の元を**素論理式**または**素式**と呼ぶ．述語記号は算法としては ϵ 型の元に施されて ϕ 型の元を生ずるから，素式は A の ϕ 部分 A_ϕ に属す．従ってまた，$n \geq 2$ のときには実は $C_n = \emptyset$ となる．なぜなら，たとえば $n = 2$ なら，$\sum_{k=1}^{j} n_k = n - 1$ なる n_k の中には必ず 1 に等しいものがあり，そういう k については c_k が ϕ 型の元となり $p(c_1, \ldots, c_j)$ が定義されないからである．同様な論法がすべての n (≥ 2) に適用できる．従って，$C = B \cup C_1$ が成り立つ．

次に，台 A に論理記号だけを算号として与えて出来る算部分系における C_1 の算包を D と書く．そうすると $D = \bigcup_{n \geq 0} D_n$ であって（後で直和であることが分かる)，D_n は次のように帰納的に記述される．すなわちまず $D_0 = C_1$ であり，$n \geq 1$ のときは，D_n は次のような元の全体である．

$$d_1 \wedge d_2 \qquad d_1 \vee d_2 \qquad d_1 \Rightarrow d_2 \qquad d^\Diamond \qquad \forall x d \qquad \exists x d$$

ただし，$d_i \in D_{n_i}$ $(i = 1, 2)$，$n_1 + n_2 = n - 1$，$d \in D_{n-1}$，$x \in \mathrm{Var}$ である．$C_1 \neq \emptyset$ であったから $D_n \neq \emptyset$ $(n \geq 0)$，従って $D \neq \emptyset$ が成り立つ．D の元を**論理式**または**式**と呼ぶ．従って，素式は式の一種である．素式が A_ϕ に属して論理記号は ϕ 型の元に施されて ϕ 型の元を生ずる算法であるから，式は A_ϕ に属す．すなわち $D \subseteq A_\phi$ が成り立つ．$B \cap D \subseteq A_\epsilon \cap A_\phi = \emptyset$ であるから，項と式は異なる．

実は $A = B \cup D$ である．つまり A は項と式から成る．これを示すには，$A = [\mathrm{Prm}]$，$\mathrm{Prm} \subseteq B \subseteq B \cup D$ であるから，$B \cup D$ が A の任意の算法 λ で閉じていることを示せばいい．そこで，j を λ の項数とし，$B \cup D$ の元 a_k $(k = 1, \ldots, j)$ に対して $a = \lambda(a_1, \ldots, a_j)$ が定義されたと仮定する．λ が関数記号なら，a_k は ϵ 型の元でなければならず，従って B に属す．B は関数記号で閉じているから a も B に属す．λ が述語記号なら，a_k はやはり ϵ 型の元でなければならず，従って B に属す．従って a は C_1 $(\subseteq D)$ に属す．λ が論理記号なら，a_k は ϕ 型の元でなければならず，従って D に属す．D は論理記号で閉じているから a も D に属す．これで $B \cup D$ が λ で閉じていることが示された．従って $A = B \cup D$ が確かに成り立つ．

これとすでに分かっていた $B \subseteq A_\epsilon$，$D \subseteq A_\phi$ なることを合わせれば，$A_\epsilon = B$，$A_\phi = D$ なる二式が得られる．この二式に定理 3.8.6 を合わせると，さらに次の二つのことが分かる．

1. A_ϵ は素項を素元とし関数記号の全体を算号系とする普遍汎代数系である．

2. A_ϕ は素式を素元とし論理記号の全体を算号系とする普遍汎代数系である．

従って例 4.1.1 でと同様に，$A_\epsilon = \coprod_{n\geq 0} B_n$ と $A_\phi = \coprod_{n\geq 0} D_n$ が成り立つ．また，$B \neq \emptyset$，$D \neq \emptyset$ であったから $A_\epsilon \neq \emptyset$，$A_\phi \neq \emptyset$ が成り立つ．なお，述語論理学の通常の教程では，項を記号列として帰納的に定義し，次いで式をやはり記号列として帰納的に定義するという二段構えの方法を採る．それは，定義者が自覚せずとも，結論 1, 2 を踏まえて普遍汎代数系 A_ϵ, A_ϕ を定理 3.7.1 の証明の方法で具象的に構成しているのである．

例 4.1.3 いわゆる**型付ラムダ計算**における**ラムダ項**の全体を，次のような文法 $\mathrm{Prm}, \mathsf{T}, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ を持つ形式言語 A と定義する．ただし，これまでの記号法との兼ね合いから，ラムダ λ でなくオメガ Ω を使い，A を**オメガ言語**と呼ぶ．まず，素元系 Prm と型分割写像 $\tau \in \mathrm{Prm}{\to}\mathsf{T}$ は任意とする．型代数系 T とその算号基 Γ は次のように定める．

型代数系 T の台集合は，任意の集合 $\mathsf{T}_0 \neq \emptyset$ を素元系とし二項算法 $\to$ だけからなる代数構造を持つ普遍汎代数系の台集合と定める．そうすると T は，T_0 を元に次のように帰納的に記述される T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ の直和である．すなわち $n \geq 1$ のときは，T_n は次のような元の全体である．

$$t_1{\to}t_2 \qquad \bigl(t_i \in \mathsf{T}_{n_i}\ (i = 1, 2),\ n_1 + n_2 = n - 1\bigr)$$

算法 $\to$ は，集合 T 上の算法ではあるが，型代数系 T の代数構造には含ませない．

型代数系 T の算号系 Λ は，

$$\mathrm{Dom}\,\bullet = \{(t{\to}u, t) \mid t, u \in \mathsf{T}\} \qquad (t{\to}u) \bullet t = u \quad (t, u \in \mathsf{T})$$

みたす二項算号 $\bullet$ と

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \mathsf{T} \qquad \Omega x\, t = \tau x{\to}t \quad (t \in \mathsf{T})$$

をみたす単項算号 Ωx $(x \in \mathrm{Var})$ から成るものとする．なお，T の元 s を $s = t{\to}u$ と表す仕方は高々一通りであるから，算法 $\bullet$ の上記の定義には矛盾がない．

算号基 Γ は $\{\bullet, \Omega\}$ と定める．従って，不変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma$ は $\bullet$ から成り，可変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ は単項算号 Ωx $(x \in \mathrm{Var})$ から成り，$\mathrm{Qvar} = \mathrm{Var}$ が成り立つ．

オメガ言語 A を上のように定義すれば，まず $\sigma|_{\mathrm{Prm}} = \tau$ であるから，任意の $x \in \mathrm{Var}$ と $t \in \mathsf{T}$ に対して $\Omega x\, t = \sigma x{\to}t$ が成り立つ（例 4.3.3 参照）．次に，A 上の算法としての $\bullet$ と Ωx $(x \in \mathrm{Var})$ は次の式をみたす．

$$\mathrm{Dom}\,\bullet = \bigcup_{t,u \in \mathsf{T}} (A_{t\to u} \times A_t) \qquad A_{t\to u} \bullet A_t \subseteq A_u \quad (t, u \in \mathsf{T})$$

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = A \qquad \Omega x\,(A_t) \subseteq A_{\sigma x \to t} \quad (t \in \mathsf{T})$$

また，A は Prm の n 圏 A_n $(n = 0, 1, \ldots)$ の直和であって，A_n は次のように帰納的に記述される．すなわちまず $A_0 = \mathrm{Prm}$ である．そして $n \geq 1$ のときは，A_n は次のような元の全体である．

$$a_1 \bullet a_2 \qquad \Omega x\, a$$

ただし，a_1, a_2, a は次の条件をみたすものとする．

$$a_i \in A_{n_i} \quad (i = 1, 2) \qquad n_1 + n_2 = n - 1 \qquad (a_1, a_2) \in \mathrm{Dom}\,\bullet \qquad ta \in A_{n-1}$$

問題 4.1.1 $(A, \mathsf{T}, \sigma, S)$ が普遍型付 Λ 代数系であって $S \neq \emptyset$ であれば，$(A, \mathsf{T}, \sigma, S)$ は S と Λ をそれぞれ変数系と算号基とする形式言語である．

4.2　認識可能世界と認識対象世界

＄ 前節では，形式言語の文法論に前章の代数学がどう使われるかを説明した．この節以降第 4.7 節までは，形式言語の意味論に前章の代数学がどう使われるかを説明する．第 1.4.2 項で触れた通り，意味論は世界論・対応論・真偽論から成る．そこでまず世界論をここで取り上げる．

この節を通じて，$(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を形式言語とする．**また定義 4.1.1 で定めた通り，T の算部分系 $\mathsf{T}_{\Lambda\cap\Gamma}$ を U で表す．そして $\sigma\mathrm{Prm} = \{t \in \mathsf{T} \mid \mathrm{Prm}_t \neq \emptyset\}$ に留意して，次のように定める．

定義 4.2.1 形式言語 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとっての**認識可能世界**とは，U 型代数系 W であって任意の $t \in \sigma\mathrm{Prm}$ に対して $W_t \neq \emptyset$ をみたすもののことを言う．U 型代数系と言うからには W から U への型写像があるが，それを表記しないのが慣例である．

論理学では，前節で説明した通り，問題意識に応じて様々に特殊化した形式言語を取り上げる．また，それら特殊な形式言語についてさらに，第 1.4.2 項で述べた通り，問題意識に応じて認識可能世界を適当に限定して定めた**認識対象世界**について考える．以下では，そういう限定の例を主に挙げよう．ただし，それら限定がどういう問題意識によるものかには触れない．形式言語の特殊化についてと同様，それら問題意識が窺い知れないか数理心理学の観点からは重要でないからである．

例 4.2.1 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ が例 4.1.1 の命題言語の場合，$\mathsf{T} = \{\phi\}$，$\Lambda \cap \Gamma = \{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ であるから，認識可能世界は，空でない任意の集合 W に二項算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項算法 $\Diamond$ を任意に与えて汎代数系としたものに他ならない．しかし命題論理学では，$W = \mathbb{T}$ $(= \{0, 1\})$ であって算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ が任意の $a, b \in \mathbb{T}$ に対して

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \qquad a \vee b = \sup\{a, b\}, \qquad a^{\Diamond} = 1 - a, \qquad a \Rightarrow b = a^{\Diamond} \vee b \tag{4.2.1}$$

をみたす認識可能世界（これを**ブール的**認識可能世界と呼ぶ）だけを認識対象世界とする．つまり，命題言語にとっての認識対象世界は，$\mathbb{T}$ にブール論法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ を与えて代数系としたものだけである（例 3.13.5 と問題 3.13.16 参照）．

例 4.2.2 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ が例 4.1.2 の一階述語言語の場合，$\mathsf{T} = \{\epsilon, \phi\}$，$\sigma\mathrm{Prm} = \{\epsilon\}$ であり，$\Lambda \cap \Gamma$ はブール子 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と関数記号と述語記号のすべてから成る．従って認識可能世界 W は，集合としては $W_\epsilon \neq \emptyset$ と W_ϕ の直和であり，その代数構造には，(4.1.3) に沿って

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dom}\wedge = \mathrm{Dom}\vee = \mathrm{Dom}\Rightarrow = (W_\phi)^2 && \mathrm{Im}\wedge,\ \mathrm{Im}\vee,\ \mathrm{Im}\Rightarrow \subseteq W_\phi \\ &\mathrm{Dom}\Diamond = W_\phi && \mathrm{Im}\Diamond \subseteq W_\phi \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

をみたす算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ があり，また，n 変数関数記号と n 変数述語記号に対応して

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dom}\, f = (W_\epsilon)^n && \mathrm{Im}\, f \subseteq W_\epsilon \\ &\mathrm{Dom}\, p = (W_\epsilon)^n && \mathrm{Im}\, p \subseteq W_\phi \end{aligned}$$

をみたす算法 f と p が幾つかある $(n = 1, 2, \ldots)$．認識可能世界の定義によれば W_ϕ もこれらの算法も任意でいい（ただし，述語記号が少なくとも一つあるから $W_\phi \neq \emptyset$ でなければならない）が，述語論理学では命題論理学の場合と同様に，$W_\phi = \mathbb{T}$ であって算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ が (4.2.1) をみたす認識可能世界（これも**ブール的**認識可能世界と呼ぶ）だけを認識対象世界とする．

一階述語言語 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとっての特別なブール的認識対象世界 W を次のように作ることができる．まず例 4.1.2 の記号法に沿って，集合 A に関数記号だけを算号として与えて出来る算部

分系における Prm の算包を B で表し，集合 A に述語記号だけを算号として与えて出来る算部分系における B の 1 圏を C_1 で表す．すなわち，B は項の全体 A_ϵ に等しく，C_1 は素論理式の全体である．そうして $W_\epsilon = B$，$W_\phi = \mathbb{T}$ と定める．次に，A の各 n 変数関数記号 f に対し，W 上の n 項算法 $\bar{f}$ で $\mathrm{Dom}\,\bar{f} = (W_\epsilon)^n$，$\mathrm{Im}\,\bar{f} \subseteq W_\epsilon$ なるものを次のように作る $(n = 1, 2, \ldots)$．すなわち $(a_1, \ldots, a_n) \in (W_\epsilon)^n$ であれば，$(a_1, \ldots, a_n) \in B^n$，従って $f(a_1, \ldots, a_n) \in B = W_\epsilon$ であるから，$\bar{f}(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$ と定める．これはつまり，B を関数記号の全体を算号系とする代数系とみなした後，問題 3.3.11 のように B から W_ϵ への恒等写像によって，W_ϵ を B の複製代数系と成したのである．最後に，C_1 の部分集合 P を任意にとって，A の各 n 変数述語記号 p に対し，W 上の n 項算法 $\bar{p}$ で $\mathrm{Dom}\,\bar{p} = (W_\epsilon)^n$，$\mathrm{Im}\,\bar{p} \subseteq W_\phi$ なるものを次のように作る $(n = 1, 2, \ldots)$．すなわち $(a_1, \ldots, a_n) \in (W_\epsilon)^n$ であれば，$p(a_1, \ldots, a_n) \in C_1$ であるから，

$$\bar{p}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad p(a_1, \ldots, a_n) \in P \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \quad p(a_1, \ldots, a_n) \notin P \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．以上の算法と (4.2.2) と (4.2.1) をみたすよう定めた算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ に関して，W は $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとってのブール的認識対象世界となる．こういう認識対象世界を，P の定める**記号世界**と呼ぶ（例 4.2.4 の「言語世界」参照）．なお，各素論理式 $p(a_1, \ldots, a_n)$ に応じ，C_1 の部分集合 P を $p(a_1, \ldots, a_n) \in P$ なるようにも $p(a_1, \ldots, a_n) \notin P$ なるようにもとることができるから，$\bar{p}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ なる記号世界も $\bar{p}(a_1, \ldots, a_n) = 0$ なる記号世界も存在する．

例 4.2.3 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が例 4.1.3 のオメガ言語の場合，これにとっての特別な認識可能世界 W を次のように作ることができる．W は U 型代数系であるから，集合 W は t 部分 W_t $(t \in T)$ によって分割される．そこでまず，集合族 W_t $(t \in T)$ を定めなければならないが，T は $\to$ を算法とする代数系としては T_0 を基底とする有基代数系であるので，そこにおける t の階数 r に関する帰納法によって W_t を定める．まず空でない集合の族 $(S_t)_{t \in T_0}$ を任意にとり，$r = 0$ すなわち $t \in T_0$ の場合には，

$$W_t = S_t$$

と定義する．$r \geq 1$ の場合には，$t = u{\to}v$ と一意に表せて W_u, W_v は既に定義されているから，W_t を W_u から W_v への写像の全体と定義する．すなわち

$$W_{u \to v} = W_u {\to} W_v$$

これで集合族 W_t $(t \in T)$ が定まるから，これらの直和を W とする．

$$W = \coprod_{t \in T} W_t$$

次に，W に U 型代数構造を定める．U の算号系は $\{\bullet\}$ である．そこで，W 上の二項算法 $\bullet$ を次のように定義する．まず定義域は

$$\bigcup_{t, u \in T} (W_{t \to u} \times W_t)$$

と定める．$t, u \in T$，$t \neq u$ なら $W_t \cap W_u = \emptyset$ であるから，上の和は直和である．従って，(a, b) をこの集合の元とすれば，$a \in W_{t \to u}$，$b \in W_t$ なる $(t, u) \in T^2$ がただ一組あって $a \in W_t {\to} W_u$，つまり a は W_t から W_u への写像であるから，この写像を $b \in W_t$ に施して得られる W_u の元 ab を $a \bullet b$ と定める．

$$a \bullet b = ab$$

以上により，W は U 型代数系になる．しかも $W_t \neq \emptyset$ $(t \in T)$ であるから，W は $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとっての認識可能世界である．

次の問は，この例を理解するためのものである．

問題 4.2.1 例 4.2.3 において t_1，…，t_n，$u \in T$，$t = t_1 \to (t_2 \to (\cdots \to (t_n \to u) \cdots))$ とする．このとき，$(W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}) \to W_u$ から W_t への全単射 $f \mapsto f^*$ で次の式をみたすものがある．

$$(\cdots((f^* \bullet a_1) \bullet a_2) \bullet \cdots) \bullet a_n = f(a_1, \ldots, a_n) \qquad \bigl(a_i \in W_{t_i}\ (i = 1, \ldots, n)\bigr)$$

略解　補題 3.10.1 による．

例 4.2.4 任意の形式言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとって，A の算部分系 $A_{\Lambda \cap \Gamma}$ は認識可能世界の条件をみたす．これを**言語世界**と呼ぶ．

4.3　付値と意味写像

$ 前節では，形式言語の意味論の第一弾として，世界論に前章の代数学がどう使われるかを説明し，特に形式言語にとっての認識可能世界の概念を定義した．ここでは，意味論の第二弾として，形式言語がそれにとっての認識可能世界に対応付けられる仕組みの理論すなわち対応論に，前章の代数学がどう使われるかを説明する．論理学では前節までに述べた通り，様々に特殊化した形式言語を取り上げ，それら特殊な形式言語についてさらに，認識可能世界を適当に限定して定めた認識対象世界について考える．しかし対応論は，形式言語の特殊化や認識可能世界の限定の具体面に関わらずに行なうことができるのである．そこで**この節を通じて，**$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を形式言語とし，**W **をそれにとっての認識可能世界とする．**

4.3.1　定付値と変付値

§ 形式言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ の定数系 Con から W への写像 Φ が保型写像であるとき，つまりすべての $t \in T$ に対して

$$\Phi(\mathrm{Con}_t) \subseteq W_t$$

をみたすとき，Φ を A から W への**定付値**と呼ぶ．同様に，変数系 Var から W への写像 ν が保型写像であるとき，つまりすべての $t \in T$ に対して

$$\nu(\mathrm{Var}_t) \subseteq W_t$$

をみたすとき，ν を A から W への**変付値**と呼ぶ．そして，変付値の全体を Val_W で表す [4]．ただし誤解の恐れのない場合には，添え字の W を省略して Val で表す（この節で早速そうする）．

定義 4.2.1 により $\mathrm{Prm}_t \neq \emptyset$ なる $t \in T$ に対しては $W_t \neq \emptyset$ であるから，定付値は少なくとも一つ存在し（例 4.3.5 参照），$\mathrm{Val} \neq \emptyset$ が成り立つ．

[4] 記号「Val」は「valuation」に因む．

例 4.3.1 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が例 4.1.1 の命題言語の場合には，$\mathrm{Con} = \emptyset$ であるから，端書きに記した空集合律により，定付値は $\emptyset$ に他ならない．また，$T = \{\phi\}$ であるから，変付値は Var から W への写像に他ならない．$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が例 4.1.2 の一階述語言語の場合には，$T = \{\epsilon, \phi\}$, $\mathrm{Prm} = \mathrm{Prm}_\epsilon$ であるから，定付値は Con から W_ϵ への写像に他ならず，変付値は Var から W_ϵ への写像に他ならない．

問題 4.3.1 $(a_i)_{i \in I}$ を相異なる定数の族とし $w_i \in W_{\sigma a_i}$ $(i \in I)$ とすれば，A から W への定付値 Φ で $\Phi a_i = w_i$ $(i \in I)$ をみたすものが存在する．

$(x_i)_{i \in I}$ を相異なる変数の族とし $w_i \in W_{\sigma x_i}$ $(i \in I)$ とすれば，A から W への変付値 ν で $\nu x_i = w_i$ $(i \in I)$ をみたすものが存在する．

4.3.2　認識可能世界の Val 乗の T 型代数構造

§ 以下の二項では，A, T の各可変子の W での「意味」が定められれば，A から W への各定付値に応じて A から W の Val 乗

$$W^{\mathrm{Val}} = \bigcup_{t \in T} (\mathrm{Val} \to W_t)$$

への「意味写像」が出来ることを説明する．

まずこの項では，各可変子の W での「意味」が定められれば W^{Val} に T 型代数構造が定められることを説明する．説明のために，**T の各可変子 λ の定義域を T_λ で表し，$t \in T_\lambda$ に算法 λ を適用して出来る T の元は λt で表す．**そうすると，可変子は単項算法なので $T_\lambda \subseteq T$ が成り立つ．このことに留意して，各可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ に対し，写像

$$\lambda_W \in \left(\bigcup_{t \in T_\lambda} (W_{\sigma x} \to W_t) \right) \to W$$

で各 $t \in T_\lambda$ に対して

$$\lambda_W (W_{\sigma x} \to W_t) \subseteq W_{\lambda t}$$

をみたすものを λ の W での**意味**と呼び，各可変子 λ にその W での意味 λ_W を対応させる写像 $\lambda \mapsto \lambda_W$ を，可変子の W への**意味付け**と呼ぶ．また，二つの可変子 $\lambda \in \Gamma x$ と $\mu \in \Gamma y$ $(x, y \in \mathrm{Qvar})$ の W での**意味 λ_W と μ_W が等しい**とは，$\sigma x = \sigma y$, $T_\lambda = T_\mu$ であって（このとき写像 λ_W と μ_W の始集合と終集合は等しい）写像として $\lambda_W = \mu_W$ が成り立つことを言う．

問題 4.3.2 可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ に W での意味があるためには，$W_t \neq \emptyset$ なる任意の $t \in T_\lambda$ に対して $W_{\lambda t} \neq \emptyset$ であることが必要十分である．

以下，可変子の W への意味付け $\lambda \mapsto \lambda_W$ があると仮定し，これをもとに W^{Val} に T 型代数構造を定める．

それにはまず，W^{Val} を W の巾代数系としての U 型代数系にする．この U 型代数構造は問題 3.10.1 によれば，集合 W^{Val} 上の U 型代数構造の中で，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ の定める射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}} \to W$ を保型準写と成すものとして特徴付けられる．

次に，U の代数構造から除いてあった T の可変子に対応する W^{Val} 上の算法を然るべく定義し，それを W^{Val} の上記 U 型代数構造に付け加えて W^{Val} の T 型代数構造とする．

そのためにまず，任意の $x \in \mathrm{Var}$ と $w \in W_{\sigma x}$ に対して，Val の変換 (x/w) を次のように定義する（これは第 4.4 節で「値換」へ拡張する）．すなわち，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して $(x/w)\nu \in \mathrm{Val}$ を

$$\big((x/w)\nu\big)y = \begin{cases} w & \cdots \quad y = x \text{ のとき} \\ \nu y & \cdots \quad \mathrm{Var} \ni y \neq x \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する．これは確かに Val に属す．次に，$\varphi \in \mathrm{Val} \to W_t$ と $x \in \mathrm{Var}$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ の任意の三つ組みに対し，各 $w \in W_{\sigma x}$ に $\varphi\big((x/w)\nu\big) \in W_t$ を対応させる $W_{\sigma x} \to W_t$ の元を

$$\varphi\big((x/\square)\nu\big)$$

で表す $(t \in T)$．最後に，各可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ に対し，W^{Val} 上の単項算法 λ を次のように定義する．すなわち，定義域については

$$\mathrm{Dom}\,\lambda = \bigcup_{t \in T_\lambda} (\mathrm{Val} \to W_t)$$

と定め，値域については $t \in T_\lambda$，$\varphi \in \mathrm{Val} \to W_t$ のとき

$$\lambda\varphi \in \mathrm{Val} \to W_{\lambda t}$$

であるとし，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して $(\lambda\varphi)\nu \in W_{\lambda t}$ は

$$(\lambda\varphi)\nu = \lambda_W\Big(\varphi\big((x/\square)\nu\big)\Big)$$

と定める．$\varphi\big((x/\square)\nu\big) \in W_{\sigma x} \to W_t$，$\lambda_W(W_{\sigma x} \to W_t) \subseteq W_{\lambda t}$ であるから，確かにこう定めることができて $(\lambda\varphi)\nu \in W_{\lambda t}$ が成り立つ．

W の巾代数系としての W^{Val} の U 型代数構造にいま定義した可変子に対応する算法を付け加えて W^{Val} を代数系と成す．各 $t \in T$ に対して $\mathrm{Val} \to W_t$ が W^{Val} の t 部分であるから，これで W^{Val} は T 型代数系になった．

問題 4.3.3 二つの可変子 $\lambda \in \Gamma x$ と $\mu \in \Gamma y$ $(x, y \in \mathrm{Qvar})$ の意味が等しければ，$W_t \neq \emptyset$ なる任意の $t \in T_\lambda$ $(= T_\mu)$ に対して $\lambda t = \mu t$ が成り立つ．

例 4.3.2 可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ が $T_\lambda = \{\phi\}$ と $\lambda\phi = \phi$ をみたして W が $W_\phi = \mathbb{T}$ をみたす場合を考える．この場合，λ の意味 λ_W はすなわち写像

$$\lambda_W \in (W_{\sigma x} \to W_\phi) \to W_\phi$$

であり，これによって定まる W^{Val} 上の単項算法 λ の定義域と値域は次のようになる．

$$\mathrm{Dom}\,\lambda = \mathrm{Val} \to W_\phi \qquad\qquad \mathrm{Im}\,\lambda \subseteq \mathrm{Val} \to W_\phi$$

そこでたとえば，W_ϕ $(= \mathbb{T})$ での順序についての下限 inf によって各 $f \in W_{\sigma x} \to W_\phi$ に対して

$$\lambda_W f = \inf\{fw \mid w \in W_{\sigma x}\}$$

と定めれば，各 $\varphi \in \mathrm{Val} \to W_\phi$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して，$(\lambda\varphi)\nu \in W_\phi$ は次のように定まる．

$$(\lambda\varphi)\nu = \inf\Big\{\varphi\big((x/w)\nu\big) \mid w \in W_{\sigma x}\Big\}$$

つまり，$(\lambda\varphi)\nu=1$ であるためには，全ての $w\in W_{\sigma x}$ に対して $\varphi\bigl((x/w)\nu\bigr)=1$ であることが必要十分である．そこで，W へこう意味付けられた可変子 $\lambda\in\Gamma x$ を**全称子**と呼んで $\forall x$ で表す（記号 $\forall$ は「all(独)」の頭文字を上下に反転したものである）．つまり，λ が算号基 Γ に属す記号 $\forall$ と $x\in\mathrm{Var}$ の「積」であるとみなす（定義 4.1.1 参照）．

同様に，W_ϕ での順序についての上限 sup によって各 $f\in W_{\sigma x}\to W_\phi$ に対して

$$\lambda_W f=\sup\{fw\mid w\in W_{\sigma x}\}$$

と定めれば，各 $\varphi\in\mathrm{Val}\to W_\phi$ と $\nu\in\mathrm{Val}$ に対して，$(\lambda\varphi)\nu\in W_\phi$ は次のように定まる．

$$(\lambda\varphi)\nu=\sup\bigl\{\varphi\bigl((x/w)\nu\bigr)\mid w\in W_{\sigma x}\bigr\}$$

つまり，$(\lambda\varphi)\nu=1$ であるためには，$\varphi\bigl((x/w)\nu\bigr)=1$ なる $w\in W_{\sigma x}$ が少なくとも一つ存在することが必要十分である．そこで，W へこう意味付けられた可変子 $\lambda\in\Gamma x$ を**存称**（ぞんしょう）**子**と呼んで $\exists x$ で表す（記号 $\exists$ は「existieren(独)」の頭文字を左右に反転したものである）．

まとめれば，全称子 $\forall x$ と存称子 $\exists x$ は，$W_\phi=\mathbb{T}$ なる仮定の下で，W^{Val} 上の

$$\begin{aligned}&\mathrm{Dom}\,\forall x=\mathrm{Val}\to W_\phi &\qquad& \mathrm{Im}\,\forall x\subseteq\mathrm{Val}\to W_\phi\\ &\mathrm{Dom}\,\exists x=\mathrm{Val}\to W_\phi && \mathrm{Im}\,\exists x\subseteq\mathrm{Val}\to W_\phi\end{aligned}$$

なる算法であって，各 $\varphi\in\mathrm{Val}\to W_\phi$ と $\nu\in\mathrm{Val}$ に対して

$$\begin{aligned}(\forall x\varphi)\nu&=\inf\bigl\{\varphi\bigl((x/w)\nu\bigr)\mid w\in W_{\sigma x}\bigr\}\\(\exists x\varphi)\nu&=\sup\bigl\{\varphi\bigl((x/w)\nu\bigr)\mid w\in W_{\sigma x}\bigr\}\end{aligned}$$

をみたす．また，二つの修飾変数 $x,y\in\mathrm{Qvar}$ の型が等しければ，二つの全称子 $\forall x,\forall y$ の W での意味 $(\forall x)_W$，$(\forall y)_W$ は等しく，二つの存称子 $\exists x$，$\exists y$ の W での意味 $(\exists x)_W$，$(\exists y)_W$ は等しい（定理 4.5.3, 例 4.6.4 参照）．

上記のように，全称子は「全ての」を表し，存称子は「少なくとも一つ存在する」を表す．数量の範囲を限る意味を表す算法や記号を一般に**限量子**と呼び，全称子と存称子は限量子の一種である．しかし全称子と存称子は，上記のように限量の中でも両極端の限量を表すので，特に**極量子**と総称する．

$(A,T,\sigma,\mathrm{Prm})$ が一階述語言語で W がそれにとってのブール的認識可能世界の場合，例 4.1.2 により可変子 $\forall x,\exists x$ が $T_{\forall x}=T_{\exists x}=\{\phi\}$ と $\forall x\phi=\exists x\phi=\phi$ をみたして例 4.2.2 により W が $W_\phi=\mathbb{T}$ をみたすので，常に上記のように W へ意味付けて上記のように呼ぶことにする．と言うよりは，こういう W への意味付けと呼び方を見越してあらかじめ $\forall x,\exists x$ で表したのである．

注意 4.3.1 第 5 章の第 5.1.1 項では，極量子を例 4.3.2 とは全く異なる仕方で定義する．

問題 4.3.4 全称子 $\forall x_i$ $(i=1,\ldots,n)$ と $\varphi\in\mathrm{Val}\to W_\phi$ と $\nu\in\mathrm{Val}$ について

$$\begin{aligned}(\forall x_1\ldots\forall x_n\varphi)\nu=1\iff&\text{任意の }(w_1,\ldots,w_n)\in W_{\sigma x_1}\times\cdots\times W_{\sigma x_n}\text{ に対して}\\&\varphi\bigl((x_n/w_n)\ldots(x_1/w_1)\nu\bigr)=1\end{aligned}$$

が成り立つ（添数 $1,\ldots,n$ の順番に注意．(4.4.1) 参照）．

問題 4.3.5 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が一階述語言語で W がそれにとってのブール的認識可能世界の場合，極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ と任意の $\varphi \in \mathrm{Val}{\to}W_\phi$ について次の二式が成り立つ．ただし $\Diamond$ は，W_ϕ $(= \mathbb{T})$ の巾ブール束としての $\mathrm{Val}{\to}W_\phi$ の補法を表す．

$$\forall x\varphi = \big(\exists x(\varphi^\Diamond)\big)^\Diamond \qquad\qquad \exists x\varphi = \big(\forall x(\varphi^\Diamond)\big)^\Diamond$$

略解　任意の $v \in \mathrm{Val}$ に対しての次の計算で第二式を証明することができる．

$$\begin{aligned}
(\exists x\varphi)v &= \sup\big\{\varphi\big((x/w)v\big) \mid w \in W_{\sigma x}\big\}^{\Diamond\Diamond} \\
&= \inf\big\{\varphi\big((x/w)v\big)^\Diamond \mid w \in W_{\sigma x}\big\}^\Diamond \\
&= \inf\big\{\varphi^\Diamond\big((x/w)v\big) \mid w \in W_{\sigma x}\big\}^\Diamond \\
&= \big(\big(\forall x(\varphi^\Diamond)\big)v\big)^\Diamond \\
&= \big(\big(\forall x(\varphi^\Diamond)\big)^\Diamond\big)\, v
\end{aligned}$$

一行目が成り立つは，$a \in \mathbb{T}$ について $a^{\Diamond\Diamond} = a$ が成り立つからであり，一行目から二行目への変形が可なのは，$a, b \in \mathbb{T}$ について「$a \le b \iff a^\Diamond \ge b^\Diamond$」が成り立つからであり，二行目から三行目へと四行目から五行目への変形が可なのは，$(x/w)v$ と v それぞれの定める $\mathrm{Val}{\to}\mathbb{T}$ から $\mathbb{T}$ への射影が $\{\Diamond\}$ 準写だからである．

問題 4.3.6 V を集合とし，R を V 上の関係とし，$V{\to}\mathbb{T}$ 上の単項汎算法 $\triangledown$ と $\triangle$ を次のように定める．すなわち各 $\varphi \in V{\to}\mathbb{T}$ と $v \in V$ に対して

$$(\triangledown\varphi)v = \inf\{\varphi w \mid w \in V,\ v\,R\,w\} \qquad (\triangle\varphi)v = \sup\{\varphi w \mid w \in V,\ v\,R\,w\} \tag{4.3.1}$$

このとき，ブール束 $\mathbb{T}$ の巾ブール束としての $V{\to}\mathbb{T}$ の補法 $\Diamond$ について次の二式が成り立つ．

$$\triangledown\varphi = \big(\triangle(\varphi^\Diamond)\big)^\Diamond \qquad\qquad \triangle\varphi = \big(\triangledown(\varphi^\Diamond)\big)^\Diamond$$

また，$V{\to}\mathbb{T}$ の元の任意の族 $(\varphi_i)_{i\in I}$ に対して次の二式が成り立つ．ただし，この式の inf と sup とは，完備束 $V{\to}\mathbb{T}$ での下限と上限とを表す．

$$\triangledown\left(\inf\{\varphi_i \mid i \in I\}\right) = \inf\{\triangledown\varphi_i \mid i \in I\} \qquad \triangle\left(\sup\{\varphi_i \mid i \in I\}\right) = \sup\{\triangle\varphi_i \mid i \in I\} \tag{4.3.2}$$

逆に，$V{\to}\mathbb{T}$ 上の単項汎算法 $\{\triangledown$，$\triangle\}$ が $V{\to}\mathbb{T}$ の元の任意の族 $(\varphi_i)_{i\in I}$ に対して (4.3.2) の｛左，右｝の式をみたせば，V 上のある関係 R に対して (4.3.1) の｛左，右｝の式が任意の $\varphi \in V{\to}\mathbb{T}$ と $v \in V$ に対して成り立つ．

略解　後半の $\triangle$ について：各 $w \in V$ に対して，$V{\to}\mathbb{T}$ の元 φ_w を次のように定める．

$$\varphi_w v = \begin{cases} 1 & \cdots \quad w = v \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \quad w \ne v \in V \text{ のとき} \end{cases}$$

各 $\varphi \in V{\to}\mathbb{T}$ に対し $\varphi = \sup\{\varphi_w \mid w \in V,\ \varphi w = 1\}$，従って $\triangle\varphi = \sup\{\triangle\varphi_w \mid w \in V,\ \varphi w = 1\}$，従って各 $v \in V$ に対して $(\triangle\varphi)v = \sup\{(\triangle\varphi_w)v \mid w \in V,\ \varphi w = 1\}$ が成り立つ．そこで，V 上の関係 R を「$v\,R\,w \iff \triangle(\varphi_w)v = 1$」と定義すれば，

$$\begin{aligned}
(\triangle\varphi)v = 1 &\iff \varphi w = 1,\ v\,R\,w \text{ なる } w \in V \text{ がある} \\
&\iff \sup\{\varphi w \mid w \in V,\ v\,R\,w\} = 1
\end{aligned}$$

例 4.3.3 可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ が任意の $t \in T_\lambda$ に対して $W_{\lambda t} = W_{\sigma x} \to W_t$ をみたす場合を考える．たとえば，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が例 4.1.3 のオメガ言語で W が例 4.2.3 で作った認識対象世界であれば，$\lambda = \Omega x$ であるから，$W_{\lambda t} = W_{\sigma x \to t} = W_{\sigma x} \to W_t$ が成り立つ．

この場合，λ の W での意味 λ_W はすなわち $\bigcup_{t \in T_\lambda} (W_{\sigma x} \to W_t)$ の変換で各 $t \in T_\lambda$ に対して

$$\lambda_W (W_{\sigma x} \to W_t) \subseteq (W_{\sigma x} \to W_t)$$

をみたすものであり，これの定める W^{Val} 上の単項算法 λ の定義域と値域は次のようになる．

$$\mathrm{Dom}\,\lambda = \bigcup_{t \in T_\lambda} (\mathrm{Val} \to W_t)$$

$$\lambda(\mathrm{Val} \to W_t) \subseteq \mathrm{Val} \to (W_{\sigma x} \to W_t) \qquad (t \in T_\lambda)$$

そこでたとえば，各 $t \in T_\lambda$ と $f \in W_{\sigma x} \to W_t$ に対して

$$\lambda_W f = f$$

と定めれば，各 $t \in T_\lambda$ と $\varphi \in \mathrm{Val} \to W_t$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して，$(\lambda\varphi)\nu \in W_{\sigma x} \to W_t$ は

$$(\lambda\varphi)\nu = \varphi\big((x/\square)\nu\big)$$

と定まる．つまり任意の $w \in W_{\sigma x}$ に対して

$$\big((\lambda\varphi)\nu\big)w = \varphi\big((x/w)\nu\big)$$

が成り立つ．

特に，可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ と W が $T_\lambda = \{\phi\}$，$W_{\lambda\phi} = W_{\sigma x} \to W_\phi$ と $W_\phi = \mathbb{T}$ をみたす場合を考える．この場合，上の式は次のことと同等である．

$$\big((\lambda\varphi)\nu\big)w = 1 \iff \varphi\big((x/w)\nu\big) = 1$$

あるいは，$W_\phi = \mathbb{T}$ であることに再び留意して $(\lambda\varphi)\nu \in W_{\sigma x} \to W_\phi$ をその定義集合と同一視して $W_{\sigma x}$ の部分集合とみなせば，上のことはさらに

$$\big((\lambda\varphi)\nu\big) \ni w \iff \varphi\big((x/w)\nu\big) = 1$$

と書き直せて，従って次のようにみなすことができる．

$$(\lambda\varphi)\nu = \big\{w \in W_{\sigma x} \,\big|\, \varphi\big((x/w)\nu\big) = 1\big\}$$

つまり $(\lambda\varphi)\nu$ は，$W_{\sigma x}$ の中から $\varphi\big((x/w)\nu\big) = 1$ をみたす元 w を取り出して作った $W_{\sigma x}$ の部分集合とみなすことができる．そして，第 2.6 節で説明したように，集合から何らかの部分集合を取り出す操作がすなわち抽象である．そこで，W へこう意味付けられた可変子 $\lambda \in \Gamma x$ を**抽象子**と呼び，本書では Ωx で表す．すなわち抽象子 Ωx は，$W_\phi = \mathbb{T}$ の場合の W^{Val} 上の

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \mathrm{Val} \to W_\phi \qquad \mathrm{Im}\,\Omega x \subseteq \mathrm{Val} \to (W_{\sigma x} \to W_\phi)$$

なる算法であって，各 $\varphi \in \mathrm{Val} \to W_\phi$，$\nu \in \mathrm{Val}$，$w \in W_{\sigma x}$ に対して

$$\big((\Omega x\,\varphi)\nu\big)w = \varphi\big((x/w)\nu\big)$$

$$\big((\Omega x\,\varphi)\nu\big)w = 1 \iff \varphi\big((x/w)\nu\big) = 1$$

をみたす．また，二つの修飾変数 $x, y \in \mathrm{Qvar}$ の型が等しければ，二つの抽象子 Ωx，Ωy の W での意味 $(\Omega x)_W$，$(\Omega y)_W$ は等しい（定理 4.5.3 参照）．なお第 6 章では，格論理学について抽象子の概念を拡張する．

問題 4.3.7 抽象子 $\Omega\mathrm{x}$ ($\mathrm{x} \in \mathrm{Qvar}$) と $\varphi, \psi \in \mathrm{Val}{\to}W_\phi$ について次のことが成り立つ．ただし $\wedge, \vee, \Diamond, \le, 0, 1$ は，ブール束 W_ϕ $(= \mathbb{T})$ の巾ブール束 $\mathrm{Val}{\to}W_\phi$ と $\mathrm{Val}{\to}(W_{\sigma\mathrm{x}}{\to}W_\phi)$ とにおけるブール算法・順序関係・最小元・最大元を表す．

$$\Omega\mathrm{x}(\varphi \wedge \psi) = (\Omega\mathrm{x}\,\varphi) \wedge (\Omega\mathrm{x}\,\psi) \qquad \varphi \le \psi \iff \Omega\mathrm{x}\,\varphi \le \Omega\mathrm{x}\,\psi$$
$$\Omega\mathrm{x}(\varphi \vee \psi) = (\Omega\mathrm{x}\,\varphi) \vee (\Omega\mathrm{x}\,\psi) \qquad \Omega\mathrm{x}\,\varphi = 0 \iff \varphi = 0$$
$$\Omega\mathrm{x}(\varphi^\Diamond) = (\Omega\mathrm{x}\,\varphi)^\Diamond \qquad \Omega\mathrm{x}\,\varphi = 1 \iff \varphi = 1$$

また，極量子 $\forall\mathrm{x}$, $\exists\mathrm{x}$ と抽象子 $\Omega\mathrm{x}$ および $\varphi \in \mathrm{Val}{\to}W_\phi$ について次のことが成り立つ．

$$\forall\mathrm{x}\varphi = 1 \iff \Omega\mathrm{x}\,\varphi = 1 \qquad \exists\mathrm{x}\varphi = 0 \iff \Omega\mathrm{x}\,\varphi = 0$$

略解　左上の等式は，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ と $w \in W_{\sigma\mathrm{x}}$ をとっての次の計算で証明される．

$$\begin{aligned}
\big(\big(\Omega\mathrm{x}(\varphi \wedge \psi)\big)\nu\big)\ \mathrm{w} &= (\varphi \wedge \psi)\big((\mathrm{x}/\mathrm{w})\nu\big) \\
&= \varphi\big((\mathrm{x}/\mathrm{w})\nu\big) \wedge \psi\big((\mathrm{x}/\mathrm{w})\nu\big) \\
&= \big((\Omega\mathrm{x}\,\varphi)\nu\big)\ \mathrm{w} \wedge \big((\Omega\mathrm{x}\,\psi)\nu\big)\ \mathrm{w} \\
&= \big((\Omega\mathrm{x}\,\varphi)\nu \wedge (\Omega\mathrm{x}\,\psi)\nu\big)\ \mathrm{w} \\
&= \big((\Omega\mathrm{x}\,\varphi \wedge \Omega\mathrm{x}\,\psi)\nu\big)\ \mathrm{w}
\end{aligned}$$

次の二式も同様に証明される．右上のことは次の推論で証明される．

$$\begin{aligned}
\varphi \le \psi &\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ に対して } \varphi\nu \le \psi\nu \\
&\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ と } \mathrm{w} \in W_{\sigma\mathrm{x}} \text{ に対して } \varphi\big((\mathrm{x}/\mathrm{w})\nu\big) \le \psi\big((\mathrm{x}/\mathrm{w})\nu\big) \\
&\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ と } \mathrm{w} \in W_{\sigma\mathrm{x}} \text{ に対して } \big((\Omega\mathrm{x}\,\varphi)\nu\big)\ \mathrm{w} \le \big((\Omega\mathrm{x}\,\psi)\nu\big)\ \mathrm{w} \\
&\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ に対して } (\Omega\mathrm{x}\,\varphi)\nu \le (\Omega\mathrm{x}\,\psi)\nu \\
&\iff \Omega\mathrm{x}\,\varphi \le \Omega\mathrm{x}\,\psi
\end{aligned}$$

一番目四番目五番目の $\iff$ が成り立つのは問題 3.13.9 による．二番目の $\Longleftarrow$ が成り立つのは $(\mathrm{x}/\nu\mathrm{x})\nu = \nu$ だからである．以上により，写像 $\varphi \mapsto \Omega\mathrm{x}\,\varphi$ はブール束としての準写かつ単射である．このことと問題 3.13.6 により前半の残り二つのことが証明される．後半の全称子と抽象子の関係についてのことは次の推論で証明される．

$$\begin{aligned}
\forall\mathrm{x}\varphi = 1 &\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ に対して } (\forall\mathrm{x}\varphi)\nu = 1 \\
&\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ に対して } \inf\big\{\varphi\big((\mathrm{x}/w)\nu\big) \mid w \in W_{\sigma\mathrm{x}}\big\} = 1 \\
&\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ と } w \in W_{\sigma\mathrm{x}} \text{ に対して } \varphi\big((\mathrm{x}/w)\nu\big) = 1 \\
&\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ と } w \in W_{\sigma\mathrm{x}} \text{ に対して } \big((\Omega\mathrm{x}\,\varphi)\nu\big)w = 1 \\
&\iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ に対して } (\Omega\mathrm{x}\,\varphi)\nu = 1 \\
&\iff \Omega\mathrm{x}\,\varphi = 1
\end{aligned}$$

一番目五番目六番目の $\iff$ が成り立つのは問題 3.9.12 による．

例 4.3.4 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとっての認識可能世界 W として例 4.2.4 の言語世界 $\mathsf{A}_{\Lambda\cap\Gamma}$ をとる．ただし以後は，$\mathsf{A}_{\Lambda\cap\Gamma}$ も A で表す．そうすると，可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ の A での意味 λ_{A} は，すなわち写像

$$\lambda_{\mathsf{A}} \in \left(\bigcup_{t \in \mathsf{T}_\lambda} (\mathsf{A}_{\sigma x} \to \mathsf{A}_t)\right) \to \mathsf{A}$$

で各 $t \in \mathsf{T}_\lambda$ に対して

$$\lambda_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}_{\sigma x} \to \mathsf{A}_t) \subseteq \mathsf{A}_{\lambda t}$$

をみたすものである．そこでたとえば，各 $t \in \mathsf{T}_\lambda$ と $f \in \mathsf{A}_{\sigma x} \to \mathsf{A}_t$ に対して

$$\lambda_{\mathsf{A}} f = \lambda(fx)$$

と定めることができる．ただしここで，可変子 λ に対応する A 上の算法も λ で表している．

4.3.3　定付値が定める意味写像

§ 前項のように T の可変子の W への意味付けを定めることにより，$W^{\mathrm{Val}} = \bigcup_{t \in \mathsf{T}} (\mathrm{Val} \to W_t)$ 上に T 型代数構造が定めてあるものとする．そうすると，A から W への各定付値 Φ に対し，A から W^{Val} への T 型代数系としての保型準写 Φ^* を以下のように作ることができる．

まず，各 $t \in \mathsf{T}$ に対して，写像

$$\varphi_t \in \mathrm{Prm}_t \to (\mathrm{Val} \to W_t)$$

を次のように定めることができる．すなわち，$\mathrm{Prm}_t = \emptyset$ なら空集合律に沿って $\varphi_t = \emptyset$ と定め，$\mathrm{Prm}_t \neq \emptyset$ なら，各 $a \in \mathrm{Prm}_t$ $(= \mathrm{Con}_t \amalg \mathrm{Var}_t)$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して，$(\varphi_t a)\nu \in W_t$ を

$$(\varphi_t a)\nu = \begin{cases} \Phi a & \cdots \quad a \in \mathrm{Con}_t \text{ のとき} \\ \nu a & \cdots \quad a \in \mathrm{Var}_t \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．これは確かに W_t に属す．こうして写像 $\varphi_t \in \mathrm{Prm}_t \to (\mathrm{Val} \to W_t)$ の族 $(\varphi_t)_{t \in \mathsf{T}}$ が出来るが，$\mathrm{Prm} = \coprod_{t \in \mathsf{T}} \mathrm{Prm}_t$，$\mathrm{Val} \to W_t \subseteq W^{\mathrm{Val}}$ $(t \in \mathsf{T})$ であるから，これら写像がすべて一写像

$$\varphi \in \mathrm{Prm} \to W^{\mathrm{Val}}$$

に拡張され，$\varphi(\mathrm{Prm}_t) \subseteq \mathrm{Val} \to W_t$ が成り立つ $(t \in \mathsf{T})$．問題 3.4.8 によればつまり，φ は Prm から W^{Val} への保型写像である．従って $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ が T 型の普遍型付代数系であることにより，φ はさらに T 型代数系としての保型準写

$$\Phi^* \in \mathsf{A} \to W^{\mathrm{Val}}$$

に拡張される（図 4.1 参照）．こうして出来る保型準写 Φ^* を定付値 Φ の定める**意味写像**と呼ぶ．

意味写像 Φ^* は，保型写像であるから任意の $t \in \mathsf{T}$ に対して

$$\Phi^*(\mathsf{A}_t) \subseteq \mathrm{Val} \to W_t$$

をみたし，従って任意の $a \in \mathsf{A}_t$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して

$$(\Phi^* a)\nu \in W_t$$

図 4.1: 意味写像を定める可換図式

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Prm} & \xrightarrow{i} & A \\
{}^{\varphi}\downarrow & \swarrow_{\Phi^*} & \downarrow^{\sigma} \\
W^{\mathrm{Val}} & \to & \mathsf{T}
\end{array}
$$

をみたす．また，Φ^* は φ_t $(t \in \mathsf{T})$ の拡張でもあるから，$a \in \mathrm{Prm}$ $(= \mathrm{Con} \amalg \mathrm{Var})$，$\nu \in \mathrm{Val}$ なら

$$
(\Phi^* a)\nu = \begin{cases} \Phi a & \cdots \quad a \in \mathrm{Con} \text{ のとき} \\ \nu a & \cdots \quad a \in \mathrm{Var} \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.3.3}
$$

が成り立つ．A が Prm により生成されるから，問題 3.3.7 により，意味写像は任意の $a \in \mathrm{Prm}$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して (4.3.3) をみたす擬写 $\Phi^* \in A {\to} W^{\mathrm{Val}}$ として特徴付けられる（問題 3.4.9 参照）．

問題 4.3.8 任意の $t \in \sigma A$ に対して $W_t \neq \emptyset$ が成り立つ（定義 4.2.1 参照）．

略解　$A_t \neq \emptyset$ であって，上述の通り，A から W への定付値 Φ に対して $\Phi^*(A_t) \subseteq \mathrm{Val} {\to} W_t$ が成り立つからである．

例 4.3.5 たとえば例 4.1.1 の命題言語のように $\mathrm{Con} = \emptyset$ の場合を考える．この場合，空集合律により A から W への定付値は $\emptyset$ に限られ，定付値 $\emptyset$ が定める意味写像 $\emptyset^*$ とは，A から W^{Val} への擬写で次の条件をみたすものに他ならない．

$$
(\emptyset^* x)\nu = \nu x \qquad\qquad (x \in \mathrm{Var},\ \nu \in \mathrm{Val})
$$

やはり命題言語のように，さらに $\mathrm{Qvar} = \emptyset$ が成り立つ場合を考える．この場合，A は Var を素元系とする普遍型付代数系であり，W とその巾代数系 W^{Val} は A と同型の代数系であり，$\emptyset^*$ は A から W^{Val} への保型準写である．

そこで任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ をとると，射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}} {\to} W$ も保型準写であるから，A の各元 a に $(\emptyset^* a)\nu$ を対応させる写像は，A から W への保型準写である．他方で A の普遍性により，ν は A から W への保型準写に一意に拡張される．この拡張を ν^* で表せば，任意の $x \in \mathrm{Var}$ に対して $(\emptyset^* x)\nu = \nu x = \nu^* x$ であるから，ν^* の一意性により，任意の $a \in A$ に対しても次の式が成り立つ．

$$
(\emptyset^* a)\nu = \nu^* a
$$

そこで任意の保型準写 $f \in A {\to} W$ をとれば，$\nu = f|_{\mathrm{Var}}$ と定めるとき $\nu \in \mathrm{Val}$ であるから，ν^* の一意性により $f = \nu^*$，従って任意の $a \in A$ に対して $fa = (\emptyset^* a)\nu$ が成り立つ．

以上により，$\mathrm{Con} = \mathrm{Qvar} = \emptyset$ の場合，ν を Val 全体に亘って動かして得られる写像 $a \mapsto (\emptyset^* a)\nu$ の全体は，A から W への保型準写の全体に等しい．なお $(A, \mathsf{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ が命題言語の場合，A から W への保型準写とは，A から $\mathbb{T}$ への $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写すなわち $\mathbb{T}$ 表現のことに他ならない．

4.4　意味写像の基本二定理

$ 前節では，形式言語がそれにとっての認識可能世界に対応付けられる代数学的仕組みの理論すなわち対応論を説明した．それを以下の三節で敷衍する．

この節を通じて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を形式言語とし，**W **をそれにとっての認識可能世界とし，**Val_W **を** Val **で表し，**T **の可変子の** W **への意味付け** $\lambda \mapsto \lambda_W$ **により** W^{Val} **の** T **型代数構造が定めてあるものとし，**Φ **を** A **から** W **への定付値とする．**そうすると前節で示した通り，意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}}$ が定まる．なおさらに，A, W^{Val}, W の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\cap\Gamma}$ で表す．ただし，λ が可変子の場合には，α_λ と β_λ は共に λ で表す．

また，$\Lambda \subseteq \Gamma \cup \Gamma\mathrm{Var} \subseteq (\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^+$ であったことを想起して第 3.16 節の諸概念を適用し，a に自由に現れる変数の全体を Fvar^a で表す（記号「Fvar」は「free variable」に因む）．第 3.16 節の記号と対照させれば次のようになる．

$$\mathrm{Fvar}^a = \mathrm{Var}^a_{\mathrm{free}} = \{x \in \mathrm{Var} \mid x \ll a\}$$

定理 4.4.1 (意味写像定理) $a \in A$，$\nu, \nu' \in \mathrm{Val}$ **であって任意の** $x \in \mathrm{Fvar}^a$ **に対して** $\nu x = \nu' x$ **が成り立つとする．このとき，**$(\Phi^* a)\nu = (\Phi^* a)\nu'$ **が成り立つ．**

証明　普遍型付代数系 A における a の階数 r についての帰納法で証明する．

$r = 0$ **の場合：**$a \in \mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \cup \mathrm{Var}$ である．$a \in \mathrm{Con}$ のときには意味写像の条件 (4.3.3) により

$$(\Phi^* a)\nu = \Phi a = (\Phi^* a)\nu'$$

が成り立つ．$a \in \mathrm{Var}$ のときには，定理 3.16.2 により $a \in \mathrm{Fvar}^a$ だから，(4.3.3) と仮定により

$$(\Phi^* a)\nu = \nu a = \nu' a = (\Phi^* a)\nu'$$

が成り立つ．つまり，いずれのときにも定理の結論が成り立つ．

$r \geq 1$ **の場合：**定理 3.8.2 により，ある $\lambda \in \Lambda$ と $a_1, \ldots, a_j \in A$ によって $a = \alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_j)$ と表されて $\mathrm{rk}\, a = \sum_{k=1}^{j} \mathrm{rk}\, a_k + 1$ が成り立つ．そして，$\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}}$ が保型準写であるから

$$(\Phi^* a)\nu = \bigl(\beta_\lambda(\Phi^* a_1, \ldots, \Phi^* a_j)\bigr)\nu$$

が成り立つ．

$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$ なら，射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}} \to W$ が U 型代数系としての保型準写であるから，上の式は

$$(\Phi^* a)\nu = \omega_\lambda\bigl((\Phi^* a_1)\nu, \ldots, (\Phi^* a_j)\nu\bigr)$$

と書き替えられ，同様な式が ν' についても成り立つ．$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$ ならまた，(4.1.1) により $\mathrm{Prm}^\lambda = \emptyset$ であるから，定理 3.16.4 により $\mathrm{Fvar}^a = \bigcup_{k=1}^{j} \mathrm{Fvar}^{a_k}$，特に $\mathrm{Fvar}^{a_k} \subseteq \mathrm{Fvar}^a$ であるので，帰納法の仮定により $(\Phi^* a_k)\nu = (\Phi^* a_k)\nu'$ が成り立つ $(k = 1, \ldots, j)$．従って $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$ なら，定理の結論が成り立つ．

そこで $\lambda \notin \Lambda \cap \Gamma$ と仮定する．そうすると，$\lambda \in \Gamma x$ なる $x \in \mathrm{Qvar}$ があって，$j = 1$ であることと記法の規約により $a = \lambda a_1$ と書かれる．従って，

$$(\Phi^* a)\nu = \bigl(\lambda(\Phi^* a_1)\bigr)\nu = \lambda_W\bigl((\Phi^* a_1)\bigl((x/\square)\nu\bigr)\bigr)$$

が成り立ち，同様の式が ν' についても成り立つ．従って，定理の結論を導くためには

$$(\Phi^* a_1)\bigl((x/\square)\nu\bigr) = (\Phi^* a_1)\bigl((x/\square)\nu'\bigr)$$

を証明すればよく，そのためには任意の $w \in W_{\sigma x}$ に対して $(\Phi^* a_1)\bigl((x/w)\nu\bigr) = (\Phi^* a_1)\bigl((x/w)\nu'\bigr)$ なることを示せばいいが，これは，任意の $y \in \mathrm{Fvar}^{a_1}$ に対して $\bigl((x/w)\nu\bigr)y = \bigl((x/w)\nu'\bigr)y$ なる式

の成り立つことを示せば，帰納法の仮定から導かれる．この式は実際に成り立つ．なぜなら，まず $y = x$ なら $\big((x/w)v\big)y = w = \big((x/w)v'\big)y$ となり，次に $y \neq x$ なら，(4.1.1) により $y \notin \mathrm{Prm}^{\lambda}$ であるから定理 3.16.4 により $y \in \mathrm{Fvar}^{a}$，従って $\big((x/w)v\big)y = vy = v'y = \big((x/w)v'\big)y$ となるからである．

問題 4.4.1 (✓) A の可変子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ とその定義域の元 $a \in A$ が $\sigma(\lambda a) = \sigma a$ と $x \not\ll a$ をみたすと仮定する．このとき $t = \sigma a$ が $t \in T_\lambda$ と $\lambda t = t$ をみたし，従って λ の W での意味 λ_W が $\lambda_W(W_{\sigma x} {\to} W_t) \subseteq W_t$ をみたすことに留意して，さらに λ_W が任意の定値写像 $f \in W_{\sigma x} {\to} W_t$ をその一定値 $fw \in W_t$ $(w \in W_{\sigma x})$ にうつすと仮定する．そうすると $\Phi^*(\lambda a) = \Phi^* a$ が成り立つ．

略解　任意の $v \in \mathrm{Val}$ をとると，任意の $w \in W_{\sigma x}$ に対して意味写像定理により $(\Phi^* a)\big((x/w)v\big) = (\Phi^* a)v$ であるから，$(\Phi^* a)\big((x/\square)v\big)$ は $W_{\sigma x}$ から W_t への定値 $(\Phi^* a)v$ をとる写像であり，従って $\big(\Phi^*(\lambda a)\big)v = \big(\lambda(\Phi^* a)\big)v = \lambda_W\big((\Phi^* a)\big((x/\square)v\big)\big) = (\Phi^* a)v$ が成り立つ．

問題 4.4.2 (✓) 極量子 $\lambda \in \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ と $a \in A_\phi$ が $x \not\ll a$ をみたせば，$\Phi^*(\lambda a) = \Phi^* a$ が成り立つ．従って，Γx $(x \in \mathrm{Qvar})$ に属す任意の二つの極量子 λ, μ と任意の $a \in A_\phi$ に対して，$\Phi^*\big(\lambda(\mu a)\big) = \Phi^*(\mu a)$ が成り立つ．

問題 4.4.3 (✓) Φ' を A から W へのもう一つの定付値とし，$a \in A$ とし，a に現れる任意の定数 c に対して $\Phi c = \Phi' c$ が成り立つと仮定する．このとき $\Phi^* a = \Phi'^* a$ が成り立つ．

次の定理を記述するために，まず，第 4.3.2 項で定義した Val の変換 (x/w) を次のように拡張する．すなわち，$x_1, \ldots, x_n$ を相異なる変数とし，$w_i \in W_{\sigma x_i}$ とする $(i = 1, \ldots, n)$．このとき問題 4.3.1 により，各 $v \in \mathrm{Val}$ に対して，Val の元 v' で

$$v'x = \begin{cases} w_i & \cdots \quad x = x_i \text{ のとき } (i = 1, \ldots, n) \\ vx & \cdots \quad \mathrm{Var} \ni x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ のとき} \end{cases}$$

なるものがある．これを

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_1, \ldots, x_n}{w_1, \ldots, w_n} \end{pmatrix} v \qquad \text{あるいは} \qquad (x_i/w_i)v$$

で表す．そうすると，記号

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_1, \ldots, x_n}{w_1, \ldots, w_n} \end{pmatrix} \qquad \text{と} \qquad (x_i/w_i)$$

は Val の同一の変換を表すものとみなされる．この変換を**値換**と呼ぶ（置換と混同しないように）．ただし便宜上，$n = 0$ の場合も含めて考え，この場合の値換は恒等変換のことであるとする．

以上の定義から，次の二つのことが直ちに分かる．すなわち，任意の n 次の置換 p に対して

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_1, \ldots, x_n}{w_1, \ldots, w_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_{p1}, \ldots, x_{pn}}{w_{p1}, \ldots, w_{pn}} \end{pmatrix}$$

が成り立ち，任意の $i \in \{2, \ldots, n\}$ に対して次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dfrac{x_1, \ldots, x_n}{w_1, \ldots, w_n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{x_1, \ldots, x_{i-1}}{w_1, \ldots, w_{i-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_i, \ldots, x_n}{w_i, \ldots, w_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{x_i, \ldots, x_n}{w_i, \ldots, w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_1, \ldots, x_{i-1}}{w_1, \ldots, w_{i-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

定理 4.4.2 (代入値換定理) $x_1, \dots, x_n$ **を** A **の相異なる変数とし，**$c_1, \dots, c_n$ **を** A **の元とし，**x_i **と** c_i **は同型で，**$a \in A$ **において** x_i **が** c_i **から自由であるとする** $(i = 1, \dots, n)$**．このとき，任意の** $v \in \mathrm{Val}$ **について次の式が成り立つ．**

$$\left(\Phi^*\left(a\left(\frac{x_1, \dots, x_n}{c_1, \dots, c_n}\right)\right)\right)v = (\Phi^* a)\left(\left(\frac{x_1, \dots\dots\dots, x_n}{(\Phi^* c_1)v, \dots, (\Phi^* c_n)v}\right)v\right)$$

証明　n と $r = \mathrm{rk}\, a$ についての帰納法を使う．$n = 0$ のときは，代入 (x_i/c_i) も値換 $\big(x_i/(\Phi^* c_i)v\big)$ も恒等変換であるから，定理の式の両辺は $(\Phi^* a)v$ に等しい．そこで $n \geq 1$ と仮定する．

$r = 0$ **の場合：**$a \in \mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \cup \mathrm{Var}$ である．$a \in \mathrm{Con}$ なら，$a \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ であるから代入の定義 (3.17.1) により左辺は $(\Phi^* a)v$ に等しく，従って意味写像の条件 (4.3.3) により両辺とも Φa に等しい．$a = x_i$ なら，左辺は (3.17.1) により $(\Phi^* c_i)v$ に等しく，右辺は (4.3.3) と値換の定義によりやはり $(\Phi^* c_i)v$ に等しい．$\mathrm{Var} \ni a \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ なら，左辺は $a \in \mathrm{Con}$ のときと同様に va に等しく，右辺は (4.3.3) と値換の定義によりやはり va に等しい．

$r \geq 1$ **の場合：**定理 3.8.2 により，ある $\lambda \in \Lambda$ と $a_1, \dots, a_j \in A$ により $a = \alpha_\lambda(a_1, \dots, a_j)$ と表されて $r = \sum_{k=1}^{j} \mathrm{rk}\, a_k + 1$ が成り立つ．そこで

$$b = a\left(\frac{x_1, \dots, x_n}{c_1, \dots, c_n}\right), \qquad b_k = a_k\left(\frac{x_1, \dots, x_n}{c_1, \dots, c_n}\right), \qquad u = \left(\frac{x_1, \dots\dots\dots, x_n}{(\Phi^* c_1)v, \dots, (\Phi^* c_n)v}\right)v$$

と定める $(k = 1, \dots, j)$．従って，$(\Phi^* b)v = (\Phi^* a)u$ が証明すべき式である．

$x_i \not\ll a$ なる i があれば，補題 3.17.2 により定理の式の左辺は記号 x_i，c_i を除いても変わらず，定理 4.4.1 により定理の式の右辺は記号 x_i，$(\Phi^* c_i)v$ を除いても変わらず，従って n についての帰納法の仮定により定理の式が成り立つ．そこで，$x_i \ll a$ $(i = 1, \dots, n)$ と仮定する．そうすると定理 3.16.4 により $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \mathrm{Prm}^\lambda = \emptyset$ が成り立つ．従って，代入の定義 (3.17.2) により $b = \alpha_\lambda(b_1, \dots, b_j)$ が成り立ち，定理 3.16.6 系により，各 a_k において x_i は c_i から自由である $(i = 1, \dots, n)$．従って，r についての帰納法の仮定により $(\Phi^* b_k)v = (\Phi^* a_k)u$ が成り立つ $(k = 1, \dots, j)$．また，$\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}}$ が保型準写であることより

$$(\Phi^* b)v = \big(\beta_\lambda(\Phi^* b_1, \dots, \Phi^* b_j)\big)v \qquad\qquad (\Phi^* a)u = \big(\beta_\lambda(\Phi^* a_1, \dots, \Phi^* a_j)\big)u$$

が成り立つ．$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$ なら，射影 $\mathrm{pr}_v \in W^{\mathrm{Val}} \to W$ と $\mathrm{pr}_u \in W^{\mathrm{Val}} \to W$ が共に U 型代数系としての保型準写であるから，上の二式は

$$(\Phi^* b)v = \omega_\lambda\big((\Phi^* b_1)v, \dots, (\Phi^* b_j)v\big) \qquad\qquad (\Phi^* a)u = \omega_\lambda\big((\Phi^* a_1)u, \dots, (\Phi^* a_j)u\big)$$

と書き換えられ，$(\Phi^* b_k)v = (\Phi^* a_k)u$ だったから $(\Phi^* b)v = (\Phi^* a)u$，すなわち定理の式を得る．

そこで $\lambda \notin \Lambda \cap \Gamma$ と仮定する．そうすると，$\lambda \in \Gamma x$ なる $x \in \mathrm{Qvar}$ があって，$j = 1$ であることと記法の規約により $a = \lambda a_1$，$b = \lambda b_1$ と書かれる．従って，先の二式は

$$(\Phi^* b)v = \lambda_W\big((\Phi^* b_1)\big((x/\square)v\big)\big) \qquad\qquad (\Phi^* a)u = \lambda_W\big((\Phi^* a_1)\big((x/\square)u\big)\big)$$

と書き換えられる．従って，定理の式を証明するためには

$$(\Phi^* b_1)\big((x/\square)v\big) = (\Phi^* a_1)\big((x/\square)u\big)$$

を示せばよく，そのためには任意の $w \in W_{\sigma x}$ に対して

$$(\Phi^* b_1)\big((x/w)v\big) = (\Phi^* a_1)\big((x/w)u\big)$$

を示せばいいが，a_1 において x_i が c_i から自由だったから，r についての帰納法の仮定により

$$(\Phi^* b_1)\big((x/w)v\big) = (\Phi^* a_1)\left(\left(\frac{x_1,\dots\dots\dots,x_n}{(\Phi^* c_1)v',\dots,(\Phi^* c_n)v'}\right)\big((x/w)v\big)\right)$$

が成り立つ．ただし $v' = (x/w)v$ である．他方，$a = \lambda a_1$ において x_i が c_i から自由で $x_i \ll a$, $x \in \mathrm{Prm}^\lambda$ であったから，定理 3.16.6 により $x \not\ll c_i$ でなければならない．従って定理 4.4.1 により $(\Phi^* c_i)v' = (\Phi^* c_i)v$ が成り立つ $(i = 1,\dots,n)$．また，$\{x_1,\dots,x_n\} \cap \mathrm{Prm}^\lambda = \emptyset$, $x \in \mathrm{Prm}^\lambda$ であったから，$x_1,\dots,x_n,x$ は相異なる．これらのことと (4.4.1) により

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1,\dots\dots\dots,x_n}{(\Phi^* c_1)v',\dots,(\Phi^* c_n)v'}\right)\big((x/w)v\big) &= \left(\frac{x_1,\dots\dots\dots,x_n}{(\Phi^* c_1)v,\dots,(\Phi^* c_n)v}\right)\big((x/w)v\big)\\ &= (x/w)\left(\left(\frac{x_1,\dots\dots\dots,x_n}{(\Phi^* c_1)v,\dots,(\Phi^* c_n)v}\right)v\right) = (x/w)u\end{aligned}$$

が成り立つ．従って $(\Phi^* b_1)\big((x/w)v\big) = (\Phi^* a_1)\big((x/w)u\big)$ が確かに成り立つ．

4.5　表現関数

＄ 前節から引き続いて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を形式言語とし，**W **をそれにとっての認識可能世界とし，**Val_W **を** Val **で表し，T の可変子の** W **への意味付け** $\lambda \mapsto \lambda_W$ **により** W^{Val} **の T 型代数構造が定めてあるものとし，**Φ **を** A **から** W **への定付値とする．**そうすると，意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}}$ が定まる．なおさらに，A, W^{Val}, W の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\cap\Gamma}$ で表す．ただし，λ が可変子の場合には，α_λ と β_λ は共に λ で表す．

4.5.1　その定義

§ 第 4.3 節では，A が W に対応付けられる仕組みを説明すると言いながら，作った意味写像 Φ^* は，A から W への写像ではなく A から W^{Val} への写像であった．それは実は，Φ^* が A の各元 a を W の元にではなく W 上の関数に対応付けたのである．そのことをここで説明する．

まず，定理 3.15.1 により Fvar^a は有限集合であるから，有限個の相異なる変数 $x_1,\dots,x_n$ で

$$\mathrm{Fvar}^a \subseteq \{x_1,\dots,x_n\} \tag{4.5.1}$$

をみたすものがある．こういう相異なる変数列を a の**自由変数列**と呼ぶ．従って，自由変数列は一意には定まらないし，a の自由変数列の中の変数がすべて実際に a に自由に現れるとは限らない．

なお，この説明は $n = 0$ の場合を含む．この場合，$\{x_1,\dots,x_n\}$ は空集合 $\emptyset$ を意味し，従って (4.5.1) は $\mathrm{Fvar}^a = \emptyset$ と同等である．こういう元 a を**閉元**と呼ぶ．

問題 4.5.1 $a_1,\dots,a_k \in A$ なら，これらに共通の自由変数列が存在する．

さて，$\sigma a = t$, $\sigma x_i = t_i$ とする $(i = 1,\dots,n)$．このとき，Φ, a および $x_1,\dots,x_n$ から関数

$$\alpha \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$$

を作る．ただし $n = 0$ の場合には，端書きに記した空集合律により $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} = \{\emptyset\}$ であるので，やはり端書きに記した一乗便法を適用して $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$ を W_t とみなす．従ってこの場合には，α は W_t の元であるが，これを 0 **変数の関数**とみなす．

関数 α は次のように作る．すなわち $(w_1,\dots,w_n)\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}$ のとき，$x_1,\dots,x_n$ が相異なって x_i と w_i が同型であるから，問題 4.3.1 により，Val の元 ν で $\nu x_i = w_i\ (i=1,\dots,n)$ をみたすものがある．こういう ν は唯一つとは限らないが，任意の一つを選んで

$$\alpha(w_1,\dots,w_n) = (\Phi^* a)\nu$$

とする．$\Phi^* a \in \mathrm{Val}{\to}W_t$ だから，右辺の値は確かに W_t に属す．定理 4.4.1 により，この値は $\nu x_i = w_i\ (i=1,\dots,n)$ なる $\nu\in\mathrm{Val}$ の選び方に依らない．従って α は，確かに $\Phi, a, x_1,\dots,x_n$ だけによって定まる n 変数の関数である．そこでこの関数 α を，Φ の下で $x_1,\dots,x_n$ に関して a **が表現する関数**，または Φ の下での $x_1,\dots,x_n$ に関する a **の表現関数**と呼び，

$$a^\Phi(x_1,\dots,x_n)$$

で表す．この関数の $(w_1,\dots,w_n)\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}$ における値は $a^\Phi(w_1,\dots,w_n)$ で表す（この記法は，微分積分学で関数 $f(x)$ の a における値を $f(a)$ で表すのに似ている）．すなわち，形式的には

$$a^\Phi(w_1,\dots,w_n) = \bigl(a^\Phi(x_1,\dots,x_n)\bigr)(w_1,\dots,w_n) \tag{4.5.2}$$

であり，具体的には

$$a^\Phi(w_1,\dots,w_n) = (\Phi^* a)\nu \qquad \bigl(\nu\in\mathrm{Val},\ \nu x_i = w_i\ (i=1,\dots,n)\bigr)$$

である．ただしいずれの記法でも，上付の Φ を省略する場合がある．つまり本書では，$a(x_1,\dots,x_n)$ なる記号は a の表現関数を表すのであり，a を表すのではない．**論理学教本の中に，$a(x_1,\dots,x_n)$ で以て「変数列 $x_1,\dots,x_n$ と関連させて捉えた元 a」としか呼べないいい加減な概念を表すものがある．そういういい加減な記法とは厳格に区別されたい．**

例 4.5.1 $a\in\mathrm{Con}$ とする．このとき，定理 3.16.2 により $\mathrm{Fvar}^a=\emptyset$ であるから，任意の相異なる変数の列 $x_1,\dots,x_n$ が a の自由変数列になり，表現関数 $a^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ が出来る $(n\ge 0)$．任意の $\nu\in\mathrm{Val}$ に対して (4.3.3) により $(\Phi^* a)\nu=\Phi a$ が成り立つから，$a^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ は，$W_{\sigma x_1}\times\cdots\times W_{\sigma x_n}$ 上で定義され一定値 $\Phi a\in W_{\sigma a}$ をとる**定値関数**である（問題 4.5.3 参照）．

$x\in\mathrm{Var}$ とする．このとき，定理 3.16.2 により $\mathrm{Fvar}^x=\{x\}$ であるから，$x\in\{x_1,\dots,x_n\}$ なる任意の相異なる変数の列 $x_1,\dots,x_n$ が x の自由変数列になり，表現関数 $x^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ が出来る．$x=x_i$ とする．そうすると，任意の $\nu\in\mathrm{Val}$ に対して (4.3.3) により $(\Phi^* x)\nu=\nu x_i$ が成り立つから，任意の $(w_1,\dots,w_n)\in W_{\sigma x_1}\times\cdots\times W_{\sigma x_n}$ に対して $x^\Phi(w_1,\dots,w_n)=w_i$ が成り立つ．つまり $x^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ は，$W_{\sigma x_1}\times\cdots\times W_{\sigma x_n}$ から $W_{\sigma x_i}$ へのいわゆる**射影**である．

問題 4.5.2 $a\in A$ の表現関数 $a^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ と $(w_1,\dots,w_n)\in W_{\sigma x_1}\times\cdots\times W_{\sigma x_n}$ について次の式が成り立つ．

$$a^\Phi(w_1,\dots,w_n) = (\Phi^* a)\left(\left(\frac{x_1,\dots,x_n}{w_1,\dots,w_n}\right)\nu\right) \qquad (\nu\in\mathrm{Val})$$

問題 4.5.3 $x_1,\dots,x_n$ が $a\in A$ の自由変数列であれば，$W_{\sigma x_1}\times\cdots\times W_{\sigma x_n}$ から $W_{\sigma a}$ への関数 f で任意の $\nu\in\mathrm{Val}$ に対して $f(\nu x_1,\dots,\nu x_n)=(\Phi^* a)\nu$ をみたすものは，a の表現関数 $a^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ に限る．

問題 4.5.4 $a,b\in A$ についての次の三条件は同等である．

1. $\Phi^*a = \Phi^*b$ が成り立つ．

2. $x_1,\dots,x_n$ が a, b に共通の自由変数列なら $a^\Phi(x_1,\dots,x_n) = b^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ が成り立つ．

3. a, b に共通の自由変数列 $x_1,\dots,x_n$ で $a^\Phi(x_1,\dots,x_n) = b^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ なるものがある．

注意 4.5.1 問題 4.5.4 によれば，$a, b \in A$ に共通の自由変数列 $x_1,\dots,x_n$ で $a^\Phi(x_1,\dots,x_n) = b^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ なるものがあることを $a \sim_\Phi b$ で表せば，$\sim_\Phi$ は A 上の同値関係であって，Φ^* の定める同値関係 $=_{\Phi^*}$ に等しい（第 3.9.2 項参照）．つまり，A の元を Φ^* による像の異同によって類別することは，表現関数の異同によって類別することに等しい．この項冒頭で「Φ^* が A の各元 a を W の元にではなく W 上の関数に対応付けた」と言ったのはこの辺のことを指す．

問題 4.5.5 $x_1,\dots,x_n$ を $a \in A$ の自由変数列とし，p を n 次の置換とする $(n \geq 1)$．そうすると，$x_{p1},\dots,x_{pn}$ も a の自由変数列であるから，二つの表現関数 $a^\Phi(x_1,\dots,x_n)$，$a^\Phi(x_{p1},\dots,x_{pn})$ が出来る．これらを α, β と書けば，任意の $(w_1,\dots,w_n) \in W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ に対して $\alpha(w_1,\dots,w_n) = \beta(w_{p1},\dots,w_{pn})$ が成り立つ．

問題 4.5.6 $a \in A$ とし，$x'_1,\dots,x'_n,x_1,\dots,x_m$ を相異なる変数とし，$x_1,\dots,x_m$ を a の自由変数列とする．そうすると，$x'_1,\dots,x'_n,x_1,\dots,x_m$ も a の自由変数列であるから，二つの表現関数 $a^\Phi(x_1,\dots,x_m)$，$a^\Phi(x'_1,\dots,x'_n,x_1,\dots,x_m)$ が出来る．これらを α, β と書けば，$W_{\sigma x'_1} \times \cdots \times W_{\sigma x'_n} \times W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_m}$ の任意の元 $(w'_1,\dots,w'_n,w_1,\dots,w_m)$ に対して $\alpha(w_1,\dots,w_m) = \beta(w'_1,\dots,w'_n,w_1,\dots,w_m)$ が成り立つ．

問題 4.5.7 a が A の閉元であれば，$v \in \mathrm{Val}$ によらず $(\Phi^*a)v$ は一定であり，従って a の表現関数は定値関数である．

4.5.2　算法との関係

§ ここでは，表現関数と A, W の算法との関係を説明する．なお，この項の内容は第 4.6 節の内容と密接に関連している．

定理 4.5.1 $a \in A$ **とし，**$x_1,\dots,x_n$ **を** a **の自由変数列とする．このとき，表現関数** $a^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ **について次の三つのことが成り立つ．**

1. $a = \alpha_\lambda(a_1,\dots,a_j)$，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$ **なら，**$x_1,\dots,x_n$ **は** a_k **の自由変数列でもあり** $(k = 1,\dots,j)$**，表現関数** $a_1^\Phi(x_1,\dots,x_n),\dots,a_j^\Phi(x_1,\dots,x_n)$ **は任意の** $(w_1,\dots,w_n) \in W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ **に対して次の式をみたす．**

$$a^\Phi(w_1,\dots,w_n) = \omega_\lambda\bigl(a_1^\Phi(w_1,\dots,w_n),\dots,a_j^\Phi(w_1,\dots,w_n)\bigr)$$

2. $a = \lambda b$，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x$，$x \in \mathrm{Qvar} - \{x_1,\dots,x_n\}$ **なら，**$x, x_1,\dots,x_n$ **は** b **の自由変数列であり，表現関数** $b^\Phi(x, x_1,\dots,x_n)$ **は任意の** $(w_1,\dots,w_n) \in W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ **に対して**

$$a^\Phi(w_1,\dots,w_n) = \lambda_W\bigl(b^\Phi(\square, w_1,\dots,w_n)\bigr)$$

をみたす．ただし記号 $b^\Phi(\square, w_1,\dots,w_n)$ **は，各** $w \in W_{\sigma x}$ **に** $b^\Phi(w, w_1,\dots,w_n) \in W_{\sigma b}$ **を対応させる** $W_{\sigma x} \to W_{\sigma b}$ **の元を表し，これは** λ_W **の定義域に属す．**

3. $a = \lambda b$, $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x_i$ **なら，**$x_1, \dots, x_n$ **は** b **の自由変数列でもあり，表現関数** $b^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ **は任意の** $(w_1, \dots, w_n) \in W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ **に対して**

$$a^\Phi(w_1, \dots, w_n) = \lambda_W\bigl(b^\Phi(w_1, \dots, w_{i-1}, \square, w_{i+1}, \dots, w_n)\bigr)$$

をみたす $(i = 1, \dots, n)$**．ただし記号** $b^\Phi(w_1, \dots, w_{i-1}, \square, w_{i+1}, \dots, w_n)$ **は，各** $w \in W_{\sigma x_i}$ **に** $b^\Phi(w_1, \dots, w_{i-1}, w, w_{i+1}, \dots, w_n) \in W_{\sigma b}$ **を対応させる** $W_{\sigma x_i} \to W_{\sigma b}$ **の元を表し，これは** λ_W **の定義域に属す．**

証明　1. $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$ であるから，(4.1.1) により $\mathrm{Prm}^\lambda = \emptyset$，従って定理 3.16.4 により $\mathrm{Fvar}^a = \bigcup_{k=1}^{j} \mathrm{Fvar}^{a_k}$，従って $\mathrm{Fvar}^{a_k} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ が成り立つ．意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}}$ は保型準写である．また，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して，射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}} \to W$ は U 型代数系としての保型準写である．このことと $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$ なることにより，次のように計算することができる．

$$\begin{aligned} a^\Phi(\nu x_1, \dots, \nu x_n) &= (\Phi^* a)\nu = \bigl(\Phi^*\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \dots, a_j)\bigr)\bigr)\nu \\ &= \omega_\lambda\bigl((\Phi^* a_1)\nu, \dots, (\Phi^* a_j)\nu\bigr) = \omega_\lambda\bigl(a_1^\Phi(\nu x_1, \dots, \nu x_n), \dots, a_j^\Phi(\nu x_1, \dots, \nu x_n)\bigr) \end{aligned}$$

ν が Val 全体に亘って動くとき $(\nu x_1, \dots, \nu x_n)$ は問題 4.3.1 により $a^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ と $a_k^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ の定義域 $W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ の全体に亘って動くから，これで結論 1 の式が証明された．

2. $x, x_1, \dots, x_n$ も a の自由変数列であるから，問題 4.5.6 により，結論 3 の証明に帰着される．

3. (4.1.1) により $\mathrm{Prm}^\lambda = \{x_i\}$であるから，定理 3.16.4 により $\mathrm{Fvar}^b \subseteq \{x_i\} \cup \mathrm{Fvar}^a \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ が成り立つ．$a = \lambda b$ であるから $\sigma a = \lambda(\sigma b)$, 従って $t = \sigma b$ は T_λ に属して $\sigma a = \lambda t$ が成り立つ．従って $\lambda_W \in (W_{\sigma x_i} \to W_{\sigma b}) \to W_{\sigma a}$ であり，$b^\Phi(w_1, \dots, w_{i-1}, \square, w_{i+1}, \dots, w_n)$ は λ_W の定義域に属す．$\nu x_i = w_i$ $(i = 1, \dots, n)$ なる $\nu \in \mathrm{Val}$ をとれば，任意の $w \in W_{\sigma x_i}$ に対して

$$(\Phi^* b)\bigl((x_i/w)\nu\bigr) = b^\Phi(w_1, \dots, w_{i-1}, w, w_{i+1}, \dots, w_n)$$

が成り立つから $(\Phi^* b)\bigl((x_i/\square)\nu\bigr) = b^\Phi(w_1, \dots, w_{i-1}, \square, w_{i+1}, \dots, w_n)$，従って

$$\begin{aligned} a^\Phi(w_1, \dots, w_n) &= (\Phi^* a)\nu = \bigl(\Phi^*(\lambda b)\bigr)\nu = \bigl(\lambda(\Phi^* b)\bigr)\nu \\ &= \lambda_W\bigl((\Phi^* b)\bigl((x_i/\square)\nu\bigr)\bigr) = \lambda_W\bigl(b^\Phi(w_1, \dots, w_{i-1}, \square, w_{i+1}, \dots, w_n)\bigr) \end{aligned}$$

注意 4.5.2 A の相異なる変数 $x_1, \dots, x_n$ に対して，A の元 a で $\mathrm{Fvar}^a \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ なる条件をみたすものの全体を $A(x_1, \dots, x_n)$ で表す．また，$W(x_1, \dots, x_n) = W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ と定める．そうすると，$A(x_1, \dots, x_n)$ の元 a の表現関数 $a^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ は $W(x_1, \dots, x_n) \to W_{\sigma a}$ に属すから，各 $a \in A(x_1, \dots, x_n)$ に $a^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ を対応させる写像は，$A(x_1, \dots, x_n)$ から

$$W^{W(x_1, \dots, x_n)} = \bigcup_{t \in T} \bigl(W(x_1, \dots, x_n) \to W_t\bigr)$$

への写像である．この写像を記号 ${}^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ で表す．他方，問題 3.16.3 により $A(x_1, \dots, x_n)$ は A の台部分系であり，$W^{W(x_1, \dots, x_n)}$ は W の巾代数系として U 型代数系である．そして定理 4.5.1 の結論 1 は，写像 ${}^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ が U 型代数系としての保型準写であることを示している．保型写像であることは，$a^\Phi(x_1, \dots, x_n)$ が $W(x_1, \dots, x_n) \to W_{\sigma a}$ に属すことから分かる．準写であることは，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$, $a_1, \dots, a_j \in A(x_1, \dots, x_n)$ であって $\alpha_\lambda(a_1, \dots, a_j)$ が定義されるとき，λ に対応する $W^{W(x_1, \dots, x_n)}$ 上の算法 γ_λ について

$$\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \dots, a_j)\bigr)^\Phi(x_1, \dots, x_n) = \gamma_\lambda\bigl(a_1^\Phi(x_1, \dots, x_n), \dots, a_j^\Phi(x_1, \dots, x_n)\bigr)$$

が成り立つことに他ならない．(4.5.2) と $W^{W(x_1,\ldots,x_n)}$ から W への射影が保型準写であることから，この式は，任意の $(w_1,\ldots,w_n)\in W(x_1,\ldots,x_n)$ に対して次の式が成り立つことと同等である．

$$\big(\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j)\big)^\Phi(w_1,\ldots,w_n)=\omega_\lambda\big(a_1^\Phi(w_1,\ldots,w_n),\ldots,a_j^\Phi(w_1,\ldots,w_n)\big) \tag{4.5.3}$$

そして定理 4.5.1 の結論 1 は，この式が確かに成り立つことを示している．なお，以上の説明は $n=0$ の場合を含む．この場合，$A(x_1,\ldots,x_n)$ は A の閉元の全体であり，$W(x_1,\ldots,x_n)=\{\emptyset\}$ であり，端書きの一乗便法によれば $W^{W(x_1,\ldots,x_n)}=W$ となる．

例 4.5.2 注意 4.5.2 において，$(A,T,\sigma,\mathrm{Prm})$ を一階述語言語とし，W をブール的認識可能世界とする．そうすると，変数の型は ϵ だけなので，$W(x_1,\ldots,x_n)=W_\epsilon^n$ となる．従って，a,b が $A(x_1,\ldots,x_n)$ に属す論理式であれば，Φ の下での $a,b,a\wedge b$ の表現関数

$$a^\Phi(x_1,\ldots,x_n)\qquad\qquad b^\Phi(x_1,\ldots,x_n)\qquad\qquad (a\wedge b)^\Phi(x_1,\ldots,x_n)$$

は，W_ϵ^n 上で定義され W_ϕ の中に値を持つ．そして (4.5.3) により，任意の $(w_1,\ldots,w_n)\in W_\epsilon^n$ に対して

$$(a\wedge b)^\Phi(w_1,\ldots,w_n)=a^\Phi(w_1,\ldots,w_n)\wedge b^\Phi(w_1,\ldots,w_n)$$

が成り立つ．ただし，右辺の $\wedge$ は W_ϕ $(=\mathbb{T})$ での算法 $u\wedge v=\inf\{u,v\}$ を表す．従って，

$$(a\wedge b)^\Phi(w_1,\ldots,w_n)=1 \iff a^\Phi(w_1,\ldots,w_n)=1 \text{ かつ } b^\Phi(w_1,\ldots,w_n)=1$$

が成り立つ．つまり，ブール子 $\wedge$ が「かつ」に相当している．同様に，残りのブール子 $\vee,\Diamond,\Rightarrow$ がそれぞれ「または」「ではない」「ならば」に相当していることが分かる．　**終**

$\lambda\in\Lambda-\Gamma$ については，ω_λ なる算法がないのだから，(4.5.3) と同じ式はもちろん成立しない．どういうことが成り立つかを調べるために，$\lambda\in\Gamma x$ $(x\in\mathrm{Qvar})$，$t\in T_\lambda$，$b\in A(x_1,\ldots,x_n)_t$ であって $x\in\{x_1,\ldots,x_n\}$ が成り立つとしよう．たとえば $x=x_1$ とする．このとき，$b^\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ は $W(x_1,\ldots,x_n)\to W_t$ に属し，$b\in\mathrm{Dom}\,\lambda$ であって定理 3.16.4 により $x_2,\ldots,x_n$ が λb の自由変数列であるから，表現関数 $(\lambda b)^\Phi(x_2,\ldots,x_n)\in W(x_2,\ldots,x_n)\to W_{\lambda t}$ が定まる．そして定理 4.5.1 の結論 2 によれば，任意の $(w_2,\ldots,w_n)\in W(x_2,\ldots,x_n)$ に対して次の式が成り立つ．

$$(\lambda b)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)=\lambda_W\big(b^\Phi(\square,w_2,\ldots,w_n)\big) \tag{4.5.4}$$

ただし，$b^\Phi(\square,w_2,\ldots,w_n)$ は各 $w\in W_{\sigma x}$ に $b^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)\in W_t$ を対応させる $W_{\sigma x}\to W_t$ の元を表す．

例 4.5.3 例 4.3.2 の意味での極量子 $\forall x,\exists x$ については，上の説明で t と λt に当たるものは共に ϕ なので，$b^\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ は $W(x_1,\ldots,x_n)\to W_\phi$ に属し，$(\forall xb)^\Phi(x_2,\ldots,x_n)$ と $(\exists xb)^\Phi(x_2,\ldots,x_n)$ は $W(x_2,\ldots,x_n)\to W_\phi$ に属して，(4.5.4) から次の二式が得られる．

$$(\forall xb)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)=\inf\{b^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)\mid w\in W_{\sigma x}\}$$
$$(\exists xb)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)=\sup\{b^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)\mid w\in W_{\sigma x}\}$$

つまり，次の二つのことが成り立つ．

$$(\forall xb)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)=1 \iff \text{全ての } w\in W_{\sigma x} \text{ に対して } b^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)=1$$
$$(\exists xb)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)=1 \iff b^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)=1 \text{ なる } w\in W_{\sigma x} \text{が存在する}$$

例 4.5.4 例 4.3.3 の意味での抽象子 Ωx については，上の説明で t と $W_{\lambda t}$ に当たるものは ϕ と $W_{\sigma x}{\to}W_{\phi}$ なので，$b^{\Phi}(x_1,\ldots,x_n)\in W(x_1,\ldots,x_n){\to}W_{\phi}$，$(\Omega x\, b)^{\Phi}(w_2,\ldots,w_n)\in W_{\sigma x}{\to}W_{\phi}$ であって，任意の $w\in W_{\sigma x}$ に対して (4.5.4) から次の式が得られる．

$$\big((\Omega x\, b)^{\Phi}(w_2,\ldots,w_n)\big)w = b^{\Phi}(w,w_2,\ldots,w_n) \tag{4.5.5}$$

あるいは，$W_{\phi}=\mathbb{T}$ に留意して $(\Omega x\, b)^{\Phi}(w_2,\ldots,w_n)\in W_{\sigma x}{\to}W_{\phi}$ を $W_{\sigma x}$ の部分集合とみなせば，

$$(\Omega x\, b)^{\Phi}(w_2,\ldots,w_n)\ni w \iff b^{\Phi}(w,w_2,\ldots,w_n)=1$$

従って次のようにみなすことができる．

$$(\Omega x\, b)^{\Phi}(w_2,\ldots,w_n)=\big\{w\in W_{\sigma x}\;\big|\; b^{\Phi}(w,w_2,\ldots,w_n)=1\big\}$$

問題 4.5.8 $x\notin\{x_1,\ldots,x_n\}$ のときには (4.5.4) に代わってどういう式が成り立つか．

例 4.5.5 $(A,T,\sigma,\mathrm{Prm})$ にとっての認識可能世界 W として言語世界 $A_{\Lambda\cap\Gamma}$ をとる．ただし以後は，$A_{\Lambda\cap\Gamma}$ も A で表す．また，各可変子を例 4.3.4 でのように意味付け，A から A への定付値 Φ として $\mathrm{id}_{\mathrm{Con}}$ をとる．そうすると，A の各元 a の Φ の下での表現関数 $a^{\Phi}(x_1,\ldots,x_n)$ は，任意の $(c_1,\ldots,c_n)\in A_{\sigma x_1}\times\cdots\times A_{\sigma x_n}$ に対して

$$a^{\Phi}(c_1,\ldots,c_n)=a\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\ \hline c_1,\ldots,c_n\end{pmatrix} \tag{4.5.6}$$

をみたす．ただし，右辺の $\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\ \hline c_1,\ldots,c_n\end{pmatrix}$ は代入を表す．これは，$r=\mathrm{rk}\, a$ についての帰納法によって次のように証明される．まず $r=0$ の場合，$a\in\mathrm{Con}$ なら両辺は $\Phi a\ (=a)$ に等しく，$a\in\mathrm{Var}$ なら $a=x_i$ なる i があって両辺は c_i に等しい．そこで $r\geq 1$ とする．この場合，定理 4.5.1 の結論 1, 2, 3 に沿って次のように考えればいい．

$a=\alpha_{\lambda}(a_1,\ldots,a_j)$, $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma$ なら，$x_1,\ldots,x_n$ は a_k の自由変数列でもあり $(k=1,\ldots,j)$，表現関数 $a_1^{\Phi}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,a_j^{\Phi}(x_1,\ldots,x_n)$ は任意の $(c_1,\ldots,c_n)\in W_{\sigma x_1}\times\cdots\times W_{\sigma x_n}$ に対して

$$a^{\Phi}(c_1,\ldots,c_n)=\alpha_{\lambda}\big(a_1^{\Phi}(c_1,\ldots,c_n),\ldots,a_j^{\Phi}(c_1,\ldots,c_n)\big)$$

をみたす．帰納法の仮定により $a_k^{\Phi}(c_1,\ldots,c_n)=a_k\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\ \hline c_1,\ldots,c_n\end{pmatrix}$，$(k=1,\ldots,j)$ であって $\mathrm{Prm}^{\lambda}=\emptyset$ であるから，代入の定義 (3.17.2) により (4.5.6) が成り立つ．

$a=\lambda b$, $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma x$, $x\in\mathrm{Qvar}-\{x_1,\ldots,x_n\}$ なら，$x,x_1,\ldots,x_n$ は b の自由変数列であり，表現関数 $b^{\Phi}(x,x_1,\ldots,x_n)$ は任意の $(c_1,\ldots,c_n)\in A_{\sigma x_1}\times\cdots\times A_{\sigma x_n}$ に対して

$$a^{\Phi}(c_1,\ldots,c_n)=\lambda_A\big(b^{\Phi}(\Box,c_1,\ldots,c_n)\big)=\lambda\big(b^{\Phi}(x,c_1,\ldots,c_n)\big)$$

をみたす．帰納法の仮定と補題 3.17.3 により $b^{\Phi}(x,c_1,\ldots,c_n)=b\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\ \hline c_1,\ldots,c_n\end{pmatrix}$ であって $\mathrm{Prm}^{\lambda}=\{x\}$ であるから，代入の定義 (3.17.2) により (4.5.6) が成り立つ．

$a=\lambda b$, $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma x_i$ なら，$x_1,\ldots,x_n$ は b の自由変数列でもあり，表現関数 $b^{\Phi}(x_1,\ldots,x_n)$ は任意の $(c_1,\ldots,c_n)\in A_{\sigma x_1}\times\cdots\times A_{\sigma x_n}$ に対して

$$a^{\Phi}(c_1,\ldots,c_n)=\lambda_A\big(b^{\Phi}(c_1,\ldots,c_{i-1},\Box,c_{i+1},\ldots,c_n)\big)=\lambda\big(b^{\Phi}(c_1,\ldots,c_{i-1},x_i,c_{i+1},\ldots,c_n)\big)$$

をみたす $(i=1,\ldots,n)$．帰納法の仮定と補題 3.17.3 により $b^{\Phi}(c_1,\ldots,c_{i-1},x_i,c_{i+1},\ldots,c_n)=b\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\\ \hline c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_n\end{pmatrix}$ であって $\mathrm{Prm}^{\lambda}=\{x_i\}$ であるから，代入の定義により (4.5.6) が成り立つ．なお，この例は高岡洋介氏の指摘に基づく．　終

表現関数と算法との関係の，これまでに説明したのとはちょっと違う側面を指摘しておく．すなわち，W の算法 ω_λ $(\lambda \in \Lambda \cap \Gamma)$ の定義域が $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ を含むとすると，ω_λ の定義域を制限することによって関数

$$\omega'_\lambda \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t \qquad \big(t = \lambda(t_1, \ldots, t_n)\big)$$

が出来る．ただし，λ に対応する T 上の算法を λ で表した．他方で，相異なる変数 $x_1, \ldots, x_n$ で $\sigma x_i = t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なるものがあれば，σ が厳密であるから $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ であり，定理 3.16.4 と定理 3.16.2 により $x_1, \ldots, x_n$ は $\alpha_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ の自由変数列であるから，表現関数

$$\big(\alpha_\lambda(x_1, \ldots, x_n)\big)^\Phi(x_1, \ldots, x_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$$

が定まる．式 (4.5.3) と例 4.5.1 によれば，これら二つの関数が実は等しいことが分かる．

問題 4.5.9 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が一階述語言語なら（例 4.1.2 参照），次の二つのことが成り立つ．

1. f が T の n 変数関数記号なら，f に対応する W 上の算法は $W_\epsilon^n \to W_\epsilon$ の元とみなせる．そうみなしたものを f_W で表す．他方，$x_1, \ldots, x_n$ が相異なる変数なら，A の項 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が出来て $x_1, \ldots, x_n$ はその自由変数列となる．この項の $x_1, \ldots, x_n$ に関する表現関数は f_W に等しい．

2. p が T の n 変数述語記号なら，p に対応する W 上の算法は $W_\epsilon^n \to W_\phi$ の元とみなせる．そうみなしたものを p_W で表す．他方，$x_1, \ldots, x_n$ が相異なる変数なら，A の式 $p(x_1, \ldots, x_n)$ が出来て $x_1, \ldots, x_n$ はその自由変数列となる．この式の $x_1, \ldots, x_n$ に関する表現関数は p_W に等しい．

4.5.3　代入合成定理

§ ここでは代入と表現関数の関係を説明する．

定理 4.5.2 (代入合成定理) $a, c_1, \ldots, c_m \in A$ **とし，**$x_1, \ldots, x_m$ **を** a **の自由変数列とし，**c_i **と** x_i **は同型である** $(i = 1, \ldots, m)$ **として**

$$b = a\left(\frac{x_1, \ldots, x_m}{c_1, \ldots, c_m}\right)$$

と定め，$y_1, \ldots, y_n$ **を** $c_1, \ldots, c_m$ **の自由変数列とする．そうすると，**$y_1, \ldots, y_n$ **は** b **の自由変数列でもある．また，**a **において** x_i **が** c_i **から自由** $(i = 1, \ldots, m)$ **なら，**$b^\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ **は** $a^\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ **と** ${c_1}^\Phi(y_1, \ldots, y_n), \ldots, {c_m}^\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ **の合成関数に等しい．つまり，各** $(w_1, \ldots, w_n) \in W_{\sigma y_1} \times \cdots \times W_{\sigma y_n}$ **に対して次の式が成り立つ．**

$$b^\Phi(w_1, \ldots, w_n) = a^\Phi\big({c_1}^\Phi(w_1, \ldots, w_n), \ldots, {c_m}^\Phi(w_1, \ldots, w_n)\big)$$

証明　$\mathrm{Fvar}^b \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$ なることは定理 3.17.1 系から直ちに分かる．a において x_i が c_i から自由であるという仮定の下では，定理 4.4.2 と問題 4.5.2 を使って次のように計算することができる．すなわち，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して

$$b^\Phi(\nu y_1, \ldots, \nu y_n) = (\Phi^* b)\nu = \left(\Phi^*\left(a\left(\frac{x_1, \ldots, x_m}{c_1, \ldots, c_m}\right)\right)\right)\nu$$

$$= (\Phi^* a)\left(\left(\frac{x_1, \ldots\ldots\ldots, x_m}{(\Phi^* c_1)\nu, \ldots, (\Phi^* c_m)\nu}\right)\nu\right)$$
$$= a^\Phi\big((\Phi^* c_1)\nu, \ldots, (\Phi^* c_m)\nu\big) = a^\Phi\big({c_1}^\Phi(\nu y_1, \ldots, \nu y_n), \ldots, {c_m}^\Phi(\nu y_1, \ldots, \nu y_n)\big)$$

ν が Val 全体に亘って動くとき $(\nu y_1, \ldots, \nu y_n)$ は問題 4.3.1 により $b^\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ と $c_i^\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ の定義域 $W_{\sigma y_1} \times \cdots \times W_{\sigma y_n}$ の全体に亘って動くから，これで定理は証明された．

系　$x_1, \ldots, x_n$ **を** $a \in A$ **の自由変数列とし，**$y_1, \ldots, y_n$ **は相異なる変数であって** y_i **は** x_i **と同型である** $(i = 1, \ldots, n)$ **として**

$$b = a\left(\frac{x_1, \ldots, x_n}{y_1, \ldots, y_n}\right)$$

と定める．このとき，$y_1, \ldots, y_n$ **は** b **の自由変数列である．また，**a **において** x_i **が** y_i **から自由** $(i = 1, \ldots, n)$ **なら，**$b^\Phi(y_1, \ldots, y_n) = a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ **が成り立つ．**

証明　定理 4.5.2 において $m = n$, $c_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ として例 4.5.1 と合わせれば証明される．

系 2　$a \in A$ **が変数** $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ **に関して** $b \in A$ **と相似であって** $x_1, \ldots, x_n$ **が** a **の自由変数列であれば，**$y_1, \ldots, y_n$ **は** b **の自由変数列であって** $b^\Phi(y_1, \ldots, y_n) = a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ **が成り立つ．**

証明　「相似」の定義 3.17.2 により系の仮定の条件がすべてみたされるからである．

定理 4.5.3　$a \in A$ **が変数** x, y **に関して** $b \in A$ **と相似であって，可変子** $\lambda \in \Gamma x$ **と** $\mu \in \Gamma y$ **の** W **での意味** λ_W **と** μ_W **が等しく（例 4.3.2, 例 4.3.3 参照），**$a \in \mathrm{Dom}\,\lambda$, $b \in \mathrm{Dom}\,\mu$ **であるとする．このとき** $\Phi^*(\lambda a) = \Phi^*(\mu b)$ **が成り立つ．また，**$z_1, \ldots, z_n$ **が** λa **の自由変数列であれば，**$z_1, \ldots, z_n$ **は** μb **の自由変数列でもあって，表現関数について** $(\lambda a)^\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (\mu b)^\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ **が成り立つ（定理 4.8.11 参照）．**

証明　「相似」の定義 3.17.2 により，x, y は相異なるが型は等しく，$b = a(x/y)$ が成り立ち，y は a に自由に現れず，a において x は y から自由である．また，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ と $w \in W_{\sigma x}$ $(= W_{\sigma y})$ をとって $\nu' = (y/w)\nu$ と定めると，意味写像の条件 (4.3.3) と値換の定義により $(\Phi^* y)\nu' = w$ が成り立ち, (4.4.1) により $(x/w)\nu' = (y/w)(x/w)\nu$ が成り立つ．これらのことと定理 4.4.2 および定理 4.4.1 を使って次のように計算することができる．

$$(\Phi^* b)\big((y/w)\nu\big) = (\Phi^* b)\nu' = \big(\Phi^*\big(a(x/y)\big)\big)\nu' = (\Phi^* a)\big((x/w)\nu'\big) = (\Phi^* a)\big((x/w)\nu\big)$$

これは，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して $(\Phi^* b)\big((y/\square)\nu\big) = (\Phi^* a)\big((x/\square)\nu\big)$ の成り立つことを示す．従って

$$\big(\Phi^*(\mu b)\big)\nu = \big(\mu(\Phi^* b)\big)\nu = \mu_W\big((\Phi^* b)\big((y/\square)\nu\big)\big)$$
$$= \lambda_W\big((\Phi^* a)\big((y/\square)\nu\big)\big) = \big(\lambda(\Phi^* a)\big)\nu = \big(\Phi^*(\lambda a)\big)\nu$$

が成り立つ．これで $\Phi^*(\lambda a) = \Phi^*(\mu b)$ が示された．自由変数列についての結論は定理 3.17.8 系により成り立つ．以上二つの結論から表現関数についての結論が導かれる．　終

4.5.4　閉元の意味 (✓)

§ ここでは閉元の関数的意味について付言する．ただし，この概念の意義は未知である．

第 4.5 節で述べた通り，A の元 a が $\mathrm{Fvar}^a = \emptyset$ をみたすとき，a は閉元であると言う．問題 4.5.7 によれば，閉元 a の表現関数 $a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ は定値関数である．このことは，表現関数が閉元間の差違をほとんど写し出さないことを示す．これに対して以下に定義する**閉元の意味関数**は，閉元間の差違をより忠実に写し出し，この意味関数を経由することにより，閉元間の「意味の異同」を定義することができる．ただし意味関数を定義するには，各 $t \in T$ に対して Var_t が可算個の元を含む（このことをここでは「**A には変数が十分に有る**」と表現する）ことが必要である．

閉元 a の意味関数は一意には定まらず，相異なる定数の列 $c_1, \ldots, c_n$ を一つ選ぶごとに，一つの意味関数が定まる．そこで，こういう定数列を**意味指標**と呼ぶ．意味の違いを指し示す標（しるし）の意味である．

閉元 a の意味指標 $c_1, \ldots, c_n$ に関する意味関数を次の様に定める．まず，相異なる変数 $x_1, \ldots, x_n$ であって次の二条件をみたすものが存在する．

1. x_i は c_i と同型である $(i = 1, \ldots, n)$.

2. a において任意の $s \in \mathrm{Prm}$ は x_i から自由である $(i = 1, \ldots, n)$.

なぜなら，変数は十分に有ると仮定し定理 3.15.2 により Λ^a は有限集合であるから，$\mathrm{Var} - \mathrm{Prm}^{\Lambda^a}$ の中の相異なる変数 $x_1, \ldots, x_n$ で条件 1 をみたすものがある．定理 3.16.2 により $\mathrm{Prm}^{x_i}_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{Prm}^{\Lambda^a} \subseteq \{x_i\} \cap \mathrm{Prm}^{\Lambda^a} = \emptyset$ が成り立つから，定理 3.16.7 により $x_1, \ldots, x_n$ は条件 2 もみたす．

そこで，a において c_i に x_i を代入して出来た元を b とする．すなわち

$$b = a\left(\frac{c_1, \ldots, c_n}{x_1, \ldots, x_n}\right)$$

このとき，定理 3.17.1 系と定理 3.16.2 および a が閉元であることにより $\mathrm{Fvar}^b \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ が成り立つから，表現関数 $b^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ が定まる．後で証明するが，この関数は $x_1, \ldots, x_n$ の選び方に依らずに $a, \Phi, c_1, \ldots, c_n$ だけに依って決まる．そこでこの関数を，Φ の下での**意味指標** $c_1, \ldots, c_n$ **に関する** a **の意味関数**と呼び，これを $a^{c_1, \ldots, c_n, \Phi}$ で表す．すなわち，

$$a^{c_1, \ldots, c_n, \Phi} = \left(a\left(\frac{c_1, \ldots, c_n}{x_1, \ldots, x_n}\right)\right)^\Phi (x_1, \ldots, x_n)$$

そして，A の閉元 a_1, a_2 の任意の意味指標 $c_1, \ldots, c_n$ に関する意味関数 $a_1^{c_1, \ldots, c_n, \Phi}$，$a_2^{c_1, \ldots, c_n, \Phi}$ が等しいとき，Φ の下で a_1, a_2 の**意味は同じ**であるとか，a_1, a_2 は**同意**であるとか言う．

問題 4.5.10 意味が同じという関係は同値関係である．

「意味が同じ」とは如何なることかをこう定義しても，**「意味」とは何かは定義しない．**座標系の「向き」そのものは定義せず,「向きが同じ」とは如何なることかを定義するのと同様である．強いて「意味」を定義するなら,「同意」という同値関係による同値類それぞれが「意味」である．

関数 $b^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ が $x_1, \ldots, x_n$ の選び方に依らないことを証明するために，相異なる変数 $y_1, \ldots, y_n$ を，$x_1, \ldots, x_n$ と同様に二条件

1. y_i は c_i と同型である $(i = 1, \ldots, n)$

2. a において任意の $s \in \mathrm{Prm}$ は y_i から自由である $(i = 1, \ldots, n)$

をみたすようにとり $c = a\begin{pmatrix} c_1, \ldots, c_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix}$ と定める．このとき，$x_i \not\ll a$ であって a において c_i が x_i から自由であるから，定理 3.17.3 により次の式が成り立つ．

$$b\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} c_1, \ldots, c_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} c_1, \ldots, c_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} = c$$

また，$i, j = 1, \ldots, n$ に対して a において x_i と c_j が y_i から自由であり，定理 3.16.5 により x_j において x_i は y_i から自由であるから，定理 3.17.2 系により，b において x_i は y_i から自由である $(i = 1, \ldots, n)$．従って定理 4.5.2 系により，$c^{\Phi}(y_1, \ldots, y_n) = b^{\Phi}(x_1, \ldots, x_n)$ が成り立つ．

問題 4.5.11 A の閉元 a，意味指標 $c_1, \ldots, c_n$，および $v \in \mathrm{Val}$ について次の式が成り立つ．

$$(a^{c_1, \ldots, c_n, \Phi})(\Phi c_1, \ldots, \Phi c_n) = (\Phi^* a)v$$

略解　意味関数の定義のときと同じ記号を使えば，定理 3.17.3 により $b\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix} = a$ が成り立ち定理 3.17.2 により b において x_i が c_i から自由であることが分かるので，定理 4.4.2 を使っての次の計算で，上記の式の成り立つことが確かめられる．

$$\begin{aligned}
(a^{c_1, \ldots, c_n, \Phi})(\Phi c_1, \ldots, \Phi c_n) &= (\Phi^* b)\left(\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ \Phi c_1, \ldots, \Phi c_n \end{pmatrix} v\right) \\
&= (\Phi^* b)\left(\begin{pmatrix} x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n \\ (\Phi^* c_1)v, \ldots, (\Phi^* c_n)v \end{pmatrix} v\right) \\
&= \left(\Phi^*\left(b\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix}\right)\right) v = (\Phi^* a)v
\end{aligned}$$

4.6　表現可能関数

＄ 前節から引き続いて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を形式言語とし，**W **をそれにとっての認識可能世界とし，**Val_W **を** Val **で表し，**T **の可変子の** W **への意味付け** $\lambda \mapsto \lambda_W$ **により** W^{Val} **の** T **型代数構造が定めてあるものとし，**Φ **を** A **から** W **への定付値とする．**また，A, W の代数構造を $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$，$(\omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \cap \Gamma}$ で表す．ただし，λ が可変子の場合には，α_λ は λ で表す．

第 4.5.1 項では，Φ が A の各元 a に W 上の表現関数 a^{Φ} を対応させることを知った．そうすると当然起きるのは,「W 上の関数の中のどれだけが A の元に表現関数として対応付けられるか」という疑問である．この節ではこの疑問に答える．

なおこれには，相異なる「論理系」の比較への応用という狙いもある [5]．つまり，$(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$ を $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ と異なる形式言語とし W' を A' にとっての認識可能世界とすれば，A と A' 同士も W と W' 同士も，同類の代数系とは限らないから準写や擬写によって比較することはできない（第 3.14 節参照）．しかし，A と A' の元から出来る W と W' 上の表現関数を調べ比較することによって間接的に，A, W と A', W' を比較できる可能性があるのである（第 5.8 節参照）．

定義 4.6.1 ある $t_1, \ldots, t_n, t \in T$ に対し W の t_i 部分 W_{t_i} $(i = 1, \ldots, n)$ の直積 $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ 上で定義され W の t 部分 W_t の中に値を持つ関数を，W 上の**型に適合した関数**または**型関数**と呼ぶ．ただし，$n = 0$ の場合も含め，0 **変数の型関数**は W の元を意味するものとする．

[5] 論理系の概念は第 4.7 節で正式に定義する．

例 4.6.1 $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ 上で定義され一定値 $w \in W$ をとる関数は型関数である．これを

$$(t_1, \ldots, t_n)/w$$

で表す．また，$W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ から W_{t_i} への射影 $(w_1, \ldots, w_n) \mapsto w_i$ も型関数である．これを

$$(t_1, \ldots, t_n) \downarrow i$$

で表す $(n \geq 1;\ i = 1, \ldots, n)$.

第 4.5 節によれば，Φ の下で $a \in A$ が表現する関数は型関数である．また，W の算法 ω_λ $(\lambda \in \Lambda \cap \Gamma)$ が $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \subseteq \mathrm{Dom}\,\omega_\lambda$ をみたせば，ω_λ の定義域を制限することによって $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ から $W_{\lambda(t_1,\ldots,t_n)}$ への型関数が出来る．ただし，λ に対応する T の算法を λ で表した．

型関数の合成も型関数である．つまり，$H_i \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_{u_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ と $G \in W_{u_1} \times \cdots \times W_{u_m} \to W_t$ を型関数とすれば，合成関数

$$F(w_1, \ldots, w_n) = G\big(H_1(w_1, \ldots, w_n), \ldots, H_m(w_1, \ldots, w_n)\big)$$

は $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ から W_t への型関数である．以後，型関数に限らず，上式のような合成 F は

$$G \circ (H_1, \ldots, H_m)$$

で表す．ただし，$m \geq 1$ とする．

定義 4.6.2 型関数 F に対して A の元 a と a の自由変数列 $x_1, \ldots, x_n$ で $F = a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ なるものがあるとき，Φ の下で a は F を**表現する**とか F は a によって**表現される**とか言う．また，型関数 F が Φ の下で A のある元によって表現されるとき，F は Φ の下で**表現可能**であると言う．誤解の恐れのない場合には,「Φ の下で」は省略する．

例 4.6.2 $a \in A$ の表現関数は a によって表現される．また例 4.5.1 により，$x_1, \ldots, x_n$ が相異なる変数であるとき，各 $w \in \Phi(\mathrm{Con})$ に対して定値関数 $(\sigma x_1, \ldots, \sigma x_n)/w$ は，$w = \Phi a$ なる $a \in \mathrm{Con}$ によって表現され，射影 $(\sigma x_1, \ldots, \sigma x_n) \downarrow i$ は x_i によって表現される $(i = 1, \ldots, n)$．また，例 4.6.1 で触れた ω_λ $(\lambda \in \Lambda \cap \Gamma)$ の定義域を $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に制限して得られる型関数は，第 4.5.2 項の最後に示した通り，相異なる変数 $x_1, \ldots, x_n$ で $\sigma x_i = t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なるものがあれば $\alpha_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ によって表現される．

問題 4.6.1 型関数 $G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$ $(n \geq 1)$ と n 次の置換 p に対して，型関数 $pG \in W_{t_{p1}} \times \cdots \times W_{t_{pn}} \to W_t$ を次のように定義する（これを G の p による**置換**と呼ぶ）.

$$(pG)(w_{p1}, \ldots, w_{pn}) = G(w_1, \ldots, w_n)$$

そうすると，$G = a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ であれば，$pG = a^\Phi(x_{p1}, \ldots, x_{pn})$ が成り立つ．

略解　問題 4.5.5 により任意の $(w_1, \ldots, w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して $G(w_1, \ldots, w_n) = \big(a^\Phi(x_{p1}, \ldots, x_{pn})\big)(w_{p1}, \ldots, w_{pn})$ が成り立つからである．

問題 4.6.2 型関数 $G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_m} \to W_t$ と $t'_1, \ldots, t'_n \in T$ に対して，型関数 $F \in W_{t'_1} \times \cdots \times W_{t'_n} \times W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_m} \to W_t$ を次のように定義する（これを G の**誇張**と呼ぶ）.

$$F(w'_1, \ldots, w'_n, w_1, \ldots, w_m) = G(w_1, \ldots, w_m)$$

そうすると，相異なる変数 $x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_m$ で $\sigma x'_j = t'_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $G = a^\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ なるものがあれば，$F = a^\Phi(x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_m)$ が成り立つ．

略解　問題 4.5.6 により任意の $(w'_1,\ldots,w'_n,w_1,\ldots,w_m)\in W_{t'_1}\times\cdots\times W_{t'_n}\times W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_m}$ に対して $G(w_1,\ldots,w_m)=\bigl(a^\Phi(x'_1,\ldots,x'_n,x_1,\ldots,x_m)\bigr)(w'_1,\ldots,w'_n,w_1,\ldots,w_m)$ が成り立つからである.

定義 4.6.3 この節では，表現可能な型関数を具体的に特定することを目標にする．特定結果を簡潔に説明するために次のように定める．

(1) 不変子 $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma$ と型関数 $G_k\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_{u_k}$ $(k=1,\ldots,j)$ が $W_{u_1}\times\cdots\times W_{u_j}\subseteq\mathrm{Dom}\,\omega_\lambda$ をみたすとき，記号 $\lambda(G_1,\ldots,G_j)$ は合成関数 $\omega_\lambda\circ(G_1,\ldots,G_j)$ を表す．すなわち

$$\bigl(\lambda(G_1,\ldots,G_j)\bigr)(w_1,\ldots,w_n)=\omega_\lambda\bigl(G_1(w_1,\ldots,w_n),\ldots,G_j(w_1,\ldots,w_n)\bigr)$$

これは $W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}$ から $W_{\lambda(u_1,\ldots,u_j)}$ への型関数である．

(2) 可変子 $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma x$ $(x\in\mathrm{Var})$ と $t\in T_\lambda$ と型関数 $G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_t$ $(n\geq 1)$ に対し $\sigma x=t_i$ なる $i\in\{1,\ldots,n\}$ があるとき，記号 $\flat_{\lambda,i}G$ は，$W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_{i-1}}\times W_{t_{i+1}}\times\cdots\times W_{t_n}$ から $W_{\lambda t}$ への型関数で

$$(\flat_{\lambda,i}G)(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_n)=\lambda_W\bigl(G(w_1,\ldots,w_{i-1},\Box,w_{i+1},\ldots,w_n)\bigr)$$

なるものを表す．ただし記号 $G(w_1,\ldots,w_{i-1},\Box,w_{i+1},\ldots,w_n)$ は，各 $w\in W_{t_i}$ $(=W_{\sigma x})$ に $G(w_1,\ldots,w_{i-1},w,w_{i+1},\ldots,w_n)\in W_t$ を対応させる $W_{\sigma x}\to W_t$ の元を表す.

(3) 可変子 $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma x$ $(x\in\mathrm{Var})$ と $t=\sigma x$ と $u\in\lambda(T_\lambda)$ および型関数 $G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_u$ と $i\in\{1,\ldots,n+1\}$ に対して，記号 $\sharp_{t,i}G$ は，$W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_{i-1}}\times W_t\times W_{t_i}\times\cdots\times W_{t_n}$ から W_u への型関数で

$$(\sharp_{t,i}G)(w_1,\ldots,w_{i-1},w,w_i,\ldots,w_n)=G(w_1,\ldots,w_n)$$

なるものを表す．なお，これは G の誇張の置換の一つである．

(4) 型関数の全体を「typed function」に因んで TF で表し，Φ の下で表現可能な型関数の全体を TF^Φ で表す．そうすると，型関数の組み $G_1,\ldots,G_j$ または単独の型関数 G から型関数 $\lambda(G_1,\ldots,G_j)$ または $\flat_{\lambda,i}G$ もしくは $\sharp_{t,i}G$ を作る操作と型関数の合成や置換を作る操作は，いずれも TF 上の算法とみなされる．そこで，TF にこの五種類の算法を与えて代数系とみなす．つまり TF の代数構造は，合成算法と置換算法と次の三種の算法から成る．

(a) 算法 $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma$ $(\mathrm{Dom}\,\omega_\lambda\neq\emptyset)$：これは，$\omega_\lambda$ の項数を j で表すとき，型関数 $G_k\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_{u_k}$ $(k=1,\ldots,j)$ の組み $G_1,\ldots,G_j$ で $W_{u_1}\times\cdots\times W_{u_j}\subseteq\mathrm{Dom}\,\omega_\lambda$ をみたすものに施され，型関数 $\omega_\lambda\circ(G_1,\ldots,G_j)\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_{\lambda(u_1,\ldots,u_j)}$ を生ずる.

(b) 算法 $\flat_{\lambda,i}$ $(\lambda\in\Lambda\cap\Gamma\mathrm{Var},\ i=1,2,\ldots)$：これは，$\lambda\in\Lambda\cap\Gamma x$ $(x\in\mathrm{Var})$ のとき，型関数 $G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_t$ で $t\in T_\lambda$ と $i\leq n$ と $\sigma x=t_i$ をみたすものに施され，次式をみたす型関数 $\flat_{\lambda,i}G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_{i-1}}\times W_{t_{i+1}}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_{\lambda t}$ を生ずる．

$$(\flat_{\lambda,i}G)(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_n)=\lambda_W\bigl(G(w_1,\ldots,w_{i-1},\Box,w_{i+1},\ldots,w_n)\bigr)$$

(c) 算法 $\sharp_{t,i}$ $(t\in T,\ \mathrm{Qvar}_t\neq\emptyset,\ i=1,2,\ldots)$：これは，型関数 $G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_u$ で $i-1\leq n$ かつある $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma x$ $(x\in\mathrm{Qvar}_t)$ に対し $u\in\lambda(T_\lambda)$ をみたすものに施され，次式をみたす型関数 $\sharp_{t,i}G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_{i-1}}\times W_t\times W_{t_i}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_u$ を生ずる．

$$(\sharp_{t,i}G)(w_1,\ldots,w_{i-1},w,w_i,\ldots,w_n)=G(w_1,\ldots,w_n)$$

(5) 記号 PF^{Φ} で次の二種類の型関数の全体を表す（記号「PF」は「primitive function」に因む）．

(a) 相異なる変数列 $x_1,\ldots,x_n$ $(n\geq 0)$ と $w\in\Phi(\mathrm{Con})$ で定まる定値関数 $(\sigma x_1,\ldots,\sigma x_n)/w$

(b) 相異なる変数列 $x_1,\ldots,x_n$ $(n\geq 1)$ と $i\in\{1,\ldots,n\}$ で定まる射影 $(\sigma x_1,\ldots,\sigma x_n)\downarrow i$

そして，代数系 TF における PF^{Φ} の算包を $[\mathrm{PF}^{\Phi}]$ で表し，また，TF の代数構造から合成算法と置換算法をすべて除いて出来る算部分系における PF^{Φ} の算包を $\langle\mathrm{PF}^{\Phi}\rangle$ で表す．

例 4.6.3 定義 4.6.3 の (4) における算法 $\flat_{\lambda,i}$ は，可変子 λ が例 4.3.2 の全称子 $\forall x$ または存称子 $\exists x$ の場合には，$T_\lambda=\{\phi\}$, $\lambda\phi=\phi$ であるので，型関数 $G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_\phi$ で $i\leq n$ と $\sigma x=t_i$ をみたすものに施されて型関数 $\flat_{\forall x,i}G$, $\flat_{\exists x,i}G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_{i-1}}\times W_{t_{i+1}}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_\phi$ を生じ，これらは次式をみたす．

$$(\flat_{\forall x,i}G)(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_n)=\inf\{G(w_1,\ldots,w_{i-1},w,w_{i+1},\ldots,w_n)\mid w\in W_{\sigma x}\}$$
$$(\flat_{\exists x,i}G)(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_n)=\sup\{G(w_1,\ldots,w_{i-1},w,w_{i+1},\ldots,w_n)\mid w\in W_{\sigma x}\}$$

算法 $\flat_{\lambda,i}$ はまた，λ が例 4.3.3 の抽象子 Ωx の場合には，$T_\lambda=\{\phi\}$, $W_{\lambda\phi}=W_{\sigma x}\to W_\phi$ であるので，型関数 $G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_n}\to W_\phi$ で $i\leq n$ と $\sigma x=t_i$ をみたすものに施されて型関数 $\flat_{\Omega x,i}G\in W_{t_1}\times\cdots\times W_{t_{i-1}}\times W_{t_{i+1}}\times\cdots\times W_{t_n}\to(W_{\sigma x}\to W_\phi)$ を生じ，次式をみたす $(w\in W_{\sigma x})$．

$$\big((\flat_{\Omega x,i}G)(w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_n)\big)w=G(w_1,\ldots,w_{i-1},w,w_{i+1},\ldots,w_n)$$

以下この節では，**表現関数の表示における上付の Φ は省略する．**

補題 4.6.1 $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma$ **と** $a_1,\ldots,a_j\in A$ **についての次の二条件は同等である．**

1. $(a_1,\ldots,a_j)\in\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$　　**2.** $W_{\sigma a_1}\times\cdots\times W_{\sigma a_j}\subseteq\mathrm{Dom}\,\omega_\lambda$

また，これら同等な条件の下で $\mathrm{Dom}\,\omega_\lambda\neq\emptyset$ **が成り立つ．**

証明　λ に対応する T の算法を λ で表せば，条件 1, 2 とも $(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_j)\in\mathrm{Dom}\,\lambda$ と同等である（問題 3.4.4 参照）．後半は問題 4.3.8 による．

定理 4.6.1 $\mathrm{TF}^{\Phi}\subseteq\langle\mathrm{PF}^{\Phi}\rangle$ **が成り立つ．**

証明　任意の $a\in A$ の表現関数 $F=a(x_1,\ldots,x_n)$ が $\langle\mathrm{PF}^{\Phi}\rangle$ に属すことを示せばいいが，これを a の階数 r についての帰納法で行なう．$\sigma x_i=t_i$ とする $(i=1,\ldots,n)$．

(1) $r=0$ **の場合：** $a\in\mathrm{Prm}=\mathrm{Con}\cup\mathrm{Var}$ である．$a\in\mathrm{Con}$ なら，例 4.5.1 により $F=(t_1,\ldots,t_n)/\Phi a$ が成り立つ．$a\in\mathrm{Var}$ なら，定理 3.16.2 により $a\in\mathrm{Fvar}^a$ なので $a=x_i$ なる x_i があって，同じ例によって $F=(t_1,\ldots,t_n)\downarrow i$ が成り立つ．いずれにしても $F\in\mathrm{PF}^{\Phi}\subseteq\langle\mathrm{PF}^{\Phi}\rangle$ が成り立つ．

(2) $r\geq 1$ **の場合：** 定理 4.5.1 の結論 1, 2, 3 に沿って次のように考えればいい．

(2.1) $a=\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j)$, $\lambda\in\Lambda\cap\Gamma$ **の場合：** 定理 4.5.1 の結論 1 と補題 4.6.1 により，$x_1,\ldots,x_n$ は a_k の自由変数列であり $(k=1,\ldots,j)$，$G_k=a_k(x_1,\ldots,x_n)$ と定めれば，

$$F=a(x_1,\ldots,x_n)=\omega_\lambda\circ\big(a_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,a_j(x_1,\ldots,x_n)\big)$$

$$= \omega_\lambda \circ (G_1, \ldots, G_j) = \lambda(G_1 \ldots, G_j)$$

が成り立つ．帰納法の仮定により $G_k \in \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle$ だから，$F \in \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle$ が成り立つ．

(2.2) $a = \lambda b$，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x$，$x \in \mathrm{Qvar} - \{x_1, \ldots, x_n\}$ **の場合**：定理 4.5.1 の結論 2 により，$x, x_1, \ldots, x_n$ は b の自由変数列であり，$t = \sigma b$，$G = b(x, x_1, \ldots, x_n)$ と定めれば，$t \in T_\lambda$，$G \in W_{\sigma x} \times W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$ であって，任意の $(w_1, \ldots, w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して

$$\begin{aligned} F(w_1, \ldots, w_n) = a(w_1, \ldots, w_n) &= \lambda_W\big(b(\Box, w_1, \ldots, w_n)\big) \\ &= \lambda_W\big(G(\Box, w_1, \ldots, w_n)\big) = (\flat_{\lambda,1} G)(w_1, \ldots, w_n), \end{aligned}$$

つまり $F = \flat_{\lambda,1} G$ が成り立つ．帰納法の仮定により $G \in \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle$ だから，$F \in \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle$ が成り立つ．

(2.3) $a = \lambda b$，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x_i$ **の場合** $(i \in \{1, \ldots, n\})$：定理 4.5.1 の結論 3 により，$x_1, \ldots, x_n$ は b の自由変数列であり，$t = \sigma b$，$G = b(x_1, \ldots, x_n)$ と定めれば，$t \in T_\lambda$，$G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$ であって，任意の $(w_1, \ldots, w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して

$$\begin{aligned} F(w_1, \ldots, w_n) &= a(w_1, \ldots, w_n) = \lambda_W\big(b(w_1, \ldots, w_{i-1}, \Box, w_{i+1}, \ldots, w_n)\big) \\ &= \lambda_W\big(G(w_1, \ldots, w_{i-1}, \Box, w_{i+1}, \ldots, w_n)\big) = (\flat_{\lambda,i} G)(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

が成り立つが，$\flat_{\lambda,i} G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_{i-1}} \times W_{t_{i+1}} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_{\lambda t}$，$x_i \in \mathrm{Qvar}_{t_i}$ であるから

$$(\flat_{\lambda,i} G)(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) = \big(\sharp_{t_i,i}(\flat_{\lambda,i} G)\big)(w_1, \ldots, w_n),$$

従って $F = \big(\sharp_{t_i,i}(\flat_{\lambda,i} G)\big)$ が成り立つ．帰納法の仮定により $G \in \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle$ であるから，$F \in \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle$ が成り立つ．

補題 4.6.2　型関数 G に対し $\flat_{\lambda,i} G$ $(i > 1)$ が定義されるとき，巡回置換 $p = (i, \ldots, 2, 1)$ に対して，$\flat_{\lambda,1}(pG)$ も定義されて $\flat_{\lambda,i} G = \flat_{\lambda,1}(pG)$ が成り立つ．

証明　$G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$，$t \in T_\lambda$，$i \leq n$ となっているから

$$pG \in W_{t_i} \times W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_{i-1}} \times W_{t_{i+1}} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$$

であり，さらに $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x$ なる $x \in \mathrm{Var}$ があって $\sigma x = t_i$ であるから $\flat_{\lambda,1}(pG)$ も定義され，$\flat_{\lambda,i} G$ と $\flat_{\lambda,1}(pG)$ は共に $W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_{i-1}} \times W_{t_{i+1}} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_{\lambda t}$ に属す．任意の $(w_1, \ldots, w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して

$$(pG)(w_i, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) = (pG)(w_{p1}, \ldots, w_{pn}) = G(w_1, \ldots, w_n),$$

従って任意の $(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_{i-1}} \times W_{t_{i+1}} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して

$$(pG)(\Box, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) = G(w_1, \ldots, w_{i-1}, \Box, w_{i+1}, \ldots, w_n)$$

が成り立つ．そこで，次のように計算して $\flat_{\lambda,i} G = \flat_{\lambda,1}(pG)$ を示すことができる．

$$\begin{aligned} \big(\flat_{\lambda,1}(pG)\big)(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) &= \lambda_W\big((pG)(\Box, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n)\big) \\ &= \lambda_W\big(G(w_1, \ldots, w_{i-1}, \Box, w_{i+1}, \ldots, w_n)\big) \\ &= (\flat_{\lambda,i} G)(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

補題 4.6.3 型関数 G に対して $\sharp_{t,i}G$ $(i > 1)$ が定義されるとき，$\sharp_{t,1}G$ も定義され，巡回置換 p で $\sharp_{t,i}G = p(\sharp_{t,1}G)$ をみたすものがある．

証明　便宜上 t を t_0 とも書く．$G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_u$，$i - 1 \leq n$，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Qvar}_t)$，$u \in \lambda(T_\lambda)$ となっていて，$\sharp_{t,i}G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_{i-1}} \times W_{t_0} \times W_{t_i} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_u$ が成り立つ．従って $\sharp_{t,1}G$ も定義され，$\sharp_{t,1}G \in W_{t_0} \times W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_u$ が成り立つ．$1 < i \leq n + 1$ であるから，$\{0, 1, \ldots, n\}$ 上の置換 p を $p = (0, 1, \ldots, i - 1)$ と定義できて，任意の $(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_0, w_i, \ldots, w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_{i-1}} \times W_{t_0} \times W_{t_i} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して

$$\begin{aligned}(\sharp_{t,i}G)(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_0, w_i, \ldots, w_n) &= G(w_1, \ldots, w_n) \\ &= (\sharp_{t,1}G)(w_0, w_1, \ldots, w_n) = \big(p(\sharp_{t,1}G)\big)(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_0, w_i, \ldots, w_n),\end{aligned}$$

すなわち $\sharp_{t,i}G = p(\sharp_{t,1}G)$ が成り立つ．

定義 4.6.4 以下の命題を成り立たせるための諸条件を次に定義する．

(1) $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が**修飾変数条件**をみたすとは，各 $t \in T$ に応じて Qvar_t が空集合であるかまたは可算個の元を含むことを言う．

(2) $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が**可変子条件**をみたすとは，各 $t \in T$ に応じて Γ の部分集合 Γ_t で $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}_t = \Gamma_t\mathrm{Qvar}_t$ をみたすものがあることを言う．

(3) 二つの可変子 λ と λ' が**同類**であるとは，$\triangledown \in \Gamma$ と $x, x' \in \mathrm{Qvar}$ で $\lambda = \triangledown x$，$\lambda' = \triangledown x'$，$\sigma x = \sigma x'$ をみたすものがあることを言う．そして，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), W$ が**意味条件**をみたすとは，同類の可変子 λ, λ' については $T_\lambda = T_{\lambda'}$ であって W での意味 λ_W, λ'_W が等しいことを言う．

例 4.6.4 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が一階述語言語の場合，$\Gamma' = \{\forall, \exists\}$ と定めれば $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} = \Gamma'\mathrm{Var}$ が成り立つので，可変子条件がみたされる．また，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ がオメガ言語の場合，$\Gamma' = \{\Omega\}$ と定めれば $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} = \Gamma'\mathrm{Var}$ が成り立つので，可変子条件がみたされる．

$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が一階述語言語の場合，極量子 $\lambda = \forall x, \exists x$ の W での意味 λ_W は，$W_{\sigma x} \to W_\phi$ から W_ϕ への写像であって，例 4.3.2 で定めた通り任意の $f \in W_{\sigma x} \to W_\phi$ に対して

$$\lambda_W f = \begin{cases} \inf\{fw \mid w \in W_{\sigma x}\} & \cdots \quad \lambda = \forall x \text{ のとき} \\ \sup\{fw \mid w \in W_{\sigma x}\} & \cdots \quad \lambda = \exists x \text{ のとき} \end{cases}$$

をみたすから意味条件がみたされる．また，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ がオメガ言語で W が例 4.2.3 で作った認識対象世界の場合，可変子 $\lambda = \Omega x$ $(x \in \mathrm{Var})$ の W での意味 λ_W を例 4.3.3 でのように定めれば，意味条件がみたされる．W が言語世界 $A_{\Lambda \cap \Gamma}$ であって，そこでの可変子の意味を例 4.3.4 でのように定めれば，意味条件は必ずしもみたされない．

補題 4.6.4 $a_1, \ldots, a_j \in A$，$B \subseteq A$ とし，$y_1, \ldots, y_n$ は各 $b \in B$ の自由変数列であるとする．このとき，修飾変数条件の下で，相異なる変数 $x_1, \ldots, x_n$ で次の二条件をみたすものが存在する．

1. **x_i は y_i と同型である $(i = 1, \ldots, n)$．**
2. **a_k において任意の $s \in \mathrm{Prm}$ は $b\begin{pmatrix} y_1, \ldots, y_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ から自由である $(k = 1, \ldots, j;\ b \in B)$．**

証明　$\mathrm{Prm}^{B}_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{Prm}^{\wedge} = \mathrm{Qvar}^{B}_{\mathrm{free}} = \bigcup_{b\in B} \mathrm{Qvar}^{b}_{\mathrm{free}} \subseteq \bigcup_{b\in B} \mathrm{Fvar}^{b} \subseteq \{y_1,\ldots,y_n\}$ が成り立つ．また，$\{y_1,\ldots,y_n\}_t \cap \mathrm{Prm}^{\wedge} \neq \emptyset$ なる $t \in T$ に対しては，$\mathrm{Qvar}_t = \mathrm{Prm}_t \cap \mathrm{Prm}^{\wedge} \neq \emptyset$，従って修飾変数条件により，$\mathrm{Prm}_t \cap \mathrm{Prm}^{\wedge}$ が可算個の元を含む．従って定理 3.17.5 が適用できる．

系　$a_1,\ldots,a_j \in A$ **とし，**$y_1,\ldots,y_n$ **を相異なる変数とする．このとき，修飾変数条件の下で，相異なる変数** $x_1,\ldots,x_n$ **で次の二条件をみたすものが存在する．**

1. x_i **は** y_i **と同型である** $(i = 1,\ldots,n)$**．**
2. a_k **において任意の** $s \in \mathrm{Prm}$ **は** x_i **から自由である** $(k = 1,\ldots,j;\ i = 1,\ldots,n)$**．**

証明　補題 4.6.4 において $B = \{y_1,\ldots,y_n\}$ とすればいい（定理 3.17.5 系参照)．

補題 4.6.5 修飾変数条件・可変子条件・意味条件の下で，TF^{Φ} **は** TF **の台部分系である．**

証明　TF^{Φ} が TF の五種類の算法で閉じていることを示せばいい．問題 4.6.1 により無条件に，TF^{Φ} は置換算法で閉じている．これと補題 4.6.2 と補題 4.6.3 とを合わせれば，次の四つの場合に $F \in \mathrm{TF}^{\Phi}$ を示せばいいことが分かる．

1. $F = \lambda(G_1,\ldots,G_j)$ かつ $G_1,\ldots,G_j \in \mathrm{TF}^{\Phi}$
2. $F = \flat_{\lambda,1} G$ かつ $G \in \mathrm{TF}^{\Phi}$
3. $F = \sharp_{t,1} G$ かつ $G \in \mathrm{TF}^{\Phi}$
4. $F = G \circ (H_1,\ldots,H_m)$ かつ $G, H_1,\ldots,H_m \in \mathrm{TF}^{\Phi}$

場合 1：$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma$，$G_k \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_{u_k}$ $(k = 1,\ldots,j)$，$W_{u_1} \times \cdots \times W_{u_j} \subseteq \mathrm{Dom}\,\omega_\lambda$，$F = \omega_\lambda \circ (G_1,\ldots,G_j)$ となっている．また，$G_k = a_k(x^k_1,\ldots,x^k_n)$ と書けて $\sigma a_k = u_k$，$\sigma x^k_i = t_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ が成り立つ．補題 4.6.1 により $\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_j)$ が存在するから，この元を a と書く．

補題 4.6.4 系により，相異なる変数 $x_1,\ldots,x_n$ であって次の二条件をみたすものが存在する．

- x_i の型は t_i である $(i = 1,\ldots,n)$.
- a_k において x^k_i は x_i から自由である $(k = 1,\ldots,j;\ i = 1,\ldots,n)$.

そこで $b_k = a_k\left(\dfrac{x^k_1,\ldots,x^k_n}{x_1,\ldots,x_n}\right)$ と定めれば，定理 4.5.2 系 により $a_k(x^k_1,\ldots,x^k_n) = b_k(x_1,\ldots,x_n)$ が成り立つ．従って，b_k を改めて a_k と書くことにより，各 k について $G_k = a_k(x_1,\ldots,x_n)$ であるとしていい．

そうすると，定理 3.16.4 により $\mathrm{Fvar}^{a} \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ であり，定理 4.5.1 により $a(x_1,\ldots,x_n)$ は ω_λ と $G_k = a_k(x_1,\ldots,x_n)$ の合成すなわち F に等しい．従って $F \in \mathrm{TF}^{\Phi}$ が成り立つ．

場合 2：$\lambda = \triangledown x$ $(\triangledown \in \Gamma,\ x \in \mathrm{Qvar})$，$G \in W_{t'} \times W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_t$，$t \in T_\lambda$，$\sigma x = t'$ となっていて，任意の $(w_1,\ldots,w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して次の式が成り立つ．

$$F(w_1,\ldots,w_n) = \lambda_W\bigl(G(\square, w_1,\ldots,w_n)\bigr)$$

また，$G = b(x', x_1,\ldots,x_n)$ と書けて $\sigma b = t$，$\sigma x' = t'$，$\sigma x_i = t_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ が成り立つ．

修飾変数条件により $\mathrm{Qvar}_{t'}$ は可算個の元を含む．従って，$y \in \mathrm{Qvar}_{t'} - (\mathrm{Prm}^{\wedge^{b}} \cup \{x_1,\ldots,x_n\})$ なる y が存在する．定理 3.16.2 と定理 3.16.7 により b において x' は y から自由であり，また定

理 3.16.5 により b において x_i は x_i から自由 $(i = 1, \dots, n)$ であるから，$c = b\begin{pmatrix} x', x_1, \dots, x_n \\ \hline y, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}$ と定めれば，$c \in A_t$ であって定理 4.5.2 系 により $c(y, x_1, \dots, x_n) = b(x', x_1, \dots, x_n)$ が成り立つ．従って，c, y を改めて b, x' と書くことにより，$x' \in \mathrm{Qvar}_{t'}$ であるとしていい．

そうすると，可変子条件により可変子 $\lambda' = \triangledown x'$ が存在し，これは λ と同類である．$\sigma b = t \in T_\lambda$ であって意味条件により $T_\lambda = T_{\lambda'}$ であるから，$a = \lambda' b$ が存在する．さらに，定理 3.16.4 により $\mathrm{Fvar}^a \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ が成り立ち，表現関数 $a(x_1, \dots, x_n)$ が出来る．意味条件により $\lambda_W = \lambda'_W$ であるから，定理 4.5.1 により，任意の $(w_1, \dots, w_n) \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して

$$\begin{aligned} a(w_1, \dots, w_n) &= \lambda'_W\bigl(b(\Box, w_1, \dots, w_n)\bigr) \\ &= \lambda_W\bigl(G(\Box, w_1, \dots, w_n)\bigr) = F(w_1, \dots, w_n) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って F は表現可能である．

場合 3： $\mathrm{Qvar}_t \neq \emptyset$，$G \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_u$ となっていて，任意の $(w, w_1, \dots, w_n) \in W_t \times W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n}$ に対して $F(w, w_1, \dots, w_n) = G(w_1, \dots, w_n)$ が成り立つ．また，$G = b(x_1, \dots, x_n)$ と書ける．さらに，修飾変数条件により $y \in \mathrm{Qvar}_t - \{x_1, \dots, x_n\}$ なる y が存在する．従って問題 4.6.2 により $F = b(y, x_1, \dots, x_n)$ が成り立ち，F は表現可能である．

場合 4： $G \in W_{u_1} \times \cdots \times W_{u_m} \to W_t$，$H_i \in W_{t_1} \times \cdots \times W_{t_n} \to W_{u_i}$ $(i = 1, \dots, m)$ となっている．また $G = a(x_1, \dots, x_m)$ と書けて $\sigma x_i = u_i$ $(i = 1, \dots, m)$ が成り立つ．また，場合 1 におけると同様にして，$H_i = b_i(z_1, \dots, z_n)$ $(i = 1, \dots, m)$ と書けて $\sigma b_i = u_i$，$\sigma z_j = t_j$ $(j = 1, \dots, n)$ の成り立つことが分かる．

補題 4.6.4 を $B = \{b_1, \dots, b_m, z_1, \dots, z_n\}$ として使えば，相異なる変数 $y_1, \dots, y_n$ であって次の二条件をみたすものの存在することが分かる．

- y_j と z_j は同型である $(j = 1, \dots, n)$.
- a および b_i において，任意の $s \in \mathrm{Prm}$ は $c_i = b_i\begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ \hline y_1, \dots, y_n \end{pmatrix}$ および y_j から自由である $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$.

定理 4.5.2 系 により $y_1, \dots, y_n$ は c_i の自由変数列であって $H_i = c_i(y_1, \dots, y_n)$ が成り立つ．$\sigma c_i = \sigma b_i = u_i = \sigma x_i$ $(i = 1, \dots, m)$ であるから $b = a\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_m \\ \hline c_1, \dots, c_m \end{pmatrix}$ が定義され，定理 4.5.2 により，$y_1, \dots, y_n$ は b の自由変数列であって $b(y_1, \dots, y_n)$ は $G = a(x_1, \dots, x_m)$ と $H_i = c_i(y_1, \dots, y_n)$ の合成関数すなわち F に等しい．従って F は表現可能である．

定理 4.6.2 修飾変数条件・可変子条件・意味条件の下で，$\mathrm{TF}^\Phi = \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle = [\mathrm{PF}^\Phi]$ **が成り立つ．**

証明　定理 4.6.1 により $\mathrm{TF}^\Phi \subseteq \langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle$ が成り立ち，問題 3.2.4 により $\langle \mathrm{PF}^\Phi \rangle \subseteq [\mathrm{PF}^\Phi]$ が成り立つ．例 4.6.2 により $\mathrm{PF}^\Phi \subseteq \mathrm{TF}^\Phi$ であるから，補題 4.6.5 により $[\mathrm{PF}^\Phi] \subseteq \mathrm{TF}^\Phi$ が成り立つ．これで証明された．

例 4.6.5 A が命題言語で W が認識対象世界の場合の表現可能関数について考える．つまり，A は変数系 Var を素元系とし二項算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項算法 $\Diamond$ から成る代数構造を持つ普遍汎代数系であり，W は，集合 $\mathbb{T}$ に (4.2.1) をみたす算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ から成る代数構造を与えて代数系としたものである．そうすると，$\mathbb{T}$ の元の型は ϕ しかないから，

$$\mathrm{TF} = \bigcup_{n \geq 0} (\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}) \qquad\qquad (\text{ただし } \mathbb{T}^0 \to \mathbb{T} = \mathbb{T})$$

が成り立つ．また，$\mathrm{Qvar} = \emptyset$ だから，TF の代数構造は $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と合成と置換だけから成る．また，$\mathrm{Con} = \emptyset$ だから，PF^{Φ} は n 項射影 ($n \leq \#\mathrm{Var}$) だけから成る．さらに，$\mathrm{Qvar} = \emptyset$ だから，修飾変数条件・可変子条件・意味条件がみたされる．従って定理 4.6.2 により，TF^{Φ} は n 項射影 ($n \leq \#\mathrm{Var}$) に算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と合成と置換を施して得られる関数の全体であり，さらに，これらの関数は n 項射影 ($n \leq \#\mathrm{Var}$) に算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ を適用するだけでも得られる．

実は，命題言語の特殊性により，もっとはっきりしたことが分かる．すなわち，n 項以下の射影の全体を PR_n で表し，PR_n の元に算法 $\wedge, \vee, \Diamond$ と合成算法を適用して得られる関数の全体を $\overline{\mathrm{PR}_n}$ で表せば，直ぐ後で示す通り，$n \geq 1$ なら $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T} \subseteq \overline{\mathrm{PR}_n}$ が成り立つ．他方で，先に示したことにより $1 \leq n \leq \#\mathrm{Var}$ なら $\overline{\mathrm{PR}_n} \subseteq \mathrm{TF}^{\Phi}$ が成り立ち，また，A に閉元が存在しないから TF^{Φ} の元は $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}$ ($1 \leq n \leq \#\mathrm{Var}$) のどれかに含まれる．従って結局，次の式が成り立つ．

$$\mathrm{TF}^{\Phi} = \bigcup_{1 \leq n \leq \#\mathrm{Var}} (\mathbb{T}^n \to \mathbb{T})$$

$n \geq 1$ なら $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T} \subseteq \overline{\mathrm{PR}_n}$ なることは次のように示される．まず，一変数の型関数 $F(w)$ は四個ある．その中の恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}$ は PR_1 に属す．残りの三個は $w \wedge w^{\Diamond}$, $w \vee w^{\Diamond}$, $w^{\Diamond}$ に等しく，これらは $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}$ に算法 $\wedge, \vee, \Diamond$ を適用したものだから $\overline{\mathrm{PR}_1}$ に属す．そこで，任意の n 変数型関数 $F(w_1, \ldots, w_n)$ が $\overline{\mathrm{PR}_n}$ に属すことを，n についての帰納法で証明しよう．$n \geq 2$ とし，$(n-1)$ 変数関数 F_j を

$$F_j(w_1, \ldots, w_{n-1}) = F(w_1, \ldots, w_{n-1}, j)$$

と定義する ($j = 0, 1$)．このとき，次の式が成り立つ．

$$F(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n) = \{F_0(w_1, \ldots, w_{n-1}) \wedge {w_n}^{\Diamond}\} \vee \{F_1(w_1, \ldots, w_{n-1}) \wedge w_n\}$$

従って，射影 $\phi^n \downarrow i$ を P^n_i で表せば ($i = 1, \ldots, n$)，次の式が成り立つ．

$$F = \{(F_0 \circ (P^n_1, \ldots, P^n_{n-1})) \wedge {P^n_n}^{\Diamond}\} \vee \{(F_1 \circ (P^n_1, \ldots, P^n_{n-1})) \wedge P^n_n\}$$

帰納法の仮定により $F_j \in \overline{\mathrm{PR}_{n-1}}$ ($j = 0, 1$) であるから，$F \in \overline{\mathrm{PR}_n}$ が成り立つ．

問題 4.6.3 $F = \{(F_0 \circ (P^n_1, \ldots, P^n_{n-1})) \vee P^n_n\} \wedge \{(F_1 \circ (P^n_1, \ldots, P^n_{n-1})) \vee {P^n_n}^{\Diamond}\}$ が成り立つ．

課題 4.6.1 この節の内容と**帰納的関数**の理論や**計算可能性**の理論との関係を探れ．

4.7　文論対

$ この節と次の節では，形式言語の意味論の第三弾・最終弾として，真偽論に前章の代数学がどう使われるかを説明すると共に，第 4.9 節以降の演繹論への準備を行なう．

この節を通じて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を形式言語とし，これにとっての認識可能世界の範囲を限定して認識対象世界の領域** $\mathcal{W}$ **が定めてあるものとし，**T **の各可変子** $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ **の各** $W \in \mathcal{W}$ **での意味** λ_W **の族** $(\lambda_W)_{\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var},\ W \in \mathcal{W}}$ **が定めてあるものとする**（ただし $(\lambda_W)_{\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var},\ W \in \mathcal{W}}$ は今後は $(\lambda_W)_{\lambda, W}$ と略記する）．こういう三つ組み $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ を**論理系**と呼ぶ．なお，代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ を A と略記すると同様，論理系を $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ と略記することもある．

4.7.1　真偽のある論理系の定める文論対

§ 論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ において，T のある元 ϕ に対して $A_\phi \neq \emptyset$ であると共に各 $W \in \mathcal{W}$ に対して $W_\phi = \mathbb{T}$ $(= \{0, 1\})$ が成り立つとき，ϕ をこの論理系の**真偽**と呼び，A_ϕ の元を**文**と呼び，W_ϕ の元 1 と 0 を W における**真**と**偽**と呼ぶ．

例 4.7.1 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を例 4.1.1 の命題言語とすれば，$T = \{\phi\}$，$A_\phi = A \neq \emptyset$ であって T に可変子は無く，例 4.2.1 での定義により $\mathcal{W}$ はブール的認識可能世界 $\mathbb{T}$ のみから成る．従ってこれから，真偽 ϕ のある論理系が出来る．これを**命題論理系**と呼ぶ．

$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を例 4.1.2 の一階述語言語とすれば，$T = \{\epsilon, \phi\}$，$A_\phi \neq \emptyset$ であり，可変子は $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ に限る．また例 4.2.2 により，$\mathcal{W}$ はブール的認識可能世界 W のみから成なり，それらは $W_\phi = \mathbb{T}$ をみたす．また例 4.3.2 では，可変子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ は各 $W \in \mathcal{W}$ へ極量子として意味付けた．従ってこれから，真偽 ϕ のある論理系が出来る．これを**一階述語論理系**と呼ぶ．

$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を第 5 章以降で論ずる単相格言語・格言語とすれば，やはり真偽のある論理系が出来る．これを**単相格論理系・格論理系**と呼ぶ．

他方，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を例 4.1.3 のオメガ言語とすれば，$\mathcal{W}$ の元は例 4.2.3 によれば必ずしも真・偽を持たないから，これから出来る論理系には真偽は必ずしも存在しない．

なお以上の論理系の具体例では，可変子の意味の族 $(\lambda_W)_{\lambda, W}$ は形式言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ に応じて定まるので，これら論理系は混乱の恐れ無い限り $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ と略記する．

注意 4.7.1 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ が命題言語と一階述語言語の場合，文の全体 A_ϕ は論理式の全体に等しく，つまり「文」と「論理式」は同義である．これは従来の述語論理学で閉論理式を「文」と呼んで重要視・特別視するのとは異なる．本書では，型写像によって真偽 ϕ に対応付けられる元を，すなわち下記の写像 $a \mapsto (\Phi^* a)\nu$ によって認識対象世界の真 1 または偽 0 に対応付けられる元を重要視・特別視して「文」と呼ぶのである（閉論理式に当たるものは後に「閉文」と名付ける）．閉元を重要視・特別視する理由はそもそも無い．そのことは，命題言語に閉元が存在しないことからも分かるし，意味論と演繹論を抽象した論対論に閉元に当たる概念が登場しないことからも察せられよう．　**終**

以下，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ を真偽 ϕ のある論理系とする．そうすると，例 3.26.1 に先取りして記した通り，A の文の全体 A_ϕ に対して，第 3.30.1 項で定義した意味での $\mathbb{T}$ 値論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ が次のように作られる．すなわちまず $W \in \mathcal{W}$ とすれば，T の各可変子 λ の W での意味 λ_W から第 4.3.2 項でのように，$W^{\mathrm{Val}_W} = \bigcup_{t \in T}(\mathrm{Val}_W \to W_t)$ の T 型代数構造が定まる．次に Φ を A から W への定付値とすれば，第 4.3.3 項でのように意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}_W}$ が定まり，これが保型準写であって各 $t \in T$ に対して W^{Val_W} の t 部分が $\mathrm{Val}_W \to W_t$ であるから，特に $\Phi^* A_\phi \subseteq \mathrm{Val}_W \to W_\phi$ が成り立つ．従ってさらに $\nu \in \mathrm{Val}_W$ とすれば，各 $a \in A_\phi$ に対して $(\Phi^* a)\nu$ が W_ϕ $(= \mathbb{T})$ に属すから，A_ϕ から $\mathbb{T}$ への写像 $a \mapsto (\Phi^* a)\nu$ が出来る．この写像を Φ^ν で表す．

$$\Phi^\nu a = (\Phi^* a)\nu \qquad\qquad (a \in A_\phi)$$

また，A から共通の認識対象世界への定付値と変付値の組みの全体を $\mathfrak{V}$ で表す [6]．

$$\mathfrak{V} = \{(\Phi, \nu) \mid \Phi, \nu \text{ は A から } W \text{ への定付値と変付値，} W \in \mathcal{W}\}$$

[6] 記号「$\mathfrak{V}$」は「valulation」に因む．

そして，(Φ, ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての写像 $\Phi^\nu \in A_\phi {\to} \mathbb{T}$ の全体を $\mathcal{F}$ で表す．

$$\mathcal{F} = \{\Phi^\nu \mid (\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}\}$$

そうすると，$A_\phi \neq \emptyset$ であって $\mathcal{F}$ が $A_\phi {\to} \mathbb{T}$ の部分集合であるから，組み $(A_\phi, \mathcal{F})$ は $\mathbb{T}$ 値論対である．これを真偽 ϕ のある論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ の定める**文論対**と呼ぶ．

なお，以後文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ について説明する際には，第 3 章でと同様に AZ 記法を頻用するが，これを少し変更しなければならない．すなわち，$(A_\phi)^*$ の元は第 3 章と同じく $\alpha, \beta, \ldots$ で表すが，A_ϕ の元は $x, y, \ldots$ でなく $a, b, \ldots$ で表す．これは $x, y, \ldots$ は A の変数用に使いたいからである．ただし，次の例の $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ のように算法を表す場合は例外である．

例 4.7.2 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ が命題論理系の場合，例 4.1.1 により，A_ϕ は A に等しく，変数系 Var を素元系とし汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\Diamond$，$x \Rightarrow y$ から成る代数構造を持つ普遍汎代数系である．また例 4.2.1 により，$\mathcal{W}$ は $\mathbb{T}$ をブール論法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ によって代数系にしたもののみから成る．従って例 4.3.5 により，$\mathcal{F}$ は A のこれら算法についての $\mathbb{T}$ 表現の全体に等しい．以上により，命題論理系から出来る文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ は，A を言語とする第 3.30.4 項の意味での最大 $\mathbb{T}$ 表現論対である．$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ が一階述語論理系や格論理系の場合の $(A_\phi, \mathcal{F})$ は，最大 $\mathbb{T}$ 表現論対ではないが，やはり $\mathbb{T}$ 表現論対である．**終**

さて，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ は $\mathbb{T}$ 値論対の一つであるから，これについて第 3.30 節における束値論対の一般論により，与論・核・恒真元・論理・弱論理・理論や，第一種・第二種・第三種の別や，矛盾集合・矛盾元・完全集合・実例・補法・否法や，四種の完全性（修飾なしの完全性・弱完全性・強完全性・超完全性）・健全性・充分性や，偏恒真関係・恒真関係・恒真式・式論対の概念が定まる．

ただし，文論対に即して定義・表現を多少補正しなければならない．たとえば，一般の束値論対 $(A, \mathcal{F})$ については，各 $f \in \mathcal{F}$ に対する f 真元（f の下で真である元）とは，$fa = 1$ をみたす元 $a \in A$ のことであった．文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ でこれに当たるのは各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対する Φ^ν 真元（Φ^ν の下で真である元）で，これは $(\Phi^* a)\nu = 1$ をみたす元 $a \in A_\phi$ のことであるが，これを (Φ, ν) **真元**または (Φ, ν) **の下で真である元**と呼び換える [7]．

また，一般の束値論対 $(A, \mathcal{F})$ については，各 $f \in \mathcal{F}$ に対する偏 f 真関係 $\vDash_f$ とは，(3.30.1) によれば A^*, A 間の「$a_1 \cdots a_n \vDash_f b \iff \inf\{fa_1, \ldots, fa_n\} \leq fb$」と定義される関係であった．文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ でこれに当たるのは各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対する偏 Φ^ν 真関係 $\vDash_{\Phi^\nu}$ であるが，これを**偏** (Φ, ν) **真関係**と呼び換え，$\vDash_{\Phi, \nu}$ と表記換えする．すなわち，各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対し，$\vDash_{\Phi, \nu}$ は $(A_\phi)^*, A_\phi$ 間の次のように定義される関係である．

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_n \vDash_{\Phi, \nu} b &\iff \inf\{\Phi^\nu a_1, \ldots, \Phi^\nu a_n\} \leq \Phi^\nu b \\ &\iff \inf\{(\Phi^* a_1)\nu, \ldots, (\Phi^* a_n)\nu\} \leq (\Phi^* b)\nu \end{aligned}$$

なお (3.30.2) により，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ については次のことが成り立つ．

$$a_1 \cdots a_n \vDash b \iff \text{任意の } (\Phi, \nu) \in \mathfrak{V} \text{ に対して } a_1 \cdots a_n \vDash_{\Phi, \nu} b$$

同様に，一般の束値論対 $(A, \mathcal{F})$ ついて各 $f \in \mathcal{F}$ に対して第 3.30.1 項で定義した f 真関係 $\preccurlyeq_f$ に当たるものは，各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対する Φ^ν 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi^\nu}$ であるが，これを (Φ, ν) **真関係**と呼び換え，

[7] Φ と ν の終集合の W に言及して「(W, Φ, ν) の下で真である」としないのは，(Φ, ν) に言及した時点で既に何らかの $W \in \mathcal{W}$ に暗に言及しているからである．以下に定める $\vDash_{\Phi, \nu}$，$\preccurlyeq_{\Phi, \nu}$ 等の概念についても同様である．

$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と表記換えする．すなわち，各 $(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ に対し，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ は $(A_\phi)^*$ 上の

$$\begin{aligned}&a_1\cdots a_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1\cdots b_n\\ \iff\ &\inf\{\Phi^\nu a_1,\ldots,\Phi^\nu a_m\}\le\sup\{\Phi^\nu b_1,\ldots,\Phi^\nu b_n\}\\ \iff\ &\inf\{(\Phi^* a_1)\nu,\ldots,(\Phi^* a_m)\nu\}\le\sup\{(\Phi^* b_1)\nu,\ldots,(\Phi^* b_n)\nu\}\end{aligned}\tag{4.7.1}$$

と定義される関係である．なお (3.30.5) により，文論対 $(A_\phi,\mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ については

$$a_1\cdots a_m \preccurlyeq b_1\cdots b_n \iff \text{任意の } (\Phi,\nu)\in\mathfrak{V} \text{ に対して } a_1\cdots a_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1\cdots b_n$$

が成り立つ．また，$\alpha\preccurlyeq\beta$ をみたす式 $\alpha\to\beta$ は第 3.30.1 項での通り恒真式と呼ぶが，$\alpha\preccurlyeq_{\Phi,\nu}\beta$ をみたす式 $\alpha\to\beta$ は，やはり (Φ,ν) **真式**と呼び換える．

同様の事情で，定義 3.30.1 で一般の束値論対 $(A,\mathcal{F})$ に対して定義した $\mathcal{F}$ 実例に当たるものを，文論対 $(A_\phi,\mathcal{F})$ に対して次のように定義する．

定義 4.7.1 $(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ が $X\in\mathcal{P}(A_\phi)$ の $\mathfrak{V}$ **実例**であるとは，$X\subseteq(\Phi^\nu)^{-1}1$ かつ $\Phi^\nu\neq 1$ であることを言う．また，$(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ が $(X,Y)\in\mathcal{P}(A_\phi)\times\mathcal{P}(A_\phi)$ の $\mathfrak{V}$ **実例**であるとは，$(X,Y)\subseteq\big((\Phi^\nu)^{-1}1,(\Phi^\nu)^{-1}0\big)$ かつ $\Phi^\nu\neq 1$ であることを言う．さらに，上の二つの意味での $\mathfrak{V}$ 実例 (Φ,ν) が $W\in\mathcal{W}$ への定付値と変付値から成るとき，(Φ,ν) を W **上の** $\mathfrak{V}$ **実例**と呼ぶ．

注意 4.7.2 $(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ が $X\in\mathcal{P}(A_\phi)$ の $\mathfrak{V}$ 実例であるためには，$(X,\emptyset)\in\mathcal{P}(A_\phi)\times\mathcal{P}(A_\phi)$ の $\mathfrak{V}$ 実例であることが必要十分である．

注意 3.30.2 により，$(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ が $X\in\mathcal{P}(A_\phi)$ の $\mathfrak{V}$ 実例であるためには，文論対 $(A_\phi,\mathcal{F})$ について Φ^ν が定義 3.30.1 の意味で X の $\mathcal{F}$ 実例であることが必要十分である．従って，X の $\mathfrak{V}$ 実例の有無は $\mathcal{F}$ 実例の有無と同等である．$(X,Y)\in\mathcal{P}(A_\phi)\times\mathcal{P}(A_\phi)$ の $\mathfrak{V}$ 実例についても同様である．

上記のことと注意 3.30.12 により，$X\in\mathcal{P}(A_\phi)$ に $\mathfrak{V}$ 実例が存在すれば X は $(A_\phi,\mathcal{F})$ の無矛盾集合であるが，この逆は真ではなく，$(A_\phi,\mathcal{F})$ が $\mathbb{T}$ 表現論対の場合，$(A_\phi,\mathcal{F})$ のどの無矛盾集合にも $\mathfrak{V}$ 実例が存在するためには，$(A_\phi,\mathcal{F})$ が第二種以下であることが必要十分である．定理 5.7.1 によれば，$(A_\phi,\mathcal{F})$ が第三種の $\mathbb{T}$ 表現論対となる場合がある．従って，$(A_\phi,\mathcal{F})$ の無矛盾集合に $\mathfrak{V}$ 実例が存在するとは限らない．

命題論理系・一階述語論理系・格論理系でのように $(A_\phi,\mathcal{F})$ が $\mathbb{T}$ 表現論対の場合，問題 3.30.31 により $1\notin\mathcal{F}$ が成り立つから，任意の $(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{V}$ 実例の $\Phi^\nu\neq 1$ という要件をみたす．

例 4.7.3 $(A,T,\sigma,\mathrm{Prm}),\mathcal{W}$ を一階述語論理系とし，これに二変数と一変数の関数記号 $\times$ と -1 および二変数の述語記号 $=$ があるものとし，$\times(t,u)$ と $(-1)t$ を $t\cdot u$ と t^{-1} で表し（この記法は $\mathcal{W}$ の元にも適用する），$=(a,b)$ を $a=b$ で表す（この記法は $\mathcal{W}$ の元には適用しない）．さらに，x,y,z を相異なる変数とし，次の三つの論理式からなる集合を X で表す（例 3.13.1 参照）．

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,\big(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z\big)\qquad \forall x\,\forall y\,\big((x^{-1}\cdot x)\cdot y=y\big)\qquad \forall x\,\forall y\,(x^{-1}\cdot x=y^{-1}\cdot y)$$

また，$W\in\mathcal{W}$ が述語記号 $=$ と任意の $t,u\in W_\epsilon$ に対して次のことをみたすと仮定する．

$$\big(=(t,u)\big)=1 \iff t=u$$

このとき，Φ と ν を A から W への定付値と変付値とすれば，次のことが成り立つ．

$$\Big(\Phi^*\big(\forall x\,\forall y\,\forall z\,\big(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z\big)\big)\Big)\nu=1$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \text{任意の } s,t,u \in W_\epsilon \text{ に対して } \bigl(\Phi^*\bigl(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z\bigr)\bigr)\left(\left(\frac{z,y,x}{u,t,s}\right)\nu\right)=1\\
&\iff \text{任意の } s,t,u \in W_\epsilon \text{ に対して } \bigl(=\!\bigl(s\cdot(t\cdot u),(s\cdot t)\cdot u\bigr)\bigr)=1\\
&\iff \text{任意の } s,t,u \in W_\epsilon \text{ に対して } s\cdot(t\cdot u)=(s\cdot t)\cdot u
\end{aligned}
$$

ここで一番目の $\iff$ は問題 4.3.4 と (4.4.1) による．二番目の $\iff$ は，Φ^* と $\left(\frac{z,y,x}{u,t,s}\right)\nu$ の定める射影が算法 $=$ と $\times$ に関して準写であることと (4.3.3) による．同様に次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\bigl(\Phi^*\bigl(\forall x\,\forall y\,((x^{-1}\cdot x)\cdot y=y)\bigr)\bigr)\nu=1 &\iff \text{任意の } t,u\in W_\epsilon \text{ に対して } (t^{-1}\cdot t)\cdot u=u\\
\bigl(\Phi^*\bigl(\forall x\,\forall y\,(x^{-1}\cdot x=y^{-1}\cdot y)\bigr)\bigr)\nu=1 &\iff \text{任意の } t,u\in W_\epsilon \text{ に対して } t^{-1}\cdot t=u^{-1}\cdot u
\end{aligned}
$$

従って (Φ,ν) が X の $\mathfrak{V}$ 実例であるためには，任意の $s,t,u\in W_\epsilon$ に対して

$$
s\cdot(t\cdot u)=(s\cdot t)\cdot u \qquad (t^{-1}\cdot t)\cdot u=u \qquad t^{-1}\cdot t=u^{-1}\cdot u
$$

の成り立つことが必要十分であり，そのためには問題 3.13.3 によれば，W_ϵ が算法 $t\cdot u$ について群となって任意の $t\in W_\epsilon$ に対して t^{-1} が t の逆元であることが必要十分である．

同様に，(Φ,ν) が $Y=X\cup\bigl\{\forall x\,\forall y\,(x\cdot y=y\cdot x)\bigr\}$ の $\mathfrak{V}$ 実例であるためには，W_ϵ が可換群であることが必要十分である．従って $A_{\Phi,\nu}=\{a\in A_\phi \mid \Phi^\nu a=1\}$ と定めるとき，W_ϵ が非可換群であれば $X\subseteq A_{\Phi,\nu}$ と $Y\nsubseteq A_{\Phi,\nu}$ が成り立ち，W_ϵ が可換群であれば $X\subseteq Y\subseteq A_{\Phi,\nu}$ が成り立つ．非可換群も可換群も存在する．従って，$(A_\phi,\mathcal{B})$ を文論対 $(A_\phi,\mathcal{F})$ の論対化とすれば，X の $\mathcal{B}$ 実例は二つ以上存在する．また，定理 3.30.25 により $(A_\phi,\mathcal{F})$ には否法が存在する．従って定理 3.27.12 により，X は $(A_\phi,\mathcal{F})$ の無矛盾集合ではあるが完全集合ではない．

問題 4.7.1 (✓) 例 4.7.3 において X の $\mathcal{B}$ 実例は可算個存在する．

略解　例 4.7.3 における記号を使えば，各素数 p に応じて $Y_p=X\cup\bigl\{\forall x\,(x^p=x^{-1}\cdot x)\bigr\}$ と定めるとき，W_ϵ が位数 p の巡回群であれば $X\subseteq Y_p\subseteq A_{\Phi,\nu}$ が成り立ち，W_ϵ が p と異なる素数位数の巡回群であれば $X\subseteq A_{\Phi,\nu}$，$Y_p\nsubseteq A_{\Phi,\nu}$ が成り立つ．ただし，x^p は x の「p 巾」の略記である．**終**

第 3.30 節の一般論に納まらない事柄を次の三問に記す．**これらの問を通じて，$W\in\mathcal{W}$ とし，Φ を A から W への定付値とする．**また，ϕ 型の閉元を**閉文**と呼ぶ．

問題 4.7.2 (✓) 閉文は，ある $\nu\in\mathrm{Val}_W$ に対して $(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ の下で真であれば，任意の $\nu'\in\mathrm{Val}_W$ に対して $(\Phi,\nu')\in\mathfrak{V}$ の下で真である．

略解　a が閉文なら問題 4.5.7 により $\nu\in\mathrm{Val}_W$ によらず $(\Phi^*a)\nu$ が一定だからである．

問題 4.7.3 (✓) 文 $a\in A_\phi$ が任意の $\nu\in\mathrm{Val}_W$ に対して $(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ の下で真であるためには，Φ の下での a の表現関数が定値 1 をとることが必要十分である．

略解　$x_1,\dots,x_n$ が a の自由変数列なら任意の $\nu\in\mathrm{Val}_W$ に対して $(\Phi^*a)\nu=a^\Phi(\nu x_1,\dots,\nu x_n)$ が成り立つからである．

問題 4.7.4 (✓) 閉文 $a,b\in A_\phi$ が Φ の下で同じ意味を持てば，任意の $\nu\in\mathrm{Val}_W$ に対して，$(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ の下での a,b の真偽は一致する．

略解　問題 4.5.11 により，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ と意味指標 $c_1, \ldots, c_n$ に対して次の式が成り立つ．

$$(\Phi^* a)\nu = (a^{c_1,\ldots,c_n,\Phi})(\Phi c_1, \ldots, \Phi c_n) = (b^{c_1,\ldots,c_n,\Phi})(\Phi c_1, \ldots, \Phi c_n) = (\Phi^* b)\nu$$

従って，a が (Φ, ν) の下で真であることと b が (Φ, ν) の下で真であることは同等である．

4.7.2　真偽のある論理系と文論対の拡大

§ 前項から引き続いて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda,W}$ **を真偽** ϕ **のある論理系とする．**また，これまで通り，A の定数系・変数系・算号系・算号基を $\mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Lambda, \Gamma$ で表し，T の算部分系 $T_{\Lambda\cap\Gamma}$ を U で表す．また，第 4.7.1 項で定めた通り，A から任意の $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ と変付値 ν の組み (Φ, ν) の全体を $\mathfrak{V}$ で表し，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ が定める A_ϕ から $\mathbb{T}$ への写像 $a \mapsto (\Phi^* a)\nu$ を Φ^ν で表し，(Φ, ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての Φ^ν の全体を $\mathcal{F}$ で表す．従って $(A_\phi, \mathcal{F})$ が $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda,W}$ の定める文論対である．

文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ について演繹論を行なう際には，変数が十分に有るか否かがしばしば問題となる．そこで，論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda,W}$ に変数を付加するなどして程よく拡大したときに $(A_\phi, \mathcal{F})$ が拡大されることを説明するのがこの項の目的である．

そこで，真偽のある論理系をもう一つとって，それとその各種の助変数を上記の諸記号にプライム (prime) を付けたもので表す．すなわち，$(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}'), \mathcal{W}', (\lambda'_{W'})_{\lambda',W'}$ を真偽 ϕ' のある論理系とし，A' の定数系・変数系・算号系・算号基を $\mathrm{Con}', \mathrm{Var}', \Lambda', \Gamma'$ で表し，T' の算部分系 $T'_{\Lambda'\cap\Gamma'}$ を U' で表し，A' から任意の $W' \in \mathcal{W}'$ への任意の定付値 Φ' と変付値 ν' の組み (Φ', ν') の全体を $\mathfrak{V}'$ で表し，$(\Phi', \nu') \in \mathfrak{V}'$ が定める $A'_{\phi'}$ から $\mathbb{T}$ への写像 $a' \mapsto (\Phi'^* a')\nu'$ を $\Phi'^{\nu'}$ で表し，(Φ', ν') を $\mathfrak{V}'$ 全体に亘らせての $\Phi'^{\nu'}$ の全体を $\mathcal{F}'$ で表す．

そうして，まず形式言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ と $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$ について次の六条件を仮定する．

1. $\Lambda \subseteq \Lambda'$
2. A は A' の Λ 部分系である
3. T は T' の算部分系 T'_Λ に等しい
4. $\sigma = \sigma'|_A$
5. $\mathrm{Con} \subseteq \mathrm{Con}'$，$\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Var}'$
6. $\Gamma \subseteq \Gamma'$

これら六条件から次の四条件が導かれる．

7. $\mathrm{Prm} \subseteq \mathrm{Prm}'$
8. $\Lambda \cap \Gamma \subseteq \Lambda' \cap \Gamma'$
9. $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} \subseteq \Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}'$
10. U は U' の算部分系 $U'_{\Lambda\cap\Gamma}$ に等しい

ただし条件 9 は，条件 6, 7 に留意して $(\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^{+}$ を $(\Gamma' \amalg \mathrm{Prm}')^{+}$ に埋め込んだ上での条件である．条件 10 は，条件 3, 8 と U, U' の定義により次のように確かめられる．

$$\mathrm{U} = \mathrm{T}_{\Lambda\cap\Gamma} = (\mathrm{T}'_{\Lambda})_{\Lambda\cap\Gamma} = \mathrm{T}'_{\Lambda\cap\Gamma} = (\mathrm{T}'_{\Lambda'\cap\Gamma'})_{\Lambda\cap\Gamma} = \mathrm{U}'_{\Lambda\cap\Gamma}$$

なお，条件 3 と U, U' の定義により，集合としては $\mathrm{T}, \mathrm{T}', \mathrm{U}, \mathrm{U}'$ はすべて等しい．

形式言語 $(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ に対して条件 1 – 6 をみたす形式言語 $(\mathrm{A}', \mathrm{T}', \sigma', \mathrm{Prm}')$ は，以下の三手順で作ることができる．

手順 1. $\mathrm{A} \cap \mathrm{P} = \emptyset$ なる集合 P と写像 $\rho \in \mathrm{P} {\to} \mathrm{T}$ を任意にとり，$\mathrm{Prm}' = \mathrm{Prm} \cup \mathrm{P}$ と定め，さらに P を $\mathrm{P} = \mathrm{C} \amalg \mathrm{V}$ と任意に分割して $\mathrm{Con}' = \mathrm{Con} \cup \mathrm{C}$，$\mathrm{Var}' = \mathrm{Var} \cup \mathrm{V}$ と定める．

そうすると $\mathrm{Prm}' = \mathrm{Con}' \amalg \mathrm{Var}'$，$\mathrm{Var}' \neq \emptyset$ と条件 5, 7 がみたされる．

手順 2. 条件 6 をみたす集合 Γ' を任意にとり，条件 6, 7 に留意して $(\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^{+}$ を $(\Gamma' \amalg \mathrm{Prm}')^{+}$ に埋め込み，$(\Gamma' \amalg \mathrm{Prm}')^{+}$ において，$\Lambda \cap \Gamma \subseteq \mathrm{M} \subseteq \Gamma'$，$\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{N} \subseteq \Gamma'\mathrm{Var}'$ なる集合 M, N を任意にとって，$\Lambda' = \mathrm{M} \cup \mathrm{N}$ と定める．

そうすると $\Lambda' \subseteq \Gamma' \cup \Gamma'\mathrm{Var}'$ と条件 1 がみたされる．

手順 3. $\Lambda' - \Lambda$ の各元に集合 T 上の算法を一つずつ（ただし $(\Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}') - \Lambda$ の元には単項算法を）あてがい，それら算法を T の Λ 代数構造に付け加えて Λ' 代数系 T' を作る．

そうすると条件 3 がみたされ，また，$(\Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}') \cap \Lambda = \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ が成り立つから，$\Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}'$ の各元に対応する T' の算法は単項である．また，$\mathrm{A} \cap \mathrm{P} = \emptyset$，$\mathrm{Prm}' = \mathrm{Prm} \cup \mathrm{P}$ であった．従って定理 3.12.4 により，$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ の $\mathrm{T}', \mathrm{P}, \rho$ による系拡大 $(\mathrm{A}', \mathrm{T}', \sigma', \mathrm{Prm}')$ が存在し，条件 2, 4 と $\sigma'|_{\mathrm{P}} = \rho$ がみたされる．以上により，$(\mathrm{A}', \mathrm{T}', \sigma', \mathrm{Prm}')$ は $\mathrm{Con}', \mathrm{Var}', \Lambda', \Gamma'$ を定数系・変数系・算号系・算号基とする形式言語であって条件 1 – 6 をみたす．

次に，$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ と $(\mathrm{A}', \mathrm{T}', \sigma', \mathrm{Prm}')$ の認識可能世界を関連付けるために，条件 1 – 6 に加えて次の条件を仮定する．

0. $\sigma\mathrm{Prm} = \sigma'\mathrm{Prm}'$，$\phi = \phi'$

この条件中の式 $\sigma\mathrm{Prm} = \sigma'\mathrm{Prm}'$ は，$\mathrm{Prm}' = \mathrm{Prm} \cup \mathrm{P}$，$\sigma'|_{\mathrm{A}} = \sigma$，$\sigma'|_{\mathrm{P}} = \rho$ であったから，手順 1 における $\rho \in \mathrm{P} {\to} \mathrm{T}$ を $\rho\mathrm{P} \subseteq \sigma\mathrm{Prm}$ なるようにとればみたされる．式 $\phi = \phi'$ は，単に記号 ϕ' を ϕ と書き換えることによりみたされる．

さて，$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ と $(\mathrm{A}', \mathrm{T}', \sigma', \mathrm{Prm}')$ にとっての認識対象世界の領域 $\mathcal{W}$ と $\mathcal{W}'$ は，真偽のある認識可能世界の範囲を任意に限定して定めることができる．$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとっての真偽のある認識可能世界とは，U 型代数系 W で $W_{\phi} = \mathbb{T}$ と任意の $t \in \sigma\mathrm{Prm}$ に対して $W_t \neq \emptyset$ をみたすもののことである．同様に，$(\mathrm{A}', \mathrm{T}', \sigma', \mathrm{Prm}')$ にとっての真偽のある認識可能世界とは，U' 型代数系 W' で $W'_{\phi'} = \mathbb{T}$ と任意の $t \in \sigma'\mathrm{Prm}'$ に対して $W'_t \neq \emptyset$ をみたすもののことである．いま，条件 0 を仮定してあり，条件 10 がみたされる．従って問題 3.4.6 により，$(\mathrm{A}', \mathrm{T}', \sigma', \mathrm{Prm}')$ にとっての真偽のある認識可能世界 W' の算部分系 $W'_{\Lambda\cap\Gamma}$ は，$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとっての真偽のある認識可能世界である．つまり，W' を正式に型代数系 U' と型写像 τ' によって (W', τ', U') と表せば，$\mathrm{U} = \mathrm{U}'_{\Lambda\cap\Gamma}$ であったから，$(W'_{\Lambda\cap\Gamma}, \tau', \mathrm{U})$ は $(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとっての真偽のある認識可能世界である．このことを踏まえてさらに次の二条件を仮定する．

11. $\mathcal{W} = \{W'_{\Lambda\cap\Gamma} \mid W' \in \mathcal{W}'\}$

12. 各 $\lambda' \in \Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}'$ の各 $W' \in \mathcal{W}'$ における意味 $\lambda'_{W'}$ の族 $(\lambda'_{W'})_{\lambda',W'}$ は，各 $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ の各 $W \in \mathcal{W}$ における意味 λ_W の族 $(\lambda_W)_{\lambda,W}$ の拡張である

論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$, $\mathcal{W}$, $(\lambda_W)_{\lambda,W}$ に対して，条件 0 – 12 をみたす論理系 $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$, $\mathcal{W}'$, $(\lambda'_{W'})_{\lambda',W'}$ を**正則拡大**と呼ぶ．正則拡大をとることが「程よく拡大する」とこの項冒頭に述べたことの具体的内容である．

例 4.7.4 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$, $\mathcal{W}$, $(\lambda_W)_{\lambda,W}$ が一階述語論理系の場合，その正則拡大 $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$, $\mathcal{W}'$, $(\lambda'_{W'})_{\lambda',W'}$ をたとえば次のようにして得ることができる．

まず例 4.1.2 により，T は二点集合 $\{\epsilon, \phi\}$ であり，$\sigma\mathrm{Prm} = \{\epsilon\}$ が成り立ち，算号系 Λ は論理記号 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ と関数記号・述語記号から成り，算号基 Γ はブール子 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と関数記号・述語記号と記号 $\forall, \exists$ から成り，従って不変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma$ は $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と関数記号・述語記号から成り，可変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ は $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ から成る．

従って，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ の拡大の手順 1 では，条件 0 を成り立たせるために，P と ρ を $\rho P = \{\epsilon\}$ なるようとらなければならない．次に手順 2 では，たとえば $\Gamma' = \Gamma$, $M = \Lambda \cap \Gamma$, $N = \{\forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}'\}$ と定める．そうすると

$$\Lambda' \cap \Gamma' = \Lambda \cap \Gamma \qquad\qquad \Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}' = \{\forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}'\}$$

従って $\Lambda' - \Lambda = (\Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}') - \Lambda = \{\forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}' - \mathrm{Var}\}$ が成り立つ．そこで最後に手順 3 では，T 上の算法 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var}' - \mathrm{Var})$ を，たとえば次のように定める．

$$\mathrm{Dom}\,\forall x = \mathrm{Dom}\,\exists x = \{\phi\} \qquad\qquad \forall x\phi = \exists x\phi = \phi$$

こうして得られる形式言語 $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$ は，やはり一階述語言語であり，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ と関数記号・述語記号を共有し，定数系 Con' と変数系 Var' はそれぞれ Con と Var の恣意の拡大である．

そこで例 4.2.2 と例 4.7.1 に記した通り，$\mathcal{W}$ と $\mathcal{W}'$ はそれぞれ $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ と $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$ にとってのブール的な認識可能世界の全体をとる．そうすると，$\Lambda \cap \Gamma = \Lambda' \cap \Gamma'$ であるから $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ であって，条件 11 がみたされる．可変子 $\forall x', \exists x'$ $(x' \in \mathrm{Var}')$ は，例 4.3.2 に記した通り，各 $W' \in \mathcal{W}'$ へ極量子として意味付ける．そうすると条件 12 がみたされる．こうして得られる正則拡大 $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$, $\mathcal{W}'$, $(\lambda'_{W'})_{\lambda',W'}$ はやはり一階述語論理系である．

定理 4.7.1 真偽のある論理系の正則拡大の定める文論対は，もとの論理系の定める文論対の拡大である．つまり，これまでに設けた仮定と記号法の下で，文論対 $(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ は文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の拡大である．従ってさらに次のことが成り立つ．

1. **$(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は $(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ の恒真関係 $\preccurlyeq'$ の $(A_\phi)^* \times (A_\phi)^*$ への制限に等しい．**

2. **$\mathcal{P}A_\phi \times \mathcal{P}A_\phi$ の元 (X, Y) が $\preccurlyeq$ による A_ϕ の切断であるためには，$\preccurlyeq'$ による $A'_{\phi'}$ の切断であることが必要十分である．**

3. **$(A_\phi, \mathcal{F})$ の核は $(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ の核と A_ϕ の交わりに等しい．**

4. **$(A_\phi, \mathcal{F})$ の論理の全体は，$(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ の論理の $(A_\phi)^* \times A_\phi$ への制限の全体に等しい．**

5. **$(A_\phi, \mathcal{F})$ の理論の全体は，$(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ の理論と A_ϕ の交わりの全体に等しい．**

6. A_ϕ **が** $(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ **の矛盾集合であるときには，**A_ϕ **の部分集合** X **と** $\mathcal{P}A_\phi \times \mathcal{P}A_\phi$ **の元** (X, Y) **について次のことが成り立つ．**

6a. X **が** $(A_\phi, \mathcal{F})$ **の矛盾集合であるためには，**$(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ **の矛盾集合であることが必要十分である．**

6b. X **が** $(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ **の完全集合であれば，**$(A_\phi, \mathcal{F})$ **の完全集合でもある．**

6c. X **に** $\mathfrak{V}$ **実例があるためには，**X **に** $\mathfrak{V}'$ **実例のあることが必要十分である．**(X, Y) **に** $\mathfrak{V}$ **実例があるためには，**(X, Y) **に** $\mathfrak{V}'$ **実例のあることが必要十分である．より精密には，**$W \in \mathcal{W}$ **と** $W' \in \mathcal{W}'$ **が** $W = W'_{\Lambda\cap\Gamma}$ **をみたして** $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ **と** $(\Phi', \nu') \in \mathfrak{V}'$ **が** $\Phi = \Phi'|_{\mathrm{Con}}$ **と** $\nu = \nu'|_{\mathrm{Var}}$ **をみたすとき，**(Φ, ν) **が** X **の** $\mathfrak{V}$ **実例であるためには** (Φ', ν') **が** X **の** $\mathfrak{V}'$ **実例であることが必要十分であり，**(Φ, ν) **が** (X, Y) **の** $\mathfrak{V}$ **実例であるためには，**(Φ', ν') **が** (X, Y) **の** $\mathfrak{V}'$ **実例であることが必要十分である．**

証明　$(A'_{\phi'}, \mathcal{F}')$ が $(A_\phi, \mathcal{F})$ の拡大であることを証明するには次の三つのことを示せばいい．

7. $A_\phi \subseteq A'_{\phi'}$

8. 各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に応じて，$\Phi^\nu = \Phi'^{\nu'}|_{A_\phi}$ なる $(\Phi', \nu') \in \mathfrak{V}'$ が存在する．

9. 各 $(\Phi', \nu') \in \mathfrak{V}'$ に応じて，$\Phi^\nu = \Phi'^{\nu'}|_{A_\phi}$ なる $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ が存在する．

まず結論 7 は，条件 2, 4, 0 により $A \subseteq A'$，$\sigma = \sigma'|_A$，$\phi = \phi'$ であるから成り立つ．次に結論 8, 9 については，条件 11 により，各 $W \in \mathcal{W}$ に応じて $W = W'_{\Lambda\cap\Gamma}$ なる $W' \in \mathcal{W}'$ があり，逆に各 $W' \in \mathcal{W}'$ に対して $W'_{\Lambda\cap\Gamma} \in \mathcal{W}$ が成り立つ．そこで $W \in \mathcal{W}$ と $W' \in \mathcal{W}'$ で $W = W'_{\Lambda\cap\Gamma}$ なるものを任意にとる．そうすると，条件 5, 4 により $\mathrm{Con} \subseteq \mathrm{Con}'$，$\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Var}'$，$\sigma = \sigma'|_A$ であるから，Φ と ν が A から W への定付値と変付値であれば，Φ と ν は A' から W' への定付値と変付値に拡張され，逆に Φ' と ν' が A' から W' への定付値と変付値であれば，$\Phi'|_{\mathrm{Con}}$ と $\nu'|_{\mathrm{Var}}$ は A から W への定付値と変付値である．従って結論 8, 9 を示すには，次のことを示せばいい．

10. $W \in \mathcal{W}$ と $W' \in \mathcal{W}'$ が $W = W'_{\Lambda\cap\Gamma}$ をみたして $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ と $(\Phi', \nu') \in \mathfrak{V}'$ が $\Phi = \Phi'|_{\mathrm{Con}}$ と $\nu = \nu'|_{\mathrm{Var}}$ をみたせば，$\Phi^\nu = (\Phi'^{\nu'})|_{A_\phi}$ が成り立つ．

これが示されれば，結論 1 – 6 は定理 3.30.9 と注意 4.7.2 から得られる．

そこで以下，$W \in \mathcal{W}$ と $W' \in \mathcal{W}'$ が $W = W'_{\Lambda\cap\Gamma}$ をみたすと仮定する．そうすると変付値についての上記のことにより，A' から W' への変付値の全体 $\mathrm{Val}'_{W'}$ から A から W への変付値の全体 Val_W への全射

$$\nu' \mapsto \nu'|_{\mathrm{Var}}$$

が出来る．従ってまた定理 3.10.3 により，U 型代数系 W の巾代数系 W^{Val_W} から同じく U 型代数系 W の巾代数系 $W^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ への保型準写 ψ で各 $b \in W^{\mathrm{Val}_W}$ と $\nu' \in \mathrm{Val}'_{W'}$ に対して

$$(\psi b)\nu' = b(\nu'|_{\mathrm{Var}})$$

をみたすものがある（ψ はさらに単射であるが，このことは後の議論に関係ない）．U 型代数系 $W^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ と U' 型代数系 W' の巾代数系 $W'^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ について，$W = W'_{\Lambda\cap\Gamma}$ なることと定理 3.10.2 により $W^{\mathrm{Val}'_{W'}} = (W'_{\Lambda\cap\Gamma})^{\mathrm{Val}'_{W'}} = (W'^{\mathrm{Val}'_{W'}})_{\Lambda\cap\Gamma}$ が成り立つから，ψ はすなわち U 型代数系 W^{Val_W} から U' 型代数系 $W'^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ を U 型代数系とみなしたものへの保型準写である．

さて W^{Val_W} は，各 $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ の W における意味 λ_W によって T 型代数系と成してある．また $W'^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ も，各 $\lambda' \in \Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}'$ の W' での意味 $\lambda'_{W'}$ によって T′ 型代数系と成してある．ただし条件 12 を仮定しているから，$\lambda = \lambda'$ のときは λ_W と $\lambda'_{W'}$ は等しい．つまり，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Var})$，$\lambda' \in \Lambda' \cap \Gamma' x'$ $(x' \in \mathrm{Var})$ のとき，

$$\lambda_W \in \left(\bigcup_{t \in T_\lambda} (W_{\sigma x} {\to} W_t)\right) {\to} W \qquad \lambda'_{W'} \in \left(\bigcup_{t' \in T'_{\lambda'}} (W'_{\sigma' x'} {\to} W'_{t'})\right) {\to} W'$$

であって各 $t \in T_\lambda$，$t' \in T'_{\lambda'}$ に対して

$$\lambda_W(W_{\sigma x} {\to} W_t) \subseteq W_{\lambda t} \qquad \lambda'_{W'}(W'_{\sigma' x'} {\to} W'_{t'}) \subseteq W'_{\lambda' t'}$$

となっているが，$\lambda = \lambda'$ であれば，まず $x = x'$ であり，次に条件 12 により，$T_\lambda = T'_{\lambda'}$ であって各 $t \in T_\lambda$ に対して $\lambda t = \lambda' t$ が成り立つ．また，$W = W'_{\Lambda \cap \Gamma}$ との仮定により，各 $t \in T$ に対して $W_t = W'_t$ が成り立つ．さらに，条件 4 により $\sigma = \sigma'|_A$ であるから，$\sigma x = \sigma' x'$ が成り立つ．従って λ_W と $\lambda'_{W'}$ の始集合と終集合は等しいが，条件 12 により，λ_W と $\lambda'_{W'}$ は写像として等しい．

このことにより実は，ψ は Λ 代数系 W^{Val_W} から Λ' 代数系 $W'^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ への Λ 準写となる．つまり，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ と $\lambda' \in \Lambda' \cap \Gamma'\mathrm{Var}'$ が $\lambda = \lambda'$ をみたすなら，λ の W^{Val_W} における定義域 $\bigcup_{t \in T_\lambda} (\mathrm{Val}_W {\to} W_t)$ の任意の元 $b \in \mathrm{Val}_W {\to} W_t$ $(t \in T_\lambda)$ に対し，ψb は λ' の $W'^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ における定義域 $\bigcup_{t' \in T'_{\lambda'}} (\mathrm{Val}'_{W'} {\to} W'_{t'})$ の部分集合 $\mathrm{Val}'_{W'} {\to} W'_t$ に属すが，これらについて $\psi(\lambda b) = \lambda'(\psi b)$ が成り立つ．

これを確かめるために，$\lambda \in \Lambda \cap \Gamma x$ $(x \in \mathrm{Var})$ とし，任意の $v' \in \mathrm{Val}'_{W'}$ をとる．そうすると，任意の $w \in W_{\sigma x} = W'_{\sigma' x}$ に対して，Val_W 上の値換 (x/w) と $\mathrm{Val}'_{W'}$ 上の値換 (x/w) について

$$(x/w)(v'|_{\mathrm{Var}}) = \big((x/w)v'\big)\big|_{\mathrm{Var}}$$

が成り立ち，従って ψ の定義により

$$b\big((x/w)(v'|_{\mathrm{Var}})\big) = (\psi b)\big((x/w)v'\big)$$

が成り立つ．これは，$W_{\sigma x} {\to} W_t$ の元 $b\big((x/\square)(v'|_{\mathrm{Var}})\big)$ が $W'_{\sigma' x} {\to} W'_t$ の元 $(\psi b)\big((x/\square)v'\big)$ に等しいことを意味する．このことなどを使って次のように推論することができる．

$$\begin{aligned}
\big(\psi(\lambda b)\big)v' &= (\lambda b)(v'|_{\mathrm{Var}}) \\
&= \lambda_W\Big(b\big((x/\square)(v'|_{\mathrm{Var}})\big)\Big) \\
&= \lambda_W\Big((\psi b)\big((x/\square)v'\big)\Big) \\
&= \lambda'_{W'}\Big((\psi b)\big((x/\square)v'\big)\Big) \\
&= \big(\lambda'(\psi b)\big)v'
\end{aligned}$$

従って $\psi(\lambda b) = \lambda'(\psi b)$ が確かに成り立つ．

さてそうすると次には，A から W への定付値 Φ と A' から W' への定付値 Φ' が $\Phi = \Phi'|_{\mathrm{Con}}$ をみたせば，

$$\psi\Phi^* = \Phi'^*|_A$$

が成り立つ（図 4.2 参照）．このことを示すには，$\psi\Phi^*$ も $\Phi'^*|_A$ も A から $W'^{\mathrm{Val}'_{W'}}$ への Λ 準写であるから，A の生成系 Prm の任意の元 a に対して $\psi(\Phi^* a) = \Phi'^* a$ を示せばよく，そのために

図 4.2: 論理系の拡大により得られる意味写像の可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi^*} & W^{\mathrm{Val}_W} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ A' & \xrightarrow[\Phi'^*]{} & W'^{\mathrm{Val}'_{W'}} \end{array}$$

はまた，任意の $\nu' \in \mathrm{Val}'_{W'}$ に対して $\bigl(\psi(\Phi^* a)\bigr)\nu' = (\Phi'^* a)\nu'$ を示せばいいが，これは次のように確かに成り立つ．

$$\begin{array}{ll} \bigl(\psi(\Phi^* a)\bigr)\nu' = (\Phi^* a)(\nu'|_{\mathrm{Var}}) = \Phi a = \Phi' a = (\Phi'^* a)\nu' & \cdots \quad a \in \mathrm{Con}\ \text{のとき} \\ \bigl(\psi(\Phi^* x)\bigr)\nu' = (\Phi^* x)(\nu'|_{\mathrm{Var}}) = (\nu'|_{\mathrm{Var}})x = \nu' x = (\Phi'^* x)\nu' & \cdots \quad x \in \mathrm{Var}\ \text{のとき} \end{array}$$

さてそうすると最後に，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ と $(\Phi', \nu') \in \mathfrak{V}'$ が $\Phi = \Phi'|_{\mathrm{Con}}$ と $\nu = \nu'|_{\mathrm{Var}}$ をみたせば，$\Phi^\nu = (\Phi'^{\nu'})|_{A_\phi}$ が次のように成り立つ．すなわち，任意の $a \in A_\phi$ に対して

$$\Phi^\nu a = (\Phi^* a)\nu = (\Phi^* a)(\nu'|_{\mathrm{Var}}) = \bigl(\psi(\Phi^* a)\bigr)\nu' = (\Phi'^* a)\nu' = (\Phi'^{\nu'})a$$

以上により結論 10 が示され，これで定理 4.7.1 の証明が完成した．

注意 4.7.3 定理 4.7.1 において $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$, $\mathcal{W}'$, $(\lambda'_{W'})_{\lambda', W'}$ が正則拡大の条件 5 より強い $\mathrm{Con} \subseteq \mathrm{Con}'$, $\mathrm{Var} = \mathrm{Var}'$ なる条件をみたすとき（こういう拡大を**正則定数拡大**と呼ぶ），定理 4.7.1 の証明において，$\mathrm{Val}_W = \mathrm{Val}'_{W'}$ であって $\mathrm{Val}'_{W'}$ から Val_W への写像 $\nu' \mapsto \nu'|_{\mathrm{Var}}$ が恒等写像であるから，写像 ψ も恒等写像であり（定理 3.10.3 参照），従って意味写像について $\Phi^* = \Phi'^*|_A$ が成り立つ．

定理 4.7.2 (✓) これまでに設けた仮定と記号法の下で，$(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}')$, $\mathcal{W}'$, $(\lambda'_{W'})_{\lambda', W'}$ を $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$, $\mathcal{W}$, $(\lambda_W)_{\lambda, W}$ の正則定数拡大とし，$x_1, \ldots, x_n$ を A の相異なる変数とし，$c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{Con}' - \mathrm{Con}$ とし，x_i と c_i は同型であるとする $(i = 1, \ldots, n)$．このとき，$a \in A_\phi$ が $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真元であるためには $a\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix}$ が $(A_{\phi'}, \mathcal{F}')$ の恒真元であることが必要十分である．

証明　c_i が A' の定数であるから，定理 3.16.7 により，a において x_i は c_i から自由である $(i = 1, \ldots, n)$．$b = a\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{pmatrix}$ と定める．そしてまず a が恒真と仮定する．そうすると，A' から任意の $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ' と変付値 ν に対し，定理 4.4.2 により

$$(\Phi'^* b)\nu = (\Phi'^* a)\left(\begin{pmatrix} x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n \\ (\Phi'^* c_1)\nu, \ldots, (\Phi'^* c_n)\nu \end{pmatrix}\nu\right)$$

が成り立つ．$\Phi = \Phi'|_{\mathrm{Con}}$ と定めれば，前述の通り Φ は A から W への定付値であって $\Phi'^* a = \Phi^* a$ をみたす．従って，a が恒真との仮定により $(\Phi'^* b)\nu = 1$ が成り立つ．これで b が恒真であることが示せた．次に逆に b が恒真と仮定する．そして A から任意の $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ と変付値 ν をとる．そうすると，各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して c_i と νx_i は同型であるから，Φ を A' から W への定付値 Φ' で $\Phi' c_i = \nu x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なるものへと拡張することができる．さっきと同様 $\Phi^* a = \Phi'^* a$ であり，また $\nu = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ \nu x_1, \ldots, \nu x_1 \end{pmatrix}\nu$ であって $\nu x_i = (\Phi'^* c_i)\nu$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるから，定理 4.4.2 により $(\Phi^* a)\nu = (\Phi'^* b)\nu$ が成り立つ．従って，b が恒真との仮定により $(\Phi^* a)\nu = 1$ が成り立つ．これで a が恒真であることが示せた．

4.8　恒真関係

$ **この節を通じて，**$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ **を真偽** ϕ **のある論理系とする．** また，前節までに設けた定義や規約は継承する．特に，第 4.7.1 項で定めた通り，A から共通の認識対象世界への定付値と変付値の組みの全体を $\mathfrak{V}$ で表し，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ が定める A_ϕ から $\mathbb{T}$ への写像 $a \mapsto (\Phi^* a)\nu$ を Φ^ν で表し，(Φ, ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての Φ^ν の全体を $\mathcal{F}$ で表す．従って $(A_\phi, \mathcal{F})$ が $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ の定める文論対である．また，A_ϕ の元を $a, b, \ldots$ で表し，$(A_\phi)^*$ の元を $\alpha, \beta, \ldots$ で表す．

次節以降では形式言語上の演繹論に転じ，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ に関して完全な論拠を見つけることや $(A_\phi, \mathcal{F})$ の無矛盾集合に $\mathfrak{V}$ 実例が存在することを示すのに前章の代数学が使われる様子を説明する．完全な論拠を見つけるためには注意 3.30.6 の二手順を踏むことが実際上必要十分であるが，それら手順を第 4.9 節で一階述語論理系について実行するための準備として，この節で $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ について少々一般的に調べる．

4.8.1　恒真関係の基本法則

§ 第 4.7.1 項に記した通り，各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対する (Φ, ν) 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ については

$$a_1 \cdots a_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1 \cdots b_n \iff \inf\{(\Phi^* a_1)\nu, \ldots, (\Phi^* a_m)\nu\} \leq \sup\{(\Phi^* b_1)\nu, \ldots, (\Phi^* b_n)\nu\}$$

が成り立ち，従って (3.30.5) により，$(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ については次ことが成り立つ．

$$\alpha \preccurlyeq \beta \iff \text{任意の } (\Phi, \nu) \in \mathfrak{V} \text{ に対して } \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta$$

そこで，$\preccurlyeq$ について調べるための補助概念として，A から任意の $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ に対し，$(A_\phi)^*$ 上の関係 $\preccurlyeq_\Phi$ を

$$\alpha \preccurlyeq_\Phi \beta \iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val}_W \text{ に対して } \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta$$

と定義して Φ **真関係**と呼ぶ（これは第 3.30 節の一般論には無い概念である）．そうすると

$$\alpha \preccurlyeq \beta \iff A \text{ から任意の } W \in \mathcal{W} \text{ への任意の定付値 } \Phi \text{ に対して } \alpha \preccurlyeq_\Phi \beta$$

が成り立つ．

定理 4.8.1 (Φ, ν) **真関係** $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ **と** Φ **真関係** $\preccurlyeq_\Phi$ **と恒真関係** $\preccurlyeq$ **はどれも強束律に従う．**

証明　定理 3.19.1 と定理 3.19.2 により，各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対し $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ は強束律に従う．従って $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ の交わりである $\preccurlyeq_\Phi$ と $\preccurlyeq$ も，定理 3.29.4 と定理 3.29.2 により強束律に従う（定理 3.30.7 参照）．

定理 4.8.2 T **の不変子** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **が** (4.1.3) **をみたすと仮定する．すなわち**

$$\mathrm{Dom}\wedge = \mathrm{Dom}\vee = \mathrm{Dom}\Rightarrow = \{\phi\}^2 \qquad \mathrm{Dom}\Diamond = \{\phi\}$$
$$\phi\wedge\phi = \phi\vee\phi = \phi\Rightarrow\phi = \phi \qquad \phi^\Diamond = \phi$$

そうすると A **上の算法としての** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **が**

$$\mathrm{Dom}\wedge = \mathrm{Dom}\vee = \mathrm{Dom}\Rightarrow = (A_\phi)^2 \qquad \mathrm{Dom}\Diamond = A_\phi$$

$$\mathrm{Im}\wedge,\ \mathrm{Im}\vee,\ \mathrm{Im}\Rightarrow,\ \mathrm{Im}\Diamond \subseteq A_\phi$$

をみたし，任意の $W \in \mathcal{W}$ に対して W 上の算法としての $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ が

$$\mathrm{Dom}\wedge = \mathrm{Dom}\vee = \mathrm{Dom}\Rightarrow = (W_\phi)^2 \qquad \mathrm{Dom}\Diamond = W_\phi$$
$$\mathrm{Im}\wedge,\ \mathrm{Im}\vee,\ \mathrm{Im}\Rightarrow,\ \mathrm{Im}\Diamond \subseteq W_\phi$$

をみたして $W_\phi = \mathbb{T}$ であることに留意して，さらに W_ϕ 上の汎算法とみなした $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ がブール論法であると仮定する（例 4.2.1 参照）．このとき，A_ϕ 上の汎算法とみなした $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ について，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ は $\mathbb{T}$ 表現論対であり，(Φ, ν) 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と Φ 真関係 $\preccurlyeq_\Phi$ と恒真関係 $\preccurlyeq$ はどれもブール律に従う．

証明　$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ のとき，各 $a \in A$ に $(\Phi^* a)\nu \in W$ を対応させる写像は U 型代数系としての保型準写であるから，それの A_ϕ への制限である Φ^ν は，A_ϕ から $\mathbb{T}$ への $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写である．つまり $(A_\phi, \mathcal{F})$ は $\mathbb{T}$ 表現論対であり，従って定理 3.30.17 系により，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ はブール関係である．従って $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ の交わりである $\preccurlyeq_\Phi$ と $\preccurlyeq$ も，定理 3.29.4 と定理 3.29.2 によりブール関係である．

問題 4.8.1 定理 4.8.2 の仮定の下で，Φ を A から $W \in \mathcal{W}$ への定付値とする．このとき，任意の閉元 $a \in A_\phi$ に対して，$\varepsilon \preccurlyeq_\Phi a$ と $\varepsilon \preccurlyeq_\Phi a^\Diamond$ の一方のみが成り立つ．

略解　問題 4.5.7 により，$\nu \in \mathrm{Val}$ によらず $(\Phi^* a)\nu$ は一定である．また，$\big(\Phi^*(a^\Diamond)\big)\nu = \big((\Phi^* a)\nu\big)^\Diamond = 1 - (\Phi^* a)\nu$ が成り立つ．従って，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して $(\Phi^* a)\nu = 1$ であるか，任意の $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して $\big(\Phi^*(a^\Diamond)\big)\nu = 1$ であるかのどちらかである．

以下この項では，可変子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ が各 $W \in \mathcal{W}$ へ例 4.3.2 のように極量子として，つまり全称子・存称子として意味付けてあるものとする．従って A 上の算法としての $\forall x$ と $\exists x$ は，A_ϕ を定義域とし A_ϕ の中に値のある単項算法である．

定理 4.8.3 a, b **を** A_ϕ **の元とし，**$x \in \mathrm{Qvar}$ **は** a **に自由に現れないとすれば，**A **の全称子** $\forall x$ **について次のことが成り立つ．ただし** $\asymp$ **は，**$\preccurlyeq$ **の** $A_\phi \times A_\phi$ **への制限の対称核を表す．**

$$\forall x(a \Rightarrow b) \asymp a \Rightarrow \forall x b$$

証明　A から任意の $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ と変付値 ν をとっての次の計算で証明される．ただし，四つ目の等式は定理 4.4.1 により成り立つ．

$$\begin{aligned}
\big(\Phi^*\big(\forall x(a \Rightarrow b)\big)\big)\nu &= \big(\forall x\big(\Phi^*(a \Rightarrow b)\big)\big)\nu \\
&= \inf\big\{\big(\Phi^*(a \Rightarrow b)\big)\big((x/w)\nu\big) \bigm| w \in W_{\sigma x}\big\} \\
&= \inf\big\{(\Phi^* a)\big((x/w)\nu\big) \Rightarrow (\Phi^* b)\big((x/w)\nu\big) \bigm| w \in W_{\sigma x}\big\} \\
&= \inf\big\{(\Phi^* a)\nu \Rightarrow (\Phi^* b)\big((x/w)\nu\big) \bigm| w \in W_{\sigma x}\big\} \\
&= (\Phi^* a)\nu \Rightarrow \inf\big\{(\Phi^* b)\big((x/w)\nu\big) \bigm| w \in W_{\sigma x}\big\} \\
&= (\Phi^* a)\nu \Rightarrow \big(\forall x(\Phi^* b)\big)\nu \\
&= (\Phi^* a)\nu \Rightarrow \big(\Phi^*(\forall x b)\big)\nu \\
&= \big(\Phi^*(a \Rightarrow \forall x b)\big)\nu
\end{aligned}$$

定理 4.8.4 Φ **を** A **から** $W \in \mathcal{W}$ **への定付値とし，**$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c$ **を** A_ϕ **の元とし，**$x \in \mathrm{Qvar}$ **は** $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ **に自由に現れないとする．このとき，**A **の極量子** $\forall x$ **と** $\exists x$ **について次のことが成り立つ．**

1. $a_1 \cdots a_m \preccurlyeq_\Phi cb_1 \cdots b_n \implies a_1 \cdots a_n \preccurlyeq_\Phi \forall xc, b_1 \cdots b_n$

2. $a_1 \cdots a_m \succcurlyeq_\Phi cb_1 \cdots b_n \implies a_1 \cdots a_n \succcurlyeq_\Phi \exists xc, b_1 \cdots b_n$

証明　代表的に結論 1 を示す．$a_1 \cdots a_m \preccurlyeq_\Phi cb_1 \cdots b_n$ なることは，任意の $v \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$\inf\{(\Phi^* a_1)v, \ldots, (\Phi^* a_m)v\} \leq \sup\{(\Phi^* c)v, (\Phi^* b_1)v, \ldots, (\Phi^* b_n)v\}$$

が成り立つことを，すなわち，$\inf\{(\Phi^* a_1)v, \ldots, (\Phi^* a_m)v\} = 1$，$\sup\{(\Phi^* b_1)v, \ldots, (\Phi^* b_n)v\} = 0$ なら $(\Phi^* c)v = 1$ であることを意味する．この仮定の下で任意の $v \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$\inf\{(\Phi^* a_1)v, \ldots, (\Phi^* a_m)v\} \leq \sup\{\bigl(\Phi^*(\forall xc)\bigr)v, (\Phi^* b_1)v, \ldots, (\Phi^* b_n)v\}$$

を示せばいいが，そのためには，$\inf\{(\Phi^* a_1)v, \ldots, (\Phi^* a_m)v\} = 1$，$\sup\{(\Phi^* b_1)v, \ldots, (\Phi^* b_n)v\} = 0$ と仮定して $\bigl(\Phi^*(\forall xc)\bigr)v = 1$ を示せばいい．そう仮定すると，x が $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ に自由に現れないから，定理 4.4.1 により，任意の $w \in W_{\sigma x}$ と $i = 1, \ldots, m$，$j = 1, \ldots, n$ に対して

$$(\Phi^* a_i)\bigl((x/w)v\bigr) = (\Phi^* a_i)v = 1 \qquad\qquad (\Phi^* b_j)\bigl((x/w)v\bigr) = (\Phi^* b_j)v = 0$$

が成り立ち，従って $(\Phi^* c)\bigl((x/w)v\bigr) = 1$ が成り立つ．w が任意だから，結局

$$\inf\{(\Phi^* c)\bigl((x/w)v\bigr) \mid w \in W_{\sigma x}\} = 1$$

が成り立つ．左辺は $\bigl(\forall x(\Phi^* c)\bigr)v$ すなわち $\bigl(\Phi^*(\forall xc)\bigr)v$ に等しいから，これで結論 1 は証明された．

定理 4.8.5 $a \in A_\phi$ **において** $x \in \mathrm{Qvar}$ **が** $b \in A_{\sigma x}$ **から自由であれば，**A **の極量子** $\forall x$ **と** $\exists x$ **および代入** (x/b) **について次のことが成り立つ．**

1. $\forall xa \preccurlyeq a(x/b)$　　　　**2.** $\exists xa \succcurlyeq a(x/b)$

証明　A から任意の $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ と任意の $v \in \mathrm{Val}_W$ をとる．そうすると

$$\bigl(\Phi^*(\forall xa)\bigr)v = \bigl(\forall x(\Phi^* a)\bigr)v = \inf\{(\Phi^* a)\bigl((x/w)v\bigr) \mid w \in W_{\sigma x}\} \leq (\Phi^* a)\bigl(\bigl(x/(\Phi^* b)v\bigr)v\bigr)$$

が成り立つ．定理 4.4.2 により $(\Phi^* a)\bigl(\bigl(x/(\Phi^* b)v\bigr)v\bigr) = \bigl(\Phi^* a(x/b)\bigr)v$ だから，$\forall xa \preccurlyeq_{\Phi,v} a(x/b)$ が成り立つ．Φ, v が任意だから，これで結論 1 が証明された．結論 2 も同様に証明される．

定理 4.8.6 Φ **を** A **から** $W \in \mathcal{W}$ **への定付値とする．また，**$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ **を** A_ϕ **の元とし，**$x_1, \ldots, x_l$ **を** A **の相異なる変数とし，**c_k **を** $A_{\sigma x_k}$ **の元とし** $(k = 1, \ldots, l)$**，**a_i **と** b_j **において** x_k **は** c_k **から自由であるとする** $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, l)$**．この条件の下で** Φ **真関係** $\preccurlyeq_\Phi$ **は次の法則に従う．ただし，記号** (x_k/c_k) **は代入** $\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_l \\ c_1, \ldots, c_l \end{pmatrix}$ **を表す．**

$$\begin{aligned} &a_1 \cdots a_m \preccurlyeq_\Phi b_1 \cdots b_n \\ &\quad\implies a_1(x_k/c_k) \cdots a_m(x_k/c_k) \preccurlyeq_\Phi b_1(x_k/c_k) \cdots b_n(x_k/c_k) \end{aligned} \qquad \text{(代入律)}$$

証明　$a_1 \cdots a_m \preccurlyeq_\Phi b_1 \cdots b_n$ と仮定し，$i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$ に対して $a_i' = a_i(x_k/c_k)$, $b_j' = b_j(x_k/c_k)$ と定め，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ をとる．そうすると，変付値

$$\nu' = \left(\frac{x_1, \ldots\ldots, x_l}{(\Phi^* c_1)\nu, \ldots, (\Phi^* c_l)\nu}\right)\nu$$

に対して $\inf\{(\Phi^* a_1)\nu', \ldots, (\Phi^* a_m)\nu'\} \leq \sup\{(\Phi^* b_1)\nu', \ldots, (\Phi^* b_n)\nu'\}$ が成り立つ．定理 4.4.2 により $(\Phi^* a_i)\nu' = (\Phi^* a_i')\nu$, $(\Phi^* b_j)\nu' = (\Phi^* b_j')\nu$ であるから，これで証明された．

系　**Φ を A から $W \in \mathcal{W}$ への定付値とし，$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in A_\phi$ とし，$x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l$ を A の相異なる変数とし，これらに関して a_i は a_i' と相似であって b_j は b_j' と相似であるとする $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$．この条件の下で Φ 真関係 $\preccurlyeq_\Phi$ は次の法則に従う．**

$$a_1 \cdots a_m \preccurlyeq_\Phi b_1 \cdots b_n \implies a_1' \cdots a_m' \preccurlyeq_\Phi b_1' \cdots b_n' \qquad \text{(相似代入律)}$$

問題 4.8.2 $x_1, \ldots, x_k$ が A_ϕ の元 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ の自由変数列であって Φ が A から $W \in \mathcal{W}$ への定付値であるとき，次の二条件は同等である．

1. $a_1 \cdots a_m \preccurlyeq_\Phi b_1 \cdots b_n$
2. 任意の $(w_1, \ldots, w_k) \in W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_k}$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$\inf\{a_1^\Phi(w_1, \ldots, w_k), \ldots, a_m^\Phi(w_1, \ldots, w_k)\} \leq \sup\{b_1^\Phi(w_1, \ldots, w_k), \ldots, b_n^\Phi(w_1, \ldots, w_k)\}$$

ただしここでの inf と sup と $\leq$ は，W_ϕ $(= \mathbb{T})$ における通常の下限と上限と順序を表す．

4.8.2　フレーゲ関係

§ ここでは，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ と Φ 真関係 $\preccurlyeq_\Phi$ について，$\preccurlyeq$ と $\preccurlyeq_\Phi$ の定義を介することなくさらに調べを進める．そのために次の仮定と定義を設ける．

$\forall$ と $\exists$ を算号基 Γ の元とし，A の可変子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ が

$$\mathrm{Dom}\,\forall x = \mathrm{Dom}\,\exists x = A_\phi \qquad\qquad \mathrm{Im}\,\forall x,\ \mathrm{Im}\,\exists x \subseteq A_\phi$$

をみたすと仮定する．そして，$(A_\phi)^*$ 上の束関係 $\preccurlyeq$ でこれら可変子のすべてについて次の四法則に従うものを，これら可変子についての $(A_\phi)^*$ 上の**フレーゲ関係**と呼び（記号 $\preccurlyeq$ と $\preccurlyeq$ の違いに注意），束律とこれら四法則を合わせた法則を**フレーゲ律**と呼ぶ [8]．

$$\alpha \preccurlyeq a\beta \implies \alpha \preccurlyeq \forall x a, \beta \qquad \text{(全称律)}$$

$$\alpha \succcurlyeq a\beta \implies \alpha \succcurlyeq \exists x a, \beta \qquad \text{(存称律)}$$

ただしこれら二律において，$a \in A_\phi$ は任意であるが，$x \in \mathrm{Qvar}$ は $\alpha, \beta \in (A_\phi)^*$ に現れる A_ϕ の各元に自由に現れない（このことを「x は α, β に自由に現れない」とも言う）との制限を設ける．また次の二律においては，$x \in \mathrm{Qvar}$ は $a \in A_\phi$ において $b \in A_{\sigma x}$ から自由との制限を設ける．

$$\forall x a \preccurlyeq a(x/b) \qquad \text{(全称代入律)}$$

$$\exists x a \succcurlyeq a(x/b) \qquad \text{(存称代入律)}$$

[8]「フレーゲ」は，極量子を使う論理学の開祖フレーゲ (Gottlob Frege) に因む．第 1.2.4 項参照．

例 4.8.1 定理 4.8.1 と定理 4.8.4 と定理 4.8.5 により，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ も，A から任意の $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ により定まる Φ 真関係 $\preccurlyeq_\Phi$ も，極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ についての $(A_\phi)^*$ 上のフレーゲ関係である．

定理 4.8.7 $(A_\phi)^*$ **上の束関係** $\preccurlyeq$ **が可変子** $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ **についての全称代入律と存称代入律に従うためには，これら可変子についての次の法則に従うことが必要十分である．ただしこれら二律において，**$x \in \mathrm{Qvar}$ **は** $a \in A_\phi$ **において** $b \in A_{\sigma x}$ **から自由であるとの制限を設ける．**

$$a(x/b), \alpha \preccurlyeq \beta \implies \forall x a, \alpha \preccurlyeq \beta \qquad \text{(代入全称律)}$$
$$a(x/b), \alpha \succcurlyeq \beta \implies \exists x a, \alpha \succcurlyeq \beta \qquad \text{(代入存称律)}$$

証明　束関係 $\preccurlyeq$ は消去律に従うから，代入全称律の前提の $a(x/b), \alpha \preccurlyeq \beta$ と全称代入律により成り立つ $\forall x a \preccurlyeq a(x/b)$ から代入全称律の結論の $\forall x a, \alpha \preccurlyeq \beta$ が得られる．逆に代入全称律において $\alpha = \varepsilon$, $\beta = a(x/b)$ とすれば，前提がみたされるから，その結論として全称代入律 $\forall x a \preccurlyeq a(x/b)$ が得られる．存称代入律と代入存称律についても同様である．

問題 4.8.3 $(A_\phi)^*$ 上の関係についてのフレーゲ律は生成的法則である．

以下この項では，$\preccurlyeq$ **は可変子** $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ **についての** $(A_\phi)^*$ **上のフレーゲ関係であるとし，**$\preccurlyeq$ **の** $A_\phi \times A_\phi$ **への制限の対称核を** $\asymp$ **で表す**（注意 3.21.1 参照）．

定理 4.8.8 任意の $a \in A_\phi$ **と可変子** $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ **について次のことが成り立つ．**

1. $\forall x a \preccurlyeq a$　　　**2.** $\exists x a \succcurlyeq a$

証明　$a(x/x) = a$ であって定理 3.16.5 により a において x が x から自由であるから，全称代入律により $\forall x a \preccurlyeq a$ が成り立ち，存称代入律により $\exists x a \succcurlyeq a$ が成り立つ．

定理 4.8.9 $\asymp$ **と** $\preccurlyeq$ **を制限して出来る** A_ϕ **上の関係は，**A_ϕ **上の算法とみなした** $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ **と両立する．**

証明　代表的に $\forall x$ について考え，$a, b \in A_\phi$ が $a \preccurlyeq b$ をみたすとする．このとき，$a \preccurlyeq b$ と定理 4.8.8 により成り立つ $\forall x a \preccurlyeq a$ に消去律を使って $\forall x a \preccurlyeq b$ を得る．定理 3.16.4 により x は $\forall x a$ に自由に現れないから，全称律によって $\forall x a \preccurlyeq \forall x b$ が成り立つ．従って，$a \asymp b$ なら $\forall x a \asymp \forall x b$ が成り立つ．

定理 4.8.10 任意の $a \in A_\phi$ **と可変子** $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Qvar})$ **に対して次のことが成り立つ．**

1. $\varepsilon \preccurlyeq a \iff \varepsilon \preccurlyeq \forall x a$　　　**2.** $\varepsilon \succcurlyeq a \iff \varepsilon \succcurlyeq \exists x a$

証明　代表的に，結論 1 について考える．$\varepsilon \preccurlyeq a$ であれば，全称律により $\varepsilon \preccurlyeq \forall x a$ が成り立つ．逆に $\varepsilon \preccurlyeq \forall x a$ であれば，これと定理 4.8.8 により成り立つ $\forall x a \preccurlyeq a$ に消去律を使って $\varepsilon \preccurlyeq a$ を得る．

以下この項では，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **と任意の** $W \in \mathcal{W}$ **が定義 4.6.4 の可変子条件と意味条件をみたすと仮定する．**従って，ある変数 x に対して可変子 $\forall x, \exists x$ が存在すれば，任意の $y \in \mathrm{Qvar}_{\sigma x}$ に対して $\forall y, \exists y$ が存在して $\mathrm{Dom}\,\forall y = \mathrm{Dom}\,\exists y = A_\phi$ と $\mathrm{Im}\,\forall y$, $\mathrm{Im}\,\exists y \subseteq A_\phi$ をみたす．

定理 4.8.11 $a \in A_\phi$ **が** $x, y \in \mathrm{Qvar}$ **に関して** $b \in A_\phi$ **に相似であって可変子** $\forall x$ **と** $\exists x$ **が存在すれば，可変子** $\forall y$ **と** $\exists y$ **も存在して** $\forall xa \asymp \forall yb$ **と** $\exists xa \asymp \exists yb$ **が成り立つ（定理 4.5.3 参照）．**

証明　相似の定義 3.17.2 により，x, y は相異なる同型の元であって次の三条件が成り立つ．

1. $b = a(x/y)$　　2. y は a に自由に現れない．　　3. a において x は y から自由である．

x, y が同型であるから，仮定により $\forall y$ と $\exists y$ も存在して $\mathrm{Dom}\,\forall y = \mathrm{Dom}\,\exists y = A_\phi$ と $\mathrm{Im}\,\forall y,\ \mathrm{Im}\,\exists y \subseteq A_\phi$ をみたす．条件 1, 3 と全称代入律により $\forall xa \preccurlyeq b$ が成り立つ．条件 2 と定理 3.16.4 により y が $\forall xa$ に自由に現れないから，さらに全称律により $\forall xa \preccurlyeq \forall yb$ が成り立つ．定理 3.17.6 により b が y, x に関して a に相似であるから逆に $\forall xa \succcurlyeq \forall yb$ も成り立ち，従って $\forall xa \asymp \forall yb$ が成り立つ．可変子 $\exists x, \exists y$ についても同様である．

定理 4.8.12 $a \in A_\phi$ **が** $x, y \in \mathrm{Qvar}$ **に関して** $b \in A_\phi$ **に相似であって** y **が** $\alpha, \beta \in (A_\phi)^*$ **に自由に現れなければ，可変子** $\forall x$ **と** $\exists x$ **について次の二つのことが成り立つ．**

$$\alpha \preccurlyeq b\beta \implies \alpha \preccurlyeq \forall xa, \beta \qquad \text{(相似全称律)}$$
$$\alpha \succcurlyeq b\beta \implies \alpha \succcurlyeq \exists xa, \beta \qquad \text{(相似存称律)}$$

証明　定理 4.8.11 により，可変子 $\forall y$ も存在して $\forall yb \preccurlyeq \forall xa$ が成り立つ．従って $\alpha \preccurlyeq b\beta$ が成り立てば，全称律により $\alpha \preccurlyeq \forall yb, \beta$ が成り立ち，消去律により $\alpha \preccurlyeq \forall xa, \beta$ を得る．相似存称律についても同様である．

問題 4.8.4 $a \in A_\phi$ が $x, y \in \mathrm{Qvar}$ に関して $b \in A_\phi$ に相似であれば，可変子 $\forall x$ と $\exists x$ について次のことが成り立つ．

1. $\forall xa \preccurlyeq b$
2. $b\alpha \preccurlyeq \beta \implies \forall xa, \alpha \preccurlyeq \beta$
3. $b \preccurlyeq \exists xa$
4. $\alpha \preccurlyeq b\beta \implies \alpha \preccurlyeq \exists xa, \beta$

略解　結論 1 が成り立つのは，$\forall xa \preccurlyeq a(x/y)$ であって $a(x/y) = b$ であるからである．あるいは，$\forall xa \asymp \forall yb$ であって $\forall yb \preccurlyeq b$ であるからである．結論 1 と消去律により結論 2 が成り立つ．

問題 4.8.5 (✓) $a \in A_\phi$，$x \in \mathrm{Qvar}$ であって $\mathrm{Qvar}_{\sigma x}$ に可算個の元があると仮定する．このとき，$\varepsilon \preccurlyeq \forall xa$ なることは，次の二つのことのいずれとも同等である．

1. a において x を束縛しない任意の $b \in A_{\sigma x}$ に対して $\varepsilon \preccurlyeq a(x/b)$ が成り立つ．
2. a において x を束縛しない任意の $y \in \mathrm{Qvar}_{\sigma x}$ に対して $\varepsilon \preccurlyeq a(x/y)$ が成り立つ．

また，$\varepsilon \succcurlyeq \exists xa$ なることは，次の二つのことのいずれとも同等である．

3. a において x を束縛しない任意の $b \in A_{\sigma x}$ に対して $\varepsilon \succcurlyeq a(x/b)$ が成り立つ．
4. a において x を束縛しない任意の $y \in \mathrm{Qvar}_{\sigma x}$ に対して $\varepsilon \succcurlyeq a(x/y)$ が成り立つ．

略解　「$\varepsilon \preccurlyeq \forall xa$」なる命題の番号を 0 とする．

($0 \implies 1$) $b \in A_{\sigma x}$ が a において x を束縛しないと仮定する．このとき，$\varepsilon \preccurlyeq \forall xa$ と全称代入律により成り立つ $\forall xa \preccurlyeq a(x/b)$ に消去律を使って $\varepsilon \preccurlyeq a(x/b)$ を得る．

$(2 \Longrightarrow 0)$ $\mathrm{Qvar}_{\sigma x}$ に可算個の元があるから，問題 3.17.1 により，$b \in A_\phi$ と $y \in \mathrm{Qvar}_{\sigma x}$ とで，a が x, y に関して b に相似のものが存在する．a において y は x を束縛せず $b = a(x/y)$ であるから，条件 2 により $\varepsilon \preccurlyeq b$，従って全称律により $\varepsilon \preccurlyeq \forall y b$ が成り立つ．定理 4.8.11 により $\forall y b \preccurlyeq \forall x a$ が成り立つから，消去律により $\varepsilon \preccurlyeq \forall x a$ を得る．

4.9　一階述語論理系における完全性定理と実例存在定理

＄ 引き続いて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ **を真偽 ϕ のある論理系とする．** また，前節までに設けた定義や規約は継承する．特に，第 4.7.1 項で定めた通り，A から共通の認識対象世界への定付値と変付値の組みの全体を $\mathfrak{V}$ で表し，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ が定める A_ϕ から $\mathbb{T}$ への写像 $a \mapsto (\Phi^* a)\nu$ を Φ^ν で表し，(Φ, ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての Φ^ν の全体を $\mathcal{F}$ で表す．従って $(A_\phi, \mathcal{F})$ が $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ の定める文論対である．また，A_ϕ の元を $a, b, \ldots$ で表し，$(A_\phi)^*$ の元を $\alpha, \beta, \ldots$ で表す．

この節では，形式言語上の演繹論の中心である $\mathcal{F}$ 完全性の問題やそれと関連した $\mathfrak{V}$ 実例の存在問題に前章の代数学がどう使われるかを説明する．ただしそのためには，これまでの節では一般的・抽象的の論理系について説明してきたのとは違って，論理系を特殊化・具体化しなければならない．それは，$\mathcal{F}$ 完全性の問題への意義ある答というのは具体的な $\mathcal{F}$ 完全な論拠を提示することだからであり，また，$\mathfrak{V}$ 実例の有無も論理系の特殊性によるからである（注意 3.27.4・注意 3.30.12・注意 4.7.2・注意 5.7.1 参照）．ただし特殊化・具体化する前に，第 3.30.1 項に沿って束値論対についての定義と規約を再現する．まず，

$$\vec{A} = (A_\phi)^* \times (A_\phi)^*$$

と定める．そうすると第 3.9 節における「関係」の定義により，各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対する (Φ, ν) 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と恒真関係 $\preccurlyeq$ は $\vec{A}$ の部分集合であるが，記号 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と $\preccurlyeq$ が集合を表すのにそぐわないので，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と $\preccurlyeq$ を記号 $\vec{A}_{\Phi,\nu}$ と $\vec{C}$ でも表すことにする．

$$\vec{A}_{\Phi,\nu} = \{\alpha \to \beta \in \vec{A} \mid \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta\} \qquad \vec{C} = \{\alpha \to \beta \in \vec{A} \mid \alpha \preccurlyeq \beta\}$$

すなわち，$\vec{A}_{\Phi,\nu}$ と $\vec{C}$ とは，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の (Φ, ν) 真式の全体と恒真式の全体とである．さらに，(Φ, ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての $\vec{A}_{\Phi,\nu}$ の全体を $\vec{\mathcal{F}}$ で表す．

$$\vec{\mathcal{F}} = \{\vec{A}_{\Phi,\nu} \mid (\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}\}$$

そうすると，$(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ が $(A_\phi, \mathcal{F})$ に随伴する式論対であり，$\vec{C}$ がその核である．

以上の定義と規約の下で注意 3.30.6 によれば，$(A_\phi, \mathcal{F})$ に関して完全な論拠を提示するためには，次の手順 1, 2 を踏むことが必要かつ十分である．

手順 1. $(A_\phi, \mathcal{F})$ の特性法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ を見つける．これはすなわち，$\vec{A}$ 上の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全な論拠であり，$(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ を $(A_\phi)^*$ 上の最小 $(\vec{R}, \vec{D})$ 関係と成す生成的法則である．

手順 2. A_ϕ 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠 (R, D) で生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ が法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従うものを見つける．

また注意 4.7.2 によれば，A_ϕ の部分集合の $\mathfrak{V}$ 実例の有無は $\mathcal{F}$ 実例の有無と同等である．

命題論理系での $\mathcal{F}$ 完全性の問題と $\mathfrak{V}$ 実例の存在問題は第 3 章で既に片付いている．なぜなら $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ が命題論理系である場合，例 4.1.1 により，A_ϕ は A に等しく変数系 Var を素元系とし汎算法 $x \wedge y$，$x \vee y$，$x^\diamond$，$x \Rightarrow y$ から成る代数構造を持つ普遍汎代数系である．そ

してこの論理系から出来る文論対 $(A, \mathcal{F})$ は，例 4.7.2 に記したように算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ に関する最大 $\mathbb{T}$ 表現論対である．従って，$(A, \mathcal{F})$ についての手順 1, 2 に当たることはすでに実行してある．つまりまず手順 1 については，定理 3.30.33 と定理 3.30.32 により，ブール律と弱ブール律が共に $(A, \mathcal{F})$ の特性法則である．次に手順 2 については，定理 3.31.1 系 2 と例 3.30.1 と問題 3.31.1 により，または定理 3.31.3 と例 3.30.1 と問題 3.31.4 により，A 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠 (R, D) で生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ がブール関係であるものを見つけてある．また定理 3.30.32 により，$(A, \mathcal{F})$ の任意の無矛盾集合に $\mathcal{F}$ 実例が存在することを示してある．

$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ が本書の主題を成す格論理系である場合の $\mathcal{F}$ 完全性の問題と $\mathfrak{V}$ 実例の存在問題は第 5 章以降で論ずる．

そこで**以下この節を通じて，**$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ **は一階述語論理系であると仮定する．**そうするとまず例 4.1.2 により，T は二点集合 $\{\epsilon, \phi\}$ である．そして A の ϵ 部分 A_ϵ は，項の全体であって，素項の全体 Prm を素元系とし関数記号の全体を算号系とする普遍汎代数系である．また A の文の全体 A_ϕ は，論理式の全体に等しく，素論理式の全体を素元系とし $\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\}$ を算号系とする普遍汎代数系である．次に，例 4.2.2 と例 4.7.1 に記した通り，$\mathcal{W}$ はブール的な認識可能世界，すなわち $W_\phi = \mathbb{T}$ であって算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ が (4.2.2) と (4.2.1) をみたす認識可能世界 W から成る．また，可変子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ は各 $W \in \mathcal{W}$ へ例 4.3.2 のように極量子として，つまり全称子・存称子として意味付けてある．そうすると定理 4.8.2 と例 4.8.1 により，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ は A_ϕ 上の算法とみなした $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ についての $\mathbb{T}$ 表現論対であり，$(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は，これら算法についてブール関係であると共に，極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ についてフレーゲ関係である．従ってさらに問題 3.30.31 と定理 3.30.17 により，$1 \notin \mathcal{F}$ であって $\preccurlyeq$ は $(A_\phi, \mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\vDash$ の最大束拡張である．こういう $(A_\phi, \mathcal{F})$ に関して完全な論拠を提示するのがこの節の第一目標である．$(A_\phi, \mathcal{F})$ の無矛盾集合に $\mathfrak{V}$ 実例が存在することを示すのがこの節の第二目標である．

4.9.1　式についての弱完全性定理

§ ここでは，一階述語論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の定める文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ に対しての上記手順 1 として，$(A_\phi, \mathcal{F})$ の特性法則すなわち $\vec{A}$ 上の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全な論拠を $(\vec{R}_1, \vec{D})$ と $(\vec{R}_2, \vec{D})$ の二通り提示する．それら論拠 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ $(i = 1, 2)$ が $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全であるためには，$(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ が生成的法則 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ に従うことが，つまり $\vec{C}$ が $\vec{R}_i$ で閉じていて $\vec{D}$ を含むことが必要である．$\vec{C}$ が $\vec{R}_i$ で閉じていることは，$\vec{R}_i$ が式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の弱論理であることに，つまり，$\vec{R}_i$ の下記分数式表示における分子に現れる式がすべて $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真式であれば分母も $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真式であることに他ならない．また，$\vec{C}$ が $\vec{D}$ を含むことは，$\vec{D}$ の各元が $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真式であることに他ならない．そこで $(\vec{R}_i, \vec{D})$ を定めるに当たっては，$\preccurlyeq$ が生成的法則 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ に従う理由として，$\vec{R}_i$ が式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の弱論理であって $\vec{D}$ の各元が文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真式である理由を添え示す．

なお，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と $\preccurlyeq$ を記号 $\vec{A}_{\Phi,\nu}$ と $\vec{C}$ でも表したと同様に，A から $W \in \mathcal{W}$ への各定付値 Φ に対して Φ 真関係 $\preccurlyeq_\Phi$ を記号 $\vec{A}_\Phi$ でも表し，W と Φ を任意に動かして出来る $\vec{A}_\Phi$ の全体を $\vec{\mathcal{B}}$ で表せば，論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{B}})$ が出来てその核は $\vec{C}$ に等しい．つまり，$(\vec{A}, \vec{\mathcal{B}})$ は $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ と弱同値である．従って手順 1 は，$\vec{\mathcal{B}}$ 弱完全な論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ を提示することでもある．

4.9.1.1　論拠・生成的法則としての $(\vec{R}_i, \vec{D})$ $(i = 1, 2)$

‡ ここでは $(\vec{R}_i, \vec{D})$ $(i = 1, 2)$ を定義する．まず $\vec{D}$ としては，定理 3.29.4 の証明の意味での反復式 $a \to a$ すべてから成る集合をとる．$\preccurlyeq$ が反復律 $a \preccurlyeq a$ に従うから，反復式は確かに $(A_\phi, \mathcal{F})$ の

恒真式である．次に $\vec{R}_1$ としては，定理 3.29.4 の証明に記した強消去関係以外の八種十六個の関係に定理 4.8.4 と定理 4.8.7 が示唆する二種四個の**限量関係**（**全称関係**と**存称関係**）を合わせたものをとる．すなわち，$\vec{R}_1$ は次の十種二十個の $\vec{A}^*, \vec{A}$ 間の関係の和である（式の向きに注意）．

$$\frac{\alpha \to \beta}{a\alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow \beta}{a\alpha \leftarrow \beta} \qquad \text{(付加関係)}$$

$$\frac{aa\alpha \to \beta}{a\alpha \to \beta} \qquad \frac{aa\alpha \leftarrow \beta}{a\alpha \leftarrow \beta} \qquad \text{(巾等関係)}$$

$$\frac{\alpha ab\beta \to \gamma}{\alpha ba\beta \to \gamma} \qquad \frac{\alpha ab\beta \leftarrow \gamma}{\alpha ba\beta \leftarrow \gamma} \qquad \text{(置換関係)}$$

$$\frac{\alpha \to a \quad a\beta \to \delta}{\alpha\beta \to \delta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow a \quad a\beta \leftarrow \delta}{\alpha\beta \leftarrow \delta} \qquad \text{(消去関係)}$$

$$\frac{ab\alpha \to \beta}{a \wedge b, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to a\beta \quad \alpha \to b\beta}{\alpha \to a \wedge b, \beta} \qquad \text{(下限関係)}$$

$$\frac{a\alpha \to \beta \quad b\alpha \to \beta}{a \vee b, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to ab\beta}{\alpha \to a \vee b, \beta} \qquad \text{(上限関係)}$$

$$\frac{\alpha \to a\beta}{a^{\diamond}\alpha \to \beta} \qquad \frac{a\alpha \to \beta}{\alpha \to a^{\diamond}\beta} \qquad \text{(両補関係)}$$

$$\frac{\alpha \to a\beta \quad b\alpha \to \beta}{a \Rightarrow b, \alpha \to \beta} \qquad \frac{a\alpha \to b\beta}{\alpha \to a \Rightarrow b, \beta} \qquad \text{(三導関係)}$$

$$\frac{a(x/t), \alpha \to \beta}{\forall x a, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to a\beta}{\alpha \to \forall x a, \beta} \qquad \text{(全称関係)}$$

$$\frac{a\alpha \to \beta}{\exists x a, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to a(x/t), \beta}{\alpha \to \exists x a, \beta} \qquad \text{(存称関係)}$$

ただし，限量関係においては $x \in \mathrm{Var}$ であり，全称関係の左側と存称関係の右側においては a において x は $t \in A_\epsilon$ から自由であり，全称関係の右側と存称関係の左側においては，$\alpha = a_1 \cdots a_m$，$\beta = b_1 \cdots b_n$ とするとき，x は $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ に自由に現れない（このことを「x は α, β に自由に現れない」とも言う）とする．

次に $\vec{R}_2$ としては，$\vec{R}_1$ から消去関係と全称関係の右側と存称関係の左側を取り除いて定理 4.8.6 系と定理 4.8.12 が示唆する次の三個の関係を加えたものをとる．

$$\frac{a_1 \cdots a_m \to b_1 \cdots b_n}{a'_1 \cdots a'_m \to b'_1 \cdots b'_n} \qquad \text{(相似代入関係)}$$

ただし相異なる変数 $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l$ に関して，a_i は a'_i と相似であって b_j は b'_j と相似であるとする $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$.

$$\frac{\alpha \to b\beta}{\alpha \to \forall x a, \beta} \qquad \text{(相似全称関係)}$$

$$\frac{b\alpha \to \beta}{\exists x a, \alpha \to \beta} \qquad \textbf{(相似存称関係)}$$

ただし相似全称関係と相似存称関係においては，a は相異なる変数 x, y に関して b と相似であって y は α, β に自由に現れないとする．

以上，$(\vec{R}_i, \vec{D})$ $(i = 1, 2)$ を $\vec{A}$ 上の論拠として定義したが，$(\vec{R}_i, \vec{D})$ は $(A_\phi)^*$ 上の関係についての生成的法則とみなされ，$[\vec{D}]_{\vec{R}_i}$ は最小 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ 関係とみなされ，論拠 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全性の証明の暁には，生成的法則 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ が $(A_\phi, \mathcal{F})$ の特性法則であることが分かる．そこで，最小 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ 関係とみなした $[\vec{D}]_{\vec{R}_i}$ を $\preccurlyeq_i$ で表す．

$(\vec{R}_1, \vec{D})$ 関係は，反復律・付加律・巾等律・置換律・消去律とブール子 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ に関する強両限律・強両補律・強三導律と極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ に関する全称律・存称律・代入全称律・代入存称律に従う関係に他ならず，従って定理 4.8.7 により弱ブール律・消去律・フレーゲ律に従う関係にも他ならず，さらに定理 3.21.10 によれば，ブール律とフレーゲ律に従う関係にも他ならない．また $(\vec{R}_2, \vec{D})$ 関係は，弱ブール律・代入全称律・代入存称律・相似代入律・相似全称律・相似存称律に従う関係に他ならない．つまり，生成的法則 $(\vec{R}_1, \vec{D})$ は弱ブール律・消去律・フレーゲ律を合わせた法則ともブール律とフレーゲ律を合わせた法則とも同等であり，生成的法則 $(\vec{R}_2, \vec{D})$ は，弱ブール律・代入全称律・代入存称律・相似代入律・相似全称律・相似存称律を合わせた法則である．

文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は，定理 4.8.2 と例 4.8.1 によりブール関係かつフレーゲ関係であり，定理 4.8.6 系により相似代入律に従い，定理 4.8.12 により相似全称律と相似存称律に従う．従って，$\preccurlyeq$ は $(\vec{R}_i, \vec{D})$ 関係である $(i = 1, 2)$．言い換えれば，$\vec{R}_i$ $(i = 1, 2)$ は式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の弱論理であり，$\vec{D}$ の各元は文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真式である．

なお，$\vec{R}_2$ には消去関係と強消去関係（合わせて仮に「カット」と呼ぶ）が明示的には含まれていない．相似代入関係は「変数取り換え」の一種であり，また，定理 4.8.12 の証明が示す通り，$\vec{R}_2$ の中の相似全称関係・相似存称関係は全称関係・存称関係と「変数取り換え」の組み合わせである．従って，$\vec{R}_1$ に「変数取り換え」を入れる代わりにカットを除去して出来たのが $\vec{R}_2$ であり，これがいわゆる「カット除去」の隠された実態である．

手順 1 を完結させるために，以下 $\vec{A}$ 上の論拠 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ $(i = 1, 2)$ の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全性を証明するが，それを二通りの方法で行なう．一つは定理 3.23.1 の証明に使った**展開列法**であり，もう一つは定理 3.22.12 の証明に使った**切断法**である．

これらには一長一短がある．展開列法は，$(\vec{R}_1, \vec{D})$ と $(\vec{R}_2, \vec{D})$ の両方に適用できるが，「有限的」な証明法であるため，「A の変数系 Var が可算集合で定数系 Con と関数記号の全体は高々可算の集合である」という仮定が省けないように思われる．他方で切断法は，$(\vec{R}_2, \vec{D})$ にはまだ適用できていないが，$(\vec{R}_1, \vec{D})$ に適用する場合，Var などの濃度についてのある種の仮定はやはり設けるものの，「超限的」な証明法であるので超限濃度も扱うことができ，変数の現れの自由・束縛の扱いが比較的に煩わしくなく，第 3.30.4 項で説明した命題論理学の場合と同様，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の各無矛盾集合に $\mathfrak{V}$ 実例があることもついでに証明され，しかもその証明では濃度についての仮定が何も要らない．

どちらの方法にも必要な補題を一つここに記しておく．A_ϕ は素論理式の全体を素元系とし $\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\}$ を算号系とする普遍汎代数系であるが，この普遍汎代数系における階数について次のことが成り立つ．

補題 4.9.1 $a \in A_\phi$，$x \in \mathrm{Var}$，$t \in A_\epsilon$ **なら，a と $a(x/t)$ の A_ϕ における階数は等しい．**

証明　素論理式の全体を S で表し $\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\}$ を M で表せば，問題 3.8.9 により $(A_M, T_M, \sigma, S \cup A_\epsilon)$ は普遍型付 M 代数系である．そして，自然数 n についての帰納法により，

$S \cup A_\epsilon$ の A_M における n 圏が S の A_ϕ における n 圏に等しいことが示される（$S \cup A_\epsilon$ の A_M における 0 圏 $S \cup A_\epsilon$ は S の A_ϕ における 0 圏 S と異なる）．よって，$a \in A_\phi$ の A_ϕ における階数は $(A_M, T_M, \sigma, S \cup A_\epsilon)$ における階数に等しい．従って定理 3.17.10 によりこの補題が成り立つ．

4.9.1.2　論拠 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ $(i = 1, 2)$ の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全性の展開列法による証明

‡ ここでは，**A の変数系 Var が可算集合で定数系 Con と関数記号の全体は高々可算の集合であると仮定する．**その上で展開列法によって論拠 $(\vec{R}_i, \vec{D})$ $(i = 1, 2)$ の $\vec{\mathcal{F}}$ 弱完全性を証明する．$\vec{R}_i$ が式論対 $(\vec{A}, \vec{\mathcal{F}})$ の弱論理で $\vec{D}$ が $\vec{C}$ に含まれるから，$[\vec{D}]_{\vec{R}_i} \subseteq \vec{C}$ は成り立つ．そこでこの逆の $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}_i}$ を以下で証明する．関係を使って表現すれば，すなわち「$\alpha \preccurlyeq \beta \implies \alpha \preccurlyeq_i \beta$」を証明する．それに背理法を使うために，$\alpha \preccurlyeq \beta$ と $\alpha \not\preccurlyeq_i \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ があると仮定する．こういう式を**反例式**と呼ぶ．また，$\alpha \not\preccurlyeq_i \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ を**特異式**と呼ぶ．従って，反例式は特異式である．

補題 4.9.2 次の条件 G をみたす反例式 $\alpha_0 \to \beta_0$ が存在する．

(G)　ある $x \in \mathrm{Var}$ に対して $\forall x$ または $\exists x$ が $\alpha_0 \cup \beta_0$ に属す論理式に現れれば，その x は α_0, β_0 に自由に現れない．

証明　任意の式 $\alpha \to \beta$ をとって $\alpha = a_1 \cdots a_m$，$\beta = b_1 \cdots b_n$ とする．

$i = 1$ **の場合：**恒真関係 $\preccurlyeq$ がブール関係なので，$c = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)^\Diamond \vee b_1 \vee \ldots \vee b_n$ と定めれば，定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により，$\alpha \preccurlyeq \beta$ なることは $\varepsilon \preccurlyeq c$ なることと同等である．また，$x_1, \ldots, x_k$ を c の自由変数列とすれば，$\preccurlyeq$ がフレーゲ関係なので定理 4.8.10 により，$\varepsilon \preccurlyeq c$ なることは $\varepsilon \preccurlyeq \forall x_1 \ldots \forall x_k c$ なることと同等である．$\preccurlyeq_1$ もブール関係かつフレーゲ関係なので，以上のことは $\preccurlyeq$ を $\preccurlyeq_1$ に替えても成り立つ．また，定理 3.16.4 により $\forall x_1 \ldots \forall x_k c$ は閉論理式である．従って，ある閉論理式 d に対して $\varepsilon \to d$ が反例式となる．これを $\alpha_0 \to \beta_0$ とすれば，これが条件 G を自明にみたす．

$i = 2$ **の場合：**問題 4.5.1 により $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ に共通の自由変数列 $x_1, \ldots, x_l$ がある．また，Var が可算集合と仮定しているから，定理 3.15.1 と定理 3.15.2 により，$x_1, \ldots, x_l$ と異なる相異なる変数 $y_1, \ldots, y_l$ で $\forall y_k$ も $\exists y_k$ も a_i, b_j に現れない $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, l)$ ものが存在する．y_k は当然に a_i, b_j に自由に現れない．そこで

$$a'_i = a_i \left(\frac{x_1, \ldots, x_l}{y_1, \ldots, y_l} \right) \qquad b'_j = b_j \left(\frac{x_1, \ldots, x_l}{y_1, \ldots, y_l} \right)$$

と定めれば，定理 3.16.7 により $a_i(x_k)(y_k)a'_i$，つまり a_i は $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l$ に関して a'_i と相似であり，同様に $b_j(x_k)(y_k)b'_j$ が成り立つ．従って定理 3.17.6 により，逆に $a'_i(y_k)(x_k)a_i$ と $b'_j(y_k)(x_k)b_j$ も成り立つ．従って $\alpha' = a'_1 \cdots a'_m$，$\beta' = b'_1 \cdots b'_n$ と定めれば，$\vec{C}$ と $[\vec{D}]_{\vec{R}_2}$ が相似代入関係で閉じているから，$\alpha \to \beta$ が反例式であることは $\alpha' \to \beta'$ が反例式であることと同等である．さらに，定理 3.17.1 系により $y_1, \ldots, y_l$ は a'_i, b'_j の共通の自由変数列であり，定理 3.17.9 により，$\forall y_k$ も $\exists y_k$ も a'_i, b'_j に現れない．以上により，条件 G をみたす反例式 $\alpha_0 \to \beta_0$ が存在する．

注意 4.9.1 目標の「$\alpha \preccurlyeq \beta \implies \alpha \preccurlyeq_i \beta$」を証明するには，「$\alpha \preccurlyeq \beta$，$\alpha \not\preccurlyeq_i \beta \implies$ 矛盾」という背理法を使う代わりに，「$\alpha \not\preccurlyeq_i \beta \implies \alpha \not\preccurlyeq \beta$」という対偶を証明してもいい．しかし，以下の論法で示し得るのは，「$\alpha \not\preccurlyeq_i \beta$ をみたし条件 G をみたす式 $\alpha \to \beta$ については $\alpha \not\preccurlyeq \beta$ が成り立つ」ことである．それ故に，対偶法ではなく背理法を使い反例式の概念を必要とするのである．　**終**

以下で，補題 4.9.2 で存在の保証された条件 G をみたす反例式 $\alpha_0 \to \beta_0$ に対し，$\alpha_0 \not\preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta_0$ なる $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ があることを示す．これが $\alpha_0 \preccurlyeq \beta_0$ と矛盾するから，それで $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}_i}$ の背理法による証明が完成する．

Var の元 y であって $\forall y$ も $\exists y$ も $\alpha_0 \cup \beta_0$ に属す論理式に現れないものの全体を Var$'$ で表し，Var$'' = $ Var $-$ Var$'$ と定める．また，Prm$' = $ Con $\cup$ Var$'$ と定め，関数記号の全体を算号系とする代数系としての A_ϵ における Prm$'$ の算包 $[\mathrm{Prm}']_{A_\epsilon}$ を A'_ϵ で表す．そうすると，Var が可算集合と仮定していて定理 3.15.2 により Var$''$ が有限集合であるから，Var$'$ も可算集合である．また，Con が高々可算の集合とも仮定しているから Prm$'$ も可算集合である．また，関数記号の全体が高々可算の集合であるとも仮定しているから，定理 3.2.1 により A'_ϵ も可算集合である．

次の二条件をみたす $a \in A$ を**良元**と呼ぶ．

1. $y \in$ Var$'$ なら，$\forall y$ も $\exists y$ も a に現れない．
2. Var$''$ の元は a に自由に現れない．

また，良文の全体を A'_ϕ で表し，$\alpha \cup \beta \subseteq A'_\phi$ なる式 $\alpha \to \beta$ を**良式**と呼ぶ．従って $\alpha_0 \to \beta_0$ は**良反例式・良特異式**である．

補題 4.9.3 A **の良元について次のことが成り立つ．**

1. $t \in A_\epsilon$ **が良項であるためには，**Var$''$ **の元が** t **に自由に現れないことも** $t \in A'_\epsilon$ **なることも，共に必要十分である．**
2. n **変数述語記号** p **と** $t_1, \ldots, t_n \in A_\epsilon$ **に対し** $p(t_1, \ldots, t_n) \in A'_\phi$ **なるためには，**$t_1, \ldots, t_n \in A'_\epsilon$ **なることが必要十分である．**
3. $a \wedge b \in A'_\phi$ **なら** $a, b \in A'_\phi$ **であり，他のブール子** $\vee, \Diamond, \Rightarrow$ **についても同様である．つまり，**A'_ϕ **はブール子** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **で外に閉じている（内にも閉じているが，そのことは必要ない）．**
4. $\forall x a \in A'_\phi$ **とする．このとき任意の** $t \in A'_\epsilon$ **に対して，**$a(x/t) \in A'_\phi$ **であって** a **において** x **は** t **から自由である．また，**Var$'$ **の元** y **が** a **に自由に現れなければ，**a **は** x, y **に関して** $a(x/y)$ **と相似である．存称子** $\exists x$ **についても同様のことが成り立つ．**

証明　1. 問題 3.15.5 により，t に現れる算号は関数記号に限る．従って t が良項であるためには，Var$''$ の元が t に自由に現れないことが必要十分である．また，t が良項であれば定理 3.16.1 系により $t \in A'_\epsilon$ が成り立ち，逆に $t \in A'_\epsilon$ であれば，問題 3.16.3 により t は良項である．

2. 問題 3.15.5 により，$p(t_1, \ldots, t_n)$ に現れる算号は p と関数記号に限る．従って $p(t_1, \ldots, t_n) \in A'_\phi$ なるためには，Var$''$ の元が $p(t_1, \ldots, t_n)$ に自由に現れないことが必要十分であり，そのためには定理 3.16.4 によれば，Var$''$ の元が $t_1, \ldots, t_n$ に自由に現れないことが必要十分であり，そのためには結論 1 によれば，$t_1, \ldots, t_n \in A'_\epsilon$ なることが必要十分である．

3. $y \in$ Var$'$ なら $\forall y$ と $\exists y$ は，$a \wedge b$ に現れないから，定理 3.15.2 により a, b にも現れない．Var$''$ の元は，$a \wedge b$ に自由に現れないから，定理 3.16.4 により a, b にも自由に現れない．従って $a, b \in A'_\phi$ である．

4. $y \in$ Var$'$ なら $\forall y$ と $\exists y$ は，$\forall x a$ に現れず，従って定理 3.15.2 により a にも現れず，従って定理 3.17.9 と結論 1 により $a(x/t)$ にも現れない．結論 1 により Var$''$ の元は t に自由に現れず，定理 3.16.4 により x 以外の Var$''$ の元は a に自由に現れない．従って定理 3.17.1 系により，Var$''$ の元は $a(x/t)$ に自由に現れない．以上により $a(x/t) \in A'_\phi$ である．

$y \in \mathrm{Var}$ が t に自由に現れれば，結論 1 により $y \in \mathrm{Var}'$ であり，従って上記の通り，$\forall y$ も $\exists y$ も a に現れない．従って定理 3.16.7 により，a において x は t から自由である．

$x \in \mathrm{Var}''$ が成り立つ．従って $y \in \mathrm{Var}'$ なら，x, y は異なる ϵ 型の元であり，また，今示した通り a において x は y から自由であるから，y が a に自由に現れなければ，a は x, y に関して $a(x/y)$ と相似である．

補題 4.9.4 $\alpha \to \beta$ **が良特異式であれば，次のことが成り立つ．**

1. $a \wedge b \in \alpha$ **なら，**$ab\alpha \to \beta$ **も良特異式である．**
2. $a \wedge b \in \beta$ **なら，**$\alpha \to a\beta$ **または** $\alpha \to b\beta$ **が良特異式である．**
3. $a \vee b \in \alpha$ **なら，**$a\alpha \to \beta$ **または** $b\alpha \to \beta$ **が良特異式である．**
4. $a \vee b \in \beta$ **なら，**$\alpha \to ab\beta$ **も良特異式である．**
5. $a^{\Diamond} \in \alpha$ **なら，**$\alpha \to a\beta$ **も良特異式である．**
6. $a^{\Diamond} \in \beta$ **なら，**$a\alpha \to \beta$ **も良特異式である．**
7. $a \Rightarrow b \in \alpha$ **なら，**$\alpha \to a\beta$ **または** $b\alpha \to \beta$ **が良特異式である．**
8. $a \Rightarrow b \in \beta$ **なら，**$a\alpha \to b\beta$ **も良特異式である．**
9. $\forall x a \in \alpha$ **なら，任意の** $t \in A'_\epsilon$ **に対して** $a(x/t), \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**
10. $\forall x a \in \beta$ **なら，ある** $y \in \mathrm{Var}'$ **に対して** $\alpha \to a(x/y), \beta$ **も良特異式である．**
11. $\exists x a \in \alpha$ **なら，ある** $y \in \mathrm{Var}'$ **に対して** $a(x/y), \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**
12. $\exists x a \in \beta$ **なら，任意の** $t \in A'_\epsilon$ **に対して** $\alpha \to a(x/t), \beta$ **も良特異式である．**

証明　補題 4.9.3 により，各結論の問題の式は良式である．結論 1 – 8 の問題の式が特異であることは補題 3.23.4 による．そこで以下，結論 9 – 12 の問題の式が特異であることを示す．

9. 補題 4.9.3 により a において x は t から自由である．従って $a(x/t), \alpha \preccurlyeq_i \beta$ とすれば，代入全称律により $\forall x a, \alpha \preccurlyeq_i \beta$ となり，$\forall x a \in \alpha$ であるから巾等律と置換律により $\alpha \preccurlyeq_i \beta$ となって，$\alpha \to \beta$ が特異であることに反する．従って $a(x/t), \alpha \to \beta$ は特異である．

10. Var' が可算集合なので，定理 3.15.1 により α, β, a に自由に現れない $y \in \mathrm{Var}'$ が存在し，補題 4.9.3 により a は x, y に関して $a(x/y)$ と相似であり，$\preccurlyeq_1$ はフレーゲ関係なので，定理 4.8.11 により $\forall y a(x/y) \preccurlyeq_1 \forall x a$ が成り立つ．$\alpha \preccurlyeq_i a(x/y), \beta$ とすれば，$i = 1$ のときには，y が α, β に自由に現れないから全称律により $\alpha \preccurlyeq_1 \forall y a(x/y), \beta$，従って $\preccurlyeq_1$ の消去律により $\alpha \preccurlyeq_1 \forall x a, \beta$ となり，$i = 2$ のときには，$\alpha \preccurlyeq_2 a(x/y), \beta$ から相似全称律により直ちにやはり $\alpha \preccurlyeq_2 \forall x a, \beta$ となる．しかし，$\forall x a \in \beta$ であるから置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq_i \beta$ となり，$\alpha \to \beta$ が特異であることに反する．従って $\alpha \to a(x/y), \beta$ は特異である．

11. Var' が可算集合なので，定理 3.15.1 により α, β, a に自由に現れない $y \in \mathrm{Var}'$ が存在し，補題 4.9.3 により a は x, y に関して $a(x/y)$ と相似であり，$\preccurlyeq_1$ はフレーゲ関係なので，定理 4.8.11 により $\exists x a \preccurlyeq_1 \exists y a(x/y)$ が成り立つ．$a(x/y), \alpha \preccurlyeq_i \beta$ とすれば，$i = 1$ のときには，y が α, β に自由に現れないから存称律により $\exists y a(x/y), \alpha \preccurlyeq_1 \beta$，従って $\preccurlyeq_1$ の消去律により $\exists x a, \alpha \preccurlyeq_1 \beta$ となり，$i = 2$ のときには，$a(x/y), \alpha \preccurlyeq_2 \beta$ から相似存称律により直ちにやはり $\exists x a, \alpha \preccurlyeq_2 \beta$ となる．

しかし，$\exists x a \in \alpha$ であるから置換律と巾等律により $\alpha \preccurlyeq_i \beta$ となり，$\alpha \to \beta$ が特異であることに反する．従って $a(x/y), \alpha \to \beta$ は特異である．

12. 補題 4.9.3 により a において x は t から自由である．従って $\alpha \preccurlyeq_i a(x/t), \beta$ であれば，代入存称律により $\alpha \preccurlyeq_i \exists x a, \beta$ となり，$\exists x a \in \beta$ であるから巾等律と置換律により $\alpha \preccurlyeq_i \beta$ となって，$\alpha \to \beta$ が特異であることに反する．従って $\alpha \to a(x/t), \beta$ は特異である．

補題 4.9.5 A'_ϵ **が可算集合であることに留意して** $A'_\epsilon = \{t_1, t_2, \ldots\}$ **と書けば，良特異式の列** $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0,1,\ldots}$ **で次の十三条件をみたすものがある（これを** $\alpha_0 \to \beta_0$ **の展開列と呼ぶ）．**

0. $\alpha_{n-1} \subseteq \alpha_n$，$\beta_{n-1} \subseteq \beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

1. $n \equiv 1 \mod 12$, $a \wedge b \in \alpha_{n-1}$ **なら** $a, b \in \alpha_n$

2. $n \equiv 2 \mod 12$, $a \wedge b \in \beta_{n-1}$ **なら** $a \in \beta_n$ **または** $b \in \beta_n$

3. $n \equiv 3 \mod 12$, $a \vee b \in \alpha_{n-1}$ **なら** $a \in \alpha_n$ **または** $b \in \alpha_n$

4. $n \equiv 4 \mod 12$, $a \vee b \in \beta_{n-1}$ **なら** $a, b \in \beta_n$

5. $n \equiv 5 \mod 12$, $a^\lozenge \in \alpha_{n-1}$ **なら** $a \in \beta_n$

6. $n \equiv 6 \mod 12$, $a^\lozenge \in \beta_{n-1}$ **なら** $a \in \alpha_n$

7. $n \equiv 7 \mod 12$, $a \Rightarrow b \in \alpha_{n-1}$ **なら** $a \in \beta_n$ **または** $b \in \alpha_n$

8. $n \equiv 8 \mod 12$, $a \Rightarrow b \in \beta_{n-1}$ **なら** $a \in \alpha_n$ **かつ** $b \in \beta_n$

9. $n \equiv 9 \mod 12$, $\forall x a \in \alpha_{n-1}$ **なら** $a(x/t_1), \ldots, a(x/t_n) \in \alpha_n$

10. $n \equiv 10 \mod 12$, $\forall x a \in \beta_{n-1}$ **ならある** $y \in \mathrm{Var}'$ **に対して** $a(x/y) \in \beta_n$

11. $n \equiv 11 \mod 12$, $\exists x a \in \alpha_{n-1}$ **ならある** $y \in \mathrm{Var}'$ **に対して** $a(x/y) \in \alpha_n$

12. $n \equiv 12 \mod 12$, $\exists x a \in \beta_{n-1}$ **なら** $a(x/t_1), \ldots, a(x/t_n) \in \beta_n$

証明　$\alpha_0 \to \beta_0$ は良特異式である．これをもとに $\alpha_n \to \beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を次のように帰納的に作ればいい．すなわち，ある自然数 n に対して良特異式 $\alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ が作れたとき，...

$n \equiv 1 \mod 12$ のときは，$a \wedge b \in \alpha_{n-1}$ なる $a \wedge b$ の全体を $a_i \wedge b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により $a_1 b_1 \cdots a_k b_k \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ が良特異式であるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 2 \mod 12$ のときは，$a \wedge b \in \beta_{n-1}$ なる $a \wedge b$ の全体を $a_i \wedge b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により，良特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, \ldots, k)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，$\alpha_{n,i-1} \to a_i \beta_{n,i-1}$ または $\alpha_{n,i-1} \to b_i \beta_{n,i-1}$ が良特異式であるから，そうである方を $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,k} \to \beta_{n,k}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 3 \mod 12$ のときは，$a \vee b \in \alpha_{n-1}$ なる $a \vee b$ の全体を $a_i \vee b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により，良特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, \ldots, k)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，$a_i \alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ または $b_i \alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ が良特異式であるから，そうである方を $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,k} \to \beta_{n,k}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 4 \mod 12$ のときは，$a \vee b \in \beta_{n-1}$ なる $a \vee b$ の全体を $a_i \vee b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により $\alpha_{n-1} \to a_1 b_1 \cdots a_k b_k \beta_{n-1}$ が良特異式であるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 5 \mod 12$ のときは，$a^\Diamond \in \alpha_{n-1}$ なる $a^\Diamond$ の全体を $a_i{}^\Diamond$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により $\alpha_{n-1} \to a_1 \cdots a_k \beta_{n-1}$ が良特異式であるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 6 \mod 12$ のときは，$a^\Diamond \in \beta_{n-1}$ なる $a^\Diamond$ の全体を $a_i{}^\Diamond$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により $a_1 \cdots a_k \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ が良特異式であるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 7 \mod 12$ のときは，$a \Rightarrow b \in \alpha_{n-1}$ なる $a \Rightarrow b$ の全体を $a_i \Rightarrow b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により，良特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, \ldots, k)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，$\alpha_{n,i-1} \to a_i \beta_{n,i-1}$ または $b_i \alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ が良特異式であるから，そうである方を $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,k} \to \beta_{n,k}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 8 \mod 12$ のときは，$a \Rightarrow b \in \beta_{n-1}$ なる $a \Rightarrow b$ の全体を $a_i \Rightarrow b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により $a_1 \cdots a_k \alpha_{n-1} \to b_1 \cdots b_k \beta_{n-1}$ が良特異式であるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 9 \mod 12$ のときは，$\forall x a \in \alpha_{n-1}$ なる $\forall x a$ の全体を $\forall x_i a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とし，$\gamma_i = a_i(x_i/t_1) \cdots a_i(x_i/t_n)$ とすれば，補題 4.9.4 により $\gamma_1 \cdots \gamma_k \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ が良特異式であるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 10 \mod 12$ のときは，$\forall x a \in \beta_{n-1}$ なる $\forall x a$ の全体を $\forall x_i a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により Var' の元 $y_1, \ldots, y_k$ であって $\alpha_{n-1} \to a_1(x_1/y_1) \cdots a_k(x_k/y_k), \beta_{n-1}$ が良特異式となるものがあるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 11 \mod 12$ のときは，$\exists x a \in \alpha_{n-1}$ なる $\exists x a$ の全体を $\exists x_i a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とすれば，補題 4.9.4 により Var' の元 $y_1, \ldots, y_k$ であって $a_1(x_1/y_1) \cdots a_k(x_k/y_k), \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ が良特異式となるものがあるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

$n \equiv 12 \mod 12$ のときは，$\exists x a \in \beta_{n-1}$ なる $\exists x a$ の全体を $\exists x_i a_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ とし，$\gamma_i = a_i(x_i/t_1) \cdots a_i(x_i/t_n)$ とすれば，補題 4.9.4 により $\alpha_{n-1} \to \gamma_1 \cdots \gamma_k \beta_{n-1}$ が良特異式であるから，これを $\alpha_n \to \beta_n$ とする．

補題 4.9.6 算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する A_ϕ 上のブール乖対 (P, Q) で $(\alpha_0, \beta_0) \subseteq (P, Q)$ と $P \cup Q \subseteq A'_\phi$ をみたして極量子についての次の四法則に従うものが存在する．

9. $\forall x a \in P \implies$ **任意の** $t \in A'_\epsilon$ **に対して** $a(x/t) \in P$

10. $\forall x a \in Q \implies$ **ある** $y \in \mathrm{Var}'$ **に対して** $a(x/y) \in Q$

11. $\exists x a \in P \implies$ **ある** $y \in \mathrm{Var}'$ **に対して** $a(x/y) \in P$

12. $\exists x a \in Q \implies$ **任意の** $t \in A'_\epsilon$ **に対して** $a(x/t) \in Q$

証明　補題 4.9.5 により $\alpha_0 \to \beta_0$ の展開列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0,1,\ldots}$ が存在する．$P = \bigcup_{n \geq 0} \alpha_n$，$Q = \bigcup_{n \geq 0} \beta_n$ と定める．そうすると，展開列の条件により $(\alpha_0, \beta_0) \subseteq (P, Q)$ と $P \cup Q \subseteq A'_\phi$ が成り立つ．展開列の条件によりまた，任意の n に対して $\alpha_n \to \beta_n$ が特異式であって $\alpha_{n-1} \subseteq \alpha_n$，$\beta_{n-1} \subseteq \beta_n$ が成り立つから，補題 3.23.1 により任意の m, n に対して $\alpha_m \cap \beta_n = \emptyset$，つまり $P \cap Q = \emptyset$ が成り立つ．以下，展開列の残りの条件によって (P, Q) がブール対律を成す八法則（それらに番号 1 – 8 を付すものとする）と上記四法則 9 – 12 に従うことを確かめる．

1. $a \wedge b \in P$ なら，$n \equiv 1 \mod 12$，$a \wedge b \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$a, b \in \alpha_n$，従って $a, b \in P$ が成り立つ．

2. $a \wedge b \in Q$ なら，$n \equiv 2 \mod 12$, $a \wedge b \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$a \in \beta_n$ または $b \in \beta_n$，従って $a \in Q$ または $b \in Q$ が成り立つ．

3. $a \vee b \in P$ なら，$n \equiv 3 \mod 12$, $a \vee b \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$a \in \alpha_n$ または $b \in \alpha_n$，従って $a \in P$ または $b \in P$ が成り立つ．

4. $a \vee b \in Q$ なら，$n \equiv 4 \mod 12$, $a \vee b \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$a, b \in \beta_n$，従って $a, b \in Q$ が成り立つ．

5. $a^\diamond \in P$ なら，$n \equiv 5 \mod 12$, $a^\diamond \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$a \in \beta_n$，従って $a \in Q$ が成り立つ．

6. $a^\diamond \in Q$ なら，$n \equiv 6 \mod 12$, $a^\diamond \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$a \in \alpha_n$，従って $a \in P$ が成り立つ．

7. $a \Rightarrow b \in P$ なら，$n \equiv 7 \mod 12$, $a \Rightarrow b \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，$a \in \beta_n$ または $b \in \alpha_n$，従って $a \in Q$ または $b \in P$ が成り立つ．

8. $a \Rightarrow b \in Q$ なら，$n \equiv 8 \mod 12$, $a \Rightarrow b \in \beta_{n-1}$ なる n があって，$a \in \alpha_n$ かつ $b \in \beta_n$，従って $a \in P$ かつ $b \in Q$ が成り立つ．

9. $\forall x a \in P$ なら，$n \equiv 9 \mod 12$, $\forall x a \in \alpha_{n-1}$ なる n が無限個あって，そういう n に対して $a(x/t_1), \ldots, a(x/t_n) \in \alpha_n$，従って $a(x/t_1), \ldots, a(x/t_n) \in P$ が成り立つ．従って，任意の $t \in A'_\epsilon$ に対して $a(x/t) \in P$ が成り立つ．

10. $\forall x a \in Q$ なら，$n \equiv 10 \mod 12$, $\forall x a \in \beta_{n-1}$ なる n があって，ある $y \in \mathrm{Var}'$ に対して $a(x/y) \in \beta_n$，従って $a(x/y) \in Q$ が成り立つ．

11. $\exists x a \in P$ なら，$n \equiv 11 \mod 12$, $\exists x a \in \alpha_{n-1}$ なる n があって，ある $y \in \mathrm{Var}'$ に対して $a(x/y) \in \alpha_n$，従って $a(x/y) \in P$ が成り立つ．

12. $\exists x a \in Q$ なら，$n \equiv 12 \mod 12$, $\exists x a \in \beta_{n-1}$ なる n が無限個あって，そういう n に対して $a(x/t_1), \ldots, a(x/t_n) \in \beta_n$，従って $a(x/t_1), \ldots, a(x/t_n) \in Q$ が成り立つ．従って，任意の $t \in A'_\epsilon$ に対して $a(x/t) \in Q$ が成り立つ．　**終**

補題 4.9.6 のブール乖対 (P, Q) を使って $\mathcal{W}$ の元 W を作る．まず W の台集合としては，A'_ϵ と $\mathbb{T}$ の直和 $A'_\epsilon \amalg \mathbb{T}$ をとる．次に，W を U 型代数系とする．そのためにまず，W の ϵ 部分 W_ϵ として A'_ϵ をとり，ϕ 部分 W_ϕ として $\mathbb{T}$ をとる．次に，各 n 変数関数記号 f に対して，W 上の算法 $\bar{f}$ を定める $(n = 1, 2, \ldots)$．まず $\mathrm{Dom}\,\bar{f} = (W_\epsilon)^n$ とする．$(t_1, \ldots, t_n) \in (W_\epsilon)^n$ なら，$(t_1, \ldots, t_n) \in (A'_\epsilon)^n$ であって，A'_ϵ は関数記号の全体を算号系とする代数系 A_ϵ の台部分系であるから，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は A'_ϵ すなわち W_ϵ に属す．そこで，$\bar{f}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ と定める．これはつまり，A'_ϵ を関数記号の全体を算号系とする代数系とみなした後，問題 3.3.11 のように A'_ϵ から W_ϵ への恒等写像によって，W_ϵ を A'_ϵ の複製代数系と成したのである（例 4.2.2 参照）．次に，各 n 変述語記号 p に対して，W 上の算法 $\bar{p}$ を定める $(n = 1, 2, \ldots)$．まず $\mathrm{Dom}\,\bar{p} = (W_\epsilon)^n$ とする．$(t_1, \ldots, t_n) \in (W_\epsilon)^n$ なら，$(t_1, \ldots, t_n) \in (A'_\epsilon)^n$ であるから，補題 4.9.3 により素論理式 $p(t_1, \ldots, t_n)$ が A'_ϕ に属す．これと補題 4.9.6 により $P \subseteq A'_\phi$ であることに留意して

$$\bar{p}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad p(t_1, \ldots, t_n) \in P \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \quad p(t_1, \ldots, t_n) \notin P \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．最後に W 上の算法 $\wedge, \vee, \diamond, \Rightarrow$ は，(4.2.2) と (4.2.1) をみたすように定める．これで W は $\mathcal{W}$ の元となった．

そこで次に，$\mathrm{Prm}' = \mathrm{Con} \cup \mathrm{Var}'$ が A'_ϵ すなわち W_ϵ に含まれることに留意して，A から W への定付値 Φ を Con から W_ϵ への埋め込み写像と定め，A から W への変付値 ν を，$\nu|_{\mathrm{Var}'} = \mathrm{id}_{\mathrm{Var}'}$

なる条件をみたす任意の写像 $v \in \mathrm{Var} \to W_\epsilon$ と定める．そうすると，$(\Phi, v) \in \mathfrak{V}$ であって意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Valw}}$ が定まり，任意の $t \in \mathrm{Prm}'$ に対して $(\Phi^* t)v = t$ が成り立つ．

補題 4.9.7 任意の $t \in A'_\epsilon$ に対して $(\Phi^* t)v = t$ が成り立つ．

証明　各 $t \in A'_\epsilon$ に $(\Phi^* t)v \in W_\epsilon$ を対応させる写像と A'_ϵ $(= W_\epsilon)$ の恒等変換が，関数記号を算号とする代数系としての準写であって，A'_ϵ の生成系 Prm' 上では一致するからである．　**終**

最後に，補題 4.9.6 により $P \cup Q \subseteq A'_\phi$ であることに留意して，任意の $c \in P \cup Q$ に対して次の二つのことを示そう．

$$c \in P \implies (\Phi^* c)v = 1 \qquad\qquad c \in Q \implies (\Phi^* c)v = 0$$

そうすれば，$(\alpha_0, \beta_0) \subseteq (P, Q)$ なることにより $\alpha_0 \not\leq_{\Phi, v} \beta_0$ なる矛盾が得られるから，$\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}_i}$ なることの背理法による証明が完成する．

A_ϕ が素論理式の全体を素元系とし $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\}$ を算号系とする普遍汎代数系であることを想起して，この普遍汎代数系における c の階数についての帰納法を使う．

まず c の階数が 0，すなわち c が素論理式の場合を考える．そうすると，述語記号 p と $t_1, \ldots, t_n \in A_\epsilon$ により $c = p(t_1, \ldots, t_n)$ と表される．この場合，$c \in A'_\phi$ であるから，補題 4.9.3 により $t_i \in A'_\epsilon$，従って補題 4.9.7 により $(\Phi^* t_i)v = t_i$，従って

$$(\Phi^* c)v = \big(\Phi^*\big(p(t_1, \ldots, t_n)\big)\big)v = \overline{p}\big((\Phi^* t_1)v, \ldots, (\Phi^* t_n)v\big) = \overline{p}(t_1, \ldots, t_n)$$

が成り立つ．従って c すなわち $p(t_1, \ldots, t_n)$ が P に属せば，$\overline{p}(t_1, \ldots, t_n) = 1$ すなわち $(\Phi^* c)v = 1$ が確かに成り立つ．$c \in Q$ なら，補題 4.9.6 により $p(t_1, \ldots, t_n) \notin P$ であるから，$\overline{p}(t_1, \ldots, t_n) = 0$ すなわち $(\Phi^* c)v = 0$ が確かに成り立つ．

そこで，c が素論理式でないと仮定する．そうすると定理 3.8.2 により，c は $a \wedge b$, $a \vee b$, $a^\Diamond$, $a \Rightarrow b$, $\forall x a$, $\exists x a$ の何れかの語形をしており，a と b の階数は c の階数より小さい．

1. $c = a \wedge b \in P$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a, b \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = (\Phi^* b)v = 1$，従って $(\Phi^* c)v = (\Phi^* a)v \wedge (\Phi^* b)v = 1$ が成り立つ．

2. $c = a \wedge b \in Q$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a \in Q$ または $b \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = 0$ または $(\Phi^* b)v = 0$，従って $(\Phi^* c)v = (\Phi^* a)v \wedge (\Phi^* b)v = 0$ が成り立つ．

3. $c = a \vee b \in P$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a \in P$ または $b \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = 1$ または $(\Phi^* b)v = 1$，従って $(\Phi^* c)v = (\Phi^* a)v \vee (\Phi^* b)v = 1$ が成り立つ．

4. $c = a \vee b \in Q$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a, b \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = (\Phi^* b)v = 0$，従って $(\Phi^* c)v = (\Phi^* a)v \vee (\Phi^* b)v = 0$ が成り立つ．

5. $c = a^\Diamond \in P$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = 0$，従って $(\Phi^* c)v = ((\Phi^* a)v)^\Diamond = 1$ が成り立つ．

6. $c = a^\Diamond \in Q$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = 1$，従って $(\Phi^* c)v = ((\Phi^* a)v)^\Diamond = 0$ が成り立つ．

7. $c = a \Rightarrow b \in P$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a \in Q$ または $b \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = 0$ または $(\Phi^* b)v = 1$，従って $(\Phi^* c)v = (\Phi^* a)v \Rightarrow (\Phi^* b)v = 1$ が成り立つ．

8. $c = a \Rightarrow b \in Q$ **の場合**：補題 4.9.6 により $a \in P$, $b \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)v = 1$, $(\Phi^* b)v = 0$，従って $(\Phi^* c)v = (\Phi^* a)v \Rightarrow (\Phi^* b)v = 0$ が成り立つ．

9. $c = \forall x a \in P$ **の場合**：$W_\epsilon = A'_\epsilon$ であるから，$(\Phi^* c)v = \big(\forall x(\Phi^* a)\big)v = \inf\{(\Phi^* a)\big((x/t)v\big) \mid t \in A'_\epsilon\}$ が成り立つ．従って，任意の $t \in A'_\epsilon$ に対して $(\Phi^* a)\big((x/t)v\big) = 1$ を示せばいい．補題

4.9.6 により $a(x/t) \in P$ であって補題 4.9.1 により a と $a(x/t)$ の階数が等しいから，帰納法の仮定により $\big(\Phi^*a(x/t)\big)\nu = 1$ は成り立つ．また，$\forall xa \in A'_\phi$ であるから，補題 4.9.3 により a において x が t から自由であり，従って定理 4.4.2 と補題 4.9.7 により $\big(\Phi^*a(x/t)\big)\nu = (\Phi^*a)\big((x/(\Phi^*t)\nu)\nu\big) = (\Phi^*a)\big((x/t)\nu\big)$ が成り立つ．従って $(\Phi^*a)\big((x/t)\nu\big) = 1$ が確かに成り立つ．

10. $c = \forall xa \in Q$ **の場合**：ある $y \in \mathrm{Var}'$ に対して，補題 4.9.6 により $a(x/y) \in Q$ であって補題 4.9.1 により a と $a(x/y)$ の階数が等しいから，帰納法の仮定により $\big(\Phi^*a(x/y)\big)\nu = 0$ が成り立つ．また，$\forall xa \in A'_\phi$ であるから，補題 4.9.3 により a において x が y から自由であり，従って定理 4.4.2 により $\big(\Phi^*a(x/y)\big)\nu = (\Phi^*a)\big((x/(\Phi^*y)\nu)\nu\big)$ が成り立つ．$(\Phi^*y)\nu \in W_\epsilon$ であって $(\Phi^*c)\nu = \big(\forall x(\Phi^*a)\big)\nu = \inf\{(\Phi^*a)\big((x/w)\nu\big) \mid w \in W_\epsilon\}$ であるから，$(\Phi^*c)\nu = 0$ が成り立つ．

11. $c = \exists xa \in P$ **の場合**：ある $y \in \mathrm{Var}'$ に対して，補題 4.9.6 により $a(x/y) \in P$ であって補題 4.9.1 により a と $a(x/y)$ の階数が等しいから，帰納法の仮定により $\big(\Phi^*a(x/y)\big)\nu = 1$ が成り立つ．また，$\exists xa \in A'_\phi$ であるから，補題 4.9.3 により a において x が y から自由であり，従って定理 4.4.2 により $\big(\Phi^*a(x/y)\big)\nu = (\Phi^*a)\big((x/(\Phi^*y)\nu)\nu\big)$ が成り立つ．$(\Phi^*y)\nu \in W_\epsilon$ であって $(\Phi^*c)\nu = \big(\exists x(\Phi^*a)\big)\nu = \sup\{(\Phi^*a)\big((x/w)\nu\big) \mid w \in W_\epsilon\}$ であるから，$(\Phi^*c)\nu = 1$ が成り立つ．

12. $c = \exists xa \in Q$ **の場合**：$W_\epsilon = A'_\epsilon$ であるから，$(\Phi^*c)\nu = \big(\exists x(\Phi^*a)\big)\nu = \sup\{(\Phi^*a)\big((x/t)\nu\big) \mid t \in A'_\epsilon\}$ が成り立つ．従って，任意の $t \in A'_\epsilon$ に対して $(\Phi^*a)\big((x/t)\nu\big) = 0$ を示せばいい．補題 4.9.6 により $a(x/t) \in Q$ であって補題 4.9.1 により a と $a(x/t)$ の階数が等しいから，帰納法の仮定により $\big(\Phi^*a(x/t)\big)\nu = 0$ は成り立つ．また，$\exists xa \in A'_\phi$ であるから，補題 4.9.3 により a において x が t から自由であり，従って定理 4.4.2 と補題 4.9.7 により $\big(\Phi^*a(x/t)\big)\nu = (\Phi^*a)\big((x/(\Phi^*t)\nu)\nu\big) = (\Phi^*a)\big((x/t)\nu\big)$ が成り立つ．従って $(\Phi^*a)\big((x/t)\nu\big) = 0$ が確かに成り立つ．

これで $\vec{C} = [\vec{D}]_{\vec{R}_i}$ $(i = 1, 2)$ の展開列法による証明は完成した．

4.9.1.3　論拠 $(\vec{R}_1, \vec{D})$ の $\mathcal{F}$ 弱完全性の切断法による証明

‡ ここでは，A の変数系 Var **が無限集合であって，その濃度が定数系** Con **の濃度と関数記号の全体の濃度と述語記号の全体の濃度のいずれをも下回らないと仮定する**．その上で切断法によって論拠 $(\vec{R}_1, \vec{D})$ の $\mathcal{F}$ 弱完全性を，すなわち生成的法則 $(\vec{R}_1, \vec{D})$ が $(A_\phi, \mathcal{F})$ の特性法則であることを証明する．法則 $(\vec{R}_1, \vec{D})$ はブール律とフレーゲ律を合わせた法則と同等であり，$(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ は $(\vec{R}_1, \vec{D})$ 関係であった．また，問題 3.30.31 により $1 \notin \mathcal{F}$ が成り立つ．従って定理 3.30.15 によれば，次の定理を証明すれば十分である．

定理 4.9.1 $(A_\phi)^*$ **上の** $\preccurlyeq$ **に含まれる任意の** $(\vec{R}_1, \vec{D})$ **関係による** A_ϕ **の任意の有限な切断に** $\mathfrak{V}$ **実例が存在する．**

この定理を定理 4.9.5 の証明に使うために次のように拡張する．

定理 4.9.2 $\preccurlyeq_*$ **を** $(A_\phi)^*$ **上の** $\preccurlyeq$ **に含まれる** $(\vec{R}_1, \vec{D})$ **関係とし，**(X, Y) **を** A_ϕ **の** $\preccurlyeq_*$ **による切断とし，**$X \cup Y$ **の元に自由に現れない** Var **の元の全体を** $\mathrm{Var}_{(X,Y)}$ **で表し，**$\#\mathrm{Var}_{(X,Y)} = \#\mathrm{Var}$ **と仮定する．このとき** (X, Y) **に** $\mathfrak{V}$ **実例が存在する．より精密には，**$W \in \mathcal{W}$ **を適当にとると，関数記号の全体を算号系とする代数系として** $W_\epsilon = A_\epsilon$ **であり，**Φ **と** ν **を** Con **と** Var **の** W_ϵ **への埋め込み写像とすれば，**(Φ, ν) **が** (X, Y) **の** $\mathfrak{V}$ **実例となる．**

定理 4.9.2 は確かに定理 4.9.1 の拡張である．なぜなら，(X, Y) が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による有限な切断であれば，定理 3.15.1 により $\mathrm{Var} - \mathrm{Var}_{(X,Y)}$ が有限集合であるから，Var が無限集合であるとの仮定により $\#\mathrm{Var}_{(X,Y)} = \#\mathrm{Var}$ が成り立つからである．そこで以下，定理 4.9.2 を証明する [9]．

補題 4.9.8 集合 $\bigcup_{x \in \mathrm{Var}}(\mathrm{Im}\,\forall x \cup \mathrm{Im}\,\exists x)$ の濃度は Var の濃度に等しい．

証明　$\#\mathrm{Var} \leq \#\left(\bigcup_{x \in \mathrm{Var}}(\mathrm{Im}\,\forall x \cup \mathrm{Im}\,\exists x)\right) \leq \#A_\phi$ が成り立つから $\#A_\phi \leq \#\mathrm{Var}$ を示せばいい．A_ϵ は関数記号の全体を算号系とする代数系として素項の全体 Prm で生成される．#Var が超限基数で #Con を下回らないから $\#\mathrm{Prm} = \#\mathrm{Var}$ が成り立つ．#Var は関数記号全体の濃度を下回らない．従って定理 3.2.1 により $\#A_\epsilon \leq \#\mathrm{Var}$ が成り立つ．このことと #Var が述語記号全体の濃度を下回らないことにより同様に，#Var は素論理式の全体の濃度を下回らない．A_ϕ は $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\}$ を算号系とする代数系として素論理式の全体で生成される．#Var が超限基数であるから $\#\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\} = \#\mathrm{Var}$ が成り立つ．従ってまた定理 3.2.1 により $\#A_\phi \leq \#\mathrm{Var}$ が確かに成り立つ．　**終**

Var の位数を $\mathfrak{m}$ で表す．そうすると補題 4.9.8 により，集合 $\bigcup_{x \in \mathrm{Var}}(\mathrm{Im}\,\forall x \cup \mathrm{Im}\,\exists x)$ の位数も $\mathfrak{m}$ に等しい．従って定理 3.33.6 と注意 3.33.3 により，この集合を $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ なる順序数 $\mathfrak{n}$ の全体 $\mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ と一対一に対応させて

$$\bigcup_{x \in \mathrm{Var}}(\mathrm{Im}\,\forall x \cup \mathrm{Im}\,\exists x) = \{a_{\mathfrak{n}} \mid \mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}\}$$

と表すことができて，しかも任意の $\mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ に対して $\#\mathfrak{n} < \#\mathfrak{m}$ が成り立つ．そこで定理 3.33.9 を使って族 $(a_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}}$ と (X, Y) とから，同じく $\mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ によって添数付けられた A_ϕ の元の族 $(b_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}}$ を作る．そのためには $F \in \left(\bigcup_{\mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}}(\mathbb{O}^{\mathfrak{n}} \to A_\phi)\right) \to A_\phi$ を定めなければならない．そこで $\mathfrak{n} \in \mathbb{O}^{\mathfrak{m}}$ と $g \in \mathbb{O}^{\mathfrak{n}} \to A_\phi$ の組み $\mathfrak{n}, g$ を任意にとり，Fg を定めるために，まず

$$\mathrm{Var}_{\mathfrak{n}} = \{x \in \mathrm{Var} \mid x, \forall x, \exists x \text{ のどれかは } a_{\mathfrak{n}} \text{ に現れる}\}$$

と定め，次に $\mathbb{O}^{\mathfrak{n}}$ の各元 i に応じて次のよう定める．

$$\mathrm{Var}_i^g = \{x \in \mathrm{Var} \mid x, \forall x, \exists x \text{ のどれかは } gi \text{ に現れる}\}$$

そうすると定理 3.15.1 と定理 3.15.2 により，$\mathrm{Var}_{\mathfrak{n}}$ と Var_i^g $(i \in \mathbb{O}^{\mathfrak{n}})$ は有限集合である．従って $\mathfrak{n}$ が有限順序数の場合，$\mathrm{Var}_{\mathfrak{n}} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{O}^{\mathfrak{n}}} \mathrm{Var}_i^g$ も有限集合であり，従ってその濃度は #Var すなわち $\#\mathfrak{m}$ より小さい．他方 $\mathfrak{n}$ が超限順序数の場合，定理 3.33.5 系により $\#\mathfrak{n}$ が超限基数であるから

$$\#\left(\mathrm{Var}_{\mathfrak{n}} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{O}^{\mathfrak{n}}} \mathrm{Var}_i^g\right) \leq \#\mathfrak{n} + (\#\mathfrak{n}) \cdot (\#\mathfrak{n}) = \#\mathfrak{n}$$

となり，$\#\mathfrak{n} < \#\mathfrak{m}$ であったから，やはり $\#\left(\mathrm{Var}_{\mathfrak{n}} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{O}^{\mathfrak{n}}} \mathrm{Var}_i^g\right) < \#\mathfrak{m}$ が成り立つ．仮定により $\#\mathrm{Var}_{(X,Y)} = \#\mathfrak{m}$ であるから，結局 $\mathrm{Var}_{(X,Y)} - \left(\mathrm{Var}_{\mathfrak{n}} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{O}^{\mathfrak{n}}} \mathrm{Var}_i^g\right)$ は空集合ではない．そこでこの集合の元 $y_{\mathfrak{n}}$ を任意に一つとる．すなわち，$y_{\mathfrak{n}}$ は次の二条件をみたす変数である．

$\mathfrak{n}$-1. $y_{\mathfrak{n}}$ は $X \cup Y$ の元に自由に現れない．

$\mathfrak{n}$-2. $y_{\mathfrak{n}}, \forall y_{\mathfrak{n}}, \exists y_{\mathfrak{n}}$ は $a_{\mathfrak{n}}$ と gi $(i \in \mathbb{O}^{\mathfrak{n}})$ に現れない．

[9] この証明法は高岡洋介氏の着想と高橋和大氏の 2008 年度東京大学修士論文「一階述語論理における切断のモデルの存在定理とその応用」に基づく．

他方，$a_n = \forall x_n a'_n$ なる $x_n \in \mathrm{Var}$ と $a'_n \in A_\phi$ が唯一組みあるか，$a_n = \exists x_n a'_n$ なる $x_n \in \mathrm{Var}$ と $a'_n \in A_\phi$ が唯一組みあるかの，どちらか一方のみが成り立つ．そこで Fg を次のように定める．

$$Fg = \begin{cases} a'_n(x_n/y_n) \Rightarrow \forall x_n a'_n & \cdots \quad a_n = \forall x_n a'_n \text{ のとき} \\ \exists x_n a'_n \Rightarrow a'_n(x_n/y_n) & \cdots \quad a_n = \exists x_n a'_n \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし $n = 0$ の場合には $\mathbb{O}^n = \emptyset$ であるから，空集合律により $g = \emptyset$ であり，$\mathrm{Var}_{(X,Y)} - \mathrm{Var}_0$ の元 y_0 を任意に一つとって

$$F\emptyset = \begin{cases} a'_0(x_0/y_0) \Rightarrow \forall x_0 a'_0 & \cdots \quad a_0 = \forall x_0 a'_0 \text{ のとき} \\ \exists x_0 a'_0 \Rightarrow a'_0(x_0/y_0) & \cdots \quad a_0 = \exists x_0 a'_0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めたことになる．

こう定めた $F \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{O}^m} (\mathbb{O}^n \to A_\phi)\right) \to A_\phi$ に対し定理 3.33.9 により，$\mathbb{O}^m \to A_\phi$ の元 f で

$$fn = F(f|_{\mathbb{O}^n}) \qquad (n \in \mathbb{O}^m)$$

をみたすものが唯一つ存在する．そこで

$$b_n = fn \qquad (n \in \mathbb{O}^m)$$

と定める．そうすると，各 $n \in \mathbb{O}^m$ に対して $b_n = F(f|_{\mathbb{O}^n})$ であって，さらに各 $i \in \mathbb{O}^n$ に対して $(f|_{\mathbb{O}^n})i = b_i$ となるから，A_ϕ の元の族 $(b_n)_{n \in \mathbb{O}^m}$ が

I. y_n は $X \cup Y$ の元に自由に現れない $(n \in \mathbb{O}^m)$.

II. $y_n, \forall y_n, \exists y_n$ は a_n と b_i $(i \in \mathbb{O}^n)$ に現れない $(n \in \mathbb{O}^m)$.

なる二条件をみたす変数の族 $(y_n)_{n \in \mathbb{O}^m}$ によって次のように定められたことになる．

$$b_n = \begin{cases} a'_n(x_n/y_n) \Rightarrow \forall x_n a'_n & \cdots \quad a_n = \forall x_n a'_n \text{ のとき} \\ \exists x_n a'_n \Rightarrow a'_n(x_n/y_n) & \cdots \quad a_n = \exists x_n a'_n \text{ のとき} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{O}^m)$$

いずれにしても $b_n = c_n \Rightarrow d_n$ と書けて，$d_n = a_n$ または $c_n = a_n$ が成り立つ．

y_n のみたす上記条件 II と定理 3.15.1 と定理 3.15.2 により，$x_n \neq y_n$ であって $y_n, \forall y_n, \exists y_n$ は a'_n にも現れない．従って y_n は a'_n に自由にも現れず，定理 3.16.7 により a'_n において x_n は y_n から自由である．よって a'_n は x_n, y_n に関して $a'_n(x_n/y_n)$ と相似である．$\preccurlyeq_*$ がフレーゲ関係であるから，定理 4.8.11 により結局次のことが成り立つ．

$$\forall y_n a'_n(x_n/y_n) \preccurlyeq_* \forall x_n a'_n \qquad \exists x_n a'_n \preccurlyeq_* \exists y_n a'_n(x_n/y_n)$$

補題 4.9.9 $(\{b_n \mid n \in \mathbb{O}^m\} \cup X, Y)$ **も** A_ϕ **の** $\preccurlyeq_*$ **による切断である．**

証明　背理法を使うために，この補題を否定する．そうすると $\preccurlyeq_*$ の巾等律と置換律により，$\alpha \subseteq X$, $\beta \subseteq Y$ なる $(A_\phi)^*$ の二元 α, β と $\mathbb{O}^m$ の有限個の元 $n_1, \ldots, n_k$ で

$$b_{n_1} \cdots b_{n_k} \alpha \preccurlyeq_* \beta \qquad n_1 > \cdots > n_k$$

なるものがある．そういう組み $\alpha, \beta, n_1, \ldots, n_k$ の中で k が最小のものをとる．そうすると，(X, Y) が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断であることにより $k \geq 1$ である．そこで $n = n_1$，$\alpha' = b_{n_2} \cdots b_{n_k} \alpha$ と定め

る．そうすると，$k \geq 2$ のときは k の最小性により $\alpha' \not\preccurlyeq_* \beta$ が成り立ち，$k = 1$ のときは (X, Y) が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断であることによりやはり $\alpha' \not\preccurlyeq_* \beta$ が成り立つ．また，$b_n\alpha' \preccurlyeq_* \beta$ が成り立って $b_n = c_n \Rightarrow d_n$ と書けるから，定理 3.21.4 により $\alpha' \preccurlyeq_* c_n\beta$ と $d_n\alpha' \preccurlyeq_* \beta$ が成り立つ．

(1) $a_n = \forall x_n a'_n$ **の場合：**$c_n = a'_n(x_n/y_n)$，$d_n = \forall x_n a'_n$ である．従って

$$\forall x_n a'_n, \alpha' \preccurlyeq_* \beta$$

と $\alpha' \preccurlyeq_* a'_n(x_n/y_n), \beta$ が成り立つ．後者の式からはさらに，y_n のみたす上記条件 I, II により y_n が α', β に自由に現れないから，全称律により

$$\alpha' \preccurlyeq_* \forall y_n a'_n(x_n/y_n), \beta$$

を得る．これら二展示式と先の $\forall y_n a'_n(x_n/y_n) \preccurlyeq_* \forall x_n a'_n$ なる式に強消去律・巾等律・置換律を使って $\alpha' \preccurlyeq_* \beta$ を得るが，これは矛盾である．

(2) $a_n = \exists x_n a'_n$ **の場合：**$c_n = \exists x_n a'_n$，$d_n = a'_n(x_n/y_n)$ である．従って

$$\alpha' \preccurlyeq_* \exists x_n a'_n, \beta$$

と $a'_n(x_n/y_n), \alpha' \preccurlyeq_* \beta$ が成り立つ．後者の式からはさらに，y_n のみたす上記条件 I, II により y_n が α', β に自由に現れないから，存称律により

$$\exists y_n a'_n(x_n/y_n), \alpha' \preccurlyeq_* \beta$$

を得る．これら二展示式と先の $\exists x_n a'_n \preccurlyeq_* \exists y_n a'_n(x_n/y_n)$ なる式に強消去律・巾等律・置換律を使って $\alpha' \preccurlyeq_* \beta$ を得るが，これは矛盾である．　**終**

次の補題のために，A_ϕ が素論理式の全体を素元系とし $\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\}$ を算号系とする普遍汎代数系であることを想起しよう．なおこの補題は，Var が無限集合であれば成り立つ．

補題 4.9.10 $a \in A_\phi$，$x \in \mathrm{Var}$，$t \in A_\epsilon$ **とすれば，**A_ϕ **の元** a' **で次の三条件をみたすものが存在する（こういう** a' **を** a **の** (x, t)**代替と呼ぶ）．**

1. $\preccurlyeq_*$ **の** $A \times A$ **への制限の対称核** $\asymp_*$ **について** $a \asymp_* a'$ **が成り立つ．**
2. a' **において** x **は** t **から自由．**
3. **上記のような普遍汎代数系** A_ϕ **における** a **と** a' **の階数は等しい．**

証明　A_ϕ における a の階数についての帰納法を使う．

まず a の階数が 0，すなわち a が素論理式の場合，問題 3.15.5 により a に現れる算号は述語記号と関数記号だけであり，従って定理 3.16.7 により a において x は t から自由であり，また補題 3.21.1 により $\asymp_*$ が同値関係であるから，a 自身が a の (x, t) 代替である．

そこで a が素論理式でないと仮定する．そうすると定理 3.8.2 により，a は $b \wedge c$，$b \vee c$，$b^\lozenge$，$b \Rightarrow c$, $\forall xb$, $\exists xb$ の何れかの語形をしており，b と c の階数は a の階数より小さい．

まず $a = b * c$，$* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ の場合，帰納法の仮定により b, c の (x, t) 代替 b', c' があり，$a' = b' * c'$ と定めれば，a' は定理 3.21.7 により条件 1 をみたし，定理 3.16.6 により条件 2 をみたし，定理 3.8.2 により条件 3 をみたす．

次に $a = b^{\Diamond}$ の場合，帰納法の仮定により b の (x,t) 代替 b' があり，$a' = b'^{\Diamond}$ と定めれば，a' は定理 3.21.7 により条件 1 をみたし，定理 3.16.6 により条件 2 をみたし，定理 3.8.2 により条件 3 をみたす．

最後に，$a = \forall y b$ なる $y \in \mathrm{Var}$ と $b \in A_\phi$ がある場合を考える（$a = \exists y b$ なる $y \in \mathrm{Var}$ と $b \in A_\phi$ がある場合も同様である）．帰納法の仮定により b の (x,t) 代替 b' があり，定理 4.8.9 により $a \asymp_* \forall y b'$ が成り立ち，定理 3.8.2 により a と $\forall y b'$ の階数は等しい．従って $\forall y b'$ の (x,t) 代替があることを示せばいい．

仮定により Var が無限集合であるから，定理 3.15.1 と定理 3.15.2 により，x, y と異なるある変数 z について，$z, \forall z, \exists z$ は t と b' に現れない．この z は b' に自由にも現れず，定理 3.16.7 により b' において y は z から自由である．従って b' は y, z に関して $b'(y/z)$ と相似であり，定理 4.8.11 により $\forall y b' \asymp_* \forall z\, b'(y/z)$ が成り立つ．また，補題 4.9.1 と定理 3.8.2 により，$\forall y b'$ と $\forall z\, b'(y/z)$ の階数は等しい．また，z が t に現れず定理 3.17.2 により $b'(y/z)$ において x が t から自由であるから，定理 3.16.6 により $\forall z\, b'(y/z)$ において x は t から自由である．以上により $\forall z\, b'(y/z)$ は $\forall y b'$ の (x,t) 代替である．

補題 4.9.11 (P,Q) **が** A_ϕ **の** $\preccurlyeq_*$ **による極大の切断で** $\{b_n \mid n \in \mathbb{O}^m\} \subseteq P$ **をみたせば，**(P,Q) **は算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関して** A_ϕ **上のブール充乖対であって，極量子について次の四法則に従う．**

1. $\forall x a \in P \implies$ **任意の** $t \in A_\epsilon$ **と** a **の任意の** (x,t) **代替** a' **に対して** $a'(x/t) \in P$
2. $\forall x a \in Q \implies$ **ある** $y \in \mathrm{Var}$ **に対して** a **において** x **は** y **から自由で** $a(x/y) \in Q$
3. $\exists x a \in P \implies$ **ある** $y \in \mathrm{Var}$ **に対して** a **において** x **は** y **から自由で** $a(x/y) \in P$
4. $\exists x a \in Q \implies$ **任意の** $t \in A_\epsilon$ **と** a **の任意の** (x,t) **代替** a' **に対して** $a'(x/t) \in Q$

証明　(P,Q) がブール充乖対であることは定理 3.22.14 による．

1. $\forall x a \in P$ と仮定し，背理法を使うために，ある $t \in A_\epsilon$ と a のある (x,t) 代替 a' が $a'(x/t) \notin P$ をみたすと仮定する．そうすると，$a \asymp_* a'$ であるから定理 4.8.9 により

$$\forall x a \preccurlyeq_* \forall x a'$$

が成り立ち，a' において x が t から自由であるから全称代入律により

$$\forall x a' \preccurlyeq_* a'(x/t)$$

が成り立ち，$(\{a'(x/t)\} \cup P, Q)$ が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断でなくて $\preccurlyeq_*$ が巾等律と置換律に従うから，$\alpha \subseteq P,\ \beta \subseteq Q$ なる $(A_\phi)^*$ の二元 α, β で

$$a'(x/t), \alpha \preccurlyeq_* \beta$$

をみたすものがある．これら三展示式に消去律を使って $\forall x a, \alpha \preccurlyeq_* \beta$ を得るが，$\forall x a \in P$ であるから，これは (P,Q) が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断であることに反する．

2. $\forall x a \in Q$ と仮定する．$\forall x a = a_n = \forall x_n a'_n$ なる $n \in \mathbb{O}^m$ があり，$x = x_n$ と $a = a'_n$ が成り立つ．また，y_n のみたす前記条件 II により a'_n において x_n は y_n から自由であった．従って $a'_n(x_n/y_n) \in Q$ を示せばいい．背理法を使うために $a'_n(x_n/y_n) \notin Q$ と仮定する．そうすると，$(P, \{a'_n(x_n/y_n)\} \cup Q)$

が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断でなくて $\preccurlyeq_*$ が巾等律と置換律に従うから，$\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる $(A_\phi)^*$ の二元 α, β で

$$\alpha \preccurlyeq_* a'_n(x_n/y_n), \beta$$

をみたすものがある．また，定理 3.21.4 により

$$a'_n(x_n/y_n),\ a'_n(x_n/y_n) \Rightarrow \forall x_n a'_n \preccurlyeq_* \forall x_n a'_n$$

が成り立つ．これら二展示式に強消去律を使って $\alpha,\ a'_n(x_n/y_n) \Rightarrow \forall x_n a'_n \preccurlyeq_* \forall x_n a'_n, \beta$ を得る．しかしこれは，$a'_n(x_n/y_n) \Rightarrow \forall x_n a'_n = b_n \in P$ かつ $\forall x_n a'_n = \forall x a \in Q$ であるから，(P, Q) が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断であることに反する．

3. $\exists x a \in P$ と仮定する．$\exists x a = a_n = \exists x_n a'_n$ なる $n \in \mathbb{O}^m$ があり，$x = x_n$ と $a = a'_n$ が成り立つ．また，y_n のみたす前記条件 II により a'_n において x_n は y_n から自由であった．従って $a'_n(x_n/y_n) \in P$ を示せばいい．背理法を使うために $a'_n(x_n/y_n) \notin P$ と仮定する．そうすると，$(\{a'_n(x_n/y_n)\} \cup P, Q)$ が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断でなくて $\preccurlyeq_*$ が巾等律と置換律に従うから，$\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる $(A_\phi)^*$ の二元 α, β で

$$a'_n(x_n/y_n), \alpha \preccurlyeq_* \beta$$

をみたすものがある．また，定理 3.21.4 により

$$\exists x_n a'_n,\ \exists x_n a'_n \Rightarrow a'_n(x_n/y_n) \preccurlyeq_* a'_n(x_n/y_n)$$

が成り立つ．これら二展示式に消去律を使って $\exists x_n a'_n, \exists x_n a'_n \Rightarrow a'_n(x_n/y_n), \alpha \preccurlyeq_* \beta$ を得る．しかしこれは，$\exists x_n a'_n = \exists x a \in P$ かつ $\exists x_n a'_n \Rightarrow a'_n(x_n/y_n) = b_n \in P$ であるから，(P, Q) が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断であることに反する．

4. $\exists x a \in Q$ と仮定し，背理法を使うために，ある $t \in A_\epsilon$ と a のある (x, t) 代替 a' が $a'(x/t) \notin Q$ をみたすと仮定する．そうすると，$a \asymp_* a'$ であるから定理 4.8.9 により

$$\exists x a' \preccurlyeq_* \exists x a$$

が成り立ち，a' において x が t から自由であるから存称代入律により

$$a'(x/t) \preccurlyeq_* \exists x a'$$

が成り立ち，$(P, \{a'(x/t)\} \cup Q)$ が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断でなくて $\preccurlyeq_*$ が巾等律と置換律に従うから，$\alpha \subseteq P$, $\beta \subseteq Q$ なる $(A_\phi)^*$ の二元 α, β で

$$\alpha \preccurlyeq_* a'(x/t), \beta$$

をみたすものがある．これら三展示式に消去律を使って $\alpha \preccurlyeq_* \exists x a, \beta$ を得るが，$\exists x a \in Q$ であるから，これは (P, Q) が A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断であることに反する．　**終**

以上の準備を使って以下定理 4.9.2 を証明する．まず補題 4.9.9 により，$(\{b_n \mid n \in \mathbb{O}^m\} \cup X, Y)$ も A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による切断である．従って定理 3.22.7 により，A_ϕ の $\preccurlyeq_*$ による極大の切断 (P, Q) で $(\{b_n \mid n \in \mathbb{O}^m\} \cup X, Y)$ を含むものがある．次に補題 4.9.11 により，(P, Q) は算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して A_ϕ 上のブール充乖対であって，補題 4.9.11 の極量子についての四法則に従う．

次に，(P, Q) を使って $\mathcal{W}$ の元 W を作る．まず W の台集合としては，A_ϵ と $\mathbb{T}$ の直和 $A_\epsilon \amalg \mathbb{T}$ をとる．次に，W を U 型代数系とする．そのためにまず，W の ϵ 部分 W_ϵ として A_ϵ をとり，ϕ 部分 W_ϕ

として $\mathbb{T}$ をとる．次に，各 n 変数関数記号 f に対して W 上の算法 $\bar{f}$ を定める $(n = 1, 2, \ldots)$．まず $\operatorname{Dom}\bar{f} = (W_\epsilon)^n$ とする．$(t_1, \ldots, t_n) \in (W_\epsilon)^n$ なら，$(t_1, \ldots, t_n) \in (A_\epsilon)^n$ であって，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は A_ϵ すなわち W_ϵ に属す．そこで，$\bar{f}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ と定める．次に，各 n 変述語記号 p に対して W 上の算法 $\overline{p}$ を定める $(n = 1, 2, \ldots)$．まず $\operatorname{Dom}\overline{p} = (W_\epsilon)^n$ とする．$(t_1, \ldots, t_n) \in (W_\epsilon)^n$ なら，$(t_1, \ldots, t_n) \in (A_\epsilon)^n$ であるから，素論理式 $p(t_1, \ldots, t_n)$ が A_ϕ に属す．そこで補題 4.9.11 により $A_\phi = P \amalg Q$ なることに留意して

$$\overline{p}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad p(t_1, \ldots, t_n) \in P \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \quad p(t_1, \ldots, t_n) \in Q \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める．最後に W 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ は，(4.2.2) と (4.2.1) をみたすように定める．これで W は $\mathcal{W}$ の元となった．W はすなわち例 4.2.2 の記号世界の一つであり，特に W_ϵ は，関数記号の全体を算号系とする代数系として，問題 3.3.11 の意味での A_ϵ の複製である．

そこで次に，$\mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \cup \mathrm{Var}$ が A_ϵ すなわち W_ϵ に含まれることに留意して，A から W への定付値 Φ と変付値 ν を，それぞれ Con と Var から W_ϵ への埋め込み写像と定める．そうすると，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ であって意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}_W}$ が定まり，任意の $t \in \mathrm{Prm}$ に対して $(\Phi^* t)\nu = t$ が成り立つ．

補題 4.9.12 任意の $t \in A_\epsilon$ に対して $(\Phi^* t)\nu = t$ が成り立つ．

証明　各 $t \in A_\epsilon$ に $(\Phi^* t)\nu \in W_\epsilon$ を対応させる写像と $A_\epsilon\ (= W_\epsilon)$ の恒等変換が，関数記号を算号とする代数系としての準写であって，A_ϵ の生成系 Prm 上では一致するからである．　終

最後に，任意の $c \in P \cup Q$ に対して次の二つのことを示そう．

$$c \in P \implies (\Phi^* c)\nu = 1 \qquad\qquad c \in Q \implies (\Phi^* c)\nu = 0$$

そうすれば，$(X, Y) \subseteq (P, Q)$ なることにより (Φ, ν) が (X, Y) の $\mathfrak{V}$ 実例となるから，定理 4.9.2 の証明が完成する．

A_ϕ が素論理式の全体を素元系とし $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}\}$ を算号系とする普遍汎代数系であることに留意して，この普遍汎代数系における c の階数についての帰納法を使う．

まず c の階数が 0，すなわち c が素論理式の場合を考える．そうすると，述語記号 p と $t_1, \ldots, t_n \in A_\epsilon$ により $c = p(t_1, \ldots, t_n)$ と表される．この場合，補題 4.9.12 により $(\Phi^* t_i)\nu = t_i\ (i = 1, \ldots, n)$，従って

$$\begin{aligned}(\Phi^* c)\nu &= \bigl(\Phi^*\bigl(p(t_1, \ldots, t_n)\bigr)\bigr)\nu = \overline{p}\bigl((\Phi^* t_1)\nu, \ldots, (\Phi^* t_n)\nu\bigr) = \overline{p}(t_1, \ldots, t_n) \\ &= \begin{cases} 1 & \cdots \quad c \in P \text{ のとき} \\ 0 & \cdots \quad c \in Q \text{ のとき} \end{cases}\end{aligned}$$

が確かに成り立つ．

そこで，c が素論理式でないと仮定する．そうすると定理 3.8.2 により，c は $a \wedge b$, $a \vee b$, $a^\Diamond$, $a \Rightarrow b$, $\forall x a$, $\exists x a$ の何れかの語形をしており，a, b の階数は c の階数より小さい．

1. $c = a \wedge b \in P$ **の場合**：補題 4.9.11 により $a, b \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = (\Phi^* b)\nu = 1$，従って $(\Phi^* c)\nu = (\Phi^* a)\nu \wedge (\Phi^* b)\nu = 1$ が成り立つ．

2. $c = a \wedge b \in Q$ **の場合**：補題 4.9.11 により $a \in Q$ または $b \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = 0$ または $(\Phi^* b)\nu = 0$，従って $(\Phi^* c)\nu = (\Phi^* a)\nu \wedge (\Phi^* b)\nu = 0$ が成り立つ．

3. $c = a \vee b \in P$ **の場合：**補題 4.9.11 により $a \in P$ または $b \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = 1$ または $(\Phi^* b)\nu = 1$，従って $(\Phi^* c)\nu = (\Phi^* a)\nu \vee (\Phi^* b)\nu = 1$ が成り立つ．

4. $c = a \vee b \in Q$ **の場合：**補題 4.9.11 により $a, b \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = (\Phi^* b)\nu = 0$，従って $(\Phi^* c)\nu = (\Phi^* a)\nu \vee (\Phi^* b)\nu = 0$ が成り立つ．

5. $c = a^\Diamond \in P$ **の場合：**補題 4.9.11 により $a \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = 0$，従って $(\Phi^* c)\nu = ((\Phi^* a)\nu)^\Diamond = 1$ が成り立つ．

6. $c = a^\Diamond \in Q$ **の場合：**補題 4.9.11 により $a \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = 1$，従って $(\Phi^* c)\nu = ((\Phi^* a)\nu)^\Diamond = 0$ が成り立つ．

7. $c = a \Rightarrow b \in P$ **の場合：**補題 4.9.11 により $a \in Q$ または $b \in P$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = 0$ または $(\Phi^* b)\nu = 1$，従って $(\Phi^* c)\nu = (\Phi^* a)\nu \Rightarrow (\Phi^* b)\nu = 1$ が成り立つ．

8. $c = a \Rightarrow b \in Q$ **の場合：**補題 4.9.11 により $a \in P$, $b \in Q$ が成り立つから，帰納法の仮定により $(\Phi^* a)\nu = 1$, $(\Phi^* b)\nu = 0$，従って $(\Phi^* c)\nu = (\Phi^* a)\nu \Rightarrow (\Phi^* b)\nu = 0$ が成り立つ．

9. $c = \forall x a \in P$ **の場合：**$W_\epsilon = A_\epsilon$ であるから，$(\Phi^* c)\nu = \big(\forall x(\Phi^* a)\big)\nu = \inf\{(\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big) \mid t \in A_\epsilon\}$ が成り立つ．従って，任意の $t \in A_\epsilon$ に対して $(\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big) = 1$ を示せばいい．補題 4.9.10 により a の (x, t) 代替 a' が存在し，補題 4.9.11 により $a'(x/t) \in P$ が成り立つ．さらに a と a' の階数が等しく，補題 4.9.1 により a' と $a'(x/t)$ の階数が等しい．従って帰納法の仮定により $\big(\Phi^* a'(x/t)\big)\nu = 1$ は成り立つ．また，a' において x が t から自由であるから，定理 4.4.2 と補題 4.9.12 により $\big(\Phi^* a'(x/t)\big)\nu = (\Phi^* a')\big((x/(\Phi^* t)\nu)\nu\big) = (\Phi^* a')\big((x/t)\nu\big)$ が成り立つ．また，$a \asymp_* a'$ であって $\preccurlyeq_*$ が $\preccurlyeq$ に含まれるから $(\Phi^* a')\big((x/t)\nu\big) = (\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big)$ が成り立つ．以上により $(\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big) = 1$ が確かに成り立つ．

10. $c = \forall x a \in Q$ **の場合：**補題 4.9.11 により，ある $y \in \mathrm{Var}$ に対して a において x が y から自由で $a(x/y) \in Q$ が成り立つ．補題 4.9.1 により a と $a(x/y)$ の階数は等しい．従って定理 4.4.2 と帰納法の仮定により，$(\Phi^* a)\big((x/(\Phi^* y)\nu)\nu\big) = \big(\Phi^* a(x/y)\big)\nu = 0$ が成り立つ．$(\Phi^* y)\nu \in W_\epsilon$ であって $(\Phi^* c)\nu = \big(\forall x(\Phi^* a)\big)\nu = \inf\{(\Phi^* a)\big((x/w)\nu\big) \mid w \in W_\epsilon\}$ であるから，$(\Phi^* c)\nu = 0$ が成り立つ．

11. $c = \exists x a \in P$ **の場合：**補題 4.9.11 により，ある $y \in \mathrm{Var}$ に対して a において x が y から自由で $a(x/y) \in P$ が成り立つ．補題 4.9.1 により a と $a(x/y)$ の階数は等しい．従って定理 4.4.2 と帰納法の仮定により，$(\Phi^* a)\big((x/(\Phi^* y)\nu)\nu\big) = \big(\Phi^* a(x/y)\big)\nu = 1$ が成り立つ．$(\Phi^* y)\nu \in W_\epsilon$ であって $(\Phi^* c)\nu = \big(\exists x(\Phi^* a)\big)\nu = \sup\{(\Phi^* a)\big((x/w)\nu\big) \mid w \in W_\epsilon\}$ であるから，$(\Phi^* c)\nu = 1$ が成り立つ．

12. $c = \exists x a \in Q$ **の場合：**$W_\epsilon = A_\epsilon$ であるから，$(\Phi^* c)\nu = \big(\exists x(\Phi^* a)\big)\nu = \sup\{(\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big) \mid t \in A_\epsilon\}$ が成り立つ．従って，任意の $t \in A_\epsilon$ に対して $(\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big) = 0$ を示せばいい．補題 4.9.10 により a の (x, t) 代替 a' が存在し，補題 4.9.11 により $a'(x/t) \in Q$ が成り立つ．さらに a と a' の階数が等しく，補題 4.9.1 により a' と $a'(x/t)$ の階数が等しい．従って帰納法の仮定により $\big(\Phi^* a'(x/t)\big)\nu = 0$ は成り立つ．また，a' において x が t から自由であるから，定理 4.4.2 と補題 4.9.12 により $\big(\Phi^* a'(x/t)\big)\nu = (\Phi^* a')\big((x/(\Phi^* t)\nu)\nu\big) = (\Phi^* a')\big((x/t)\nu\big)$ が成り立つ．また，$a \asymp_* a'$ であって $\preccurlyeq_*$ が $\preccurlyeq$ に含まれるから $(\Phi^* a')\big((x/t)\nu\big) = (\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big)$ が成り立つ．以上により $(\Phi^* a)\big((x/t)\nu\big) = 0$ が確かに成り立つ．

これで定理 4.9.2 の証明は完成した．

4.9.2　文についての完全性定理

§ ここでは，一階述語論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の定める文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ に対して前記の手順 2 を行なう．それに先立つ手順 1 は第 4.9.1.2 条と第 4.9.1.3 条で行なった．そこでの結果から次の定理が直ちに得られる．

定理 4.9.3 第 4.9.1.2 条冒頭または第 4.9.1.3 条冒頭の仮定の下で，A_ϕ 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠 (R, D) に関する生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ がブール子 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関するブール律と極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ に関するフレーゲ律に従えば，(R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．

注意 4.9.2 定理 3.25.2 により $\preccurlyeq_{R,D}$ は束律に従うから，定理 3.21.10 により，$\preccurlyeq_{R,D}$ がブール律に従うことと弱ブール律に従うことは同等である．

証明　第 4.9.1.2 条と第 4.9.1.3 条により $(\vec{R}_1, \vec{D})$ は $(A_\phi, \mathcal{F})$ の特性法則である．$(\vec{R}_1, \vec{D})$ はブール律とフレーゲ律を合わせた法則と同等である．従って定理 3.30.13 によりこの定理が成り立つ．

問題 4.9.1 第 4.9.1.2 条冒頭の仮定の下で，A_ϕ 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠 (R, D) に関する生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ がブール子 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する弱ブール律と相似代入律と極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ に関する代入全称律・代入存称律・相似全称律・相似存称律に従えば，(R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．　**終**

さて定理 4.9.3 によるなら，文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ に対して手順 2 を行なうことは，A_ϕ 上の $\mathcal{F}$ 健全な論拠 (R, D) で $\preccurlyeq_{R,D}$ がブール子 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関するブール律と極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ に関するフレーゲ律に従うものを見つけることに他ならない．以下，そういう論拠 (R, D) を一組み提示し，それにより実は，R を modus ponens に取り換えて得られる論拠が $\mathcal{F}$ 完全であることを示す．

まず，$(A_\phi)^*, A_\phi$ 間の三つの関係 $\wp, \&, \forall$ を次のように定める．$\wp$ が modus ponens である．

$$\wp = \frac{a \quad a \Rightarrow b}{b} \qquad\qquad \& = \frac{a \quad b}{a \wedge b} \qquad\qquad \forall = \frac{a}{\forall x a}$$

そして，$\wp$ と $\&$ の和を R と定める．

$$R = \wp \cup \&$$

また，定理 3.31.1 系 2 においてブール子 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ についてのブール元と名付け提示した元と次表に示す形の元（これらを極量子 $\forall x, \exists x$ $(x \in \mathrm{Var})$ に関する**フレーゲ元**と呼ぶ）の全体を E で表す．

$$\begin{array}{rl}
\forall x(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow \forall x b) & \qquad (x \text{ は } a \text{ に自由に現れない}) \\
\forall x(a^{\Diamond}) \Rightarrow (\exists x a)^{\Diamond} & \\
\forall x a \Rightarrow a(x/t) & \qquad (x \text{ は } a \text{ において } t \in A_\epsilon \text{ から自由}) \\
a(x/t) \Rightarrow \exists x a & \qquad (x \text{ は } a \text{ において } t \in A_\epsilon \text{ から自由})
\end{array}$$

そして，界 $(A_\phi, \wp \cup \& \cup \forall)$ における E の界包を D で表す．従って定理 3.24.7 により，D はこの界における E の n 圏 E_n $(n = 0, 1, \ldots)$ の直和であって，E_n は次のように帰納的に記述される．すなわちまず $E_0 = E$ である．そして $n \geq 1$ のときは，E_n は次のような元の全体である．

$$\begin{array}{cl}
b & \qquad (a \in E_{n_1},\ a \Rightarrow b \in E_{n_2},\ n_1 + n_2 = n - 1) \\
a \wedge b & \qquad (a \in E_{n_1},\ b \in E_{n_2},\ n_1 + n_2 = n - 1) \\
\forall x a & \qquad (a \in E_{n-1},\ x \in \mathrm{Var})
\end{array}$$

以上のように定めると次の定理が成り立つ．

定理 4.9.4 第 4.9.1.2 条冒頭または第 4.9.1.3 条冒頭の仮定の下で，A_ϕ 上の論拠 $(\wp, D)$ は $\mathcal{F}$ 完全であり，D は文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の核に等しい．

証明　$\wp$ と & は例 3.30.1 により $(A_\phi,\mathcal{F})$ の論理であり，従って定理 3.26.4 により R もそうである．また，$\forall$ は定理 4.8.10 により $(A_\phi,\mathcal{F})$ の弱論理である．ブール元は問題 3.31.1 と問題 3.30.38 により $(A_\phi,\mathcal{F})$ の恒真元である．フレーゲ元は定理 4.8.3 と問題 4.3.5 と定理 4.8.5 により $(A_\phi,\mathcal{F})$ の恒真元である．従って E は $(A_\phi,\mathcal{F})$ の核 C に含まれ，従ってさらに $D \subseteq C$ が成り立つ．

しばらくは $\preccurlyeq_{R,D}$ を $\preccurlyeq_*$ と略記する．そうすると，D がブール元を全て含むから，定理 3.31.2 系 2 により $\preccurlyeq_*$ はブール関係であり，これに第 3.21 節の諸定理を適用することができる．

そこで，$\preccurlyeq_*$ が全称律に従うことを示すために，$a_1\cdots a_m \preccurlyeq_* bc_1\cdots c_n$ であって $x \in \mathrm{Var}$ が $a_1,\ldots,a_m,c_1,\ldots,c_n$ に自由に現れないと仮定する．そして $a = (c_1\vee\cdots\vee c_n)^\Diamond \wedge (a_1\wedge\cdots\wedge a_m)$ と定める．そうすると，定理 3.21.2・定理 3.21.3・定理 3.21.4 により $\varepsilon \preccurlyeq_* a \Rightarrow b$，すなわち $[D]_R \ni a \Rightarrow b$ が成り立ち，D の定義により $[D]_R = D$ であって D が $\forall$ で閉じているから，さらに $D \ni \forall x(a \Rightarrow b)$ が成り立つ．他方，定理 3.16.4 により x が a に自由に現れないから，D の定義により $D \ni \forall x(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow \forall xb)$ が成り立つ．D が $\wp$ で閉じているから，結局 $D \ni a \Rightarrow \forall xb$，従って $\varepsilon \preccurlyeq_* a \Rightarrow \forall xb$ が成り立つ．従って，再び第 3.21 節の上記諸定理により $a_1\cdots a_m \preccurlyeq_* \forall xb, c_1\cdots c_n$ が成り立つ．これで $\preccurlyeq_*$ が全称律に従うことが示された．

次に，$\preccurlyeq_*$ が存称律に従うことを示すために，$ba_1\cdots a_m \preccurlyeq_* c_1\cdots c_n$ であって $x \in \mathrm{Var}$ が $a_1,\ldots,a_m,c_1,\ldots,c_n$ に自由に現れないと仮定する．そうすると，定理 3.21.3 により $a_1\cdots a_m \preccurlyeq_* b^\Diamond c_1\cdots c_n$ が成り立つから，全称律により $a_1\cdots a_m \preccurlyeq_* \forall x(b^\Diamond)c_1\cdots c_n$ が得られる．他方で D の定義により $D \ni \forall x(b^\Diamond) \Rightarrow (\exists xb)^\Diamond$，従って $\varepsilon \preccurlyeq_* \forall x(b^\Diamond) \Rightarrow (\exists xb)^\Diamond$ であるから，$\forall x(b^\Diamond) \preccurlyeq_* (\exists xb)^\Diamond$ が成り立つ．従って消去律により $a_1\cdots a_m \preccurlyeq_* (\exists xb)^\Diamond c_1\cdots c_n$ が得られ，これから再び定理 3.21.3 により $\exists xba_1\cdots a_m \preccurlyeq_* c_1\cdots c_n$ が得られる．これで $\preccurlyeq_*$ が存称律に従うことが示された．

$x \in \mathrm{Var}$ が a において $t \in A_\epsilon$ から自由であれば，D の定義により $\forall xa \Rightarrow a(x/t) \in D$，従って $\varepsilon \preccurlyeq_* \forall xa \Rightarrow a(x/t)$，従って定理 3.21.4 により $\forall xa \preccurlyeq_* a(x/t)$ が成り立つ．つまり $\preccurlyeq_*$ は全称代入律に従う．同様にして，$\preccurlyeq_*$ が存称代入律に従うことが分かる．

これで $\preccurlyeq_{R,D}$ がブール関係かつフレーゲ関係であることが示されたから，定理 4.9.3 により (R, D) は $\mathcal{F}$ 完全である．従って定理 3.28.2 により (R, D) は $\mathcal{F}$ 弱完全，すなわち $C = [D]_R$ が成り立つが，D の定義により $[D]_R = D$ であるから $C = D$ となる．従ってさらに定理 3.30.22 系により，論拠 $(\wp, D)$ が $\mathcal{F}$ 完全である．

問題 4.9.2 定理 4.9.4 において，E を A_ϕ のルカシェヴィチ元とフレーゲ元の全体として D を界 $(A_\phi, \wp\cup\forall)$ における E の界包としても，同じ結論が成り立つ．

略解　定理 3.31.2 系 2 の代わりに定理 3.31.3 を使って同様にすればいい．

4.9.3　第二種定理と実例存在定理

§ ここでは，一階述語論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$, $\mathcal{W}$ の定める文論対 $(A_\phi,\mathcal{F})$ について，定理 4.9.2 から下記の定理 4.9.5 を導く．

補題 4.9.13 a を A の素論理式とすれば，$\Phi^\nu a = 1$ をみたす $(\Phi,\nu) \in \mathfrak{V}$ も $\Phi^\nu a = 0$ をみたす $(\Phi,\nu) \in \mathfrak{V}$ も存在する．従って $\#\mathcal{F} > 1$ が成り立つ．

証明　a はある述語記号 p と $t_1,\ldots,t_n \in A_\epsilon$ によって $p(t_1,\ldots,t_n)$ と表される．W を例 4.2.2 の記号世界の任意の一つとし，p に対応する W 上の算法を $\overline{p}$ で表す．また，$\mathrm{Con}\cup\mathrm{Var} \subseteq A_\epsilon = W_\epsilon$

に留意して，$\Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Con}}$，$\nu = \mathrm{id}_{\mathrm{Var}}$ と定める．そうすると，Φ と ν は A から W への定付値と変付値であって，補題 4.9.12 と同様に，任意の $t \in A_\epsilon$ に対して $(\Phi^* t)\nu = t$ をみたす．従って

$$\Phi^\nu a = (\Phi^* a)\nu = \big(\Phi^*\big(p(t_1,\ldots,t_n)\big)\big)\nu = \overline{p}\big((\Phi^* t_1)\nu,\ldots,(\Phi^* t_n)\nu\big) = \overline{p}(t_1,\ldots,t_n)$$

が成り立つ．例 4.2.2 に注記したように $\overline{p}(t_1,\ldots,t_n) = 1$ なる記号世界も $\overline{p}(t_1,\ldots,t_n) = 0$ なる記号世界も存在するから，これでこの補題は証明された．

定理 4.9.5 $(A_\phi, \mathcal{F})$ **は第二種であり，**$(A_\phi, \mathcal{F})$ **の任意の無矛盾集合** X **に** $\mathfrak{V}$ **実例が有る．より精密には，**$W \in \mathcal{W}$ **を適当にとれば，関数記号の全体を算号系とする代数系として** A_ϵ **は** W_ϵ **の台部分系であり，**Φ **と** ν **を** Con **と** Var **の** A_ϵ **への埋め込み写像とすれば，**(Φ,ν) **が** X **の** $\mathfrak{V}$ **実例となる．**

証明　定理 4.8.2 により $(A_\phi, \mathcal{F})$ が $\mathbb{T}$ 表現論対であるから，注意 3.30.12 と補題 4.9.13 によれば，$\mathfrak{V}$ 実例についてのことだけ示せばいい．また，定理 3.30.26 により $(X, \emptyset)$ は $(A_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ による A_ϕ の切断であり，注意 4.7.2 により $(X, \emptyset)$ の $\mathfrak{V}$ 実例は X の $\mathfrak{V}$ 実例である．そこでより一般に，$\preccurlyeq$ による A_ϕ の任意の切断 (X, Y) に上記精密な意味での $\mathfrak{V}$ 実例が有ることを示そう．

第 4.7.2 項の記号法の下で例 4.7.4 により，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の正則拡大 $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}'), \mathcal{W}'$ で次の三条件をみたすものが有る．

1. $(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}'), \mathcal{W}'$ も一階述語論理系である．
2. A' は A と関数記号・述語記号を共有する．
3. $\mathrm{Var}' - \mathrm{Var}$ は無限集合であり，その濃度は，$\#\mathrm{Var}$ と $\#\mathrm{Con}'$ と A の関数記号の全体の濃度と A の述語記号の全体の濃度のいずれをも下回らない．

これら条件により，Var' は無限集合であり，その濃度は $\#(\mathrm{Var}' - \mathrm{Var})$ に等しく，これは $\#\mathrm{Con}'$ と A' の関数記号の全体の濃度と A' の述語記号の全体の濃度のいずれをも下回らない．つまり A' は第 4.9.1.3 条冒頭の仮定をみたす．

定理 4.8.2 と例 4.8.1 により，$(A', T', \sigma', \mathrm{Prm}'), \mathcal{W}'$ の定める文論対 $(A'_\phi, \mathcal{F}')$ の恒真関係 $\preccurlyeq'$ は $(\vec{R_1}, \vec{D})$ 関係（つまりブール関係かつフレーゲ関係）である．また定理 4.7.1 により，(X, Y) は $\preccurlyeq'$ による A'_ϕ の切断である．また，$X \cup Y \subseteq A = [\mathrm{Prm}]_\wedge$ かつ $\mathrm{Prm} \cap \mathrm{Var}' = \mathrm{Var}$ であるから問題 3.15.4 により，$X \cup Y$ の元に自由に現れない Var' の元の全体 $\mathrm{Var}'_{(X,Y)}$ は $\mathrm{Var}' - \mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Var}'_{(X,Y)}$ をみたし，従って $\#\mathrm{Var}'_{(X,Y)} = \#\mathrm{Var}'$ が成り立つ．従って定理 4.9.2 により，$W \in \mathcal{W}'$ を適当にとれば，関数記号の全体を算号系とする代数系として $W_\epsilon = A'_\epsilon$ であり，Φ' と ν' を Con' と Var' の W_ϵ への埋め込み写像とすれば，(Φ', ν') は (X, Y) の $\mathfrak{V}'$ 実例である．例 4.7.4 により $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$ であるから $W \in \mathcal{W}$ であり，正則拡大の条件により，関数記号の全体を算号系とする代数系として A_ϵ は W_ϵ の台部分系である．そこで，Φ と ν を Con と Var の A_ϵ への埋め込み写像とすれば，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ であり，さらに $\mathrm{Con} \subseteq \mathrm{Con}'$ かつ $\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Var}'$ であるから，$\Phi = \Phi'|_{\mathrm{Con}}$ と $\nu = \nu'|_{\mathrm{Var}}$ が成り立つ．また，定理 3.30.26 により，A_ϕ は $(A'_\phi, \mathcal{F}')$ の矛盾集合である．従って定理 4.7.1 により，(Φ, ν) が (X, Y) の $\mathfrak{V}$ 実例となる．

4.10　一般不完全性定理

\$ 引き続いて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ **を真偽** ϕ **のある論理系とする．**また，前節までに設けた定義や規約は継承する．特に，第 4.7.1 項で定めた通り，A から共通の認識対象世界への定付値と変

付値の組みの全体を $\mathfrak{V}$ で表し，$(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ が定める A_ϕ から $\mathbb{T}$ への写像 $a\mapsto(\Phi^*a)\nu$ を Φ^ν で表し，(Φ,ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての Φ^ν の全体を $\mathcal{F}$ で表す．従って $(A_\phi,\mathcal{F})$ が $(A,T,\sigma,\mathrm{Prm}),\mathcal{W},(\lambda_W)_{\lambda,W}$ の定める文論対である．

ここではゲーデルの不完全性定理を一般化する．そのためにまず $(A,T,\sigma,\mathrm{Prm}),\mathcal{W},(\lambda_W)_{\lambda,W}$ についてさらに次の三条件 a – c を仮定する．

a. **A の代数構造に属するある単項算法 $\Diamond$ に対して，$\Diamond$ は A_ϕ を定義域に含むと共に A_ϕ を閉ざし，各 $(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ に対する Φ^ν は，1 でなければ，A_ϕ 上の汎算法とみなした $\Diamond$ と $\mathbb{T}$ 上の補法に関する準写である（定理 4.8.2 と第 5.4 節参照）．**

b. **$T-\{\phi\}$ のある元 ϵ に対して，$\mathrm{Var}_\epsilon\neq\emptyset$ であり，A_ϕ の部分集合**

$$A'_\phi=\{a\in A_\phi\mid\mathrm{Fvar}^a\subseteq\mathrm{Var}_\epsilon,\ \#\mathrm{Fvar}^a\leq 1\}$$

の各元 a に A_ϵ の閉元 $\overline{a}$ を一対一に対応させる写像 $a\mapsto\overline{a}$ がある（これを A'_ϕ の<u>符号化</u>と呼び $\overline{a}$ を a の<u>符号</u>と呼ぶ）．

c. **不変子の集合 Λ' で $A_\epsilon=[\mathrm{Prm}_\epsilon]_{\Lambda'}$ と任意の $W\in\mathcal{W}$ に対して $W_\epsilon=[W_\epsilon]_{\Lambda'}$ をみたすものがある（例 4.1.2・例 4.2.2 と定理 5.1.2 参照）．**

次に，記号を定めると共に注意を幾つか述べる．まず，条件 a と定理 3.30.6 と定理 3.27.5 により，A_ϕ 上の汎算法とみなした $\Diamond$ は文論対 $(A_\phi,\mathcal{F})$ の補法である．そこで，各 $a\in A_\phi$ に算法 $\Diamond$ を施して得られる A_ϕ の元を $a^\Diamond$ で表す．次に条件 b に留意して，各 $a\in A'_\phi$ に応じて $\mathrm{Fvar}^a\subseteq\{x_a\}$ なる $x_a\in\mathrm{Var}_\epsilon$ を一つずつとる．また，各 $c\in A_\epsilon$ に対し，a に代入 (x_a/c) を施して得られる A_ϕ の元 $a(x_a/c)$ を $a(c)$ と略記する．そうすると $\bigl(a(\overline{a})\bigr)^\Diamond$ は，定理 3.17.1 系と定理 3.16.4 により閉文であり，従って A'_ϕ に属す．また，条件 c により，A_ϵ と任意の $W\in\mathcal{W}$ に対する W_ϵ は共に Λ' 代数系とみなせる．最後に，$(A_\phi,\mathcal{F})$ の論対化を $(A_\phi,\mathcal{B})$ で表し，$(A_\phi,\mathcal{B})$ の最大論理を Q で表す．

定理 4.10.1 (一般不完全性定理) A_ϕ の部分集合 X が次の二条件をみたすと仮定する．

1. **ある $W\in\mathcal{W}$ に対して，Λ' 代数系として A_ϵ は W_ϵ の台部分系であり，X の W 上の $\mathfrak{V}$ 実例 (Φ,ν) で $\Phi|_{\mathrm{Con}_\epsilon}=\mathrm{id}_{\mathrm{Con}_\epsilon}$ と $\nu|_{\mathrm{Var}_\epsilon}=\mathrm{id}_{\mathrm{Var}_\epsilon}$ をみたすものが存在する（定理 4.9.5 参照）．**

2. **条件 1 の $W\in\mathcal{W}$ 上の型関数 $O\in W_\epsilon\to W_\phi$ を各 $c\in W_\epsilon$ に対して**

$$Oc=1 \iff A'_\phi\ \text{の元}\ a\ \text{で}\ c=\overline{a}\ \text{かつ}\ \bigl(a(\overline{a})\bigr)^\Diamond\in[X]_Q\ \text{をみたすものがある}$$

と定義すれば，A'_ϕ のある元 o に対して，Φ の下での x_o に関する o の表現関数 $o^\Phi(x_o)$ が，任意の $a\in A'_\phi$ に対して $O\overline{a}=o^\Phi\overline{a}$ をみたす．

こう仮定すると，X は文論対 $(A_\phi,\mathcal{F})$ の不完全集合である．

注意 4.10.1 条件 2 のように型関数 $O\in W_\epsilon\to W_\phi$ が定義できるのは $W_\phi=\mathbb{T}$ であることによる．条件 2 は，たとえば O が Φ の下で表現可能ならみたされる．

証明　以下の 3 – 5 の三段階に分けて証明する．

3. **任意の $a\in A'_\phi$ に対して**

$$O\overline{a}=1 \iff \bigl(a(\overline{a})\bigr)^\Diamond\in[X]_Q$$

が成り立つ．

なぜなら，まず $\big(a(\overline{a})\big)^{\Diamond} \in [X]_Q$ であれば，O の定義から直ちに $O\overline{a} = 1$ が得られる．逆に $O\overline{a} = 1$ であれば，O の定義により A'_ϕ の元 b で $\overline{a} = \overline{b}$ かつ $\big(b(\overline{b})\big)^{\Diamond} \in [X]_Q$ をみたすものがあり，符号化が単射であるから $a = b$，従って $\big(a(\overline{a})\big)^{\Diamond} \in [X]_Q$ が成り立つ．

4．任意の $c \in A_\epsilon$ に対して $(\Phi^* c)\nu = c$ が成り立つ．

条件 c と条件 1 による．つまり Λ' 代数系として，A_ϵ が W_ϵ の台部分系であり，各 $c \in A_\epsilon$ に $(\Phi^* c)\nu \in W_\epsilon$ を対応させる写像と A_ϵ の W_ϵ への埋め込み写像が共に準写であって，A_ϵ の生成系 Prm_ϵ 上では一致するからである（補題 4.9.12 参照）．

5．X は $(A_\phi, \mathcal{F})$ の不完全集合である．

これを背理法で示すために，X が $(A_\phi, \mathcal{F})$ の完全集合であると仮定する．そうすると，X は $(A_\phi, \mathcal{B})$ の完全集合であるから，定理 3.27.10 により，X の $\mathcal{B}$ 実例は $[X]_Q$ に限る．他方，条件 1 により (Φ, ν) が X の $\mathfrak{V}$ 実例であるから，注意 4.7.2 や定義 3.30.1 や注意 3.30.2 により，$\{a \in A_\phi \mid (\Phi^* a)\nu = 1\}$ は X の $\mathcal{B}$ 実例である．従って

$$[X]_Q = \{a \in A_\phi \mid (\Phi^* a)\nu = 1\}$$

が成り立ち，特に任意の $a \in A'_\phi$ に対して次のことが成り立つ．

$$o(\overline{a}) \in [X]_Q \iff \big(\Phi^*\big(o(\overline{a})\big)\big)\nu = 1$$

定義により $o(\overline{a}) = o(x_o/\overline{a})$ である．また，$\overline{a}$ が閉元であるから，定理 3.16.7 により o において x_o は $\overline{a}$ から自由である．また，4 により $(\Phi^* \overline{a})\nu = \overline{a}$ が成り立ち，条件 2 により $o^{\Phi}\overline{a} = O\overline{a}$ が成り立つ．これらのことと定理 4.4.2 により次のように計算することができる．

$$\big(\Phi^*\big(o(\overline{a})\big)\big)\nu = \left(\Phi^*\left(o\left(\frac{x_o}{\overline{a}}\right)\right)\right)\nu = (\Phi^* o)\left(\left(\frac{x_o}{(\Phi^*\overline{a})\nu}\right)\nu\right) = (\Phi^* o)\left(\left(\frac{x_o}{\overline{a}}\right)\nu\right) = o^{\Phi}\overline{a} = O\overline{a}$$

以上のことと 3 により次のことが成り立つ．

$$o(\overline{a}) \in [X]_Q \iff \big(a(\overline{a})\big)^{\Diamond} \in [X]_Q$$

また，$\Diamond$ が $(A_\phi, \mathcal{F})$ の補法であるから，定理 3.27.11 により，任意の $b \in A_\phi$ に対して

$$b^{\Diamond} \in [X]_Q \iff b \notin [X]_Q$$

が成り立つ．従って結局，$o \in A'_\phi$ が任意の $a \in A'_\phi$ に対して次の条件をみたす．

$$o(\overline{a}) \in [X]_Q \iff a(\overline{a}) \notin [X]_Q$$

しかしそうすると，特に $a = o$ とすれば，$b = o(\overline{o})$ についての

$$b \in [X]_Q \iff b \notin [X]_Q$$

という矛盾に逢着する（注意 3.33.1 参照）．これでこの定理は証明された．

問題 4.10.1 定理 4.10.1 においてさらに，W 上の型関数 $P \in W_\epsilon \to W_\phi$ を各 $c \in W_\epsilon$ に対して

$$Pc = 1 \iff A'_\phi \text{ の元 } a \text{ で } c = \overline{a} \text{ かつ } a \in [X]_Q \text{ をみたすものがある}$$

と定義し，W 上の型関数 $\mathrm{N} \in W_\epsilon \to W_\epsilon$ を各 $c \in W_\epsilon$ に対して

$$\mathrm{N}c = \begin{cases} \overline{(a(\overline{a}))^\Diamond} & \cdots \quad A'_\phi \text{ の元 } a \text{ で } c = \overline{a} \text{ なるものがあるとき} \\ c & \cdots \quad A'_\phi \text{ の元 } a \text{ で } c = \overline{a} \text{ なるものがないとき} \end{cases}$$

と定義する（こう N を定義できるのは，各 $c \in A_\epsilon$ に応じ $c = \overline{a}$ なる $a \in A'_\phi$ が高々一つ存在することと，$a \in A'_\phi$ なら $\big(a(\overline{a})\big)^\Diamond \in A'_\phi$ であることによる）．このとき，任意の $a \in A'_\phi$ に対して

$$\mathrm{P}\overline{a} = 1 \iff a \in [X]_Q$$

が成り立ち，O は P と N の合成 $\mathrm{P} \circ \mathrm{N}$ に等しい．

略解　$\mathrm{N}, \mathrm{O}, \mathrm{P}$ の関係については，まず $\mathrm{O}c = 1$ のとき，A'_ϕ の元 a で $c = \overline{a}$ かつ $\big(a(\overline{a})\big)^\Diamond \in [X]_Q$ をみたすものがあるから，$\mathrm{N}c = \overline{\big(a(\overline{a})\big)^\Diamond}$ かつ $\mathrm{P}\overline{\big(a(\overline{a})\big)^\Diamond} = 1$，従って $\mathrm{P}(\mathrm{N}c) = 1$ が成り立つ．

逆に $\mathrm{P}(\mathrm{N}c) = 1$ のとき，A'_ϕ の元 b で $\mathrm{N}c = \overline{b}$ かつ $b \in [X]_Q$ をみたすものがあり，従って A'_ϕ の元 a で $c = \overline{a}$ なるものがあって $\mathrm{N}c = \overline{\big(a(\overline{a})\big)^\Diamond}$ が成り立ち，符号化が単射であるから $\big(a(\overline{a})\big)^\Diamond = b \in [X]_Q$，従って $\mathrm{O}c = 1$ が成り立つ．

注意 4.10.2 (不完全性定理の意味するもの)　すでに示唆した通り，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}, (\lambda_W)_{\lambda, W}$ が一階述語論理系や格論理系で X が文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の無矛盾集合であれば，定理 4.10.1 の前提となる条件 a – c と定理 4.10.1 中の条件 1 は，成り立つか，成り立つと仮定して差し支えないか，あるいは成り立つと期待できるものである．また，定理 4.10.1 の条件 2 は，たとえば型関数 O が Φ の下で表現可能であればみたされる．従って定理 4.10.1 は実質的には，Φ の下で O が表現可能であれば，X が文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ の不完全集合であることを示す．そして，不完全集合の意味は定理 3.27.11 や定理 3.27.12 から分かる．たとえば定理 3.27.11 によれば，$a \notin [X]_Q$ かつ $a^\Diamond \notin [X]_Q$ なる $a \in A_\phi$ が存在する．

一階述語論理系や単相格論理系については，$(A_\phi, \mathcal{F})$ に関して完全な論拠 (R, D) が見つかっており，それは $[X]_Q = [X \cup D]_R$ をみたし，そのことの意味は第 3.30.5 項で説明してある．そこでと同様に数学的理論にたとえるなら，$[X]_Q$ は X を公理系とする数学的理論に相当する．(R, D) はその数学的理論を研究する時に使う正しい推論規則と論理的真理の総体に相当する．$[X]_Q = [X \cup D]_R$ であることは，理論 $[X]_Q$ に属す任意の命題を $X \cup D$ に属す命題から推論規則系 R によって導き出す証明が存在し，また逆に，$X \cup D$ に属す命題から推論規則系 R によって導き出される命題は理論 $[X]_Q$ に属すことを意味する．また，$a^\Diamond$ は命題 a の否定命題に当たる．そうすると，$a \notin [X]_Q$ かつ $a^\Diamond \notin [X]_Q$ であることは，命題 a に対してもその否定命題 $a^\Diamond$ に対しても，$X \cup D$ に属す命題から推論規則系 R によって導き出す証明が存在しないことを意味する．そして $a^\Diamond$ を証明することは a を反証することに相当たる．

以上により定理 4.10.1 は，形式言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ に W 上のある種の型関数を表現する能力が十分にあれば，証明も反証もできない命題があることを示す．数理心理学の観点からは，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ は人脳中にあるはずの外界世界を認識・記銘するための装置の数理模型であり，(R, D) は人脳中にあるはずの推論装置の数理模型である．従って定理 4.10.1 は，外界のある種の事象を認識・記銘する能力が十分にあれば，推論によっては証明も反証もできない事柄があることを示す．なお，定理 4.10.1 の条件 2 の前提である符号化 $a \mapsto \overline{a}$ は，数理心理学の観点からは「出力の再帰的入力」という意味での自己意識に当たり（第 1.1.3 項参照），符号化が単射であることは，自己意識が明瞭であることに当たる．従って定理 4.10.1 は，明瞭な自己意識があることは，証明も反証もできない事柄があることの一因であることを示す．

以上は定理 4.10.1 の意味の解釈の一つである．定理 3.27.11 の代わりに定理 3.27.12 を使うならまた違う解釈ができ，それは数学の基礎付け（数学基礎論）の観点からは重要であろう．

第5章　単相格論理学

¢ 前章では,「形式言語」を程よく一般的な普遍型付代数系と定義し，その上の論理学について一般的に論じた．その目的は，第 3 章の代数学が論理学にどう使われるかを説明することであった．それを踏まえてこの章では，いよいよ第 1 章・第 2 章で説明した数理心理学の問題意識と構想の下で，単相格言語という名の特殊な形式言語上の論理学すなわち単相格論理学について論ずる．

第 1 章で数理心理学の基本的な考え方を説明した中で，数理心理学の当面の課題は心言語という形式言語上の論理学を研究することであると述べた．特に第 1.4.1 項において，心言語の代数構造は如何なるものかという基本問題 1 を掲げ，これに関し，心言語は普遍型付代数系であるという仮説 1 を提示した．と同時に,「普遍型付代数系」は非常に広い範囲の代数系の総称であって，基本問題 1 はこの普遍型付代数系の構造を助変数を込めて特定するよう求めているのだとも述べた．次章で定義する格言語という名の形式言語がこの問への妥当な答と期待されるものであるが，その上の論理学へ一挙に進むのは難しいので，まずこの章で，格言語の一極端である単相格言語を取り上げ，その上の論理学に習熟することを目標にする．

5.1　単相格言語

$ 第 1.4.1 項で触れたように論理学の三本柱は形式言語の文法論・意味論・演繹論であるが，この節では単相格言語の文法論を行なう．

格言語は格集合という助変数を持つ形式言語である．格集合を成す格は，心言語としての格言語においては思考機械・人間の関心の在りかを示すものであるが（第 2.1.3 項参照），仮説 2 に従って自然言語として表出するときには格助詞となる．つまり，格言語は自然言語の数理模型ではなく心言語の数理模型であって，格集合も関心を表す心理学的助変数であるが，自然言語においては格として観測される．そういう観測面を捉えて「格言語」「格集合」と名付ける．

格言語の特徴は格集合という助変数があることだけではない．格言語は，限量を表すのに変数 x を添数とする限量子 ∀x や ∃x を使わないという点でも，従来の形式言語と根本的に異なり，むしろそのことの方が格言語の顕著な特徴である．第 2.3 節で説明した通り，自然言語にある「すべて」「ある」「かなり」「ちょっと」のような数量の範囲を限る働きを持つ語を限量語と呼び，これら限量語に対応する形式言語の元を限量子と呼ぶが，格言語においては，限量子は変数を添数としない単独の記号 λ であり，しかも常に格 k を伴って λk という形を成している．限量子 λ は自然言語の多様な限量語に対応して多様に存在し，∀ や ∃ はそれらの一つに過ぎない．

「単相格言語」の「相」は「もの事と限量の種々相」に因む．つまりまずもの事には，空間に関することや，時間に関することや，者や物の他の者や物への作用や関わりに関することなどの種々相がある．そして格助詞には，そういう種々相を切り分ける働きがある．たとえば，格助詞の「に」には実に様々な働きがあって，動詞が表す動作・作用・関わりの向かう対象を示したり，動作・作用の行なわれる場所を示したり，動作・作用の行なわれる時を示したり，動作・作用・関わりの様態・程度を示したりする．次に限量については，たとえば「かなり」という一つの限量語であって

も，限量の対象が者や物であるか時間であるか空間であるかの違いによって，限られる数量の性格が違う [1]．ただし，一つの格助詞や限量語が対象の相に応じて性格を変えるというのは，言語学者的の考え方である．数理心理学者はそう考えるのではなく，心言語には種々相に応じて「に」に対応する実体が複数あるが，それらが言葉として表出するときには，人間の発声能力の限界などのために唯一つの「に」となると考える．その他の格助詞や限量語についても同様である．そうすると，格言語は自然言語の数理模型ではなく心言語の数理模型なので，格言語の格や限量子は複数の相に分かれていなければならない．しかし前記の通り，そういう複数の相のある格言語上の論理学へ一挙に進むのは難しいので，相が一つしかない格言語すなわち単相格言語をまずこの章で取り上げ，相の数が任意の格言語は次章で取り上げる．従って相という概念は，この章では登場せず次章で始めて登場する．

以上は単相格言語の文法論の特徴の概観であるが，研究の進展につれて意味論・演繹論の特徴が浮上してきている．第 4.7 節以降で説明したように論理学一般の意味論・演繹論は論対論・論拠論として抽象されるが，論対には定義 3.26.1 の三つの種別がある．この種別は，定理 3.28.6 や定理 3.30.30 が示すように，完全性や実例存在の問題と直接に関わり，これらを介して間接的に不完全性の問題と関わる（定理 4.10.1 と注意 4.10.2 参照）．定理 3.30.32 と定理 4.9.5 によれば，命題論理学と一階述語論理学に現れる論対は第二種である．しかし高岡洋介氏の定理 5.7.1 によれば，単相格論理学に現れる論対は無理の無い条件の下で第三種になることがある．

5.1.1　普遍型付代数系としての構成

§ 以下のように構成される普遍型付代数系 A を**単相格言語**と呼ぶ．

定理 3.5.1 により，A の普遍型付代数系としての構成法を述べるには，A の素元系（これを前章同様 Prm で表す）と型代数系 T および型分割写像 $\tau \in \mathrm{Prm} \to \mathsf{T}$ がどういうものかを述べればいい．

そこでまず Prm としては，空集合でない集合を任意にとって，これを二つの部分集合 Con と Var $(\neq \emptyset)$ によって直和分割しておくものとする．

$$\mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \amalg \mathrm{Var} \qquad\qquad \mathrm{Var} \neq \emptyset$$

Con と Var それぞれの元を**定数・変数**と呼ぶ．

単相格言語 A の型代数系 T の台は，空でない集合 K を一つ指定することにより定まる．この集合 K を**格集合**と呼び，K の元を**格**と呼ぶ．格集合 K には**主格**という名の特別な元 π をあらかじめ定めておくものとする．これは T の代数構造の定義において重要な役割を演ずる．

型代数系 T の台は，K の巾集合 $\mathcal{P}\mathsf{K}$ に相異なる特別な二元 δ, ε を合わせたものである．

$$\mathsf{T} = \{\delta, \varepsilon\} \amalg \mathcal{P}\mathsf{K} \qquad\qquad \delta \neq \varepsilon$$

そうすると，T には $\mathcal{P}\mathsf{K}$ の元としての空集合 $\emptyset$ が属す．これも T の代数構造の定義において重要な役割を演ずる．なお，第 4 章までは記号 ε で以て色々な集合 X 上の普遍単位半群 X^* の単位元すなわち空列を表してきたが，この記号を T の特別な元を表すのに使ったので，**以後の章では空列を空白で表すことにする．**

素元系 Prm の T 分割写像 τ は，変数系 Var の ε 部分

$$\mathrm{Var}_\varepsilon = \mathrm{Var} \cap \tau^{-1}\varepsilon$$

[1] この違いは数学的には，対象物を計量するための量系の違いと捉えられる．第 3.32.1 項参照．

が空集合でないように任意に定める．

型代数系 T の代数構造は，次に示す九種類の算法から成るものとする．

うち第二種の算法は，第 3.32.1 項で論じた意味での量系 $\mathbb{P}$ で $\#\mathbb{P} > 1$ なるものを一つ指定することにより定まる．この $\mathbb{P}$ を A の**限量系**と呼ぶ．

限量系により「限量子」が定まる．すなわち，$\mathfrak{P}$ を問題 3.9.26 の意味での $\mathbb{P}$ の区間包または偏区間包とし，

$$\neg\mathfrak{P} = \{\neg\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{P}\}$$

を $\mathfrak{P}$ の複製で $\neg\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P} = \emptyset$ なるものとし [2]，

$$\mathfrak{Q} = \neg\mathfrak{P} \cup \mathfrak{P}$$

と定め，$\mathfrak{Q}$ の元を**限量子**と呼ぶ．また，$\mathfrak{P}$ の元と $\neg\mathfrak{P}$ の元を**正の限量子・負の限量子**と呼び分ける．

なお，第一種の算法を識別表示する便宜のために，$\breve{o}$ を限量子とは異なる記号とする．また，第八種の算法の全体を $\mathfrak{F}$ で表す．ただし $\mathfrak{F} = \emptyset$ でもいい．

算法 $\breve{o}k$ $(k \in K)$**：**　これらは二項算法であって，$k \in P \in \mathcal{P}K$ なる (ε, P) に施されてこれを $\mathcal{P}K$ の元 $P - \{k\}$ に変える．

$$\mathrm{Dom}\,\breve{o}k = \{\varepsilon\} \times \{P \in \mathcal{P}K \mid k \in P\} \qquad\qquad \varepsilon\,\breve{o}k\,P = P - \{k\}$$

このように，算号 $\breve{o}k$ は真ん中に書く [3]．

算法 λk $\big((\lambda, k) \in \mathfrak{Q} \times K\big)$**：**　これらは二項算法であって，$k \in P \in \mathcal{P}K$ なる (δ, P) と (ε, P) に施されてこれらを $\mathcal{P}K$ の元 $P - \{k\}$ に変える．

$$\mathrm{Dom}\,\lambda k = \{\delta, \varepsilon\} \times \{P \in \mathcal{P}K \mid k \in P\} \qquad\qquad \delta\,\lambda k\,P = \varepsilon\,\lambda k\,P = P - \{k\}$$

このように，算号 λk も真ん中に書く．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$**：**　これら三つの算法は二項算法であって，任意の $(P, Q) \in (\mathcal{P}K)^2$ に施されてこれを $\mathcal{P}K$ の元 $P \cup Q$ に変える．

$$\mathrm{Dom}\wedge = \mathrm{Dom}\vee = \mathrm{Dom}\Rightarrow = (\mathcal{P}K)^2 \qquad\qquad P \wedge Q = P \vee Q = P \Rightarrow Q = P \cup Q$$

このように，算号 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ も真ん中に書く．

算法 $\lozenge$**：**　これは単項算法であって，任意の $P \in \mathcal{P}K$ に施されてこれを変えない．

$$\mathrm{Dom}\,\lozenge = \mathcal{P}K \qquad\qquad P^{\lozenge} = P$$

このように，算号 $\lozenge$ は右肩に付ける．

算法 $\triangle$**：**　これは単項算法であって，δ, ε に施されてこれを $\mathcal{P}K$ の元 $\{\pi\}$ に変える．

$$\mathrm{Dom}\,\triangle = \{\delta, \varepsilon\} \qquad\qquad \delta\triangle = \varepsilon\triangle = \{\pi\}$$

このように，算号 $\triangle$ は右側に付ける．

---

[2] 折り目正しく説明し直せば，$\mathfrak{P}$ の複製 $\mathfrak{P}'$ で $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{P} = \emptyset$ なるもをとると，$\mathfrak{P}$ から $\mathfrak{P}'$ への複写すなわち全単射があるから，それを記号 $\neg$ で表したのである．また，$\neg$ の逆写像も $\neg$ で表すというのが後出の (5.2.1) の意味である．

[3] 算法と算号を同一視している．以下でも同様である．

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　これらは二項算法であって，任意の $(\xi, \eta) \in \{\delta, \varepsilon\}^2$ に施されてこれを δ に変える．

$$\mathrm{Dom}\sqcap = \mathrm{Dom}\sqcup = \{\delta, \varepsilon\}^2 \qquad\qquad \xi \sqcap \eta = \xi \sqcup \eta = \delta$$

このように，算号 $\sqcap, \sqcup$ は真ん中に書く．

算法 $\square$**：**　これは単項算法であって，δ, ε に施されてこれを δ に変える．

$$\mathrm{Dom}\,\square = \{\delta, \varepsilon\} \qquad\qquad \delta^{\square} = \varepsilon^{\square} = \delta$$

このように，算号 $\square$ は右肩に付ける．

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$**：**　これらの算法 $\mathfrak{f}$ の項数はそれぞれ任意であって，それを $\mathfrak{n}$ とすれば，$\mathfrak{f}$ は ε の $\mathfrak{n}$ 個組み $(\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ に施されてこれを ε に変える（例 4.1.2 参照）．

$$\mathrm{Dom}\,\mathfrak{f} = \{\varepsilon\}^{\mathfrak{n}} \qquad\qquad \mathfrak{f}(\varepsilon, \ldots, \varepsilon) = \varepsilon$$

算号 $\mathfrak{f}$ とそれの表す算法とを**関号**と呼ぶ [4]．

算法 Ωx $(x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon})$**：**　これらは単項算法であって，$\emptyset \in \mathcal{P}K$ に施されてこれを δ に変える．

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \{\emptyset\} \qquad\qquad \emptyset\,\Omega x = \delta$$

このように，算号 Ωx は右側に書く．算号 Ωx とそれの表す算法とを**抽象子**と呼ぶ．

型代数系 T の代数構造の定義は以上の通りである．これで集合 Prm と代数系 T および写像 $\tau \in \mathrm{Prm} \to T$ を定めたから，定理 3.5.1 により，普遍型付代数系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ で $\sigma|_{\mathrm{Prm}} = \tau$ なるものが一意に定まる．こういう普遍型付代数系を**単相格言語**と呼ぶ．

単相格言語 A は以下に示すように，定義 4.1.1 の意味での形式言語とみなされる．まず，素元系 Prm が二つの部分集合 Con と Var $(\neq \emptyset)$ によって直和分割されている．次に，型代数系 T の算号系を Λ で表せば，

$$\Lambda = \{\lambda k, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \triangle, \sqcap, \sqcup, \square, \mathfrak{f}, \Omega x \mid \lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{Q},\ k \in K,\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F},\ x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon}\}$$

であるから，集合 Γ を

$$\Gamma = \{\lambda k, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \triangle, \sqcap, \sqcup, \square, \mathfrak{f}, \Omega \mid \lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{Q},\ k \in K,\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F}\}$$

と定めれば，Γ と Prm の直和 $\Gamma \amalg \mathrm{Prm}$ 上の普遍半群 $(\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^{+}$ において

$$\Lambda \subseteq \Gamma \cup \Gamma\mathrm{Var} \qquad\qquad \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} = \{\Omega x \mid x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon}\}$$

が成り立って Ωx が単項算号であるから，Γ が算号基の要件をみたす．以上により，単相格言語は $\mathrm{Prm}, T, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ を文法とする形式言語であって，その可変子は抽象子 Ωx $(x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon})$ であり，不変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma$ と修飾変数の全体 Qvar については

$$\Lambda \cap \Gamma = \{\lambda k, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \triangle, \sqcap, \sqcup, \square, \mathfrak{f} \mid \lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{Q},\ k \in K,\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F}\}$$
$$\mathrm{Qvar} = \mathrm{Var}_{\varepsilon}$$

[4]「関号」は「関数記号」の短縮形であり，一階述語論理における関数記号に因む．

が成り立つ．そこで定義 4.1.1 の後の約束に従って，T の算部分系 $T_{\wedge\cap\Gamma}$ を U で表す．また，後に $\mathcal{P}K$ ($\subseteq T$) の元 $\emptyset$ を真偽とする論理系を作るので，先回りをして A の $\emptyset$ 型の元を**文**と呼ぶ．

以後，単相格言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ に言及するときは，これを定めるのに上で使った諸々の記号は，そうでない旨断らない限り，上と同じ意味で使う．

注意 5.1.1 単相格言語の算法族 λk $\big((\lambda, k) \in \Omega \times K\big)$ の添数集合に現れる Ω は量系 $\mathbb{P}$ で決まり，量系には $\mathbb{R}_0$ のような連続の濃度を持つものもある．この例のように，単相格言語には連続の濃度の添数や助変数（合わせて**助変数等**と呼ぶ）が現れる．これはたとえば述語言語などとは著しく異なる点であり，それに違和感を覚える読者もいるであろう．しかしその違和感は,「言語」とか「記号」とかの言葉や従来の論理学に囚われて「形式言語は自然言語表現の数理模型である」の類の先入観を持っているために生ずるのではないか．

格言語は自然言語の数理模型ではない（第 1 章参照）．それは，人間の脳にあるはずの，外界のもの事を記銘するための生理的仕組み，すなわち心言語の数理模型なのである．そういう仕組みが連続の濃度の助変数等を持つとしても，何の不思議もない．他方で自然言語は，人間の発声能力の限界などのために連続の濃度の助変数等を持ち得ない．ただし,「連続の濃度の助変数等を持ち得ない」というのは，言葉という記号列を指して言ったのであり，人間の言語行動のすべてが連続の濃度の助変数等を持たないのではない．たとえば，音声の大小や高低は連続の濃度の助変数等を持ち得る．また，自然言語だけが心言語の表出なのではない．情動も心言語の表出であり，それらも連続の濃度の助変数等を持ち得る．

注意 5.1.2 型代数系 T の代数構造の定義において算号を真ん中に書くとか右肩につけるとかと規定したが，これは第 7 章で格言語を日本語に関連付ける都合上のことである．この章や第 6 章で説明する数学的内容に関する限り，算号の位置をどう規定する必要も無い．また，格言語を日本語以外の自然言語に関連付けるには，これら算号の位置の規定を変えなければならない．

5.1.2　型分割と諸元の命名

§ 単相格言語 A は T を型代数系とする型付代数系であるから，台集合が t 部分 A_t $(t \in T)$ によって分割される．そして T は，相異なる二元 δ, ε と格集合 K によって $T = \{\delta, \varepsilon\} \amalg \mathcal{P}K$ と定義されている．従って，A は次のように分割される．

$$A = A_{\{\delta,\varepsilon\}} \cup A_{\mathcal{P}K} = A_\delta \cup A_\varepsilon \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} A_P$$

$A_{\{\delta,\varepsilon\}} = A_\delta \cup A_\varepsilon$ と $A_{\mathcal{P}K} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} A_P$ それぞれの元を**体元・用元**と呼び，A_δ と A_ε それぞれの元を**複体元・単体元**と呼ぶ．これに準じて,「単体定数」「用定数」などの意味を表 5.1 のように定める．

また，体元の全体を G で表し，用元の全体を H で表す．

$$G = A_{\{\delta,\varepsilon\}} = A_\delta \cup A_\varepsilon \qquad\qquad H = A_{\mathcal{P}K} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} A_P$$

また，各用元 f の型すなわち $f \in A_P$ なる $P \in \mathcal{P}K$ を，f の**格域**とも呼び，時に K_f で表す．空集合を格域とする用元すなわち $A_\emptyset$ の元は，文に他ならない．

表 5.1: 単相格言語の型分割と命名

$A_\delta \cup A_\varepsilon$：体元	A_δ：複体元	A_ε：単体元	$A_{\mathcal{P}K}$：用元
$\mathrm{Prm}_\delta \cup \mathrm{Prm}_\varepsilon$：体素元	Prm_δ：複体素元	Prm_ε：単体素元	$\mathrm{Prm}_{\mathcal{P}K}$：用素元
$\mathrm{Con}_\delta \cup \mathrm{Con}_\varepsilon$：体定数	Con_δ：複体定数	Con_ε：単体定数	$\mathrm{Con}_{\mathcal{P}K}$：用定数
$\mathrm{Var}_\delta \cup \mathrm{Var}_\varepsilon$：体変数	Var_δ：複体変数	Var_ε：単体変数	$\mathrm{Var}_{\mathcal{P}K}$：用変数

注意．定義により $\mathrm{Prm}_x = \mathrm{Con}_x \amalg \mathrm{Var}_x$ $(x = \delta, \varepsilon, \mathcal{P}K)$ が成り立つ．

注意 5.1.3 「体元」「用元」という名は国文法における「体言」「用言」に因む．ただし言語学的の用語を使っても，この節冒頭や注意 5.1.1 に記した通り，単相格言語は自然言語そのものの数理模型ではない．また，国文法では「体言」が単独の名詞を指し「用言」が単独の動詞・形容詞・形容動詞を指すのに対し，体元は名詞節に相当し用元は用言節に相当する．ただしまた，「に相当する」というのは，正確には「として表出する」という意味である（第 1 章と第 7 章参照）．なお，藤堂明保編「学研漢和大辞典」によれば，本質を「体」と言うのに対して，働きを「用」と言う．また，「体用」は「もの事の本体とその作用」を意味する．「体言」「用言」の語源はこれであろう．

5.1.3　算法の定義域と値域

§ ここでは，今までに定義した記号や用語を使って，単相格言語 A の算法の定義域と値域について説明する．

算法 λk $(\lambda \in \{\check{o}\} \cup \Omega,\ k \in K)$**：**　これについては命題の形で述べよう．

補題 5.1.1 $a, f \in A$ **と** $k \in K$ **に対して** $a\,\check{o}k\,f$ **が定義されるためには，**a **が単体元であり，かつ** f **が用元であって** k **が** f **の格域** P **に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，**$a\,\check{o}k\,f$ **は** $P - \{k\}$ **を格域とする用元である．**

$a, f \in A$ **と** $(\lambda, k) \in \Omega \times K$ **に対して** $a\,\lambda k\,f$ **が定義されるためには，**a **が体元であり，かつ** f **が用元であって** k **が** f **の格域** P **に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，**$a\,\lambda k\,f$ **は** $P - \{k\}$ **を格域とする用元である．**

証明　σ は準写であるから，$a\,\check{o}k\,f$ が定義されるためには，$(\sigma a)\,\check{o}k\,(\sigma f)$ の定義されることが必要十分である．そのためにはまた，$\sigma a = \varepsilon$ である上に，$P = \sigma f$ と定めたときに $k \in P \in \mathcal{P}K$ なることが必要十分である．そして，この条件の下で $\sigma(a\,\check{o}k\,f) = (\sigma a)\,\check{o}k\,(\sigma f) = P - \{k\}$ が成り立つ．これで前半が証明された．後半の証明も同様である．

定理 5.1.1 $a_1, \ldots, a_n, f \in A$ **と** $(\lambda_1, k_1), \ldots, (\lambda_n, k_n) \in (\{\check{o}\} \cup \Omega) \times K$ **に対して**

$$g = a_1\,\lambda_1 k_1\,(a_2\,\lambda_2 k_2\,(\cdots (a_n\,\lambda_n k_n\,f) \cdots))$$

が定義されるためには，$\lambda_i = \check{o}$ **であるか** $\lambda_i \in \Omega$ **であるかに応じて** a_i **が単体元であるか体元であり** $(i = 1, \ldots, n)$**，かつ** f **が用元であって** $k_1, \ldots, k_n$ **が** f **の格域** P **の相異なる元であることが必要十分である．また，これらの条件の下で，**g **は** $P - \{k_1, \ldots, k_n\}$ **を格域とする用元である．**

証明　$n=1$ のときには，補題により定理は確かに成り立つ．そこで，n に関する帰納法を使う．g が定義されるためには，$h = a_2\,\lambda_2 k_2\,(\cdots(a_n\,\lambda_n k_n\,f)\cdots)$ と $a_1\,\lambda_1 k_1\,h$ が定義されることが必要十分である．帰納法の仮定により，h が定義されるためには，$\lambda_i = \breve{o}$ であるか $\lambda_i \in \mathfrak{Q}$ であるかに応じて a_i が単体元であるか体元であり $(i = 2, \ldots, n)$，かつ f が用元であって $k_2, \ldots, k_n$ が P の相異なる元であることが必要十分であり，これらの条件の下で $h \in A_{P-\{k_2,\ldots,k_n\}}$ が成り立つ．また補題により，$a_1\,\lambda_1 k_1\,h$ が定義されるためには，$\lambda_1 = \breve{o}$ であるか $\lambda_1 \in \mathfrak{Q}$ であるかに応じて a_1 が単体元または体元であって $k_1 \in P-\{k_2,\ldots,k_n\}$ であることが必要十分であり，これらの条件のもとで $a_1\,\lambda_1 k_1\,h \in A_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ が成り立つ．以上のことから，定理の結論が任意の n について成り立つことが分かる．**終**

λk 以外の算法の定義域と値域は，同様にして簡単に分かるので，証明抜きで示す．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$**：**　$f, g \in A$ と $\mu \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ に対して $f\,\mu\,g$ が定義されるためには f, g が用元であることが必要十分であり，この条件の下で $f\,\mu\,g$ も用元となり，その格域は f, g の格域の和に等しい．

算法 $\Diamond$**：**　$f \in A$ に対して $f^{\Diamond}$ が定義されるためには f が用元であることが必要十分であり，この条件の下で $f^{\Diamond}$ は f と同じ格域を持つ用元となる．

算法 $\triangle$**：**　$a \in A$ に対して $a\triangle$ が定義されるためには a が体元であることが必要十分であり，この条件の下で $a\triangle$ は $\{\pi\}$ を格域とする用元となる．

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　$a, b \in A$ と $\mu \in \{\sqcap, \sqcup\}$ に対して $a\,\mu\,b$ が定義されるためには a, b が体元であることが必要十分であり，この条件の下で $a\,\mu\,b$ は複体元となる．

算法 $\square$**：**　$a \in A$ に対して $a^{\square}$ が定義されるためには a が体元であることが必要十分であり，この条件の下で $a^{\square}$ は複体元となる．

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$**：**　$(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ に対して $\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n)$ が定義されるためには $a_1, \ldots, a_n$ が単体元で n が $\mathfrak{f}$ の T の算法としての項数に等しいことが必要十分であり，この条件の下で $\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n)$ は単体元となる．

算法 $\Omega x\ (x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$**：**　$f \in A$ に対して $f\,\Omega x$ が定義されるためには f が文であることが必要十分であり，この条件の下で $f\,\Omega x$ は複体元となる．

問題 5.1.1　H と A_P $(P \in \mathcal{P}K)$ は A の $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 部分系であり，しかも全域的である．

問題 5.1.2　G と A_δ は A の $\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 部分系であり，しかも全域的である．

定理 5.1.2　A_ε **は** A **の** $\mathfrak{F}$ **部分系であり，しかも** Prm_ε **を素元系とする普遍汎** $\mathfrak{F}$ **代数系であり，特に** $A_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$ **をみたす．**

証明　A の算法の定義域と値域について上で調べたことによる．まず，A_ε が任意の関号で閉じているから，$[\mathrm{Prm}_\varepsilon]_{\mathfrak{F}} \subseteq A_\varepsilon$ が成り立つ．次に，A の算法 α が $\alpha^{-1}A_\varepsilon \neq \emptyset$ をみたすのは α が関号のときに限り，$\mathfrak{f}$ が n 項の関号なら $\mathfrak{f}^{-1}A_\varepsilon = A_\varepsilon^n = \mathrm{Dom}\,\mathfrak{f}$ が成り立つ．従って問題 3.2.14 により $A_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$ が成り立つ．従って問題 3.8.11 により，$(A_\varepsilon, \{\varepsilon\}, \sigma|_{A_\varepsilon}, \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ は普遍型付 $\mathfrak{F}$ 代数系であり，従って問題 3.5.3 により，A_ε は Prm_ε を素元系とする普遍汎 $\mathfrak{F}$ 代数系である．

問題 5.1.3 $A_\delta - \mathrm{Prm}_\delta$ は空集合ではなく，その元は $b \sqcap c$，$b \sqcup c$，$b^\square$，$f\,\Omega x$ のいずれかの語形をしている．

略解　Prm の型分割写像 τ は $\mathrm{Var}_\varepsilon \neq \emptyset$ をみたす．$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ なら $x^\square$ は複体元である．

問題 5.1.4 $A_{\mathcal{P}K} - \mathrm{Prm}_{\mathcal{P}K}$ は空集合ではなく，その元は $a\lambda k\,f$，$f \wedge g$，$f \vee g$，$f \Rightarrow g$，$f^\Diamond$，$a\triangle$ のいずれかの語形をしている．

略解　$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ なら $x\triangle \in A_{\mathcal{P}K} - \mathrm{Prm}_{\mathcal{P}K}$ である．

5.2　単相格世界

$ 前節では単相格言語の文法論を行なった．この節以降第 5.4 節までは，単相格言語の意味論を行なう．第 1.4.2 項で触れた通り，意味論は世界論・対応論・真偽論から成る．そこでまず世界論をここで行なう．

この節を通じ，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を単相格言語とし，$K, \mathbb{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{F}$ をその格集合・限量系・限量子系・関号系とし，その他の U, δ, ε 等の記号の意味もこれまで通りとする． そして以下，A にとっての認識可能世界である**単相格世界**なるものを定義し，その構造を調べる．A は定義 4.1.1 の通りの形式言語の一種であるから，A にとっての認識可能世界とは，定義 4.2.1 で定めた通り，U 型代数系 W であって任意の $t \in \sigma\mathrm{Prm}$ に対して $W_t \neq \emptyset$ をみたすもののことを言う．A にとって認識可能な単相格世界は，そういう認識可能世界の一種である．ただし「A にとって認識可能な」は，「A の格集合・限量系・限量子系・関号系の四つ組み $K, \mathbb{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{F}$ から構成された」と同義で重要な語句であるものの，常に付けるのは煩わしいので，誤解の恐れの無い場合には省略する．

第 1.4.2 項で述べた通り如何なる論理学においても，問題意識に応じて認識可能世界の範囲を適当に限定したものを，**認識対象世界**の範囲としなければならない．そこで単相格論理学においては，認識可能世界の中の単相格世界だけを認識対象世界と考える．それは，ひとえに心理学的問題意識による．第 1.4.1 項で述べた通り，心言語の代数構造が如何なるものかという基本問題 1 は，単独で答えられるものではなく，人間にとっての認識の対象世界が如何なるものかという基本問題 4 に答えなければ答えられない問である．そして，心言語は単相格言語であるとの仮説に先立って人間の認識の対象世界と仮設されたのが単相格世界である（これら仮説・仮設は次章で修正する）．単相格世界の定義より先に単相格言語の定義を記したのは，記述上の便宜からに過ぎない．

5.2.1　台と型写像

§ 単相格言語 A にとって認識可能な単相格世界 W の台は，空でない集合 S を任意にとり，これと A の格集合 K によって

$$W = (S \to \mathbb{T}) \cup S \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} \big((P \to S) \to \mathbb{T}\big)$$

と定める．集合 S を W の**基底**と呼ぶ．また K は，A の格集合であったが，W の格集合とも呼ぶ．

なお，W の台の上記定義において空集合 $\emptyset \in \mathcal{P}K$ については，端書きに記した空集合律により

$$\emptyset \to S = \{\emptyset\}$$

従って $(\emptyset\to S)\to\mathbb{T}=\{\emptyset\}\to\mathbb{T}$ である．そこで，同じく端書きに記した一乗便法により

$$(\emptyset\to S)\to\mathbb{T}=\mathbb{T}$$

と約定する．つまり，写像 $f\in(P\to S)\to\mathbb{T}$ を $\theta\in P\to S$ に施して得られる $\mathbb{T}$ の元は当然 $f\theta$ と書くが，$P=\emptyset$ の場合には $f\in\mathbb{T}$，$\theta=\emptyset$，$f\emptyset=f$ である．こういう約定を**空集合規約**と呼ぶ．

W の型写像を定めるには，型分割 $W=\bigcup_{t\in T}W_t$ を，$W_t\neq\emptyset$ $(t\in\sigma\mathrm{Prm})$ かつ $W_\emptyset=\mathbb{T}$ なるよう定めなければならない．$W_\emptyset=\mathbb{T}$ とするのは，前述の通り後に $\emptyset$ を真偽とする論理系を作るためである．そこで，$T=\{\delta,\varepsilon\}\amalg\mathcal{P}K$ と $\delta\neq\varepsilon$ に留意して

$$W_\delta=S\to\mathbb{T}\qquad\qquad W_\varepsilon=S\qquad\qquad W_P=(P\to S)\to\mathbb{T}$$

と定める $(P\in\mathcal{P}K)$．そうすると，$\sigma\mathrm{Prm}$ の如何に関わらず

$$W_t\neq\emptyset\quad(t\in T)\qquad\qquad W_\emptyset=\mathbb{T}$$

が成り立ち，$W=(S\to\mathbb{T})\cup S\cup\bigcup_{P\in\mathcal{P}K}\big((P\to S)\to\mathbb{T}\big)$ であったから，W は次のように分割される．

$$W=W_\delta\cup W_\varepsilon\cup\bigcup_{P\in\mathcal{P}K}W_P$$

記述の便のために

$$E=W_\delta\cup W_\varepsilon\qquad\qquad F=\bigcup_{P\in\mathcal{P}K}W_P$$

と定める．そうすると次の式が成り立つ．

$$W=E\cup F$$

E と F それぞれの元を**実在・事態**と呼び [5]，W_δ と W_ε それぞれの元を**複実在・単実在**と呼ぶ．また，事態 f の型すなわち $f\in W_P$ なる $P\in\mathcal{P}K$ を，f の**枠**または**枠組み**とも呼び，時に K_f で表す．

注意 5.2.1 単相格世界 W は完備ブール束を沢山含んでいる．すなわちまず問題 3.13.16 により，$\mathbb{T}$ $(=W_\emptyset)$ は通常の順序関係 $\leq$ について完備ブール束であり，そのブール論法は

$$a\wedge b=\inf\{a,b\}\qquad a\vee b=\sup\{a,b\}\qquad a^\Diamond=1-a\qquad a\Rightarrow b=\sup\{1-a,b\}$$

をみたす．従って問題 3.13.17 または問題 3.13.18 により，$W_P=(P\to S)\to\mathbb{T}$ と $W_\delta=S\to\mathbb{T}$ も $\mathbb{T}$ の巾ブール束として完備ブール束である．そこで以降，W_P の順序関係を，いずれの P に対しても $\leq$ で表し，W_δ の順序関係を $\sqsubset$ で表す [6]．また，W_P と W_δ のいずれについても，最小元と最大元を 0 と 1 で表す．$W_\emptyset$ の 1 と 0 は W における真と偽に他ならない．

問題 3.13.9 によれば，W_P の順序関係 $\leq$ については

$$f\leq g\iff \text{任意の }\theta\in P\to S\text{ に対して }f\theta\leq g\theta$$

が成り立ち，W_δ の順序関係 $\sqsubset$ については

$$a\sqsubset b\iff \text{任意の }s\in S\text{ に対して }as\leq bs$$

が成り立つ．また問題 3.9.12 または問題 3.13.8 によれば，W_P の 0 と 1 はそれぞれ，任意の $\theta\in P\to S$ に対して $0\theta=0$ と $1\theta=1$ をみたすことで特徴付けられ，W_δ の 0 と 1 はそれぞれ，任意の $s\in S$ に対して $0s=0$ と $1s=1$ をみたすことで特徴付けられる．

[5] 記号「E」は「entity(実在)」の頭文字であり，「F」は「affairs(こと，出来事)」の「f」に因む．

[6] ここでは，第 3.9.3 項で定めた「順序関係は $\leq,\sqsubseteq$ のように下線の付いた記号で表す」という原則から外れる．

注意 5.2.2 (数学的な見方との違い) $P \in \mathcal{P}K$, $\#P = n$ とする．そうすると，$P{\to}S$ は直積 S^n と同一視され，従って $(P{\to}S){\to}\mathbb{T}$ は $S^n{\to}\mathbb{T}$ と同一視され，これは S で定義され値 $0, 1$ をとる n 変数関数の全体である．数学では，こういう同一視を前提として，様々な $P \in \mathcal{P}K$ に対する $(P{\to}S){\to}\mathbb{T}$ ではなく，$S^n{\to}\mathbb{T}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を考察するのが普通である．しかしこういう同一視をすれば，$Q \in \mathcal{P}K$ が $\#Q = n$ をみたせば，$P \neq Q$ であっても，$(Q{\to}S){\to}\mathbb{T}$ はやはり $S^n{\to}\mathbb{T}$ と同一視され，本来異なる $(P{\to}S){\to}\mathbb{T}$ と $(Q{\to}S){\to}\mathbb{T}$ とが弁別されない．それは数理心理学の観点からは妥当でないので，$S^n{\to}\mathbb{T}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ではなく，様々な $P \in \mathcal{P}K$ に対する $(P{\to}S){\to}\mathbb{T}$ を考察するのである．

5.2.2　代数構造

§ 単相格言語 A にとって認識可能な単相格世界 W の U 型代数構造を決める助変数が二つある．一つ目は基底 S 上の反射的関係 $\ni$ であり，これを S 上の**基本関係**または W の基本関係と呼ぶ．

助変数の二つ目は基底 S 上の $\mathbb{P}$ 測度であり，これを **W の測度**とも呼ぶ．S 上の $\mathbb{P}$ 測度とは，第 3.32.2 項で説明した通り，$\mathcal{P}S$ から $\mathbb{P}$ への写像 $X \mapsto |X|$ で零値律・正値律・増加律・劣加法律の四法則に従うものであり，値 $|X|$ は X の $\mathbb{P}$ 測値と呼ばれる．ただし,「$\mathbb{P}$ 測度」からも「$\mathbb{P}$ 測値」からも $\mathbb{P}$ を省略することがある．$\#\mathbb{P} > 1$ であるから，問題 3.32.30 により S 上の $\mathbb{P}$ 測度は存在する．なお $\mathbb{P}$ は，A の限量系であったが，W の限量系とも呼ぶ．

単相格世界 W の U 型代数構造を定めるための準備が三つある．その一つ目として，S 上の基本関係 $\ni$ を $(S{\to}\mathbb{T}) \cup S, S$ 間の関係にまで次のように拡張する．すなわち，$a \in S{\to}\mathbb{T}$, $b \in S$ の場合には，$a \ni b$ なることを

$$a \ni b \iff ab = 1$$

と定義する．ただし ab は，写像 $a \in S{\to}\mathbb{T}$ を $b \in S$ に施して得られる $\mathbb{T}$ の元を表す．こう拡張された関係 $\ni$ を W の**拡張関係**と呼ぶ．

準備の二つ目として，$s \in S$, $k \in P \in \mathcal{P}K$ のとき，各 $\theta \in (P - \{k\}){\to}S$ に対して，$P{\to}S$ の元 $(k/s)\theta$ を次のように定義する．

$$\big((k/s)\theta\big)x = \begin{cases} s & \cdots \quad x = k \text{ のとき} \\ \theta x & \cdots \quad x \in P - \{k\} \text{ のとき} \end{cases}$$

$P = \{k\}$ の場合には，$P - \{k\} = \emptyset$，従って空集合律により $\theta = \emptyset$ となるが，この場合は $(k/s)\theta$ を (k/s) で表すことと約定する．すなわち，(k/s) は $(k/s)k = s$ なる $\{k\}{\to}S$ の元である．こういう約定も，$(\emptyset{\to}S){\to}\mathbb{T} = \mathbb{T}$ とした先の約定と同様に**空集合規約**と呼ぶ．

準備の三つ目として，各 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ に対して

$$\neg(\neg\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \tag{5.2.1}$$

と定める．従って，$\lambda \in \mathfrak{P}$ なら $\neg\lambda \in \neg\mathfrak{P}$ であり，$\lambda \in \neg\mathfrak{P}$ なら $\neg\lambda \in \mathfrak{P}$ である．

以上の準備の下で，W の U 型代数構造を以下のように定める．その算法は，単相格言語 A の九種の算法から抽象子を除いた八種に対応する．ただし第一種と第二種の算法は，算号が似ているので，まとめて一種と扱うこともある．

算法 $\check{o}k$ $(k \in K)$**：**　これらは二項算法であって，$k \in P$ なる任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(s, f) \in S \times \big((P{\to}S){\to}\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P-\{k\})\to S\big)\to\mathbb{T}$ の元 $s\,\breve{o}k\,f$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$(s\,\breve{o}k\,f)\theta = f\big((k/s)\theta\big) \qquad\qquad \big(\theta\in(P-\{k\})\to S\big)$$

なお二つの空集合規約によれば，$P=\{k\}$ の場合のこの式は，$\mathbb{T}$ の元 $s\,\breve{o}k\,f$ を $s\,\breve{o}k\,f=f(k/s)$ と定義していることになる．

算法 λk $\big((\lambda,k)\in\mathfrak{Q}\times K\big)$**：**　これらは二項算法であって，$k\in P$ なる任意の $P\in\mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(a,f)\in\big((S\to\mathbb{T})\cup S\big)\times\big((P\to S)\to\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P-\{k\})\to S\big)\to\mathbb{T}$ の元 $a\,\lambda k\,f$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta\in(P-\{k\})\to S$ に対して

$$(a\,\lambda k\,f)\theta=1 \iff \begin{cases} \big|\big\{s\in S \mid a\ni s,\ f\big((k/s)\theta\big)=0\big\}\big|\in\neg\lambda & \cdots\quad \lambda\in\neg\mathfrak{P}\ \text{のとき} \\ \big|\big\{s\in S \mid a\ni s,\ f\big((k/s)\theta\big)=1\big\}\big|\in\lambda & \cdots\quad \lambda\in\mathfrak{P}\ \text{のとき} \end{cases} \tag{5.2.2}$$

S 上の基本関係 $\ni$ が $(S\to\mathbb{T})\cup S, S$ 間にまで拡張してあるから，この定義は可能である．なお，$f\big((k/s)\theta\big)$ は $(s\,\breve{o}k\,f)\theta$ に等しい．

算法 $\wedge,\vee,\Rightarrow$**：**　これらは二項算法であって，任意の $P,Q\in\mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(f,g)\in\big((P\to S)\to\mathbb{T}\big)\times\big((Q\to S)\to\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P\cup Q)\to S\big)\to\mathbb{T}$ の元 $f\wedge g$, $f\vee g$, $f\Rightarrow g$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$\begin{aligned}(f\wedge g)\theta &= f(\theta|_P)\wedge g(\theta|_Q)\\ (f\vee g)\theta &= f(\theta|_P)\vee g(\theta|_Q)\\ (f\Rightarrow g)\theta &= f(\theta|_P)\Rightarrow g(\theta|_Q)\end{aligned} \qquad\qquad \big(\theta\in(P\cup Q)\to S\big)$$

空集合律と空集合規約により，上の定義式で $P=\emptyset$ の場合には $f(\theta|_P)=f$ であり，$Q=\emptyset$ の場合の $\theta|_Q$ と $P\cup Q=\emptyset$ の場合の θ についても同様である．従って，これらの式は $f,g\in(\emptyset\to S)\to\mathbb{T}=\mathbb{T}$ に対しては $f\wedge g=\inf\{f,g\}$, $f\vee g=\sup\{f,g\}$, $f\Rightarrow g=\sup\{1-f,g\}$ と定義していることになり，これはブール束 $\mathbb{T}$ の交法・結法・導法の三算法の定義と一致する．

算法 $\Diamond$**：**　これは単項算法であって，任意の $P\in\mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$f\in(P\to S)\to\mathbb{T}$$

に施されて $(P\to S)\to\mathbb{T}$ の元 $f^\Diamond$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$(f^\Diamond)\theta=(f\theta)^\Diamond \qquad\qquad (\theta\in P\to S)$$

ただし空集合律と空集合規約によれば，この式は $f\in(\emptyset\to S)\to\mathbb{T}=\mathbb{T}$ に対しては $f^\Diamond=1-f$ と定義していることになり，これはブール束 $\mathbb{T}$ の補法 $\Diamond$ の定義と一致する．

算法 $\triangle$：　これは単項算法であって，任意の

$$a \in (S{\to}\mathbb{T}) \cup S$$

に施されて $(\{\pi\}{\to}S){\to}\mathbb{T}$ の元 $a\triangle$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta \in \{\pi\}{\to}S$ に対して

$$(a\triangle)\theta = 1 \iff a \ni \theta\pi$$

S 上の基本関係 $\ni$ が $(S{\to}\mathbb{T}) \cup S, S$ 間にまで拡張してあるから，この定義は可能である．

算法 $\sqcap, \sqcup$：　これらは二項算法であって，任意の

$$(a, b) \in \big((S{\to}\mathbb{T}) \cup S\big)^2$$

に施されて $S{\to}\mathbb{T}$ の元 $a \sqcap b$，$a \sqcup b$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$\begin{aligned} a \sqcap b \ni s &\iff a \ni s \text{ かつ } b \ni s \\ a \sqcup b \ni s &\iff a \ni s \text{ または } b \ni s \end{aligned} \qquad (s \in S)$$

これで $a \sqcap b$，$a \sqcup b$ が定まるのは，S 上の基本関係 $\ni$ が $(S{\to}\mathbb{T}) \cup S, S$ 間にまで拡張してあって $c \in S{\to}\mathbb{T}$，$s \in S$ に対しては「$cs = 1 \iff c \ni s$」が成り立つからである．

算法 $\square$：　これは単項算法であって，任意の

$$a \in (S{\to}\mathbb{T}) \cup S$$

に施されて $S{\to}\mathbb{T}$ の元 $a^{\square}$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$a^{\square} \ni s \iff a \not\ni s \qquad (s \in S)$$

これで $a^{\square}$ が定まるのは，$a \sqcap b$，$a \sqcup b$ が定まるのと同じ理由からである．

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$：　これらはそれぞれ，T の算法としての項数と同じ項数を持ち，それが n なら，任意の

$$(s_1, \ldots, s_n) \in S^n$$

に施されて S の元 $\mathfrak{f}(s_1, \ldots, s_n)$ を生ずる．その定義は任意とする（例 4.2.2 参照）．

　W の U 型代数構造は以上の通りである．これら算法の定義域と値域について第 5.1.3 項と同じ形式でまとめれば以下のようになる．

算法 $\check{o}k$ $(k \in K)$：　$s, f \in W$ と $k \in K$ に対して $s\,\check{o}k\,f$ が定義されるためには，s が単実在であり，かつ f が事態であって k が f の枠 P に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，$s\,\check{o}k\,f$ は $P - \{k\}$ を枠とする事態である．

算法 λk $\big((\lambda, k) \in \mathfrak{Q} \times K\big)$：　$a, f \in W$ と $(\lambda, k) \in \mathfrak{Q} \times K$ に対して $a\,\lambda k\,f$ が定義されるためには，a が実在であり，かつ f が事態であって k が f の枠 P に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，$a\,\lambda k\,f$ は $P - \{k\}$ を枠とする事態である．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$**：**　$f, g \in W$ と $\mu \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ に対して $f\,\mu\,g$ が定義されるためには f, g が事態であることが必要十分であり，この条件の下で $f\,\mu\,g$ も事態となり，その枠は f, g の枠の和に等しい．

算法 $\Diamond$**：**　$f \in W$ に対して $f^{\Diamond}$ が定義されるためには f が事態であることが必要十分であり，この条件の下で $f^{\Diamond}$ は f と同じ枠を持つ事態となる．

算法 $\triangle$**：**　$a \in W$ に対して $a\triangle$ が定義されるためには a が実在であることが必要十分であり，この条件の下で $a\triangle$ は $\{\pi\}$ を枠とする事態となる．

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　$a, b \in W$ と $\mu \in \{\sqcap, \sqcup\}$ に対して $a\,\mu\,b$ が定義されるためには a, b が実在であることが必要十分であり，この条件の下で $a\,\mu\,b$ は複実在となる．

算法 $\Box$**：**　$a \in W$ に対して $a^{\Box}$ が定義されるためには a が実在であることが必要十分であり，この条件の下で $a^{\Box}$ は複実在となる．

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$**：**　$(s_1, \ldots, s_n) \in W^n$ に対して $\mathfrak{f}(s_1, \ldots, s_n)$ が定義されるためには $s_1, \ldots, s_n$ が単実在で n が $\mathfrak{f}$ の項数であることが必要十分であり，この条件の下で $\mathfrak{f}(s_1, \ldots, s_n)$ は単実在となる．

以上のまとめは，W が実際に U 型代数系となったことを示している．そして $W_t \neq \emptyset$ $(t \in T)$ であったから，W は単相格言語 A にとっての認識可能世界となる．こうして出来る認識可能世界を A にとって認識可能な**単相格世界**と呼び，それらだけを A にとっての認識対象世界と考える．

注意 5.2.3 以上の説明によれば，A にとって認識可能な単相格世界 W を作るには，次の三手順を踏むことが必要かつ十分である．

手順 1. T の算部分系 $T_{\mathfrak{F}}$ と同類の汎代数系 S $(\neq \emptyset)$ をとる．

手順 2. S 上の反射的な関係 $\ni$ を定める．

手順 3. S 上の $\mathbb{P}$ 測度 $|X|$ を定める．

この順番通りでなくてもいいがこれだけの手順を踏めば，S を基底とし $\ni$ を基本関係とし $|X|$ を測度として A にとって認識可能な単相格世界 W が出来る．第 5.1.3 項により A_ε が $\mathfrak{F}$ 代数系として $T_{\mathfrak{F}}$ と同類の汎代数系であるから，手順 1 において S として，たとえば A_ε の台部分系や問題 3.12.4 の意味での台拡大をとることができる．

以降この節の終わりまで，いま構成した単相格世界 W の U 型代数構造について敷衍する．その際，**記号** $S, \ni$ **等をこれまで通りの意味で使う．**

問題 5.2.1 $a_1, \ldots, a_n, f \in W$ と $(\lambda_1, k_1), \ldots, (\lambda_n, k_n) \in (\{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q}) \times K$ に対して

$$g = a_1\,\lambda_1 k_1\,(a_2\,\lambda_2 k_2\,(\cdots\,(a_n\,\lambda_n k_n\,f)\cdots))$$

が定義されるためには，$\lambda_i = \breve{o}$ であるか $\lambda_i \in \mathfrak{Q}$ であるかに応じて a_i が単実在または実在であり $(i = 1, \ldots, n)$，かつ f が事態であって $k_1, \ldots, k_n$ が f の枠 P の相異なる元であることが必要十分である．また，これらの条件の下で，g は $P - \{k_1, \ldots, k_n\}$ を枠とする事態である

略解　補題 5.1.1 の代わりに算法 λk の定義を使う以外は，定理 5.1.1 の証明と同様にする．

問題 5.2.2 F と W_{P} $(\mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K})$ は，W の $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 部分系であって $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 代数系として全域的である．

問題 5.2.3 任意の $f, g \in \mathrm{F}$ について $f \Rightarrow g = f^{\Diamond} \vee g$ が成り立つ．また，W 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ を W_{P} $(\mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K})$ に制限したものは，巾ブール束 $(\mathrm{P}{\to}\mathrm{S}){\to}\mathbb{T}$ としての W_{P} のブール論法に等しい．また，各 $\theta \in \mathrm{P}{\to}\mathrm{S}$ の定める射影 $\mathrm{pr}_{\theta} \in W_{\mathrm{P}}{\to}\mathbb{T}$ は，$\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写である．

問題 5.2.4 E と W_{δ} は，W の $\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 部分系であって $\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 代数系として全域的である．

問題 5.2.5 W 上の算法 $\sqcap, \sqcup, \square$ を W_{δ} に制限したものは，巾ブール束 $\mathrm{S}{\to}\mathbb{T}$ としての W_{δ} のブール算法に他ならない．

略解　任意の $a, b \in W_{\delta}$ と $s \in \mathrm{S}$ について $(a \sqcap b)s = as \wedge bs$ であることは，次の推論で示される．

$$
\begin{aligned}
(a \sqcap b)s = 1 &\iff a \sqcap b \ni s \iff a \ni s \text{ かつ } b \ni s \\
&\iff as = 1 \text{ かつ } bs = 1 \iff as \wedge bs = 1
\end{aligned}
$$

注意 5.2.4 基底 S 上の基本関係 $\ni$ は反射的であるとしたが，この条件を取り除いても，この章はほとんど影響を受けない．また，この条件無しの理論にも価値があると思われる．そこで以後，反射律をなるべく使わないよう心掛けると共に，反射律を使う場所（それは「反射」を画面検索すれば分かる）では，その旨を明示する．基底 S は世界を構成する最も基本的な物の全体に当たり，S の元 a, b について $a \ni b$ が成り立つことは，それら基本物についての，自然言語でなら「b は a だ」と表される事態が実際に成り立つことに当たる．従って，基本関係 $\ni$ が反射律 $a \ni a$ に従うと仮定することは，世界において「a は a だ」という事態が必ず成り立つと考えることに当たる．他方で公理的集合論においては，Zermelo-Fraenkel の公理系から，どの集合 a も $a \ni a$ をみたさないことが導かれる．つまり集合については,「a は a に属す」という事態は成り立たない．従って，基本関係 $\ni$ が反射律 $a \ni a$ に従うと仮定することは，物についての「b は a だ」という事態が集合についての「b は a に属す」という事態と異なると考えることを意味する（第 2.5.1 項参照）．

5.2.3　実在列間の擬ブール関係

§ 単相格世界 W の実在の集合 $\mathrm{E} = W_{\delta} \cup W_{\varepsilon} = W_{\delta} \cup \mathrm{S}$ の構造を調べる．

まず問題 5.2.4 により E と W_{δ} は汎 $\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 代数系とみなせて，問題 5.2.5 により W_{δ} $(= \mathrm{S}{\to}\mathbb{T})$ は，$\sqcap, \sqcup, \square$ をブール算法とするブール束である．次に，E 上の関係 $a \sqsubseteq b$ を

$$
a \sqsubseteq b \iff \text{任意の } s \in \mathrm{S} \text{ に対して「} a \ni s \implies b \ni s \text{」} \tag{5.2.3}
$$

と定義する．そうすると問題 3.9.54 により，$\sqsubseteq$ は擬順序関係になる．従って，E 上の関係 $\equiv$ を

$$
\begin{aligned}
a \equiv b &\iff a \sqsubseteq b \text{ かつ } a \sqsupseteq b \\
&\iff \text{任意の } s \in \mathrm{S} \text{ に対して「} a \ni s \iff b \ni s \text{」}
\end{aligned}
$$

と定義すれば（$\sqsupseteq$ は $\sqsubseteq$ の双対関係を表す），問題 3.9.55 により $\equiv$ は同値関係になる．

問題 5.2.6 E 上の関係 $\sqsubseteq$ を W_δ に制限したものは，巾ブール束 $S{\to}\mathbb{T}$ としての W_δ 上の順序関係 $\sqsubset$ と一致する．従って，E 上の関係 $\equiv$ を W_δ に制限したものは，W_δ の相等関係 $=$ と一致する．関係 $\equiv$ はまた，W 上の算法 $\sqcap, \sqcup, \square$ を E に制限したものと両立する．また, W_δ の最小元 0 と最大元 1 とは，任意の $a \in E$ に対して $0 \sqsubseteq a$ と $a \sqsubseteq 1$ とをみたす.

略解　任意の $a, b \in W_\delta$ に対し次のように推論することができる.

$$
\begin{aligned}
a \sqsubseteq b &\iff as = 1 \text{ なる任意の } s \in S \text{ に対して } bs = 1\\
&\iff \text{任意の } s \in S \text{ に対して } as \leq bs\\
&\iff a \sqsubset b && \text{(注意 5.2.1 による)}
\end{aligned}
$$

また，$a, a', b, b' \in E$ が $a \equiv a'$，$b \equiv b'$ をみたせば，任意の $s \in S$ に対して

$$
\begin{aligned}
a \sqcap b \ni s &\iff a \ni s \text{ かつ } b \ni s\\
&\iff a' \ni s \text{ かつ } b' \ni s \iff a' \sqcap b' \ni s
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$a \sqcap b \equiv a' \sqcap b'$ が成り立つ．注意 5.2.1 により任意の $s \in S$ に対して $0s = 0$ と $1s = 1$，すなわち $0 \not\ni s$ と $1 \ni s$ が成り立つ．これから最後の結論が得られる． 終

各 $a \in E$ に対して，$a^\natural \in W_\delta$ を次のように定めることができる.

$$
a^\natural \ni s \iff a \ni s \qquad (s \in S)
$$

この $a^\natural$ を a の**複実在化**または**複化**と呼ぶ．各 $a \in E$ に $a^\natural \in W_\delta$ を対応させる写像を $\natural$ で表す.

問題 5.2.7 写像 $\natural$ は，$a^\natural \equiv a$ と「$a \sqsubseteq b \iff a^\natural \sqsubset b^\natural$」をみたし，$\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 代数系としての準写かつ全射であり，$a \in W_\delta$ については $a^\natural = a$ をみたす.

略解　関係 $\equiv$ と写像 $\natural$ の定義により $a^\natural \equiv a$ が成り立つ．特に $a \in W_\delta$ なら，問題 5.2.6 により $a^\natural = a$ が成り立つ．従って写像 $\natural$ は全射である．また，$a \sqsubseteq b$ なら $a^\natural \sqsubseteq a \sqsubseteq b \sqsubseteq b^\natural$ より $a^\natural \sqsubset b^\natural$ となり，$a^\natural \sqsubset b^\natural$ なら $a \sqsubseteq a^\natural \sqsubseteq b^\natural \sqsubseteq b$ より $a \sqsubseteq b$ となる．また，問題 5.2.6 により $\equiv$ が算法 $\sqcap$ と両立するから $(a \sqcap b)^\natural \equiv a \sqcap b \equiv a^\natural \sqcap b^\natural$ となり，$(a \sqcap b)^\natural$，$a^\natural \sqcap b^\natural \in W_\delta$ であるから $(a \sqcap b)^\natural = a^\natural \sqcap b^\natural$ が成り立つ

注意 5.2.5 実は $(a \sqcap b)^\natural = a \sqcap b = a^\natural \sqcap b^\natural$，$(a \sqcup b)^\natural = a \sqcup b = a^\natural \sqcup b^\natural$，$(a^\square)^\natural = a^\square = (a^\natural)^\square$ が成り立つが，問題 5.2.17 参照.

問題 5.2.8 $a \in E$, $\lambda \in \mathfrak{Q}$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$ のとき，$a\,\lambda k\, f = a^\natural\, \lambda k\, f$ が成り立つ.

略解　$\{s \in S \mid a \ni s\} = \{s \in S \mid a^\natural \ni s\}$ が成り立つからである． 終

W_δ は束であるから，W_δ の任意の有限部分集合に W_δ 上の順序関係 $\sqsubset$ に関する下限と上限がある．そこで，E の元の列 $a_1 \cdots a_m$ と $b_1 \cdots b_n$ が

$$
\inf\nolimits_{W_\delta}\{{a_1}^\natural, \dots, {a_m}^\natural\} \sqsubset \sup\nolimits_{W_\delta}\{{b_1}^\natural, \dots, {b_n}^\natural\} \tag{5.2.4}
$$

をみたすことを次のように表す.

$$
a_1 \cdots a_m \sqsubseteq b_1 \cdots b_n \tag{5.2.5}
$$

そうするとこの $\sqsubseteq$ は，普遍単位半群 $E^* = \bigcup_{n\geq 0} E^n$ 上の関係とみなせる．なお (5.2.4) において，$m = 0$ の場合の左辺と $n = 0$ の場合の右辺は，第 3.9.3 項の下限・上限の定義により，それぞれ W_δ の最大元と最小元に等しい．またこれらの場合，(5.2.5) の左辺または右辺は空列であるが，空列は第 5.1.1 項で述べた通り空白で表す．

三つ組み $(E, W_\delta, \natural)$ は束写系であり，E^* 上の関係 $\sqsubseteq$ は $\natural$ 真関係に等しい．しかも，W_δ は $\sqcap, \sqcup, \square$ をブール算法とするブール束であり，問題 5.2.7 により $\natural$ は $\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 準写（すなわち擬ブール表現）かつ全射である．従って，第 3.19 節と第 3.21 節の定理等を $E, W_\delta, \natural$ に適用して，E^* 上の関係 $\sqsubseteq$ と E 上での算法 $\sqcap, \sqcup, \square$ について色々なことを知ることができる．特に次のことが分かる．

定理 5.2.1 E^* **上の関係** $\sqsubseteq$ **は，**W **上の算法** $\sqcap, \sqcup, \square$ **を** E **に制限したものについて擬ブール関係であり，**E **上の擬順序関係** $\sqsubseteq$ **の最大束拡張である．**

証明　前半は定理 3.19.6 による．問題 5.2.7 により E 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ は W_δ 上の順序関係 $\sqsubset$ の $\natural$ による引き戻しなので，定理 3.19.8 系により後半が成り立つ．

注意 5.2.6 W の事態間に $f \Rightarrow g$ $(= f^\lozenge \vee g)$ なる算法を定義したと同様に W の実在間にも $a \Rightarrow b$ $(= a^\square \sqcup b)$ なる算法を定義してあれば，E^* 上の関係 $\sqsubseteq$ は擬ブール関係であるだけでなく，算法 $\sqcap, \sqcup, \square, \Rightarrow$ についてブール関係となる（定理 5.2.2 参照）．しかし，W の実在間には $a \Rightarrow b$ なる算法を定義せず，それに呼応して単相格言語についても，体元間には $a \Rightarrow b$ なる算法を定義しなかった．それはひとえに心理学的問題意識による．事態と違って実在については，人間は $a \Rightarrow b$ なるものを取り立てて言語的認識の対象としていないと考えられるからである．

問題 5.2.9 W 上の算法 $\sqcap, \sqcup, \square$ は次の法則に従う．ただし，結合律の等式の左辺と可換律の等式の両辺で算法 $\sqcap, \sqcup$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意であり，可換律における ρ は n 次の任意の置換である（重補律だけ等式ではなく $\equiv$ 式であることに注意）．

$$\left.\begin{aligned} a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_n &= (\cdots (a_1 \sqcap a_2) \sqcap \cdots) \sqcap a_n \\ a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n &= (\cdots (a_1 \sqcup a_2) \sqcup \cdots) \sqcup a_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(結合律)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{\rho 1} \sqcap \cdots \sqcap a_{\rho n} &= a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_n \\ a_{\rho 1} \sqcup \cdots \sqcup a_{\rho n} &= a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(可換律)}$$

$$\left.\begin{aligned} (a \sqcap b)^\square &= a^\square \sqcup b^\square \\ (a \sqcup b)^\square &= a^\square \sqcap b^\square \end{aligned}\right\} \qquad \text{(双対律)}$$

$$(a^\square)^\square \equiv a \qquad \text{(重補律)}$$

略解　定理 3.21.2，問題 3.21.4，定理 3.21.3，問題 5.2.6 による．

問題 5.2.10 $a \in E$ とし $0, 1$ を W_δ の最小元と最大元とする．このとき，E^* 上の関係 $\sqsubseteq$ について $a \sqsubseteq$ なるためには $a = 0$ なることが必要十分であり，$a \sqsupseteq$ なるためには $a \equiv 1$ なることが必要十分である．特に $a \in W_\delta$ の場合には，$a \sqsupseteq$ なるためには $a = 1$ なることが必要十分である．

略解　定理 5.2.1 と最大束拡張の定義により，$a \sqsubseteq$ なるためには，任意の $b \in E$ に対して $a \sqsubseteq b$ なることが必要十分であり，特に $a \sqsubseteq 0$ なることが必要である．問題 5.2.6 により任意の $b \in E$ に対して $0 \sqsubseteq b$ が成り立つから，$a \sqsubseteq 0$ であれば $a \equiv 0$ が成り立ち，さらに S 上の基本関係 $\ni$ が反射的であるから $a \in W_\delta$，従って $a = 0$ が成り立つ．

問題 5.2.11 任意の $a, b \in E$ について次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(a \sqcap b)\triangle = a\triangle \wedge b\triangle && a \sqsubseteq b \iff a\triangle \leq b\triangle \\
&(a \sqcup b)\triangle = a\triangle \vee b\triangle && a \equiv b \iff a\triangle = b\triangle \\
&(a^{\square})\triangle = (a\triangle)^{\lozenge}
\end{aligned}
$$

W_δ の各元 a に $a\triangle \in W_{\{\pi\}}$ を対応させる写像はブール束としての同写であり，特に W_δ の最小元 0 と最大元 1 に対し，$0\triangle$ と $1\triangle$ はそれぞれ，$W_{\{\pi\}}$ の最小元 0 と最大元 1 に等しい．

略解　$(a \sqcap b)\triangle = a\triangle \wedge b\triangle$ であることは，任意の $\theta \in \{\pi\}\to S$ をとっての次の推論で示される．

$$
\begin{aligned}
&\big((a \sqcap b)\triangle\big)\theta = 1 \iff a \sqcap b \ni \theta\pi \iff a \ni \theta\pi \text{ かつ } b \ni \theta\pi \\
&\quad \iff (a\triangle)\theta = 1 \text{ かつ } (b\triangle)\theta = 1 \iff (a\triangle)\theta \wedge (b\triangle)\theta = 1 \iff (a\triangle \wedge b\triangle)\theta = 1
\end{aligned}
$$

問題 5.2.12 E の元の列 $a_1, \ldots, a_m$ と $b_1, \ldots, b_n$ が (5.2.5) をみたすためには，ブール束 $W_{\{\pi\}}$ において $\inf\{a_1\triangle, \ldots, a_m\triangle\} \leq \sup\{b_1\triangle, \ldots, b_n\triangle\}$ をみたすことも必要十分である．

略解　E 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ は，W_δ 上の順序関係 $\sqsubset$ の写像 $\natural$ による引き戻しであると共に，問題 5.2.11 により，$W_{\{\pi\}}$ 上の順序関係 $\leq$ の写像 $a \mapsto a\triangle$ による引き戻しにも等しい．そこで問題 3.19.19 を使う．

問題 5.2.13 E の元の列 $a_1, \ldots, a_m$ と $b_1, \ldots, b_n$ が (5.2.5) をみたすためには，$a_1{}^\natural \cdots a_m{}^\natural \sqsubseteq b_1{}^\natural \cdots b_n{}^\natural$ をみたすことが必要十分である．

5.2.4　事態列間のブール関係

§ 前項では単相格世界 W の実在の集合 E に対し E^* 上に出来る擬ブール関係について説明した．それと同様のものが W の事態の集合 $F = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} W_P$ に対しても出来ることをここで説明しよう．

まず問題 5.2.2 により F と W_P は汎 $\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow\}$ 代数系とみなせて，問題 5.2.3 により W_P $\big(= (P\to S)\to\mathbb{T}\big)$ は，$\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ をブール論法とするブール束である ($P \in \mathcal{P}K$)．次に，F 上の関係 $f \lessdot g$ を次のように定義する．すなわち，$f \in W_P$，$g \in W_Q$ のとき，

$$
f \lessdot g \iff \text{任意の } \theta \in (P \cup Q)\to S \text{ に対して } f(\theta|_P) \leq g(\theta|_Q) \tag{5.2.6}
$$

ただし，右辺の $\leq$ は $\mathbb{T}$ 上の通常の順序関係を表す．また，$P = \emptyset$ あるいは $Q = \emptyset$ の場合には，空集合規約により $\theta|_P$ あるいは $\theta|_Q$ は無いものとみなしていい．

問題 5.2.14 $f \in W_P$，$g \in W_Q$ が $f \lessdot g$ をみたすためには，次の三条件のいずれも必要十分である．

1. $P \cup Q \subseteq R \in \mathcal{P}K$ なる任意の R と任意の $\theta \in R\to S$ に対して $f(\theta|_P) \leq g(\theta|_Q)$ が成り立つ．
2. $P \cup Q \subseteq R \in \mathcal{P}K$ なるある R と任意の $\theta \in R\to S$ に対して $f(\theta|_P) \leq g(\theta|_Q)$ が成り立つ．
3. $f(\theta|_P) = 1$ なる任意の $\theta \in K\to S$ に対して $g(\theta|_Q) = 1$ が成り立つ．

略解　$f \lessdot g$ なる条件の番号を 0 とする．

(0 $\Longrightarrow$ 1) $\theta' = \theta|_{P \cup Q}$ と定めれば，$\theta' \in (P \cup Q) {\to} S$ かつ $\theta|_P = \theta'|_P$，$\theta|_Q = \theta'|_Q$ だからである．

(2 $\Longrightarrow$ 0) 任意の $\theta' \in (P \cup Q) {\to} S$ が $\theta \in R {\to} S$ に拡張されて $\theta|_P = \theta'|_P$，$\theta|_Q = \theta'|_Q$ が成り立つからである．

(1 $\Longrightarrow$ 3 $\Longrightarrow$ 2) 条件 3 が「任意の $\theta \in K {\to} S$ に対して $f(\theta|_P) \le g(\theta|_Q)$ が成り立つ」という条件と同等だからである．　**終**

$f \in F$ と $\theta \in K {\to} S$ が f の枠 P に対して $f(\theta|_P) = 1$ をみたすことを $f \ni_K \theta$ で表せば，$\ni_K$ は F, $K {\to} S$ 間の関係であって，問題 5.2.14 により任意の $f, g \in F$ について

$$f \lessdot g \iff f \ni_K \theta \text{ なる任意の } \theta \in K {\to} S \text{ に対して } g \ni_K \theta$$

が成り立つから，問題 3.9.54 により $\lessdot$ は擬順序関係である．従って，F 上の関係 $f \doteq g$ を

$$\begin{aligned} f \doteq g &\iff f \lessdot g \text{ かつ } f \gtrdot g \\ &\iff \text{任意の } \theta \in K {\to} S \text{ に対して「} f \ni_K \theta \iff g \ni_K \theta \text{」} \\ &\iff \text{任意の } \theta \in K {\to} S \text{ に対して } f(\theta|_{K_f}) = g(\theta|_{K_g}) \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

と定義すれば（$\gtrdot$ は $\lessdot$ の双対関係を表す），問題 3.9.55 により $\doteq$ は同値関係になる．

問題 5.2.15　$f, g \in F$ と $\theta \in K {\to} S$ に対して次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \ni_K \theta &\iff f \ni_K \theta \text{ かつ } g \ni_K \theta \\ (f \vee g) \ni_K \theta &\iff f \ni_K \theta \text{ または } g \ni_K \theta \\ (f \Rightarrow g) \ni_K \theta &\iff f \not\ni_K \theta \text{ または } g \ni_K \theta \\ (f^{\Diamond}) \ni_K \theta &\iff f \not\ni_K \theta \end{aligned}$$

略解　f, g の枠を P, Q とすれば $(f \vee g)(\theta|_{P \cup Q}) = f(\theta|_P) \vee g(\theta|_Q)$ であるから，二番目のことが成り立つ．三番目のことは，二番目・四番目のことと問題 5.2.3 の $f \Rightarrow g = f^{\Diamond} \vee g$ なることからわかる．

問題 5.2.16　F 上の関係 $\lessdot$ を W_P に制限したものは，巾ブール束 $(P {\to} S) {\to} \mathbb{T}$ としての W_P 上の順序関係 $\le$ と一致する．従って，F 上の関係 $\doteq$ を W_P に制限したものは，W_P の相等関係 $=$ と一致する．関係 $\doteq$ はまた，W 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ を F に制限したものと両立する．また，W_P の最小元 0 と最大元 1 とは，任意の $f \in F$ に対して $0 \lessdot f$ と $f \lessdot 1$ とをみたす．

略解　$\lessdot$ の W_P への制限が W_P の順序関係 $\le$ に等しいことは，(5.2.6) と注意 5.2.1 による．また，$f, f', g, g' \in F$ が $f \doteq f'$，$g \doteq g'$ をみたせば，問題 5.2.15 により任意の $\theta \in K {\to} S$ に対して

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \ni_K \theta &\iff f \ni_K \theta \text{ かつ } g \ni_K \theta \\ &\iff f' \ni_K \theta \text{ かつ } g' \ni_K \theta \iff (f' \wedge g') \ni_K \theta \end{aligned}$$

が成り立つから，$f \wedge g \doteq f' \wedge g'$ が成り立つ．また，注意 5.2.1 により任意の $\theta \in K {\to} S$ に対して $0 \not\ni_K \theta$ と $1 \ni_K \theta$ が成り立つ．これから最後の結論が得られる．　**終**

各 $f \in F$ に対して，f の枠組み P によって $f^\sharp \in W_K$ を次のように定める．

$$f^\sharp \theta = f(\theta|_P) \qquad (\theta \in K {\to} S) \tag{5.2.8}$$

この $f^\sharp$ を f の**誇張**と呼ぶ．各 $f \in F$ に $f^\sharp \in W_K$ を対応させる写像を $\sharp$ で表す．

問題 5.2.17 写像 $\sharp$ は，$f^\sharp \doteq f$ と「$f \lessdot g \iff f^\sharp \leq g^\sharp$」をみたし，$\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow\}$ 代数系としての準写かつ全射であり，$f \in W_K$ については $f^\sharp = f$ をみたす．

W_K は束であるから，W_K の任意の有限部分集合に W_K 上の順序関係 $\leq$ に関する下限と上限がある．そこで，F の元の列 $f_1 \cdots f_m$ と $g_1 \cdots g_n$ が

$$\inf_{W_K}\{f_1{}^\sharp, \ldots, f_m{}^\sharp\} \leq \sup_{W_K}\{g_1{}^\sharp, \ldots, g_n{}^\sharp\} \tag{5.2.9}$$

をみたすことを次のように表す．

$$f_1 \cdots f_m \lessdot g_1 \cdots g_n \tag{5.2.10}$$

そうするとこの $\lessdot$ は，普遍単位半群 $F^* = \bigcup_{n \geq 0} F^n$ 上の関係とみなせる．なお (5.2.9) において，$m = 0$ の場合の左辺と $n = 0$ の場合の右辺は，第 3.9.3 項の下限・上限の定義により，それぞれ W_K の最大元と最小元に等しい．またこれらの場合，(5.2.10) の左辺または右辺は空列であるが，空列は第 5.1.1 項で述べた通り空白で表す．

三つ組み $(F, W_K, \sharp)$ は束写系であり，F^* 上の関係 $\lessdot$ は $\sharp$ 真関係に等しい．しかも，W_K は $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ をブール論法とするブール束であり，問題 5.2.17 により $\sharp$ は $\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow\}$ 準写（すなわちブール表現）かつ全射である．従って，第 3.19 節と第 3.21 節の定理等を $F, W_K, \sharp$ に適用して，F^* 上の関係 $\lessdot$ と F 上での算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ について色々なことを知ることができる．特に次のことが分かる．

定理 5.2.2 F^* **上の関係** $\lessdot$ **は，**W **上の算法** $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ **を** F **に制限したものについてブール関係であり，**F **上の擬順序関係** $\lessdot$ **の最大束拡張である．**

証明　前半は定理 3.19.6 による．問題 5.2.17 により F 上の擬順序関係 $\lessdot$ は W_K 上の順序関係 $\leq$ の $\sharp$ による引き戻しなので，定理 3.19.8 系により後半が成り立つ．

問題 5.2.18 W 上の算法 $\wedge, \vee, \lozenge$ は次の法則に従う．ただし，結合律の等式の左辺と可換律の等式の両辺で算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意であり，可換律における ρ は n 次の任意の置換である．

$$\left.\begin{aligned} f_1 \wedge \cdots \wedge f_n &= (\cdots(f_1 \wedge f_2) \wedge \cdots) \wedge f_n) \\ f_1 \vee \cdots \vee f_n &= (\cdots(f_1 \vee f_2) \vee \cdots) \vee f_n) \end{aligned}\right\} \tag{結合律}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{\rho 1} \wedge \cdots \wedge f_{\rho n} &= f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \\ f_{\rho 1} \vee \cdots \vee f_{\rho n} &= f_1 \vee \cdots \vee f_n \end{aligned}\right\} \tag{可換律}$$

$$\left.\begin{aligned} (f \wedge g)^\lozenge &= f^\lozenge \vee g^\lozenge \\ (f \vee g)^\lozenge &= f^\lozenge \wedge g^\lozenge \end{aligned}\right\} \tag{双対律}$$

$$(f^\lozenge)^\lozenge = f \tag{重補律}$$

略解　定理 3.21.2，問題 3.21.4，定理 3.21.3，問題 5.2.16 による．

補題 5.2.1 $f \in F$ **とし** $0, 1$ **を** W_P **の最小元と最大元とする．このとき，**F **上の関係** $\lessdot$ **について** $f \lessdot$ **なるためには** $f \doteq 0$ **なることが必要十分であり，**$f \gtrdot$ **なるためには** $f \doteq 1$ **なることが必要十分である．特に** $f \in W_P$ **の場合には，**$f \lessdot$ **なるためには** $f = 0$ **なることが必要十分であり，**$f \gtrdot$ **なるためには** $f = 1$ **なることが必要十分である．**

証明　定理 5.2.2 と最大束拡張の定義により，$f \lessdot$ なるためには任意の $g \in F$ に対して $f \lessdot g$ なることが必要十分であり，特に $f \lessdot 0$ なることが必要である．問題 5.2.16 により任意の $g \in F$ に対して $0 \lessdot g$ が成り立つから，$f \lessdot 0$ であれば $f \doteq 0$ が成り立つ．逆に $f \doteq 0$ であれば，任意の $g \in F$ に対して $f \lessdot 0 \lessdot g$，従って $f \lessdot g$ が成り立つ．$f \gtrdot$ なる条件についても双対的に同様である．後半の $f \in W_P$ の場合についてのことは，前半と問題 5.2.16 から分かる．　**終**

事態の全体 F についての以上のことは，実在の全体 E について前項で示したことの類似であるが，F についてはさらに以下のことが有用である．

定理 5.2.3 $f_i \in W_{P_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$，$g_j \in W_{Q_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$，$\left(\bigcup_{i=1}^m P_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n Q_j\right) \subseteq R \in \mathcal{P}K$ **とするとき，F の元の列** $f_1 \cdots f_m$ **と** $g_1 \cdots g_n$ **が** (5.2.10) **をみたすためには，任意の** $\theta \in R{\to}S$ **に対して次の不等式をみたすことが必要十分である．**

$$\inf_{\mathbb{T}}\{f_1(\theta|_{P_1}), \ldots, f_m(\theta|_{P_m})\} \leq \sup_{\mathbb{T}}\{g_1(\theta|_{Q_1}), \ldots, g_n(\theta|_{Q_n})\}$$

証明　問題 3.13.9 と問題 3.9.12 により，$f_1 \cdots f_m$ と $g_1 \cdots g_n$ が (5.2.10) をみたすためには，任意の $\theta' \in K{\to}S$ に対して次の不等式をみたすことが必要十分である．

$$\inf_{\mathbb{T}}\{f_1(\theta'|_{P_1}), \ldots, f_m(\theta'|_{P_m})\} \leq \sup_{\mathbb{T}}\{g_1(\theta'|_{Q_1}), \ldots, g_n(\theta'|_{Q_n})\}$$

$\theta' \in K{\to}S$ に対して $\theta = \theta'|_R$ と定めれば，$\theta \in R{\to}S$ であって $\theta'|_{P_i} = \theta|_{P_i}$，$\theta'|_{Q_j} = \theta|_{Q_j}$ が成り立つ．また，$R{\to}S$ の任意の元 θ は $K{\to}S$ の元 θ' に拡張されて $\theta'|_{P_i} = \theta|_{P_i}$，$\theta'|_{Q_j} = \theta|_{Q_j}$ が成り立つ．従ってこの定理が成り立つ．
別証　定理 5.2.2 と定理 3.21.2 により，$f_1 \cdots f_m$ と $g_1 \cdots g_n$ が (5.2.10) をみたすためには

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_m \lessdot g_1 \vee \cdots \vee g_n$$

をみたすことが必要十分であり，そのためには問題 5.2.14 により，任意の $\theta \in R{\to}S$ に対して

$$f_1(\theta|_{P_1}) \wedge \cdots \wedge f_m(\theta|_{P_m}) \leq g_1(\theta|_{Q_1}) \vee \cdots \vee g_n(\theta|_{Q_n})$$

をみたすことが，すなわち定理の不等式をみたすことが必要十分である．

補題 5.2.2 **F の任意の部分集合 X に対して次のことが成り立つ．**

1. **F における** $\lessdot$ **に関する X の擬下限の全体** $\mathrm{qinf}_F X$ **は空集合ではない．**
2. $g \in F$ **が** $\mathrm{qinf}_F X$ **に属すためには，**$g^\sharp = \inf_{W_K} X^\sharp$ **なることが必要十分である．**
3. $X \subseteq W_P$ **の場合には，**$\inf_{W_P} X$ **は** $\mathrm{qinf}_F X$ **に属す．**

擬上限についても同様のことが成り立つ．

証明　問題 5.2.17 により写像 $\sharp \in F{\to}W_K$ が全射であって $\lessdot$ は W_K 上の順序関係 $\leq$ の $\sharp$ による引き戻しなので，結論 1, 2 は問題 3.9.57 から得られる．$X \subseteq W_P$ の場合，$g = \inf_{W_P} X$ と定め，任意の $\theta \in K{\to}S$ をとると，問題 3.13.9 と問題 3.9.12 によって次のように計算することができる．

$$g^\sharp\theta = g(\theta|_P) = \inf_{\mathbb{T}}\{f(\theta|_P) \mid f \in X\} = \inf_{\mathbb{T}}\{f^\sharp\theta \mid f \in X\} = \left(\inf_{W_K} X^\sharp\right)\theta$$

つまり $g^\sharp = \inf_{W_K} X^\sharp$ であるから，結論 2 から結論 3 が得られる．

問題 5.2.19 X が W_P の部分集合で $g \in W_Q$ であれば，次の二式が成り立つ．

$$(\inf_{W_P} X) \vee g = \inf_{W_{P\cup Q}}\{f \vee g \mid f \in X\}$$
$$(\sup_{W_P} X) \wedge g = \sup_{W_{P\cup Q}}\{f \wedge g \mid f \in X\}$$

略解　任意の $\theta \in (P \cup Q) \to S$ をとっての次の計算で第一式を証明することができる．

$$\begin{aligned}\bigl((\inf_{W_P} X) \vee g\bigr)\theta &= (\inf_{W_P} X)(\theta|_P) \vee g(\theta|_Q) \\ &= \inf_{\mathbb{T}}\{f(\theta|_P) \mid f \in X\} \vee g(\theta|_Q) \\ &= \inf_{\mathbb{T}}\{f(\theta|_P) \vee g(\theta|_Q) \mid f \in X\} \\ &= \inf_{\mathbb{T}}\{(f \vee g)\theta \mid f \in X\} \\ &= \bigl(\inf_{W_{P\cup Q}}\{f \vee g \mid f \in X\}\bigr)\theta\end{aligned}$$

二番目と五番目の等式が成り立つのは問題 3.13.9 と問題 3.9.12 による．三番目の等式が成り立つのは，完備ブール束 $\mathbb{T}$ における一般分配律による．

5.2.5　算法 $\breve{o}k$ の繰り返しの意味と性質

§ 問題 5.2.1 により，$k_1, \ldots, k_n$ を $P \in \mathcal{P}K$ の相異なる元とし $s_i \in S$ $(i = 1, \ldots, n)$，$f \in W_P$ とすれば，$s_1 \,\breve{o}k_1\, (s_2 \,\breve{o}k_2\, (\cdots (s_n \,\breve{o}k_n\, f) \cdots))$ が定義されて $W_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ に属す．こうして出来る元の意味と性質をここで説明する．なお，この元を時に $(s_i \,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n} f$ や $(s_i \,\breve{o}k_i)_i f$ で表す．

$$(s_i \,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n} f = (s_i \,\breve{o}k_i)_i f = s_1 \,\breve{o}k_1\, (s_2 \,\breve{o}k_2\, (\cdots (s_n \,\breve{o}k_n\, f) \cdots))$$

定義 5.2.1 $k_1, \ldots, k_n$ を $P \in \mathcal{P}K$ の相異なる元とし，$\theta \in (P - \{k_1, \ldots, k_n\}) \to S$，$s_i \in S$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする．このとき，$P \to S$ の元 $\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} \theta$ を次のように定義する．

$$\left(\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} \theta\right) k = \begin{cases} s_i & \cdots \quad k = k_i \text{ のとき } (i = 1, \ldots, n) \\ \theta k & \cdots \quad k \in P - \{k_1, \ldots, k_n\} \text{ のとき} \end{cases}$$

$P = \{k_1, \ldots, k_n\}$ の場合には，$P - \{k_1, \ldots, k_n\} = \emptyset$，従って空集合律により $\theta = \emptyset$ となるが，この場合は $\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} \theta$ を $\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix}$ で表すことと約定する．すなわち，$\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} k_i = s_i$ なる $\{k_1, \ldots, k_n\} \to S$ の元である．こういう約定も**空集合規約**と呼ぶ．なお，記号 $\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix}$ を時に $(k_i/s_i)_{i=1,\ldots,n}$ や $(k_i/s_i)_i$ で表す．

$$(k_i/s_i)_{i=1,\ldots,n} = (k_i/s_i)_i = \begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix}$$

次の問題に記す事実は今後，断り無く使うことがある．

問題 5.2.20 $k_1, \ldots, k_n$ を $P \in \mathcal{P}K$ の相異なる元とし，$P \subseteq Q \in \mathcal{P}K$ とし，$k_{n+1}, \ldots, k_m$ を $Q - P$ の相異なる元とし，$\theta \in (Q - \{k_1, \ldots, k_m\}) \to S$，$s_i \in S$ $(i = 1, \ldots, m)$ とする．このとき，$P - \{k_1, \ldots, k_n\} \subseteq Q - \{k_1, \ldots, k_m\}$ であって次の式が成り立つ．

$$\left.\left(\begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_m \\ \hline s_1, \ldots, s_m \end{pmatrix} \theta\right)\right|_P = \begin{pmatrix} k_1, \ldots, k_n \\ \hline s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix} \theta|_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$$

定理 5.2.4 $k_1,\dots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i\in S$ $(i=1,\dots,n)$，$f\in W_P$ **とする．このとき，任意の** $\theta\in(P-\{k_1,\dots,k_n\})\to S$ **に対して次の式が成り立つ．**

$$(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)))\theta=f\left(\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_n\\ \hline s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}\theta\right)$$

証明　問題 5.2.1 により，この式の両辺とも定義される．また，$Q=P-\{k_n\}$ と定めれば，$\theta\in(Q-\{k_1,\dots,k_{n-1}\})\to S$ であるから $\theta'=\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_{n-1}\\ \hline s_1,\dots,s_{n-1}\end{pmatrix}\theta$ は $Q\to S$ に属す．算法 $\breve{o}k_n$ の定義により，$n>1$ としてよく，$g=s_n\,\breve{o}k_n\,f$ と定めれば，$g\in W_Q$，$g\theta'=f\big((k_n/s_n)\theta'\big)$ が成り立つ．自明に $(k_n/s_n)\theta'=\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_n\\ \hline s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}\theta$ が成り立つ．以上のことと n についての帰納法を使っての次の計算で（帰納法を使うところで改行してある）証明を完成することができる．

$$\begin{aligned}(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)))\theta&=(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_{n-1}\,\breve{o}k_{n-1}\,g)\cdots)))\theta\\&=g\left(\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_{n-1}\\ \hline s_1,\dots,s_{n-1}\end{pmatrix}\theta\right)=g\theta'=f\big((k_n/s_n)\theta'\big)=f\left(\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_n\\ \hline s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}\theta\right)\end{aligned}$$

系　$k_1,\dots,k_n$ **を** K **の相異なる元とし，**$s_i\in S$ $(i=1,\dots,n)$，$f\in W_{\{k_1,\dots,k_n\}}$ **とすれば**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots))=f\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_n\\ \hline s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}\tag{5.2.11}$$

が成り立つ．

証明　定理 5.2.4 を $P=\{k_1,\dots,k_n\}$ として使ってから二種類の空集合規約に従ったものである．

注意 5.2.7 (第 2.7.2 項参照)　(5.2.11) の意味は次のように考えれば分かりやすい．まず，Kとして自然数の全体$\mathbb{N}$をとって $k_i=i$ $(i=1,\dots,n)$ とする．次に，注意 5.2.2 でのように $\{k_1,\dots,k_n\}\to S$ を S^n と同一視して，fをSで定義されて値$0,1$をとるn変数関数とみなす．そうすると，$\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_n\\ \hline s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}$ は $(s_1,\dots,s_n)$ と書けて，$f\begin{pmatrix}k_1,\dots,k_n\\ \hline s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}$ は $f(s_1,\dots,s_n)$ と書ける．これを，仮にfを右端に置いて，$(s_1,\dots,s_n)f$ と書き直す．次に，s_n と f から，各 $(x_1,\dots,x_{n-1})\in S^{n-1}$ に $(x_1,\dots,x_{n-1},s_n)f$ を対応させる $n-1$ 変数関数を作る．これはつまり，f の n 番目の変数を s_n に固定して得られる関数である．これを s_nk_nf で表す．従って $(s_1,\dots,s_{n-1})(s_nk_nf)=(s_1,\dots,s_n)f$ が成り立つ．s_n と f の間に k_n $(=n)$ を置いたのは，n 番目の変数を s_n に固定したことを明示するためである．さらに s_{n-1} と s_nk_nf から，各 $(x_1,\dots,x_{n-2})\in S^{n-2}$ に $(x_1,\dots,x_{n-2},s_{n-1})(s_nk_nf)$ を対応させる $n-2$ 変数関数を作り，これを $s_{n-1}k_{n-1}(s_nk_nf)$ で表す．従って $(s_1,\dots,s_{n-2})\big(s_{n-1}k_{n-1}(s_nk_nf)\big)=(s_1,\dots,s_{n-1})(s_nk_nf)$ が成り立つ．s_{n-1} と (s_nk_nf) の間に k_{n-1} $(=n-1)$ を置いたのは，さっきと同様の理由である．同様に続けると，i 変数関数

$$s_{i+1}k_{i+1}(s_{i+2}k_{i+2}(\dots(s_nk_nf)\dots))\qquad\qquad(i=0,1,\dots,n-1)$$

が出来て（0 変数関数とは定値のことをいう），次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&(s_1,\dots,s_i)\big(s_{i+1}k_{i+1}(s_{i+2}k_{i+2}(\dots(s_nk_nf)\dots))\big)\\&\qquad=(s_1,\dots,s_i,s_{i+1})\big(s_{i+2}k_{i+2}(\dots(s_nk_nf)\dots)\big)\end{aligned}$$

これらから $s_1k_1(s_2k_2(\ldots(s_nk_nf)\ldots))=(s_1,\ldots,s_n)f$ を得る．これは，同一視や仮の記法を元に戻せば，記号 ŏ が無い以外は (5.2.11) と同じ形の式

$$s_1k_1(s_2k_2(\ldots(s_nk_nf)\ldots))=f\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)$$

となる．こういうことを踏まえて算法 ŏk 等の概念を定義したのである．

系 2 $k_1,\ldots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i\in S\ (i=1,\ldots,n)$, $f\in W_P$ **とする．このとき，**n **次の任意の置換** ρ **に対して次の式が成り立つ．**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots))=s_{\rho1}\,\breve{o}k_{\rho1}\,(s_{\rho2}\,\breve{o}k_{\rho2}\,(\cdots(s_{\rho n}\,\breve{o}k_{\rho n}\,f)\cdots))$$

証明　各 $\theta\in(P-\{k_1,\ldots,k_n\})\to S$ に対し定理 5.2.4 により $(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)))\theta=f\left(\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)\theta\right)=f\left(\left(\frac{k_{\rho1},\ldots,k_{\rho n}}{s_{\rho1},\ldots,s_{\rho n}}\right)\theta\right)=(s_{\rho1}\,\breve{o}k_{\rho1}\,(s_{\rho2}\,\breve{o}k_{\rho2}\,(\cdots(s_{\rho n}\,\breve{o}k_{\rho n}\,f)\cdots)))\theta$ が成り立つからである．

系 3 $k_1,\ldots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とし** $f\in W_P$ **とすれば，任意の** $\theta\in P\to S$ **に対して**

$$f\theta=\big((\theta k_1)\,\breve{o}k_1\,\big((\theta k_2)\,\breve{o}k_2\,\big(\cdots\big((\theta k_n)\,\breve{o}k_n\,f\big)\cdots\big)\big)\big)\theta|_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$$

が成り立つ．

証明　$\theta=\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{\theta k_1,\ldots,\theta k_n}\right)\theta|_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ と $\theta k_i\in S\ (i=1,\ldots,n)$ が成り立つから，定理 5.2.4 によりこの系が成り立つ．

系 4 $k_1,\ldots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i\in S\ (i=1,\ldots,n)$, $f\in W_P$ **とする．このとき**

$$(s_i\,\breve{o}k_i)_i(f^\Diamond)=\big((s_i\,\breve{o}k_i)_if\big)^\Diamond$$

が成り立つ．

証明　任意の $\theta\in(P-\{k_1,\ldots,k_n\})\to S$ をとると，定理 5.2.4 と算法 $\Diamond$ の定義により

$$\big((s_i\,\breve{o}k_i)_i(f^\Diamond)\big)\theta=f^\Diamond\big((k_i/s_i)_i\theta\big)=\Big(f\big((k_i/s_i)_i\theta\big)\Big)^\Diamond=\Big(\big((s_i\,\breve{o}k_i)_if\big)\theta\Big)^\Diamond=\big((s_i\,\breve{o}k_i)_if\big)^\Diamond\theta$$

と計算することができ，これでこの系が証明された．

系 5　$k_1,\ldots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とすれば，任意の** $s_i\in S\ (i=1,\ldots,n)$ **に対して**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,1)\cdots))=1\qquad s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,0)\cdots))=0$$

が成り立つ．ただし，左辺の 1 **と** 0 **は** W_P **の最大元と最小元であり，右辺の** 1 **と** 0 **は** $W_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ **の最大元と最小元である．**

証明　定理 5.2.4 により任意の $\theta\in(P-\{k_1,\ldots,k_n\})\to S$ に対して

$$(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,1)\cdots)))\theta=1\left(\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)\theta\right)=1$$

であるから，注意 5.2.1 により第一式が成り立つ．第二式についても同様である．なお，注意 5.2.1 と系 4 と後出の補題 5.2.4 により W_P から $W_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ への写像 $f\mapsto(s_i\,\breve{o}k_i)_if$ がブール束の準写であるから，問題 3.13.6 によってもこの系が成り立つ．

補題 5.2.3 $k_1, \ldots, k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$k_{n+1}, \ldots, k_m$ **を** $K - P$ **の相異なる元とし，**$s_i \in S$ $(i = 1, \ldots, m)$, $f \in W_P$ **とする．このとき，**f **の誇張** $f^\sharp \in W_K$ **について次の式が成り立つ．**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_m\,\breve{o}k_m\,f^\sharp)\cdots)) \doteq s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots))$$

証明　任意の $\theta \in (K - \{k_1, \ldots, k_m\}) \to S$ をとる．そうすると，定理 5.2.4 と誇張の定義 (5.2.8) と問題 5.2.20 を使って次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_m\,\breve{o}k_m\,f^\sharp)\cdots)))\theta &= f^\sharp\left(\left(\frac{k_1, \ldots, k_m}{s_1, \ldots, s_m}\right)\theta\right) \\ &= f\left(\left(\left(\frac{k_1, \ldots, k_m}{s_1, \ldots, s_m}\right)\theta\right)\Big|_P\right) = f\left(\left(\frac{k_1, \ldots, k_n}{s_1, \ldots, s_n}\right)\theta|_{P - \{k_1, \ldots, k_n\}}\right) \\ &= (s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)))\theta|_{P - \{k_1, \ldots, k_n\}}\end{aligned}$$

関係 $\doteq$ の定義 (5.2.7) により，これでこの補題が証明された．

注意 5.2.8 問題 5.2.17 により任意の $f \in F$ に対して $f^\sharp \doteq f$ が成り立つから，補題 5.2.3 は後出の定理 5.2.6 からも導かれる．しかし，定理 5.2.6 の証明に補題 5.2.3 を使う．

補題 5.2.4 $k_1, \ldots, k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i \in S$ $(i = 1, \ldots, n)$, $f, g \in W_P$ **とする．このとき次の三式が成り立つ．**

$$\begin{aligned}(s_i\,\breve{o}k_i)_i(f \wedge g) &= (s_i\,\breve{o}k_i)_i f \wedge (s_i\,\breve{o}k_i)_i g \\ (s_i\,\breve{o}k_i)_i(f \vee g) &= (s_i\,\breve{o}k_i)_i f \vee (s_i\,\breve{o}k_i)_i g \\ (s_i\,\breve{o}k_i)_i(f \Rightarrow g) &= (s_i\,\breve{o}k_i)_i f \Rightarrow (s_i\,\breve{o}k_i)_i g\end{aligned}$$

証明　三つの算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ の任意の一つを $*$ で表し，任意の $\theta \in (P - \{k_1, \ldots, k_n\}) \to S$ をとる．そうすると，定理 5.2.4 と算法 $*$ の定義により，次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}\big((s_i\,\breve{o}k_i)_i(f * g)\big)\theta &= (f * g)\big((k_i/s_i)_i\theta\big) = f\big((k_i/s_i)_i\theta\big) * g\big((k_i/s_i)_i\theta\big) \\ &= \big((s_i\,\breve{o}k_i)_i f\big)\theta * \big((s_i\,\breve{o}k_i)_i g\big)\theta = \big((s_i\,\breve{o}k_i)_i f * (s_i\,\breve{o}k_i)_i g\big)\theta\end{aligned}$$

これでこの補題が証明された．

注意 5.2.9 補題 5.2.4 は，これを使って次に証明する定理 5.2.5 に含まれる．

定理 5.2.5 $P, Q \in \mathcal{P}K$ **とし，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** $P - Q$ **の相異なる元とし，**$k_{n+1}, \ldots, k_m$ **を** $P \cap Q$ **の相異なる元とし，**$k_{m+1}, \ldots, k_l$ **を** $Q - P$ **の相異なる元とし，**$s_i \in S$ $(i = 1, \ldots, l)$, $f \in W_P$, $g \in W_Q$ **とする** $(0 \leq n \leq m \leq l)$**．このとき次の三式が成り立つ．**

$$\begin{aligned}(s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) &= (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f \wedge (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\ldots,l}\, g \\ (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) &= (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f \vee (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\ldots,l}\, g \\ (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) &= (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f \Rightarrow (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\ldots,l}\, g\end{aligned}$$

証明　三つの算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ の任意の一つを記号 $*$ で表す．そうすると，補題 5.2.3 と問題 5.2.17 と補題 5.2.4 と問題 5.2.16 を使って次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}(s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f*g) &\doteq (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f*g)^\sharp = (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f^\sharp * g^\sharp)\\ &= (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}f^\sharp * (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}g^\sharp \doteq (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m}f * (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\dots,l}g\end{aligned}$$

従って $(s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f*g) \doteq (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m}f*(s_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\dots,l}g$ であるが，両辺とも $(P\cup Q)-\{k_1,\dots,k_l\}$ を枠とする事態であるから，問題 5.2.16 により，この式は $\doteq$ を $=$ に替えても成り立つ．

例 5.2.1 第 7 章での用のために，定理 5.2.5 の特別な場合について言及しておこう．まず，$s \in S$，$P, Q \in \mathcal{P}K$，$k \in P\cap Q$，$f \in W_P$，$g \in W_Q$ のとき次の二式が成り立つ．

$$s\,\breve{o}k\,(f\wedge g) = s\,\breve{o}k\,f \wedge s\,\breve{o}k\,g \qquad s\,\breve{o}k\,(f\vee g) = s\,\breve{o}k\,f \vee s\,\breve{o}k\,g$$

次に，$s \in S$，$P, Q \in \mathcal{P}K$，$k \in P-Q$，$f \in W_P$，$g \in W_Q$ のとき次の二式が成り立つ．

$$s\,\breve{o}k\,(f\wedge g) = s\,\breve{o}k\,f \wedge g \qquad s\,\breve{o}k\,(f\vee g) = s\,\breve{o}k\,f \vee g$$

さらに $t \in S$，$l \in Q-P$ なら，次の二式が成り立つ．

$$s\,\breve{o}k\,\bigl(t\,\breve{o}l\,(f\wedge g)\bigr) = s\,\breve{o}k\,f \wedge t\,\breve{o}l\,g \qquad s\,\breve{o}k\,\bigl(t\,\breve{o}l\,(f\vee g)\bigr) = s\,\breve{o}k\,f \vee t\,\breve{o}l\,g$$

これらの式は次のように一般化される．すなわち，$i = 1,\dots,n$ について $P_i \in \mathcal{P}K$，$k_i \in P_i - \bigcup_{j\neq i} P_j$，$s_i \in S$，$f_i \in W_{P_i}$ とすれば，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_n))\cdots) &= s_1\,\breve{o}k_1\,f_1\wedge\cdots\wedge s_n\,\breve{o}k_n\,f_n\\ s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f_1\vee\cdots\vee f_n))\cdots) &= s_1\,\breve{o}k_1\,f_1\vee\cdots\vee s_n\,\breve{o}k_n\,f_n\end{aligned}$$

ただし，これらの式において算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意である．$\wedge$ についての式を証明するには，n についての帰納法で次のようすればいい．まず，

$$s_n\,\breve{o}k_n\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_{n-1}\wedge f_n) = f_1\wedge\cdots\wedge f_{n-1}\wedge s_n\,\breve{o}k_n\,f_n$$

が成り立つことは分かっている．これと帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}&s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_n))\cdots)\\ &= s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_{n-1}\,\breve{o}k_{n-1}\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_{n-1}\wedge s_n\,\breve{o}k_n\,f_n))\cdots)\\ &= s_1\,\breve{o}k_1\,f_1\wedge\cdots\wedge s_{n-2}\,\breve{o}k_{n-2}\,f_{n-2}\wedge s_{n-1}\,\breve{o}k_{n-1}\,(f_{n-1}\wedge s_n\,\breve{o}k_n\,f_n)\end{aligned}$$

が得られる．これにやはり成り立つことの分かっている次の式を代入すればいい．

$$s_{n-1}\,\breve{o}k_{n-1}\,(f_{n-1}\wedge s_n\,\breve{o}k_n\,f_n) = s_{n-1}\,\breve{o}k_{n-1}\,f_{n-1}\wedge s_n\,\breve{o}k_n\,f_n$$

補題 5.2.5 $k_1,\dots,k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし** $f, g \in W_P$ **とする．このとき，**$f \leq g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S$ $(i = 1,\dots,n)$ **に対して**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)) \leq s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g)\cdots))$$

の成り立つことが必要十分である．従って $f = g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S$ $(i = 1,\dots,n)$ **に対して次の式の成り立つことが必要十分である．**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)) = s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g)\cdots))$$

証明　$f \le g$ とすれば，任意の $\theta \in (P-\{k_1,\dots,k_n\}) \to S$ に対して定理 5.2.4 と注意 5.2.1 により

$$
\begin{aligned}
(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)))\theta &= f\left(\left(\frac{k_1,\dots,k_n}{s_1,\dots,s_n}\right)\theta\right) \\
&\le g\left(\left(\frac{k_1,\dots,k_n}{s_1,\dots,s_n}\right)\theta\right) = (s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g)\cdots)))\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから，注意 5.2.1 により問題の不等式が成り立つ．逆に，この不等式が任意の $s_i \in S$ $(i = 1,\dots,n)$ に対して成り立てば，任意の $\theta \in P \to S$ に対して定理 5.2.4 系 3 と注意 5.2.1 により

$$
\begin{aligned}
f\theta &= \big((\theta k_1)\,\breve{o}k_1\,\big((\theta k_2)\,\breve{o}k_2\,\big(\cdots\big((\theta k_n)\,\breve{o}k_n\,f\big)\cdots\big)\big)\big)\theta|_{P-\{k_1,\dots,k_n\}} \\
&\le \big((\theta k_1)\,\breve{o}k_1\,\big((\theta k_2)\,\breve{o}k_2\,\big(\cdots\big((\theta k_n)\,\breve{o}k_n\,g\big)\cdots\big)\big)\big)\theta|_{P-\{k_1,\dots,k_n\}} = g\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから，注意 5.2.1 により $f \le g$ 成り立つ．なお，後半を「逆に」以降の論法で証明してそれと補題 5.2.4 から前半を導くこともできる．

注意 5.2.10 問題 5.2.16 によりこの補題 5.2.5 は，これを使って次に証明する定理 5.2.6 に含まれる．

定理 5.2.6 $P, Q \in \mathcal{P}K$ **とし，**$k_1,\dots,k_n$ **を** $P-Q$ **の相異なる元とし，**$k_{n+1},\dots,k_m$ **を** $P\cap Q$ **の相異なる元とし，**$k_{m+1},\dots,k_l$ **を** $Q-P$ **の相異なる元とし，**$f \in W_P$，$g \in W_Q$ **とする** $(0 \le n \le m \le l)$**．このとき** $f \lessdot g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S$ $(i = 1,\dots,l)$ **に対して**

$$
s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_m\,\breve{o}k_m\,f)\cdots)) \lessdot s_{n+1}\,\breve{o}k_{n+1}\,(s_{n+2}\,\breve{o}k_{n+2}\,(\cdots(s_l\,\breve{o}k_l\,g)\cdots))
$$

の成り立つことが必要十分である．従って $f \doteq g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S$ $(i = 1,\dots,l)$ **に対して次の式の成り立つことが必要十分である．**

$$
s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_m\,\breve{o}k_m\,f)\cdots)) \doteq s_{n+1}\,\breve{o}k_{n+1}\,(s_{n+2}\,\breve{o}k_{n+2}\,(\cdots(s_l\,\breve{o}k_l\,g)\cdots))
$$

証明　問題 5.2.17 により，$f \lessdot g$ なることは $f^\sharp \le g^\sharp$ なることと同等である．補題 5.2.5 により，$f^\sharp \le g^\sharp$ なることは，任意の $s_i \in S$ $(i = 1,\dots,l)$ に対して $(s_i\,\breve{o}k_i)_i f^\sharp \le (s_i\,\breve{o}k_i)_i g^\sharp$ なることと同等である．問題 5.2.16 により，$(s_i\,\breve{o}k_i)_i f^\sharp \le (s_i\,\breve{o}k_i)_i g^\sharp$ なることは $(s_i\,\breve{o}k_i)_i f^\sharp \lessdot (s_i\,\breve{o}k_i)_i g^\sharp$ なることと同等である．補題 5.2.3 により $(s_i\,\breve{o}k_i)_i f^\sharp \doteq (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m} f$ と $(s_i\,\breve{o}k_i)_i g^\sharp \doteq (s_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\dots,l}\, g$ が成り立つ．以上のことからこの定理が成り立つ．

系　$k_1,\dots,k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし** $f \in W_P$ **とする．このとき，**$f = 1$ **であるためには，任意の** $s_i \in S$ $(i = 1,\dots,n)$ **に対して** $s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)) = 1$ **の成り立つことが必要十分である．ただし二か所の 1 は，それぞれ** W_P **と** $W_{P-\{k_1,\dots,k_n\}}$ **の最大元である．これら 1 を最少元 0 に替えても同様に成り立つ．**

証明　定理 5.2.6 または補題 5.2.5 と定理 5.2.4 系 5 による．

定理 5.2.7 $f_1,\dots,f_m, g_1,\dots,g_n \in F$，$\alpha, \beta \in F^*$ **とし，**$k \in K$ **が** $f_1,\dots,f_m, g_1,\dots,g_n$ **の枠に属すが** α, β **に現れる事態の枠には属さないものとする．このとき，**

$$
f_1 \cdots f_m \alpha \lessdot g_1 \cdots g_n \beta
$$

が成り立つためには，任意の $s \in S$ **に対して次の式の成り立つことが必要十分である．**

$$
s\,\breve{o}k\,f_1, \cdots, s\,\breve{o}k\,f_m, \alpha \lessdot s\,\breve{o}k\,g_1, \cdots, s\,\breve{o}k\,g_n, \beta
$$

証明　$\alpha = f'_1 \cdots f'_{m'}$, $\beta = g'_1 \cdots g'_{n'}$ なる事態 $f'_1, \ldots, f'_{m'}, g'_1, \ldots, g'_{n'}$ をとる．$s \in S$ に対して $h = s\breve{o}\pi s\triangle$ と定めれば k は $h \wedge h^{\diamond}$ と $h \wedge h^{\diamond}$ の枠に属さないから，定理 5.2.2 と問題 3.21.5 により $m' \neq 0 \neq n'$ と仮定していい．

$$f = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) \wedge (f'_1 \wedge \cdots \wedge f'_{m'}) \qquad g = (g_1 \vee \cdots \vee g_n) \vee (g'_1 \vee \cdots \vee g'_{n'})$$

と定める．ただし，括弧内で算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．そうすると，$m \neq 0 \neq n$ の場合は次のように推論することができる．

$$\begin{aligned} f_1 \cdots f_m \alpha \lessdot g_1 \cdots g_n \beta &\iff f \lessdot g \\ &\iff \text{任意の } s \in S \text{ に対して } s\breve{o}k\, f \lessdot s\breve{o}k\, g \end{aligned}$$

ただし，一番目の $\iff$ は定理 5.2.2 と定理 3.21.2 により，二番目の $\iff$ は定理 5.2.6 による．さらに，定理 5.2.5 と定理 3.21.2 により，次のように推論することができる．

$$\begin{aligned} & s\breve{o}k\, f \lessdot s\breve{o}k\, g \\ \iff\ & (s\breve{o}k\, f_1 \wedge \cdots \wedge s\breve{o}k\, f_m) \wedge (f'_1 \wedge \cdots \wedge f'_{m'}) \lessdot (s\breve{o}k\, g_1 \vee \cdots \vee s\breve{o}k\, g_n) \vee (g'_1 \vee \cdots \vee g'_{n'}) \\ \iff\ & s\breve{o}k\, f_1, \cdots, s\breve{o}k\, f_m, \alpha \lessdot s\breve{o}k\, g_1, \cdots, s\breve{o}k\, g_n, \beta \end{aligned}$$

これで $m \neq 0 \neq n$ の場合は証明された．$m = 0 \neq n$ の場合は $s\breve{o}k\, f$ を f に変え，$m \neq 0 = n$ の場合は $s\breve{o}k\, g$ を g に変え，$m = n = 0$ の場合は $s\breve{o}k\, f$ と $s\breve{o}k\, g$ を f と g に変えれば，同様に証明される．

5.2.6　算法 λk と $\triangle$ の意味

§ ここでは，単相格世界 W の算法 λk $(\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q},\ k \in K)$ と $\triangle$ を関連させながらその意味を説明する．

定義 5.2.2 $\mathbb{P}$ の三種の区間 $(\leftarrow p]$, $(p \rightarrow)$, $[pp] \in \mathfrak{P}$ の定める三種の限量子 $\neg(\leftarrow p]$, $(p \rightarrow)$, $[pp] \in \mathfrak{Q}$ を，それぞれ $\underline{p}$, $\overline{p}$, p と略記する $(p \in \mathbb{P})$．

$$\underline{p} = \neg(\leftarrow p] \qquad \overline{p} = (p \rightarrow) \qquad p = [pp]$$

さらに，$\mathbb{P}$ の単位元かつ最小元を 0 で表し，限量子 $\underline{0}$ と $\overline{0}$ をそれぞれ $\forall$ と $\exists$ とも書く．

$$\forall = \underline{0} = \neg(\leftarrow 0] \qquad \exists = \overline{0} = (0 \rightarrow)$$

これらをそれぞれ**全称子・存称子**と呼んで**極量子**と総称する（その理由は補題 5.2.7 の証明を見れば分かるであろう）．

補題 5.2.6 $a \in E$, $p \in \mathbb{P}$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **のとき，任意の** $\theta \in (P - \{k\}) \rightarrow S$ **に対して次のことが成り立つ．**

$$\begin{aligned} (a\, p k\, f)\theta = 1 &\iff \bigl|\bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\bigr\}\bigr| = p \\ (a\, \underline{p} k\, f)\theta = 1 &\iff \bigl|\bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 0\bigr\}\bigr| \leq p \\ (a\, \overline{p} k\, f)\theta = 0 &\iff \bigl|\bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\bigr\}\bigr| \leq p \end{aligned}$$

証明　一番目のことは $\mathrm{p} = \{\mathrm{p}\}$ なることと算法 $\lambda\mathrm{k}$ の定義 (5.2.2) から直ちに得られる．二番目のことも $\underline{\mathrm{p}} = \neg(\leftarrow\mathrm{p}]$ なることと (5.2.2) から直ちに得られる．$\overline{\mathrm{p}} = (\mathrm{p}\rightarrow)$ であるから，(5.2.2) により

$$(\mathrm{a}\,\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\theta = 1 \iff \bigl|\bigl\{\mathrm{s} \in \mathrm{S} \mid \mathrm{a} \ni \mathrm{s},\ \mathrm{f}\bigl((\mathrm{k}/\mathrm{s})\theta\bigr) = 1\bigr\}\bigr| > \mathrm{p}$$

が成り立つ．これから三番目のことが得られる．

次の補題の証明は，限量子 $\underline{0}, \overline{0}$ をそれぞれ $\forall, \exists$ とも書いて極量子と総称する理由を説明する．

補題 5.2.7 $\mathrm{a} \in \mathrm{E}$，$\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$，$\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ **のとき，任意の** $\theta \in (\mathrm{P} - \{\mathrm{k}\}) \rightarrow \mathrm{S}$ **に対して次の二式が成り立つ．**

1. $(\mathrm{a}\,\underline{0}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\theta = \inf_{\mathbb{T}}\bigl\{\mathrm{f}\bigl((\mathrm{k}/\mathrm{s})\theta\bigr) \mid \mathrm{a} \ni \mathrm{s} \in \mathrm{S}\bigr\}$

2. $(\mathrm{a}\,\overline{0}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\theta = \sup_{\mathbb{T}}\bigl\{\mathrm{f}\bigl((\mathrm{k}/\mathrm{s})\theta\bigr) \mid \mathrm{a} \ni \mathrm{s} \in \mathrm{S}\bigr\}$

証明　補題 5.2.6 と測度 $|\cdot|$ の零値律と正値律により，$(\mathrm{a}\,\underline{0}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\theta = 1$ なることは，$\mathrm{a} \ni \mathrm{s} \in \mathrm{S}$ なる任意の s に対して $\mathrm{f}\bigl((\mathrm{k}/\mathrm{s})\theta\bigr) = 1$ なることと同等である．従って第一の式が成り立つ．

同様に，$(\mathrm{a}\,\overline{0}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\theta = 1$ なることは，$\mathrm{a} \ni \mathrm{s} \in \mathrm{S}$，$\mathrm{f}\bigl((\mathrm{k}/\mathrm{s})\theta\bigr) = 1$ なる s が存在することと同等である．従って第二の式が成り立つ．

問題 5.2.21 $\mathrm{a} \in \mathrm{E}$，$\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$，$\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ のとき次の二式が成り立つ．ただし inf と sup とは，完備ブール束 $W_{\mathrm{P}-\{\mathrm{k}\}}$ における下限と上限とを表す（注意 5.2.1 と補題 5.2.2 参照）．

$$\mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} = \inf\{\mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \mid \mathrm{a} \ni \mathrm{b} \in W_{\varepsilon}\} \qquad \mathrm{a}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f} = \sup\{\mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \mid \mathrm{a} \ni \mathrm{b} \in W_{\varepsilon}\}$$

問題 5.2.22 $\mathrm{a} \in \mathrm{E}$，$\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$，$\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ とする．このとき，$\mathrm{a} \ni \mathrm{b}$ なる $\mathrm{b} \in W_{\varepsilon}$ があれば $\mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \le \mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \le \mathrm{a}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ が成り立つ．従って，$\mathrm{a} \not\sqsubseteq 0$ なら $\mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \le \mathrm{a}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ が成り立ち，$\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ なら $\mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \le \mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \le \mathrm{a}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ が成り立つ．

略解　最後のことは W の基本関係 $\ni$ が反射的だから成り立つ．

問題 5.2.23 $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ が「$\mathrm{a} \ni \mathrm{b} \in W_{\varepsilon} \iff \mathrm{a} = \mathrm{b}$」なる条件をみたすとする（こういう a を**個実在**と呼ぶ）．このとき，$\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$，$\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ に対して $\mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} = \mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f} = \mathrm{a}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ が成り立つ．

補題 5.2.8 各 $\mathrm{a} \in \mathrm{E}$ **と各** $\mathrm{f} \in W_{\{\mathrm{k}\}}$ **に対して，それぞれ次のように定める** $(\mathrm{k} \in \mathrm{K})$**．**

$$\mathrm{S}^{\mathrm{a}} = \{\mathrm{s} \in \mathrm{S} \mid \mathrm{a} \ni \mathrm{s}\} \qquad \mathrm{S}^{\mathrm{f}} = \{\mathrm{s} \in \mathrm{S} \mid \mathrm{f}(\mathrm{k}/\mathrm{s}) = 1\}$$

このとき，$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$ **と** $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in W_{\{\mathrm{k}\}}$ **について次の各式が成り立つ．**

$$\mathrm{S}^{\mathrm{a}\sqcap\mathrm{b}} = \mathrm{S}^{\mathrm{a}} \cap \mathrm{S}^{\mathrm{b}} \qquad \mathrm{S}^{\mathrm{a}\sqcup\mathrm{b}} = \mathrm{S}^{\mathrm{a}} \cup \mathrm{S}^{\mathrm{b}} \qquad \mathrm{S}^{\mathrm{a}^{\square}} = \mathrm{S} - \mathrm{S}^{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{S}^{\mathrm{a}\triangle} = \mathrm{S}^{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{S}^{\mathrm{f}\wedge\mathrm{g}} = \mathrm{S}^{\mathrm{f}} \cap \mathrm{S}^{\mathrm{g}} \qquad \mathrm{S}^{\mathrm{f}\vee\mathrm{g}} = \mathrm{S}^{\mathrm{f}} \cup \mathrm{S}^{\mathrm{g}} \qquad \mathrm{S}^{\mathrm{f}^{\diamond}} = \mathrm{S} - \mathrm{S}^{\mathrm{f}}$$

証明　$\mathrm{s} \in \mathrm{S}$ が $\mathrm{S}^{\mathrm{a}\triangle}$ に属すためには $(\mathrm{a}\triangle)(\pi/\mathrm{s}) = 1$ なることが必要十分であり，そのためにはまた $(\pi/\mathrm{s})\pi \in \mathrm{S}$，$\mathrm{a} \ni (\pi/\mathrm{s})\pi$ なることが必要十分である．$(\pi/\mathrm{s})\pi = \mathrm{s} \in \mathrm{S}$ であるから $\mathrm{S}^{\mathrm{a}\triangle} = \mathrm{S}^{\mathrm{a}}$ が成り立つ．他の式の証明は読者に任せる．

補題 5.2.9 $\mathfrak{a} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathrm{f} \in W_{\{\mathrm{k}\}}$ **のとき，補題 5.2.8 の記号法の下で次のことが成り立つ．ただし，結論 1 においては** $\mathfrak{a} \in W_\varepsilon$ **とする．**

1. $\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f} = 1 \iff \mathfrak{a} \in \mathrm{S}^{\mathrm{f}}$

2. $\mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f} = 1 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}} - \mathrm{S}^{\mathrm{f}}| \in \mathfrak{p}$

3. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f} = 1 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}} \cap \mathrm{S}^{\mathrm{f}}| \in \mathfrak{p}$

4. $\mathfrak{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} = 1 \iff \mathrm{S}^{\mathfrak{a}} \subseteq \mathrm{S}^{\mathrm{f}}$

5. $\mathfrak{a}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f} = 1 \iff \mathrm{S}^{\mathfrak{a}} \cap \mathrm{S}^{\mathrm{f}} \neq \emptyset$

証明　結論 1 は $\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f} = \mathrm{f}(\mathrm{k}/\mathfrak{a})$ なることから，他は算法 $\lambda\mathrm{k}$ の定義 (5.2.2) から直ちに得られる．

補題 5.2.10 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathrm{E}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ **のとき，補題 5.2.8 の記号法の下で次のことが成り立つ．ただし，結論 1 においては** $\mathfrak{a} \in W_\varepsilon$ **とする．**

1. $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff \mathfrak{a} \in \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}$

2. $\mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}} - \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}| \in \mathfrak{p}$

3. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}} \cap \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}| \in \mathfrak{p}$

4. $\mathfrak{a} \in W_\varepsilon$, $\mathfrak{b} \in W_\delta$ **なら** $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{b}\triangle = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ **が成り立つ．ただし右辺は，**$\mathfrak{b} \in W_\delta$ $(= W_\varepsilon \!\to\! \mathbb{T})$ **を** $\mathfrak{a} \in W_\varepsilon$ **に施して出来る** $\mathbb{T}$ **の元である．**

5. $\mathfrak{a} \in W_\varepsilon$ **なら** $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathfrak{a}\triangle) = 1$ **が成り立つ．**

証明　補題 5.2.9 と補題 5.2.8 から結論 1, 2, 3 が得られ，結論 1 と W の拡張関係 $\exists$ の定義から結論 4 が得られ，結論 1 と基本関係 $\exists$ が反射的であることから結論 5 が得られる．

問題 5.2.24 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$ のとき，補題 5.2.8 の記号法の下で次のことが成り立つ．

1. $\mathfrak{a}\,\underline{\mathrm{p}}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}} - \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}| \leq \mathrm{p}$
2. $\mathfrak{a}\,\mathrm{p}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}} \cap \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}| = \mathrm{p}$
3. $\mathfrak{a}\,\overline{\mathrm{p}}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}} \cap \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}| > \mathrm{p}$

問題 5.2.25 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathrm{E}$ のとき次のことが成り立つ（問題 5.2.22 参照）．

1. $\mathfrak{a}\,\forall\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff \mathfrak{a} \sqsubseteq \mathfrak{b}$
2. $\mathfrak{a}\,\exists\pi\,(\mathfrak{b}\triangle) = 1 \iff \mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b} \neq 0$
3. $\mathfrak{a}\,\forall\pi\,(\mathfrak{a}\triangle) = 1$
4. $\mathfrak{a} \not\sqsubseteq 0$ なら $\mathfrak{a}\,\exists\pi\,(\mathfrak{a}\triangle) = 1$

補題 5.2.11 $\mathfrak{a} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ **のとき次の式が成り立つ．ただし** inf **と** sup **とは，完備ブール束** $W_{\mathrm{P}-\{\mathrm{k}\}}$ **における下限と上限とを表す（注意 5.2.1 と補題 5.2.2 参照）．**

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} &= \inf\{(\mathfrak{b}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow (\mathfrak{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \mid \mathfrak{b} \in W_\varepsilon\} = \inf\{(\mathfrak{b}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow (\mathfrak{b}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \mid \mathfrak{b} \in \mathrm{E}\} \\
&= \inf\{(\mathfrak{b}\,\exists\pi\,\mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow (\mathfrak{b}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \mid \mathfrak{b} \in \mathrm{E}\} \\
\mathfrak{a}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f} &= \sup\{(\mathfrak{b}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle) \wedge (\mathfrak{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \mid \mathfrak{b} \in W_\varepsilon\} = \sup\{(\mathfrak{b}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle) \wedge (\mathfrak{b}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \mid \mathfrak{b} \in \mathrm{E}\} \\
&= \sup\{(\mathfrak{b}\,\exists\pi\,\mathfrak{a}\triangle) \wedge (\mathfrak{b}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \mid \mathfrak{b} \in \mathrm{E}\}
\end{aligned}
$$

上の各式は「$\mathfrak{b} \in \mathrm{E}$**」を「**$\mathfrak{b} \in W_\delta$**」に書き換えても成り立つ．**

証明　「$\mathrm{b} \in \mathrm{E}$」を「$\mathrm{b} \in W_\delta$」に書き換えてもいいことは問題 5.2.8 による．

任意の $\theta \in (\mathrm{P} - \{\mathrm{k}\}) \to \mathrm{S}$ をとる．そうすると補題 5.2.7 により，$(\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ なることは，$\mathfrak{a} \ni \mathrm{b}$ なる任意の $\mathrm{b} \in W_\varepsilon$ に対して $\mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{b})\theta\big) = 1$ なることと同等であり，それは，任意の $\mathrm{b} \in W_\varepsilon$ に対して $\mathfrak{a} \not\ni \mathrm{b}$ または $\mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{b})\theta\big) = 1$ の成り立つことと同等である．補題 5.2.10 により，$\mathfrak{a} \not\ni \mathrm{b}$ なることは $\mathrm{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a}\triangle = 0$ なることと同等である．また，$\mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{b})\theta\big) = (\mathrm{b}\, \breve{o}\mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta$ が成り立つ．従って $(\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ なることは，任意の $\mathrm{b} \in W_\varepsilon$ に対して $\mathrm{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a}\triangle = 0$ または $(\mathrm{b}\, \breve{o}\mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ なることと，すなわち $(\mathrm{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow \big((\mathrm{b}\, \breve{o}\mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta\big) = 1$ なることと同等である．$(\mathrm{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow \big((\mathrm{b}\, \breve{o}\mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta\big) = \big((\mathrm{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow (\mathrm{b}\, \breve{o}\mathrm{k}\, \mathrm{f})\big)\theta$ であるから，結局

$$(\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = \inf\Big\{\big((\mathrm{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow (\mathrm{b}\, \breve{o}\mathrm{k}\, \mathrm{f})\big)\theta \;\Big|\; \mathrm{b} \in W_\varepsilon\Big\}$$

が成り立つ．右辺が問題 3.9.38 により $\big(\inf\{(\mathrm{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow (\mathrm{b}\, \breve{o}\mathrm{k}\, \mathrm{f}) \mid \mathrm{b} \in W_\varepsilon\}\big)\theta$ に等しいから，これで $\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f}$ についての最初の等式が証明された．

$(\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ なることはまた，$\mathfrak{a} \sqsupseteq \mathrm{b}$ なる任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{E}$ と $\mathrm{b} \ni \mathrm{c}$ なる任意の $\mathrm{c} \in W_\varepsilon$ に対して $\mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{c})\theta\big) = 1$ なることと同等であり，それは，$\mathfrak{a} \sqsupseteq \mathrm{b}$ なる任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{E}$ に対して $(\mathrm{b} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ なることと同等である．また，問題 5.2.25 により，$\mathfrak{a} \not\sqsupseteq \mathrm{b}$ なることは $\mathrm{b} \forall \pi\, \mathfrak{a}\triangle = 0$ なることと同等である．従ってさっきのようにして，$\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f}$ についての二番目の等式が証明される．

$(\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ なることはまた，$\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b} \neq 0$ なる任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{E}$ に対して $(\mathrm{b} \exists \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ なることと同等である．

実際，$(\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ と仮定して $\mathrm{b} \in \mathrm{E}$，$\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b} \neq 0$ とすれば，$\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b} \ni \mathrm{c}$ なる $\mathrm{c} \in W_\varepsilon$ があってそれが $\mathrm{b} \ni \mathrm{c}$ と $\mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{c})\theta\big) = 1$ をみたすから，$(\mathrm{b} \exists \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ が成り立つ．逆に $\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b} \neq 0$ なる任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{E}$ に対して $(\mathrm{b} \exists \mathrm{k}\, \mathrm{f})\theta = 1$ と仮定して $\mathrm{c} \in W_\varepsilon$，$\mathfrak{a} \ni \mathrm{c}$ とすれば，$\{\mathrm{c}\}$ の定義関数 b が $\mathrm{b} \in W_\delta$ と $\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b} \ni \mathrm{c}$ をみたし，$\mathrm{b} \ni \mathrm{d}$ なる $\mathrm{d} \in W_\varepsilon$ は c に限るから，$\mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{c})\theta\big) = 1$ が成り立つ．

問題 5.2.25 により $\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b} \neq 0$ なることは $\mathrm{b} \exists \pi\, \mathfrak{a}\triangle = 1$ なることと同等であるから，さっきのようにして，$\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f}$ についての三番目の等式が証明される．

$\mathfrak{a} \exists \mathrm{k}\, \mathrm{f}$ についての三式は，$\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f}$ についての三式と同様にしても証明できるし，$\mathfrak{a} \forall \mathrm{k}\, \mathrm{f}$ についての三式から第 5.2.7 項で説明する双対性を使って導くこともできる（注意 5.2.13 参照）．

問題 5.2.26　$\mathfrak{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$，$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ のとき次の式が成り立つ．ただし，結論 1 においては $\mathfrak{a} \in W_\varepsilon$ とする（定理 5.2.8 とその注意参照）．

1. $\mathfrak{a}\, \breve{o}\pi\, (\mathrm{b}^{\square}\triangle) = \mathfrak{a}\, \breve{o}\pi\, (\mathrm{b}\triangle)^{\lozenge} = \big(\mathfrak{a}\, \breve{o}\pi\, (\mathrm{b}\triangle)\big)^{\lozenge}$

2. $\mathfrak{a} \neg\mathfrak{p}\pi\, (\mathrm{b}\triangle) = \mathfrak{a}\, \mathfrak{p}\pi\, (\mathrm{b}^{\square}\triangle) = \mathfrak{a}\, \mathfrak{p}\pi\, (\mathrm{b}\triangle)^{\lozenge} = (\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b}^{\square})\, \mathfrak{p}\pi\, (1\triangle) = \mathrm{b}^{\square} \neg\mathfrak{p}\pi\, (\mathfrak{a}^{\square}\triangle)$

3. $\mathfrak{a}\, \mathfrak{p}\pi\, (\mathrm{b}\triangle) = \mathfrak{a} \neg\mathfrak{p}\pi\, (\mathrm{b}^{\square}\triangle) = \mathfrak{a} \neg\mathfrak{p}\pi\, (\mathrm{b}\triangle)^{\lozenge} = (\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b})\, \mathfrak{p}\pi\, (1\triangle) = \mathrm{b}\, \mathfrak{p}\pi\, (\mathfrak{a}\triangle)$

また，$\mathfrak{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$，$\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q}$ なら $\mathfrak{a}\, \lambda\pi\, (\mathrm{b}\triangle) = \mathfrak{a}\, \lambda\pi\, \big((\mathfrak{a} \sqcap \mathrm{b})\triangle\big)$ が成り立つ．ただし，$\lambda = \breve{o}$ のときは $\mathfrak{a} \in W_\varepsilon$ とする．

略解　$\lambda = \breve{o}$ の場合は，W の基本関係 $\ni$ が反射的であることによる．

問題 5.2.27　$\mathfrak{a} \in \mathrm{E}$，$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ のとき，$\mathfrak{a}\, \mathfrak{p}\pi\, (1\triangle) = \mathfrak{a} \neg\mathfrak{p}\pi\, (0\triangle) = \big(\mathfrak{a} \neg\mathfrak{p}^{\circ}\pi\, (0\triangle)\big)^{\lozenge}$ が成り立ち（定理 5.2.8 参照），この値が 1 であるためには，補題 5.2.8 の記号法の下で $|\mathrm{S}^{\mathfrak{a}}| \in \mathfrak{p}$ の成り立つことが必要十分である．従って，$\mathrm{p} \in \mathbb{P}$ のとき次のことが成り立つ．

1. $\mathfrak{a}\, \overline{\mathrm{p}}\pi\, (1\triangle) = 1 \iff \mathfrak{a}\, \underline{\mathrm{p}}\pi\, (0\triangle) = 0 \iff |\mathrm{S}^{\mathfrak{a}}| > \mathrm{p}$

2. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}\pi\,(1\triangle) = 1 \iff |S^{\mathfrak{a}}| = \mathfrak{p}$

問題 5.2.28 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ のとき $\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathfrak{b}\triangle,\ \mathfrak{a}\triangle \lessdot \mathfrak{b}\triangle$ が成り立つ．

略解　定理 5.2.3 により，任意の $\theta \in \{\pi\}{\to}S$ に対して「$\inf\{\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathfrak{b}\triangle, (\mathfrak{a}\triangle)\theta\} \le (\mathfrak{b}\triangle)\theta$」が成り立つことを示せばいい．それにはまた,「$\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathfrak{b}\triangle = 1 \implies \mathfrak{a}\triangle \le \mathfrak{b}\triangle$」が成り立つことを示せばいい．問題 5.2.25 により，矢印の左側は $\mathfrak{a} \sqsubseteq \mathfrak{b}$ と同等である．そこで問題 5.2.11 を使う．

5.2.7　算法 λk と関係 $\lessdot$

§ ここでは，算法 λk $(\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q})$ と F^* 上の関係 $\lessdot$ や F 上の関係 $\doteq$ のみたす式について調べる．

定義により A の限量子系 $\mathfrak{Q}$ は正負の限量子系 $\mathfrak{P}$ と $\neg\mathfrak{P}$ の直和である．そして例 3.13.7 と問題 3.9.26 と問題 3.13.12 により，$\mathfrak{P}$ は集合算法 $\cap, \cup, \circ$ をブール算法とするブール束である．従って問題 3.3.11 と定理 3.13.2 により，$\neg\mathfrak{P}$ も次の算法 $\cap, \cup, \circ$ をブール算法とするブール束となる．

$$(\neg\mathfrak{p}) \cap (\neg\mathfrak{q}) = \neg(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \qquad (\neg\mathfrak{p}) \cup (\neg\mathfrak{q}) = \neg(\mathfrak{p} \cup \mathfrak{q}) \qquad (\neg\mathfrak{p})^\circ = \neg(\mathfrak{p}^\circ) \tag{5.2.12}$$

この束における順序関係も $\subseteq$ で表す．すなわち（問題 3.9.16 参照），

$$\neg\mathfrak{p} \subseteq \neg\mathfrak{q} \iff \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$$

$\neg\mathfrak{p} \in \neg\mathfrak{P}$ であれば，$\mathfrak{p}$ は順序集合 $\mathbb{P}$ の部分集合である．そこで，$\mathfrak{p}$ が第 3.9.3 項で定義した意味で $\mathbb{P}$ のそれぞれ下方区間・上方区間・真正区間であるとき，$\neg\mathfrak{p}$ は**下方区間・上方区間・真正区間**であると言う．

定理 5.2.8 $s \in S,\ k \in P \in \mathcal{P}K,\ f \in W_P$ **のとき次の式が成り立つ．**

$$(s\,\breve{o}k\,f)^\Diamond = s\,\breve{o}k\,f^\Diamond$$

また，$\mathfrak{a} \in E,\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{P},\ k \in P \in \mathcal{P}K,\ f \in W_P$ **のとき次の式が成り立つ．**

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f)^\Diamond = \mathfrak{a}\,\mathfrak{p}^\circ k\,f \qquad (\mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}k\,f)^\Diamond = \mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}^\circ k\,f \tag{5.2.13}$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f = \mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}k\,f^\Diamond \qquad \mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}k\,f = \mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f^\Diamond \tag{5.2.14}$$

注意 5.2.11 (5.2.1) と (5.2.12) のように定めたことにより，(5.2.13) と (5.2.14) はそれぞれ次のようにまとめて書くことができる．すなわち，$\mathfrak{a} \in E,\ \lambda \in \mathfrak{Q},\ k \in P \in \mathcal{P}K,\ f \in W_P$ のとき

$$(\mathfrak{a}\,\lambda k\,f)^\Diamond = \mathfrak{a}\,\lambda^\circ k\,f \qquad \mathfrak{a}\,\lambda k\,f = \mathfrak{a}\,\neg\lambda k\,f^\Diamond$$

この二式を問題 5.2.18 の重補律を使って変形したり組み合わせたりすれば，次の四式も得られる．

$$(\mathfrak{a}\,\lambda^\circ k\,f)^\Diamond = \mathfrak{a}\,\lambda k\,f, \quad \mathfrak{a}\,\neg\lambda k\,f = \mathfrak{a}\,\lambda k\,f^\Diamond, \quad (\mathfrak{a}\,\lambda k\,f)^\Diamond = \mathfrak{a}\,\neg\lambda^\circ k\,f^\Diamond, \quad (\mathfrak{a}\,\lambda k\,f^\Diamond)^\Diamond = \mathfrak{a}\,\neg\lambda^\circ k\,f$$

証明　第一式は，定理 5.2.4 系 4 の特別な場合である．(5.2.13) と (5.2.14) の第一式は，任意の $\theta \in (P - \{k\}){\to}S$ をとっての次の推論で証明される．

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f)^\Diamond\theta = 1 &\iff (\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 0 \\ &\iff \bigl|\bigl\{s \in S \mid \mathfrak{a}\,\exists\,s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\bigr\}\bigr| \in \mathfrak{p}^\circ \iff (\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}^\circ k\,f)\theta = 1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{a}\,\mathfrak{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\theta = 1 &\iff \bigl|\bigl\{s \in S \mid \mathrm{a} \mathrel{\exists} s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\bigr\}\bigr| \in \mathfrak{p} \\
&\iff \bigl|\bigl\{s \in S \mid \mathrm{a} \mathrel{\exists} s,\ f^{\Diamond}\bigl((k/s)\theta\bigr) = 0\bigr\}\bigr| \in \mathfrak{p} \iff (\mathrm{a}\,\neg\mathfrak{p}\mathrm{k}\,f^{\Diamond})\theta = 1
\end{aligned}
$$

残りの式も同様に証明できるが，証明済みの式から導くこともできる．すなわち，(5.2.14) の第一式において f を $f^{\Diamond}$ で置き換えれば，問題 5.2.18 により $(f^{\Diamond})^{\Diamond} = f$ が成り立つので，(5.2.14) の第二式が得られる．また，(5.2.13) の第一式において f を $f^{\Diamond}$ で置き換えてから (5.2.14) の第二式を使えば，(5.2.13) の第二式が得られる．

注意 5.2.12 定理 5.2.2 により F^* 上の関係 $\lessdot$ は特に算法 $\wedge, \vee, \Diamond$ について擬ブール関係であるから，これらの算法と関係 $\lessdot$ と $\doteq$ およびその W_P $(P \in \mathcal{P}K)$ への制限である $\leq$ と $=$ について，定義 3.21.3 の意味での双対性を使うことができる．ただし，この双対性を以下で使うときには，定理 5.2.8 の諸式（これらも双対性の一種とみなせる）を併用するので，記号 $\wedge, \vee, \lessdot, \leq$ を $\vee, \wedge, \gtrdot, \geq$ に機械的に置き換えるのでなく，定理 3.21.3 の背理律・道理律・対偶律や問題 5.2.18 の双対律・重補律を使っての計算の形をとることにする．

系　$a \in E,\ f \in F,\ p \in \mathbb{P},\ k \in K_f$ **のとき次の二式が成り立つ．**

$$
(a\,\underline{p}k\,f)^{\Diamond} = a\,\overline{p}k\,f^{\Diamond} \qquad\qquad (a\,\overline{p}k\,f)^{\Diamond} = a\,\underline{p}k\,f^{\Diamond}
$$

特に，$a \in E,\ f \in F,\ k \in K_f$ **のとき次の二式が成り立つ．**

$$
(a\,\forall k\,f)^{\Diamond} = a\,\exists k\,f^{\Diamond} \qquad\qquad (a\,\exists k\,f)^{\Diamond} = a\,\forall k\,f^{\Diamond}
$$

証明　後半は，前半と $\forall = \underline{0},\ \exists = \overline{0}$ なる定義による．前半の第一式は次の計算で証明される．

$$
(a\,\underline{p}k\,f)^{\Diamond} = (a\,\neg(\leftarrow p]k\,f)^{\Diamond} = a\,(\leftarrow p]^{\circ}k\,f^{\Diamond} = a\,(p\rightarrow)k\,f^{\Diamond} = a\,\overline{p}k\,f^{\Diamond}
$$

第二式も同様に示せるが，第一式から双対性によって導くこともできる．すなわち，

$$
(a\,\overline{p}k\,f)^{\Diamond} = (a\,\overline{p}k\,f^{\Diamond\Diamond})^{\Diamond} = (a\,\underline{p}k\,f^{\Diamond})^{\Diamond\Diamond} = a\,\underline{p}k\,f^{\Diamond}
$$

注意 5.2.13 定理 5.2.8 と系を使って，補題 5.2.11 の $a\,\forall k\,f$ についての式から $a\,\exists k\,f$ についての式を，次のように双対性によって導くことができる．たとえば最初の等式については

$$
\begin{aligned}
a\,\exists k\,f = a\,\exists k\,f^{\Diamond\Diamond} = (a\,\forall k\,f^{\Diamond})^{\Diamond} &= \bigl(\inf\{(b\,\breve{o}\pi\,a\triangle) \Rightarrow (b\,\breve{o}k\,f^{\Diamond}) \mid b \in W_\varepsilon\}\bigr)^{\Diamond} \\
&= \sup\bigl\{\bigl((b\,\breve{o}\pi\,a\triangle) \Rightarrow (b\,\breve{o}k\,f^{\Diamond})\bigr)^{\Diamond} \mid b \in W_\varepsilon\bigr\} \\
&= \sup\bigl\{(b\,\breve{o}\pi\,a\triangle) \wedge (b\,\breve{o}k\,f^{\Diamond})^{\Diamond} \mid b \in W_\varepsilon\bigr\} \\
&= \sup\{(b\,\breve{o}\pi\,a\triangle) \wedge (b\,\breve{o}k\,f) \mid b \in W_\varepsilon\}
\end{aligned}
$$

二行目の等式が成り立つのは，完備ブール束 $W_{P-\{k\}}$ から $W_{P-\{k\}}$ への写像 $f \mapsto f^{\Diamond}$ が対偶律により逆順写であることと問題 3.9.10 と問題 3.9.18 による．三行目の等式が成り立つのは問題 5.2.3 と問題 5.2.18 による．

定理 5.2.9 $a \in E,\ k \in P \in \mathcal{P}K,\ f \in W_P$ **とし，**$\lambda, \mu \in \neg\mathfrak{P}$ **または** $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ **とすれば，**

$$
a\,\lambda k\,f \wedge a\,\mu k\,f = a\,(\lambda \cap \mu)k\,f \qquad\qquad a\,\lambda k\,f \vee a\,\mu k\,f = a\,(\lambda \cup \mu)k\,f
$$

が成り立つ．

注意 5.2.14 この定理と定理 5.2.8 を合わせれば，$a \in E$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ のとき，$\mathfrak{P}$ から $W_{P-\{k\}}$ への写像 $\lambda \mapsto a\lambda k f$ がブール束としての準写であることが分かる．従って問題 3.13.14 と問題 3.13.6 により，この写像は増写であり，$\mathfrak{P}$ の最小元 $\emptyset$ と最大元 $\mathbb{P}$ をそれぞれ $W_{P-\{k\}}$ の最小元 0 と最大元 1 にうつす．$\neg\mathfrak{P}$ から $W_{P-\{k\}}$ への写像 $\lambda \mapsto a\lambda k f$ についても同様である．

証明　第一式を証明するには，任意の $\theta \in (P-\{k\}) \to S$ に対して

$$(a\lambda k f)\theta = (a\mu k f)\theta = 1 \iff \big(a(\lambda \cap \mu)k f\big)\theta = 1$$

の成り立つことを示せばいい．$\lambda = \mathfrak{p}$, $\mu = \mathfrak{q}$ $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{P})$ の場合には，$(a\lambda k f)\theta = (a\mu k f)\theta = 1$ となる条件は

$$\Big|\big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 1\big\}\Big| \in \mathfrak{p} \qquad \text{かつ} \qquad \Big|\big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 1\big\}\Big| \in \mathfrak{q}$$

であり，$\big(a(\lambda \cap \mu)k f\big)\theta = 1$ となる条件は

$$\Big|\big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 1\big\}\Big| \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$$

であり，この二条件は確かに同等である．第一式の $\lambda, \mu \in \neg\mathfrak{P}$ の場合も第二式も同様に示せるが，$\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ の場合の第一式から双対性によって導くこともできる．すなわちまず $\lambda, \mu \in \neg\mathfrak{P}$ の場合の第一式については，$\neg\lambda, \neg\mu \in \mathfrak{P}$ であるから

$$a\lambda k f \wedge a\mu k f = a\neg\lambda k f^{\Diamond} \wedge a\neg\mu k f^{\Diamond} = a(\neg\lambda \cap \neg\mu)k f^{\Diamond} = a\neg(\lambda \cap \mu)k f^{\Diamond} = a(\lambda \cap \mu)k f$$

次に第二式については，

$$\begin{aligned} a\lambda k f \vee a\mu k f &= (a\lambda k f \vee a\mu k f)^{\Diamond\Diamond} = \big((a\lambda k f)^{\Diamond} \wedge (a\mu k f)^{\Diamond}\big)^{\Diamond} \\ &= (a\neg\lambda^{\circ} k f^{\Diamond} \wedge a\neg\mu^{\circ} k f^{\Diamond})^{\Diamond} = \big(a(\neg\lambda^{\circ} \cap \neg\mu^{\circ})k f^{\Diamond}\big)^{\Diamond} \\ &= \big(a\neg(\lambda \cup \mu)^{\circ} k f^{\Diamond}\big)^{\Diamond} = (a(\lambda \cup \mu)k f)^{\Diamond\Diamond} = a(\lambda \cup \mu)k f \end{aligned}$$

系　$a \in E$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **とし，**$\lambda, \mu \in \neg\mathfrak{P}$ **または** $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ **とし，**$\lambda \subseteq \mu$ **と仮定すれば，**$a\lambda k f \leq a\mu k f$ **が成り立つ．**

証明　$\lambda \subseteq \mu$ より $\lambda \cap \mu = \lambda$ であるから，定理 5.2.9 により $a\lambda k f = a\lambda k f \wedge a\mu k f$ が成り立ち，従って問題 5.2.3 により $a\lambda k f \leq a\mu k f$ が成り立つ（注意 5.2.14 参照）．

系 2 $a \in E$, $p, q \in \mathbb{P}$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **とし，**$p \leq q$ **と仮定すれば，**$a\underline{p}k f \leq a\underline{q}k f$ **と** $a\overline{p}k f \geq a\overline{q}k f$ **とが成り立つ．**

証明　$p \leq q$ なら $\neg(\leftarrow p] \subseteq \neg(\leftarrow q]$ と $(p\rightarrow) \supseteq (q\rightarrow)$ とが成り立つからである．

系 3 $a \in E$, $p, q \in \mathbb{P}$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **のとき次の四式が成り立つ．**

$$a(pq]k f = a\overline{p}k f \wedge (a\overline{q}k f)^{\Diamond} \qquad\qquad a(pq)k f = a(pq]k f \wedge (a\,qk f)^{\Diamond}$$
$$a[pq]k f = a\,pk f \vee a(pq]k f \qquad\qquad a[pq)k f = a\,pk f \vee a(pq)k f$$

証明　一行目第一式は定理 5.2.9 と定理 5.2.8 とを使った次の計算で証明される．

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\,(\mathrm{pq}]\mathrm{k\,f} = \mathrm{a}\,\big((\mathrm{p}\!\rightarrow) \cap (\mathrm{q}\!\rightarrow)^{\circ}\big)\mathrm{k\,f} = \mathrm{a}\,(\mathrm{p}\!\rightarrow)\mathrm{k\,f} \wedge \mathrm{a}\,(\mathrm{q}\!\rightarrow)^{\circ}\mathrm{k\,f} \\ = \mathrm{a}\,(\mathrm{p}\!\rightarrow)\mathrm{k\,f} \wedge \big(\mathrm{a}\,(\mathrm{q}\!\rightarrow)\mathrm{k\,f}\big)^{\Diamond} = \mathrm{a}\,\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f} \wedge (\mathrm{a}\,\overline{\mathrm{q}}\mathrm{k\,f})^{\Diamond}\end{aligned}$$

一行目第二式は，$(\mathrm{pq}) = (\mathrm{pq}] \cap \{\mathrm{q}\}^{\circ}$ を使って同様に証明される．二行目第一式は，定理 5.2.9 により $\mathrm{a}\,[\mathrm{pq}]\mathrm{k\,f} = \mathrm{a}\big(\{\mathrm{p}\} \cup (\mathrm{pq}]\big)\mathrm{k\,f} = \mathrm{a}\,\mathrm{p}\mathrm{k\,f} \vee \mathrm{a}\,(\mathrm{pq}]\mathrm{k\,f}$ として証明される．二行目第二式は，$[\mathrm{pq}) = \{\mathrm{p}\} \cup (\mathrm{pq})$ を使って同様に証明される．

系 4　**$\mathrm{a} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ とし，$\lambda, \mu \in \neg\mathfrak{P}$ または $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ とする．このとき，$\lambda \cap \mu = \neg\emptyset$, $\emptyset$ なら $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f}$, $\mathrm{a}\,\mu\mathrm{k\,f} \lessdot$ が成り立ち，$\lambda \cup \mu = \neg\mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ なら $\lessdot\, \mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f}$, $\mathrm{a}\,\mu\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．**

証明　$\lambda \cap \mu = \neg\emptyset$, $\emptyset$ と仮定する．そうすると，算法の定義 (5.2.2) により $\mathrm{a}\,(\lambda \cap \mu)\mathrm{k\,f} = 0$ であるから（注意 5.2.14 参照），定理 5.2.9 と補題 5.2.1 により $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f} \wedge \mathrm{a}\,\mu\mathrm{k\,f} \lessdot$ が成り立つ．定理 5.2.2 により $\lessdot$ はブール関係であるから，定理 3.21.2 により $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f}$, $\mathrm{a}\,\mu\mathrm{k\,f} \lessdot$ が成り立つ．他の結論についても同様である．

問題 5.2.29　$\mathrm{a} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ のとき，$\mathrm{p} \leq \mathrm{q}$ なる任意の $\mathrm{q} \in \mathbb{P}$ に対し $\mathrm{a}\,\mathrm{p}\mathrm{k\,f}$, $\mathrm{a}\,\overline{\mathrm{q}}\mathrm{k\,f} \lessdot$ が成り立ち，$\mathrm{p} > \mathrm{q}$ なる任意の $\mathrm{q} \in \mathbb{P}$ に対し $\mathrm{a}\,\mathrm{p}\mathrm{k\,f} \lessdot \mathrm{a}\,\overline{\mathrm{q}}\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．

問題 5.2.30　$\mathrm{a} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ かつ $\lessdot\, \mathrm{a}\,\mathrm{p}\mathrm{k\,f}$ のとき，$\mathrm{p} \leq \mathrm{q}$ なる任意の $\mathrm{q} \in \mathbb{P}$ に対し $\mathrm{a}\,\overline{\mathrm{q}}\mathrm{k\,f} \lessdot$ が成り立ち，$\mathrm{p} > \mathrm{q}$ なる任意の $\mathrm{q} \in \mathbb{P}$ に対し $\lessdot\, \mathrm{a}\,\overline{\mathrm{q}}\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．

定理 5.2.10　**$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$, $\lambda \in \mathfrak{Q}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ とし，$\mathrm{a} \sqsupseteq \mathrm{b}$ と仮定する．このとき，λ が下方区間なら $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f} \leq \mathrm{b}\,\lambda\mathrm{k\,f}$ が成り立ち，λ が上方区間なら $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f} \geq \mathrm{b}\,\lambda\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．**

特に，$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ とし，$\mathrm{a} \sqsupseteq \mathrm{b}$ と仮定すれば，$\mathrm{a}\,\underline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f} \leq \mathrm{b}\,\underline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f}$ と $\mathrm{a}\,\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f} \geq \mathrm{b}\,\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．

証明　関係 $\sqsupseteq$ の定義と測度 $|\cdot|$ の増調性により，任意の $\theta \in (\mathrm{P} - \{\mathrm{k}\}) {\rightarrow} \mathrm{S}$ と $\nu = 0, 1$ に対して

$$\Big|\big\{\mathrm{s} \in \mathrm{S} \mid \mathrm{a} \ni \mathrm{s}, \mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{s})\theta\big) = \nu\big\}\Big| \geq \Big|\big\{\mathrm{s} \in \mathrm{S} \mid \mathrm{b} \ni \mathrm{s}, \mathrm{f}\big((\mathrm{k}/\mathrm{s})\theta\big) = \nu\big\}\Big|$$

が成り立つ．従って λ が下方区間なら，任意の $\theta \in (\mathrm{P} - \{\mathrm{k}\}) {\rightarrow} \mathrm{S}$ に対して

$$(\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f})\theta = 1 \implies (\mathrm{b}\,\lambda\mathrm{k\,f})\theta = 1$$

が成り立ち，従って $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f} \leq \mathrm{b}\,\lambda\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．λ が上方区間の場合にも同様に示せるが，以上に示したことから双対性によって導くこともできる．すなわち，λ° が下方区間であるから，

$$\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f} = (\mathrm{a}\,\lambda^{\circ}\mathrm{k\,f})^{\Diamond} \geq (\mathrm{b}\,\lambda^{\circ}\mathrm{k\,f})^{\Diamond} = \mathrm{b}\,\lambda\mathrm{k\,f}$$

後半が成り立つのは，$\neg(\leftarrow\!\mathrm{p}]$ が下方区間で $(\mathrm{p}\!\rightarrow)$ が上方区間だからである．

系　**$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$, $\lambda \in \mathfrak{Q}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ とするとき，λ が下方区間なら $\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$, $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f} \lessdot \mathrm{b}\,\lambda\mathrm{k\,f}$ が成り立ち，λ が上方区間なら $\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$, $\mathrm{b}\,\lambda\mathrm{k\,f} \lessdot \mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．**

特に，$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in W_{\mathrm{P}}$ なら，$\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$, $\mathrm{a}\,\underline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f} \lessdot \mathrm{b}\,\underline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f}$ と $\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$, $\mathrm{b}\,\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f} \lessdot \mathrm{a}\,\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k\,f}$ が成り立つ．

証明　$b\,\forall\pi\,a\triangle,\ a\lambda k\,f \lessdot b\lambda k\,f$ なることは，$b\,\forall\pi\,a\triangle = 1$ なら $a\lambda k\,f \leq b\lambda k\,f$ なることと同等である．また問題 5.2.25 により，$b\,\forall\pi\,a\triangle = 1$ なることは $b \sqsubseteq a$ なることと同等である．このことと定理 5.2.10 により一番目の結論が得られる．その他のことについても同様である．

系 2 $a, b \in E$, $p \in \mathbb{P}$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **のとき次の四不等式が成り立つ．**

$$(a \sqcap b)\,\underline{p}k\,f \geq a\,\underline{p}k\,f \vee b\,\underline{p}k\,f \qquad (a \sqcup b)\,\underline{p}k\,f \leq a\,\underline{p}k\,f \wedge b\,\underline{p}k\,f$$
$$(a \sqcap b)\,\overline{p}k\,f \leq a\,\overline{p}k\,f \wedge b\,\overline{p}k\,f \qquad (a \sqcup b)\,\overline{p}k\,f \geq a\,\overline{p}k\,f \vee b\,\overline{p}k\,f$$

注意 5.2.15 $p = 0$ の場合には右側の二式が等式になることを定理 5.2.13 系 2 で示す．

証明　$a \sqcap b \sqsubseteq a$ かつ $a \sqcap b \sqsubseteq b$ であるから，定理 5.2.10 により $(a \sqcap b)\,\underline{p}k\,f \geq a\,\underline{p}k\,f$ と $(a \sqcap b)\,\underline{p}k\,f \geq b\,\underline{p}k\,f$ が成り立ち，従って定理 3.21.2 と問題 5.2.16 により，左上の式が成り立つ．他の式も同様である．

補題 5.2.12 $a \in E$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $l \in Q \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$, $g \in W_Q$, $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \in F$ **とし** $(m, n \geq 0)$，$a \ni s$ **なる任意の** $s \in S$ **について**

$$s\,\breve{o}k\,f, f_1, \ldots, f_m \lessdot s\,\breve{o}l\,g, g_1, \ldots, g_n$$

であると仮定する．このとき，λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の下方区間か** $\mathfrak{P}$ **の上方区間であれば**

$$a\lambda k\,f, f_1, \ldots, f_m \lessdot a\lambda l\,g, g_1, \ldots, g_n$$

が成り立ち，λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の上方区間か** $\mathfrak{P}$ **の下方区間であれば**

$$a\lambda l\,g, f_1, \ldots, f_m \lessdot a\lambda k\,f, g_1, \ldots, g_n$$

が成り立つ（f, g **の位置に注意）．**

証明　定理 5.2.2 と問題 3.21.5 により，$m \geq 1$ または $n \geq 1$ と仮定していい．そう仮定して $h = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) \wedge (g_1 \vee \cdots \vee g_n)^{\Diamond}$ と定めれば，定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により，仮定の式は $s\,\breve{o}k\,f, h \lessdot s\,\breve{o}l\,g$ と同等であり，結論の式についても同様である．従って $m = 1$, $n = 0$ と仮定していい．そう仮定して記号を $h = f_1$ と改め，$h \in W_R$ とし，まず λ が $\neg\mathfrak{P}$ の下方区間か $\mathfrak{P}$ の上方区間であるときに $a\lambda k\,f, h \lessdot a\lambda l\,g$ の成り立つことを示す．そのためには，定理 5.2.3 によれば，任意の $\theta \in \big((P - \{k\}) \cup (Q - \{l\}) \cup R\big) \to S$ をとり，$h(\theta|_R) = 1$ と仮定して

$$(a\lambda k\,f)\theta|_{P-\{k\}} \leq (a\lambda l\,g)\theta|_{Q-\{l\}}$$

を示せばいい．そこで $a \ni s$ なる任意の $s \in S$ をとると，$s\,\breve{o}k\,f, h \lessdot s\,\breve{o}l\,g$ との仮定により

$$f\big((k/s)\theta|_{P-\{k\}}\big) = (s\,\breve{o}k\,f)\theta|_{P-\{k\}} \leq (s\,\breve{o}l\,g)\theta|_{Q-\{l\}} = g\big((l/s)\theta|_{Q-\{l\}}\big),$$

従って測度 $|\cdot|$ の増調性により，

$$\big|\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta|_{P-\{k\}}\big) = 0\}\big| \geq \big|\{s \in S \mid a \ni s,\ g\big((l/s)\theta|_{Q-\{l\}}\big) = 0\}\big|$$
$$\big|\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta|_{P-\{k\}}\big) = 1\}\big| \leq \big|\{s \in S \mid a \ni s,\ g\big((l/s)\theta|_{Q-\{l\}}\big) = 1\}\big|$$

が成り立つ．従って λ が $\neg\mathfrak{P}$ の下方区間か $\mathfrak{P}$ の上方区間であれば，算法 λk と λl の定義 (5.2.2) により $(a\lambda k\, f)\theta|_{P-\{k\}} \le (a\lambda l\, g)\theta|_{Q-\{l\}}$ が確かに成り立つ．

λ が $\neg\mathfrak{P}$ の上方区間か $\mathfrak{P}$ の下方区間の場合についてのことは，上と同様にも示せるが，以上に示したことから双対性によって導くこともできる．すなわち，$a \ni s$ なる任意の $s \in S$ に対して，$s\breve{o}k\, f, h \lessdot s\breve{o}l\, g$ との仮定により $s\breve{o}l\, g^\lozenge, h \lessdot s\breve{o}k\, f^\lozenge$ が成り立ち，$\neg\lambda$ が $\neg\mathfrak{P}$ の下方区間か $\mathfrak{P}$ の上方区間であるから $a\neg\lambda l\, g^\lozenge, h \lessdot a\neg\lambda k\, f^\lozenge$，従って $a\lambda l\, g, h \lessdot a\lambda k\, f$ が成り立つ．

定理 5.2.11 $a \in E$，$P, Q \in \mathcal{P}K$，$k \in P \cap Q$，$f \in W_P$，$g \in W_Q$，$\alpha, \beta \in F^*$ **とし，**k **は** α, β **に現れる事態の枠には含まれないとし，**

$$f\alpha \lessdot g\beta$$

と仮定する．このとき，λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の下方区間か** $\mathfrak{P}$ **の上方区間であれば**

$$a\lambda k\, f, \alpha \lessdot a\lambda k\, g, \beta$$

が成り立ち，λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の上方区間か** $\mathfrak{P}$ **の下方区間であれば**

$$a\lambda k\, g, \alpha \lessdot a\lambda k\, f, \beta$$

が成り立つ（f, g **の位置に注意）．**

証明　この定理の仮定の下では，定理 5.2.7 により任意の $s \in S$ に対して $s\breve{o}k\, f, \alpha \lessdot s\breve{o}k\, g, \beta$ が成り立つから，補題 5.2.12 によりこの定理の結論が成り立つ．

系　$a \in E$，$P, Q \in \mathcal{P}K$，$k \in P \cap Q$，$f \in W_P$，$g \in W_Q$ **とする．このとき，**λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の下方区間か** $\mathfrak{P}$ **の上方区間であれば**

$$a\lambda k\,(f \wedge g) \le a\lambda k\, f \wedge a\lambda k\, g \qquad\qquad a\lambda k\,(f \vee g) \ge a\lambda k\, f \vee a\lambda k\, g$$

が成り立ち，λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の上方区間か** $\mathfrak{P}$ **の下方区間であれば次の二式が成り立つ．**

$$a\lambda k\,(f \wedge g) \ge a\lambda k\, f \vee a\lambda k\, g \qquad\qquad a\lambda k\,(f \vee g) \le a\lambda k\, f \wedge a\lambda k\, g$$

注意 5.2.16 $\lambda = \forall$ なら第一式が等式になり，$\lambda = \exists$ なら第二式が等式になることを定理 5.2.14 系で示す．

証明　定理 5.2.2 により $f \wedge g \lessdot f$ と $f \wedge g \lessdot g$ が成り立つから，λ が $\neg\mathfrak{P}$ の下方区間か $\mathfrak{P}$ の上方区間であれば，定理 5.2.11 により $a\lambda k\,(f \wedge g) \lessdot a\lambda k\, f$ と $a\lambda k\,(f \wedge g) \lessdot a\lambda k\, g$ が成り立ち，従って定理 3.21.2 と問題 5.2.16 により第一式が成り立つ．残りの式も同様である．

補題 5.2.13 $a \in E$，$\lambda \in \mathfrak{Q}$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$l \in Q \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$，$g \in W_Q$ **とし，**$a \ni s$ **なる任意の** $s \in S$ **について** $s\breve{o}k\, f \doteq s\breve{o}l\, g$ **であると仮定する．このとき** $a\lambda k\, f \doteq a\lambda l\, g$ **が成り立つ．**

証明　任意の $\theta \in \big((P - \{k\}) \cup (Q - \{l\})\big) {\to} S$ をとる．そうすると $a \ni s$ なる任意の $s \in S$ に対して，$s\breve{o}k\, f \doteq s\breve{o}l\, g$ との仮定により

$$f\big((k/s)\theta|_{P-\{k\}}\big) = (s\,\breve{o}k\, f)\theta|_{P-\{k\}} = (s\,\breve{o}l\, g)\theta|_{Q-\{l\}} = g\big((l/s)\theta|_{Q-\{l\}}\big),$$

が成り立つ．従って $\nu = 0, 1$ に対して

$$\{s \in S \mid a \ni s,\ f((k/s)\theta|_{P-\{k\}}) = \nu\} = \{s \in S \mid a \ni s,\ g((l/s)\theta|_{Q-\{l\}}) = \nu\}$$

が成り立つ．従って，算法 λk と λl の定義 (5.2.2) により $(a\lambda k\, f)\theta|_{P-\{k\}} = (a\lambda l\, g)\theta|_{Q-\{l\}}$ が成り立つ．これで $a\lambda k\, f \doteq a\lambda l\, g$ が示された．

問題 5.2.31 補題 5.2.12 から補題 5.2.13 を導け．

略解　$\mathfrak{P}$ の元は $\mathbb{P}$ の区間の有限和であるから，定理 5.2.9 と定理 3.21.7 により，λ が上方区間または下方区間の場合に帰着される．そこで補題 5.2.12 を使う．

定理 5.2.12 $a, b \in E$，$\lambda \in \mathfrak{Q}$，$P, Q \in \mathcal{P}K$，$k \in P \cap Q$，$f \in W_P$，$g \in W_Q$ **とし，**$a \equiv b$，$f \doteq g$ **と仮定すれば，**$a\lambda k\, f \doteq b\lambda k\, g$ **が成り立つ．**

証明　$a \equiv b$ との仮定より任意の $s \in S$ に対し「$a \ni s \iff b \ni s$」が成り立つので，算法 λk の定義 (5.2.2) により $a\lambda k\, f = b\lambda k\, f$ が成り立つ．また，定理 5.2.6 により任意の $s \in S$ について $s\check{o}k\, f \doteq s\check{o}k\, g$ が成り立つので，補題 5.2.13 により $b\lambda k\, f \doteq b\lambda k\, g$ が成り立つ．$\doteq$ が同値関係であるから，これで $a\lambda k\, f \doteq b\lambda k\, g$ が示された．

問題 5.2.32 定理 5.2.10 と定理 5.2.11 から定理 5.2.12 を導け．

略解　定理 5.2.9 と定理 3.21.7 により，λ が上方区間または下方区間の場合に帰着される．その場合，定理 5.2.10 により $a\lambda k\, f = b\lambda k\, f$ が成り立ち，定理 5.2.11 により $b\lambda k\, f \doteq b\lambda k\, g$ が成り立つ．

定理 5.2.13 $a, b \in E$，$p, q \in \mathbb{P}$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$ **のとき次の二式が成り立つ．**

$$(a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\, f \geqslant a\,\underline{p}k\, f,\ b\,\underline{q}k\, f \qquad\qquad (a \sqcup b)\,\overline{p+q}k\, f \lessdot a\,\overline{p}k\, f,\ b\,\overline{q}k\, f$$

証明　定理 5.2.3 により，第一式を証明するには，任意の $\theta \in (P-\{k\}) \to S$ に対して

$$(a\,\underline{p}k\, f)\theta = (b\,\underline{q}k\, f)\theta = 1 \implies ((a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\, f)\theta = 1$$

が成り立つことを示せばいい．そこで，$(a\,\underline{p}k\, f)\theta = (b\,\underline{q}k\, f)\theta = 1$ と仮定する．そうすると，補題 5.2.6 により

$$|\{s \in S \mid a \ni s,\ f((k/s)\theta) = 0\}| \leq p \qquad\qquad |\{s \in S \mid b \ni s,\ f((k/s)\theta) = 0\}| \leq q$$

なる二式が成り立つ．$a \sqcup b$ の定義により

$$\begin{aligned}&\{s \in S \mid a \sqcup b \ni s,\ f((k/s)\theta) = 0\}\\ &\qquad\qquad = \{s \in S \mid a \ni s,\ f((k/s)\theta) = 0\} \cup \{s \in S \mid b \ni s,\ f((k/s)\theta) = 0\}\end{aligned}$$

が成り立つから，測度 $|\cdot|$ の劣加法性と問題 3.32.1 により

$$|\{s \in S \mid a \sqcup b \ni s,\ f((k/s)\theta) = 0\}| \leq p + q$$

が成り立つ．従って，再び補題 5.2.6 により $\big((a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\,f\big)\theta = 1$ が成り立つ．これで第一式が証明された．第二式も同様に示せるが，第一式から双対性によって導くこともできる．すなわち，第一式は $(a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\,f \geq a\,\underline{p}k\,f \wedge b\,\underline{q}k\,f$ と書き換えられるから，

$$
\begin{aligned}
(a \sqcup b)\,\overline{p+q}k\,f &= \big((a \sqcup b)\,\overline{p+q}k\,f\big)^{\Diamond\Diamond} = \big((a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\,f^{\Diamond}\big)^{\Diamond} \\
&\leq (a\,\underline{p}k\,f^{\Diamond} \wedge b\,\underline{q}k\,f^{\Diamond})^{\Diamond} = \big((a\,\overline{p}k\,f)^{\Diamond} \wedge (b\,\overline{q}k\,f)^{\Diamond}\big)^{\Diamond} \\
&= (a\,\overline{p}k\,f \vee b\,\overline{q}k\,f)^{\Diamond\Diamond} = a\,\overline{p}k\,f \vee b\,\overline{q}k\,f
\end{aligned}
$$

これから第二式 $(a \sqcup b)\,\overline{p+q}k\,f \lessdot a\,\overline{p}k\,f,\ b\,\overline{q}k\,f$ が得られる．

系　$a_1, \ldots, a_n \in E,\ p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P},\ f \in F,\ k \in K_f$ **のとき次の二式が成り立つ．ただし，左辺において算法** $\sqcup$ **を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．**

$$
\begin{aligned}
(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\,\underline{p_1 + \cdots + p_n}k\,f &\gtrdot a_1\,\underline{p_1}k\,f, \cdots, a_n\,\underline{p_n}k\,f \\
(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\,\overline{p_1 + \cdots + p_n}k\,f &\lessdot a_1\,\overline{p_1}k\,f, \cdots, a_n\,\overline{p_n}k\,f
\end{aligned}
$$

証明　代表的に第二式を証明する．$n = 1$ ならこの式は自明にみたされる．そこで $n > 1$ と仮定して n についての帰納法を使う．括弧の付け方が $a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n = (a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_i) \sqcup (a_{i+1} \sqcup \cdots \sqcup a_n)$ であれば，定理 5.2.13 により

$$
\begin{aligned}
&(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\,\overline{p_1 + \cdots + p_n}k\,f \\
&\qquad \lessdot (a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_i)\,\overline{p_1 + \cdots + p_i}k\,f,\ (a_{i+1} \sqcup \cdots \sqcup a_n)\,\overline{p_{i+1} + \cdots + p_n}k\,f
\end{aligned}
$$

が成り立ち，帰納法の仮定により

$$
\begin{aligned}
(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_i)\,\overline{p_1 + \cdots + p_i}k\,f &\lessdot a_1\,\overline{p_1}k\,f, \cdots, a_i\,\overline{p_i}k\,f \\
(a_{i+1} \sqcup \cdots \sqcup a_n)\,\overline{p_{i+1} + \cdots + p_n}k\,f &\lessdot a_{i+1}\,\overline{p_{i+1}}k\,f, \cdots, a_n\,\overline{p_n}k\,f
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これら三式に消去律を使えば第二式が得られる．

系 2　$a, b \in E,\ k \in P \in \mathcal{P}K,\ f \in W_P$ **のとき次の二式が成り立つ．**

$$
(a \sqcup b)\,\forall k\,f = a\,\forall k\,f \wedge b\,\forall k\,f \qquad\qquad (a \sqcup b)\,\exists k\,f = a\,\exists k\,f \vee b\,\exists k\,f
$$

証明　定理 5.2.10 系 2 により不等式 $(a \sqcup b)\,\underline{0}k\,f \leq a\,\underline{0}k\,f \wedge b\,\underline{0}k\,f$ が成り立ち，定理 5.2.13 において $p = q = 0$ とすればこれと逆向きの不等式が得られるから，第一式が成り立つ．第二式は，同様にしても双対性を使っても証明できる．

定理 5.2.14　$a \in E,\ p, q \in \mathbb{P},\ P, Q \in \mathcal{P}K,\ k \in P \cap Q,\ f \in W_P,\ g \in W_Q$ **のとき次の二式が成り立つ．**

$$
a\,\underline{p+q}k\,(f \wedge g) \gtrdot a\,\underline{p}k\,f,\ a\,\underline{q}k\,g \qquad\qquad a\,\overline{p+q}k\,(f \vee g) \lessdot a\,\overline{p}k\,f,\ a\,\overline{q}k\,g
$$

証明　定理 5.2.13 の証明と同様であるから要点のみを述べる．第一式を証明するためには，任意の $\theta \in \big((P - \{k\}) \cup (Q - \{k\})\big) \to S$ に対して

$$
(a\,\underline{p}k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = (a\,\underline{q}k\,g)\theta|_{Q-\{k\}} = 1 \implies \big(a\,\underline{p+q}k\,(f \wedge g)\big)\theta = 1
$$

の成り立つことを示せばいいが，

$$\begin{aligned}&\bigl\{s\in S \mid a\,\exists\, s,\ (f\wedge g)\bigl((k/s)\theta\bigr)=0\bigr\}\\&\qquad\subseteq \bigl\{s\in S \mid a\,\exists\, s,\ f\bigl((k/s)\theta|_{P-\{k\}}\bigr)=0\bigr\}\cup\bigl\{s\in S \mid a\,\exists\, s,\ g\bigl((k/s)\theta|_{Q-\{k\}}\bigr)=0\bigr\}\end{aligned}$$

が成り立つので，$(a\,\underline{p}k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=(a\,\underline{q}k\,g)\theta|_{Q-\{k\}}=1$ なら，確かに $\bigl(a\,\underline{p+q}k\,(f\wedge g)\bigr)\theta=1$ が成り立つ．第二式も同様に示せるが，第一式から双対性によって導くこともできる．すなわち，

$$\begin{aligned}&a\,\overline{p+q}k\,(f\vee g)=\bigl(a\,\overline{p+q}k\,(f\vee g)\bigr)^{\Diamond\Diamond}=\bigl(a\,\underline{p+q}k\,(f\vee g)^{\Diamond}\bigr)^{\Diamond}=\bigl(a\,\underline{p+q}k\,(f^{\Diamond}\wedge g^{\Diamond})\bigr)^{\Diamond}\\&\le(a\,\underline{p}k\,f^{\Diamond}\wedge a\,\underline{q}k\,g^{\Diamond})^{\Diamond}=\bigl((a\,\overline{p}k\,f)^{\Diamond}\wedge(a\,\overline{q}k\,g)^{\Diamond}\bigr)^{\Diamond}=(a\,\overline{p}k\,f\vee a\,\overline{q}k\,g)^{\Diamond\Diamond}=a\,\overline{p}k\,f\vee a\,\overline{q}k\,g\end{aligned}$$

系　$a\in E$, $P,Q\in\mathcal{P}K$, $k\in P\cap Q$, $f\in W_P$, $g\in W_Q$ **のとき次の二式が成り立つ．**

$$a\,\forall k\,(f\wedge g)=a\,\forall k\,f\wedge a\,\forall k\,g \qquad\qquad a\,\exists k\,(f\vee g)=a\,\exists k\,f\vee a\,\exists k\,g$$

証明　定理 5.2.11 系により不等式 $a\,\forall k\,(f\wedge g)\le a\,\forall k\,f\wedge a\,\forall k\,g$ が成り立ち，定理 5.2.14 において $p=q=0$ とすればこれと逆向きの不等式が得られるから，第一式が成り立つ．第二式は，同様にも証明できるし，第一式から双対性によって導くこともできる．

例 5.2.2 定理 5.2.10 – 定理 5.2.14 を使って $a,a',b,b'\in E$ について次の二式を証明しよう．

$$\begin{aligned}a\,\forall\pi\,a'\triangle,\ b\,\forall\pi\,b'\triangle &\lessdot (a\sqcap b)\,\forall\pi\,(a'\sqcap b')\triangle\\ a\,\forall\pi\,a'\triangle,\ b\,\forall\pi\,b'\triangle &\lessdot (a\sqcup b)\,\forall\pi\,(a'\sqcup b')\triangle\end{aligned}$$

定理 5.2.10 により $a\,\forall\pi\,a'\triangle\le(a\sqcap b)\,\forall\pi\,a'\triangle$ が成り立ち，定理 5.2.2 に注意しつつこれに付加律と置換律を使えば，$a\,\forall\pi\,a'\triangle$, $b\,\forall\pi\,b'\triangle\lessdot(a\sqcap b)\,\forall\pi\,a'\triangle$ なることが分かる．同様にして，$a\,\forall\pi\,a'\triangle$, $b\,\forall\pi\,b'\triangle\lessdot(a\sqcap b)\,\forall\pi\,b'\triangle$ なることも分かる．そこで次にように推論すれば，第一式が証明される．

$$\begin{aligned}a\,\forall\pi\,a'\triangle,\ b\,\forall\pi\,b'\triangle&\lessdot\bigl((a\sqcap b)\,\forall\pi\,a'\triangle\bigr)\wedge\bigl((a\sqcap b)\,\forall\pi\,b'\triangle\bigr) && (\text{定理 3.21.1 による})\\&=(a\sqcap b)\,\forall\pi\,(a'\triangle\wedge b'\triangle) && (\text{定理 5.2.14 系による})\\&=(a\sqcap b)\,\forall\pi\,(a'\sqcap b')\triangle && (\text{問題 5.2.11 による})\end{aligned}$$

問題 5.2.11 により $a'\triangle\le(a'\sqcup b')\triangle$ が成り立ち，これと定理 5.2.11 により $a\,\forall\pi\,a'\triangle\le a\,\forall\pi\,(a'\sqcup b')\triangle$ が成り立ち，これに付加律と置換律を使えば，$a\,\forall\pi\,a'\triangle$, $b\,\forall\pi\,b'\triangle\lessdot a\,\forall\pi\,(a'\sqcup b')\triangle$ なることが分かる．同様にして，$a\,\forall\pi\,a'\triangle$, $b\,\forall\pi\,b'\triangle\lessdot b\,\forall\pi\,(a'\sqcup b')\triangle$ なることも分かる．そこで次のように推論すれば，第二式が証明される．

$$\begin{aligned}a\,\forall\pi\,a'\triangle,\ b\,\forall\pi\,b'\triangle&\lessdot\bigl(a\,\forall\pi\,(a'\sqcup b')\triangle\bigr)\wedge\bigl(b\,\forall\pi\,(a'\sqcup b')\triangle\bigr) && (\text{定理 3.21.1 による})\\&=(a\sqcup b)\,\forall\pi\,(a'\sqcup b')\triangle && (\text{定理 5.2.13 系 2 による})\end{aligned}$$

定理 5.2.15 $a,b\in E$, $k\in P\in\mathcal{P}K$, $f\in W_P$ **のとき次の三式が成り立つ．ただし，第一式においては** $a\in W_\varepsilon$ **とし，第二式と第三式においては** $p,q\in\mathbb{P}$ **とする．**

$$\begin{aligned}&a\,\check{o}\pi\,b\triangle,\ a\,\check{o}k\,f\lessdot b\,\exists k\,f\\&a\,\underline{p}\pi\,b\triangle,\ a\,\overline{p+q}k\,f\lessdot b\,\overline{q}k\,f \qquad\qquad a\,\overline{p+q}\pi\,b\triangle,\ a\,\underline{p}k\,f\lessdot b\,\overline{q}k\,f\end{aligned}$$

証明　証明すべき三式はいずれも，ある $\lambda, \mu, \nu \in \{\breve{o}\} \cup \Omega$ に対して

$$a\,\lambda\pi\,b\triangle,\ \ a\,\mu k\,f \lessdot b\,\nu k\,f$$

なる形をしている．定理 5.2.3 により，これを証明するには，任意の $\theta \in (P - \{k\}) {\to} S$ に対して

$$a\,\lambda\pi\,b\triangle = 1,\ (b\,\nu k\,f)\theta = 0 \implies (a\,\mu k\,f)\theta = 0$$

が成り立つことを示すか，任意の $\theta \in (P - \{k\}) {\to} S$ に対して

$$(a\,\mu k\,f)\theta = 1,\ (b\,\nu k\,f)\theta = 0 \implies a\,\lambda\pi\,b\triangle = 0$$

が成り立つことを示せばいい．これを三式について順番に行なう．

1. $a\,\breve{o}\pi\,b\triangle = 1$, $(b\,\exists k\,f)\theta = 0$ と仮定する．そうすると，補題 5.2.10 により $b \ni a$，従って問題 5.2.21 により $(b\,\exists k\,f)\theta \geq (a\,\breve{o}k\,f)\theta$ が成り立つから，$(a\,\breve{o}k\,f)\theta = 0$ となる．なお，補題 5.2.11 を使っても直ちに証明される．

2. $a\,\underline{p}\pi\,b\triangle = 1$, $(b\,\overline{q}k\,f)\theta = 0$ と仮定する．そうすると，問題 5.2.24 と補題 5.2.6 により

$$\bigl|\{s \in S \mid a \ni s,\ b \not\ni s\}\bigr| \leq p \qquad\qquad \Bigl|\Bigl\{s \in S \mid b \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\}\Bigr| \leq q$$

なる二式が成り立つ．また，

$$\Bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\} \subseteq \{s \in S \mid a \ni s,\ b \not\ni s\} \cup \Bigl\{s \in S \mid b \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\}$$

が成り立つ．従って，測度 $|\cdot|$ が増加律と劣加法律に従うことと問題 3.32.1 により，

$$\begin{aligned}&\Bigl|\Bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\}\Bigr| \\ &\qquad \leq \bigl|\{s \in S \mid a \ni s,\ b \not\ni s\}\bigr| + \Bigl|\Bigl\{s \in S \mid b \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\}\Bigr| \leq p + q\end{aligned}$$

が成り立つ．補題 5.2.6 により，これは $(a\,\overline{p+q}k\,f)\theta = 0$ なることを示す．

3. $(a\,\underline{p}k\,f)\theta = 1$, $(b\,\overline{q}k\,f)\theta = 0$ と仮定する．そうすると，補題 5.2.6 により

$$\Bigl|\Bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 0\Bigr\}\Bigr| \leq p \qquad\qquad \Bigl|\Bigl\{s \in S \mid b \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\}\Bigr| \leq q$$

なる二式が成り立つ．また，

$$\{s \in S \mid a \ni s,\ b \ni s\} \subseteq \Bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 0\Bigr\} \cup \Bigl\{s \in S \mid b \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\}$$

が成り立つ．従って，測度 $|\cdot|$ が増加律と劣加法律に従うことと問題 3.32.1 により，

$$\begin{aligned}&\bigl|\{s \in S \mid a \ni s,\ b \ni s\}\bigr| \\ &\qquad \leq \Bigl|\Bigl\{s \in S \mid a \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 0\Bigr\}\Bigr| + \Bigl|\Bigl\{s \in S \mid b \ni s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\Bigr\}\Bigr| \leq p + q\end{aligned}$$

が成り立つ．問題 5.2.24 により，これは $a\,\overline{p+q}\pi\,b\triangle = 0$ なることを示す．

系　$a, b \in E$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **のとき次の三式が成り立つ．ただし，第一式においては** $a \in W_\varepsilon$ **とし，第二式と第三式においては** $p, q \in \mathbb{P}$ **とする．**

$$a\,\breve{o}\pi\,b\triangle,\ \ b\,\forall k\,f \lessdot a\,\breve{o}k\,f$$

$$a\,\underline{p}\pi\,b\triangle,\ \ b\,\underline{q}k\,f \lessdot a\,\underline{p+q}k\,f \qquad\qquad a\,\overline{p+q}\pi\,b\triangle,\ \ b\,\underline{q}k\,f \lessdot a\,\overline{p}k\,f$$

証明　定理 5.2.15 の方法で証明できるが，定理 5.2.15 から以下のように双対性を利用して導くことができる．定理 5.2.15 の結論の三式は，いずれも，ある λ, μ, $\nu \in \{\breve{o}\} \cup \Omega$ に対して

$$a\,\lambda\pi\, b\triangle,\ a\,\mu k\, f \lessdot b\,\nu k\, f$$

なる形をしていた．この式において f を $f^{\Diamond}$ で置き換えれば

$$a\,\lambda\pi\, b\triangle,\ a\,\mu k\, f^{\Diamond} \lessdot b\,\nu k\, f^{\Diamond}$$

なる式が得られる．定理 5.2.2 に留意してこれに定理 3.21.3 などを使えば

$$a\,\lambda\pi\, b\triangle,\ (b\,\nu k\, f^{\Diamond})^{\Diamond} \lessdot (a\,\mu k\, f^{\Diamond})^{\Diamond}$$

なる式が得られる．これに定理 5.2.8 を使えば系の三式が得られる．

問題 5.2.33　$a \in E$, $p, q \in \mathbb{P}$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ のとき $a\,\overline{p+q}\pi 1\triangle$, $a\,\underline{p}k\, f \lessdot a\,\overline{q}k\, f$ が成り立つ．

略解　次の式を利用して定理 5.2.15 の方法で証明することができる．

$$\{s \in S \mid a \ni s\} = \big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 0\big\} \cup \big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 1\big\}$$

あるいは，定理 5.2.15 の三番目の式

$$a\,\overline{p+q}\pi\, b\triangle,\ a\,\underline{p}k\, f \lessdot b\,\overline{q}k\, f$$

から次のようにして導くこともできる．すなわちまず，問題 5.2.7 により $a \equiv a^{\natural} \in W_{\delta}$ であるから，定理 5.2.12 により $a \in W_{\delta}$ としていい．そこで，上の式の $a, b \in E$ を $a \in W_{\delta}$ で置き換えて $a\,\overline{p+q}\pi\, a\triangle$, $a\,\underline{p}k\, f \lessdot a\,\overline{q}k\, f$ を得る．問題 5.2.26 により $a\,\overline{p+q}\pi\, a\triangle = (a \sqcap a)\,\overline{p+q}\pi 1\triangle = a\,\overline{p+q}\pi 1\triangle$ なので，これで証明された．

注意 5.2.17　定理 5.2.15 の三番目の式を問題 5.2.33 から導くこともできる．すなわち，問題 5.2.33 と問題 5.2.26 と定理 5.2.10 から得られる次の四式に，定理 5.2.2 によって消去律を使えばいい．

$$(a \sqcap b)\,\overline{p+q}\pi 1\triangle,\ (a \sqcap b)\,\underline{p}k\, f \lessdot (a \sqcap b)\,\overline{q}k\, f$$
$$a\,\overline{p+q}\pi\, b\triangle = (a \sqcap b)\,\overline{p+q}\pi 1\triangle$$
$$a\,\underline{p}k\, f \lessdot (a \sqcap b)\,\underline{p}k\, f$$
$$(a \sqcap b)\,\overline{q}k\, f \lessdot b\,\overline{q}k\, f$$

定理 5.2.16　$a, b_1, \ldots, b_n \in E\ (n \geq 1)$, $f \in F$, $k \in K_f$, $p, q, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}$ **とし** $p \geq \sum_{i=1}^{n} q_i$ **と仮定すれば，次の式が成り立つ．ただし，左辺において算法 ⊔ を適用する順番（括弧の付け方）は任意である．**

$$a\,\underline{q}\pi\,(b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)\triangle,\ a\,\overline{q+p}k\, f \lessdot b_1\,\overline{q_1}k\, f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\, f$$

証明　$b = b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n$ と定める．そうすると，定理 5.2.15 の第二式により

$$a\,\underline{q}\pi\, b\triangle,\ a\,\overline{q+p}k\, f \lessdot b\,\overline{p}k\, f$$

が成り立ち，定理 5.2.9 系 2 により

$$b\,\overline{p}k\,f \lessdot b\,\overline{q_1 + \cdots + q_n}k\,f$$

が成り立ち，定理 5.2.13 系により

$$b\,\overline{q_1 + \cdots + q_n}k\,f \lessdot b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

が成り立つ．これら三式に消去律を使えばこの定理の式が得られる．

注意 5.2.18 定理 5.2.16 の証明に使った三つのことはいずれも，逆に定理 5.2.16 から導かれる．すなわちまず，定理 5.2.16 において $n = 1$, $p = q_1$ としてから p と q を入れ替えれば定理 5.2.15 の第二式となる．また，$n = 1$, $a = b_1$, $q = 0$ としてから，問題 5.2.25 により成り立つ $\lessdot a\forall\pi a\triangle$ とに消去律を使い，さらに q_1 を改めて q と書けば,「$p \geq q \implies a\,\overline{p}k\,f \lessdot a\,\overline{q}k\,f$」が得られる．これが定理 5.2.9 系 2 から引用したことである．また，$a = b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n$, $q = 0$, $p = \sum_{i=1}^n q_i$ としてから $\lessdot a\forall\pi a\triangle$ とに消去律を使えば $b\,\overline{q_1 + \cdots + q_n}k\,f \lessdot b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$ が導かれる．

問題 5.2.34 $a, b_1, \ldots, b_n \in E$ $(n \geq 1)$, $f \in F$, $k \in K_f$, $p, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}$ とし $p > \sum_{i=1}^n q_i$ と仮定すれば，次の式が成り立つ．ただし，左辺において算法 $\sqcup$ を適用する順番は任意である．

$$a\,\forall\pi\,(b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)\triangle,\ a\,[p\!\rightarrow\!)k\,f \lessdot b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

略解　定理 5.2.16 の証明の最初の二式を，定理 5.2.10 系により成り立つ $a\forall\pi\,b\triangle$, $a\,[p\!\rightarrow\!)k\,f \lessdot b\,[p\!\rightarrow\!)k\,f$ と定理 5.2.9 系により成り立つ $b\,[p\!\rightarrow\!)k\,f \lessdot b\,\overline{q_1 + \cdots + q_n}k\,f$ に変えて同様にする．

補題 5.2.14 $a \in E$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$, $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in F$ **のとき，次の四条件は同等である（定理 5.5.14 参照）．**

1. $g_1, \ldots, g_m \lessdot a\,\forall k\,f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**
2. **任意の** $b \in W_\varepsilon$ **に対して** $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \lessdot b\,\breve{o}k\,f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**
3. **任意の** $b \in E$ **に対して** $b\,\forall\pi\,a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \lessdot b\,\forall k\,f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**
4. **任意の** $b \in E$ **に対して** $b\,\exists\pi\,a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \lessdot b\,\exists k\,f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

また，条件 3, 4 における「$b \in E$」を「$b \in W_\delta$」に書き換えた二条件も上の四条件と同等である．

証明　定理 5.2.2 により $\lessdot$ がブール関係であるから，問題 3.21.5 により $m \geq 1$ または $n \geq 1$ と仮定してよく，$h = (g_1 \wedge \cdots \wedge g_m)^\Diamond \vee h_1 \vee \cdots \vee h_n$ と定めれば，定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により

$$\begin{aligned} g_1, \ldots, g_m \lessdot a\,\forall k\,f,\ h_1, \ldots, h_n &\iff \ \lessdot a\,\forall k\,f,\ h \\ b\,\lambda\pi\,a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \lessdot b\,\lambda k\,f,\ h_1, \ldots, h_n &\iff b\,\lambda\pi\,a\triangle \lessdot b\,\lambda k\,f,\ h \end{aligned}$$

が成り立つ $(\lambda = \breve{o}, \forall, \exists)$．従って $m = 0$, $n = 1$ と仮定していい．そう仮定して記号を $h = h_1$ と改め，$h \in W_Q$ とする．そうするとさらに定理 3.21.2 と定理 3.21.4 により

$$\begin{aligned} \lessdot a\,\forall k\,f,\ h &\iff \ \lessdot a\,\forall k\,f \vee h \\ b\,\lambda\pi\,a\triangle \lessdot b\,\lambda k\,f,\ h &\iff \ \lessdot \big((b\,\lambda\pi\,a\triangle) \Rightarrow (b\,\lambda k\,f)\big) \vee h \end{aligned}$$

が成り立つ．また，補題 5.2.11 と問題 5.2.19 により

$$\begin{aligned} a\,\forall k\, f \vee h &= \inf_{W_{P-\{k\}}}\{(b\,\breve{o}\pi\, a\triangle)\Rightarrow(b\,\breve{o}k\, f)\mid b\in W_\varepsilon\}\vee h \\ &= \inf_{W_{(P-\{k\})\cup Q}}\bigl\{\bigl((b\,\breve{o}\pi\, a\triangle)\Rightarrow(b\,\breve{o}k\, f)\bigr)\vee h\mid b\in W_\varepsilon\bigr\} \end{aligned}$$

さらに補題 5.2.1 により，$W_{(P-\{k\})\cup Q}$ の元 g と最大元 1 について「$\lessdot g \iff g=1$」が成り立つ．以上のことから条件 1, 2 が同等であることが分かる．条件 1 が条件 3, 4 およびそこの「$b\in E$」を「$b\in W_\delta$」に書き換えた条件とも同等であることも，同様に証明される．なお，条件 2 から条件 3, 4 が導かれることは補題 5.2.12 からも分かる．

問題 5.2.35 $a\in E$, $k\in P\in\mathcal{P}K$, $f\in W_P$, $g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_n\in F$ のとき，次の四条件は同等である．

1. $a\,\exists k\, f,\ g_1,\ldots,g_m\lessdot h_1,\ldots,h_n$ が成り立つ．
2. 任意の $b\in W_\varepsilon$ に対して $b\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\ b\,\breve{o}k\, f,\ g_1,\ldots,g_m\lessdot h_1,\ldots,h_n$ が成り立つ．
3. 任意の $b\in E$ に対して $b\,\forall\pi\, a\triangle,\ b\,\exists k\, f,\ g_1,\ldots,g_m\lessdot h_1,\ldots,h_n$ が成り立つ．
4. 任意の $b\in E$ に対して $b\,\exists\pi\, a\triangle,\ b\,\forall k\, f,\ g_1,\ldots,g_m\lessdot h_1,\ldots,h_n$ が成り立つ．

略解　補題 5.2.14 と同様にしても示せるし，補題 5.2.14 から双対性によって導くこともできる．

定理 5.2.17 $a,b_1,\ldots,b_n\in E$, $\alpha,\beta\in F^*$ **とし，任意の** $s\in S$ **に対して**

$$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\alpha\lessdot s\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle,\cdots,s\,\breve{o}\pi\, b_n\triangle,\beta$$

が成り立つと仮定する．さらに，$f\in F$, $k\in K_f$, $p,q_1,\ldots,q_n\in\mathbb{P}$ **とし，**$p\geq\sum_{i=1}^n q_i$ **と仮定する（ただし** $n=0$ **の場合は** $\sum_{i=1}^n q_i=0$ **とみなす）．そうすると次の式が成り立つ．**

$$a\,\overline{p}k\, f,\alpha\lessdot b_1\,\overline{q_1}k\, f,\cdots,b_n\,\overline{q_n}k\, f,\beta$$

証明　まず $n=0$ の場合を考え，b を W_δ の最小元 0 と定め q を $\mathbb{P}$ の最小元 0 と定める．そうすると任意の $s\in S$ に対して，$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\alpha\lessdot\beta$ との仮定と付加律により $s\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\alpha\lessdot s\,\breve{o}\pi\, b\triangle,\beta$ が成り立つ．また，$p\geq q$ が成り立ち，算法 $\overline{q}k$ の定義と W の測度の零値律により $b\,\overline{q}k\, f\lessdot$ が成り立つ．従って $a\,\overline{p}k\, f,\ \alpha\lessdot b\,\overline{q}k\, f,\ \beta$ を示せば，消去律により $a\,\overline{p}k\, f,\ \alpha\lessdot\beta$ が得られる．

以上により，$n\geq 1$ と仮定していい．そう仮定して $b=b_1\sqcup\cdots\sqcup b_n$ と定める．ただし，算法 $\sqcup$ は左側から順に適用するものとする．そうすると任意の $s\in S$ に対して，定理 5.2.5 と問題 5.2.11 により次の式が成り立つ．ただし，算法 $\vee$ は左側から順に適用するものとする．

$$s\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle\vee\cdots\vee s\,\breve{o}\pi\, b_n\triangle=s\,\breve{o}\pi\, b\triangle$$

従って，任意の $s\in S$ に対して $s\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\alpha\lessdot s\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle,\cdots,s\,\breve{o}\pi\, b_n\triangle,\beta$ との仮定は，定理 5.2.2 と定理 3.21.2 により，任意の $s\in S$ に対して

$$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\alpha\lessdot s\,\breve{o}\pi\, b\triangle,\beta$$

との条件に書き換えられ，これはさらに補題 5.2.14 により

$$\alpha\lessdot a\,\forall\pi\, b\triangle,\beta$$

と書き換えられる．他方，定理 5.2.16 により

$$a \forall\pi\, b\triangle,\ a\,\overline{p}k\,f \lessdot b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

が成り立つ．これら二式に消去律を使えば，この系の結論の式が得られる．

問題 5.2.36 $a, b_1, \ldots, b_n \in E$, $\alpha, \beta \in F^*$ とし，任意の $s \in S$ に対して

$$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle, \alpha \lessdot s\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle, \cdots, s\,\breve{o}\pi\, b_n\triangle, \beta$$

が成り立つと仮定する．さらに，$f \in F$, $k \in K_f$, $p, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}$ とし，$p > \sum_{i=1}^{n} q_i$ と仮定する．そうすると次の式が成り立つ．

$$a\,[p{\to})k\,f, \alpha \lessdot b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f, \beta$$

定理 5.2.18 $a \in E$, $b \in W_\varepsilon$, $\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q}$, $k, l \in P \in \mathcal{P}K$, $k \neq l$, $f \in W_P$ **のとき次の式が成り立つ．ただし，**$\lambda = \breve{o}$ **の場合は** $a \in W_\varepsilon$ **とする．**

$$a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f) = b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)$$

証明　任意の $\theta \in (P - \{k, l\}){\to}S$ に対して次の式の成り立つことを示せばいい．

$$\big(a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f)\big)\theta = \big(b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)\big)\theta$$

この式は $\lambda = \breve{o}$ の場合には，定理 5.2.4 系 2 により成り立つ．

$\lambda = \neg\mathfrak{p} \in \neg\mathfrak{P}$ の場合には，上の式の左辺が 1 になる条件は

$$\begin{aligned}\big(a\neg\mathfrak{p}k\,(b\,\breve{o}l\,f)\big)\theta = 1 &\iff \big|\big\{s \in S \mid a \ni s,\ (b\,\breve{o}l\,f)\big((k/s)\theta\big) = 0\big\}\big| \in \mathfrak{p} \\ &\iff \big|\big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((l/b)(k/s)\theta\big) = 0\big\}\big| \in \mathfrak{p}\end{aligned}$$

と書けて，右辺が 1 になる条件は

$$\begin{aligned}\big(b\,\breve{o}l\,(a\neg\mathfrak{p}k\,f)\big)\theta = 1 &\iff (a\neg\mathfrak{p}k\,f)\big((l/b)\theta\big) = 1 \\ &\iff \big|\big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)(l/b)\theta\big) = 0\big\}\big| \in \mathfrak{p}\end{aligned}$$

と書ける．この二つの条件は，$(l/b)(k/s)\theta = (k/s)(l/b)\theta$ であるから確かに一致する．

$\lambda \in \mathfrak{P}$ の場合も同様に示せるが，以上に示したことから双対性によって導くこともできる．すなわち，$\neg\lambda^\circ \in \neg\mathfrak{P}$ であるから

$$\begin{aligned}a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f) &= \big(a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f)\big)^{\diamond\diamond} = \big(a\neg\lambda^\circ k\,(b\,\breve{o}l\,f)^{\diamond}\big)^{\diamond} = \big(a\neg\lambda^\circ k\,(b\,\breve{o}l\,f^{\diamond})\big)^{\diamond} \\ &= \big(b\,\breve{o}l\,(a\neg\lambda^\circ k\,f^{\diamond})\big)^{\diamond} = \big(b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)^{\diamond}\big)^{\diamond} = \big(b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)\big)^{\diamond\diamond} = b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)\end{aligned}$$

系　$a, b \in E$, $k, l \in P \in \mathcal{P}K$, $k \neq l$, $f \in W_P$ **とし，**λ **は** $\neg\mathfrak{P}$ **の下方区間か** $\mathfrak{P}$ **の上方区間であるとする．このとき次の二式が成り立つ．**

$$a\lambda k\,(b\,\forall l\,f) \leq b\,\forall l\,(a\lambda k\,f) \qquad\qquad a\lambda k\,(b\,\exists l\,f) \geq b\,\exists l\,(a\lambda k\,f)$$

証明　第一式を証明するために，$b \ni s \in S$ なる任意の s をとる．そうすると，問題 5.2.21 により $b \forall l\, f \leq s \check{o} l\, f$ が成り立つから，定理 5.2.11 と定理 5.2.18 により

$$a \lambda k\,(b \forall l\, f) \leq a \lambda k\,(s \check{o} l\, f) = s \check{o} l\,(a \lambda k\, f)$$

が成り立つ．従って

$$a \lambda k\,(b \forall l\, f) \leq \inf\{s \check{o} l\,(a \lambda k\, f) \mid b \ni s \in S\}$$

が成り立つが，問題 5.2.21 により右辺は $b \forall l\,(a \lambda k\, f)$ に等しい．これで第一式が証明された．第二式も同様に示せるが，$\neg\lambda^{\circ}$ も $\neg\mathfrak{P}$ の下方区間か $\mathfrak{P}$ の上方区間であることに留意して，第一式から双対性によって導くこともできる．すなわち，

$$\begin{aligned} a \lambda k\,(b \exists l\, f) &= \big(a \lambda k\,(b \exists l\, f)\big)^{\Diamond\Diamond} = \big(a \neg\lambda^{\circ} k\,(b \exists l\, f)^{\Diamond}\big)^{\Diamond} = \big(a \neg\lambda^{\circ} k\,(b \forall l\, f^{\Diamond})\big)^{\Diamond} \\ &\geq \big(b \forall l\,(a \neg\lambda^{\circ} k\, f^{\Diamond})\big)^{\Diamond} = \big(b \forall l\,(a \lambda k\, f)^{\Diamond}\big)^{\Diamond} = \big(b \exists l\,(a \lambda k\, f)\big)^{\Diamond\Diamond} = b \exists l\,(a \lambda k\, f) \end{aligned}$$

問題 5.2.37　$a, b \in E,\ k, l \in P \in \mathcal{P}K,\ k \neq l,\ f \in W_P$ のとき次の二式が成り立つ．

$$a \forall k\,(b \forall l\, f) = b \forall l\,(a \forall k\, f) \qquad\qquad a \exists k\,(b \exists l\, f) = b \exists l\,(a \exists k\, f)$$

問題 5.2.38　$a \in E,\ k \in P \in \mathcal{P}K,\ f \in W_P$ のとき次のことが成り立つ．

1. $\lessdot\, a\, p k\, f$ なる $p \in \mathbb{P}$ は高々一つしか存在しない．
2. $P = \{k\}$ なら，$\lessdot\, a\, p k\, f$ なる $p \in \mathbb{P}$ が存在する．

略解　補題 5.2.1 と補題 5.2.6 により，$p \in \mathbb{P}$ が $\lessdot\, a\, p k\, f$ をみたすためには，

$$p = \big|\big\{s \in S \mid a \ni s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 1\big\}\big| \qquad\qquad \big(\theta \in (P - \{k\}) {\to} S\big)$$

なることが必要十分であり，こういう p は高々一つしか存在しない．$P = \{k\}$ なら，$(P - \{k\}){\to}S = \emptyset{\to}S = \{\emptyset\}$ であるから，こういう p が確かに存在する．

5.3　付値と意味写像

$ 前節では，単相格言語の意味論の第一弾として世界論を行ない，単相格言語にとって認識可能な単相格世界を定義してその構造を調べた．ここでは単相格言語の意味論の第二弾として対応論を行なう．つまり，単相格言語がそれにとって認識可能な単相格世界に対応付けられる仕組みを説明する．ただし，単相格言語とそれにとって認識可能な単相格世界は定義 4.1.1 と定義 4.2.1 の意味の形式言語とそれにとっての認識可能世界の特殊例であるから，以下の対応論では，第 4.3 節 – 第 4.6 節の一般論の簡略な復習に若干の特殊論を加えるに過ぎない．

この節を通じて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を単相格言語とし，その他の記号の意味もこれまで通りとする．また，W を A にとって認識可能な単相格世界とする．

5.3.1　定付値と変付値

§ 第 4.3.1 項での定義通りに，A の定数系 Con から W への保型写像 Φ を A から W への**定付値**と呼び，A の変数系 Var から W への保型写像 ν を A から W への**変付値**と呼び，A から W への変付値の全体を Val_W で表す [7]．ただし誤解の恐れのない場合には，添え字の W を省略して Val で表す．この節の主目標は A から W^{Val} への意味写像を定義することである．

5.3.2　単相格世界の Val 乗の T 型代数構造

§ 第 4.3.2 項での定義に従って，単相格世界 W の Val 乗 $W^{\mathrm{Val}} = \bigcup_{t \in T}(\mathrm{Val}{\to}W_t)$ に T 型代数構造を定める．つまり，抽象子 Ωx $(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ を W^{Val} 上の単項算法として然るべく定義し，それを W の巾代数系としての W^{Val} の U 型代数構造に付け加える．そのためには Ωx の W での意味 $(\Omega x)_W$ を然るべく定めればいいが，Ωx の T での定義域 $T_{\Omega x}$ が $\{\emptyset\}$ に等しく $\emptyset\,\Omega x = \delta$，従って

$$W_{\emptyset\,\Omega x} = W_\delta = W_\varepsilon{\to}W_\emptyset = W_{\sigma x}{\to}W_\emptyset$$

であることに留意して，例 4.3.3 の通りに，各 $f \in W_{\sigma x}{\to}W_\emptyset$ に対して $(\Omega x)_W f = f$ と定める．そうすると W^{Val} 上の算法 Ωx が，例 4.3.3 の通りに次のように定まる（ただし，算号 Ωx は A でと同様に右側に書く）．すなわち，定義域と値域については

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \mathrm{Val}{\to}W_\emptyset \qquad\qquad \mathrm{Im}\,\Omega x \subseteq \mathrm{Val}{\to}(W_{\sigma x}{\to}W_\emptyset) = \mathrm{Val}{\to}(W_\varepsilon{\to}W_\emptyset)$$

であって，各 $\varphi \in \mathrm{Val}{\to}W_\emptyset$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して

$$(\varphi\,\Omega x)\nu = \varphi\big((x/\square)\nu\big)$$

ただし，$\varphi\big((x/\square)\nu\big)$ は各 $w \in W_\varepsilon$ に $\varphi\big((x/w)\nu\big) \in W_\emptyset$ を対応させる $W_\varepsilon{\to}W_\emptyset$ の元であり，$(x/w)\nu$ は次のように定義される Val の元である．

$$\big((x/w)\nu\big)y = \begin{cases} w & \cdots \quad y = x \text{ のとき} \\ \nu y & \cdots \quad \mathrm{Var} \ni y \neq x \text{ のとき} \end{cases}$$

従って，任意の $w \in W_\varepsilon$ に対して

$$\big((\varphi\,\Omega x)\nu\big)w = \varphi\big((x/w)\nu\big) \tag{5.3.1}$$

が成り立つ．$W_\delta \cup W_\varepsilon, W_\varepsilon$ 間の拡張関係 $\ni$ の定義によれば，(5.3.1) は

$$(\varphi\,\Omega x)\nu \ni w \iff \varphi\big((x/w)\nu\big) = 1 \tag{5.3.2}$$

と書くこともできる．

W の Val 乗 W^{Val} は，こう定めた算法 Ωx $(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ と W の巾代数系としての U 型代数構造とにより T 型代数系になり，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ の定める射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}}{\to}W$ は，U 型代数系としての保型準写である．

[7] これらの概念の数理心理学における意義については第 1.4.2 項参照.

注意 5.3.1 T 型代数系となった W^{Val} の部分系の中にブール束が沢山ある．すなわち

$$W^{\mathrm{Val}} = (\mathrm{Val}{\to}W_\delta) \cup (\mathrm{Val}{\to}W_\varepsilon) \cup \bigcup_{\mathsf{P}\in\mathcal{P}\mathsf{K}} (\mathrm{Val}{\to}W_\mathsf{P})$$

であるが，注意 5.2.1 や問題 5.2.3 や問題 5.2.5 により，W_P と W_δ は，W の部分系としてブール束であった．従ってこれらの巾代数系として $\mathrm{Val}{\to}W_\mathsf{P}$ と $\mathrm{Val}{\to}W_\delta$ は，定理 3.10.2 と問題 3.13.8 により W^{Val} の部分系であってブール束である．これらブール束における順序関係・最小元・最大元を表す記号は，もとのブール束 W_P と W_δ におけるものを，すなわち $\leq, 0, 1$ と $\sqsubset, 0, 1$ をそのまま使う．これらについて注意 5.2.1 でと同様に以下のことが分かる．まず問題 3.13.9 によれば，$\mathrm{Val}{\to}W_\mathsf{P}$ の順序関係 $\leq$ については

$$\varphi \leq \psi \iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ に対して } \varphi\nu \leq \psi\nu$$

が成り立ち，$\mathrm{Val}{\to}W_\delta$ の順序関係 $\sqsubset$ については同様に次のことが成り立つ．

$$\alpha \sqsubset \beta \iff \text{任意の } \nu \in \mathrm{Val} \text{ に対して } \alpha\nu \sqsubset \beta\nu$$

$\iff$ の右側の $\varphi\nu \leq \psi\nu$ と $\alpha\nu \sqsubset \beta\nu$ の意味はいずれも，注意 5.2.1 に記した通りである．また問題 3.9.12 または問題 3.13.8 によれば，$\mathrm{Val}{\to}W_\mathsf{P}$ と $\mathrm{Val}{\to}W_\delta$ の 0 と 1 はそれぞれ，任意 $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して $0\nu = 0$ と $1\nu = 1$ をみたすことで特徴付けられる．ただし，等号の右側すなわち W_P と W_δ の 0 と 1 の意味も注意 5.2.1 に記した通りである．

問題 5.3.1 $\varphi, \psi \in \mathrm{Val}{\to}W_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ のとき，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} &(\varphi \wedge \psi)\,\Omega x = (\varphi\,\Omega x) \sqcap (\psi\,\Omega x) &\qquad& \varphi \leq \psi \iff \varphi\,\Omega x \sqsubset \psi\,\Omega x \\ &(\varphi \vee \psi)\,\Omega x = (\varphi\,\Omega x) \sqcup (\psi\,\Omega x) && \varphi\,\Omega x = 0 \iff \varphi = 0 \\ &(\varphi^\Diamond)\,\Omega x = (\varphi\,\Omega x)^\Box && \varphi\,\Omega x = 1 \iff \varphi = 1 \end{aligned}$$

略解　注意 5.3.1 と問題 4.3.7 による．

5.3.3　定付値が定める意味写像

§ 前項のように単相格世界 W の Val 乗 W^{Val} の T 型代数構造を定めた結果，Φ が A から W への定付値であれば，第 4.3.3 項で示したことにより，保型準写

$$\Phi^* \in A{\to}W^{\mathrm{Val}}$$

であって任意の $a \in \mathrm{Prm}$ $(= \mathrm{Con}\amalg\mathrm{Var})$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して

$$(\Phi^* a)\nu = \begin{cases} \Phi a & \cdots \quad a \in \mathrm{Con} \text{ のとき} \\ \nu a & \cdots \quad a \in \mathrm{Var} \text{ のとき} \end{cases}$$

をみたすものが一意に存在し，特に保型写像であることにより，Φ^* は

$$\Phi^*(A_t) \subseteq \mathrm{Val}{\to}W_t \qquad (t \in T)$$

をみたす．こういう保型準写 Φ^* を定付値 Φ が定める**意味写像**と呼ぶ．

定理 5.3.1 $a \in A_\varepsilon$ **なら，** A **から** W **への任意の定付値** Φ **に対して，** $\Phi^*\big((a\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\,\Omega x\big)$ **は** $\mathrm{Val}{\to}W_\delta$ **の最大元** 1 **に等しい．** $a \in G$ **のときの** $(a\,\forall\pi\,a\triangle)\,\Omega x$ **についても同様である．**

証明　$(a\,\forall\pi\,a\triangle)\,\Omega x$ についてのことは，注意 5.3.1 によれば，$v \in \mathrm{Val}$ と $w \in W_\varepsilon$ を任意にとっての次の計算で証明される．

$$
\begin{aligned}
&\Big(\big(\Phi^*\big((a\,\forall\pi\,a\triangle)\,\Omega x\big)\big)v\Big)w \\
&= \Big(\Big(\big((\Phi^* a)\,\forall\pi\,(\Phi^* a)\triangle\big)\,\Omega x\Big)v\Big)w \\
&= \big((\Phi^* a)\,\forall\pi\,(\Phi^* a)\triangle\big)\big((x/w)v\big) && \text{((5.3.1) による)} \\
&= (\Phi^* a)\big((x/w)v\big)\,\forall\pi\,\Big((\Phi^* a)\big((x/w)v\big)\Big)\triangle \\
&= 1 && \text{(問題 5.2.25 による)}
\end{aligned}
$$

一番目の等式が成り立つのは Φ^* が保型準写だからであり，三番目の等式が成り立つのは，$(x/w)v$ の定める射影が U 型代数系としての保型準写だからである．$(a\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\,\Omega x$ についてのことは，問題 5.2.25 の代わりに補題 5.2.10 を使って同様に証明される．

問題 5.3.2 $a \in A_\varepsilon$ なら，A から W への任意の定付値 Φ に対して，$\Phi^*(a\,\breve{o}\pi\,a\triangle)$ は $\mathrm{Val}{\to}W_\emptyset$ の最大元 1 に等しい．$a \in G$ のときの $a\,\forall\pi\,a\triangle$ についても同様である．

5.3.4　表現関数

§ **この項を通じて，Φ を単相格言語 A からそれにとって認識可能な単相格世界 W への定付値とする．** そうすると第 4.5 節の前提がみたされるから，その節の一般論がここでもそっくりそのまま，あるいは特殊化されて成り立つ．

つまりまず，各 $a \in A$ とその自由変数列 $x_1, \ldots, x_n$ に対して，Φ の下での $x_1, \ldots, x_n$ に関する a の表現関数

$$a^\Phi(x_1, \ldots, x_n) \in W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n} {\to} W_{\sigma a}$$

が定義され，$a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ の $(w_1, \ldots, w_n) \in W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ における値 $a^\Phi(w_1, \ldots, w_n)$ は，Φ の定める意味写像 $\Phi^* \in A{\to}W^{\mathrm{Val}}$ と $vx_i = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なる $v \in \mathrm{Val}$ によって

$$a^\Phi(w_1, \ldots, w_n) = (\Phi^* a)v$$

と定まる．

そこで，A の相異なる変数 $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 0)$ に対して，$x_1, \ldots, x_n$ を自由変数列とする $a \in A$ の全体を $A(x_1, \ldots, x_n)$ で表し，$W(x_1, \ldots, x_n) = W_{\sigma x_1} \times \cdots \times W_{\sigma x_n}$ と定める．そうすると，抽象子 Ωx $(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ と異なる算号 μ と $a_1, \ldots, a_j \in A(x_1, \ldots, x_n)$ に対して $\mu(a_1, \ldots, a_j)$ が定義されるとき，任意の $(w_1, \ldots, w_n) \in W(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，(4.5.3) に相当する式

$$\big(\mu(a_1, \ldots, a_j)\big)^\Phi(w_1, \ldots, w_n) = \mu\big(a_1^\Phi(w_1, \ldots, w_n), \ldots, a_j^\Phi(w_1, \ldots, w_n)\big) \tag{5.3.3}$$

が成り立つ．

例 5.3.1 $a \in A_\varepsilon$，$b \in G$ とし，$a, b \in A(x_1, \ldots, x_n)$ とする．このとき，a，b，$a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ の表現関数 $a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$，$b^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$，$\big(a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)\big)^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ は，$W(x_1, \ldots, x_n)$ で定義され，

それぞれ W_ε $(=\mathrm{S})$，E $\bigl(=(\mathrm{S}{\to}\mathbb{T})\cup\mathrm{S}\bigr)$，$W_\emptyset$ $(=\mathbb{T})$ の中に値を持つ．そして，(5.3.3) により，任意の $(w_1,\ldots,w_n)\in W(x_1,\ldots,x_n)$ に対して次の式が成り立つ．

$$\bigl(a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)\bigr)^\Phi(w_1,\ldots,w_n)=a^\Phi(w_1,\ldots,w_n)\,\breve{o}\pi\,\bigl(b^\Phi(w_1,\ldots,w_n)\triangle\bigr)$$

右辺の値が 1 となる条件は補題 5.2.10 に述べてある．これによれば，拡張関係 ∃ について

$$\bigl(a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)\bigr)^\Phi(w_1,\ldots,w_n)=1\iff b^\Phi(w_1,\ldots,w_n)\ni a^\Phi(w_1,\ldots,w_n)$$

が成り立つ．　**終**

今の考察で除外されていた抽象子 Ωx $(x\in\mathrm{Var}_\varepsilon)$ について考えるために，$f\in\bigl(A(x,x_2,\ldots,x_n)\bigr)_\emptyset$ とする．そうすると，f の表現関数 $f^\Phi(x,x_2,\ldots,x_n)$ は $W_\varepsilon\times W(x_2,\ldots,x_n)$ で定義され $W_\emptyset$ $(=\mathbb{T})$ の中に値を持つ．他方，定理 3.16.4 により $x_2,\ldots,x_n$ は $f\,\Omega x$ の自由変数列であり，また $f\,\Omega x\in A_\delta$ であるから，$f\,\Omega x$ の表現関数 $(f\,\Omega x)^\Phi(x_2,\ldots,x_n)$ が $W(x_2,\ldots,x_n)$ で定義されて W_δ $(=\mathrm{S}{\to}\mathbb{T})$ の中に値を持つ．これら二つの関数と $w\in W_\varepsilon$ $(=\mathrm{S})$，$(w_2,\ldots,w_n)\in W(x_2,\ldots,x_n)$ について，(4.5.5) に相当する式

$$\bigl((f\,\Omega x)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)\bigr)w=f^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)\tag{5.3.4}$$

が成り立つ．これは，拡張関係 ∃ を使えば次のように書き換えられる．

$$(f\,\Omega x)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)\ni w\iff f^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)=1$$

ここで，one を A_δ の閉元で次の式をみたすものとする．

$$\Phi^*(\mathrm{one})=1\tag{5.3.5}$$

ただし，右辺の 1 は $\mathrm{Val}{\to}W_\delta$ の最大元を表す．定理 5.3.1 と定理 3.16.4 によれば，$x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$ から作られる $(x\,\breve{o}\pi\,x\triangle)\,\Omega x$ と $(x\,\forall\pi\,x\triangle)\,\Omega x$ はこういう元の例である．

さてそこで $p\in\mathbb{P}$ とすれば，定理 3.16.4 により $x_2,\ldots,x_n$ は $\mathrm{one}\,\underline{p}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle$ の自由変数列であるから，表現関数

$$\bigl(\mathrm{one}\,\underline{p}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle\bigr)^\Phi(x_2,\ldots,x_n)$$

が定まり，これは $W(x_2,\ldots,x_n)$ で定義され $W_\emptyset$ の中に値を持つ．これと表現関数 $f^\Phi(x,x_2,\ldots,x_n)$ および $(w_2,\ldots,w_n)\in W(x_2,\ldots,x_n)$ について次のことが成り立つことを示そう．これは，算法 $\underline{p}\pi$ の意味の説明の一端である．

$$\bigl(\mathrm{one}\,\underline{p}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle\bigr)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)=1\iff\bigl|\{w\in W_\varepsilon\mid f^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)=0\}\bigr|\le p\tag{5.3.6}$$

これを証明するには，$\nu x_i=w_i$ $(i=2,\ldots,n)$ なる $\nu\in\mathrm{Val}$ をとって，まず次のように計算する．

$$\begin{aligned}\bigl(\mathrm{one}\,\underline{p}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle\bigr)^\Phi(w_2,\ldots,w_n)&=\bigl(\Phi^*\bigl(\mathrm{one}\,\underline{p}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle\bigr)\bigr)\nu\\&=\bigl(\Phi^*(\mathrm{one})\bigr)\nu\,\underline{p}\pi\,\bigl(\bigl(\Phi^*(f\,\Omega x)\bigr)\nu\bigr)\triangle=1\,\underline{p}\pi\,\bigl(\bigl(\Phi^*(f\,\Omega x)\bigr)\nu\bigr)\triangle\end{aligned}$$

ただし，ここの 1 は W_δ の最大元である．問題 5.2.24 により，いま計算した値が $1\in W_\emptyset$ となるのは $\bigl|\bigl\{w\in W_\varepsilon\mid\bigl(\Phi^*(f\,\Omega x)\bigr)\nu\not\ni w\bigr\}\bigr|\le p$ の場合であり，(5.3.4) により

$$\bigl(\Phi^*(f\,\Omega x)\bigr)\nu\not\ni w\iff f^\Phi(w,w_2,\ldots,w_n)=0$$

なることが分かる．これで (5.3.6) が証明された．

問題 5.3.3 次のことが成り立つ.

$$\big(\mathrm{one}\,\overline{\mathrm{p}}\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega \mathrm{x})\triangle\big)^{\Phi}(w_2,\dots,w_n)=1 \iff \big|\{w\in W_\varepsilon \mid \mathrm{f}^{\Phi}(w,w_2,\dots,w_n)=1\}\big|>\mathrm{p}$$

問題 5.3.4 次の二式が成り立つ（例 4.5.3 参照）.

$$\big(\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega \mathrm{x})\triangle\big)^{\Phi}(w_2,\dots,w_n)=\inf_{\mathbb{T}}\{\mathrm{f}^{\Phi}(w,w_2,\dots,w_n)\mid w\in W_\varepsilon\}$$
$$\big(\mathrm{one}\,\exists\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega \mathrm{x})\triangle\big)^{\Phi}(w_2,\dots,w_n)=\sup_{\mathbb{T}}\{\mathrm{f}^{\Phi}(w,w_2,\dots,w_n)\mid w\in W_\varepsilon\}$$

5.3.5　表現可能関数

§ 引き続いて，**Φ を単相格言語 A からそれにとって認識可能な単相格世界 W への定付値とする．**そうすると，第 4.6 節の内容が以下のように特殊化されて成り立つ.

まず，可変子は抽象子 $\Omega \mathrm{x}$ $(\mathrm{x}\in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ だけであって，定義 4.6.3 の (2) における $\flat_{\Omega \mathrm{x},i}\mathrm{G}$ は，例 4.6.3 に記したようになる.

次に，定義 4.6.4 に記した三条件は，単純化されるか，あるいは，常にみたされているので不要になる．実際まず，$\mathrm{Qvar}=\mathrm{Var}_\varepsilon\neq\emptyset$ であるから，修飾変数条件は「Var_ε は可算個の元を含む」と単純化される．次に，算号基 Γ の部分集合 Γ' を $\Gamma'=\{\Omega\}$ と定めれば，$\Lambda\cap\Gamma\mathrm{Var}=\Gamma'\mathrm{Qvar}$ が成り立つ．従って，可変子条件がみたされる．次に，可変子は $\Omega \mathrm{x}$ $(\mathrm{x}\in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ だけであり，それらは同類であって，それらの W での意味は，第 5.3.2 項で定めた通り W_δ の恒等変換である．従って，意味条件もみたされる（例 4.6.4 参照）.

5.4　文論対と用論対

$ この節と次の節では，単相格言語の意味論の第三弾・最終弾として真偽論を行なうと共に，第 5.6 節以降の演繹論への準備を行なう.

そこで**この節を通じて，**$(\mathrm{A},\mathrm{T},\sigma,\mathrm{Prm})$ **を単相格言語とし，これにとって認識可能な単相格世界の全体を** $\mathcal{W}$ **で表す．**そうすると，各 $W\in\mathcal{W}$ が $W_\emptyset=\mathbb{T}$ をみたし，第 5.3 節で各抽象子 $\Omega \mathrm{x}$ $(\mathrm{x}\in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ の各 $W\in\mathcal{W}$ での意味を定めてあるから，$\emptyset$ を真偽とする単相格論理系 $(\mathrm{A},\mathrm{T},\sigma,\mathrm{Prm}),\mathcal{W}$ が出来 [8]，それは第 4.7.1 項でのように文論対 $(\mathrm{A}_\emptyset,\mathcal{F})$ を定める．すなわち，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値の組みの全体を $\mathfrak{V}$ で表し，$(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ が定める $\mathrm{A}_\emptyset$ から $\mathbb{T}$ への写像 $\mathrm{f}\mapsto(\Phi^*\mathrm{f})\nu$ を Φ^ν で表せば，(Φ,ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての Φ^ν の全体が $\mathcal{F}$ である．そして第 4 章での説明によれば，一般の形式言語の真偽論・演繹論の舞台は文論対であった．しかしここでは，単相格論理系の特殊性に即して，舞台を文論対から「用論対」に次のように拡大する（問題 5.4.1 参照）.

まず，A の用元の全体をこれまで通り H で表す．すなわち，A の格集合 K に対し

$$\mathrm{H}=\bigcup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}}\mathrm{A}_\mathrm{P}$$

そうすると H は，問題 5.1.1 により全域的 $\{\wedge,\vee,\Diamond,\Rightarrow\}$ 代数系であり，問題 5.1.4 により空集合でない．またこれまで通り，各 $\mathrm{f}\in\mathrm{H}$ の格域すなわち型，つまり $\mathrm{f}\in\mathrm{A}_\mathrm{P}$ なる $\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}$ を K_f で表す．そうすると $\mathrm{f}\in\mathrm{A}_{\mathrm{K}_\mathrm{f}}$ が成り立つ.

[8]例 4.7.1 に従って論理系の略記法を使っている.

次に，単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ と A から W への定付値 Φ と変付値 ν を任意にとる．そうすると，A から $W^{\mathrm{Val}_W} = \bigcup_{t \in T}(\mathrm{Val}_W {\to} W_t)$ への意味写像 Φ^* が定まり，これが保型準写であり，射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}_W} {\to} W$ が U 型代数系としての保型準写であって，各 $t \in T$ に対して W^{Val_W} の t 部分が $\mathrm{Val}_W {\to} W_t$ であるから，各 $f \in H$ に $(\Phi^* f)\nu$ を対応させる写像は，H から W の事態の全体

$$F = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} W_P$$

への $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写であり，$(\Phi^* f)\nu \in W_{K_f}$ が成り立つ．ここで各 $P \in \mathcal{P}K$ に対して，$W_P = (P {\to} W_\varepsilon) {\to} \mathbb{T}$ であることに留意して，$P {\to} W_\varepsilon$ の元を新たに P から W への**格付値**と名付ける．そして K から W への格付値 $\theta \in K {\to} W_\varepsilon$ を任意にとる．そうすると，$W_{K_f} = (K_f {\to} W_\varepsilon) {\to} \mathbb{T}$ かつ $\theta|_{K_f} \in K_f {\to} W_\varepsilon$ であるから $\big((\Phi^* f)\nu\big)(\theta|_{K_f})$ は $\mathbb{T}$ に属す．また，(5.2.8) により定義される誇張 $\sharp \in F {\to} W_K$ が問題 5.2.17 により $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写であって $\big((\Phi^* f)\nu\big)(\theta|_{K_f}) = \big((\Phi^* f)\nu\big)^\sharp \theta$ をみたし，θ の定める射影 $\mathrm{pr}_\theta \in W_K {\to} \mathbb{T}$ も問題 5.2.3 により $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写である．従って結局，各 $f \in H$ に $\big((\Phi^* f)\nu\big)(\theta|_{K_f})$ を対応させる写像は，H から $\mathbb{T}$ への $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写，すなわち算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する $\mathbb{T}$ 表現である．これを $\Phi^{\nu,\theta}$ で表す．

$$\Phi^{\nu,\theta} f = \big((\Phi^* f)\nu\big)(\theta|_{K_f}) \qquad (f \in H)$$

また，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値および K からその単相格世界への格付値から成る三つ組みの全体を $\mathfrak{W}$ で表す．

$$\mathfrak{W} = \{(\Phi, \nu, \theta) \mid \Phi, \nu \text{ は A から } W \text{ への定付値と変付値，} \theta \text{ は K から } W \text{ への格付値，} W \in \mathcal{W}\}$$

そして，(Φ, ν, θ) を $\mathfrak{W}$ 全体に亘らせての写像 $\Phi^{\nu,\theta} \in H {\to} \mathbb{T}$ の全体を $\mathcal{G}$ で表す．

$$\mathcal{G} = \{\Phi^{\nu,\theta} \mid (\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}\}$$

そうすると組み $(H, \mathcal{G})$ は，算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する $\mathbb{T}$ 表現論対である．これを単相格論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の定める**用論対**と呼ぶ．

以後用論対 $(H, \mathcal{G})$ について説明する際には，第 3 章でと同様に AZ 記法を頻用するが，これを少し変更しなければならない．すなわち，H^* の元は第 3 章と同じく $\alpha, \beta, \ldots$ で表すが，H の元は $x, y, \ldots$ でなく $f, g, \ldots$ や $a, b, \ldots$ で表す．

用論対 $(H, \mathcal{G})$ は束値論対の一つであるから，これについて第 3.30 節における束値論対の一般論により，与論・核・恒真元・論理・弱論理・理論の概念が定まる．これらを「用」を冠して**用与論・用核・用論理・用理論**と呼んだり,「用」を挟んで**恒真用元・弱用論理**と呼んだりもする．

注意 5.4.1 用論理をこのように関係として定義することは，数学的に便利である反面で数理心理学の観点からは少し逸脱することになる．なぜなら数理心理学では，第 1 章で説明したように人間機械論に立脚して思考機械・人間を代数系として抽象するのであり，特に用論理は心論理代数系の算法に相当する．従っていずれは，用論理の中でも算法とみなされるものに注目することになる（注意 3.24.6 参照）．

用論対 $(H, \mathcal{G})$ についてまた，第一種・第二種・第三種の別や，矛盾集合・矛盾元・完全集合・実例や，四種の完全性（修飾なしの完全性・弱完全性・強完全性・超完全性）・健全性・充分性や，偏恒真関係・恒真関係・恒真式・式論対の概念が定まる．

ただし，用論対に即して定義・表現を多少補正しなければならない．たとえば，一般の束値論対 $(A, \mathcal{F})$ については，各 $f \in \mathcal{F}$ に対する f 真元（f の下で真である元）とは，$fa = 1$ をみたす元

$a \in A$ のことであった．用論対 $(H, \mathcal{G})$ でこれに当たるのは各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対する $\Phi^{\nu,\theta}$ 真元（$\Phi^{\nu,\theta}$ の下で真である元）で，これは $\big((\Phi^* f)\nu\big)(\theta|_{K_f}) = 1$ をみたす元 $f \in H$ のことであるが，これを (Φ, ν, θ) **真元**または (Φ, ν, θ) **の下で真である元**と呼び換える．

また，一般の束値論対 $(A, \mathcal{F})$ については，各 $f \in \mathcal{F}$ に対する偏 f 真関係 $\vDash_f$ とは，(3.30.1) によれば A^*, A 間の「$a_1 \cdots a_n \vDash_f b \iff \inf\{fa_1, \ldots, fa_n\} \leq fb$」と定義される関係であった．用論対 $(H, \mathcal{G})$ でこれに当たるのは各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対する偏 $\Phi^{\nu,\theta}$ 真関係 $\vDash_{\Phi^{\nu,\theta}}$ であるが，これを**偏** (Φ, ν, θ) **真関係**と呼び換え，$\vDash_{\Phi,\nu,\theta}$ と表記換えする．すなわち，各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対し，$\vDash_{\Phi,\nu,\theta}$ は H^*, H 間の次のように定義される関係である．

$$
\begin{aligned}
f_1 \cdots f_n \vDash_{\Phi,\nu,\theta} g &\iff \inf\{\Phi^{\nu,\theta} f_1, \ldots, \Phi^{\nu,\theta} f_n\} \leq \Phi^{\nu,\theta} g \\
&\iff \inf\big\{\big((\Phi^* f_1)\nu\big)(\theta|_{K_{f_1}}), \ldots, \big((\Phi^* f_n)\nu\big)(\theta|_{K_{f_n}})\big\} \leq \big((\Phi^* g)\nu\big)(\theta|_{K_g})
\end{aligned}
$$

なお (3.30.2) により，用論対 $(H, \mathcal{G})$ の偏恒真関係 $\vDash$ については次のことが成り立つ．

$$
f_1 \cdots f_n \vDash g \iff \text{任意の } (\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W} \text{ に対して } f_1 \cdots f_n \vDash_{\Phi,\nu,\theta} g \tag{5.4.1}
$$

同様に，一般の束値論対 $(A, \mathcal{F})$ ついて各 $f \in \mathcal{F}$ に対して第 3.30.1 項で定義した f 真関係 $\preccurlyeq_f$ に当たるものは，各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対する $\Phi^{\nu,\theta}$ 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi^{\nu,\theta}}$ であるが，これを (Φ, ν, θ) **真関係**と呼び換え，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta}$ と表記換えする．すなわち，各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対し，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta}$ は H^* 上の

$$
\begin{aligned}
f_1 \cdots f_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta} g_1 \cdots g_n &\iff \inf\{\Phi^{\nu,\theta} f_1, \ldots, \Phi^{\nu,\theta} f_m\} \leq \sup\{\Phi^{\nu,\theta} g_1, \ldots, \Phi^{\nu,\theta} g_n\} \\
&\iff \inf\big\{\big((\Phi^* f_1)\nu\big)(\theta|_{K_{f_1}}), \ldots, \big((\Phi^* f_m)\nu\big)(\theta|_{K_{f_m}})\big\} \\
&\qquad \leq \sup\big\{\big((\Phi^* g_1)\nu\big)(\theta|_{K_{g_1}}), \ldots, \big((\Phi^* g_n)\nu\big)(\theta|_{K_{g_n}})\big\}
\end{aligned}
$$

と定義される関係である．なお (3.30.5) により，用論対 $(H, \mathcal{G})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ については

$$
f_1 \cdots f_m \preccurlyeq g_1 \cdots g_n \iff \text{任意の } (\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W} \text{ に対して } f_1 \cdots f_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta} g_1 \cdots g_n
$$

が成り立つ．また，$\alpha \preccurlyeq \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ は第 3.30.1 項での通り恒真式と呼ぶが，$\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta} \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ は，やはり (Φ, ν, θ) **真式**と呼び換える．

同様の事情で，定義 3.30.1 で一般の束値論対 $(A, \mathcal{F})$ に対して定義した $\mathcal{F}$ 実例に当たるものを，用論対 $(H, \mathcal{G})$ に対して次のように定義する．

定義 5.4.1 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ が $X \in \mathcal{P}H$ の $\mathfrak{W}$ **実例**であるとは，$X \subseteq (\Phi^{\nu,\theta})^{-1}1$ かつ $\Phi^{\nu,\theta} \neq 1$ であることを言う．また，$(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ が $(X, Y) \in \mathcal{P}H \times \mathcal{P}H$ の $\mathfrak{W}$ **実例**であるとは，$(X, Y) \subseteq \big((\Phi^{\nu,\theta})^{-1}1, (\Phi^{\nu,\theta})^{-1}0\big)$ かつ $\Phi^{\nu,\theta} \neq 1$ であることを言う．さらに，上の二つの意味での $\mathfrak{W}$ 実例 (Φ, ν, θ) が $W \in \mathcal{W}$ への定付値と変付値と格付値から成るとき，(Φ, ν, θ) を W **上の** $\mathfrak{W}$ **実例**と呼ぶ．

注意 5.4.2 用論対 $(H, \mathcal{G})$ は算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関する $\mathbb{T}$ 表現論対であるから，これに第 3.30.3 項の諸概念を適用することができ，たとえば以下のようなことが分かる．

1. 問題 3.30.31 により $1 \notin \mathcal{G}$ が成り立つ．従って，定義 5.4.1 における $\Phi^{\nu,\theta} \neq 1$ なる条件は，任意の $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ によってみたされる．
2. 定理 3.30.17 により $(H, \mathcal{G})$ の恒真関係はブール関係である．
3. 定理 3.30.25 により算法 $\Diamond$ は $(H, \mathcal{G})$ の補法・否法である（定理 3.27.5 参照）．

問題 5.4.1 単相格論理系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の定める用論対 $(H, \mathcal{G})$ と文論対 $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ について次のことが成り立つ.

1. $(H, \mathcal{G})$ は $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ の拡大である．従って $(H, \mathcal{G})$ の偏恒真関係と恒真関係はそれぞれ，$(A_\emptyset, \mathcal{F})$ の偏恒真関係と恒真関係の拡大である.
2. 各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対して，偏 (Φ, ν, θ) 真関係 $\vDash_{\Phi,\nu,\theta}$ と (Φ, ν, θ) 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta}$ はそれぞれ，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対する偏 (Φ, ν) 真関係 $\vDash_{\Phi,\nu}$ と (Φ, ν) 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ の拡大である.
3. $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ が $X \in \mathcal{P}(A_\emptyset)$ の $\mathfrak{W}$ 実例であるためには，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ が X の $\mathfrak{V}$ 実例であることが必要十分である.

略解　$f \in A_\emptyset$ に対しては任意の $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ が空集合規約により $\Phi^{\nu,\theta} f = \big((\Phi^* f)\nu = \Phi^\nu f$ をみたすからである.

5.5　恒真関係と全包関係

＄ 引き続いて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ **を単相格論理系とする．** その他の記号の意味もこれまで通りとする．特に，K は A の格集合を表し，$T = \{\delta, \varepsilon\} \cup \mathcal{P}K$ であり，G は A の体元の全体を表し，H は A の用元の全体を表す.

$$G = A_\delta \cup A_\varepsilon \qquad\qquad H = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} A_P$$

また，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値および K からその単相格世界への格付値の組みの全体を $\mathfrak{W}$ で表し，各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対して H から $\mathbb{T}$ への写像 $f \mapsto \big((\Phi^* f)\nu\big)(\theta|_{K_f})$ を $\Phi^{\nu,\theta}$ で表し，こういう写像の全体を $\mathcal{G}$ で表す．そうすると，$(H, \mathcal{G})$ が $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の定める用論対である．この節では $(H, \mathcal{G})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ について調べる．標題の「全包関係」はそのために補助的に使う G^* 上の関係の一つである.

5.5.1　Φ 真関係・(Φ, ν) 真関係と全包関係

§ 用論対 $(H, \mathcal{G})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ について調べるためにこの項で，まず第 4.8 節の Φ 真関係 $\preccurlyeq_\Phi$ に倣って H^* 上の補助的な関係 $\preccurlyeq_\Phi$ と $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ を定義し，次にそれに倣って全包関係を定義する.

Φ を A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値とすれば，意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}_W}$ が保型準写であるから，各用元 $f \in H = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} A_P$ に対し $\Phi^* f \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} (\mathrm{Val}_W \to W_P)$ が成り立つ．従ってさらに $\nu \in \mathrm{Val}_W$ なら，$(\Phi^* f)\nu$ は W の事態の集合 $F = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} W_P$ に属す．また，(5.2.6) により F 上に擬順序関係 $\lessdot$ が定義され，それは (5.2.10) により普遍単位半群 F^* 上のブール関係に拡張された.

このことを踏まえて次の定義を設ける．すなわちまず $H^* \times H^*$ の元 (α, β) は，これまで $\alpha \to \beta$ または $\beta \leftarrow \alpha$ で表して矢式または式と呼んできたが，これを**用元式**とも呼ぶ（これに対し $(A_\emptyset)^* \times (A_\emptyset)^*$ の元は**文式**とも呼ぶ）．また，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値の組みの全体をこれまで通り $\mathfrak{V}$ で表す．そして，用元式 $f_1 \cdots f_m \to g_1 \cdots g_n$ が $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して

$$(\Phi^* f_1)\nu \cdots (\Phi^* f_m)\nu \lessdot (\Phi^* g_1)\nu \cdots (\Phi^* g_n)\nu$$

をみたすとき，すなわち W_K 上の順序関係 $\le$ と誇張 $\sharp \in F{\to}W_K$ に関して

$$\inf\{((\Phi^* f_1)\nu)^\sharp, \ldots, ((\Phi^* f_m)\nu)^\sharp\} \le \sup\{((\Phi^* g_1)\nu)^\sharp, \ldots, ((\Phi^* g_n)\nu)^\sharp\}$$

をみたすとき，$f_1 \cdots f_m \to g_1 \cdots g_n$ は (Φ, ν) **真**であると言い，このことを

$$f_1 \cdots f_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu} g_1 \cdots g_n \tag{5.5.1}$$

で表し，こうして定まる H^* 上の関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ を (Φ, ν) **真関係**と呼ぶ．また，用元式 $\alpha \to \beta$ と A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値 Φ が任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して $\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta$ をみたすとき，$\alpha \to \beta$ は Φ **真**であると言い，このことを

$$\alpha \preccurlyeq_\Phi \beta \tag{5.5.2}$$

で表し，こうして定まる H^* 上の関係 $\preccurlyeq_\Phi$ を Φ **真関係**と呼ぶ．またこれに関連して，A から $\mathcal{W}$ に属す単相格世界への定付値の全体を $\mathfrak{U}$ で表す．

$$\mathfrak{U} = \{\Phi \mid \Phi \text{ は } A \text{ から } W \text{ への定付値，} W \in \mathcal{W}\}$$

定理 5.5.1 **Φ を A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値とし $\nu \in \mathrm{Val}_W$ とする．このとき，用元式 $\alpha \to \beta$ が $\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta$ をみたすためには，任意の $\theta \in K{\to}W_\varepsilon$ に対して $\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta} \beta$ をみたすことが必要十分である．また，文式 $\alpha \to \beta$ が $\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta$ をみたすためには，(4.7.1) の意味で $\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta$ なることが必要十分である．**

証明　用元 $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ の格域をそれぞれ $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ とすれば，$P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n$ がそれぞれ W の事態 $(\Phi^* f_1)\nu, \ldots, (\Phi^* f_m)\nu, (\Phi^* g_1)\nu, \ldots, (\Phi^* g_n)\nu$ の枠である．従って定理 5.2.3 により，$f_1 \cdots f_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu} g_1 \cdots g_n$ すなわち $(\Phi^* f_1)\nu \cdots (\Phi^* f_m)\nu \lessdot (\Phi^* g_1)\nu \cdots (\Phi^* g_n)\nu$ なるためには，任意の $\theta \in K{\to}W_\varepsilon$ に対して

$$\inf\{((\Phi^* f_1)\nu)(\theta|_{P_1}), \ldots, ((\Phi^* f_m)\nu)(\theta|_{P_m})\} \le \sup\{((\Phi^* g_1)\nu)(\theta|_{Q_1}), \ldots, ((\Phi^* g_n)\nu)(\theta|_{Q_n})\}$$

の成り立つことが必要十分である．そしてこれは $f_1 \cdots f_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu,\theta} g_1 \cdots g_n$ なることと同等である．従って前半が成り立つ．後半は，前半と問題 5.4.1 による．あるいは，空集合規約により $((\Phi^* f_i)\nu)(\theta|_{P_i}) = (\Phi^* f_i)\nu$，$((\Phi^* g_j)\nu)(\theta|_{Q_j}) = (\Phi^* g_j)\nu$ なることによる．

系　**用元式 $\alpha \to \beta$ が $\alpha \preccurlyeq \beta$ をみたすためには，任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して $\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta$ をみたすことも，任意の $\Phi \in \mathfrak{U}$ に対して $\alpha \preccurlyeq_\Phi \beta$ をみたすことも，共に必要十分である．**

証明　これまでの定義と定理 5.5.1 による．

なお，用元 f, g が $f \preccurlyeq g$ と $f \succcurlyeq g$ をみたすとき（$\succcurlyeq$ は $\preccurlyeq$ の双対関係を表す），f と g の**真偽が一致する**とか f, g は**同値**であるとかと言い（問題 3.27.23 参照），このことを

$$f \asymp g$$

で表す．$f \asymp_\Phi g$ と $f \asymp_{\Phi,\nu} g$ の意味も同様に定義する．こうして H 上の三種の関係 $\asymp$，$\asymp_\Phi$，$\asymp_{\Phi,\nu}$ も定義された．

問題 5.5.1 $\preccurlyeq$，$\preccurlyeq_\Phi$，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ それぞれの H への制限は擬順序関係であり，それぞれの対称核が $\asymp$，$\asymp_\Phi$，$\asymp_{\Phi,\nu}$ に等しい（注意 3.21.1 参照）．従って $\asymp$，$\asymp_\Phi$，$\asymp_{\Phi,\nu}$ は同値関係である（定理 5.5.5 参照）．

問題 5.5.2 Φ を A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値とするとき，次のことが成り立つ．

1. $f, g \in A_P$ が $f \preccurlyeq_\Phi g$ をみたすためには，$\mathrm{Val}_W \to W_P$ の順序関係 $\leq$ について $\Phi^* f \leq \Phi^* g$ をみたすことが必要十分である．
2. $f \in A_P$ が $\preccurlyeq_\Phi f$ をみたすためには，$\Phi^* f$ が $\mathrm{Val}_W \to W_P$ の最大元 1 に等しいことが必要十分である．
3. $\preccurlyeq_\Phi$ は最大関係ではない．

略解　結論 1 は問題 5.2.16 と注意 5.3.1 により，結論 2 は補題 5.2.1 と注意 5.3.1 による．結論 2 により，$f \in A_P$ が $\preccurlyeq_\Phi f$ をみたせば，$\preccurlyeq_\Phi f^\Diamond$ は成り立たない．このことから結論 3 が得られる．

問題 5.5.3 任意の $a \in G$ に対して $a \forall \pi\, a \triangle$ は恒真用元である．

略解　問題 5.3.2 と問題 5.5.2 による．

問題 5.5.4 $a_1, \ldots, a_n \in G$ のとき次のことが成り立つ．ただし，算法 $\sqcap, \sqcup, \wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．

$$(a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_n)\triangle \asymp a_1\triangle \wedge \cdots \wedge a_n\triangle$$
$$(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle \asymp a_1\triangle \vee \cdots \vee a_n\triangle$$

略解　問題 5.2.11，問題 5.2.9，問題 5.2.18 による．

定理 5.5.1 系は用論対 $(H, \mathcal{G})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ の別定義を与えるものとみなせる．全包関係はこの別定義に倣って次のように定義される．

Φ を A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値とする．そうすると，$\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}_W}$ が保型準写であるから，各体元 $a \in G = A_\delta \cup A_\varepsilon$ に対し $\Phi^* a \in (\mathrm{Val}_W \to W_\delta) \cup (\mathrm{Val}_W \to W_\varepsilon)$ が成り立つ．従ってさらに $\nu \in \mathrm{Val}_W$ なら，$(\Phi^* a)\nu$ は W の実在の集合 $E = W_\delta \cup W_\varepsilon$ に属す．他方，(5.2.3) により E 上に擬順序関係 $\sqsubseteq$ が定義され，それは (5.2.5) により普遍単位半群 E^* 上の擬ブール関係に拡張された．

このことを踏まえて次の規約と定義を設ける．すなわちまず，G の元を $a, b, \ldots$ で表し，G^* の元を H^* の元と同様 $\alpha, \beta, \ldots$ で表す．次に $G^* \times G^*$ の元 (α, β) を $H^* \times H^*$ の元と同様 $\alpha \to \beta$ または $\beta \leftarrow \alpha$ で表して**体元式**と呼ぶ．そして，体元式 $a_1 \cdots a_m \to b_1 \cdots b_n$ が $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して

$$(\Phi^* a_1)\nu \cdots (\Phi^* a_m)\nu \sqsubseteq (\Phi^* b_1)\nu \cdots (\Phi^* b_n)\nu$$

をみたすとき，すなわち W_δ 上の順序関係 $\sqsubset$ と複化 $\natural \in E \to W_\delta$ に関して

$$\inf\bigl\{\bigl((\Phi^* a_1)\nu\bigr)^\natural, \ldots, \bigl((\Phi^* a_m)\nu\bigr)^\natural\bigr\} \sqsubset \sup\bigl\{\bigl((\Phi^* b_1)\nu\bigr)^\natural, \ldots, \bigl((\Phi^* b_n)\nu\bigr)^\natural\bigr\}$$

をみたすとき，$a_1 \cdots a_m \to b_1 \cdots b_n$ は (Φ, ν) **包式**であると言い，このことを

$$a_1 \cdots a_m \lesssim_{\Phi,\nu} b_1 \cdots b_n \tag{5.5.3}$$

で表し，こうして定まる G^* 上の関係 $\lesssim_{\Phi,\nu}$ を (Φ, ν) **包関係**と呼ぶ．また，体元式 $\alpha \to \beta$ と A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値 Φ が任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して $\alpha \lesssim_{\Phi,\nu} \beta$ をみたすとき，$\alpha \to \beta$ は Φ **包式**であると言い．このことを

$$\alpha \lesssim_\Phi \beta$$

で表し，こうして定まる G^* 上の関係 $\lesssim_\Phi$ を Φ **包関係**と呼ぶ．そうすると，体元式 $\alpha \to \beta$ が任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して $\alpha \lesssim_{\Phi,\nu} \beta$ をみたすことは，任意の $\Phi \in \mathfrak{U}$ に対して $\alpha \lesssim_\Phi \beta$ をみたすことと同等である．これら同等な条件がみたされるとき，$\alpha \to \beta$ は**全包式**であると言い，このことを

$$\alpha \lesssim \beta$$

で表し，こうして定まる G^* 上の関係 $\lesssim$ を**全包関係**と呼ぶ．特に，$\lesssim \mathfrak{a}$ をみたす体元 $\mathfrak{a}$ を**全包元**と呼ぶ．さらに，閉元である全包元を**閉全包元**と呼ぶ．また，体元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a} \lesssim \mathfrak{b}$ と $\mathfrak{a} \gtrsim \mathfrak{b}$ をみたすとき，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ の**範囲が一致する**とか $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ は**同値**であるとかと言い，このことを

$$\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}$$

で表す．$\mathfrak{a} \simeq_\Phi \mathfrak{b}$ と $\mathfrak{a} \simeq_{\Phi,\nu} \mathfrak{b}$ の意味も同様に定義する．こうして G 上の三種の関係 $\simeq$, $\simeq_\Phi$, $\simeq_{\Phi,\nu}$ も定義された．

問題 5.5.5 $\lesssim$, $\lesssim_\Phi$, $\lesssim_{\Phi,\nu}$ それぞれの G への制限は擬順序関係であり，それぞれの対称核が $\simeq$, $\simeq_\Phi$, $\simeq_{\Phi,\nu}$ に等しい．従って $\simeq$, $\simeq_\Phi$, $\simeq_{\Phi,\nu}$ は同値関係である（定理 5.5.6 参照）．

先取りすれば，問題 5.5.7 により閉全包元が複数存在する．また全包元は，定理 5.5.19 によりすべて $A_\delta - \mathrm{Prm}_\delta$ に属し，定理 5.5.9 により同値関係 $\simeq$ についての一同値類を成す．さらに問題 5.5.6 により，$\mathfrak{a} \in A_\delta$ が全包元であるためには，A から任意の単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ に対して $\Phi^*\mathfrak{a}$ がブール束 $\mathrm{Val}_{W \to W_\delta}$ の最大元 1 に等しいことが必要十分である．そこでしばしば，閉全包元の任意の一つを記号 one で表す．この記法は (5.3.5) で既に同じ趣旨で使った [9]．

問題 5.5.6 Φ を A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値とするとき，次のことが成り立つ．

1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in A_\delta$ が $\mathfrak{a} \lesssim_\Phi \mathfrak{b}$ をみたすためには，$\mathrm{Val}_{W \to W_\delta}$ の順序関係 $\sqsubset$ について $\Phi^*\mathfrak{a} \sqsubset \Phi^*\mathfrak{b}$ をみたすことが必要十分である．
2. $\mathfrak{a} \in A_\delta$ が $\lesssim_\Phi \mathfrak{a}$ をみたすためには，$\Phi^*\mathfrak{a}$ が $\mathrm{Val}_{W \to W_\delta}$ の最大元 1 に等しいことが必要十分である．
3. $\lesssim_\Phi$ は最大関係ではない．

略解　結論 1 は問題 5.2.6 と注意 5.3.1 により，結論 2 は問題 5.2.10 と注意 5.3.1 による．

問題 5.5.7 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ のとき，任意の $\mathfrak{a} \in A_\varepsilon$ に対して $(\mathfrak{a}\,\breve{\sigma}\pi\,\mathfrak{a}\triangle)\,\Omega x$ は全包元であり，$(x\,\breve{\sigma}\pi\,x\triangle)\,\Omega x$ は閉全包元である．$\mathfrak{a} \in G$ に対する $(\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle)\,\Omega x$ と $(x\,\forall\pi\,x\triangle)\,\Omega x$ についても同様である．

略解　定理 5.3.1 と問題 5.5.6 による．

補題 5.5.1 $\mathfrak{a} \in G$ **が全包元であれば，任意の** $\mathfrak{b} \in A_\varepsilon$ **に対して** $\preccurlyeq \mathfrak{b}\,\breve{\sigma}\pi\,\mathfrak{a}\triangle$ **が成り立ち，任意の** $\mathfrak{c} \in G$ **に対して** $\preccurlyeq \mathfrak{c}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle$ **が成り立つ** [10]**．**

[9] この記法には,「one」が「一」と「人」を意味し，日本語でも「一（ひとつ）」と「人」が同語源であろうという自然言語的の理由もある．第 7.3.5.4 条参照.
[10] 定理 5.5.9，定理 5.5.20，定理 5.5.21 参照.

証明　A から任意の単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ と任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ をとる．そうすると，問題 5.2.10 により W_δ の最大元 1 について $(\Phi^* a)\nu \equiv 1$ が成り立つから，

$$(\Phi^* a)\nu \ni (\Phi^* b)\nu \qquad\qquad (\Phi^* a)\nu \sqsupseteq (\Phi^* c)\nu$$

が成り立つ．従って，補題 5.2.10 と問題 5.2.25 により，

$$(\Phi^* b)\nu\, \breve{o}\pi \big((\Phi^* a)\nu\big)\triangle = 1 \qquad\qquad (\Phi^* c)\nu\, \forall\pi \big((\Phi^* a)\nu\big)\triangle = 1$$

が成り立つ．Φ^* と射影 pr_ν が U 型代数系としての保型準写だから，この二式は

$$\big(\Phi^*(b\, \breve{o}\pi\, a\triangle)\big)\nu = 1 \qquad\qquad \big(\Phi^*(c\, \forall\pi\, a\triangle)\big)\nu = 1$$

なることを示す．従って $\preccurlyeq b\, \breve{o}\pi\, a\triangle$ と $\preccurlyeq c\, \forall\pi\, a\triangle$ が成り立つ．　**終**

以上が $\preccurlyeq$ と $\lesssim$ の定義とその注釈である．次の二つの補題は $\preccurlyeq$ と $\lesssim$ の関係を示す．ただしこれらは，定理 5.5.7 と定理 5.5.8 で一般化される．

補題 5.5.2 $a, b \in G$ **のとき，任意の** $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ **に対して次のことが成り立つ．**

$$a \lesssim_{\Phi,\nu} b \iff a\triangle \preccurlyeq_{\Phi,\nu} b\triangle \iff\ \preccurlyeq_{\Phi,\nu} a\, \forall\pi\, b\triangle$$

証明　一番目の $\iff$ は次の推論で証明される．ただし，この推論中の三番目の $\iff$ が成り立つのは，Φ^* と射影 pr_ν が U 型代数系としての保型準写だからである．

$$\begin{aligned}
a \lesssim_{\Phi,\nu} b &\iff (\Phi^* a)\nu \sqsubseteq (\Phi^* b)\nu \\
&\iff (\Phi^* a)\nu\triangle \leq (\Phi^* b)\nu\triangle && \text{(問題 5.2.11 による)} \\
&\iff \big(\Phi^*(a\triangle)\big)\nu \leq \big(\Phi^*(b\triangle)\big)\nu \\
&\iff a\triangle \preccurlyeq_{\Phi,\nu} b\triangle
\end{aligned}$$

二番目の $\iff$ は次の推論で証明される．

$$\begin{aligned}
a \lesssim_{\Phi,\nu} b &\iff (\Phi^* a)\nu \sqsubseteq (\Phi^* b)\nu \\
&\iff (\Phi^* a)\nu\, \forall\pi \big((\Phi^* b)\nu\big)\triangle = 1 && \text{(問題 5.2.25 による)} \\
&\iff \big(\Phi^*(a\, \forall\pi\, b\triangle)\big)\nu = 1 \\
&\iff\ \lessdot \big(\Phi^*(a\, \forall\pi\, b\triangle)\big)\nu && \text{(補題 5.2.1 による)} \\
&\iff\ \preccurlyeq_{\Phi,\nu} a\, \forall\pi\, b\triangle
\end{aligned}$$

補題 5.5.3 $f, g \in A_\emptyset$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **のとき，任意の** $\Phi \in \mathfrak{U}$ **に対して次のことが成り立つ．**

$$f \preccurlyeq_\Phi g \iff f\,\Omega x \lesssim_\Phi g\,\Omega x \qquad\qquad \begin{aligned} \preccurlyeq_\Phi g &\iff\ \lesssim_\Phi g\,\Omega x \\ f \preccurlyeq_\Phi\ &\iff f\,\Omega x \lesssim_\Phi \end{aligned}$$

注意 5.5.1 補題 5.5.2 により，補題 5.5.3 の最初の結論は「$f \preccurlyeq_\Phi g \iff\ \preccurlyeq_\Phi (f\,\Omega x)\, \forall\pi\, (g\,\Omega x)\triangle$」なる結論と同等である．この結論を定理 5.5.15 で一般化する．

証明　「$f \preccurlyeq_\Phi g \iff f\,\Omega x \lesssim_\Phi g\,\Omega x$」なることは次の推論で証明される．

$$
\begin{aligned}
f \preccurlyeq_\Phi g &\iff \Phi^* f \le \Phi^* g && \text{(問題 5.5.2 による)}\\
&\iff (\Phi^* f)\,\Omega x \sqsubset (\Phi^* g)\,\Omega x && \text{(問題 5.3.1 による)}\\
&\iff \Phi^*(f\,\Omega x) \sqsubset \Phi^*(g\,\Omega x) &&\\
&\iff f\,\Omega x \lesssim_\Phi g\,\Omega x && \text{(問題 5.5.6 による)}
\end{aligned}
$$

「$\preccurlyeq_\Phi g \iff \lesssim_\Phi g\,\Omega x$」なることは次の推論で証明される．

$$
\begin{aligned}
\preccurlyeq_\Phi g &\iff \Phi^* g = 1 && \text{(問題 5.5.2 による)}\\
&\iff (\Phi^* g)\,\Omega x = 1 && \text{(問題 5.3.1 による)}\\
&\iff \Phi^*(g\,\Omega x) = 1 &&\\
&\iff \lesssim_\Phi g\,\Omega x && \text{(問題 5.5.6 による)}
\end{aligned}
$$

「$f \preccurlyeq_\Phi \iff f\,\Omega x \lesssim_\Phi$」なることも同様に証明される．

問題 5.5.8　$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とするとき，$f\,\Omega x$ が全包元であるためには f が恒真用元であることが必要十分である．

問題 5.5.9　$f_1, \ldots, f_n, f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ のとき次の三式が成り立つ．ただし，算法 $\wedge, \vee, \sqcap, \sqcup$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意である．

$$
\begin{gathered}
(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)\,\Omega x \simeq f_1\,\Omega x \sqcap \cdots \sqcap f_n\,\Omega x\\
(f_1 \vee \cdots \vee f_n)\,\Omega x \simeq f_1\,\Omega x \sqcup \cdots \sqcup f_n\,\Omega x\\
(f^{\Diamond})\,\Omega x \simeq (f\,\Omega x)^{\Box}
\end{gathered}
$$

略解　第一式は任意の $\Phi \in \mathfrak{U}$ をとっての次の計算で証明される．ただし，この計算中の二番目の等式が成り立つのは問題 5.3.1 による．

$$
\begin{aligned}
\Phi^*\bigl((f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)\,\Omega x\bigr) &= \bigl(\Phi^* f_1 \wedge \cdots \wedge \Phi^* f_n\bigr)\,\Omega x\\
&= (\Phi^* f_1)\,\Omega x \sqcap \cdots \sqcap (\Phi^* f_n)\,\Omega x = \Phi^*(f_1\,\Omega x \sqcap \cdots \sqcap f_n\,\Omega x)
\end{aligned}
$$

定理 5.5.2　**A の用元 $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ が A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値 Φ に対して**

$$f_1 \cdots f_m \preccurlyeq_\Phi g_1 \cdots g_n$$

をみたすとし，$x_1, \ldots, x_l$ を A の相異なる変数とし，c_k を $A_{\sigma x_k}$ の元とし $(k = 1, \ldots, l)$，f_i と g_j において x_k が c_k から自由であるとする $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, l)$．このとき

$$f_1(x_k/c_k) \cdots f_m(x_k/c_k) \preccurlyeq_\Phi g_1(x_k/c_k) \cdots g_n(x_k/c_k)$$

が成り立つ．ただし記号 (x_k/c_k) は代入 $\left(\dfrac{x_1, \ldots, x_l}{c_1, \ldots, c_l}\right)$ を表す．体元についても同様のことが成り立つ（定理 4.8.6 参照）．

証明　$f'_i = f_i(x_k/c_k)$，$g'_j = g_j(x_k/c_k)$ と定め，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_{\mathcal{W}}$ をとる．そうすると，変付値

$$\nu' = \left(\frac{x_1, \ldots\ldots, x_l}{(\Phi^* c_1)\nu, \ldots, (\Phi^* c_l)\nu}\right)\nu$$

に対して　$(\Phi^* f_1)\nu' \cdots (\Phi^* f_m)\nu' \lessdot (\Phi^* g_1)\nu' \cdots (\Phi^* g_n)\nu'$　が成り立つ．定理 4.4.2 により $(\Phi^* f_i)\nu' = (\Phi^* f'_i)\nu$，$(\Phi^* g_j)\nu' = (\Phi^* g'_j)\nu$ であるから，これで証明された．

問題 5.5.10 $A_\emptyset$ の二元 f, g が $f \preccurlyeq g$ をみたすためには，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu} f$ なる任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して $\preccurlyeq_{\Phi,\nu} g$ の成り立つことが必要十分である．

略解　必要性：$f \preccurlyeq g$ であるなら，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu} f$ なる任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して $1 \le (\Phi^* f)\nu \le (\Phi^* g)\nu$，従って $\preccurlyeq_{\Phi,\nu} g$ が成り立つ．

十分性：任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ をとると，補題 5.2.1 により $\preccurlyeq_{\Phi,\nu} f$ なることは $(\Phi^* f)\nu = 1$ なることと同等であって g についても同様であるから，所与の条件は $(\Phi^* f)\nu \le (\Phi^* g)\nu$ なることを示す．従って $f \preccurlyeq g$ が成り立つ．

5.5.2　体元の同一律

§ 標題の**同一律**は，次の定理の二つの結論を指す．

定理 5.5.3 次のことが成り立つ．

1. **任意の $a \in A_\varepsilon$ に対して $\preccurlyeq a \,\breve{\sigma}\pi\, a\triangle$ が成り立つ．**
2. **任意の $a \in G$ に対して $\preccurlyeq a \,\forall\pi\, a\triangle$ が成り立つ．**

証明　結論 1 を証明するために任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ をとる．そうすると，Φ^* と射影 pr_ν が U 型代数系としての保型準写であるから，任意の $a \in A_\varepsilon$ に対して

$$\big(\Phi^*(a \,\breve{\sigma}\pi\, a\triangle)\big)\nu = (\Phi^* a)\nu \,\breve{\sigma}\pi\, \big((\Phi^* a)\nu\big)\triangle$$

なる式が成り立つ．任意の $W \in \mathcal{W}$ の基本関係 $\ni$ が反射的であるから，補題 5.2.10 により，この式の右辺の値は 1 に等しい．従って問題 5.5.2 により結論 1 が成り立つ．結論 2 は問題 5.3.2 と問題 5.5.3 の言い換えであるが，これらはすなわち結論 1 と同様にして証明される．

注意 5.5.2 後出の問題 5.5.18 を先に示してあれば，それと $\preccurlyeq$ についての消去律を使って結論 1 を結論 2 から導くことができる．次の定理における条件 1, 2 についても同様である．

定理 5.5.4 $a, b \in A_\varepsilon$ **が次の三条件のいずれかをみたせば** $a = b$ **が成り立つ．**

1. $\preccurlyeq a \,\breve{\sigma}\pi\, b\triangle$　　**2.** $\preccurlyeq a \,\forall\pi\, b\triangle$　　**3.** $a \lesssim b$

証明　補題 5.5.2 により条件 2, 3 が同等であるから，条件 1, 2 について考える．そのために注意 5.2.3 の手順で，特別な単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ を次のように作る．まず，$T_{\mathfrak{F}}$ と同類の汎代数系 $S\ (\neq \emptyset)$ として A_ε をとる．次に，S 上の反射的関係 $\ni$ として相等関係 $=$ をとる．次に，問題 3.32.30 により S 上の $\mathbb{P}$ 測度があるので，その任意の一つ $|X|$ をとる．注意 5.2.3 によればこれで，S を基底とし $\ni$ を基本関係とし $|X|$ を測度とする単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ が作れた．

$\mathrm{Con}_\varepsilon \cup \mathrm{Var}_\varepsilon = \mathrm{Prm}_\varepsilon \subseteq \mathrm{A}_\varepsilon = \mathrm{S} = W_\varepsilon$ であり，任意の $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$ に対して $W_\mathrm{t} \neq \emptyset$ であるから，A から W への定付値 Φ と変付値 ν で任意の $\mathrm{c} \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ と $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して $\Phi\mathrm{c} = \mathrm{c}$ と $\nu\mathrm{x} = \mathrm{x}$ をみたすものがあり，それらは任意の $\mathrm{d} \in \mathrm{Prm}_\varepsilon$ に対して $(\Phi^*\mathrm{d})\nu = \mathrm{d}$ をみたす．A_ε から W_ε $(= \mathrm{A}_\varepsilon)$ への写像 $\mathrm{e} \mapsto (\Phi^*\mathrm{e})\nu$ と恒等写像が共に $\mathfrak{F}$ 擬写であって定理 5.1.2 により $\mathrm{A}_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_\mathfrak{F}$ であるから，任意の $\mathrm{e} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ に対して $(\Phi^*\mathrm{e})\nu = \mathrm{e}$ が成り立つ．

ここでまず $\preccurlyeq \mathrm{a}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle$ と仮定する．そうすると問題 5.5.2 により $\big(\Phi^*(\mathrm{a}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\big)\nu = 1$，従って Φ^* と射影 pr_ν が U 型代数系としての保型準写であることにより $(\Phi^*\mathrm{a})\nu\,\check{o}\pi\,\big((\Phi^*\mathrm{b})\nu\big)\triangle = 1$，従って前段で示したことにより $\mathrm{a}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle = 1$ が成り立つ．これは補題 5.2.10 によれば $\mathrm{b} \ni \mathrm{a}$ を意味し，$\ni$ が相等関係であるから $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ が成り立つ．

次に $\preccurlyeq \mathrm{a}\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle$ と仮定する．そうすると，前段と同様にして $\mathrm{a}\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle = 1$ が得られる．これは問題 5.2.25 によれば $\mathrm{b} \sqsupseteq \mathrm{a}$ を意味し，問題 3.9.54 により関係 $\sqsupseteq$ も S 上では相等関係であるから，やはり $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ が成り立つ．

5.5.3　ブール表現との関係

§ 恒真式や全包式の定義の意味を第 3.19 節やそれに続く節の内容と結びつけて解釈することができる．そしてそう解釈すると，恒真式や全包式について，色々なことが直ちに分かる．

まず，W_K がブール束であるから，H と W_K と写像 $\mathrm{H} \ni \mathrm{a} \mapsto \big((\Phi^*\mathrm{a})\nu\big)^\sharp \in W_\mathrm{K}$ の三つ組みは束写系であり，(Φ, ν) 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ はこの束写系の定める関係に等しい．さらに，問題 5.1.1 により H は全域的 $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 代数系であり，写像 $\mathrm{H} \ni \mathrm{a} \mapsto \big((\Phi^*\mathrm{a})\nu\big)^\sharp \in W_\mathrm{K}$ は，三つの $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写

$$\mathrm{H} \ni \mathrm{a} \mapsto \Phi^*\mathrm{a} \in \bigcup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}} (\mathrm{Val}{\to}W_\mathrm{P})$$

$$\bigcup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}} (\mathrm{Val}{\to}W_\mathrm{P}) \ni \mathrm{b} \mapsto \mathrm{b}\nu \in \mathrm{F}$$

$$\mathrm{F} \ni \mathrm{f} \mapsto \mathrm{f}^\sharp \in W_\mathrm{K}$$

の合成であるから，それ自身 H から W_K への $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写である．第 3.19 節の言葉で言い換えれば，この写像は H の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関して W_K 上のブール表現である．従って，定理 3.19.6 により $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ はブール関係であり，$\preccurlyeq_\Phi$ と $\preccurlyeq$ も，ν や Φ を動かしたときの $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ の交わりであるから，問題 3.21.23 によりやはりブール関係である．つまり次のことが成り立つ．

定理 5.5.5 H^* **上の関係** $\preccurlyeq$，$\preccurlyeq_\Phi$，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ **はブール関係である．すなわち，第 3.19 節の反復律・付加律・巾等律・置換律・強消去律と算法** $\wedge, \vee$ **についての両限律，および算法** $\Diamond$，$\Rightarrow$ **についての両補律・三導律に従う．**

従ってまた，第 3.19 節に続く節の事柄を $\preccurlyeq$，$\preccurlyeq_\Phi$，$\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$，$\asymp$，$\asymp_\Phi$，$\asymp_{\Phi,\nu}$ に適用することができる．なお $\preccurlyeq$ がブール関係であることは，$(\mathrm{H}, \mathcal{G})$ が $\mathbb{T}$ 表現論対であることからすでに分かっており，その他に分かることと共に注意 5.4.2 に記してある．

全包式についても事情はほぼ同様である．W_δ がブール束であるから，G と W_δ と写像 $\mathrm{G} \ni \mathrm{a} \mapsto \big((\Phi^*\mathrm{a})\nu\big)^\natural \in W_\delta$ の三つ組みは束写系であり，関係 $\lesssim_{\Phi,\nu}$ はこの束写系の定める関係に等しい．さらに，問題 5.1.2 により G は全域的 $\{\sqcap, \sqcup, \Box\}$ 代数系であり，写像 $\mathrm{G} \ni \mathrm{a} \mapsto \big((\Phi^*\mathrm{a})\nu\big)^\natural \in W_\delta$ は，三つの $\{\sqcap, \sqcup, \Box\}$ 準写

$$\mathrm{G} \ni \mathrm{a} \mapsto \Phi^*\mathrm{a} \in (\mathrm{Val}{\to}W_\delta) \cup (\mathrm{Val}{\to}W_\varepsilon)$$

$$(\mathrm{Val}{\to}W_\delta)\cup(\mathrm{Val}{\to}W_\varepsilon)\ni b\mapsto b\nu\in \mathrm{E}$$
$$\mathrm{E}\ni e\mapsto e^\natural\in W_\delta$$

の合成であるから，それ自身 G から W_δ への $\{\sqcap,\sqcup,\square\}$ 準写である．第 3.19 節の言葉で言い換えれば，この写像は G の W_δ 上の擬ブール表現である．従って，定理 3.19.6 により $\lesssim_{\Phi,\nu}$ は擬ブール関係であり，$\lesssim_\Phi$ と $\lesssim$ も，ν や Φ を動かしたときの $\lesssim_{\Phi,\nu}$ の交わりであるから，問題 3.21.23 によりやはり擬ブール関係である．つまり次のことが成り立つ．

定理 5.5.6 G^* **上の関係** $\lesssim$，$\lesssim_\Phi$，$\lesssim_{\Phi,\nu}$ **は擬ブール関係である．すなわち，第 3.19 節の反復律・付加律・巾等律・置換律・強消去律と算法** $\sqcap$，$\sqcup$ **についての両限律，および算法** $\square$ **についての両補律に従う．**

従ってまた，第 3.19 節に続く節の事柄を $\lesssim$，$\lesssim_\Phi$，$\lesssim_{\Phi,\nu}$ に適用することができる．

定理 5.5.7 $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\in \mathrm{G}$，$(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}$ **とすれば次のことが成り立つ．**

$$a_1\cdots a_m\lesssim_{\Phi,\nu} b_1\cdots b_n \iff a_1\triangle,\cdots,a_m\triangle\preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1\triangle,\cdots,b_n\triangle$$

証明　次のように推論して証明することができる．

$$\begin{aligned}
&a_1\cdots a_m\lesssim_{\Phi,\nu} b_1\cdots b_n\\
&\iff a_1\sqcap\cdots\sqcap a_m\lesssim_{\Phi,\nu} b_1\sqcup\cdots\sqcup b_n\\
&\iff (a_1\sqcap\cdots\sqcap a_m)\triangle\preccurlyeq_{\Phi,\nu}(b_1\sqcup\cdots\sqcup b_n)\triangle\\
&\iff a_1\triangle\wedge\cdots\wedge a_m\triangle\preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1\triangle\vee\cdots\vee b_n\triangle\\
&\iff a_1\triangle,\cdots,a_m\triangle\preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1\triangle,\cdots,b_n\triangle
\end{aligned}$$

一番目と四番目の $\iff$ は定理 3.21.2 による．二番目の $\iff$ は補題 5.5.2 によによる．三番目の $\iff$ は問題 5.5.4 と $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ についての消去律による．

定理 5.5.8 $f_1,\dots,f_m,g_1,\dots,g_n\in A_\emptyset$，$x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$，$\Phi\in\mathfrak{U}$ **とすれば次のことが成り立つ．**

$$f_1\cdots f_m\preccurlyeq_\Phi g_1\cdots g_n \iff f_1\,\Omega x,\cdots,f_m\,\Omega x\lesssim_\Phi g_1\,\Omega x,\cdots,g_n\,\Omega x$$

証明　次のように推論して証明することができる．

$$\begin{aligned}
&f_1\cdots f_m\preccurlyeq_\Phi g_1\cdots g_n\\
&\iff f_1\wedge\cdots\wedge f_m\preccurlyeq_\Phi g_1\vee\cdots\vee g_n\\
&\iff (f_1\wedge\cdots\wedge f_m)\,\Omega x\lesssim_\Phi (g_1\vee\cdots\vee g_n)\,\Omega x\\
&\iff f_1\,\Omega x\sqcap\cdots\sqcap f_m\,\Omega x\lesssim_\Phi g_1\,\Omega x\sqcup\cdots\sqcup g_n\,\Omega x\\
&\iff f_1\,\Omega x,\cdots,f_m\,\Omega x\lesssim_\Phi g_1\,\Omega x,\cdots,g_n\,\Omega x
\end{aligned}$$

一番目と四番目の $\iff$ は定理 3.21.2 による．二番目の $\iff$ は補題 5.5.3 による．三番目の $\iff$ は問題 5.5.9 と $\lesssim_\Phi$ についての消去律による．なお，定理 5.5.7 と後出の定理 5.5.16 系 2 と定理 5.5.12 から導くこともできる．

定理 5.5.9 $a\in \mathrm{G}$ **が全包元であるためには，次の二条件のいずれもが必要十分である．**

1. 任意の $b \in G$ に対して $b \lesssim a$ が成り立つ．

2. 任意の $b \in G$ に対して $\preccurlyeq b \forall\pi\, a\triangle$ が成り立つ．

従って，G の全包元の全体は，G 上の同値関係 $\simeq$ についての一同値類を成す．

証明　まず，補題 5.5.2 により条件 1, 2 が同等であることが分かる．次に，$a \in G$ が全包元であると仮定すると，定義により $\lesssim a$ が成り立つから，付加律により条件 1 が成り立つ．逆に，条件 1 が成り立つと仮定すると，特に $a \sqcup a^{\square} \lesssim a$ が成り立つ．上補律などにより $\lesssim a \sqcup a^{\square}$ も成り立つから，消去律により $\lesssim a$ が成り立つ．従って $a \in G$ は全包元である．$a, b \in G$ が全包元であれば，条件 1 により $a \lesssim b$ かつ $b \lesssim a$，従って $a \simeq b$ が成り立つ．また，$a \in G$ が全包元で $a \simeq b \in G$ であれば，$\lesssim a$ かつ $a \lesssim b$，従って消去律により $\lesssim b$ が成り立つから，b も全包元である．

問題 5.5.11　$a, b \in G$ に対し $a \sqcap b$ が全包元であるためには，a, b が共に全包元であることが必要十分である．また，$a \sqcup b$ が全包元であるためには，$a^{\square} \lesssim b$ の成り立つことが必要十分である．

問題 5.5.12　$f \in H$ が恒真用元であるためには，任意の $g \in H$ に対して $g \preccurlyeq f$ の成り立つことが必要十分である．従って，H の恒真用元の全体は，H 上の同値関係 $\asymp$ についての一同値類を成す．

注意 5.5.3　問題 5.5.1 により，$\preccurlyeq$ の H への制限 $\preccurlyeq|_H$ は擬順序関係であって，$\asymp$ は $\preccurlyeq|_H$ の対称核である．問題 5.5.12 によれば，H の恒真用元の全体は $\preccurlyeq|_H$ についての擬最大の全体に等しく，それ故に $\asymp$ についての一同値類を成すのである．G の全包元の全体についても事情は同じである（第 3.9.6 項参照）．

5.5.4　事態間の恒不等式との関係

§ 用元式の (Φ, ν) 真の概念の定義 (5.5.1) の必然的結果，第 5.2 節において示した F^* 上の関係 $\lessdot$ あるいは F 上の関係 $\doteq$ について成り立つ式（これらを事態間の**恒不等式**あるいは**恒等式**と呼ぶ）を，用元の恒真式に逐語的に翻訳することができる．例を示そう．

定理 5.5.10　**$a, b \in G$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in A_P$ のとき次の三式が成り立つ．ただし，第一式においては $a \in A_\varepsilon$ とし，第二式と第三式においては $p, q \in \mathbb{P}$ とする．**

$$a\,\breve{o}\pi\, b\triangle,\ b\forall k\, f \preccurlyeq a\,\breve{o}k\, f$$

$$a\,\underline{p}\pi\, b\triangle,\ b\,\underline{q}k\, f \preccurlyeq a\,\underline{p+q}k\, f \qquad\qquad a\,\overline{p+q}\pi\, b\triangle,\ b\,\underline{q}k\, f \preccurlyeq a\,\overline{p}k\, f$$

証明　第一式だけ証明し，他の式の証明は読者に任せる．任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して

$$(\Phi^* a)\nu\,\breve{o}\pi\,\big((\Phi^* b)\nu\big)\triangle,\ (\Phi^* b)\nu\forall k\,(\Phi^* f)\nu \lessdot (\Phi^* a)\nu\,\breve{o}k\,(\Phi^* f)\nu$$

が成り立つことを示せばいい．この式は，定理 5.2.15 系で証明した一番目の恒不等式に他ならない．

問題 5.5.13　$a, b \in G$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in A_P$ のとき次の三式が成り立つ．ただし，第一式においては $a \in A_\varepsilon$ とし，第二式と第三式においては $p, q \in \mathbb{P}$ とする．

$$a\,\breve{o}\pi\, b\triangle,\ a\,\breve{o}k\, f \preccurlyeq b\,\exists k\, f$$

$$a\,\underline{p}\pi\, b\triangle,\ a\,\overline{p+q}k\, f \preccurlyeq b\,\overline{q}k\, f \qquad\qquad a\,\overline{p+q}\pi\, b\triangle,\ a\,\underline{p}k\, f \preccurlyeq b\,\overline{q}k\, f$$

略解　定理 5.2.15 による．

問題 5.5.14 $a, b_1, \ldots, b_n \in G$ $(n \geq 1)$, $f \in H$, $k \in K_f$, $p, q, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}$ とし $p \geq \sum_{i=1}^{n} q_i$ と仮定すれば，次の式が成り立つ．ただし，左辺において算法 $\sqcup$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意である．

$$a\,\underline{q}\pi\,(b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)\triangle,\ a\,\overline{q+p}k\,f \preccurlyeq b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

略解　定理 5.2.16 による．

問題 5.5.15 $a, b \in G$, $p, q \in \mathbb{P}$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in A_P$ のとき次の二式が成り立つ．

$$(a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\,f \succcurlyeq a\,\underline{p}k\,f,\ b\,\underline{q}k\,f \qquad (a \sqcup b)\,\overline{p+q}k\,f \preccurlyeq a\,\overline{p}k\,f,\ b\,\overline{q}k\,f$$

略解　定理 5.2.13 による．

問題 5.5.16 $a \in G$, $b \in A_\varepsilon$, $\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q}$, $k, l \in P \in \mathcal{P}K$, $k \neq l$, $f \in A_P$ のとき次の式が成り立つ．ただし，$\lambda = \breve{o}$ の場合は $a \in A_\varepsilon$ とする．

$$a\,\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f) \asymp b\,\breve{o}l\,(a\,\lambda k\,f)$$

略解　定理 5.2.18 による．

問題 5.5.17 $a, b \in G$, $k, l \in P \in \mathcal{P}K$, $k \neq l$, $f \in A_P$ とし，λ は $\neg\mathfrak{P}$ の下方区間か $\mathfrak{P}$ の上方区間であるとする．このとき次の二式が成り立つ．

$$a\,\lambda k\,(b\,\forall l\,f) \preccurlyeq b\,\forall l\,(a\,\lambda k\,f) \qquad a\,\lambda k\,(b\,\exists l\,f) \succcurlyeq b\,\exists l\,(a\,\lambda k\,f)$$

略解　定理 5.2.18 系による．

問題 5.5.18 $a \in A_\varepsilon$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in A_P$ のとき，次の二式が成り立つ．

$$a\,\forall k\,f \preccurlyeq a\,\breve{o}k\,f \qquad a\,\breve{o}k\,f \preccurlyeq a\,\exists k\,f$$

略解　問題 5.2.22 による．単相格世界の基本関係 $\ni$ が反射的だからである．

定理 5.5.11 $a \in G$, $P, Q \in \mathcal{P}K$, $k \in P \cap Q$, $f \in A_P$, $g \in A_Q$, $\alpha, \beta \in H^*$, $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ **とし，**k **は** α, β **に現れる用元の格域には属さないとし，**

$$f\alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} g\beta$$

と仮定する．このとき，λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の下方区間か** $\mathfrak{P}$ **の上方区間であれば**

$$a\,\lambda k\,f, \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} a\,\lambda k\,g, \beta$$

が成り立ち，λ **が** $\neg\mathfrak{P}$ **の上方区間か** $\mathfrak{P}$ **の下方区間であれば**

$$a\,\lambda k\,g, \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} a\,\lambda k\,f, \beta$$

が成り立つ（f, g **の位置に注意）．**

証明　$\alpha = f_1 \cdots f_m$，$\beta = g_1 \cdots g_n$ とする．

$$(\Phi^* f)\nu, (\Phi^* f_1)\nu, \cdots, (\Phi^* f_m)\nu \lessdot (\Phi^* g)\nu, (\Phi^* g_1)\nu, \cdots, (\Phi^* g_n)\nu$$

との仮定の下で，λ が $\neg\mathfrak{P}$ の下方区間か $\mathfrak{P}$ の上方区間であれば

$$(\Phi^* a)\nu\lambda k\,(\Phi^* f)\nu, (\Phi^* f_1)\nu, \cdots, (\Phi^* f_m)\nu \lessdot (\Phi^* a)\nu\lambda k\,(\Phi^* g)\nu, (\Phi^* g_1)\nu, \cdots, (\Phi^* g_n)\nu$$

が成り立って，λ が $\neg\mathfrak{P}$ の上方区間か $\mathfrak{P}$ の下方区間であれば

$$(\Phi^* a)\nu\lambda k\,(\Phi^* g)\nu, (\Phi^* f_1)\nu, \cdots, (\Phi^* f_m)\nu \lessdot (\Phi^* a)\nu\lambda k\,(\Phi^* f)\nu, (\Phi^* g_1)\nu, \cdots, (\Phi^* g_n)\nu$$

が成り立つことを示せばいいが，これは定理 5.2.11 で示してある．

問題 5.5.19　$f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \in H$，$\alpha, \beta \in H^*$，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ とし，$k \in K$ が $f_1, \ldots, f_m$, $g_1, \ldots, g_n$ の格域に属すが α, β に現れる用元の格域には属さないものとし，

$$f_1 \cdots f_m \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} g_1 \cdots g_n \beta$$

が成り立つと仮定する．このとき，任意の $a \in A_\varepsilon$ に対して次のことが成り立つ．

$$a\,\breve{o}k\,f_1, \cdots, a\,\breve{o}k\,f_m, \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} a\,\breve{o}k\,g_1, \cdots, a\,\breve{o}k\,g_n, \beta$$

略解　定理 5.2.7 による（定理 5.5.12 参照）．

5.5.5　変数との関係

§ ここでは，恒真式を変数によって言い換えることについて説明する．

定理 5.5.12　$f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \in H$，$\alpha, \beta \in H^*$，$\Phi \in \mathfrak{U}$ **とし，**$k \in K$ **が** $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ **の格域に属すが** α, β **に現れる用元の格域には属さないものとする．このとき，任意の** $a \in A_\varepsilon$ **に対して次のことが成り立つ．**

$$\begin{aligned} &f_1 \cdots f_m, \alpha \preccurlyeq_\Phi g_1 \cdots g_n, \beta \\ &\quad\Longrightarrow\ a\,\breve{o}k\,f_1, \cdots, a\,\breve{o}k\,f_m, \alpha \preccurlyeq_\Phi a\,\breve{o}k\,g_1, \cdots, a\,\breve{o}k\,g_n, \beta \end{aligned} \qquad \text{(格出律)}$$

また，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **が** $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n, \alpha, \beta$ **の中のどの用元にも自由に現れなければ，逆に**

$$\begin{aligned} &x\,\breve{o}k\,f_1, \cdots, x\,\breve{o}k\,f_m, \alpha \preccurlyeq_\Phi x\,\breve{o}k\,g_1, \cdots, x\,\breve{o}k\,g_n, \beta \\ &\quad\Longrightarrow\ f_1 \cdots f_m, \alpha \preccurlyeq_\Phi g_1 \cdots g_n, \beta \end{aligned} \qquad \text{(格入律)}$$

が成り立つ．

証明　格出律は定理 5.2.7 から第 5.5.4 項で説明した論法によって直ちに導かれる（問題 5.5.19 参照）．格入律も定理 5.2.7 から導かれるが，変数 x が関係するので，第 5.5.4 項の論法以外の論法が必要になる．まず，$\alpha = f'_1 \cdots f'_{m'}$，$\beta = g'_1 \cdots g'_{n'}$ なる用元 $f'_1, \ldots, f'_{m'}, g'_1, \ldots, g'_{n'}$ をとる．そして，Φ が $W \in \mathcal{W}$ への定付値であるとして任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ をとれば，格入律の前提式により

$$(\Phi^* x)\nu\,\breve{o}k\,(\Phi^* f_1)\nu, \cdots, (\Phi^* x)\nu\,\breve{o}k\,(\Phi^* f_m)\nu, (\Phi^* f'_1)\nu, \cdots, (\Phi^* f'_{m'})\nu$$

$$\lessdot\,(\Phi^*x)\nu\,\breve{o}k\,(\Phi^*g_1)\nu,\cdots,(\Phi^*x)\nu\,\breve{o}k\,(\Phi^*g_n)\nu,(\Phi^*g'_1)\nu,\cdots,(\Phi^*g'_{n'})\nu$$

が成り立つ．そこでさらに任意の $s\in W_\varepsilon$ をとって ν を $\nu'=(x/s)\nu$ で置き換える．そうすると，$(\Phi^*x)\nu'=\nu'x=s$ であり，定理 4.4.1 により任意の $i\in\{1,\ldots,m\}$ に対して $(\Phi^*f_i)\nu'=(\Phi^*f_i)\nu$ であって $g_1,\ldots,g_n,f'_1,\ldots,f'_{m'},g'_1,\ldots,g'_{n'}$ についても同様であるから，

$$\begin{aligned}&s\,\breve{o}k\,(\Phi^*f_1)\nu,\cdots,s\,\breve{o}k\,(\Phi^*f_m)\nu,(\Phi^*f'_1)\nu,\cdots,(\Phi^*f'_{m'})\nu\\&\qquad\lessdot\,s\,\breve{o}k\,(\Phi^*g_1)\nu,\cdots,s\,\breve{o}k\,(\Phi^*g_n)\nu,(\Phi^*g'_1)\nu,\cdots,(\Phi^*g'_{n'})\nu\end{aligned}$$

が成り立つ．s が任意であるから定理 5.2.7 により

$$\begin{aligned}&(\Phi^*f_1)\nu,\cdots,(\Phi^*f_m)\nu,(\Phi^*f'_1)\nu,\cdots,(\Phi^*f'_{m'})\nu\\&\qquad\lessdot\,(\Phi^*g_1)\nu,\cdots,(\Phi^*g_n)\nu,(\Phi^*g'_1)\nu,\cdots,(\Phi^*g'_{n'})\nu\end{aligned}$$

が成り立ち，ν が任意であるから格入律の結論式が成り立つ．

定理 5.5.13 $x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$，$a,b_1,\ldots,b_n\in G$，$\alpha,\beta\in H^*$，$f\in H$，$k\in K_f$，$p,q_1,\ldots,q_n\in\mathbb{P}$ **とし，**x **は** α,β **に現れる用元と** $a,b_1,\ldots,b_n$ **に自由に現れず** $p\geq\sum_{i=1}^n q_i$ **が成り立つと仮定する（ただし** $n=0$ **の場合は** $\sum_{i=1}^n q_i=0$ **とみなす）．ことのとき次のことが成り立つ．**

$$\begin{aligned}&x\,\breve{o}\pi\,a\triangle,\alpha\preccurlyeq x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle,\cdots,x\,\breve{o}\pi\,b_n\triangle,\beta\\\Longrightarrow\ &a\,\overline{p}k\,f,\alpha\preccurlyeq b_1\,\overline{q_1}k\,f,\cdots,b_n\,\overline{q_n}k\,f,\beta\end{aligned}\qquad(\textbf{配分律})$$

注意 5.5.4 配分律は注意 3.32.3 に記した測度についての鳩ノ巣原理（引き出し論法の原理とか部屋割り論法の原理とかとも言う）と同等である．「配分」の名はこのことに由来する．補題 5.6.7 の配分律は，上記配分律と実質的に同等であり，完全性定理の証明で重要な役割を演ずる．

証明　$\alpha=g_1\cdots g_l$，$\beta=h_1\cdots h_m$ なる用元 $g_1,\ldots g_l,h_1\ldots h_m$ をとる．また，A から任意の単相格世界 W への任意の定付値 Φ と任意の変付値 ν をとる．そうすると，配分律の前提から

$$\begin{aligned}&\nu x\,\breve{o}k\,\big((\Phi^*a)\nu\big)\triangle,(\Phi^*g_1)\nu,\cdots,(\Phi^*g_l)\nu\\&\lessdot\,\nu x\,\breve{o}k\,\big((\Phi^*b_1)\nu\big)\triangle,\cdots,\nu x\,\breve{o}k\,\big((\Phi^*b_n)\nu\big)\triangle,(\Phi^*h_1)\nu,\cdots,(\Phi^*h_m)\nu\end{aligned}$$

が得られる．そこでさらに，任意の $s\in W_\varepsilon$ をとって ν を $(x/s)\nu$ で置き換える．そうすると

$$\begin{aligned}&s\,\breve{o}k\,\big((\Phi^*a)\nu\big)\triangle,(\Phi^*g_1)\nu,\cdots,(\Phi^*g_l)\nu\\&\lessdot\,s\,\breve{o}k\,\big((\Phi^*b_1)\nu\big)\triangle,\cdots,s\,\breve{o}k\,\big((\Phi^*b_n)\nu\big)\triangle,(\Phi^*h_1)\nu,\cdots,(\Phi^*h_m)\nu\end{aligned}$$

が得られる．従って定理 5.2.17 により，

$$\begin{aligned}&(\Phi^*a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^*f)\nu,(\Phi^*g_1)\nu,\cdots,(\Phi^*g_l)\nu\\&\lessdot\,(\Phi^*b_1)\nu\,\overline{q_1}k\,(\Phi^*f)\nu,\cdots,(\Phi^*b_n)\nu\,\overline{q_n}k\,(\Phi^*f)\nu,(\Phi^*h_1)\nu,\cdots,(\Phi^*h_m)\nu\end{aligned}$$

が成り立つ．これで配分律が証明された．　**終**

次の定理 5.5.14 とその系では，$a\,\forall k\,f$ を変数によって言い換える．$a\,\exists k\,f$ についても双対的に類似のことが成り立つが，それには言及しない．

定理 5.5.14 $a \in G$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in A_P$, $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in H$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $y \in \mathrm{Var}_\delta$, $\Phi \in \mathfrak{U}$ **とし，**x, y **が** $a, f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n$ **に自由に現れないと仮定する．このとき，**A **から任意の単相格世界** $W \in \mathcal{W}$ **への任意の定付値** Φ **に対して，次の七条件は同等である（補題 5.2.14 参照）．**

1. $g_1, \ldots, g_m \preccurlyeq_\Phi a \,\forall k\, f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

2. **任意の** $b \in A_\varepsilon$ **に対して** $b\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \preccurlyeq_\Phi b\,\breve{o}k\, f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

3. **任意の** $b \in G$ **に対して** $b\,\forall\pi\, a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \preccurlyeq_\Phi b\,\forall k\, f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

4. **任意の** $b \in G$ **に対して** $b\,\exists\pi\, a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \preccurlyeq_\Phi b\,\exists k\, f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

2′. $x\,\breve{o}\pi\, a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \preccurlyeq_\Phi x\,\breve{o}k\, f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

3′. $y\,\forall\pi\, a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \preccurlyeq_\Phi y\,\forall k\, f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

4′. $y\,\exists\pi\, a\triangle,\ g_1, \ldots, g_m \preccurlyeq_\Phi y\,\exists k\, f,\ h_1, \ldots, h_n$ **が成り立つ．**

証明　定理 5.5.5 と定理 3.16.4 により，補題 5.2.12 の証明と同様 $m \leq 1$, $n = 0$ と仮定していいが，$m = 1$ の場合だけを考え（$m = 0$ の場合はより容易である），g_1 を g で表す．また，$\lambda = \breve{o}, \forall, \exists$ とする．

(1 ⟹ 2,3,4) $g \preccurlyeq_\Phi a\,\forall k\, f$ と仮定し，$\lambda = \breve{o}$ のときは任意の $b \in A_\varepsilon$ をとり，$\lambda = \forall, \exists$ のときは任意の $b \in G$ をとる．そうすると，定理 5.5.10 により

$$b\,\lambda\pi\, a\triangle,\ a\,\forall k\, f \preccurlyeq_\Phi b\,\lambda k\, f$$

が成り立つ．$\preccurlyeq_\Phi$ がブール関係であるから，これら二式に消去律を使うことができて，$b\,\lambda\pi\, a\triangle,\ g \preccurlyeq_\Phi b\,\lambda k\, f$ が得られる．

(2 ⟹ 2′)(3 ⟹ 3′)(4 ⟹ 4′) これは自明である．

(2′ ⟹ 1)(3′ ⟹ 1)(4′ ⟹ 1) $\lambda = \breve{o}$ のときは $z = x$ とし，$\lambda = \forall, \exists$ のときは $z = y$ として，$z\lambda\pi\, a\triangle,\ g \preccurlyeq_\Phi z\lambda k\, f$ と仮定する．そうすると，定理 3.21.4 により

$$g \preccurlyeq_\Phi (z\,\lambda\pi\, a\triangle) \Rightarrow (z\,\lambda k\, f)$$

が成り立つから，Φ が $W \in \mathcal{W}$ への定付値であるとすれば，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$(\Phi^* g)\nu \lessdot \Big((\Phi^* z)\nu\,\lambda\pi\,\big((\Phi^* a)\nu\big)\triangle\Big) \Rightarrow \big((\Phi^* z)\nu\,\lambda k\,(\Phi^* f)\nu\big)$$

が成り立つ．そこで，$\lambda = \breve{o}$ のときは任意の $s \in W_\varepsilon$ をとり，$\lambda = \forall, \exists$ のときは任意の $s \in W_\delta$ をとって，ν を $\nu' = (z/s)\nu$ で置き換える．そうすると，$(\Phi^* z)\nu' = \nu' z = s$ であって定理 4.4.1 により $(\Phi^* a)\nu = (\Phi^* a)\nu'$, $(\Phi^* f)\nu = (\Phi^* f)\nu'$, $(\Phi^* g)\nu = (\Phi^* g)\nu'$ であるから，

$$(\Phi^* g)\nu \lessdot \Big(s\,\lambda\pi\,\big((\Phi^* a)\nu\big)\triangle\Big) \Rightarrow \big(s\,\lambda k\,(\Phi^* f)\nu\big)$$

が成り立つ．従って補題 5.2.11 と補題 5.2.2 により，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$(\Phi^* g)\nu \lessdot (\Phi^* a)\nu\,\forall k\,(\Phi^* f)\nu$$

が成り立つ．右辺が $\big(\Phi^*(a\,\forall k\, f)\big)\nu$ に等しいから，$g \preccurlyeq_\Phi a\,\forall k\, f$ が成り立つ．

注意 5.5.5 定理 5.5.14 の二条件 3, 4 における「$\mathrm{b} \in \mathrm{G}$」を「$\mathrm{b} \in \mathrm{A}_\delta$」に書き換えた二条件をそれぞれ $3''$, $4''$ で表せば，$(3 \Longrightarrow 3'' \Longrightarrow 3')(4 \Longrightarrow 4'' \Longrightarrow 4')$ が自明に成り立つので，これら二条件も定理 5.5.14 の七条件と同等である．なお，条件 3, 4 がそれぞれ条件 $3''$, $4''$ と同等であることは，後出の定理 5.5.17 系 2 と消去律によっても示される．

定理 5.5.14 において $(3 \Longrightarrow 1)$ を次のように証明することができる．すなわち条件 3 を仮定すると，特に $\mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle,\ \mathrm{g} \preccurlyeq_\Phi \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ が成り立つ．同一律により $\preccurlyeq_\Phi \mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$ も成り立つから，消去律により $\mathrm{g} \preccurlyeq_\Phi \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ が得られる．従って，$\mathrm{y} \in \mathrm{Var}_\delta$ についての仮定がなくとも，条件 1, 2, 3, $2'$ は同等である．

定理 5.5.14 においてまた，$(2' \Longrightarrow 2)(3' \Longrightarrow 3'')(4' \Longrightarrow 4'')$ を定理 5.5.2 を使って証明することができる．たとえば $(2' \Longrightarrow 2)$ については，まず定理 3.16.5 と定理 3.16.6 により，条件 $\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle,\ \mathrm{g} \preccurlyeq_\Phi \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ に現れる各用元において，x は任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ から自由である．また，これら用元に代入 (x/b) を施せば，代入の定義 (3.17.1) (3.17.2) と補題 3.17.2 により，$\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle$, g, $\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ となる．従って定理 5.5.2 により $\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle,\ \mathrm{g} \preccurlyeq_\Phi \mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ が成り立つ．

以上の注意は以下の系と系 2 にも適用することができる．

系　$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $\mathrm{y} \in \mathrm{Var}_\delta$, $\Phi \in \mathfrak{U}$ **とし，**x, y **が** a, b **に自由に現れないと仮定する．そうすると次の八条件は同等である．**

0. $\mathrm{a} \lesssim_\Phi \mathrm{b}$ **が成り立つ．**

1. $\preccurlyeq_\Phi \mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle$ **が成り立つ．**

2. 任意の $\mathrm{c} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ **に対して** $\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle \preccurlyeq_\Phi \mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle$ **が成り立つ．**

3. 任意の $\mathrm{c} \in \mathrm{G}$ **に対して** $\mathrm{c}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle \preccurlyeq_\Phi \mathrm{c}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle$ **が成り立つ．**

4. 任意の $\mathrm{c} \in \mathrm{G}$ **に対して** $\mathrm{c}\,\exists\pi\,\mathrm{a}\triangle \preccurlyeq_\Phi \mathrm{c}\,\exists\pi\,\mathrm{b}\triangle$ **が成り立つ．**

2′. $\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle \preccurlyeq_\Phi \mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle$ **が成り立つ．**

3′. $\mathrm{y}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle \preccurlyeq_\Phi \mathrm{y}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{b}\triangle$ **が成り立つ．**

4′. $\mathrm{y}\,\exists\pi\,\mathrm{a}\triangle \preccurlyeq_\Phi \mathrm{y}\,\exists\mathrm{k}\,\mathrm{b}\triangle$ **が成り立つ．**

証明　補題 5.5.2 により条件 0, 1 は同等である．定理 3.16.4 により x, y が $\mathrm{b}\triangle$ に自由に現れないから，定理 5.5.14 により条件 $1 - 4'$ が同等である．

系 2 $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in \mathrm{A}_\mathrm{P}$, $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_m, \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n \in \mathrm{H}$, $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $\Phi \in \mathfrak{U}$ **とし，**x **が** $\mathrm{f}, \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_m, \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n$ **に自由に現れないと仮定する．このとき，次の四条件は同等である．**

1. $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_m \preccurlyeq_\Phi \mathrm{one}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f},\ \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n$ **が成り立つ．**

2. 任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ **に対して** $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_m \preccurlyeq_\Phi \mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f},\ \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n$ **が成り立つ．**

3. 任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{G}$ **に対して** $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_m \preccurlyeq_\Phi \mathrm{b}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f},\ \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n$ **が成り立つ．**

2′. $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_m \preccurlyeq_\Phi \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f},\ \mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_n$ **が成り立つ．**

証明　記号 one は閉全包元の任意の一つを表すから，補題 5.5.1 により，任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ に対して $\preccurlyeq_\Phi \mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ が成り立ち，任意の $\mathrm{b} \in \mathrm{G}$ に対して $\preccurlyeq_\Phi \mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathrm{one}\triangle$ が成り立つ．従って付加律と消去律により，条件 $1 - 2'$ はそれぞれ，定理 5.5.14 の同番号の条件における a を one で置き換えた条件と同等である．従って注意 5.5.5 によりこの系が得られる．

5.5.6　算法 Ωx との関係

§ 算法 Ωx $(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ は単相格世界にもブール束にもないから，この算法と恒真式・全包式との関係を調べるには，これまでとは違う考え方が必要になる．そのことを示す例を挙げよう．

定理 5.5.15 $f, g \in A_\emptyset$，$f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \in H$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$\Phi \in \mathfrak{U}$ **とし，** x **が** $f_1, \ldots, f_m$，$g_1, \ldots, g_n$ **に自由に現れないと仮定する．このとき，次の二条件は同等である．**

1. $f, f_1, \ldots, f_m \preccurlyeq_\Phi g, g_1, \ldots, g_n$

2. $f_1, \ldots, f_m \preccurlyeq_\Phi (f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle, g_1, \ldots, g_n$

証明　定理 5.5.14 の証明と同様，$m \leq 1$，$n = 0$ と仮定していいが，$m = 0$ の場合は，$m = 1$ の場合より容易であるし，注意 5.5.1 に記した通り補題 5.5.2 と補題 5.5.3 により既に証明されている．そこで $m = 1$ の場合だけを考え，f_1 を h で表し，$h \in A_P$ と仮定する．また，Φ は $W \in \mathcal{W}$ への定付値であるとする．

(1 $\Longrightarrow$ 2) 任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ をとる．また，W の基底を S として，任意の $\theta \in P{\to}S$ をとる．そうすると，条件 1 がみたされるとの仮定により $(\Phi^*f)\nu, (\Phi^*h)\nu \lessdot (\Phi^*g)\nu$，従って定理 5.2.3 により $\inf_{\mathbb{T}}\{(\Phi^*f)\nu, \big((\Phi^*h)\nu\big)\theta\} \leq (\Phi^*g)\nu$，すなわち

$$\big((\Phi^*h)\nu\big)\theta = 1 \implies (\Phi^*f)\nu \leq (\Phi^*g)\nu$$

が成り立つ．従って，次のように推論して条件 2 がみたされることを示すことができる．

$$\begin{aligned}
\big((\Phi^*h)\nu\big)\theta = 1 &\implies \text{任意の } s \in S \text{ に対し } \Big((\Phi^*h)\big((x/s)\nu\big)\Big)\theta = 1 \\
&\implies \text{任意の } s \in S \text{ に対し } (\Phi^*f)\big((x/s)\nu\big) \leq (\Phi^*g)\big((x/s)\nu\big) \\
&\implies \text{任意の } s \in S \text{ に対し } \Big(\big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu\Big)s \leq \Big(\big((\Phi^*g)\,\Omega x\big)\nu\Big)s \\
&\implies \big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu \sqsubset \big((\Phi^*g)\,\Omega x\big)\nu \\
&\implies \big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu\,\forall\pi\Big(\big((\Phi^*g)\,\Omega x\big)\nu\Big)\triangle = 1 \\
&\implies \Big(\Phi^*\big((f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle\big)\Big)\nu = 1
\end{aligned}$$

$\theta \in P{\to}S$ が任意であるから $(\Phi^*h)\nu \lessdot \Big(\Phi^*\big((f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle\big)\Big)\nu$ が成り立ち，次いで，$\nu \in \mathrm{Val}_W$ が任意であるから条件 2 が成り立つ．なお上の推論で，一番目の $\Longrightarrow$ が成り立つのは定理 4.4.1 による．三番目の $\Longrightarrow$ が成り立つのは (5.3.1) による．四番目の $\Longrightarrow$ が成り立つのは注意 5.2.1 による．五番目の $\Longrightarrow$ が成り立つのは問題 5.2.6 と問題 5.2.25 による．六番目の $\Longrightarrow$ が成り立つのは，$\Phi^* \in A{\to}W^{\mathrm{Val}_W}$ が T 型代数系としての保型準写であって射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}}{\to}W$ が U 型代数系としての保型準写であることによる．

(2 $\Longrightarrow$ 1) いまの推論を逆にたどればいい．すなわち，条件 2 がみたされるとの仮定により，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ と任意の $\theta \in P{\to}S$ に対して

$$\begin{aligned}
\big((\Phi^*h)\nu\big)\theta = 1 &\implies \Big(\Phi^*\big((f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle\big)\Big)\nu = 1 \\
&\implies \big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu\,\forall\pi\Big(\big((\Phi^*g)\,\Omega x\big)\nu\Big)\triangle = 1 \\
&\implies \big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu \sqsubset \big((\Phi^*g)\,\Omega x\big)\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ \Big(\big((\Phi^* f)\,\Omega x\big)\nu\Big)(\nu x) \le \Big(\big((\Phi^* g)\,\Omega x\big)\nu\Big)(\nu x)\\
&\Longrightarrow\ (\Phi^* f)\big((x/\nu x)\nu\big) \le (\Phi^* g)\big((x/\nu x)\nu\big)\\
&\Longrightarrow\ (\Phi^* f)\nu \le (\Phi^* g)\nu
\end{aligned}$$

つまり $\inf\{(\Phi^* f)\nu, \big((\Phi^* h)\nu\big)\theta\} \le (\Phi^* g)\nu$ が成り立つ．$\theta \in P{\to}S$ が任意であるから定理 5.2.3 により $(\Phi^* f)\nu, (\Phi^* h)\nu \lessdot (\Phi^* g)\nu$ が成り立ち，次いで，$\nu \in \mathrm{Val}_W$ が任意であるから条件 1 が成り立つ．

系　$f, g \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **であれば** $(f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq f \Rightarrow g$ **が成り立つ．また，さらに** x **が** f, g **に自由に現れなければ** $(f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \asymp f \Rightarrow g$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.16.4 により x は $(f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle$ に自由に現れない．また $\preccurlyeq$ は，定理 5.5.5 によりブール関係であるから定理 3.21.4 により反復律と転位導律に従う．反復律により $(f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq (f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle$ が成り立つから，定理 5.5.15 により $f, (f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq g$ が成り立ち，これから転位導律により $(f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq f \Rightarrow g$ が導かれる．さらに x が f, g に自由に現れなければ，定理 3.16.4 により x は $f \Rightarrow g$ にも自由に現れず，また，定理 3.21.4 により $\preccurlyeq$ が消去導律 $f, f \Rightarrow g \preccurlyeq g$ に従うから，定理 5.5.15 により $f \Rightarrow g \preccurlyeq (f\,\Omega x)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle$ も成り立つ．

系 2　$a \in G$，$f, g \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **とし，**x **が** f **に自由に現れないと仮定する．そうすると** $a\,\forall\pi\,\big((f \Rightarrow g)\,\Omega x\big)\triangle \preccurlyeq f \Rightarrow a\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle$ **が成り立つ．**

証明　定理 5.5.5 により $\preccurlyeq$ はブール関係であるから，定理 3.21.4 により転位導律と消去導律 $f, f \Rightarrow g \preccurlyeq g$ に従い，これに定理 5.5.15 を適用して

$$f \preccurlyeq \big((f \Rightarrow g)\,\Omega x\big)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle$$

を得る．また，定理 5.2.10 系または定理 5.2.15 系により

$$a\,\forall\pi\,\big((f \Rightarrow g)\,\Omega x\big)\triangle,\ \big((f \Rightarrow g)\,\Omega x\big)\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq a\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle$$

が成り立つ．この二式に消去律と転位導律を使えば問題の式が得られる．

定理 5.5.16　$a \in A_\varepsilon$，$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **であって** x **が** f **において** a **から自由であれば**

$$a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \asymp f(x/a)$$

が成り立つ．ただし，$f(x/a)$ **は** f **において** x **に** a **を代入して得られる** $A_\emptyset$ **の元である．**

証明　代入 (x/a) は保型写像であるから，この式の両辺とも $A_\emptyset$ に属す．従って問題 5.5.2 により，A から任意の単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への任意の定付値 Φ と任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$\Big(\Phi^*\big(a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle\big)\Big)\nu = \Big(\Phi^*\big(f(x/a)\big)\Big)\nu$$

が成り立つことを示せばいい．これは次の計算で示される．

$$\begin{aligned}
\Big(\Phi^*\big(a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle\big)\Big)\nu &= (\Phi^* a)\nu\,\breve{o}\pi\,\Big(\big((\Phi^* f)\,\Omega x\big)\nu\Big)\triangle\\
&= \Big(\big((\Phi^* f)\,\Omega x\big)\nu\Big)\big((\Phi^* a)\nu\big) \qquad (\text{補題 5.2.10 による})
\end{aligned}$$

$$= (\Phi^* f)\Big(\big(x/(\Phi^* a)\nu\big)\nu\Big) \qquad \text{((5.3.1) による)}$$
$$= \Big(\Phi^*\big(f(x/a)\big)\Big)\nu \qquad \text{(定理 4.4.2 による)}$$

最初の等式が成り立つのは，$\Phi^* \in A{\to}W^{\mathrm{Val}w}$ が T 型代数系としての保型準写であって射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}}{\to}W$ が U 型代数系としての保型準写だからである．

系　$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **であって** x **が** f **に自由に現れなければ，任意の** $a \in A_\varepsilon$ **に対して**

$$a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \asymp f$$

が成り立つ．

証明　定理 3.16.5 により x が f において a から自由であって補題 3.17.2 により $f(x/a) = f$ が成り立つからである．

系 2　$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$f \in A_\emptyset$ **なら** $x\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \asymp f$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.16.5 により x が f において x から自由であって補題 3.17.3 により $f(x/x) = f$ が成り立つからである．

系 3　$f \in A_\emptyset$，$g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_n \in H$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$\Phi \in \mathfrak{U}$ **とし，**x **が** $g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_n$ **に自由に現れないと仮定する．このとき次の五条件は同等である．**

0. $g_1,\ldots,g_m \preccurlyeq_\Phi f, h_1,\ldots,h_n$

1. $g_1,\ldots,g_m \preccurlyeq_\Phi \mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle,\ h_1,\ldots,h_n$

2. **任意の** $a \in A_\varepsilon$ **に対して** $g_1,\ldots,g_m \preccurlyeq_\Phi a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle,\ h_1,\ldots,h_n$ **が成り立つ．**

3. **任意の** $a \in G$ **に対して** $g_1,\ldots,g_m \preccurlyeq_\Phi a\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle,\ h_1,\ldots,h_n$ **が成り立つ．**

2′. $g_1,\ldots,g_m \preccurlyeq_\Phi x\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle,\ h_1,\ldots,h_n$

従って，$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **なら，**$\preccurlyeq f$ **であることと** $\preccurlyeq \mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle$ **であることは同等である．**

証明　系 2 と消去律により条件 0 と条件 2′ は同等である．また，定理 3.16.4 により x が $(f\,\Omega x)\triangle$ に自由に現れないから，定理 5.5.14 系 2 により条件 1 – 2′ は同等である．

系 4　$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$a \in A_\varepsilon$ **であって** x **が** f **において** a **から自由なら，次のことが成り立つ．**

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq f(x/a)$$

特に $f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **なら，**$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq f$ **が成り立ち，さらに** x **が** f **に自由に現れなければ** $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \asymp f$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.16.4 により x が $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle$ に自由に現れず，$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq \mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle$ が成り立つから，系 3 により $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq f$ と

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle$$

が成り立つ（定理 5.5.21 参照）．また，定理 5.5.16 により次の式が成り立つ．

$$\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{f}(\mathrm{x}/\mathrm{a})$$

定理 5.5.5 により $\preccurlyeq$ がブール関係であるから，上の二式に消去律を使えて $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{f}(\mathrm{x}/\mathrm{a})$ が得られる．また，反復律により $\mathrm{f} \preccurlyeq \mathrm{f}$ が成り立つから，x が f に自由に現れなければ，系 3 により $\mathrm{f} \preccurlyeq \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ が成り立つ．

注意 5.5.6 第 5.3.4 項や第 5.8 節で説明するように，$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ は述語論理学における $\forall\mathrm{x}\,\mathrm{P}$ に当たる．従って，系 4 は定理 4.8.5 に相当し，次の系 5 は定理 4.8.3 に相当する．

系 5　$\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{A}_{\emptyset}$，$\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_{\varepsilon}$ **とし，**x **が** f **に自由に現れないと仮定すれば，次の式が成り立つ．**

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,\big((\mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{g})\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle \asymp \mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$$

証明　定理 5.5.15 系 2 により $\mathrm{one}\,\forall\pi\,\big((\mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{g})\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle \preccurlyeq \mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ が成り立つ．他方，系 4 により $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{g}$ が成り立つ．定理 5.5.5 と定理 3.21.4 により定理 3.21.6 を使えて，この式から $\mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{g}$ が得られる．定理 3.16.4 により x が $\mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ に自由に現れないから，系 3 により $\mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{one}\,\forall\pi\,\big((\mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{g})\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle$ が成り立つ．

系 6　$\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_{\varepsilon}$，$\mathrm{a} \in \mathrm{G}$，$\mathrm{k} \in \mathrm{K}$，$\mathrm{f} \in \mathrm{A}_{\{\mathrm{k}\}}$ **であって** x **が** a, f **に自由に現れなければ，**

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,\Big(\big((\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle) \Rightarrow (\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\big)\,\Omega\mathrm{x}\Big)\triangle \asymp \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

が成り立つ．

証明　$\mathrm{g} = (\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle) \Rightarrow (\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})$ と定める．そうすると，定理 5.5.5 により $\preccurlyeq$ はブール関係であるから，定理 3.21.4 により消去導律に従い，

$$\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle,\ \mathrm{g} \preccurlyeq \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

が成り立つ．また，系 4 により

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{g}$$

が成り立つ．$\preccurlyeq$ がブール関係であるから，これら二式に消去律を使うことができて

$$\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle,\ \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

が得られる．仮定と定理 3.16.4 により x が a, f, $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ に自由に現れないから，定理 5.5.14 により，証明すべき式の片割れ

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \preccurlyeq \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

が得られる．もう一つの片割れは，定理 5.5.10 により

$$\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle,\ \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

が成り立つことと次の推論によって示される．

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle,\ \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f} &\iff \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq \mathrm{g} && \text{(定理 3.21.4 による)}\\
&\iff \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq \mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle && \text{(定理 5.5.16 系 2 による)}\\
&\iff \mathrm{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle && \text{(定理 5.5.14 系 2 による)}
\end{aligned}$$

系 7 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}_\varepsilon$, $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in \mathrm{A}_{\{\mathrm{k}\}}$ **とするとき，**x **が** f **において** a **から自由であれば**

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\left((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\right)\triangle \asymp \mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x}/\mathrm{a})\right)$$

が成り立ち，x **が** f **に自由に現れなければ次の式が成り立つ．**

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\left((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\right)\triangle \asymp \mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

証明　$\mathrm{g} = \mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ と定める．そうすると，定理 3.16.6 と定理 3.16.5 により x は g において a から自由であるから，次のように推論して一番目の式を証明することができる．

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\triangle &\asymp \mathrm{g}(\mathrm{x}/\mathrm{a}) && \text{(定理 5.5.16 による)}\\ &= \mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x}/\mathrm{a})\right) && \text{(g と代入の定義による)}\end{aligned}$$

x が f に自由に現れなければ，定理 3.16.6 により x は f において a から自由であり，補題 3.17.2 により $\mathrm{f}(\mathrm{x}/\mathrm{a}) = \mathrm{f}$ が成り立つ．従って一番目の式から二番目の式が得られる．

定理 5.5.17 $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$, $\lambda \in \Omega$, $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in \mathrm{A}_{\{\mathrm{k}\}}$ **であって** x **が** f **に自由に現れなければ，次の式が成り立つ．**

$$\mathrm{a}\,\lambda\pi\left((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\right)\triangle \asymp \mathrm{a}\,\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

注意 5.5.7 これは定理 5.5.16 系 7 の後半の類似であるが，その系の前半の形の式は成り立たない．なぜなら，$\mathrm{a} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ でなければそもそも代入 (x/a) が定義されないからである．

証明　補題 5.2.13 によれば，A から任意の単相格世界 W への任意の定付値 Φ と任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ および W の基底の任意の元 s に対して

$$\mathrm{s}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\left(\Phi^*\left(\left((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\right)\triangle\right)\right)\nu = \mathrm{s}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\nu$$

の成り立つことを示せばいい．それは次の計算で示される．

$$\begin{aligned}\mathrm{s}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\left(\Phi^*\left(\left((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\right)\triangle\right)\right)\nu &= \mathrm{s}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\left(\left(\left((\Phi^*\mathrm{x})\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\right)\,\Omega\mathrm{x}\right)\nu\right)\triangle\\ &= \left(\left(\left((\Phi^*\mathrm{x})\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\right)\,\Omega\mathrm{x}\right)\nu\right)\mathrm{s}\\ &= \left((\Phi^*\mathrm{x})\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\right)\left((\mathrm{x}/\mathrm{s})\nu\right)\\ &= (\Phi^*\mathrm{x})\left((\mathrm{x}/\mathrm{s})\nu\right)\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\left((\mathrm{x}/\mathrm{s})\nu\right) = \mathrm{s}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\nu\end{aligned}$$

一番目の等式が成り立つのは，$\Phi^* \in \mathrm{A} \to W^{\mathrm{Val}_W}$ が保型準写であって射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}} \to W$ が U 型代数系としての保型準写だからである．二番目の等式が成り立つのは補題 5.2.10 による．四番目の等式が成り立つのは，$(\mathrm{x}/\mathrm{s})\nu$ の定める射影が U 型代数系としての保型準写だからである．五番目の等式が成り立つのは，(4.3.3) と定理 4.4.1 による．

系　$\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in \mathrm{A}_{\{\mathrm{k}\}}$ **であって** x **が** f **に自由に現れなければ，次の式が成り立つ．**

$$\preccurlyeq \left((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\right)\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

証明　定理 5.5.17 の式において特に $\lambda = \forall$, $\mathrm{a} = (\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}$ とすれば,

$$\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\forall\pi\,\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle \asymp \big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

なる式が得られる．これと同一律により成り立つ式 $\preccurlyeq \big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\forall\pi\,\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle$ に消去律を使えば, $\preccurlyeq \big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ なることが分かる．

系 2 $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ **とし，x が a に自由に現れないと仮定する．このとき，**

1. $\mathrm{a} \simeq (\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}$ **が成り立つ．**
2. A **から任意の単相格世界** W **への任意の定付値** Φ **と任意の** $\nu \in \mathrm{Val}_W$ **に対し** $(\Phi^*\mathrm{a})\nu$ **の複化は** $\Big(\Phi^*\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\Big)\nu$ **に等しい．すなわち** $\big((\Phi^*\mathrm{a})\nu\big)^\natural = \Big(\Phi^*\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\Big)\nu$**．**
3. $\lambda \in \mathfrak{Q}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$, $\mathrm{f} \in \mathrm{A}_\mathrm{P}$ **のとき** $\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{kf} \asymp \big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\lambda\mathrm{kf}$ **が成り立つ．**

証明　1. 定理 5.5.17 において $\Lambda = \forall$, $\mathrm{k} = \pi$, $\mathrm{f} = \mathrm{a}\triangle$ とすれば, $\mathrm{a}\,\forall\pi\,\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle \asymp \mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$ が得られ，これと同一律により成り立つ式 $\preccurlyeq \mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$ に消去律を使えば $\preccurlyeq \mathrm{a}\,\forall\pi\,\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle$ が得られ，従って補題 5.5.2 により $\mathrm{a} \lesssim (\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}$ が成り立つ．他方，系において $\mathrm{k} = \pi$, $\mathrm{f} = \mathrm{a}\triangle$ とすれば $\preccurlyeq \big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\forall\pi\,\mathrm{a}\triangle$ が得られ，従って $(\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x} \lesssim \mathrm{a}$ が成り立つ．これら二式を合わせれば $\mathrm{a} \simeq (\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}$ が得られる．

2. 結論 1 により $(\Phi^*\mathrm{a})\nu \equiv \Big(\Phi^*\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\Big)\nu$ が成り立って右辺が W_δ に属すからである．

3. 結論 2 と問題 5.2.8 により $(\Phi^*\mathrm{a})\nu\,\lambda\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\nu = \Big(\Phi^*\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\Big)\nu\,\lambda\mathrm{k}\,(\Phi^*\mathrm{f})\nu$ が成り立つからである．

系 3 $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$ **であって x が a に自由に現れなければ，次の二式が成り立つ．**

$$(\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x} \sqcap \mathrm{b} \simeq \mathrm{a} \sqcap \mathrm{b} \qquad\qquad (\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x} \sqcup \mathrm{b} \simeq \mathrm{a} \sqcup \mathrm{b}$$

証明　任意の $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ をとって $\alpha = (\Phi^*\mathrm{a})\nu$, $\alpha' = \Big(\Phi^*\big((\mathrm{x}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\Big)\nu$, $\beta = (\Phi^*\mathrm{b})\nu$ と定める．そうすると，系 2 により $\alpha' = \alpha^\natural$, 従って問題 5.2.7 と問題 5.2.6 により $\alpha'\sqcap\beta \equiv \alpha\sqcap\beta$, $\alpha'\sqcup\beta \equiv \alpha\sqcup\beta$ が成り立つ．これからこの系の二式の成り立つことが分かる．

問題 5.5.20 $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ のとき，G の各閉元 a に対して，$\mathrm{A}_\emptyset$ の元 f で $\mathrm{a} \simeq \mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x}$, $\mathrm{Fvar}^\mathrm{f} \subseteq \{\mathrm{x}\}$ なる条件をみたすものが存在する．また，$\mathrm{f}' \in \mathrm{A}_\emptyset$ も同じ条件をみたせば $\mathrm{f} \asymp \mathrm{f}'$ が成り立つ．

略解　後半は補題 5.5.3 による．

定理 5.5.18 $\mathrm{f} \in \mathrm{A}_\emptyset$, $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **であって x が f に自由に現れなければ，次のことが成り立つ．**

$$\mathrm{f} \asymp (\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \asymp \mathrm{one}\,\exists\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle \asymp \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$$

証明　A から任意の単相格世界 W への任意の定付値 Φ と任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ をとる．そうすると，まず問題 5.2.26 により

$$\begin{aligned}\Big(\Phi^*\big((\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle\big)\Big)\nu &= (\Phi^*(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x}))\nu\,\exists\pi\,\big((\Phi^*\mathrm{one})\nu\big)\triangle \\ &= (\Phi^*\mathrm{one})\nu\,\exists\pi\,\Big(\big(\Phi^*(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\big)\nu\Big)\triangle = \Big(\Phi^*\big(\mathrm{one}\,\exists\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle\big)\Big)\nu\end{aligned}$$

従って $(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \asymp \mathrm{one}\,\exists\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ が成り立つ．次に

$$\begin{aligned}(\Phi^*\mathrm{f})\nu = 1 &\iff (\Phi^*\mathrm{f})\big((\mathrm{x}/w)\nu\big) = 1 \text{ なる } w \in W_\varepsilon \text{ がある}\\ &\iff \Big(\big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu\Big)w = 1 \text{ なる } w \in W_\varepsilon \text{ がある}\\ &\iff \Big(\big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu\Big)\,\exists\, w \text{ なる } w \in W_\varepsilon \text{ がある}\\ &\iff 1 \sqcap \big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu \neq 0\\ &\iff 1\,\exists\pi\Big(\big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu\Big)\triangle = 1\\ &\iff \Big(\Phi^*\big(\mathrm{one}\,\exists\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle\big)\Big)\nu = 1\end{aligned}$$

従って $\mathrm{f} \asymp \mathrm{one}\,\exists\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ が成り立つ．ただし，一番目の $\iff$ が成り立つのは定理 4.4.1 により，二番目の $\iff$ が成り立つのは (5.3.1) により，三番目の $\iff$ が成り立つのは拡張関係 $\exists$ の定義による．四番目の $\iff$ が成り立つのは，W_δ の最大元 1 と最小元 0 の性質および W 上の算法 $\sqcap$ の定義による．五番目の $\iff$ が成り立つのは問題 5.2.25 により，六番目の $\iff$ が成り立つのは問題 5.5.6 により $(\Phi^*\mathrm{one})\nu = 1$ であることによる．

$\mathrm{f} \asymp \mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ の成り立つことは，定理 5.5.16 系 4 で示してあるが，上と同様の次の推論でも示される．

$$\begin{aligned}(\Phi^*\mathrm{f})\nu = 1 &\iff \text{任意の } w \in W_\varepsilon \text{ に対して } (\Phi^*\mathrm{f})\big((\mathrm{x}/w)\nu\big) = 1\\ &\iff \text{任意の } w \in W_\varepsilon \text{ に対して } \Big(\big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu\Big)w = 1\\ &\iff \text{任意の } w \in W_\varepsilon \text{ に対して } \Big(\big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu\Big)\,\exists\, w\\ &\iff 1 \sqsubseteq \big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu\\ &\iff 1\,\forall\pi\Big(\big((\Phi^*\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}\big)\nu\Big)\triangle = 1\\ &\iff \Big(\Phi^*\big(\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle\big)\Big)\nu = 1\end{aligned}$$

5.5.7　全包元

§ 全包元についてはこれまでにも折に触れて説明したが，ここでは少しまとめて説明する．

定理 5.5.19 A **の全包元はすべて** $\mathrm{A}_\delta - \mathrm{Prm}_\delta$ **に属す．**

証明　A の全包元 $\mathfrak{a}$ が $\mathrm{Prm}_\delta \cup \mathrm{A}_\varepsilon$ に属すと仮定して矛盾を導く．そのために注意 5.2.3 の手順で，特別な単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ を次のように作る．まず問題 3.12.4 により，$\mathrm{T}_{\mathfrak{F}}$ と同類の汎代数系として A_ε の台拡大 S で $\#\mathrm{S} \geq 2$ なるものをとる．次に，S 上の反射的関係 $\exists$ として相等関係 $=$ をとる．次に，問題 3.32.30 により S 上の $\mathbb{P}$ 測度があるので，その任意の一つ $|\mathrm{X}|$ をとる．注意 5.2.3 によればこれで，S を基底とし $\exists$ を基本関係とし $|\mathrm{X}|$ を測度とする単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ が作れた．

そこで，A から W への定付値 Φ と変付値 ν を任意にとる．そうすると，$\mathfrak{a}$ が全包元であるから，問題 5.2.10 により W_δ の最大元 1 に対して $(\Phi^*\mathfrak{a})\nu \equiv 1$，つまり任意の $\mathrm{s} \in W_\varepsilon$ に対して $(\Phi^*\mathfrak{a})\nu \,\exists\, \mathrm{s}$ が成り立つ．従って，$\mathfrak{a} \in \mathrm{Con}_\delta$ なら $\Phi\mathfrak{a} = 1$ となり，$\mathfrak{a} \in \mathrm{Var}_\delta$ なら $\nu\mathfrak{a} = 1$ となる．しかしこれは，Φ と ν が任意で $W_\delta \neq \{1\}$ であるから，問題 4.3.1 に反する．従って $\mathfrak{a} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ であり，$\exists$ が $=$ に等しいから $W_\varepsilon = \{(\Phi^*\mathfrak{a})\nu\}$ となる．しかしこれは，$\#W_\varepsilon \geq 2$ であったことに反する．

定理 5.5.20 $\mathfrak{a} \in G$ **が全包元であるためには，次の三条件のいずれもが必要十分である．**

1. **任意の** $\mathfrak{b} \in G$ **に対して** $\mathfrak{b} \lesssim \mathfrak{a}$ **が成り立つ．**
2. **任意の** $\mathfrak{b} \in G$ **に対して** $\preccurlyeq \mathfrak{b} \forall\pi\, \mathfrak{a} \triangle$ **が成り立つ．**
3. **任意の** $\mathfrak{b} \in G$ **と** $\mathfrak{k} \in P \in \mathcal{P}K$, $\mathfrak{f} \in A_P$ **なる任意の** $\mathfrak{k}, \mathfrak{f}$ **に対して** $\mathfrak{a} \forall \mathfrak{k}\, \mathfrak{f} \preccurlyeq \mathfrak{b} \forall \mathfrak{k}\, \mathfrak{f}$ **が成り立つ．**

証明　$\mathfrak{a}$ が全包元であるために条件 1, 2 のいずれもが必要十分であることは，定理 5.5.9 で示した．そこで，条件 2, 3 が同等であることを示そう．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 定理 5.5.10 により，任意の $\mathfrak{b} \in G$ と $\mathfrak{k} \in P \in \mathcal{P}K$, $\mathfrak{f} \in A_P$ なる任意の $\mathfrak{k}, \mathfrak{f}$ に対して，$\mathfrak{b} \forall\pi\, \mathfrak{a} \triangle$, $\mathfrak{a} \forall \mathfrak{k}\, \mathfrak{f} \preccurlyeq \mathfrak{b} \forall \mathfrak{k}\, \mathfrak{f}$ が成り立つ．これと条件 2 により成り立つ式 $\preccurlyeq \mathfrak{b} \forall\pi\, \mathfrak{a} \triangle$ に消去律を使えば，$\mathfrak{a} \forall \mathfrak{k}\, \mathfrak{f} \preccurlyeq \mathfrak{b} \forall \mathfrak{k}\, \mathfrak{f}$ の成り立つことが分かる．

(3 $\Longrightarrow$ 2) 条件 3 を仮定すると，任意の $\mathfrak{b} \in G$ に対して特に $\mathfrak{a} \forall\pi\, \mathfrak{a} \triangle \preccurlyeq \mathfrak{b} \forall\pi\, \mathfrak{a} \triangle$ が成り立つ．これと同一律により成り立つ式 $\preccurlyeq \mathfrak{a} \forall\pi\, \mathfrak{a} \triangle$ に消去律を使えば，$\preccurlyeq \mathfrak{b} \forall\pi\, \mathfrak{a} \triangle$ なることが分かる．

定理 5.5.21 $\mathfrak{a} \in G$, $\mathfrak{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **であって** $\mathfrak{x}$ **は** $\mathfrak{a}$ **に自由に現れないとする．このとき，**$\mathfrak{a}$ **が全包元であるためには次の三条件のいずれもが必要十分である．**

1. **任意の** $\mathfrak{b} \in A_\varepsilon$ **に対して** $\preccurlyeq \mathfrak{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a} \triangle$ **が成り立つ．**
2. $\preccurlyeq \mathfrak{x}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a} \triangle$ **が成り立つ．**
3. **任意の** $\mathfrak{b} \in A_\varepsilon$ **と** $\mathfrak{k} \in P \in \mathcal{P}K$, $\mathfrak{f} \in A_P$ **なる任意の** $\mathfrak{k}, \mathfrak{f}$ **に対して** $\mathfrak{a} \forall \mathfrak{k}\, \mathfrak{f} \preccurlyeq \mathfrak{b}\, \breve{o} \mathfrak{k}\, \mathfrak{f}$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.16.4 により，$\mathfrak{x}$ は $\mathfrak{a} \triangle$ にも自由に現れない．従って定理 5.5.14 系 2 により，条件 1, 2 は定理 5.5.20 の条件 2 と同等である．また，定理 5.5.20 の条件 2, 3 が同等であることの証明と同様にすれば，条件 1, 3 が同等であることを示すことができる．

5.5.8　固有元

§ **この項を通じて，**W **は反対称律に従う基本関係** $\ni$ **を持つ単相格世界であるとし，**Φ **は** A **から** W **への定付値であるとする．** 典型的なのは，$\ni$ が順序関係の場合である．

定義 5.5.1 $\mathfrak{a} \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ が Φ に関する**固有元**であるとは，あ̀る̀ $\mathfrak{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して

$$\mathfrak{x}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a} \triangle \preccurlyeq_\Phi \mathfrak{a}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{x} \triangle \tag{5.5.4}$$

なる条件をみたすことを言う．

注意 5.5.8 $\mathfrak{a} \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ が Φ に関する固有元であるなら，定理 5.5.2 により，任意の $\mathfrak{b} \in A_\varepsilon$ に対して $\mathfrak{b}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{a} \triangle \preccurlyeq_\Phi \mathfrak{a}\, \breve{o}\pi\, \mathfrak{b} \triangle$ の成り立つことが分かる．

補題 5.5.4 $\mathfrak{a} \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ **が** Φ **に関する固有元であるためには，**$\Phi\mathfrak{a}$ **が問題 5.2.23 で定義した意味で** W_ε **における**<u>**個実在**</u>**であることが必要十分である．**

証明　固有性の条件 (5.5.4) は，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して次の式が成り立つことを意味する．

$$(\Phi^* x)\nu\, \breve{o}\pi \bigl((\Phi^* a)\nu\bigr)\triangle \lessdot (\Phi^* a)\nu\, \breve{o}\pi \bigl((\Phi^* x)\nu\bigr)\triangle$$

この式は，$(\Phi^* x)\nu = \nu x$，$(\Phi^* a)\nu = \Phi a$ であることと補題 5.2.10 とにより，

$$\Phi a \ni \nu x \implies \nu x \ni \Phi a$$

と書き換えられる．この条件は，$\ni$ が反対称的かつ反射的であるから，さらに

$$\Phi a \ni \nu x \iff \Phi a = \nu x$$

と書き換えられる．ν が Val_W 全体に亘って動くとき問題 4.3.1 により νx は W_ε 全体に亘って動くから，固有性の条件 (5.5.4) は，結局，$\Phi a \ni w$ なる $w \in W_\varepsilon$ が Φa に限ることと同等である．従って，a が Φ の下での固有元であるためには，Φa が個実在であることが必要十分である．

定理 5.5.22 $a \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ **を** Φ **に関する固有元とし** $k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in A_P$ **とすれば，次の二式が成り立つ．**

$$a \forall k\, f \asymp_\Phi a\, \breve{o} k\, f \qquad\qquad a\, \breve{o} k\, f \asymp_\Phi a \exists k\, f$$

証明　補題 5.5.4 により，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して，$(\Phi^* a)\nu$ $(= \Phi a)$ は W_ε における個実在である．従って問題 5.2.23 により，

$$(\Phi^* a)\nu \forall k\, (\Phi^* f)\nu = (\Phi^* a)\nu\, \breve{o} k\, (\Phi^* f)\nu = (\Phi^* a)\nu \exists k\, (\Phi^* f)\nu$$

が成り立つ．これは定理の二式の成り立つことを意味する．

問題 5.5.21 A の元 a において単体変数 x が単体変数 y, z から自由であれば，a が用元であるか体元であるかに応じて，下二式のうちの第一式か第二式が成り立つ．

$$y\, \breve{o}\pi z \triangle,\ z\, \breve{o}\pi y \triangle,\ a(x/y) \preccurlyeq_\Phi a(x/z)$$
$$y\, \breve{o}\pi z \triangle,\ z\, \breve{o}\pi y \triangle \preccurlyeq_\Phi a(x/y) \forall \pi\, a(x/z) \triangle$$

ただし (x/y)，(x/z) は，x への y, z それぞれの代入を表す．

5.5.9　論理と弱論理

§ ここでは，第 5.4 節で定義した用論対 $(H, \mathcal{G})$ とそれに随伴する式論対の論理・弱論理について説明する．$(H, \mathcal{G})$ の論理は第 5.4 節で用論理と呼んだものに他ならず，定理 3.30.2 により，H^*, H 間の関係 R が A の用論理であるためには，$(H, \mathcal{G})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ について

$$f_1 \cdots f_n\, R\, g \implies f_1, \ldots, f_n \preccurlyeq g$$

なる条件をみたすことが必要十分である．やはり定理 3.30.2 により，R が弱論理であるためには，

$$\left.\begin{array}{l} \preccurlyeq f_1,\ \ldots,\ \preccurlyeq f_n \\ f_1 \cdots f_n\, R\, g \end{array}\right\} \implies \ \preccurlyeq g$$

なる条件をみたすことが必要十分である．他方，用元式の全体 $H^* \times H^*$ を $\vec{H}$ で表せば，弱論理の定義により，式論対の弱論理とは $\vec{H}^*, \vec{H}$ 間の関係 R' であって次の条件をみたすものに他ならない．ただし，$\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i$ $(i = 1, \dots, n)$ は H^* の元である．

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \preccurlyeq \beta_1,\ \dots,\ \alpha_n \preccurlyeq \beta_n \\ \alpha_1 \to \beta_1,\ \dots,\ \alpha_n \to \beta_n\ R'\ \alpha \to \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \preccurlyeq \beta$$

以上のことから，これまでに分かった恒真式についての事実は，論理と弱論理についての事実に直ちに翻訳される．それは枚挙に暇なく，完全性に関連して重要なものは次節で提示するので，ここでは，それ以外に第 7 章で引用する重要なものを例示するに止める．なお，H^*, H 間の関係にしても $\vec{H}^*, \vec{H}$ 間の関係にしても，算法とみなせるものは「算法」と呼ぶことがある．

まず定理 5.5.2 から，次のことが直ちに分かる．

定理 5.5.23 **$x_1, \dots, x_l$ を A の相異なる変数とし，a_k を $A_{\sigma x_k}$ の元とする $(k = 1, \dots, l)$．このとき，H の元 f でそこにおいて各 k について x_k が a_k から自由であるものに $f(x_k/a_k)$ を対応させる H 上の算法は弱論理である．**

ただし記号 (x_k/a_k) は，$x_1, \dots, x_l$ への $a_1, \dots, a_l$ の代入

$$\left(\frac{x_1, \dots, x_l}{a_1, \dots, a_l}\right)$$

の略記である．そこで，この算法を**代入**と呼ぶ．つまり，この代入算法を仮に ρ で表すと，

$$\mathrm{Dom}\,\rho = \{f \in H \mid f \text{ において } x_k \text{ が } a_k \text{ から自由 } (k = 1, \dots, l)\}$$

であり，$f \in \mathrm{Dom}\,\rho$ に対して次の式が成り立つ．

$$\rho\, f = f\left(\frac{x_1, \dots, x_l}{a_1, \dots, a_l}\right)$$

第 3.9.7 項で説明した関係の分数式定義法によれば，ρ は次のように記述することもできる．

$$\frac{f}{f(x_k/a_k)} \qquad \bigl(f \text{ において } x_k \text{ が } a_k \text{ から自由 } (k = 1, \dots, l)\bigr)$$

以後はもっぱらこういう書き方をすることにする．

問題 5.5.22 次の六つの算法は H 上の用論理である．

$$\frac{a\,\breve{o}\pi\, b\triangle \quad a\,\breve{o}k\,f}{b\,\exists k\,f} \qquad \frac{a\,\breve{o}\pi\, b\triangle \quad b\,\forall k\,f}{a\,\breve{o}k\,f}$$

$$\frac{a\,\underline{p}\pi\, b\triangle \quad a\,\overline{p+q}k\,f}{b\,\overline{q}k\,f} \qquad \frac{a\,\overline{p+q}\pi\, b\triangle \quad a\,\underline{p}k\,f}{b\,\overline{q}k\,f}$$

$$\frac{a\,\underline{p}\pi\, b\triangle \quad b\,\underline{q}k\,f}{a\,\underline{p+q}k\,f} \qquad \frac{a\,\overline{p+q}\pi\, b\triangle \quad b\,\underline{q}k\,f}{a\,\overline{p}k\,f}$$

略解　定理 5.2.15 とその系による．

5.6　完全性定理

$ この節では，単相格論理学における完全性定理を証明する．

そこで**この節を通じて，**$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ **を単相格論理系とし，**K **と** $\mathbb{P}$ **を** A **の格集合と限量系とし，その他の記号の意味もこれまで通りとする．**特に，$\mathrm{T} = \{\delta, \varepsilon\} \cup \mathcal{P}\mathrm{K}$ であり，A の限量子系 $\mathfrak{Q}$ は正負の限量子系 $\mathfrak{P}$ と $\neg\mathfrak{P}$ の直和であり，$\mathfrak{P}$ は $\mathbb{P}$ の区間包または偏区間包であり，H は A の用元の全体であり，各 $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$ の格域を K_f で表す．そこで，**さらに次の仮定を設ける**

1. **各** $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$ **に対し** K_f **は有限集合である．**

2. $\mathfrak{P}$ **は** $\mathbb{P}$ **の偏区間包である．**

3. Var_ε **と** A_ε **はどちらも可算集合である．**

定理 5.1.2 により $\mathrm{A}_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_\mathfrak{F}$ であるから，条件 3 は Var_ε が可算集合で Con_ε と $\mathfrak{F}$ が高々可算の集合であることと同等である．

条件 1 と 3 は数理心理学の観点から見ると妥当な仮定であるが，条件 2 が妥当かどうかも，条件 2 を取り除くことも，未解決の問題である．そしてこの問題は，「人が量を認識するとは如何なることか」という問題の根本に関わっているように思われる．ただし問題 3.9.26 によれば，$\mathbb{P}$ において最少元以外の元に直前の元があれば，$\mathbb{P}$ の区間包と偏区間包が一致するから，条件 2 は取り除くことができる．たとえば $\mathbb{P}$ が非負整数の全体 $\mathbb{Z}_0$ に等しければ，この条件がみたされる．

前節までに設けた定義や規約は継承する．特に，第 5.4 節で定めた通り，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値および K からその単相格世界への格付値の組みの全体を $\mathfrak{W}$ で表し，各 $(\Phi, \nu, \theta) \in \mathfrak{W}$ に対して H から $\mathbb{T}$ への写像 $\mathrm{f} \mapsto \big((\Phi^*\mathrm{f})\nu\big)(\theta|_{\mathrm{K}_\mathrm{f}})$ を $\Phi^{\nu,\theta}$ で表し，こういう写像の全体を $\mathcal{G}$ で表す．そうすると，$(\mathrm{H}, \mathcal{G})$ が単相格論理系 $(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の定める用論対であり，これに関して完全な論拠を見つけるために注意 3.30.6 の手順 1, 2 を実行することがこの節の目標である．

5.6.1　用元式についての弱完全性定理

§ ここでは，用論対 $(\mathrm{H}, \mathcal{G})$ に対して注意 3.30.6 の手順 1 を行なう．すなわち $(\mathrm{H}, \mathcal{G})$ の特性法則を見つける．そのためにまず，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値の組みの全体をこれまで通り $\mathfrak{V}$ で表す．次に，第 3.30.1 項に沿って定義と規約を設ける．すなわち，用元式の全体を $\vec{\mathrm{H}}$ で表す．

$$\vec{\mathrm{H}} = \mathrm{H}^* \times \mathrm{H}^*$$

そうすると，第 5.5 節で各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に対して定めた (Φ, ν) 真関係 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と恒真関係 $\preccurlyeq$ は，第 3.9 節における「関係」の定義により $\vec{\mathrm{H}}$ の部分集合であるが，記号 $\preccurlyeq_{\Phi,\nu}$ と $\preccurlyeq$ が集合を表すのにそぐわないので，記号 $\vec{\mathrm{H}}_{\Phi,\nu}$ と $\vec{\mathrm{C}}$ でも表すことにする．

$$\vec{\mathrm{H}}_{\Phi,\nu} = \{\alpha \to \beta \in \vec{\mathrm{H}} \mid \alpha \preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta\} \qquad \vec{\mathrm{C}} = \{\alpha \to \beta \in \vec{\mathrm{H}} \mid \alpha \preccurlyeq \beta\}$$

すなわち，$\vec{\mathrm{H}}_{\Phi,\nu}$ は (Φ, ν) 真式の全体であり，$\vec{\mathrm{C}}$ は $(\mathrm{H}, \mathcal{G})$ の恒真式の全体であると共に，$(\mathrm{H}, \mathcal{G})$ に随伴する式論対の核である．さらに，(Φ, ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての $\vec{\mathrm{H}}_{\Phi,\nu}$ の全体を $\vec{\mathcal{G}}$ で表す．

$$\vec{\mathcal{G}} = \{\vec{\mathrm{H}}_{\Phi,\nu} \mid (\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}\}$$

そうすると，$\vec{\mathcal{G}}$ は $\mathcal{P}\vec{\mathrm{H}}$ の部分集合であるから，$(\vec{\mathrm{H}},\vec{\mathcal{G}})$ は論対である．この論対は用論対 $(\mathrm{H},\mathcal{G})$ に随伴する式論対そのものではないが，以上の定義と定理 5.5.1 系により

$$\vec{\mathrm{C}} = \textstyle\bigcap_{(\Phi,\nu)\in\mathfrak{V}} \vec{\mathrm{H}}_{\Phi,\nu} = \bigcap_{\mathrm{X}\in\vec{\mathcal{G}}} \mathrm{X}$$

であるから，$(\vec{\mathrm{H}},\vec{\mathcal{G}})$ は式論対と核 $\vec{\mathrm{C}}$ を共有する．つまり $(\vec{\mathrm{H}},\vec{\mathcal{G}})$ は式論対と弱同値である．

従って，$(\mathrm{H},\mathcal{G})$ の特性法則を見つけるというこの項の目標は，$\vec{\mathrm{H}}$ 上の論拠 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ で $\vec{\mathcal{G}}$ 弱完全なもの，つまり $\vec{\mathrm{C}} = [\vec{\mathrm{D}}]_{\vec{\mathrm{R}}}$ をみたすものを提示することとなる．それは言い換えれば，H^* 上の関係についての生成的法則 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ で恒真関係 $\preccurlyeq$ を最小 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ 関係と成すものを提示することである．

以下，そういう論拠・生成的法則 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ を一組み提示する．恒真関係 $\preccurlyeq$ が最小 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ 関係であるためには，$\preccurlyeq$ が生成的法則 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ に従うことが必要である．論拠 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ が $\vec{\mathcal{G}}$ に関して弱完全であるためには，$\vec{\mathrm{R}}$ が論対 $(\vec{\mathrm{H}},\vec{\mathcal{G}})$ の弱論理であって $\vec{\mathrm{D}} \subseteq \vec{\mathrm{C}}$ であることが必要である．$\vec{\mathrm{R}}$ が弱論理であるとは $\vec{\mathrm{C}}$ が $\vec{\mathrm{R}}$ で閉じていることであり，それは，$\vec{\mathrm{R}}$ の下記分数式表示における分子に現れる式がすべて恒真式であれば分母も恒真式であることに他ならない．また，$\vec{\mathrm{D}} \subseteq \vec{\mathrm{C}}$ であることは $\vec{\mathrm{D}}$ の各元が恒真式であることに他ならない．そこで $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ を提示するに当たっては，$\vec{\mathrm{R}}$ が弱論理であって $\vec{\mathrm{D}} \subseteq \vec{\mathrm{C}}$ である理由，つまり $\preccurlyeq$ が生成的法則 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ に従う理由を添え示す．

以下に示す論拠 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ の表とその弱完全性の証明法は，第 3.23 節の命題論理系に対するものと第 4.9.1 項の一階述語論理系に対するものに倣うと共に，水村泰明氏の東京大学 2000 年度修士論文「論理体系 MCL の完全性」における単相格論理系に対するものに基づいている [11]．ただし水村氏の扱った当時の単相格論理系は，限量子の範囲を現在の $\mathfrak{Q}$ から $\{\underline{\mathrm{p}},\overline{\mathrm{p}} \mid \mathrm{p} \in \mathbb{P}\}$ に制限したものであった．また，意味論・完全性論の基礎を成す第 3.26 節 – 第 3.30 節の論対論・論拠論やその準備を成す節は，当時は存在しなかったか今よりかなり貧弱であった．また水村氏の証明には，代入値換定理 4.4.2 を適用する際に変数の自由性を顧慮し忘れるなどの誤りもあった．従って以下の説明は，水村氏以後の進展を踏まえると共に水村氏の誤りを正したものである．また，水村氏の提示した論拠 $(\mathrm{R}',\mathrm{D}')$ では R' が大きく D' が小さいのに対して，以下に提示する論拠 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ では $\vec{\mathrm{R}}$ が小さく $\vec{\mathrm{D}}$ が大きい．ただし，R' と $\vec{\mathrm{R}}$ の大きい小さいは，個数の多い少ないを意味すると共に，分数式表示の複雑簡単をも意味する．これは，用論対 $(\mathrm{H},\mathcal{G})$ に関して完全な論拠を提示するという本来の目的へ向けて行なう手順 2 のためには，$\vec{\mathrm{R}}$ の小さいことが望ましいからである．なお，水村氏の提示した論拠 $(\mathrm{R}',\mathrm{D}')$ では双対性が軽視されているのに対し，以下に提示する論拠 $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ では双対性を重視している．なおまた $(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ は，弱完全性の証明だけを目的とするならもっと小さく絞ることもできる．たとえば，$\vec{\mathrm{R}}$ に含まれる「片格出関係」「片格入関係」以外の関係においては，分母分子中の用元はすべて文であるとしていい．また，$\vec{\mathrm{D}}$ に属す $\sqcup, +$ 式においては $\mathrm{k} = \pi$，$\mathrm{f} = \mathrm{one}\triangle$ としていい．しかし，そういう絞りは敢えてしていない．双対性を重視したのも，$(\vec{\mathrm{R}},\vec{\mathrm{D}})$ を絞らないのも，何事につけ「経済性」にではなく「機能美」に事の本質が潜んでいるのではないかと考えるからである．

しかし何はともあれ，命題論理学や述語論理学などと違って限量系や測度などの根本的に新しい概念を含む単相格論理学の誕生間の無くの時期に完全性の問題に先鞭をつけて短期間のうちに正鵠を射た水村氏の行動力・数学的力量・努力は，称賛すべきものである [12]．

---

[11] この論理体系は論理系とは異なる概念である．

[12] 努力の程を紹介すれば，証明完成までに使った計算紙が 1 メートルも積み上がったそうである．

5.6.1.1　論拠としての $(\vec{R}, \vec{D})$

‡ ここでは $(\vec{R}, \vec{D})$ を定義する．まず $\vec{R}$ は，次表に示す十一種十九個の関係の和とする（用元式の向きに注意）．ただし，$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in H^*$，$f, g \in H$ とする．終わりの三つの関係には他のただし書きもある．

$$\frac{\alpha \to \beta}{f\alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow \beta}{f\alpha \leftarrow \beta} \qquad (\textbf{付加関係})$$

$$\frac{ff\alpha \to \beta}{f\alpha \to \beta} \qquad \frac{ff\alpha \leftarrow \beta}{f\alpha \leftarrow \beta} \qquad (\textbf{巾等関係})$$

$$\frac{\alpha fg\beta \to \gamma}{\alpha gf\beta \to \gamma} \qquad \frac{\alpha fg\beta \leftarrow \gamma}{\alpha gf\beta \leftarrow \gamma} \qquad (\textbf{置換関係})$$

$$\frac{\alpha \to x \quad x\beta \to \delta}{\alpha\beta \to \delta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow x \quad x\beta \leftarrow \delta}{\alpha\beta \leftarrow \delta} \qquad (\textbf{消去関係})$$

$$\frac{fg\alpha \to \beta}{f \wedge g, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to f\beta \quad \alpha \to g\beta}{\alpha \to f \wedge g, \beta} \qquad (\textbf{下限関係})$$

$$\frac{f\alpha \to \beta \quad g\alpha \to \beta}{f \vee g, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to fg\beta}{\alpha \to f \vee g, \beta} \qquad (\textbf{上限関係})$$

$$\frac{\alpha \to f\beta}{f^{\diamond}\alpha \to \beta} \qquad \frac{f\alpha \to \beta}{\alpha \to f^{\diamond}\beta} \qquad (\textbf{両補関係})$$

$$\frac{\alpha \to f\beta \quad g\alpha \to \beta}{f \Rightarrow g, \alpha \to \beta} \qquad \frac{f\alpha \to g\beta}{\alpha \to f \Rightarrow g, \beta} \qquad (\textbf{三導関係})$$

$$\frac{\to f}{\to a\,\breve{o}k\,f} \qquad (\textbf{片格出関係})$$

ただし，$a \in A_\varepsilon$，$k \in K_f$ とする．また，矢印の左側の空白は空列であり，以後も同様である．

$$\frac{\to x\,\breve{o}k\,f}{\to f} \qquad (\textbf{片格入関係})$$

ただし，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$k \in K_f$ とし，x は f に自由に現れないものとする．

$$\frac{\to f}{\to \mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle} \qquad (\textbf{片}\ \forall x\ \textbf{出関係})$$

ただし，$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とする．また**記号「one」は，これまでは任意の閉全包元を表してきたが，ここでは，$x_0 \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ を一つ任意に定めて作った $(x_0\,\breve{o}\pi\,x_0\triangle)\,\Omega x_0$ なる閉全包元を表す．**

$$\mathrm{one} = (x_0\,\breve{o}\pi\,x_0\triangle)\,\Omega x_0$$

以下の $\vec{D}$ の表から第 5.6.2 項にかけてもそうである．

付加関係から三導関係までの八種十六個の関係が $(\vec{H}, \vec{g})$ の弱論理であることは例 3.30.1 から，あるいは定理 5.5.5 と定理 3.21.10 から分かる．片格出関係・片格入関係が弱論理であることは定理

5.5.12 から分かる．片 $\forall$x 出関係が弱論理であることは定理 5.5.16 系 3 による．なお，これを片 $\forall$ 出関係とか片 $\forall\pi$ 出関係とかでなく片 $\forall$x 出関係と呼ぶ理由については注意 5.5.6 参照.

次に $\vec{\mathrm{D}}$ は，次表に示す二十五種の式すべてから成る集合とする（式の下のただし書きに注意）.

$$\mathrm{f} \to \mathrm{f} \tag{反復式}$$

ただし $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$ とする．これらが恒真式であるのは，恒真関係 $\preccurlyeq$ が反復律に従うからである.

$$\to \mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{a}\triangle \tag{同一式}$$

ただし $\mathrm{a} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ とする．これらが恒真式であるのは，$\preccurlyeq$ が定理 5.5.3 の同一律に従うからである.

$$\mathrm{a}\,\overline{\infty}\pi\,\mathrm{one}\triangle \to \tag{$\overline{\infty}$ 式}$$

ただし $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ とし，∞ は $\mathbb{P}$ の最大元とし，∞ が存在する場合にのみこの式を定める．これらが恒真式であることは問題 5.2.27 から分かる.

$$\mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{l}\,\mathrm{f}) \rightleftarrows \mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{l}\,(\mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \tag{交換式}$$

ただし $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{b} \in \mathrm{A}_\varepsilon$, $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$, $\mathrm{k}, \mathrm{l} \in \mathrm{K}_\mathrm{f}$, $\mathrm{k} \neq \mathrm{l}$, $\lambda \in \{\breve{\mathrm{o}}\} \cup \mathfrak{Q}$ とし，$\lambda = \breve{\mathrm{o}}$ の場合は $\mathrm{a} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ とする．また二重の矢印 $\rightleftarrows$ は，式 $\mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{l}\,\mathrm{f}) \to \mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{l}\,(\mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f})$ とその逆向きの式 $\mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{l}\,\mathrm{f}) \leftarrow \mathrm{b}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{l}\,(\mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f})$ をまとめて示すための工夫であり，以後も同様である．これらが恒真式であることは定理 5.2.18 から分かる.

$$(\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{l}}(\mathrm{f} \wedge \mathrm{g}) \rightleftarrows (\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m}}\mathrm{f} \wedge (\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=\mathrm{n}+1,\ldots,\mathrm{l}}\mathrm{g} \tag{$\wedge$ 式}$$
$$(\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{l}}(\mathrm{f} \vee \mathrm{g}) \rightleftarrows (\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m}}\mathrm{f} \vee (\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=\mathrm{n}+1,\ldots,\mathrm{l}}\mathrm{g} \tag{$\vee$ 式}$$
$$(\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{l}}(\mathrm{f} \Rightarrow \mathrm{g}) \rightleftarrows (\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m}}\mathrm{f} \Rightarrow (\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=\mathrm{n}+1,\ldots,\mathrm{l}}\mathrm{g} \tag{$\Rightarrow$ 式}$$

ただし $\wedge$ 式・$\vee$ 式・$\Rightarrow$ 式において，$\mathrm{a_i} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ $(\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{l})$, $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{H}$ とし，$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{n}$ を $\mathrm{K_f} - \mathrm{K_g}$ の相異なる元とし，$\mathrm{k}_{\mathrm{n}+1}, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{m}$ を $\mathrm{K_f} \cap \mathrm{K_g}$ の相異なる元とし，$\mathrm{k}_{\mathrm{m}+1}, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{l}$ を $\mathrm{K_g} - \mathrm{K_f}$ の相異なる元とする $(0 \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{l})$．また，$(\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{l}}(\mathrm{f} \wedge \mathrm{g})$ は第 5.2.5 項の記法に準じた記法で，$\mathrm{a}_1\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}_1\,(\mathrm{a}_2\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}_2\,(\cdots(\mathrm{a_l}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_l}\,(\mathrm{f} \wedge \mathrm{g}))\cdots))$ の略記であり，その他の類似の表現の意味も同様である．これらの式が恒真であることは定理 5.2.5 から分かる.

$$(\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}}(\mathrm{f}^\lozenge) \rightleftarrows \bigl((\mathrm{a_i}\,\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}}\mathrm{f}\bigr)^\lozenge \tag{$\lozenge$ 式}$$

ただし，$\mathrm{a_i} \in \mathrm{A}_\varepsilon$ $(\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n})$, $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$ とし，$\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_\mathrm{n}$ を $\mathrm{K_f}$ の相異なる元とする．これらが恒真式であることは定理 5.2.4 系 4 から分かる.

$$\mathrm{a}\neg\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f} \rightleftarrows \mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f}^\lozenge \tag{$\neg$ 式}$$
$$\mathrm{a}\lambda^\circ\mathrm{k}\,\mathrm{f} \rightleftarrows (\mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f})^\lozenge \tag{$\circ$ 式}$$

ただし $\neg$ 式と $\circ$ 式において，$\mathrm{a} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{f} \in \mathrm{H}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{K_f}$, $\lambda \in \mathfrak{Q}$ とする．これらが恒真式であることは定理 5.2.8 の注意 5.2.11 から分かる.

$$\mathrm{a}\,(\lambda \cap \mu)\mathrm{k}\,\mathrm{f} \rightleftarrows \mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f} \wedge \mathrm{a}\,\mu\mathrm{k}\,\mathrm{f} \tag{$\cap$ 式}$$
$$\mathrm{a}\,(\lambda \cup \mu)\mathrm{k}\,\mathrm{f} \rightleftarrows \mathrm{a}\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f} \vee \mathrm{a}\,\mu\mathrm{k}\,\mathrm{f} \tag{$\cup$ 式}$$

ただし ∩ 式と ∪ 式において，$\mathfrak{a} \in G$，$f \in H$，$k \in K_f$ とし，$\lambda, \mu \in \neg\mathfrak{P}$ または $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ とする．これらが恒真式であることは定理 5.2.9 から分かる．

$$\mathfrak{a}\,\lambda k\, f \rightleftarrows \mathfrak{a}\,\lambda\pi\big((x\,\breve{o}k\, f)\,\Omega x\big)\triangle \tag{$\mathfrak{Q}$ 式}$$

ただし $\mathfrak{a} \in G$，$f \in H$，$K_f = \{k\}$，$\lambda \in \mathfrak{Q}$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x が f に自由に現れないとする．これらが恒真式であることは定理 5.5.17 から分かる．

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}\pi\,\mathfrak{b}\triangle \rightleftarrows (\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b})\,\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \tag{$\mathfrak{P}$ 式}$$

ただし $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in G$，$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ とする．これらが恒真式であることは問題 5.2.26 から分かる．

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\big((f \Rightarrow g)\,\Omega x\big)\triangle \to f \Rightarrow \mathrm{one}\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \tag{$\forall x, \Rightarrow$ 式}$$

ただし $f, g \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x は f に自由に現れないものとする．これらが恒真式であることは定理 5.5.16 系 5 から分かる．これを $\forall, \Rightarrow$ 式とか $\forall\pi, \Rightarrow$ 式とかでなく $\forall x, \Rightarrow$ 式と呼ぶ理由は片 $\forall x$ 出関係と同様である（定理 4.8.3 参照）．

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle) \Rightarrow (x\,\breve{o}k\, f)\big)\,\Omega x\Big)\triangle \to \mathfrak{a}\,\forall k\, f \tag{$\forall$ 式}$$

ただし $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$\mathfrak{a} \in G$，$f \in H$，$K_f = \{k\}$ とし，x が $\mathfrak{a}, f$ に自由に現れないとする．これらが恒真式であることは定理 5.5.16 系 6 から分かる．

$$\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathfrak{b}\triangle \wedge \mathfrak{a}\,\overline{p}k\, f \to \mathfrak{b}\,\overline{p}k\, f \tag{$\forall\pi, (\cdot\!\to)$ 式}$$

ただし $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in G$，$f \in H$，$k \in K_f$，$p \in \mathbb{P}$ とする．これらが恒真式であることは定理 5.2.10 系または定理 5.2.15 から分かる．

$$(\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b})\,\overline{p + q}k\, f \to \mathfrak{a}\,\overline{p}k\, f \vee \mathfrak{b}\,\overline{q}k\, f \tag{$\sqcup, +$ 式}$$

ただし $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in G$，$p, q \in \mathbb{P}$，$f \in H$，$k \in K_f$ とする．これらが恒真式であることは定理 5.2.13 から分かる．

$$\mathrm{one}^{\square}\,\overline{p}k\, f \to \tag{$\mathrm{one}^{\square}$ 式}$$

ただし $p \in \mathbb{P}$，$f \in H$，$k \in K_f$ とする．これらが恒真式であることは，単相格世界における算法 $\overline{p}k$ の定義と測度の零値性から分かる．

$$\mathfrak{b}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle \to \mathfrak{a}\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \tag{$\exists$ 式}$$

ただし $\mathfrak{a} \in G$，$\mathfrak{b} \in A_\varepsilon$ とする．これらが恒真式であることは補題 5.2.10 と問題 5.2.27 から分かる．

$$(\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b})\triangle \rightleftarrows \mathfrak{a}\triangle \wedge \mathfrak{b}\triangle \tag{$\sqcap$ 式}$$

$$(\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b})\triangle \rightleftarrows \mathfrak{a}\triangle \vee \mathfrak{b}\triangle \tag{$\sqcup$ 式}$$

$$(\mathfrak{a}^{\square})\triangle \rightleftarrows (\mathfrak{a}\triangle)^{\Diamond} \tag{$\square$ 式}$$

ただし ⊓ 式・⊔ 式・□ 式において $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in G$ とする．これらが恒真式であることは問題 5.2.11 から分かる．

$$\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \rightleftarrows f(x/\mathfrak{a}) \tag{Ωx 式}$$

ただし $\mathfrak{a} \in A_\varepsilon$，$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x が f において $\mathfrak{a}$ から自由であるとし，右辺の $(x/\mathfrak{a})$ は代入を表す．これらが恒真式であるのは定理 5.5.16 による．

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \to f \tag{$\forall x$ 入式}$$

ただし $f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とする．これらが恒真式であるのは定理 5.5.16 系 4 による．これを ∀ 入式とか $\forall\pi$ 入式とかでなく $\forall x$ 入式と呼ぶ理由は片 $\forall x$ 出関係と同様である．

5.6.1.2　生成的法則としての $(\vec{R},\vec{D})$

‡ 前条では $(\vec{R},\vec{D})$ を $\vec{H}$ 上の論拠として定義したが，$(\vec{R},\vec{D})$ は H^* 上の関係についての生成的法則とみなされ，$[\vec{D}]_{\vec{R}}$ は最小 $(\vec{R},\vec{D})$ 関係とみなされる．そこで，H^* 上の関係とみなした $[\vec{D}]_{\vec{R}}$ を $\preccurlyeq_*$ で表し，$\preccurlyeq_*$ の $H\times H$ への制限の対称核を $\asymp_*$ で表す（注意 3.21.1 参照）．そうすると $\preccurlyeq_*$ は，$(\vec{R},\vec{D})$ 関係の一つとして，$(\vec{R},\vec{D})$ を成す関係と式に対応する弱ブール律と消去律と下記の二十七法則に従い，従って定理 3.21.10 によりブール律にも従う．また，補題 3.21.1 により $\asymp_*$ は同値律に従う．なお，反復式に対応する反復律はブール律に吸収されるので記さない．

$$\preccurlyeq_* f \implies \preccurlyeq_* a\,\breve{o}k\,f \qquad \text{(片格出律)}$$

ただし，$f\in H$，$a\in A_\varepsilon$，$k\in K_f$ とする．

$$\preccurlyeq_* x\,\breve{o}k\,f \implies \preccurlyeq_* f \qquad \text{(片格入律)}$$

ただし，$f\in H$，$x\in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$k\in K_f$ とし，x は f に自由に現れないものとする．

$$\preccurlyeq_* f \implies \preccurlyeq_* \mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \qquad \text{(片 }\forall x\text{ 出律)}$$

ただし，$f\in A_\emptyset$，$x\in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とする．

$$\preccurlyeq_* a\,\breve{o}\pi\,a\triangle \qquad \text{(同一律)}$$

ただし $a\in A_\varepsilon$ とする．

$$a\,\overline{\infty}\pi\,\mathrm{one}\triangle \preccurlyeq_* \qquad (\overline{\infty}\text{ 律})$$

ただし $a\in G$ とし，∞ は $\mathbb{P}$ の最大元とし，∞ が存在する場合にのみこの法則がみたされる．

$$a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f) \asymp_* b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f) \qquad \text{(交換律)}$$

ただし $a\in G$，$b\in A_\varepsilon$，$f\in H$，$k,l\in K_f$，$k\neq l$，$\lambda\in\{\breve{o}\}\cup\mathfrak{Q}$ とし，$\lambda=\breve{o}$ の場合は $a\in A_\varepsilon$ とする．

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f\wedge g) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f\wedge(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\ldots,l}\,g \qquad (\wedge\text{ 律})$$

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f\vee g) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f\vee(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\ldots,l}\,g \qquad (\vee\text{ 律})$$

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f\Rightarrow g) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f\Rightarrow(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=n+1,\ldots,l}\,g \qquad (\Rightarrow\text{ 律})$$

ただし $\wedge$ 律・$\vee$ 律・$\Rightarrow$ 律において，$a_i\in A_\varepsilon$ $(i=1,\ldots,l)$，$f,g\in H$ とし，$k_1,\ldots,k_n$ を K_f-K_g の相異なる元とし，$k_{n+1},\ldots,k_m$ を $K_f\cap K_g$ の相異なる元とし，$k_{m+1},\ldots,k_l$ を K_g-K_f の相異なる元とする $(0\le n\le m\le l)$.

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(f^\Diamond) \asymp_* \left((a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f\right)^\Diamond \qquad (\Diamond\text{ 律})$$

ただし $a_i\in A_\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$，$f\in H$ とし，$k_1,\ldots,k_n$ を K_f の相異なる元とする．

$$a\,\neg\lambda k\,f \asymp_* a\lambda k\,f^\Diamond \qquad (\neg\text{ 律})$$

$$a\lambda^\circ k\,f \asymp_* (a\lambda k\,f)^\Diamond \qquad (\circ\text{ 律})$$

ただし $\neg$ 律と $\circ$ 律において，$a\in G$，$f\in H$，$k\in K_f$，$\lambda\in\mathfrak{Q}$ とする．

$$a\,(\lambda\cap\mu)k\,f \asymp_* a\lambda k\,f\wedge a\,\mu k\,f \qquad (\cap\text{ 律})$$

$$\mathfrak{a}\,(\lambda\cup\mu)\mathrm{k}\,\mathrm{f} \asymp_* \mathfrak{a}\,\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f}\vee\mathfrak{a}\,\mu\mathrm{k}\,\mathrm{f} \tag{$\cup$ 律}$$

ただし $\cap$ 律と $\cup$ 律において，$\mathfrak{a}\in G$，$f\in H$，$k\in K_f$ とし，$\lambda,\mu\in\neg\mathfrak{P}$ または $\lambda,\mu\in\mathfrak{P}$ とする．

$$\mathfrak{a}\,\lambda\mathrm{k}\,\mathrm{f} \asymp_* \mathfrak{a}\,\lambda\pi\big((x\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega x\big)\triangle \tag{$\mathfrak{Q}$ 律}$$

ただし $\mathfrak{a}\in G$，$f\in H$，$K_f=\{k\}$，$\lambda\in\mathfrak{Q}$，$x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x が f に自由に現れないとする．

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}\pi\,\mathfrak{b}\triangle \asymp_* (\mathfrak{a}\sqcap\mathfrak{b})\,\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \tag{$\mathfrak{P}$ 律}$$

ただし $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in G$，$\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}$ とする．

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\big((f\Rightarrow g)\,\Omega x\big)\triangle \preccurlyeq_* f\Rightarrow\mathrm{one}\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \tag{$\forall x,\Rightarrow$ 律}$$

ただし $f,g\in A_\emptyset$，$x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x は f に自由に現れないものとする．

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle)\Rightarrow(x\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\big)\,\Omega x\Big)\triangle \preccurlyeq_* \mathfrak{a}\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f} \tag{$\forall$ 律}$$

ただし $x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$，$\mathfrak{a}\in G$，$f\in H$，$K_f=\{k\}$ とし，x が $\mathfrak{a},f$ に自由に現れないとする．

$$\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathfrak{b}\triangle\wedge\mathfrak{a}\,\overline{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq_* \mathfrak{b}\,\overline{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \tag{$\forall\pi,(\cdot\!\rightarrow)$ 律}$$

ただし $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in G$，$f\in H$，$k\in K_f$，$p\in\mathbb{P}$ とする．

$$(\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b})\,\overline{p+q}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq_* \mathfrak{a}\,\overline{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f}\vee\mathfrak{b}\,\overline{q}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \tag{$\sqcup,+$ 律}$$

ただし $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in G$，$p,q\in\mathbb{P}$，$f\in H$，$k\in K_f$ とする．なお定理 3.21.2 によれば，ブール律の下では $\sqcup,+$ 律は $(\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b})\,\overline{p+q}\mathrm{k}\,\mathrm{f}\preccurlyeq_*\mathfrak{a}\,\overline{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f},\ \mathfrak{b}\,\overline{q}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ なる法則と同等である（補題 5.6.3 参照）．

$$\mathrm{one}^{\square}\,\overline{p}\mathrm{k}\,\mathrm{f} \preccurlyeq_* \tag{$\mathrm{one}^{\square}$ 律}$$

ただし $p\in\mathbb{P}$，$f\in H$，$k\in K_f$ とする．

$$\mathfrak{b}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle \preccurlyeq_* \mathfrak{a}\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \tag{$\exists$ 律}$$

ただし $\mathfrak{a}\in G$，$\mathfrak{b}\in A_\varepsilon$ とする．

$$(\mathfrak{a}\sqcap\mathfrak{b})\triangle \asymp_* \mathfrak{a}\triangle\wedge\mathfrak{b}\triangle \tag{$\sqcap$ 律}$$

$$(\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b})\triangle \asymp_* \mathfrak{a}\triangle\vee\mathfrak{b}\triangle \tag{$\sqcup$ 律}$$

$$(\mathfrak{a}^{\square})\triangle \asymp_* (\mathfrak{a}\triangle)^{\Diamond} \tag{$\square$ 律}$$

ただし $\sqcap$ 律・$\sqcup$ 律・$\square$ 律において $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in G$ とする．

$$\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \asymp_* f(x/\mathfrak{a}) \tag{Ωx 律}$$

ただし $\mathfrak{a}\in A_\varepsilon$，$f\in A_\emptyset$，$x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x が f において $\mathfrak{a}$ から自由であるとする．

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \preccurlyeq_* f \tag{$\forall x$ 入律}$$

ただし $f\in A_\emptyset$，$x\in\mathrm{Var}_\varepsilon$ とする．

以上に記した $\preccurlyeq_*$ についてのブール律と二十七法則から，$\preccurlyeq_*$ が従う他の法則を以下のように導くことができる．

補題 5.6.1 $a_i \in A_\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$, $f_1,\ldots,f_m \in H$ **とし，**$k_1,\ldots,k_n$ **を** $K_{f_1}\cap\cdots\cap K_{f_m}$ **の相異なる元とすれば，次の式が成り立つ．ただし，算法** $\wedge,\vee$ **を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．**

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(f_1\wedge\cdots\wedge f_m) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f_1\wedge\cdots\wedge(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f_m \qquad (\text{一般}\wedge\text{律})$$
$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(f_1\vee\cdots\vee f_m) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f_1\vee\cdots\vee(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f_m \qquad (\text{一般}\vee\text{律})$$

証明　代表的に一般 $\vee$ 律を証明する．$m=1$ ならこの法則は自明にみたされる．そこで $m>1$ と仮定して m についての帰納法を使う．左辺での括弧の付け方が $(f_1\vee\cdots\vee f_j)\vee(f_{j+1}\vee\cdots\vee f_m)$ であれば，$\vee$ 律により

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_i(f_1\vee\cdots\vee f_m) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_i(f_1\vee\cdots\vee f_j)\vee(a_i\,\breve{o}k_i)_i(f_{j+1}\vee\cdots\vee f_m)$$

が成り立つ．ただし，$(a_i\,\breve{o}k_i)_i$ は $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}$ を表す．他方で，帰納法の仮定により

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_i(f_1\vee\cdots\vee f_j) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_i f_1\vee\cdots\vee(a_i\,\breve{o}k_i)_i f_j$$
$$(a_i\,\breve{o}k_i)_i(f_{j+1}\vee\cdots\vee f_m) \asymp_* (a_i\,\breve{o}k_i)_i f_{j+1}\vee\cdots\vee(a_i\,\breve{o}k_i)_i f_m$$

従って定理 3.21.2 により一般 $\vee$ 律の式が得られる（定理 3.21.7 参照）．

補題 5.6.2 $a\in G$, $f\in H$, $k\in K_f$ **とし，**$\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\neg\mathfrak{P}$ **または** $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathfrak{P}$ **とすれば，次の式が成り立つ．ただし，算法** $\wedge,\vee$ **を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．**

$$a(\lambda_1\cap\cdots\cap\lambda_n)kf \asymp_* a\lambda_1kf\wedge\cdots\wedge a\lambda_nkf \qquad (\text{一般}\cap\text{律})$$
$$a(\lambda_1\cup\cdots\cup\lambda_n)kf \asymp_* a\lambda_1kf\vee\cdots\vee a\lambda_nkf \qquad (\text{一般}\cup\text{律})$$

証明　代表的に一般 $\cup$ 律を証明する．$n=1$ ならこの法則は自明にみたされる．そこで $n>1$ と仮定して n についての帰納法を使う．$\cup$ 律により $a(\lambda_1\cup\cdots\cup\lambda_n)kf \asymp_* a(\lambda_1\cup\cdots\cup\lambda_{n-1})kf\vee a\lambda_nkf$ が成り立つ．他方で，帰納法の仮定により $a(\lambda_1\cup\cdots\cup\lambda_{n-1})kf \asymp_* a\lambda_1kf\vee\cdots\vee a\lambda_{n-1}kf$，従って定理 3.21.2 により $a(\lambda_1\cup\cdots\cup\lambda_{n-1})kf\vee a\lambda_nkf \asymp_* a\lambda_1kf\vee\cdots\vee a\lambda_{n-1}kf\vee a\lambda_nkf$ が成り立つ．一番目と三番目の式から一般 $\cup$ 律の式が得られる．

補題 5.6.3 $a_1,\ldots,a_n\in G$, $p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{P}$, $f\in H$, $k\in K_f$ **のとき次の式が成り立つ．ただし，左辺において算法** $\sqcup$ **を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．**

$$(a_1\sqcup\cdots\sqcup a_n)\,\overline{p_1+\cdots+p_n}kf \preccurlyeq_* a_1\,\overline{p_1}kf,\ \cdots,\ a_n\,\overline{p_n}kf \qquad (\text{一般}\sqcup,+\text{律})$$

証明　$n=1$ ならこの法則は自明にみたされる．そこで $n>1$ と仮定して n についての帰納法を使う．括弧の付け方が $a_1\sqcup\cdots\sqcup a_n=(a_1\sqcup\cdots\sqcup a_i)\sqcup(a_{i+1}\sqcup\cdots\sqcup a_n)$ であれば，$\sqcup,+$ 律により

$$(a_1\sqcup\cdots\sqcup a_n)\,\overline{p_1+\cdots+p_n}kf$$
$$\preccurlyeq_* (a_1\sqcup\cdots\sqcup a_i)\,\overline{p_1+\cdots+p_i}kf,\ (a_{i+1}\sqcup\cdots\sqcup a_n)\,\overline{p_{i+1}+\cdots+p_n}kf$$

が成り立ち，帰納法の仮定により

$$(a_1\sqcup\cdots\sqcup a_i)\,\overline{p_1+\cdots+p_i}kf \preccurlyeq_* a_1\,\overline{p_1}kf,\ \cdots,\ a_i\,\overline{p_i}kf$$
$$(a_{i+1}\sqcup\cdots\sqcup a_n)\,\overline{p_{i+1}+\cdots+p_n}kf \preccurlyeq_* a_{i+1}\,\overline{p_{i+1}}kf,\ \cdots,\ a_n\,\overline{p_n}kf$$

が成り立つ．これら三式に消去律を使えば一般 $\sqcup,+$ 律の式が得られる．

補題 5.6.4 $a_1,\ldots,a_n \in G$ **なら次の式が成り立つ．ただし，算法** $\sqcap,\sqcup,\wedge,\vee$ **を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．**

$$(a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_n)\triangle \asymp_* a_1\triangle \wedge \cdots \wedge a_n\triangle \qquad \text{(一般}\sqcap\text{律)}$$
$$(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle \asymp_* a_1\triangle \vee \cdots \vee a_n\triangle \qquad \text{(一般}\sqcup\text{律)}$$

証明　代表的に一般 $\sqcup$ 律を証明する．$n=1$ ならこの法則は自明にみたされる．そこで $n>1$ と仮定して n についての帰納法を使う．括弧の付け方が $a_1\sqcup\cdots\sqcup a_n = (a_1\sqcup\cdots\sqcup a_i)\sqcup(a_{i+1}\sqcup\cdots\sqcup a_n)$ であれば，$\sqcup$ 律により

$$(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle \asymp_* (a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_i)\triangle \vee (a_{i+1} \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$$

が成り立ち，帰納法の仮定により

$$(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_i)\triangle \asymp_* a_1\triangle \vee \cdots \vee a_i\triangle$$
$$(a_{i+1} \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle \asymp_* a_{i+1}\triangle \vee \cdots \vee a_n\triangle$$

が成り立つ．従って定理 3.21.2 により一般 $\sqcup$ 律の式が成り立つ．

補題 5.6.5 $f_1,\ldots,f_m,g_1,\ldots,g_n \in H$，$\alpha,\beta \in H^*$，$a \in A_\varepsilon$ **とし，**$k \in K$ **が** $f_1,\ldots,f_m,g_1,\ldots,g_n$ **の格域に属すが** α,β **に現れる用元の格域には属さないものと仮定する．このとき次のことが成り立つ．**

$$\begin{aligned}&f_1\cdots f_m,\alpha \preccurlyeq_* g_1\cdots g_n,\beta\\ &\quad\Longrightarrow\ a\,\check{o}k\,f_1,\cdots,a\,\check{o}k\,f_m,\alpha \preccurlyeq_* a\,\check{o}k\,g_1,\cdots,a\,\check{o}k\,g_n,\beta\end{aligned} \qquad \text{(格出律)}$$

証明　$m=n=0$ の場合には自明に成り立つから，$m\geq 1$ または $n\geq 1$ と仮定する．そうすると，$\preccurlyeq_*$ がブール関係であるから，格出律の前提式を次のように変形して論証することができる．すなわち $h=(f_1\wedge\cdots\wedge f_m)\wedge(g_1\vee\cdots\vee g_n)^\Diamond$ と定める．また，$\alpha=f'_1\cdots f'_{m'}$，$\beta=g'_1\cdots g'_{n'}$ なる用元 $f'_1,\ldots,f'_{m'},g'_1,\ldots,g'_{n'}$ をとって $h'=(f'_1\wedge\cdots\wedge f'_{m'})^\Diamond\vee(g'_1\vee\cdots\vee g'_{n'})$ と定める（ここで，問題 3.21.5 により $\alpha\beta$ が空列でないと仮定していいことに留意）．そうすると定理 3.21.2 と定理 3.21.3 と定理 3.21.4 により，前提式は $\preccurlyeq_* h\Rightarrow h'$ と変形され，これから片格出律により $\preccurlyeq_* a\,\check{o}k\,(h\Rightarrow h')$ が得られる．他方で，k が h の格域に属し h' の格域に属さないから，$\Rightarrow$ 律により $a\,\check{o}k\,(h\Rightarrow h') \asymp_* a\,\check{o}k\,h\Rightarrow h'$ が成り立つ．従って消去律と定理 3.21.4 により $a\,\check{o}k\,h \preccurlyeq_* h'$ が得られる．また他方で，$\Diamond$ 律・定理 3.21.2・$\wedge$ 律により次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\big(a\,\check{o}k\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_m)\big)\wedge\big(a\,\check{o}k\,(g_1\vee\cdots\vee g_n)\big)^\Diamond\\ &\asymp_* \big(a\,\check{o}k\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_m)\big)\wedge\big(a\,\check{o}k\,(g_1\vee\cdots\vee g_n)^\Diamond\big) \asymp_* a\,\check{o}k\,h\end{aligned}$$

従って消去律により

$$\big(a\,\check{o}k\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_m)\big)\wedge\big(a\,\check{o}k\,(g_1\vee\cdots\vee g_n)\big)^\Diamond \preccurlyeq_* h'$$

が得られ，これから定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により

$$a\,\check{o}k\,(f_1\wedge\cdots\wedge f_m) \preccurlyeq_* a\,\check{o}k\,(g_1\vee\cdots\vee g_n),\, h'$$

が得られる．他方，一般 $\wedge$ 律と一般 $\vee$ 律により

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}\,\breve{o}k\,f_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{a}\,\breve{o}k\,f_m &\asymp_* \mathfrak{a}\,\breve{o}k\,(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m)\\
\mathfrak{a}\,\breve{o}k\,(g_1 \vee \cdots \vee g_n) &\asymp_* \mathfrak{a}\,\breve{o}k\,g_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{a}\,\breve{o}k\,g_n
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上三式に消去律を使えば

$$\mathfrak{a}\,\breve{o}k\,f_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{a}\,\breve{o}k\,f_m \preccurlyeq_* \mathfrak{a}\,\breve{o}k\,g_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{a}\,\breve{o}k\,g_n,\ h'$$

が得られ，これからまた定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により格出律の結論式が得られる．

補題 5.6.6 $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \in H$, $\alpha, \beta \in H^*$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $k \in K$ **とし，**x **は** α, β **に現れる用元と** $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ **には自由に現れず，**k **は** $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ **の格域には属すが，**α, β **に現れる用元の格域には属さないものと仮定する．このとき次のことが成り立つ．**

$$
\begin{aligned}
&x\,\breve{o}k\,f_1, \cdots, x\,\breve{o}k\,f_m, \alpha \preccurlyeq_* x\,\breve{o}k\,g_1, \cdots, x\,\breve{o}k\,g_n, \beta\\
&\Longrightarrow\ f_1 \cdots f_m, \alpha \preccurlyeq_* g_1 \cdots g_n, \beta
\end{aligned}
\tag{格入律}
$$

証明　格出律の証明と同様の筋道を逆に辿ればいい．すなわち，$\alpha = f'_1 \cdots f'_{m'}$, $\beta = g'_1 \cdots g'_{n'}$ なる用元 $f'_1, \ldots, f'_{m'}, g'_1, \ldots, g'_{n'}$ をとって $h' = (f'_1 \wedge \cdots \wedge f'_{m'})^\Diamond \vee (g'_1 \vee \cdots \vee g'_{n'})$ と定める．そうすると格入律の前提式は

$$x\,\breve{o}k\,f_1 \wedge \cdots \wedge x\,\breve{o}k\,f_m \preccurlyeq_* x\,\breve{o}k\,g_1 \vee \cdots \vee x\,\breve{o}k\,g_n,\ h'$$

と変形される．他方で，一般 $\wedge$ 律と一般 $\vee$ 律により

$$
\begin{aligned}
x\,\breve{o}k\,(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) &\asymp_* x\,\breve{o}k\,f_1 \wedge \cdots \wedge x\,\breve{o}k\,f_m\\
x\,\breve{o}k\,g_1 \vee \cdots \vee x\,\breve{o}k\,g_n &\asymp_* x\,\breve{o}k\,(g_1 \vee \cdots \vee g_n)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上の三式に消去律を使えば

$$x\,\breve{o}k\,(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) \preccurlyeq_* x\,\breve{o}k\,(g_1 \vee \cdots \vee g_n),\ h'$$

が得られ，これからさらに

$$\big(x\,\breve{o}k\,(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m)\big) \wedge \big(x\,\breve{o}k\,(g_1 \vee \cdots \vee g_n)\big)^\Diamond \preccurlyeq_* h'$$

が得られる．そこで $h = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) \wedge (g_1 \vee \cdots \vee g_n)^\Diamond$ と定めれば，$\wedge$ 律・$\Diamond$ 律・定理 3.21.2 により次の各式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x\,\breve{o}k\,h &\asymp_* \big(x\,\breve{o}k\,(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m)\big) \wedge \big(x\,\breve{o}k\,(g_1 \vee \cdots \vee g_n)^\Diamond\big)\\
&\asymp_* \big(x\,\breve{o}k\,(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m)\big) \wedge \big(x\,\breve{o}k\,(g_1 \vee \cdots \vee g_n)\big)^\Diamond
\end{aligned}
$$

従って消去律により $x\,\breve{o}k\,h \preccurlyeq_* h'$ が得られ，これからさらに $\preccurlyeq_* x\,\breve{o}k\,h \Rightarrow h'$ が得られる．他方で，$\Rightarrow$ 律により $x\,\breve{o}k\,h \Rightarrow h' \asymp_* x\,\breve{o}k\,(h \Rightarrow h')$ が成り立つ．従って消去律により $\preccurlyeq_* x\,\breve{o}k\,(h \Rightarrow h')$ が得られ，さらに x が $h \Rightarrow h'$ に自由に現れないから，片格入律により $\preccurlyeq_* h \Rightarrow h'$ が得られ，これから格入律の結論式が得られる．

補題 5.6.7 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$a, b_1, \ldots, b_n \in G$，$\alpha, \beta \in (A_\emptyset)^*$，$f \in H$，$k \in K_f$，$p, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}$ **とし，x は α, β に現れる用元と $a, b_1, \ldots, b_n$ に自由に現れず $p \geq \sum_{i=1}^n q_i$ が成り立つと仮定する（ただし $n = 0$ の場合は $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ とみなす）．ことのとき次のことが成り立つ．**

$$\begin{aligned} & x\,\breve{o}\pi\, a\triangle, \alpha \preccurlyeq_* x\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle, \cdots, x\,\breve{o}\pi\, b_n\triangle, \beta \\ \Longrightarrow\ & a\,\overline{p}k\,f, \alpha \preccurlyeq_* b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f, \beta \end{aligned} \qquad \text{(配分律)}$$

注意 5.6.1 Var_ε が可算集合と仮定しているから，格出律と格入律によれば，$\alpha, \beta \in (A_\emptyset)^*$ との仮定は $\alpha, \beta \in H^*$ との仮定に緩めることができる（後続の補題 5.6.8 の証明参照）．そう緩めれば，上記配分律は定理 5.5.13 の配分律と同一である．

証明　まず $n = 0$ の場合を考え，$b = \mathrm{one}^\square$ と定め q を $\mathbb{P}$ の最小元 0 と定める．そうすると，配分律の前提式 $x\,\breve{o}\pi\, a\triangle, \alpha \preccurlyeq_* \beta$ と付加律により $x\,\breve{o}\pi\, a\triangle, \alpha \preccurlyeq_* x\,\breve{o}\pi\, b\triangle, \beta$ が成り立つ．また，$p \geq q$ が成り立ち，$\mathrm{one}^\square$ 律により $b\,\overline{q}k\,f \preccurlyeq_*$ が成り立つ．従って $a\,\overline{p}k\,f, \alpha \preccurlyeq_* b\,\overline{q}k\,f, \beta$ を示せば，消去律により $a\,\overline{p}k\,f, \alpha \preccurlyeq_* \beta$ が得られる．

以上により，$n \geq 1$ と仮定していい．そう仮定すると，格出律の証明と同様に，配分律の前提式を次のように変形して推論することができる．まず，$\alpha = g_1 \cdots g_l$，$\beta = h_1 \cdots h_m$ なる文 $g_1, \ldots, g_l, h_1, \ldots, h_m$ をとって

$$e = (g_1 \wedge \cdots \wedge g_l) \wedge (h_1 \vee \cdots \vee h_m)^\Diamond$$

と定める．そうすると，e も文であり，前提式は

$$x\,\breve{o}\pi\, a\triangle, e \preccurlyeq_* x\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle \vee \cdots \vee x\,\breve{o}\pi\, b_n\triangle$$

と変形される．また，一般 $\vee$ 律により次の式が成り立つ．

$$x\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle \vee \cdots \vee x\,\breve{o}\pi\, b_n\triangle \asymp_* x\,\breve{o}\pi\,(b_1\triangle \vee \cdots \vee b_n\triangle)$$

また，一般 $\sqcup$ 律により $b_1\triangle \vee \cdots \vee b_n\triangle \asymp_* (b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)\triangle$ が成り立つから，格出律により

$$x\,\breve{o}\pi\,(b_1\triangle \vee \cdots \vee b_n\triangle) \asymp_* x\,\breve{o}\pi\,(b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)\triangle$$

が成り立つ．従って $b = b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n$ と定めれば，前提式は

$$\preccurlyeq_* e \Rightarrow \big((x\,\breve{o}\pi\, a\triangle) \Rightarrow (x\,\breve{o}\pi\, b\triangle)\big)$$

と変形される．この前提から片 $\forall x$ 出律により

$$\preccurlyeq_* \mathrm{one}\,\forall\pi\,\Big(\big(e \Rightarrow \big((x\,\breve{o}\pi\, a\triangle) \Rightarrow (x\,\breve{o}\pi\, b\triangle)\big)\big)\,\Omega x\Big)\triangle$$

が得られる．他方で，定理 3.16.4 により x が e に自由に現れないから，$\forall x, \Rightarrow$ 律により

$$\begin{aligned} & \mathrm{one}\,\forall\pi\,\Big(\big(e \Rightarrow \big((x\,\breve{o}\pi\, a\triangle) \Rightarrow (x\,\breve{o}\pi\, b\triangle)\big)\big)\,\Omega x\Big)\triangle,\ e \\ & \preccurlyeq_* \mathrm{one}\,\forall\pi\,\Big(\big((x\,\breve{o}\pi\, a\triangle) \Rightarrow (x\,\breve{o}\pi\, b\triangle)\big)\,\Omega x\Big)\triangle \end{aligned}$$

が成り立ち，定理 3.16.4 により x が $a, b\triangle$ に自由に現れないから，$\forall$ 律により

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,\Big(\big((x\,\breve{o}\pi\, a\triangle) \Rightarrow (x\,\breve{o}\pi\, b\triangle)\big)\,\Omega x\Big)\triangle \preccurlyeq_* a\,\forall\pi\, b\triangle$$

が成り立ち，$\forall\pi, (\cdot\!\to)$ 律により

$$a\,\forall\pi\, b\triangle,\ a\,\overline{p}k\,f \preccurlyeq_* b\,\overline{p}k\,f$$

が成り立ち，$p \geq q_1 + \cdots + q_n$ との仮定により $\overline{p} \subseteq \overline{q_1 + \cdots + q_n}$ であるから，$\cap$ 律により

$$b\,\overline{p}k\,f \preccurlyeq_* b\,\overline{q_1 + \cdots + q_n}k\,f$$

が成り立ち，一般 $\sqcup, +$ 律により

$$b\,\overline{q_1 + \cdots + q_n}k\,f \preccurlyeq_* b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

が成り立つ．以上六式に消去律を使えば，結局

$$e,\ a\,\overline{p}k\,f \preccurlyeq_* b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

が得られ，これから配分律の結論式が得られる．

注意 5.6.2 $\vec{D}$ の表の $\forall\pi, (\cdot\!\to)$ 式と $\sqcup, +$ 式は，配分律の証明にしか使わない．従ってこの二種類の式を次の一種類の式で置き換えることができる．

$$\big(a\,\forall\pi\,(b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)\triangle\big) \wedge a\,\overline{p}k\,f \to b_1\,\overline{q_1}k\,f \vee \cdots \vee b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

ただし $a, b_1, \ldots, b_n \in G\ (n \geq 1)$，$f \in H$，$k \in K_f$，$p, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}$，$p \geq \sum_{i=1}^{n} q_i$ とし，算法 $\sqcup, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意とする．これらが恒真式であることは問題 5.5.14 による．この置き換えにより $\preccurlyeq_*$ が法則

$$a\,\forall\pi\,(b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n)\triangle,\ a\,\overline{p}k\,f \preccurlyeq_* b_1\,\overline{q_1}k\,f, \cdots, b_n\,\overline{q_n}k\,f$$

に従うようになり，これを配分律の上記証明において $\forall\pi, (\cdot\!\to)$ 律と $\sqcup, +$ 律の代わりに使うことができる．

5.6.1.3　論拠 $(\vec{R}, \vec{D})$ の弱完全性の証明

‡ $\vec{R}$ が論対 $(\vec{H}, \vec{G})$ の弱論理で $\vec{D}$ が $\vec{C}$ に含まれるから，$[\vec{D}]_{\vec{R}} \subseteq \vec{C}$ は成り立つ．そこでこの逆の $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\vec{R}}$ を以下で証明する．関係を使って表現すれば，すなわち「$\alpha \preccurlyeq \beta \implies \alpha \preccurlyeq_* \beta$」を証明する．それに背理法を使うために，$\alpha \preccurlyeq \beta$ と $\alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ があると仮定する．こういう式を**反例式**と呼ぶ．また，$\alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ をみたす式 $\alpha \to \beta$ を第 3.23 節に倣って**特異式**と呼ぶ．従って，反例式は特異式である．文からなる反例式・特異式は**文反例式・文特異式**と呼ぶ．

補題 5.6.8 文反例式が存在する．

証明　背理法の仮定により反例式が存在する．反例式 $f_1 \cdots f_m, \alpha \to g_1 \cdots g_n, \beta$ において，格 k は $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ の格域には属すが，α, β に現れる用元の格域には属さないものとする．Var_ε が可算集合であると仮定していて定理 3.15.1 により各用元にあらわれる素元は有限個であるから，これら用元のどれにも自由に現れない $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が存在する．そして，$\preccurlyeq_*$ が格入律に従い $\preccurlyeq$ が定理 5.5.12 により格出律に従うから，$x\,\check{o}k\,f_1, \cdots, x\,\check{o}k\,f_m, \alpha \to x\,\check{o}k\,g_1, \cdots, x\,\check{o}k\,g_n, \beta$ は反例式である．このことと各用元の格域が有限集合との仮定により，この補題が成り立つ．

補題 5.6.9 次の条件 G をみたす文反例式 $\alpha_0 \to \beta_0$ が存在する．

(G) $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **に対して算号** Ωx **が** $\alpha_0 \cup \beta_0$ **に属す元に現れれば，その** x **は** $\alpha_0 \cup \beta_0$ **に属す元に自由に現れない．また，閉全包元** one **を定めるのに使った算号** Ωx_0 **は** $\alpha_0 \cup \beta_0$ **に属す元に現れる．**

証明　補題 5.6.8 により文反例式 $\alpha \to \beta$ が存在する．$\preccurlyeq$ が付加律に従い，定理 3.30.7 により最大関係ではなく，$\alpha \preccurlyeq \beta$ であるから，α と β のどちらかは空列ではない．そこで $\alpha = f_1 \cdots f_m$，$\beta = g_1 \cdots g_n$，$(m \geq 1$ または $n \geq 1)$ として

$$h = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_m)^{\Diamond} \vee g_1 \vee \cdots \vee g_n$$

と定める．そうすると，問題 5.1.1 により h は文である．また，$\preccurlyeq$ と $\preccurlyeq_*$ がブール律に従うので，定理 3.21.2 と定理 3.21.3 により $\to h$ は反例式である．つまり，$\preccurlyeq h$ と $\not\preccurlyeq_* h$ が成り立つ．

任意の $f \in A_\emptyset$ と $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して，文 $\mathrm{one}\forall\pi(f\,\Omega x)\triangle$ を仮に $\forall x\, f$ で表す（注意 5.5.6 参照）．そうすると定理 5.5.16 系 3 により，$f \in A_\emptyset$ が $\preccurlyeq f$ をみたせば，任意の $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して $\preccurlyeq \forall x\, f$ が成り立つ．また，$f \in A_\emptyset$ と $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が $\preccurlyeq_* \forall x\, f$ をみたせば，これと $\forall x$ 入律により成り立つ $\forall x\, f \preccurlyeq_* f$ に消去律を使って $\preccurlyeq_* f$ が得られる．従って，$\to f$ が文反例式であれば，任意の $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して $\to \forall x\, f$ も文反例式である．他方で定理 3.16.4 により，任意の $f \in A_\emptyset$ と $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して $\mathrm{Fvar}^{\forall x\, f} = \mathrm{Fvar}^f - \{x\}$ が成り立つ．

以上により，h に自由に現れる Var_ε の元の全体を含む Var_ε の空集合でない部分集合 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ をとれば，$\to \forall x_k \cdots \forall x_1\, h$ は文反例式であり，$\forall x_k \cdots \forall x_1\, h$ には Var_ε の元が自由に現れない．そこで $\to \forall x_k \cdots \forall x_1\, h$ を $\alpha_0 \to \beta_0$ とすれば，これが条件 G を自明にみたす．

注意 5.6.3 目標の「$\alpha \preccurlyeq \beta \implies \alpha \preccurlyeq_* \beta$」を証明するには，「$\alpha \preccurlyeq \beta$，$\alpha \not\preccurlyeq_* \beta \implies$ 矛盾」という背理法を使う代わりに，「$\alpha \not\preccurlyeq_* \beta \implies \alpha \not\preccurlyeq \beta$」という対偶を証明してもいい．しかし，以下の論法で示し得るのは，「$\alpha \not\preccurlyeq_* \beta$ をみたし条件 G をみたす文式 $\alpha \to \beta$ については $\alpha \not\preccurlyeq \beta$ が成り立つ」ことである．それ故に，対偶法ではなく背理法を使い反例式の概念を必要とするのである．　終

以下で，補題 5.6.9 で存在の保証された条件 G をみたす文反例式 $\alpha_0 \to \beta_0$ に対し，$\alpha_0 \not\preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta_0$ なる $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ のあることを示す．それが $\alpha_0 \preccurlyeq \beta_0$ と矛盾するから，それで $\vec{C} \subseteq [\vec{D}]_{\bar{R}}$ の背理法による証明が完成する．こういう (Φ, ν) を作るための準備の補題が以下長く続く．

補題 5.6.10 Var_ε **を次の四条件をみたす部分集合** $\mathrm{Var}'_\varepsilon$ **と** $\mathrm{Var}''_\varepsilon$ **で直和分割することができる．**

1. $x \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ **なら，算号** Ωx **は** $\alpha_0 \cup \beta_0$ **に属す文に現れない．**
2. $\mathrm{Var}''_\varepsilon$ **の元は** $\alpha_0 \cup \beta_0$ **に属す文に自由に現れない．**
3. $\mathrm{Var}'_\varepsilon$ **は可算集合であり，**$\mathrm{Var}''_\varepsilon$ **は有限集合である．**
4. **閉全包元** one **を定めるのに使った** $x_0 \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **は** $\mathrm{Var}''_\varepsilon$ **に属す．**

証明　Var_ε が可算集合と仮定していて定理 3.15.2 により A の各元に現れる算号は有限個であるから，Ωx が $\alpha_0 \cup \beta_0$ に属す文に現れるような $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ の全体 $\mathrm{Var}''_\varepsilon$ は有限集合である．そこで $\mathrm{Var}'_\varepsilon = \mathrm{Var}_\varepsilon - \mathrm{Var}''_\varepsilon$ と定めれば，この定め方と条件 G により，これらが上記四条件と $\mathrm{Var}_\varepsilon = \mathrm{Var}'_\varepsilon \amalg \mathrm{Var}''_\varepsilon$ をみたす．　終

この補題と定理 5.1.2 により $A_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$ であることを踏まえて次のように定める．

$$\mathrm{Prm}'_\varepsilon = \mathrm{Con}_\varepsilon \cup \mathrm{Var}'_\varepsilon \qquad\qquad A'_\varepsilon = [\mathrm{Prm}'_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$$

そうすると，A_ε が可算集合と仮定していて $\mathrm{Var}'_\varepsilon$ が可算集合であるから，A'_ε も可算集合である．

次の二条件をみたす $a \in A$ を**良元**と呼ぶ．

1. $x \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ なら，算号 Ωx は a に現れない．

2. $\mathrm{Var}''_\varepsilon$ の元は a に自由に現れない．

また，良用元からなる用元式を**良式**と呼ぶ．従って，$\alpha_0 \cup \beta_0$ の元は**良文**であり，$\alpha_0 \to \beta_0$ は**良文特異式**である．

補題 5.6.11 次のことが成り立つ．

1. A **の代数構造に属す抽象子以外の算法** λ **に対して** $\lambda(a_1, \ldots, a_n)$ **が良元であるためには，** $a_1, \ldots, a_n$ **が良元であることが必要十分である．**

2. A_ε **に属す良元の全体は** A'_ε **に等しい．**

3. $a \in A_\varepsilon$，$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **に対して** $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle$ **が良元であれば，**$f(x/a)$ **も良元であって** f **において** x **は** a **から自由である．**

証明　1. 定理 3.15.2 により，Ωx が $\lambda(a_1, \ldots, a_n)$ に現れるためには，$a_1, \ldots, a_n$ のどれかに現れることが必要十分である．また定理 3.16.4 により，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が $\lambda(a_1, \ldots, a_n)$ に自由に現れるためには，$a_1, \ldots, a_n$ のどれかに自由に現れることが必要十分である．従って結論 1 が成り立つ．

2. 定理 5.1.2 により $A_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$ が成り立つ．A_ε に属す良元の全体を B で表す．そうすると結論 1 により，B は A_ε において $\mathfrak{F}$ に関して内外に閉じている．また，良元の定義により $\mathrm{Prm}_\varepsilon \cap B = \mathrm{Prm}'_\varepsilon$ が成り立つ．従って問題 3.2.14 により $B = A'_\varepsilon$ が成り立つ．

3. 結論 1 により a と $f\,\Omega x$ は良元である（従って $x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ であるが，このことは使わない）．従って $y \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ なら，Ωy は $f\,\Omega x$ に現れず，従って定理 3.15.2 により f にも現れない．また，定理 5.1.2 により $A_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$ であるから，問題 3.15.5 により，a には関号以外には算号が現れない．従って定理 3.17.9 により，$y \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ なら Ωy は $f(x/a)$ に現れない．また，$\mathrm{Var}''_\varepsilon$ の元は a に自由に現れず，定理 3.16.4 により x 以外の $\mathrm{Var}''_\varepsilon$ の元は f に自由に現れないから，定理 3.17.1 系により，$\mathrm{Var}''_\varepsilon$ の元は $f(x/a)$ に自由に現れない．以上により $f(x/a)$ も良元である．$y \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が a に自由に現れれば，$y \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ であるから，上で示したように Ωy は f に現れない．従って定理 3.16.7 により，f において x は a から自由である．

補題 5.6.12 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$f \in H$ **とする．また，**$a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ **とし，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** K_f **の相異なる元とし，**ρ **を** n **次の置換とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n} f \in \alpha$ **なら，**$(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,n} f,\ \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**

2. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n} f \in \beta$ **なら，**$\alpha \to (a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,n} f,\ \beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は補題 5.6.11 により良式である．また，交換律と格出律により $(a_i\,\breve{o}k_i)_i f \asymp^* (a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_i f$ が成り立つから，各結論の問題の式は補題 3.23.1 により特異である．

補題 5.6.13 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$f, g \in H$ **とする．また，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** $K_f - K_g$ **の相異なる元とし，**$k_{n+1}, \ldots, k_m$ **を** $K_f \cap K_g$ **の相異なる元とし，**$k_{m+1}, \ldots, k_l$ **を** $K_g - K_f$ **の相異なる元とし，**$a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, l)$ **とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in \alpha$ **なら，**
$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m}f,\ (a_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l}g,\ \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**

2. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in \beta$ **なら，**
$\alpha \to (a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m}f,\ \beta$ **または** $\alpha \to (a_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l}g,\ \beta$ **が良特異式である．**

3. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in \alpha$ **なら，**
$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m}f,\ \alpha \to \beta$ **または** $(a_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l}g,\ \alpha \to \beta$ **が良特異式である．**

4. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in \beta$ **なら，**
$\alpha \to (a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m}f,\ (a_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l}g,\ \beta$ **も良特異式である．**

5. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in \alpha$ **なら，**
$\alpha \to (a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m}f,\ \beta$ **または** $(a_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l}g,\ \alpha \to \beta$ **が良特異式である．**

6. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in \beta$ **なら，**
$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m}f,\ \alpha \to (a_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l}g,\ \beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と $\wedge$ 律・$\vee$ 律・$\Rightarrow$ 律と補題 3.23.3 により特異である．

補題 5.6.14 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$f \in H$ **とする．また，**$a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ **とし，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** K_f **の相異なる元とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}(f^\Diamond) \in \alpha$ **なら，**$\alpha \to (a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}f,\ \beta$ **も良特異式である．**

2. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}(f^\Diamond) \in \beta$ **なら，**$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}f,\ \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と $\Diamond$ 律と補題 3.23.3 により特異である．

補題 5.6.15 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$a \in G,\ f \in H,\ k \in K_f,\ \lambda \in \mathfrak{Q}$ **とする．また，**$a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ **とし，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** $K_f - \{k\}$ **の相異なる元とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}(a \neg\lambda k\, f) \in \alpha$ **なら，**$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\, \lambda k\, f^\Diamond),\ \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**

2. $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}(a \neg\lambda k\, f) \in \beta$ **なら，**$\alpha \to (a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\, \lambda k\, f^\Diamond),\ \beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は補題 5.6.11 により良式である．$\neg$ 律と格出律により $(a_i \breve{o} k_i)_i(a \neg\lambda k\, f) \asymp_* (a_i \breve{o} k_i)_i(a\, \lambda k\, f^\Diamond)$ が成り立つから，各結論の問題の式は補題 3.23.1 により特異である．

補題 5.6.16 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$a \in G,\ f \in H,\ k \in K_f$ **とし，**$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \neg\mathfrak{P}$ **または** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathfrak{P}$ **とする．また，**$a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ **とし，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** $K_f - \{k\}$ **の相異なる元とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,(\lambda_1\cup\cdots\cup\lambda_m)k\,f)\in\alpha$ **なら，**
ある $j\in\{1,\ldots,m\}$ **に対して** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda_j k\,f),\ \alpha\to\beta$ **が良特異式である．**

2. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,(\lambda_1\cup\cdots\cup\lambda_m)k\,f)\in\beta$ **なら，**
$\alpha\to(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda_1 k\,f),\cdots,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda_m k\,f),\ \beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と一般 $\cup$ 律・格出律・一般 $\vee$ 律と補題 3.23.3 により特異である．

補題 5.6.17 $\alpha\to\beta$ **を良特異式とし，**$a\in G$, $f\in H$, $k\in K_f$ **とし，**$\lambda,\mu\in\neg\mathfrak{P}$ **または** $\lambda,\mu\in\mathfrak{P}$ **とする．また，**$a_i\in A_\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$ **とし，**$k_1,\ldots,k_n$ **を** $K_f-\{k\}$ **の相異なる元とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,(\lambda\cap\mu)k\,f)\in\alpha$ **なら，**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda k\,f),\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\mu k\,f),\ \alpha\to\beta$ **も良特異式である．**

2. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,(\lambda\cap\mu)k\,f)\in\beta$ **なら，**
$\alpha\to(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda k\,f),\ \beta$ **または** $\alpha\to(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\mu k\,f),\ \beta$ **が良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と $\cap$ 律・格出律・$\wedge$ 律と補題 3.23.3 により特異である．

補題 5.6.18 $\alpha\to\beta$ **を良特異式とし，**$a\in G$, $f\in H$, $k\in K_f$, $\lambda\in\mathfrak{Q}$ **とする．また，**$a_i\in A_\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$ **とし，**$k_1,\ldots,k_n$ **を** $K_f-\{k\}$ **の相異なる元とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda^\circ k\,f)\in\alpha$ **なら，**$\alpha\to(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda k\,f),\ \beta$ **も良特異式である．**

2. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda^\circ k\,f)\in\beta$ **なら，**$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\lambda k\,f),\ \alpha\to\beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と $\circ$ 律・格出律・$\Diamond$ 律と補題 3.23.3 により特異である．

補題 5.6.19 $\alpha\to\beta$ **を良特異式とし，**$a\in G$, $\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}$, $f\in H$, $k\in K_f$, $a_i\in A_\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$ **とし，**$k_1,\ldots,k_n$ **を** $K_f-\{k\}$ **の相異なる元の全体とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\mathfrak{p}k\,f)\in\alpha$ **なら，任意の** $x\in\mathrm{Var}''_\varepsilon$ **に対して**
$\big(a\sqcap\big(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f\big)\,\Omega x\big)\,\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle,\ \alpha\to\beta$ **も良特異式である．**

2. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\mathfrak{p}k\,f)\in\beta$ **なら，任意の** $x\in\mathrm{Var}''_\varepsilon$ **に対して**
$\alpha\to\big(a\sqcap\big(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f\big)\,\Omega x\big)\,\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle,\ \beta$ **も良特異式である．**

証明　補題 5.6.11 と定理 3.16.4 により，各結論の問題の式は良式である．なぜならまず，$a_1,\ldots,a_n$, a,f は良元である．従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f$ も良元である．$x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f$ には $x\in\mathrm{Var}''_\varepsilon$ が自由に現れるが，$\big(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f\big)\,\Omega x$ は良元である．また，$\mathrm{one}=(x_0\,\breve{o}\pi\,x_0\triangle)\,\Omega x_0$ も良元である．以上により，$\big(a\sqcap\big(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f\big)\,\Omega x\big)\,\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ は良元である．

各結論の問題の式の特異性を示すために，$g=(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f$ と定める．そうすると，交換律と格出律により

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}(a\,\mathfrak{p}k\,f)\asymp_*a\,\mathfrak{p}k\,g$$

が導かれる．また，$K_g = \{k\}$ であって x が g に自由に現れないから，$\mathfrak{Q}$ 律により

$$a\,\mathfrak{p}k\,g \asymp_* a\,\mathfrak{p}\pi\left((x\,\breve{o}k\,g)\,\Omega x\right)\triangle$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{P}$ 律により

$$a\,\mathfrak{p}\pi\left((x\,\breve{o}k\,g)\,\Omega x\right)\triangle \asymp_* \left(a \sqcap (x\,\breve{o}k\,g)\,\Omega x\right)\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$$

が成り立つ．以上の三つの $\asymp_*$ 式を合わせて

$$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,n}(a\,\mathfrak{p}k\,f) \asymp_* \left(a \sqcap \left(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,n}f\right)\Omega x\right)\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$$

が得られる．従って補題 3.23.1 により，問題の各式は特異である．

補題 5.6.20 $\alpha \to \beta$ **を良文特異式とし，**$a, b_1, \dots, b_n \in G$，$p, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{P}$ **とし，**$a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \alpha$，$b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \dots, b_n\,\overline{q_n}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \beta$，$p \geq \sum_{i=1}^{n} q_i$ **とする（ただし** $n = 0$ **の場合は** $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$ **とみなす）．このとき，**α, β **に現れる文に自由に現れない任意の** $x \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ **に対して，**$x\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \alpha \to x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \cdots, x\,\breve{o}\pi\,b_n\triangle, \beta$ **も良文特異式である．**

証明　問題の式は補題 5.6.11 により良式である．また，定理 3.16.4 により x は $a, b_1, \dots, b_n$ にも自由に現れないから，問題の式は配分律により文特異式である．

補題 5.6.21 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$a \in G$，$a\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \beta$ **とする．このとき，任意の** $b \in A'_\varepsilon$ **に対して** $\alpha \to b\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \beta$ **も良特異式である．**

証明　問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と $\exists$ 律により特異である．

補題 5.6.22 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$a, b \in G$，$c \in A_\varepsilon$ **とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in \alpha$ **なら，**$c\,\breve{o}\pi\,a\triangle$, $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle$, $\alpha \to \beta$ **も良特異式である．**
2. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in \beta$ **なら，**$\alpha \to c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \beta$ **または** $\alpha \to c\,\breve{o}\pi\,b\triangle, \beta$ **が良特異式である．**
3. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in \alpha$ **なら，**$c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \alpha \to \beta$ **または** $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle, \alpha \to \beta$ **が良特異式である．**
4. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in \beta$ **なら，**$\alpha \to c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, c\,\breve{o}\pi\,b\triangle, \beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と $\sqcap$ 律・$\sqcup$ 律・格出律・$\wedge$ 律・$\vee$ 律と補題 3.23.3 により特異である．

補題 5.6.23 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$a \in G$，$b \in A_\varepsilon$ **とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in \alpha$ **なら，**$\alpha \to b\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \beta$ **も良特異式である．**
2. $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in \beta$ **なら，**$b\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**

証明　各結論の問題の式は，補題 5.6.11 により良式であり，補題 3.23.1 と $\square$ 律・格出律・$\Diamond$ 律と補題 3.23.3 により特異である．

補題 5.6.24 $\alpha \to \beta$ **を良特異式とし，**$a \in A_\varepsilon$，$f \in A_\emptyset$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **とする．このとき次のことが成り立つ．**

1. $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in \alpha$ **なら，**$f(x/a),\ \alpha \to \beta$ **も良特異式である．**

2. $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in \beta$ **なら，**$\alpha \to f(x/a),\ \beta$ **も良特異式である．**

証明　補題 5.6.11 により，各結論の問題の式は良式であり，f において x は a から自由である．従って補題 3.23.1 と Ωx 律により，これら各式は特異である．　**終**

$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ であれば，問題 3.9.25 により，$\mathfrak{p}$ は連結成分なる区間 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ の直和である．そこで，$\neg\mathfrak{p}_1, \ldots, \neg\mathfrak{p}_n$ を $\neg\mathfrak{p} \in \neg\mathfrak{P}$ の**連結成分**と呼ぶ．また，$\mathfrak{p}_i$ の端を $\neg\mathfrak{p}_i$ の**端**とも呼ぶ．そして，$\mathbb{P}$ の元 p が H の元 f に**現れる**とは，f に現れるある算号 λk ($\lambda \in \mathfrak{L}$, $k \in K$) に対して，λ のある連結成分の端が p に等しいことを言う．さらに，p が H の部分集合 X に**現れる**とは，X に属するある用元に p が現れることを言う．

なお，$\mathfrak{P}$ が偏区間包であると仮定しているから，問題 3.9.26 により，各 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ の連結成分は $\mathbb{P}$ 全体であるかまたは $(p, q]$，$(\leftarrow p]$，$(p\rightarrow)$ いずれかの形の区間である．ただし $(p\rightarrow)$ はこれまで通り $\overline{p}$ と略記する．なお，$\overline{p}$ と双対の $\underline{p}$ は限量子 $\neg(\leftarrow p]$ の略記であって $(\leftarrow p]$ とは異なる．

補題 5.6.25 良文特異式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0,1,\ldots}$ **で以下の三十三個の条件をみたすものがある（これを** $\alpha_0 \to \beta_0$ **の展開列と呼ぶ）．**

0. $\alpha_{n-1} \subseteq \alpha_n$，$\beta_{n-1} \subseteq \beta_n$ **であり，**$\alpha_n \cup \beta_n$ **に現れる** $\mathbb{P} - \{0\}$ **の元は** $\alpha_{n-1} \cup \beta_{n-1}$ **にも現れる** $(n = 1, 2, \ldots)$**．**

次の二条件においては，$a_i \in A_\varepsilon\ (i = 1, \ldots, l),\ f \in H,\ K_f = \{k_1, \ldots, k_l\}$ **とし，**ρ **を** l **次の置換とする．**

1. $n \equiv 1 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l} f \in \alpha_{n-1}$ **なら** $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l} f \in \alpha_n$

2. $n \equiv 2 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l} f \in \beta_{n-1}$ **なら** $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l} f \in \beta_n$

次の六条件においては $a_i \in A_\varepsilon\ (i = 1, \ldots, l),\ f, g \in H,\ K_f - K_g = \{k_1, \ldots, k_\nu\},\ K_f \cap K_g = \{k_{\nu+1}, \ldots, k_m\},\ K_g - K_f = \{k_{m+1}, \ldots, k_l\}$ **とする** $(\nu \le m \le l)$**．**

3. $n \equiv 3 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in \alpha_{n-1}$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}\, g \in \alpha_n$

4. $n \equiv 4 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in \beta_{n-1}$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f \in \beta_n$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}\, g \in \beta_n$

5. $n \equiv 5 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in \alpha_{n-1}$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f \in \alpha_n$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}\, g \in \alpha_n$

6. $n \equiv 6 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in \beta_{n-1}$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}\, g \in \beta_n$

7. $n \equiv 7 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in \alpha_{n-1}$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f \in \beta_n$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}\, g \in \alpha_n$

8. $n \equiv 8 \mod 32,\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in \beta_{n-1}$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f \in \alpha_n$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}\, g \in \beta_n$

次の二条件においては $a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, l)$, $f \in H$, $K_f = \{k_1, \ldots, k_l\}$ とする．

9. $n \equiv 9 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f^\Diamond) \in \alpha_{n-1}$ なら $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l} f \in \beta_n$

10. $n \equiv 10 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f^\Diamond) \in \beta_{n-1}$ なら $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l} f \in \alpha_n$

次の十二条件においては $a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, l)$, $a \in G$, $f \in H$, $K_f = \{k, k_1, \ldots, k_l\}$ とする．次の四条件においてはさらに $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ とする．

11. $n \equiv 11 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a \neg\mathfrak{p} k\, f) \in \alpha_{n-1}$ なら $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathfrak{p} k\, f^\Diamond) \in \alpha_n$

12. $n \equiv 12 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a \neg\mathfrak{p} k\, f) \in \beta_{n-1}$ なら $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathfrak{p} k\, f^\Diamond) \in \beta_n$

次の二条件においてはさらに $\mathfrak{p}$ の連結成分の全体を $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ とする．

13. $n \equiv 13 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathfrak{p} k\, f) \in \alpha_{n-1}$ なら，
ある $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathfrak{p}_j k\, f) \in \alpha_n$

14. $n \equiv 14 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathfrak{p} k\, f) \in \beta_{n-1}$ なら，
すべての $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathfrak{p}_j k\, f) \in \beta_n$

次の二条件においては $\mathbb{P} \in \mathfrak{P}$ に留意する．

15. $n \equiv 15 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathbb{P} k\, f) \in \alpha_{n-1}$ なら，
$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (\leftarrow 0] k\, f) \in \alpha_n$ または $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{0} k\, f) \in \alpha_n$

16. $n \equiv 16 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \mathbb{P} k\, f) \in \beta_{n-1}$ なら，
$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (\leftarrow 0] k\, f)$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{0} k\, f) \in \beta_n$

次の二条件においては $p, q \in \mathbb{P}$ とする．

17. $n \equiv 17 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (p, q] k\, f) \in \alpha_{n-1}$ なら
$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{p} k\, f)$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (\leftarrow q] k\, f) \in \alpha_n$

18. $n \equiv 18 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (p, q] k\, f) \in \beta_{n-1}$ なら
$(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{p} k\, f) \in \beta_n$ または $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (\leftarrow q] k\, f) \in \beta_n$

次の四条件においては $p \in \mathbb{P}$ とする．

19. $n \equiv 19 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (\leftarrow p] k\, f) \in \alpha_{n-1}$ なら $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{p} k\, f) \in \beta_n$

20. $n \equiv 20 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, (\leftarrow p] k\, f) \in \beta_{n-1}$ なら $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{p} k\, f) \in \alpha_n$

21. $n \equiv 21 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{p} k\, f) \in \alpha_{n-1}$, $x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ なら
$\bigl(a \sqcap \bigl(x \breve{o} k\, (a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l} f\bigr)\, \Omega x\bigr)\, \overline{p} \pi\, \mathrm{one} \triangle \in \alpha_n$

22. $n \equiv 22 \mod 32$, $(a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\, \overline{p} k\, f) \in \beta_{n-1}$, $x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ なら
$\bigl(a \sqcap \bigl(x \breve{o} k\, (a_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l} f\bigr)\, \Omega x\bigr)\, \overline{p} \pi\, \mathrm{one} \triangle \in \beta_n$

次の条件においては $a, b_1, \ldots, b_m \in G$, $p, q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{P}$ とする．

23. $n \equiv 23 \mod 32$, $a\, \overline{p} \pi\, \mathrm{one} \triangle \in \alpha_{n-1}$, $b_1\, \overline{q_1} \pi\, \mathrm{one} \triangle, \ldots, b_m\, \overline{q_m} \pi\, \mathrm{one} \triangle \in \beta_{n-1}$ かつ $p \geq \sum_{i=1}^m q_i$ なら，ある $x \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ に対して $x \breve{o} \pi\, a \triangle \in \alpha_n$ かつ $x \breve{o} \pi\, b_1 \triangle, \ldots, x \breve{o} \pi\, b_m \triangle \in \beta_n$．ただし，$m = 0$ の場合は $\sum_{i=1}^m q_i = 0$ とみなす．

次の条件においては $a \in G$ **とし，**A'_ε **が可算集合であることに留意して** $A'_\varepsilon = \{a_1, a_2, \ldots\}$ **とする．**

24. $n \equiv 24 \mod 32$, $a\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \beta_{n-1}$ **なら** $i = 1, \ldots, n$ **に対して** $a_i\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \beta_n$

次の四条件においては $a, b \in G$, $c \in A_\varepsilon$ **とする．**

25. $n \equiv 25 \mod 32$, $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in \alpha_{n-1}$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \alpha_n$

26. $n \equiv 26 \mod 32$, $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in \beta_{n-1}$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \beta_n$ **または** $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \beta_n$

27. $n \equiv 27 \mod 32$, $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in \alpha_{n-1}$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \alpha_n$ **または** $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \alpha_n$

28. $n \equiv 28 \mod 32$, $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in \beta_{n-1}$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \beta_n$

次の二条件においては $a \in G$, $b \in A_\varepsilon$ **とする．**

29. $n \equiv 29 \mod 32$, $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in \alpha_{n-1}$ **なら** $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \beta_n$

30. $n \equiv 30 \mod 32$, $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in \beta_{n-1}$ **なら** $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \alpha_n$

次の二条件においては $a \in A_\varepsilon$, $f \in A_\emptyset$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **とする．**

31. $n \equiv 31 \mod 32$, $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in \alpha_{n-1}$ **なら** $f(x/a) \in \alpha_n$

32. $n \equiv 32 \mod 32$, $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in \beta_{n-1}$ **なら** $f(x/a) \in \beta_n$

証明　$\alpha_0 \to \beta_0$ は良文特異式である．これをもとに $\alpha_n \to \beta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を次のように帰納的に作ればいい．すなわち，ある自然数 n に対して良文特異式 $\alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ が作れたとき，...

$n \equiv 1 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f$ なる形の元と l 次の置換 ρ を任意にとって出来る $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l}f$ なる元をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 1 をみたし補題 5.6.12 により良文特異式である．

$n \equiv 2 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f$ なる形の元と l 次の置換 ρ を任意にとって出来る $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l}f$ なる元をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 2 をみたし補題 5.6.12 により良文特異式である．

$n \equiv 3 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g)$ なる形の元で

$$K_f - K_g = \{k_1, \ldots, k_\nu\} \qquad K_f \cap K_g = \{k_{\nu+1}, \ldots, k_m\} \qquad K_g - K_f = \{k_{m+1}, \ldots, k_l\}$$

なる条件（これを格域条件と呼ぶ）をみたすもの（これを $\wedge$ 元と呼ぶ）を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g$ なる元（これらを $\wedge$ 元 $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g)$ の成分と呼ぶ）をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 3 をみたし補題 5.6.13 により良文特異式である．

$n \equiv 4 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $\wedge$ 元の全体を $h_1, \ldots, h_k$ とすれば，良文特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.13 により h_i のある成分 h'_i に対して $\alpha_{n,i-1} \to h'_i\beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，それを $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,k} \to \beta_{n,k}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 4 をみたす．

$n \equiv 6 \mod 32$ のときは（$n \equiv 5 \mod 32$ の場合を後回しにしていることに注意），β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g)$ なる形の元で格域条件をみたすもの（これを $\vee$ 元と呼ぶ）を任意にとっ

て出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m}f$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}g$ なる元（これらを $\vee$ 元 $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f\vee g)$ の成分と呼ぶ）をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n=\alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n\to\beta_n$ は条件 0, 6 をみたし補題 5.6.13 により良文特異式である．

$n\equiv 5 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $\vee$ 元の全体を $h_1,\dots,h_k$ とすれば，良文特異式 $\alpha_{n,i}\to\beta_{n,i}$ $(i=0,1,\dots,k)$ で $\alpha_{n,i-1}\subseteq\alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1}\subseteq\beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0}\to\beta_{n,0}=\alpha_{n-1}\to\beta_{n-1}$ とし，$i\geq 1$ で $\alpha_{n,i-1}\to\beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.13 により h_i のある成分 h'_i に対して $h'_i\alpha_{n,i-1}\to\beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，それを $\alpha_{n,i}\to\beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,k}\to\beta_{n,k}$ を $\alpha_n\to\beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 5 をみたす．

$n\equiv 8 \mod 32$ のときは（$n\equiv 7 \mod 32$ の場合を後回しにしていることに注意），β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f\Rightarrow g)$ なる形の元で格域条件をみたすもの（これを $\Rightarrow$ 元と呼ぶ）を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m}f$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}g$ なる元（これらを $\Rightarrow$ 元 $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f\Rightarrow g)$ の成分と呼ぶ）のうち，前者をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，後者をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定めれば，$\alpha_n\to\beta_n$ は条件 0, 8 をみたし補題 5.6.13 により良文特異式である．

$n\equiv 7 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $\Rightarrow$ 元の全体を $h_1,\dots,h_k$ とし，h_i の成分を h'_i,h''_i とする $(i=1,\dots,k)$．そうすると，良文特異式 $\alpha_{n,i}\to\beta_{n,i}$ $(i=0,1,\dots,k)$ で $\alpha_{n,i-1}\subseteq\alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1}\subseteq\beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0}\to\beta_{n,0}=\alpha_{n-1}\to\beta_{n-1}$ とし，$i\geq 1$ で $\alpha_{n,i-1}\to\beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.13 により $\alpha_{n,i-1}\to h'_i\beta_{n,i-1}$ または $h''_i\alpha_{n,i-1}\to\beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，そうである方を $\alpha_{n,i}\to\beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,k}\to\beta_{n,k}$ を $\alpha_n\to\beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 7 をみたす．

$n\equiv 9 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f^{\Diamond})$ なる形の元を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}f$ なる元をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n=\alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n\to\beta_n$ は条件 0, 9 をみたし補題 5.6.14 により良文特異式である．

$n\equiv 10 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f^{\Diamond})$ なる形の元を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}f$ なる元をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n=\beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n\to\beta_n$ は条件 0, 10 をみたし補題 5.6.14 により良文特異式である．

$n\equiv 11 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\neg\mathfrak{p}k\,f)$ $(\mathfrak{p}\in\mathfrak{P})$ なる形の元を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}k\,f^{\Diamond})$ なる元をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n=\beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n\to\beta_n$ は条件 0, 11 をみたし補題 5.6.15 により良文特異式である．

$n\equiv 12 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\neg\mathfrak{p}k\,f)$ $(\mathfrak{p}\in\mathfrak{P})$ なる形の元を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}k\,f^{\Diamond})$ なる元をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n=\alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n\to\beta_n$ は条件 0, 12 をみたし補題 5.6.15 により良文特異式である．

$n\equiv 14 \mod 32$ のときは（$n\equiv 13 \mod 32$ の場合を後回しにしていることに注意），β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}k\,f)$ $(\mathfrak{p}\in\mathfrak{P})$ なる形で $\mathfrak{p}$ が不連結の元（こういう元を不連結元と呼ぶ）を任意にとり，さらに $\mathfrak{p}$ の連結成分 $\mathfrak{q}$ を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{q}k\,f)$ なる元（これらを不連結元 $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}k\,f)$ の成分と呼ぶ）をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n=\alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n\to\beta_n$ は条件 0, 14 をみたし補題 5.6.16 により良文特異式である．

$n\equiv 13 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す不連結元の全体を $h_1,\dots,h_m$ とする．そうすると，良文特異式 $\alpha_{n,i}\to\beta_{n,i}$ $(i=0,1,\dots,m)$ で $\alpha_{n,i-1}\subseteq\alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1}\subseteq\beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納

的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.16 により h_i のある成分 h_i' に対して $h_i'\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，それを $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,m} \to \beta_{n,m}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 13 をみたす．

$n \equiv 16 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\mathbb{P}k\,f)$ なる形の元（これを $\mathbb{P}$ 元と呼ぶ）を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,(\leftarrow 0]k\,f)$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\overline{0}k\,f)$ なる元（これらを $\mathbb{P}$ 元 $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\mathbb{P}k\,f)$ の成分と呼ぶ）をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 16 をみたし補題 5.6.16 により良文特異式である．

$n \equiv 15 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $\mathbb{P}$ 元の全体を $h_1, \ldots, h_m$ とする．そうすると，良文特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.16 により h_i のある成分 h_i' に対して $h_i'\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，それを $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,m} \to \beta_{n,m}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 15 をみたす．

$n \equiv 17 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,(p,q]k\,f)$ なる形の元（これを真正区間元と呼ぶ）を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\overline{p}k\,f)$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,(\leftarrow q]k\,f)$ なる元（これらを真正区間元 $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,(p,q]k\,f)$ の成分と呼ぶ）をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 17 をみたし補題 5.6.17 により良文特異式である．

$n \equiv 18 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す真正区間元の全体を $h_1, \ldots, h_m$ とする．そうすると，良文特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.17 により h_i のある成分 h_i' に対して $h_i'\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，それを $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,m} \to \beta_{n,m}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 18 をみたす．

$n \equiv 19 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,(\leftarrow p]k\,f)$ なる形の元を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,\overline{p}k\,f)$ なる元をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 19 をみたし補題 5.6.18 により良文特異式である．

$n \equiv 20 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,(\leftarrow p]k\,f)$ なる形の元を任意にとって出来る $(a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,\overline{p}k\,f)$ なる元をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 20 をみたし補題 5.6.18 により良文特異式である．

$n \equiv 21 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\overline{p}k\,f)$ なる形の元（これを上方区間元と呼ぶ）と $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon''$ を任意にとって出来る $\left(a \sqcap \left(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f\right)\Omega x\right)\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ なる元（これを上方区間元 $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\overline{p}k\,f)$ の one 表現と呼ぶ）をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め（それは $\#\mathrm{Var}_\varepsilon'' < \infty$ だから可能），また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 21 をみたし補題 5.6.19 により良文特異式である．

$n \equiv 22 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す上方区間元の one 表現をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 22 をみたし補題 5.6.19 により良文特異式である．

$n \equiv 23 \mod 32$ のときは，$a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ なる形の元を $\mathrm{one}\triangle$ 元と呼ぶ．そして α_{n-1} に属す $\mathrm{one}\triangle$ 元 $a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ と β_{n-1} に属す $\mathrm{one}\triangle$ 元 $b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \ldots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ の組で $p \geq \sum_{i=1}^m q_i$ をみたすものを良組と呼ぶ．$\alpha_{n-1} \cup \beta_{n-1}$ に属す $\mathrm{one}\triangle$ 元は有限個しかないが，良組は必ずしも有限個ではない．たとえば，$a\,\overline{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ が α_{n-1} に属し $b\,\overline{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ が β_{n-1} に属せば，$a\,\overline{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle$

と $b\,\bar{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ 任意個の組 $a\,\bar{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle, b\,\bar{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \ldots, b\,\bar{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ は良組である．しかし良組の中でも，$b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \ldots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ が相異なるものは有限個しか存在しない．そこで，そういう良組の全体を $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_l\}$ とする．そうすると，良文特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, l)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわちまず，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とする．そして，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，$\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ は次のように作る．まず，μ_i は α_{n-1} に属す $\mathrm{one}\triangle$ 元 $a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ と β_{n-1} に属す $\mathrm{one}\triangle$ 元 $b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \ldots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ の良組であるとする．次に，$\alpha_{n,i-1} \cup \beta_{n,i-1}$ 中の用元に自由に現れる $\mathrm{Var}'_\varepsilon$ の元は定理 3.15.1 により有限個であって $\mathrm{Var}'_\varepsilon$ が可算集合であるから，$\alpha_{n,i-1} \cup \beta_{n,i-1}$ 中の用元に自由に現れない $\mathrm{Var}'_\varepsilon$ の元 x が存在する．そこで，これらから $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle, x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \ldots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle$ なる元を作り，式 $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \alpha_{n,i-1} \to x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \cdots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle, \beta_{n,i-1}$ を $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ と定める．そうすると補題 5.6.20 により，$\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ は良文特異式である．そこで $\alpha_{n,l} \to \beta_{n,l}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とすれば，これが条件 0, 23 をみたす良文特異式である．なぜなら，$a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle, b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \ldots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ が良組であれば，$b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \ldots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ から重複を除いて出来る組が M に属し，従って $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \alpha_n$ と $x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \ldots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle \in \beta_n$ が成り立つからである．

$n \equiv 24 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $a\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle$ なる形の元を任意にとって出来る $a_1\,\breve{o}\pi\,a\triangle$, $\ldots$, $a_n\,\breve{o}\pi\,a\triangle$ なる n 個の元をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 24 をみたし，補題 5.6.21 により良文特異式である．

$n \equiv 25 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle$ なる形の元（これを $\sqcap$ 元と呼ぶ）を任意にとって出来る $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, c\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ なる元（これらを $\sqcap$ 元 $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle$ の成分と呼ぶ）をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 25 をみたし，補題 5.6.22 により良文特異式である．

$n \equiv 26 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $\sqcap$ 元の全体を $h_1, \ldots, h_m$ とすれば，良文特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.22 により h_i のある成分 h'_i に対して $\alpha_{n,i-1} \to h'_i\beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，それを $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,m} \to \beta_{n,m}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 26 をみたす．

$n \equiv 28 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)$ なる形の元（これを $\sqcup$ 元と呼ぶ）を任意にとって出来る $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, c\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ なる元（これらを $\sqcup$ 元 $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle$ の成分と呼ぶ）をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 28 をみたし，補題 5.6.22 により良文特異式である．

$n \equiv 27 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $\sqcup$ 元の全体を $h_1, \ldots, h_m$ とすれば，良文特異式 $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ で $\alpha_{n,i-1} \subseteq \alpha_{n,i}$，$\beta_{n,i-1} \subseteq \beta_{n,i}$ なるものを次のように帰納的に作ることができる．すなわち，$\alpha_{n,0} \to \beta_{n,0} = \alpha_{n-1} \to \beta_{n-1}$ とし，$i \geq 1$ で $\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ まで作れたとき，補題 5.6.22 により h_i のある成分 h'_i に対して $h'_i\alpha_{n,i-1} \to \beta_{n,i-1}$ が良文特異式であるから，それを $\alpha_{n,i} \to \beta_{n,i}$ とする．そして $\alpha_{n,m} \to \beta_{n,m}$ を $\alpha_n \to \beta_n$ とする．そうするとこれが，良文特異式であって条件 0, 27 をみたす．

$n \equiv 29 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle$ なる形の元を任意にとって出来る $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle$ なる元をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 29 をみたし，補題 5.6.23 により良文特異式である．

$n \equiv 30 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle$ なる形の元を任意にとって出来る $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle$ なる元をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 30 をみたし，補題 5.6.23 により良文特異式である．

$n \equiv 31 \mod 32$ のときは，α_{n-1} に属す $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi(f\,\Omega x)\triangle$ なる形の元を任意にとって出来る $f(x/\mathfrak{a})$ なる元をすべて α_{n-1} の左に順次付加したものを α_n と定め，また $\beta_n = \beta_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 31 をみたし，補題 5.6.24 により良文特異式である．

$n \equiv 32 \mod 32$ のときは，β_{n-1} に属す $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi(f\,\Omega x)\triangle$ なる形の元を任意にとって出来る $f(x/\mathfrak{a})$ なる元をすべて β_{n-1} の左に順次付加したものを β_n と定め，また $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ と定めれば，$\alpha_n \to \beta_n$ は条件 0, 32 をみたし，補題 5.6.24 により良文特異式である．

補題 5.6.26 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0,1,\dots}$ **を** $\alpha_0 \to \beta_0$ **の展開列とし，**$P = \bigcup_{n\geq 0}\alpha_n$，$Q = \bigcup_{n\geq 0}\beta_n$ **と定めれば，**$P \cup Q$ **は良文から成り，組み** (P, Q) **は** $(\alpha_0, \beta_0) \subseteq (P, Q)$ **と** $P \cap Q = \emptyset$ **と次の三十三条件をみたす．**

0. $P \cup Q$ **に現れる** $\mathbb{P} - \{0\}$ **の元は** $\alpha_0 \cup \beta_0$ **に現れる．**

次の二条件においては，$a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \dots, l)$, $f \in H$, $K_f = \{k_1, \dots, k_l\}$ **とし，**ρ **を** l **次の置換とする．**

1. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l} f \in P$ **なら** $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\dots,l} f \in P$

2. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l} f \in Q$ **なら** $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\dots,l} f \in Q$

次の六条件においては $a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \dots, l)$, $f, g \in H$, $K_f - K_g = \{k_1, \dots, k_\nu\}$, $K_f \cap K_g = \{k_{\nu+1}, \dots, k_m\}$, $K_g - K_f = \{k_{m+1}, \dots, k_l\}$ **とする** $(0 \leq \nu \leq m \leq l)$**．**

3. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f \wedge g) \in P$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m} f$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}\, g \in P$

4. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f \wedge g) \in Q$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m} f \in Q$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}\, g \in Q$

5. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f \vee g) \in P$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m} f \in P$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}\, g \in P$

6. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f \vee g) \in Q$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m} f$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}\, g \in Q$

7. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f \Rightarrow g) \in P$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m} f \in Q$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}\, g \in P$

8. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f \Rightarrow g) \in Q$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,m} f \in P$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\dots,l}\, g \in Q$

次の二条件においては $a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \dots, l)$, $f \in H$, $K_f = \{k_1, \dots, k_l\}$ **とする．**

9. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f^\diamondsuit) \in P$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l} f \in Q$

10. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(f^\diamondsuit) \in Q$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l} f \in P$

次の十二条件においては $a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \dots, l)$, $\mathfrak{a} \in G$, $f \in H$, $K_f = \{k, k_1, \dots, k_l\}$ **とする．次の四条件においてはさらに** $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ **とする．**

11. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\neg\mathfrak{p}k\,f) \in P$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f^\diamondsuit) \in P$

12. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\neg\mathfrak{p}k\,f) \in Q$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f^\diamondsuit) \in Q$

次の二条件においてはさらに $\mathfrak{p}$ **の連結成分の全体を** $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ **とする．**

13. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f) \in P$ **ならある** $j \in \{1, \dots, m\}$ **に対して** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}_j k\,f) \in P$

14. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f) \in Q$ **なら任意の** $j \in \{1, \dots, m\}$ **に対して** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}_j k\,f) \in Q$

次の二条件においては $\mathbb{P} \in \mathfrak{P}$ に留意する．

15. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\mathbb{P}k\,f) \in P$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(\leftarrow 0]k\,f) \in P$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{0}k\,f) \in P$

16. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\mathbb{P}k\,f) \in Q$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(\leftarrow 0]k\,f),\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{0}k\,f) \in Q$

次の二条件においては $p, q \in \mathbb{P}$ とする．

17. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(p, q]k\,f) \in P$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{p}k\,f),\ (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(\leftarrow q]k\,f) \in P$

18. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(p, q]k\,f) \in Q$ **なら**
$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{p}k\,f) \in Q$ **または** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(\leftarrow q]k\,f) \in Q$

次の四条件においては $p \in \mathbb{P}$ とする．

19. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(\leftarrow p]k\,f) \in P$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{p}k\,f) \in Q$

20. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,(\leftarrow p]k\,f) \in Q$ **なら** $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{p}k\,f) \in P$

21. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{p}k\,f) \in P,\ \ x \in \mathrm{Var}''_{\varepsilon}$ **なら** $\bigl(a \sqcap \bigl(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}f\bigr)\,\Omega x\bigr)\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P$

22. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}(a\,\overline{p}k\,f) \in Q,\ \ x \in \mathrm{Var}''_{\varepsilon}$ **なら** $\bigl(a \sqcap \bigl(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,\iota}f\bigr)\,\Omega x\bigr)\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q$

次の条件においては $a, b_1, \ldots, b_m \in G,\ \ p, q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{P}$ とする．

23. $a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P,\ \ b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \ldots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q,\ \ p \geq \sum_{i=1}^{m} q_i$ **なら，ある** $x \in \mathrm{Var}'_{\varepsilon}$ **に対して** $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$ **かつ** $x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \cdots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle \in Q$**．ただし，**$m = 0$ **の場合は** $\sum_{i=1}^{m} q_i = 0$ **とみなす．**

次の条件においては $a \in G$ とする．

24. $a\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q$ **なら任意の** $b \in A'_{\varepsilon}$ **に対して** $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$

次の四条件においては $a, b \in G,\ \ c \in A_{\varepsilon}$ とする．

25. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in P$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle,\ c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in P$

26. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in Q$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$ **または** $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in Q$

27. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in P$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$ **または** $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in P$

28. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in Q$ **なら** $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle,\ c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in Q$

次の二条件においては $a \in G,\ \ b \in A_{\varepsilon}$ とする．

29. $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in P$ **なら** $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$

30. $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in Q$ **なら** $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$

次の二条件においては $a \in A_{\varepsilon},\ \ f \in A_{\emptyset},\ \ x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon}$ とする．

31. $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in P$ **なら** $f(x/a) \in P$

32. $a\,\breve{o}\pi(f\,\Omega x)\triangle \in Q$ **なら** $f(x/a) \in Q$

証明　$(\alpha_0, \beta_0) \subseteq (P, Q)$ であることは P, Q の定義により自明である．任意の n に対して $\alpha_n \to \beta_n$ が良文式であるから，$P \cup Q$ は良文から成る．また，任意の n に対して $\alpha_n \to \beta_n$ が特異式であって $\alpha_{n-1} \subseteq \alpha_n$，$\beta_{n-1} \subseteq \beta_n$ であるから，補題 3.23.1 により，任意の m, n に対して $\alpha_m \cap \beta_n = \emptyset$ が成り立つ．従って $P \cap Q = \emptyset$ が成り立つ．以下，条件 0 – 32 がみたされることを確かめる．ただし,「$n \equiv i$」は「$n \equiv i \mod 32$」を意味する $(i = 1, \ldots, 32)$.

0. $P \cup Q$ に現れる $\mathbb{P} - \{0\}$ の元は，ある n に対して $\alpha_n \cup \beta_n$ に現れ，従って展開列の条件 0 により $\alpha_0 \cup \beta_0$ に現れる．

1. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in P$ なら，$n \equiv 1$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 1 により $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l}f \in \alpha_n$，従って $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l}f \in P$ が成り立つ．

2. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in Q$ なら，$n \equiv 2$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 2 により $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l}f \in \beta_n$，従って $(a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l}f \in Q$ が成り立つ．

3. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in P$ なら，$n \equiv 3$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 3 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in P$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in P$ が成り立つ．

4. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in Q$ なら，$n \equiv 4$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 4 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in \beta_n$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in Q$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in Q$ が成り立つ．

5. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in P$ なら，$n \equiv 5$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 5 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in \alpha_n$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in P$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in P$ が成り立つ．

6. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in Q$ なら，$n \equiv 6$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 6 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in Q$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in Q$ が成り立つ．

7. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in P$ なら，$n \equiv 7$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 7 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in \beta_n$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in Q$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in P$ が成り立つ．

8. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in Q$ なら，$n \equiv 8$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 8 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in \alpha_n$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f \in P$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g \in Q$ が成り立つ．

9. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f^{\Diamond}) \in P$ なら，$n \equiv 9$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f^{\Diamond}) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 9 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in Q$ が成り立つ．

10. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f^{\Diamond}) \in Q$ なら，$n \equiv 10$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f^{\Diamond}) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 10 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}f \in P$ が成り立つ．

11. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\neg\text{ꝑ}k\,f) \in P$ なら，$n \equiv 11$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\neg\text{ꝑ}k\,f) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 11 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\text{ꝑ}k\,f^{\Diamond}) \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\text{ꝑ}k\,f^{\Diamond}) \in P$ が成り立つ．

12. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\neg\text{ꝑ}k\,f) \in Q$ なら，$n \equiv 12$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\neg\text{ꝑ}k\,f) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 12 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\text{ꝑ}k\,f^{\Diamond}) \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\text{ꝑ}k\,f^{\Diamond}) \in Q$ が成り立つ．

13. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\text{ꝑ}k\,f) \in P$ なら，$n \equiv 13$，$(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\text{ꝑ}k\,f) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 13 によりある $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(a\,\text{ꝑ}_j k\,f) \in \alpha_n$，従ってあ

る $j \in \{1, \dots, m\}$ に対して $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}_j k\,f) \in P$ が成り立つ.

14. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}k\,f) \in Q$ なら，$n \equiv 14$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}k\,f) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 14 によりすべての $j \in \{1, \dots, m\}$ に対して $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}_j k\,f) \in \beta_n$，従ってすべての $j \in \{1, \dots, m\}$ に対して $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathfrak{p}_j k\,f) \in Q$ が成り立つ.

15. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathbb{P}k\,f) \in P$ なら，$n \equiv 15$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathbb{P}k\,f) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 15 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow 0]k\,f) \in \alpha_n$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{0}k\,f) \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow 0]k\,f) \in P$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{0}k\,f) \in P$ が成り立つ.

16. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathbb{P}k\,f) \in Q$ なら，$n \equiv 16$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\mathbb{P}k\,f) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 16 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow 0]k\,f), (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{0}k\,f) \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow 0]k\,f), (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{0}k\,f) \in Q$ が成り立つ.

17. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(p, q]k\,f) \in P$ なら，$n \equiv 17$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(p, q]k\,f) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 17 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f), (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow q]k\,f) \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f), (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow q]k\,f) \in P$ が成り立つ.

18. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(p, q]k\,f) \in Q$ なら，$n \equiv 18$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(p, q]k\,f) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 18 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in \beta_n$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow q]k\,f) \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in Q$ または $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow q]k\,f) \in Q$ が成り立つ.

19. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow p]k\,f) \in P$ なら，$n \equiv 19$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow p]k\,f) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 19 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in \beta_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in Q$ が成り立つ.

20. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow p]k\,f) \in Q$ なら，$n \equiv 20$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,(\leftarrow p]k\,f) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 20 により $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in \alpha_n$，従って $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in P$ が成り立つ.

21. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in P$, $x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ なら，$n \equiv 21$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 21 により $\bigl(a \sqcap \bigl(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}f\bigr)\,\Omega x\bigr)\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \alpha_n$，従って $\bigl(a \sqcap \bigl(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}f\bigr)\,\Omega x\bigr)\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P$ が成り立つ.

22. $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in Q$, $x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ なら，$n \equiv 22$, $(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}(a\,\overline{p}k\,f) \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 22 により $\bigl(a \sqcap \bigl(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}f\bigr)\,\Omega x\bigr)\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \beta_n$，従って $\bigl(a \sqcap \bigl(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\dots,l}f\bigr)\,\Omega x\bigr)\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q$ が成り立つ.

23. $a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P$, $b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \dots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q$ かつ $p \geq \sum_{i=1}^{m} q_i$ なら，$n \equiv 23$, $a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \alpha_{n-1}$，$b_1\,\overline{q_1}\pi\,\mathrm{one}\triangle, \dots, b_m\,\overline{q_m}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 23 によりある $x \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ に対して $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \alpha_n$ かつ $x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \dots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle \in \beta_n$，従って $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$ かつ $x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \dots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle \in Q$ が成り立つ.

24. A'_ε が可算集合であることに留意して $A'_\varepsilon = \{a_1, a_2, \dots\}$ とする．そうすると $a\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q$ なら，$n \equiv 24$, $a\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \in \beta_{n-1}$ なる n が無限個あり，その各々に応じて展開列の条件 24 により，$i = 1, \dots, n$ に対して $a_i\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \beta_n$，従って $a_i\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$ が成り立つ．従って，任意の $b \in A'_\varepsilon$ に対して $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$ が成り立つ.

25. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in P$ なら，$n \equiv 25$, $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 25 により $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \alpha_n$，従って $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle, c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in P$ が成り立つ.

26. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in Q$ なら，$n \equiv 26$, $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 26 により $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \beta_n$ または $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \beta_n$，従って $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$ または $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in Q$ が成り立つ.

27. $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in P$ なら，$n \equiv 27$, $c\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 27 により $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \alpha_n$ または $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \alpha_n$，従って $c\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$ または $c\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in P$ が成り

立つ．

28. $\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in Q$ なら，$n \equiv 28$, $\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 28 により $\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in \beta_n$，従って $\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,a\triangle, \mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in Q$ が成り立つ．

29. $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in P$ なら，$n \equiv 29$, $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 29 により $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \beta_n$，従って $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$ が成り立つ．

30. $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in Q$ なら，$n \equiv 30$, $b\,\breve{o}\pi\,(a^{\square})\triangle \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 30 により $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in \alpha_n$，従って $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$ が成り立つ．

31. $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in P$ なら，$n \equiv 31$, $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in \alpha_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 31 により $f(x/a) \in \alpha_n$，従って $f(x/a) \in P$ が成り立つ．

32. $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in Q$ なら，$n \equiv 32$, $a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in \beta_{n-1}$ なる n があるから，展開列の条件 32 により $f(x/a) \in \beta_n$，従って $f(x/a) \in Q$ が成り立つ．

注意 5.6.4 補題 5.6.26 の P, Q は補題 5.6.25 の展開列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=1,2,\ldots}$ から作られ，この展開列の元となる文反例式 $\alpha_0 \to \beta_0$ は，背理法の仮定と補題 5.6.8 により存在する文反例式 $f_1 \cdots f_m \to g_1 \cdots g_n$ に補題 5.6.9 の証明の手順を踏んで作られた．つまりまず

$$h = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_m)^{\lozenge} \vee g_1 \vee \cdots \vee g_n$$

と定め，次に h に自由に現れる Var_ε の元の全体を $x_1, \ldots, x_k$ として

$$h_0 = h \qquad\qquad h_i = \mathrm{one}\,\forall\pi\,(h_{i-1}\,\Omega x_i)\triangle \quad (i = 1, \ldots, k)$$

と定めれば，式 $\to h_k$ が $\alpha_0 \to \beta_0$ である．そこでここでは，$\to h_k$ を「展開」することによってもとの文反例式 $f_1 \cdots f_m \to g_1 \cdots g_n$ が P, Q の中に「再現」されることを示そう．それにはまず h を Q の中に再現しなければならないが，それには一般に $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in Q$ のときにこれを展開して f を Q の中に再現すればよく，そういう展開は次の手順で行なわれる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in Q && \\
&\Longrightarrow\ \mathrm{one}\,\neg(\leftarrow 0]\pi\,a\triangle \in Q && (a = f\,\Omega x)\\
&\Longrightarrow\ \mathrm{one}\,(\leftarrow 0]\pi\,(a\triangle)^{\lozenge} \in Q && (\text{補題 5.6.26 の条件 12 による})\\
&\Longrightarrow\ \mathrm{one}\,\bar{0}\pi\,(a\triangle)^{\lozenge} \in P && (\text{補題 5.6.26 の条件 20 による})\\
&\Longrightarrow\ (\mathrm{one} \sqcap (x\,\breve{o}\pi\,(a\triangle)^{\lozenge})\,\Omega x)\,\bar{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P && (\text{補題 5.6.26 の条件 21 による})\\
&\Longrightarrow\ (\mathrm{one} \sqcap g\,\Omega x)\,\bar{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P && (g = x\,\breve{o}\pi\,(a\triangle)^{\lozenge})\\
&\Longrightarrow\ b\,\bar{0}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P && (b = \mathrm{one} \sqcap g\,\Omega x)\\
&\Longrightarrow\ \text{ある } y \in \mathrm{Var}'_\varepsilon \text{ に対し } y\,\breve{o}\pi\,b\triangle \in P && (\text{補題 5.6.26 の条件 23 による})\\
&\Longrightarrow\ y\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{one} \sqcap g\,\Omega x)\triangle \in P && \\
&\Longrightarrow\ y\,\breve{o}\pi\,(g\,\Omega x)\triangle \in P && (\text{補題 5.6.26 の条件 25 による})\\
&\Longrightarrow\ g(x/y) \in P && (\text{補題 5.6.26 の条件 31 による})\\
&\Longrightarrow\ y\,\breve{o}\pi\,(a\triangle)^{\lozenge} \in P && (a(x/y) = a \text{ だから})\\
&\Longrightarrow\ y\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q && (\text{補題 5.6.26 の条件 9 による})\\
&\Longrightarrow\ y\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \in Q && \\
&\Longrightarrow\ f(x/y) \in Q && (\text{補題 5.6.26 の条件 32 による})
\end{aligned}$$

従って厳密には，f が再現されるのではなく，f に自由に現れている $x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ を $y \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ で置き換えたものが再現される．それは Q の元が良元だから当然である．h が Q の中に再現されれば $\{f_1, \ldots, f_m\}$ と $\{g_1, \ldots, g_n\}$ がそれぞれ P と Q の中に再現されることは，補題 5.6.26 の条件 6, 10, 3 から分かる．なお，一階述語論理学において補題 5.6.26 に対応する補題 4.9.6 についても同趣旨の展開と再現の手順があるが，それは上記手順に比べて極めて単純である．　**終**

さて，以上の準備の下でいよいよ予告の通り，$\alpha_0 \not\preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta_0$ なる $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ のあることを示す．そのためにまず注意 5.2.3 の手順で，単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ を以下のように作る．

まず，$T_{\mathfrak{F}}$ と同類の汎代数系 S として A'_ε をとる．

$$S = A'_\varepsilon$$

A'_ε は可算集合だったから，S は空ではない．

S 上の関係 ∋ を次のように定める．すなわち，S の任意の二元 a, b に対して

$$b \ni a \iff a\,\breve{o}\pi\, b \triangle \notin Q$$

同一律により任意の $a \in S$ に対して $\preccurlyeq_* a\,\breve{o}\pi\, a\triangle$ が成り立つ．また，$\preccurlyeq_*$ は付加律と置換律に従い，任意の $n = 0, 1, \ldots$ に対して $\alpha_n \to \beta_n$ は特異式である．従って，任意の $n = 0, 1, \ldots$ に対して $a\,\breve{o}\pi\, a\triangle \notin \beta_n$，つまり $a\,\breve{o}\pi\, a\triangle \notin Q$ が成り立つ．従って ∋ は反射的である．

S 上の $\mathbb{P}$ 測度 $|X|$ を次のように定める．まず，$P \cup Q$ に現れる $\mathbb{P}$ の元の全体を $\mathbb{P}'$ で表す．そうすると補題 5.6.26 の条件 0 により，$\mathbb{P}'$ は有限集合である．そこで，$\mathbb{P}'$ の $\mathbb{P}$ における上限を $\acute{p}$ で表す．$\mathbb{P}' = \emptyset$ の場合は，第 3.9.3 項の上限の定義により $\acute{p} = 0$ である．次に，$\mathbb{P}$ の元 $\acute{o}$ を次のように定める．すなわち，$\acute{p} < p$ なる $p \in \mathbb{P}$ がある場合は，そういう p を任意にとってそれを $\acute{o}$ とする．$\acute{p} < p$ なる $p \in \mathbb{P}$ がない場合は，つまり $\acute{p} = \infty$ の場合は，$\acute{o} = \infty$ とする．限量系の要件により $\#\mathbb{P} > 1$ であるから，いずれの場合にも $0 < \acute{o}$ が成り立つ．次に各 $a \in G$ に対し，S の部分集合 S^a を次のように定める．

$$S^a = \{s \in S \mid s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \notin Q\}$$

特に $a \in A'_\varepsilon$ なら，$S^a = \{s \in S \mid a \ni s\}$ である（補題 5.2.8 参照）．次に，$\mathcal{P}S, \mathbb{P}$ 間の関係 R を次のように定める．すなわち，$(X, p) \in \mathcal{P}S \times \mathbb{P}$ が $X\,R\,p$ をみたすのは，G の元 $b_1, \ldots, b_m$ と $\mathbb{P}$ の元 $q_1, \ldots, q_m$ で次の三条件をみたすものが存在するときとする $(m \geq 0)$.

a. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^m S^{b_i}$

b. $p = \sum_{i=1}^m q_i$

c. $b_i\, \overline{q_i}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q \ (i = 1, \ldots, m)$

ただし $m = 0$ のときは，条件 a の $\bigcup_{i=1}^m S^{b_i}$ は第 3.9.3 項の上限の定義により空集合であり，条件 b の $\sum_{i=1}^m q_i$ は 0 であり，条件 c は空な条件である．そうするとこの関係 R は，問題 3.32.25 の次の三条件 1, 2, 3 をみたす．

1. $X = \emptyset \iff X\,R\,0$

2. $X \subseteq Y$ かつ $Y\,R\,p \implies X\,R\,p$

3. $X\,R\,p$ かつ $Y\,R\,q \implies (X \cup Y)\,R\,(p + q)$

R が条件 2, 3 と $\emptyset R 0$ をみたすのは，R の定義と $m = 0$ の場合への上記注意により明らかである．残りの「$X R 0 \implies X = \emptyset$」は次のように示される．$X R 0$ であれば，R の定義により，$X = \emptyset$ であるかまたは，G の元 $b_1, \ldots, b_m$ と $\mathbb{P}$ の元 $q_1, \ldots, q_m$ で $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} S^{b_i}$ と $0 = \sum_{i=1}^{m} q_i$ と $b_i\, \overline{q_i}\pi\mathrm{one}\triangle \in Q$ $(i = 1, \ldots, m)$ をみたすものが存在する $(m > 0)$．後者の場合，問題 3.32.1 により $q_i = 0$ であるから $b_i \exists\pi\mathrm{one}\triangle \in Q$，従って補題 5.6.26 の条件 24 により，任意の $s \in S$ に対して $s\breve{o}\pi\, b_i\triangle \in Q$，つまり $S^{b_i} = \emptyset$ が成り立つ $(i = 1, \ldots, m)$．従って，この場合にも $X = \emptyset$ である．さらに，各 $X \in \mathcal{P}S$ と先に定めた $\mathbb{P}$ の元 $\acute{o}$ に対し，$\mathbb{P}$ の部分集合 $\{p \in \mathbb{P} \mid X R p\} \cup \{\acute{o}\}$ に最小元が存在する．なぜなら $\{p \in \mathbb{P} \mid X R p\}$ は，$\mathbb{P}$ の $\mathbb{P}' \cup \{0\}$ によって生成される部分半群に含まれ，従って定理 3.32.2 により，空集合でなければ最小値を持つからである．従って問題 3.32.26 により，S 上の $\mathbb{P}$ 測度 $|X|$ を次のように定めることができる．

$$|X| = \min\bigl(\{p \in \mathbb{P} \mid X R p\} \cup \{\acute{o}\}\bigr)$$

注意 5.2.3 によればこれで，S を基底とし $\exists$ を基本関係とし $|X|$ を測度とする単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ が作れた．

そこで，A から W への定付値 Φ と変付値 ν を定める．まず定付値 Φ は次のように定める．

Φ1. 各 $a \in \mathrm{Con}_\delta$ に対しては $\Phi a \in S {\to} \mathbb{T}$ とし，各 $s \in S$ に対して次のように定める．

$$(\Phi a)s = 1 \iff s \in S^a$$

Φ2. 各 $a \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ に対しては，$\mathrm{Con}_\varepsilon \subseteq S$ に留意して $\Phi a = a$ と定める．

Φ3. 各 $f \in \mathrm{Con}_{\mathcal{P}K}$ に対しては $\Phi f \in (K_f {\to} S) {\to} \mathbb{T}$ とし，$K_f = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とするとき（以後こう書くときは，断らずとも $k_1, \ldots, k_n$ は相異なるものとする），各 $\theta \in K_f {\to} S$ に対して

$$(\Phi f)\theta = 1 \iff \bigl((\theta k_i)\, \breve{o} k_i\bigr)_{i=1,\ldots,n} f \notin Q$$

と定める．補題 5.6.26 の条件 2 により，この定義は K_f の元の番号の付け方によらない．

こう定義した Φ は，Con から W への保型写像であるという定付値の要件をみたす．

変付値 ν は定付値 Φ と同様に次のように定める．ただし，注意は同じなので繰り返さない．

ν1. 各 $x \in \mathrm{Var}_\delta$ に対しては $\nu x \in S {\to} \mathbb{T}$ とし，各 $s \in S$ に対して次のように定める．

$$(\nu x)s = 1 \iff s \in S^x$$

ν2. 各 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対しては，$x \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ のときは $\mathrm{Var}'_\varepsilon \subseteq S$ に留意して $\nu x = x$ と定め，$x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ のときは νx は S の任意の元とする．

ν3. 各 $f \in \mathrm{Var}_{\mathcal{P}K}$ に対しては $\nu f \in (K_f {\to} S) {\to} \mathbb{T}$ とし，$K_f = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とするとき，各 $\theta \in K_f {\to} S$ に対して次のように定める．

$$(\nu f)\theta = 1 \iff \bigl((\theta k_i)\, \breve{o} k_i\bigr)_{i=1,\ldots,n} f \notin Q$$

こう定義した ν は，Var から W への保型写像であるという変付値の要件をみたす．

以上により，単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ と A から W への定付値 Φ と変付値 ν が一組み作れた．従って $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ である．そこで以下，この (Φ, ν) に対して $\alpha_0 \not\preccurlyeq_{\Phi,\nu} \beta_0$ を示す．そのためには，$(\alpha_0, \beta_0) \subseteq (P, Q)$ であって $P \cup Q$ が文から成るから，定理 5.5.1 によれば，Φ の定める意味写像 Φ^* について次の補題を証明すればいい．

補題 5.6.27 $\mathrm{h} \in \mathrm{P}$ **なら** $(\Phi^*\mathrm{h})\nu = 1$ **が成り立ち，**$\mathrm{h} \in \mathrm{Q}$ **なら** $(\Phi^*\mathrm{h})\nu = 0$ **が成り立つ．**

これを帰納法で証明するために補題をさらに用意する．一つ目の補題は帰納法の出発点ためのものである．

補題 5.6.28 任意の $\mathrm{a} \in \mathrm{A}'_\varepsilon$ **に対して** $(\Phi^*\mathrm{a})\nu = \mathrm{a}$ **が成り立つ．また，任意の** $\mathrm{a} \in \mathrm{Prm}_\delta \cup \mathrm{A}'_\varepsilon$，$\mathrm{s} \in \mathrm{S}$ **と拡張関係** $\ni$ **について「**$(\Phi^*\mathrm{a})\nu \ni \mathrm{s} \iff \mathrm{s} \in \mathrm{S}^{\mathrm{a}}$**」が成り立つ．**

証明　意味写像 Φ^* の定義により，$\mathrm{a} \in \mathrm{Con}$ に対しては $(\Phi^*\mathrm{a})\nu = \Phi\mathrm{a}$ であり，$\mathrm{x} \in \mathrm{Var}$ に対しては $(\Phi^*\mathrm{x})\nu = \nu\mathrm{x}$ である．このことと $\Phi 2$ と $\nu 2$ の規定により，任意の $\mathrm{a} \in \mathrm{Prm}'_\varepsilon$ に対して $(\Phi^*\mathrm{a})\nu = \mathrm{a}$ が成り立つ．A'_ε から S への写像 $\mathrm{a} \mapsto (\Phi^*\mathrm{a})\nu$ と埋め込み写像が共に $\mathfrak{F}$ 準写であって $\mathrm{A}'_\varepsilon = [\mathrm{Prm}'_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$ であるから，前半が成り立つ．後半については，まず $\mathrm{a} \in \mathrm{A}'_\varepsilon$ の場合は，前半により $(\Phi^*\mathrm{a})\nu = \mathrm{a}$ であり，基本関係 $\ni$ の定義により「$\mathrm{a} \ni \mathrm{s} \iff \mathrm{s} \in \mathrm{S}^{\mathrm{a}}$」が成り立っていた．次に $\mathrm{a} \in \mathrm{Prm}_\delta$ の場合，拡張関係 $\ni$ の定義により「$(\Phi^*\mathrm{a})\nu \ni \mathrm{s} \iff \big((\Phi^*\mathrm{a})\nu\big)\mathrm{s} = 1$」が成り立つ．また $(\Phi^*\mathrm{a})\nu$ は，$\mathrm{a} \in \mathrm{Con}_\delta$ なら $\Phi\mathrm{a}$ に等しく，$\mathrm{a} \in \mathrm{Var}_\delta$ なら $\nu\mathrm{a}$ に等しい．従って Φ と ν の定義により，「$\big((\Phi^*\mathrm{a})\nu\big)\mathrm{s} = 1 \iff \mathrm{s} \in \mathrm{S}^{\mathrm{a}}$」が成り立つ．

二つ目の補題は帰納法を運ぶ順番を決めるためのものである．

補題 5.6.29 A **の算号系を** Λ **で表す（第 5.1.1 項参照）．すなわち，**

$$\Lambda = \{\lambda\mathrm{k}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \triangle, \sqcap, \sqcup, \square, \mathfrak{f}, \Omega\mathrm{x} \mid \lambda \in \{\breve{\mathrm{o}}\} \cup \mathfrak{Q},\ \mathrm{k} \in \mathrm{K},\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F},\ \mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon\}$$

このとき，$\Lambda \amalg \mathrm{A}$ **から非負整数の全体** $\mathbb{Z}_0$ **への写像** I **で次の八条件をみたすものが一意に存在する．**

1. **任意の** $\mu \in \Lambda$ **と** $(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n) \in \mathrm{Dom}\,\mu$ **に対して** $\mathrm{I}\big(\mu(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n)\big) = \mathrm{I}\mu + \mathrm{I}\mathrm{a}_1 + \cdots + \mathrm{I}\mathrm{a}_n$ **が成り立つ．**
2. **任意の** $\mathrm{a} \in \{\breve{\mathrm{o}}\mathrm{k}, \triangle, \mathfrak{f} \mid \mathrm{k} \in \mathrm{K},\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F}\} \amalg \mathrm{Prm}$ **に対して** $\mathrm{I}(\mathrm{a}) = 0$ **が成り立つ．**
3. **任意の** $\mathrm{a} \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \sqcap, \sqcup, \square, \Omega\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{Var}_\varepsilon\}$ **に対して** $\mathrm{I}\mathrm{a} = 1$ **が成り立つ．**
4. **任意の** $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$ **と任意の** $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$ **に対して** $\mathrm{I}(\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k}) = 4$ **が成り立つ．**
5. **任意の** $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$ **と任意の** $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$ **に対して** $\mathrm{I}((\leftarrow\mathrm{p}]\mathrm{k}) = 5$ **が成り立つ．**
6. $\mathfrak{P}$ **に属す** $\overline{\mathrm{p}}, (\leftarrow\mathrm{p}]$ **以外の任意の区間** $\mathfrak{p}$ **と任意の** $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$ **に対して** $\mathrm{I}(\mathfrak{p}\mathrm{k}) = 6$ **が成り立つ．**
7. $\mathfrak{P}$ **に属す非連結な任意の限量子** $\mathfrak{p}$ **と任意の** $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$ **に対して** $\mathrm{I}(\mathfrak{p}\mathrm{k}) = 7$ **が成り立つ．**
8. **任意の** $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ **と任意の** $\mathrm{k} \in \mathrm{K}$ **に対して** $\mathrm{I}(\neg\mathfrak{p}\mathrm{k}) = 9$ **が成り立つ．**

証明　定理 3.8.7 系による．

この補題を使って $\Lambda \amalg \mathrm{A}$ から $\mathbb{Z}_0$ への写像 J を次のように定める．すなわち，A の $\mathrm{a}\,\overline{\mathrm{p}}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ なる形の元に対しては

$$\mathrm{J}(\mathrm{a}\,\overline{\mathrm{p}}\pi\,\mathrm{one}\triangle) = \mathrm{I}\mathrm{a} + 1$$

と定め，それ以外の $\Lambda \amalg \mathrm{A}$ の元 b に対しては

$$\mathrm{J}\mathrm{b} = \mathrm{I}\mathrm{b}$$

と定める．A が有基代数系であるから，こう定めることは可能である．こうして各 $\mathrm{b} \in \mathrm{A}$ に応じて定まる非負整数 $\mathrm{J}\mathrm{b}$ を b の**指数**と呼ぶ．

補題 5.6.30　任意の $b \in A$ **に対して** $\mathrm{I}b \geq \mathrm{J}b$ **が成り立つ．また，任意の** $a \in A$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$b \in A_\varepsilon$ **に対して** $\mathrm{I}\big(a(x/b)\big) = \mathrm{I}a$ **が成り立つ．**

証明　$\mathrm{one} = (x_0\,\breve{o}\pi\,x_0\triangle)\,\Omega x_0$ であるから $\mathrm{I(one)} = \mathrm{I}(\Omega x_0) = 1$，従って $\mathrm{I}(a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle) = \mathrm{I}a + \mathrm{I}(\overline{p}\pi) + \mathrm{I(one)} = \mathrm{I}a + 5 > \mathrm{I}a + 1 = \mathrm{J}(a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle)$，従って前半が成り立つ．後半は a の階数 r についての帰納法で示す．$r = 0$ すなわち a が素元のときは，$a(x/b)$ も素元であるから両辺とも 0 に等しい．$r > 0$ のときは，$a = \mu(a_1, \ldots, a_n)$ なる $\mu \in \Lambda$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ がある．$\mu = \Omega x$ のときは $a(x/b) = a$ であるからいい．$\mu \neq \Omega x$ のときは，$a(x/b) = \mu(a_1(x/b), \ldots, a_n(x/b))$，従って $\mathrm{I}\big(a(x/b)\big) = \mathrm{I}\mu + \mathrm{I}\big(a_1(x/b)\big) + \cdots + \mathrm{I}\big(a_n(x/b)\big)$ であるが，帰納法の仮定により $\mathrm{I}\big(a_i(x/b)\big) = \mathrm{I}a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるので，$\mathrm{I}\big(a(x/b)\big) = \mathrm{I}\mu + \mathrm{I}a_1 + \cdots + \mathrm{I}a_n = \mathrm{I}a$ が成り立つ．

補題 5.6.27 の証明　任意の $h \in P \cup Q$ をとる．そうすると，A が有基代数系であるから，h の格域の相異なる元 $k_1, \ldots, k_l$ と A_ε の元 $a_1, \ldots, a_l$ と H の元 h' で次の条件をみたすものが一意に存在する $(l \geq 0)$.

$$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}h' \qquad\qquad h' \notin \textstyle\bigcup_{k\in K} \mathrm{Im}\,\breve{o}k$$

そして h が良文であるから，補題 5.6.11 により $a_1, \ldots, a_l \in A'_\varepsilon$ であり，$K_{h'} = \{k_1, \ldots, k_l\}$ である．また，$h' \notin \bigcup_{k\in K} \mathrm{Im}\,\breve{o}k$ であるから，問題 5.1.4 により，h' は用素元 [13]であるかまたは次のいずれかの語形をしている．

$$a\,\lambda k\,f\ (\lambda \in \mho) \qquad f \wedge g \qquad f \vee g \qquad f \Rightarrow g \qquad f^{\Diamond} \qquad c\triangle \tag{5.6.1}$$

また，問題 5.1.3 により，c は $\mathrm{Prm}_\delta \cup A_\varepsilon$ に属すかまたは次のいずれかの語形をしている．

$$a \sqcap b \qquad a \sqcup b \qquad a^{\Box} \qquad f\,\Omega x \tag{5.6.2}$$

h が良文であるから補題 5.6.11 により，$c \in A_\varepsilon$ の場合には $c \in A'_\varepsilon$ である．

まず次の二つの特別な場合に補題 5.6.27 を証明する．

h' が用素元の場合　$\theta \in K_{h'} \to S$ を $\theta k_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ と定める．そうすると，

$$\begin{aligned}
(\Phi^*h)\nu &= \Big(\Phi^*\big((a_i\,\breve{o}k_i)_i h'\big)\Big)\nu && (h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i h' \text{ を代入}) \\
&= \big((\Phi^*a_i)\nu\,\breve{o}k_i\big)_i(\Phi^*h')\nu && (\Phi^* \text{ と } \mathrm{pr}_\nu \text{ が } \{\breve{o}k_i\} \text{ 擬写だから}) \\
&= (a_i\,\breve{o}k_i)_i(\Phi^*h')\nu && (\text{補題 5.6.28 による}) \\
&= \big((\theta k_i)\,\breve{o}k_i\big)_i(\Phi^*h')\nu && (\theta \text{ の定義による}) \\
&= \big((\Phi^*h')\nu\big)\theta && (\text{定理 5.2.4 系 3 による})
\end{aligned}$$

$\big((\Phi^*h')\nu\big)\theta$ は，h' が用定数であれば $(\Phi h')\theta$ に等しく，h' が用変数であれば $(\nu h')\theta$ に等しい．そしてこれらの値が 1 となるのは，Φ と ν の定義により $\big((\theta k_i)\,\breve{o}k_i\big)_i h' \notin Q$ の場合であるが，それは，θ の定義により $h = \big((\theta k_i)\,\breve{o}k_i\big)_i h'$ であるから，$h \notin Q$ の場合である．従って，$h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立ち，$h \in P$ なら，$P \cap Q = \emptyset$ なので $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立つ．

[13]以下，表 5.1 の命名を頻用する．

$h' = c\triangle$ なる $c \in \mathrm{Prm}_\delta \cup A_\varepsilon$ がある場合　この場合，$l = 1$, $k_1 = \pi$, $c \in \mathrm{Prm}_\delta \cup A'_\varepsilon$ である．そこで a_1 を s と書くと，$h = s\,\breve{o}\pi c\triangle$ となる．従って補題 5.6.28 により，$(\Phi^* h)\nu = (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi(\Phi^* c)\nu\triangle = s\,\breve{o}\pi(\Phi^* c)\nu\triangle$ が成り立つ．これが 1 となるのは補題 5.2.10 によれば，拡張関係 $\exists$ について $(\Phi^* c)\nu \exists s$ の成り立つ場合であり，それは補題 5.6.28 によれば $s \in S^c$，すなわち $h = s\,\breve{o}\pi c\triangle \notin Q$ の場合である．従って，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．

一般の場合　以下，h の指数 Jh についての帰納法を使って補題 5.6.27 を一般に証明する．

$Jh = 0$ なら J の定義により，h' が用素元であるか $h' = c\triangle$ なる $c \in \mathrm{Prm}_\delta \cup A_\varepsilon$ があるかであり，これらの場合には補題 5.6.27 は上で既に証明されている．そこで以下，$Jh \geq 1$ であり，h' は用素元でなく，$h' = c\triangle$ なる $c \in \mathrm{Prm}_\delta \cup A_\varepsilon$ が無いと仮定する．そうすると，h' は (5.6.1) のどれかであり，$h' = c\triangle$ の場合の c は (5.6.2) のどれかである．それらについて以下順に調べて行く．

$P \cap Q = \emptyset$ に留意して，$P \cup Q$ の二元 f, g が共に P に属すか共に Q に属すとき f と g は**同値**であると言い，一方が P に属し他方が Q に属すとき，f と g は**異値**であると言う．そうすると，h と同値な元 $\grave{h}$ で $(\Phi^* h)\nu = (\Phi^* \grave{h})\nu$, $Jh > J\grave{h}$ なるものがあるか，または h と異値な元 $\grave{h}$ で $(\Phi^* h)\nu \neq (\Phi^* \grave{h})\nu$, $Jh > J\grave{h}$ なるものがあれば，帰納法の仮定により，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち $h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．この論法をしばしば使う．

まず h' が (5.6.1) の $a\lambda k f$ $(\lambda \in \mathfrak{Q})$ の場合を考え，この場合をさらに，$\lambda \in \neg\mathfrak{P}$ の場合と，$\lambda \in \mathfrak{P}$ で λ が不連結の場合と，$\lambda \in \mathfrak{P}$ で λ が連結の場合とに分ける．そうすると最後の場合，問題 3.9.26 により，λ は $\mathbb{P}$, $(p, q]$, $(\leftarrow p]$, $\overline{p} = (p\rightarrow)$ のいずれかである．

1. $h' = a\neg\mathfrak{p}k f$ $(\mathfrak{p} \in \mathfrak{P})$ **の場合：**$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\neg\mathfrak{p}k f)$ であり，補題 5.6.26 の条件 11, 12 により h は $\grave{h} = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\mathfrak{p}k f^\diamondsuit)$ と同値である．また，定理 5.2.8 により $a\neg\mathfrak{p}k f \asymp a\mathfrak{p}k f^\diamondsuit$，従って問題 5.2.16 により $\big(\Phi^*(a\neg\mathfrak{p}k f)\big)\nu = \big(\Phi^*(a\mathfrak{p}k f^\diamondsuit)\big)\nu$ であるから，$(\Phi^* h)\nu = (\Phi^* \grave{h})\nu$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 により

$$\begin{aligned} Jh = Ih = I(a\neg\mathfrak{p}k f) &= Ia + I(\neg\mathfrak{p}k) + If = Ia + 9 + If \\ &> Ia + 8 + If = Ia + 7 + (If + 1) = Ia + 7 + I(f^\diamondsuit) \\ &\geq Ia + I(\mathfrak{p}k) + I(f^\diamondsuit) = I(a\mathfrak{p}k f^\diamondsuit) = I\grave{h} = J\grave{h} \end{aligned}$$

従って，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．

2. $h' = a\mathfrak{p}k f$ $(\mathfrak{p} \in \mathfrak{P})$ **で** $\mathfrak{p}$ **が非連結の場合：**$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\mathfrak{p}k f)$ である．$\mathfrak{p}$ の連結成分の全体を $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ とし，$h_j = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\mathfrak{p}_j k f)$ $(j = 1, \ldots, m)$ と定める．そうすると，定理 5.2.9 と補題 5.2.4 により

$$(\Phi^* h)\nu = (\Phi^* h_1)\nu \vee \cdots \vee (\Phi^* h_m)\nu$$

が成り立つ．また，補題 5.6.29 と補題 5.6.30 により各 $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して

$$\begin{aligned} Jh = Ih = I(a\mathfrak{p}k f) &= Ia + I(\mathfrak{p}k) + If = Ia + 7 + If \\ &> Ia + 6 + If \geq Ia + I(\mathfrak{p}_j k) + If = I(a\mathfrak{p}_j k f) = Ih_j \geq Jh_j \end{aligned}$$

また補題 5.6.26 の条件 13, 14 により，$h \in P$ なら $h_j \in P$ なる $j \in \{1, \ldots, m\}$ があり，$h \in Q$ なら，任意の $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $h_j \in Q$ が成り立つ．従って，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．

3. $h' = a\mathbb{P}k f$ **で** $\mathbb{P}$ **に最大元が無い場合：**$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\mathbb{P}k f)$ である．

$$h_1 = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,(\leftarrow 0]k f) \qquad\qquad h_2 = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,\overline{0}k f)$$

と定める．そうすると $\mathbb{P} = (\leftarrow 0] \cup \bar{0}$ であるから，定理 5.2.9 と補題 5.2.4 により次の式が成り立つ．

$$(\Phi^* h)\nu = (\Phi^* h_1)\nu \vee (\Phi^* h_2)\nu$$

$\mathbb{P} = \overline{p}$ なる $p \in \mathbb{P}$ も $\mathbb{P} = (\leftarrow p]$ なる $p \in \mathbb{P}$ も無いから，補題 5.6.29 と補題 5.6.30 により

$$\begin{aligned}
Jh = Ih = I(a\,\mathbb{P}k\,f) = Ia + I(\mathbb{P}k) + If = Ia + 6 + If \\
> \begin{cases} Ia + 5 + If = Ia + I((\leftarrow 0]k) + If = I(a\,(\leftarrow 0]k\,f) = Ih_1 = Jh_1 \\ Ia + 4 + If = Ia + I(\bar{0}k) + If = I(a\,\bar{0}k\,f) = Ih_2 \geq Jh_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

また補題 5.6.26 の条件 15, 16 により，$h \in P$ なら h_1 または h_2 が P に属し，$h \in Q$ なら，h_1 と h_2 が Q に属す．従って，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．

4. $h' = a\,(p, q]k\,f$ $(p, q \in \mathbb{P})$，$q \neq \infty$ **の場合：** $h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,(p, q]k\,f)$ である．そこで $h_1 = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,(\leftarrow q]k\,f)$，$h_2 = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,\overline{p}k\,f)$ と定める．そうすると $(p, q] = (\leftarrow q] \cap \overline{p}$ であるから，定理 5.2.9 と補題 5.2.4 により

$$(\Phi^* h)\nu = (\Phi^* h_1)\nu \wedge (\Phi^* h_2)\nu$$

が成り立つ．$(p, q] = \bar{r}$ なる $r \in \mathbb{P}$ も $(p, q] = (\leftarrow r]$ なる $r \in \mathbb{P}$ も無いから，補題 5.6.29 と補題 5.6.30 により

$$\begin{aligned}
Jh = Ih = I(a\,(p, q]k\,f) = Ia + I((p, q]k) + If = Ia + 6 + If \\
> \begin{cases} Ia + 5 + If = Ia + I((\leftarrow 0]k) + If = I(a\,(\leftarrow q]k\,f) = Ih_1 = Jh_1 \\ Ia + 4 + If = Ia + I(\bar{0}k) + If = I(a\,\overline{p}k\,f) = Ih_2 \geq Jh_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

また補題 5.6.26 の条件 17, 18 により，$h \in P$ なら h_1 と h_2 が P に属し，$h \in Q$ なら，h_1 または h_2 が Q に属す．従って，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．

5. $h' = a\,(\leftarrow p]k\,f$ $(p \in \mathbb{P})$ **の場合：** なお，$\mathbb{P}$ に最大元 ∞ があれば $(\leftarrow \infty] = \mathbb{P}$ となるから，場合 3 で除外した $h' = a\,\mathbb{P}k\,f$ で $\mathbb{P}$ に最大元のある場合はこの場合 5 に含まれる．

$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,(\leftarrow p]k\,f)$ であり，補題 5.6.26 の条件 19, 20 により h は $\grave{h} = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,\overline{p}k\,f)$ と異値である．また，定理 5.2.8 により $h \asymp \grave{h}^\lozenge$ であるから，$(\Phi^* h)\nu \neq (\Phi^* \grave{h})\nu$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 と補題 5.6.30 により

$$\begin{aligned}
Jh = Ih = I(a\,(\leftarrow p]k\,f) = Ia + I\big((\leftarrow p]k\big) + If = Ia + 5 + If \\
> Ia + 4 + If = Ia + I(\overline{p}k) + If = I(a\,\overline{p}k\,f) = I\grave{h} \geq J\grave{h}
\end{aligned}$$

従って，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．

6. $h' = a\,\overline{p}k\,f \neq a\,\overline{p}\pi\mathrm{one}\triangle$ $(p \in \mathbb{P})$ **の場合：** なお，$\mathbb{P}$ に最大元 ∞ があれば $\overline{p} = (p, \infty]$ となるから，場合 4 で除外した $h' = a\,(p, \infty]k\,f$ なる場合のうち，$h' = a\,(p, \infty]\pi\mathrm{one}\triangle$ 以外の場合はこの場合 6 に含まれる．

$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(a\,\overline{p}k\,f)$ である．そこで，$\mathrm{Var}''_\varepsilon \neq \emptyset$ に留意して任意の $x \in \mathrm{Var}''_\varepsilon$ をとって，$\grave{h} = \big(a \sqcap \big(x\,\breve{o}k\,(a_i\,\breve{o}k_i)_i f\big)\,\Omega x\big)\,\overline{p}\pi\mathrm{one}\triangle$ と定める．そうすると，補題 5.6.26 の条件 21, 22 により $\grave{h}$ は h と同値である．また，補題 5.6.19 と同様にして $h \asymp \grave{h}$ を示すことができる．すなわち，$g = (a_i\,\breve{o}k_i)_i f$ と定める．そうすると $g \in A_{\{k\}}$ であって，定理 5.2.18 と定理 5.5.12 により

$$h \asymp a\,\overline{p}k\,g$$

が成り立つ．また，補題 5.6.11 により x が g に自由に現れないから，定理 5.5.17 により

$$a\,\overline{p}k\,g \asymp a\,\overline{p}\pi\,\big((x\,\breve{o}k\,g)\,\Omega x\big)\triangle$$

が成り立つ．また，問題 5.2.26 により

$$a\,\overline{p}\pi\,\big((x\,\breve{o}k\,g)\,\Omega x\big)\triangle \asymp \big(a \sqcap (x\,\breve{o}k\,g)\,\Omega x\big)\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$$

が成り立つ．これで $h \asymp \grave{h}$ が示された．また，補題 5.6.29 により

$$\begin{aligned} Jh = Ih &= Ia + I(\overline{p}k) + If = Ia + 4 + If = Ia + 4 + Ig \\ &> Ia + 3 + Ig = Ia + I(\sqcap) + Ig + I(\Omega x) + 1 = I\big(a \sqcap (x\,\breve{o}k\,g)\,\Omega x\big) + 1 = J\grave{h} \end{aligned}$$

従って，$h \in P$ なら $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^* h)\nu = 0$ が成り立つ．

7. $h' = a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ $(p \in \mathbb{P})$ **の場合：**なお，$\mathbb{P}$ に最大元 ∞ があれば $\overline{p} = (p, \infty]$ となるから，場合 4 でも場合 6 でも除外した $h' = a\,(p, \infty]\pi\,\mathrm{one}\triangle$ の場合はこの場合 7 に含まれる．

$h = h' = a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle$ である．そこで S の部分集合 X を次のように定める（補題 5.2.8 参照）．

$$X = \{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}$$

そうすると，問題 5.2.27 により次のことが成り立つ．

$$(\Phi^* h)\nu = 1 \iff p < |X|$$

まず $h \in P$ の場合を考える．この場合 p は $\mathbb{P}$ の最大元 ∞ とは異なる．$p = \infty$ であれば，$\overline{\infty}$ 律により $h \preccurlyeq_*$ が成り立ち，$h \in \alpha_n$ なる n があって $\preccurlyeq_*$ が付加律と置換律に従うから $\alpha_n \preccurlyeq_* \beta_n$ となって，$\alpha_n \to \beta_n$ が特異式であることに反するからである．他方で，p は $P \cup Q$ に現れる $\mathbb{P}$ の元の全体 $\mathbb{P}'$ に含まれ，従って p は $\mathbb{P}'$ の上限 $\acute{p}$ を超えない．$\acute{p} < \acute{o}$ または $\acute{o} = \infty$ であるから，$p < \acute{o}$ が成り立つ．従って $|X| = \acute{o}$ であれば，$p < |X|$，すなわち $(\Phi^* h)\nu = 1$ が成り立つ．そこで，$p \geq |X| \neq \acute{o}$ と仮定して以下矛盾を導く．まず，$|X| \neq \acute{o}$ との仮定と測値 $|X|$ の定義により，G の元 $b_1, \ldots, b_m$ と $\mathbb{P}$ の元 $q_1, \ldots, q_m$ で次の三条件をみたすものが存在する $(m \geq 0)$.

a. $X \subseteq \bigcup_{i=1}^m S^{b_i}$

b. $|X| = \sum_{i=1}^m q_i$

c. $b_i\,\overline{q_i}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in Q$ $(i = 1, \ldots, m)$

条件 b と $p \geq |X|$ との仮定により $p \geq \sum_{i=1}^m q_i$ であり，また $h = a\,\overline{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \in P$ の場合であって条件 c がみたされるから，補題 5.6.26 の条件 23 により，ある $x \in \mathrm{Var}'_\varepsilon$ に対して $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$ と $x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \cdots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle \in Q$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 により $Jh = Ia + 1 > Ia = I(x\,\breve{o}\pi\,a\triangle) = J(x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)$ が成り立つ．従って帰納法の仮定と $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in P$ であることにより，$\big(\Phi^*(x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\big)\nu = 1$ が成り立つ．補題 5.6.28 により $\big(\Phi^*(x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\big)\nu = (\Phi^* x)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = x\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle$ であるから，補題 5.2.10 により $(\Phi^* a)\nu \ni x$，すなわち $x \in X$ が成り立つ．他方で，$x\,\breve{o}\pi\,b_i\triangle \in Q$ であることと S^{b_i} の定義により $x \notin S^{b_i}$ が成り立つ $(i = 1, \ldots, m)$．しかしこれは条件 a に矛盾する．

次に $h \in Q$ の場合を考える．この場合 $X \subseteq S^a$ が成り立つ．なぜなら $s \in S - S^a$ であれば，S^a の定義により $s\,\breve{o}\pi\,a\triangle \in Q$ であり，また $Jh = Ia + 1 > Ia = I(s\,\breve{o}\pi\,a\triangle) = J(s\,\breve{o}\pi\,a\triangle)$ であるか

ら，帰納法の仮定により $\bigl(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\bigr)\nu = 0$，すなわち $(\Phi^*a)\nu \not\ni s$，すなわち $s \in S - X$ が成り立つからである．このことと $h = a\,\overline{p}\pi\mathrm{one}\triangle \in Q$ の場合であることにより $X\,R\,p$ であるから，測値 $|X|$ の定義により $|X| \le p$，すなわち $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つ．

以上で h' が (5.6.1) の $a\,\lambda k\,f$ $(\lambda \in \mathfrak{Q})$ の場合が済んだ．

8. $h' = f \wedge g$，$f \vee g$，$f \Rightarrow g$ **の場合**：三つの算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ の任意の一つを記号 $*$ で表す．$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,l}(f * g)$ である．l 次の任意の置換 ρ に対して，補題 5.6.26 の条件 1, 2 により h が $h_\rho = (a_{\rho i}\,\breve{o}k_{\rho i})_{i=1,\ldots,l}(f * g)$ と同値であり，定理 5.2.4 系 2 により $(\Phi^*h)\nu = (\Phi^*h_\rho)\nu$ が成り立つから，$K_f - K_g = \{k_1, \ldots, k_\nu\}$，$K_f \cap K_g = \{k_{\nu+1}, \ldots, k_m\}$，$K_g - K_f = \{k_{m+1}, \ldots, k_l\}$ と仮定していい $(\nu \le m \le l)$．こう仮定して $h_f = (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=1,\ldots,m}f$，$h_g = (a_i\,\breve{o}k_i)_{i=\nu+1,\ldots,l}g$ と定める．そうすると，定理 5.2.5 により

$$(\Phi^*h)\nu = (\Phi^*h_f)\nu * (\Phi^*h_g)\nu$$

が成り立つ．また，補題 5.6.26 の条件 3 – 8 により次のことが成り立つ．

(8-1) $*$ が $\wedge$ のときは，$h \in P$ なら $h_f, h_g \in P$ で，$h \in Q$ なら $h_f \in Q$ または $h_g \in Q$

(8-2) $*$ が $\vee$ のときは，$h \in P$ なら $h_f \in P$ または $h_g \in P$ で，$h \in Q$ なら $h_f, h_g \in Q$

(8-3) $*$ が $\Rightarrow$ のときは，$h \in P$ なら $h_f \in Q$ または $h_g \in P$ で，$h \in Q$ なら $h_f \in P$，$h_g \in Q$

また，補題 5.6.29 と補題 5.6.30 により

$$Jh = Ih = If + I* + Ig = If + 1 + Ig > \begin{cases} If = Ih_f \ge Jh_f \\ Ig = Ih_g \ge Jh_g \end{cases}$$

が成り立つ．従って，$h \in P$ なら $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つ．

9. $h' = f^\Diamond$ **の場合**：$h = (a_i\,\breve{o}k_i)_i(f^\Diamond)$ であり，補題 5.6.26 の条件 9, 10 により h は $\grave{h} = (a_i\,\breve{o}k_i)_i f$ と異値である．また，定理 5.2.4 系 4 により $h \asymp \grave{h}^\Diamond$，従って $(\Phi^*h)\nu \ne (\Phi^*\grave{h})\nu$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 と補題 5.6.30 により $Jh = Ih = If + I\Diamond = If + 1 > If = I\grave{h} \ge J\grave{h}$．従って，$h \in P$ なら $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つ．

以上で h' が (5.6.1) の $c\triangle$ 以外の場合が済んだ．

10. $h' = (a \sqcap b)\triangle$ **の場合**：$l = 1$，$k_1 = \pi$ であり，$c = a_1$ と定めれば $h = c\,\breve{o}\pi(a \sqcap b)\triangle$ である．そこで $h_a = c\,\breve{o}\pi\,a\triangle$，$h_b = c\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ と定める．そうすると，問題 5.2.11 と定理 5.2.5 により

$$(\Phi^*h)\nu = (\Phi^*h_a)\nu \wedge (\Phi^*h_b)\nu$$

が成り立つ．また，補題 5.6.26 の条件 25, 26 により，$h \in P$ なら $h_a, h_b \in P$ が成り立ち，$h \in Q$ なら，$h_a \in Q$ または $h_b \in Q$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 により

$$Jh = Ih = Ia + I\sqcap + Ib = Ia + 1 + Ib > \begin{cases} Ia = Ih_a = Jh_a \\ Ib = Ih_b = Jh_b \end{cases}$$

従って，$h \in P$ なら $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つ．

11. $h' = (a \sqcup b)\triangle$ **の場合**：$l = 1$，$k_1 = \pi$ であり，$c = a_1$ と定めれば $h = c\,\breve{o}\pi(a \sqcup b)\triangle$ である．そこで $h_a = c\,\breve{o}\pi\,a\triangle$，$h_b = c\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ と定める．そうすると，問題 5.2.11 と定理 5.2.5 により

$$(\Phi^*h)\nu = (\Phi^*h_a)\nu \vee (\Phi^*h_b)\nu$$

が成り立つ．また，補題 5.6.26 の条件 27, 28 により，$h \in P$ なら $h_a \in P$ または $h_b \in P$ が成り立ち，$h \in Q$ なら，$h_a, h_b \in Q$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 により

$$Jh = Ih = Ia + I\sqcup + Ib = Ia + 1 + Ib > \begin{cases} Ia = Ih_a = Jh_a \\ Ib = Ih_b = Jh_b \end{cases}$$

従って，$h \in P$ なら $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つ．

12. $h' = a^{\square}\triangle$ **の場合：** $l = 1$，$k_1 = \pi$ であり，$b = a_1$ と定めれば $h = b\,\breve{o}\pi\,a^{\square}\triangle$ であり，補題 5.6.26 の条件 29, 30 により h は $\grave{h} = b\,\breve{o}\pi\,a\triangle$ と異値である．また，問題 5.2.11 と定理 5.2.4 系 4 により $h \asymp \grave{h}^{\Diamond}$，従って $(\Phi^*h)\nu \neq (\Phi^*\grave{h})\nu$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 により

$$Jh = Ih = Ia + I\square = Ia + 1 > Ia = I\grave{h} = J\grave{h}$$

従って，$h \in P$ なら $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つ．

13. $h' = (f\,\Omega x)\triangle$ **の場合：** $l = 1$，$k_1 = \pi$ であり，$a = a_1$ と定めれば $h = a\,\breve{o}\pi(f\,\Omega x)\triangle$ であり，補題 5.6.26 の条件 31, 32 により h は $\grave{h} = f(x/a)$ と同値である．また，補題 5.6.28 により

$$(\Phi^*h)\nu = (\Phi^*a)\nu\,\breve{o}\pi\big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu\triangle = a\,\breve{o}\pi\big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu\triangle$$

が成り立つから，補題 5.2.10 と (5.3.2) により

$$(\Phi^*h)\nu = 1 \iff \big((\Phi^*f)\,\Omega x\big)\nu \ni a \iff (\Phi^*f)\big((x/a)\nu\big) = 1$$

が成り立つ．また，補題 5.6.11 により f において x が a から自由であるから，補題 5.6.28 と代入値換定理 4.4.2 により

$$(\Phi^*f)\big((x/a)\nu\big) = (\Phi^*f)\big((x/(\Phi^*a)\nu)\nu\big) = \big(\Phi^*f(x/a)\big)\nu = (\Phi^*\grave{h})\nu$$

従って $(\Phi^*h)\nu = (\Phi^*\grave{h})\nu$ が成り立つ．また，補題 5.6.29 と補題 5.6.30 により

$$Jh = Ih = If + I(\Omega x) = If + 1 > If = I\big(f(x/a)\big) = I\grave{h} \geq J\grave{h}$$

従って，$h \in P$ なら $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立ち，$h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つ．　**終**

以上で h' が (5.6.1) と (5.6.2) のすべての場合について $h \in P$ なら $(\Phi^*h)\nu = 1$ が成り立って $h \in Q$ なら $(\Phi^*h)\nu = 0$ が成り立つことを示したので，補題 5.6.27 の証明が完成した．そしてこれで，$(\vec{R}, \vec{D})$ が $\vec{\mathcal{G}}$ に関して弱完全であることが証明された．

5.6.2　用元についての完全性定理

§ 第 5.6.1 項では，用論対 $(H, \mathcal{G})$ に対して注意 3.30.6 の手順 1 を行ない，$\vec{C} = [\vec{D}]_{\vec{R}}$ なる結果を得た．従って定理 3.30.13 により直ちに次の定理が得られる．

定理 5.6.1 **H 上の $\mathcal{G}$ 健全な論拠 (R, D) に関する生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ が H 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ に関するブール律と第 5.6.1.2 条に記した片格出律から $\forall x$ 入律までの二十七法則に従えば，(R, D) は $\mathcal{G}$ 完全である．**

そこで以下，用論対 $(H,\mathcal{G})$ に対して注意 3.30.6 の手順 2 を行なって定理 5.6.1 の条件をみたす H 上の論拠 (R,D) を一組み提示し，それにより実は，R を modus ponens に取り換えて得られる論拠が $\mathcal{G}$ 完全であることを示す.

まず，H^*,H 間の五つの関係 $\wp,\&,\sharp,\flat,\forall$ を次のように定める．$\wp$ が modus ponens である．

$$\begin{aligned}
\wp &= \frac{f \quad f\Rightarrow g}{g} && (f,g\in H)\\
\& &= \frac{f \quad g}{f\wedge g} && (f,g\in H)\\
\sharp &= \frac{f}{a\,\breve{o}k\,f} && (f\in H,\ a\in A_\varepsilon,\ k\in K_f)\\
\flat &= \frac{x\,\breve{o}k\,f}{f} && (f\in H,\ x\in \mathrm{Var}_\varepsilon,\ k\in K_f,\ x\text{ は } f \text{ に自由に現れない})\\
\forall &= \frac{f}{\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle} && (f\in A_\emptyset,\ x\in \mathrm{Var}_\varepsilon)
\end{aligned}$$

そして，$\wp$ と $\&$ の和を R と定める．

$$R=\wp\cup\&$$

次に，以下に列挙する H の元の全体を E で表し，E の界 $(H,\wp\cup\&\cup\sharp\cup\flat\cup\forall)$ における界包を D で表す．従って，D はこの界における E の n 圏 E_n $(n=0,1,\ldots)$ の和であって，E_n は次のように帰納的に記述される．すなわちまず $E_0=E$ である．そして $n\ge 1$ のときは，E_n は次のような元の全体である．

$$\begin{aligned}
&g && (g\in H,\ f\in E_{n_1},\ f\Rightarrow g\in E_{n_2},\ n_1+n_2=n-1)\\
&f\wedge g && (f\in E_{n_1},\ g\in E_{n_2},\ n_1+n_2=n-1)\\
&a\,\breve{o}k\,f && (f\in E_{n-1},\ a\in A_\varepsilon,\ k\in K_f)\\
&f && (f\in H,\ x\in \mathrm{Var}_\varepsilon,\ k\in K_f,\ x\text{ は } f \text{ に自由に現れない},\ x\,\breve{o}k\,f\in E_{n-1})\\
&\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle && (f\in E_{n-1}\cap A_\emptyset,\ x\in \mathrm{Var}_\varepsilon)
\end{aligned}$$

E は以下に記すブール元から $\forall x$ 入元までの二十五種の元の全体である（ただし書きに注意）.

$$\left.\begin{aligned}
&f^\Diamond\vee f\\
&(f\wedge g)\Rightarrow f\\
&(f\wedge g)\Rightarrow g\\
&f\Rightarrow(f\vee g)\\
&g\Rightarrow(f\vee g)\\
&(f^\Diamond\vee g)\Rightarrow(f\Rightarrow g)\\
&\big((f\Rightarrow h)\wedge(g\Rightarrow h)\big)\Rightarrow\big((f\vee g)\Rightarrow h\big)\\
&\big((h\Rightarrow f)\wedge(h\Rightarrow g)\big)\Rightarrow\big(h\Rightarrow(f\wedge g)\big)\\
&\big((h\Rightarrow f)\wedge\big(h\Rightarrow(f\Rightarrow g)\big)\big)\Rightarrow(h\Rightarrow g)
\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{(ブール元)}$$

ただし以上のブール元においては $f,g,h\in H$ とする.

$$a\,\breve{o}\pi\,a\triangle \qquad \textbf{(同一元)}$$

ただし $a\in A_\varepsilon$ とする.

$$(a\,\overline{\infty}\pi\,\mathrm{one}\triangle)^\Diamond \qquad \textbf{(}\overline{\infty}\textbf{ 元)}$$

ただし $a \in G$ とし，∞ は $\mathbb{P}$ の最大元とし，∞ が存在する場合にのみこの元を E に入れる．

$$a\,\lambda k\,(b\,\breve{o} l\,f) \Leftrightarrow b\,\breve{o} l\,(a\,\lambda k\,f) \tag{交換元}$$

ただし $a \in G$, $b \in A_\varepsilon$, $f \in H$, $k, l \in K_f$, $k \neq l$, $\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q}$ とし，$\lambda = \breve{o}$ の場合は $a \in A_\varepsilon$ とする．また記号 $\Leftrightarrow$ は，$a\,\lambda k\,(b\,\breve{o} l\,f) \Rightarrow b\,\breve{o} l\,(a\,\lambda k\,f)$ とこれを左右反転した元 $b\,\breve{o} l\,(a\,\lambda k\,f) \Rightarrow a\,\lambda k\,(b\,\breve{o} l\,f)$ をまとめて記すための工夫であり，以下でも同様である．

$$(a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,l}(f \wedge g) \Leftrightarrow \big((a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,m} f \wedge (a_i\,\breve{o} k_i)_{i=n+1,\dots,l} g\big) \tag{$\wedge$ 元}$$

$$(a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,l}(f \vee g) \Leftrightarrow \big((a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,m} f \vee (a_i\,\breve{o} k_i)_{i=n+1,\dots,l} g\big) \tag{$\vee$ 元}$$

$$(a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,l}(f \Rightarrow g) \Leftrightarrow \big((a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,m} f \Rightarrow (a_i\,\breve{o} k_i)_{i=n+1,\dots,l} g\big) \tag{$\Rightarrow$ 元}$$

ただし $\wedge$ 元・$\vee$ 元・$\Rightarrow$ 元において，$a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \dots, l)$, $f, g \in H$ とし，$k_1, \dots, k_n$ を $K_f - K_g$ の相異なる元とし，$k_{n+1}, \dots, k_m$ を $K_f \cap K_g$ の相異なる元とし，$k_{m+1}, \dots, k_l$ を $K_g - K_f$ の相異なる元とする $(0 \leq n \leq m \leq l)$.

$$\big((a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,n}(f^\Diamond)\big) \Leftrightarrow \big((a_i\,\breve{o} k_i)_{i=1,\dots,n} f\big)^\Diamond \tag{$\Diamond$ 元}$$

ただし $a_i \in A_\varepsilon$ $(i = 1, \dots, n)$, $f \in H$ とし，$k_1, \dots, k_n$ を K_f の相異なる元とする．

$$a\,\neg\lambda k\,f \Leftrightarrow a\,\lambda k\,f^\Diamond \tag{$\neg$ 元}$$

$$a\,\lambda^\circ k\,f \Leftrightarrow (a\,\lambda k\,f)^\Diamond \tag{$\circ$ 元}$$

ただし $\neg$ 元と $\circ$ 元において，$a \in G$, $f \in H$, $k \in K_f$, $\lambda \in \mathfrak{Q}$ とする．

$$a\,(\lambda \cap \mu) k\,f \Leftrightarrow (a\,\lambda k\,f \wedge a\,\mu k\,f) \tag{$\cap$ 元}$$

$$a\,(\lambda \cup \mu) k\,f \Leftrightarrow (a\,\lambda k\,f \vee a\,\mu k\,f) \tag{$\cup$ 元}$$

ただし $\cap$ 元と $\cup$ 元において，$a \in G$, $f \in H$, $k \in K_f$ とし，$\lambda, \mu \in \neg\mathfrak{P}$ または $\lambda, \mu \in \mathfrak{P}$ とする．

$$a\,\lambda k\,f \Leftrightarrow a\,\lambda\pi\,\big((x\,\breve{o} k\,f)\,\Omega x\big)\triangle \tag{$\mathfrak{Q}$ 元}$$

ただし $a \in G$, $f \in H$, $K_f = \{k\}$, $\lambda \in \mathfrak{Q}$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x が f に自由に現れないとする．

$$a\,\mathfrak{p}\pi\,b\triangle \Leftrightarrow (a \sqcap b)\,\mathfrak{p}\pi\,\mathrm{one}\triangle \tag{$\mathfrak{P}$ 元}$$

ただし $a, b \in G$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ とする．

$$\big(\mathrm{one}\,\forall\pi\,\big((f \Rightarrow g)\,\Omega x\big)\triangle\big) \Rightarrow \big(f \Rightarrow \mathrm{one}\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle\big) \tag{$\forall x, \Rightarrow$ 元}$$

ただし $f, g \in A_\emptyset$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x は f に自由に現れないものとする．

$$\big(\mathrm{one}\,\forall\pi\,\big(\big((x\,\breve{o}\pi\,a\triangle) \Rightarrow (x\,\breve{o} k\,f)\big)\,\Omega x\triangle\big)\big) \Rightarrow a\,\forall k\,f \tag{$\forall$ 元}$$

ただし $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$, $a \in G$, $f \in H$, $K_f = \{k\}$ とし，x が a, f に自由に現れないとする．

$$(a\,\forall\pi\,b\triangle \wedge a\,\overline{p} k\,f) \Rightarrow b\,\overline{p} k\,f \tag{$\forall\pi, (\cdot\!\rightarrow)$ 元}$$

ただし $a, b \in G$, $f \in H$, $k \in K_f$, $p \in \mathbb{P}$ とする．

$$(a \sqcup b)\,\overline{p + q} k\,f \Rightarrow (a\,\overline{p} k\,f \vee b\,\overline{q} k\,f) \tag{$\sqcup, +$ 元}$$

ただし $a, b \in G$, $p, q \in \mathbb{P}$, $f \in H$, $k \in K_f$ とする．

$$(\mathrm{one}^{\square}\,\overline{p}k\,f)^{\lozenge} \tag{one$^{\square}$ 元}$$

ただし $p \in \mathbb{P}$, $f \in H$, $k \in K_f$ とする．

$$b\,\breve{o}\pi\,a\triangle \Rightarrow a\,\exists\pi\,\mathrm{one}\triangle \tag{$\exists$ 元}$$

ただし $a \in G$, $b \in A_\varepsilon$ とする．

$$(a \sqcap b)\triangle \Leftrightarrow (a\triangle \wedge b\triangle) \tag{$\sqcap$ 元}$$

$$(a \sqcup b)\triangle \Leftrightarrow (a\triangle \vee b\triangle) \tag{$\sqcup$ 元}$$

$$(a^{\square})\triangle \Leftrightarrow (a\triangle)^{\lozenge} \tag{$\square$ 元}$$

ただし ⊓ 元・⊔ 元・□ 元において $a, b \in G$ とする．

$$a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \Leftrightarrow f(x/a) \tag{Ωx 元}$$

ただし $a \in A_\varepsilon$, $f \in A_\emptyset$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とし，x が f において a から自由であるとする．

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \Rightarrow f \tag{$\forall x$ 入元}$$

ただし $f \in A_\emptyset$, $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ とする．
　以上のように定めると次の定理が成り立つ．

定理 5.6.2 H **上の論拠** $(\wp, D)$ **は** $\mathcal{G}$ **完全であり，**D **は用論対** $(H, \mathcal{G})$ **の核に等しい．**

証明　例 3.30.1 により $\wp$ と & は用論対 $(H, \mathcal{G})$ の論理であり，従って定理 3.26.4 により R もそうである．また，問題 3.31.1 と問題 3.30.38 によりブール元は $(H, \mathcal{G})$ の核 C に属し，ブール元以外の E の元は第 5.6.1.1 条で説明したことから C に属す．さらに，♯ と ♭ と ∀ は，定理 5.5.12 と定理 5.5.16 系 3 により $(H, \mathcal{G})$ の弱論理である．従って D は C に含まれる．以上によりつまり，H 上の論拠 (R, D) は $\mathcal{G}$ 健全である．次に生成関係 $\preccurlyeq_{R,D}$ は，D がブール元をすべて含むから定理 3.31.1 系 2 によりブール律に従い，$[D]_R = D$ が同一元以下の E の元を含み ♯ と ♭ で閉じているから，片格出律から ∀x 入律までの二十七法則に従う．これで (R, D) が定理 5.6.1 の条件をみたすことが分かったから，(R, D) は $\mathcal{G}$ 完全である．従って定理 3.28.2 により (R, D) は $\mathcal{G}$ に関して弱完全，すなわち $C = [D]_R$ であるが，$[D]_R = D$ であったから $C = D$ となる．従ってさらに定理 3.30.22 系により，$\wp, D$ が $\mathcal{G}$ 完全である．

問題 5.6.1 E の定義においてブール元をルカシェヴィチ元で置き換えて D の定義において $\wp \cup \&$ を $\wp$ で置き換えても，定理 5.6.2 と同じ結論が成り立つ．

略解　定理 3.31.2 系 2 の代わりに定理 3.31.3 を使って同様にすればいい．

5.7　第三種定理と実例存在定理

　$ **この節を通じて，**$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ **を単相格論理系とし，その他の記号の意味もこれまで通りとする．**特に，$\mathbb{P}$ を A の限量系とする．また，$(H, \mathcal{G})$ と $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ を $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ の定める用論対と文論対とし，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値の組みの全体を $\mathfrak{V}$ で表す．ここでは，高岡洋介氏による標題の二定理を紹介する．

5.7.1　第三種定理

§ ここでは，高岡洋介氏による次の定理を証明する．これは格論理学の際立った特色の一つを示す．

定理 5.7.1 (第三種定理) 限量系 $\mathbb{P}$ が整列集合でないかまたは $\mathbb{P}$ に最大元が無ければ，$(H, \mathcal{G})$ も $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ も第三種である！

注意 5.7.1 注意 4.7.2 に記したことから，$X \in \mathcal{P}(A_\emptyset)$ に $\mathfrak{V}$ 実例が存在すれば X は $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ の無矛盾集合であるが，この逆は真ではなく，$(A_\emptyset, \mathcal{F})$ のどの無矛盾集合にも $\mathfrak{V}$ 実例が存在するためには，$(A_\emptyset, \mathcal{F})$ が第二種以下であることが必要十分である．従って定理 5.7.1 の仮定の下では，$(A_\emptyset, \mathcal{F})$ の無矛盾集合 X で $\mathfrak{V}$ 実例の無いものが存在する．問題 5.4.1 により $(H, \mathcal{G})$ が $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ の拡大であるから，X は定理 3.30.26 と定理 3.30.9 により $(H, \mathcal{G})$ の無矛盾集合でもあり，問題 5.4.1 により X に $\mathfrak{W}$ 実例は無い．

証明　上の注意または問題 3.30.16 と問題 3.26.35 によれば，$(A_\emptyset, \mathcal{F})$ が第三種であることを示せばいい．それには，定理 3.30.30 と注意 3.30.12 によれば，$A_\emptyset$ の部分集合で $\mathcal{F}$ 実例の有るものの全体 $\bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(\varphi^{-1}1)$ が有限的でないことを示せばいい．この集合を $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ で表す

$\mathbb{P}$ が整列集合でない場合には，問題 3.9.31 と注意 3.9.1 により，$\mathcal{P}\mathbb{P} \times \mathcal{P}\mathbb{P}$ の元 (P, Q) で三条件

1. 任意の $(p, q) \in P \times Q$ が $p < q$ をみたす
2. $Q \neq \emptyset$ であって $\min Q$ は存在しない
3. $\mathbb{P} = P \cup Q$

をみたすものが有る．他方，$\mathbb{P}$ が整列集合であるが最大元が無い場合には，$(P, Q) = (\mathbb{P}, \emptyset)$ と定める．この場合には，条件 1, 3 はやはり自明にみたされるが，条件 2 に代わって条件

4. $Q = \emptyset$ であって $\max P$ は存在しない

がみたされる．これらの条件により $0 \notin Q = \bigcap_{p \in P}(p{\to})$ が成り立つ．そこで，任意の閉全包元 one と任意の $a \in A_\varepsilon$ を使って，$A_\emptyset$ の部分集合 M を次のように定める．

$$M = \{a\,(p{\to})\pi\,\mathrm{one}\triangle \mid p \in P\} \cup \{a\,({\leftarrow}q]\pi\,\mathrm{one}\triangle \mid q \in Q\}$$

そして，$\mathcal{P}'M \subseteq \overleftarrow{\mathcal{F}}$ であるが $M \notin \overleftarrow{\mathcal{F}}$ であることを示そう．そうすれば，問題 3.18.3 により $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ は有限的でない．

まず $M \notin \overleftarrow{\mathcal{F}}$ を背理法で示すために，$M \subseteq \varphi^{-1}1$ なる $\varphi \in \mathcal{F}$ が有ると仮定する．そうすると $\mathcal{F}$ の定義により，A から単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ への定付値 Φ と変付値 ν で $\varphi = \Phi^\nu$ なるものが有って $\varphi^{-1}1 = \{f \in A_\emptyset \mid (\Phi^* f)\nu = 1\}$ が成り立つ．そこで，W の基底を S で表し，$a \in A_\varepsilon$ であったことに留意して $S^a = \{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}$ と定め，S^a の $\mathbb{P}$ 測値を r で表す．そうすると，$M \subseteq \varphi^{-1}1$ なることと補題 5.2.10 により，任意の $p \in P$ に対して $p < r$ が成り立つと共に，任意の $q \in Q$ に対して $r \leq q$ が成り立つ．しかしそうすると，$Q = \bigcap_{p \in P}(p{\to})$ であったから $r \in Q$，従って $r = \min Q$ となり，これは条件 2 または 4 がみたされることに矛盾する．これで $M \notin \overleftarrow{\mathcal{F}}$ が示された．

次に $\mathcal{P}'M \subseteq \overleftarrow{\mathcal{F}}$ を証明するために，任意の $N \in \mathcal{P}'M - \{\emptyset\}$ をとって $N \subseteq \varphi^{-1}1$ なる $\varphi \in \mathcal{F}$ が有ることを示そう．そのために，

$$P_N = \{p \in P \mid a\,(p{\to})\pi\,\mathrm{one}\triangle \in N\} \qquad Q_N = \{q \in Q \mid a\,({\leftarrow}q]\pi\,\mathrm{one}\triangle \in N\}$$

と定める．そうすると

$$\mathrm{N}=\left\{\mathrm{a}\,(\mathrm{p}\!\to)\pi\,\mathrm{one}\triangle \;\middle|\; \mathrm{p}\in \mathrm{P}_\mathrm{N}\right\}\cup\left\{\mathrm{a}\,(\leftarrow\!\mathrm{q}]\pi\,\mathrm{one}\triangle \;\middle|\; \mathrm{q}\in \mathrm{Q}_\mathrm{N}\right\}$$

が成り立ち，$\mathrm{P_N}$ も $\mathrm{Q_N}$ も有限集合であって，どちらかは空でない．そこで，$\mathrm{Q_N}\neq\emptyset$ の場合には $\mathrm{r}=\min\mathrm{Q_N}$ と定める（条件 2 により $\mathrm{r}<\min\mathrm{Q_N}$ なる $\mathrm{r}\in\mathrm{Q}$ が存在するので，そういう r をとってもいい．問題 5.7.2 の証明参照）．他方 $\mathrm{P_N}\neq\emptyset=\mathrm{Q_N}$ の場合には，$\max\mathrm{P_N}<\mathrm{r}$ なる $\mathrm{r}\in\mathbb{P}$ をとる．そういう r は有る．なぜなら，$\mathrm{Q}\neq\emptyset$ なら任意の $\mathrm{r}\in\mathrm{Q}$ が条件 1 により $\max\mathrm{P_N}<\mathrm{r}$ をみたし，$\mathrm{Q}=\emptyset$ なら条件 4 により $\max\mathrm{P}$ が無いからである．こうとった r は，$0\notin\mathrm{Q}$ であったこと等により $0<\mathrm{r}$ をみたし，条件 1 等により任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P_N}$ に対して $\mathrm{p}<\mathrm{r}$ をみたし，任意の $\mathrm{q}\in\mathrm{Q_N}$ に対して $\mathrm{r}\leq\mathrm{q}$ をみたす（$\mathrm{Q_N}\neq\emptyset$ の場合に $\mathrm{r}<\min\mathrm{Q_N}$ なるようとっておけば $\mathrm{r}<\mathrm{q}$ をみたす）．

そこで注意 5.2.3 の手順で，特別な単相格世界 $\mathcal{W}\in\mathcal{W}$ を次のように作る．まず，$\mathrm{T}_{\mathfrak{F}}$ と同類の汎代数系 $\mathrm{S}\ (\neq\emptyset)$ として A_ε をとる．次に，S 上の反射的関係 ∃ を任意にとる．次に，S 上の $\mathbb{P}$ 測度 $|\mathrm{X}|$ を，$0<\mathrm{r}$ に留意して問題 3.32.30 によって

$$|\mathrm{X}|=\begin{cases}0 & \cdots \quad \mathrm{X}=\emptyset\text{ のとき}\\ \mathrm{r} & \cdots \quad \mathrm{X}\neq\emptyset\text{ のとき}\end{cases}$$

と定める．注意 5.2.3 によればこれで，S を基底とし ∃ を基本関係とし $|\mathrm{X}|$ を測度とする単相格世界 $\mathcal{W}\in\mathcal{W}$ が作れた．

そこで，A から $\mathcal{W}$ への定付値 Φ と変付値 ν を任意に定め，$\mathcal{F}$ の元 φ を $\varphi=\Phi^\nu$ と定め，さらに，$\mathrm{a}\in\mathrm{A}_\varepsilon$ であったことに留意して $\mathrm{S^a}=\{\mathrm{s}\in\mathrm{S}\mid(\Phi^*\mathrm{a})\nu\ni\mathrm{s}\}$ と定める．そうすると $(\Phi^*\mathrm{a})\nu\in\mathrm{S^a}$ であるから，測度の定義により $|\mathrm{S^a}|=\mathrm{r}$ が成り立つ．従って r のとり方により，任意の $\mathrm{p}\in\mathrm{P_N}$ に対して $\mathrm{p}<|\mathrm{S^a}|$ が成り立ち，任意の $\mathrm{q}\in\mathrm{Q_N}$ に対して $|\mathrm{S^a}|\leq\mathrm{q}$ が成り立つ．このことは，補題 5.2.10 によれば，$\mathrm{N}\subseteq\{\mathrm{f}\in\mathrm{A}_\emptyset\mid(\Phi^*\mathrm{f})\nu=1\}$ なることを，つまり $\mathrm{N}\subseteq\varphi^{-1}1$ なることを示す．これで $\mathcal{P}'\mathrm{M}\subseteq\overleftarrow{\mathcal{F}}$ が証明された．

問題 5.7.1　定理 5.7.1 の証明における M は，用論対 $(\mathrm{H},\mathcal{G})$ と文論対 $(\mathrm{A}_\emptyset,\mathcal{F})$ の無矛盾集合ではあるが，その $\mathfrak{W}$ 実例も $\mathfrak{V}$ 実例も存在しない．

略解　$\mathcal{P}'\mathrm{M}\subseteq\overleftarrow{\mathcal{F}}$ であったから，定理 3.30.26 により M は $(\mathrm{A}_\emptyset,\mathcal{F})$ の無矛盾集合である．後は $\mathrm{M}\notin\overleftarrow{\mathcal{F}}$ なることと注意 5.7.1 による．

問題 5.7.2　$(\mathrm{A},\mathrm{T},\sigma,\mathrm{Prm})$ において正の限量子系 $\mathfrak{P}$ が区間包の場合，限量系 $\mathbb{P}$ のある空でない部分集合に最大元が無ければ，$(\mathrm{H},\mathcal{G})$ も $(\mathrm{A}_\emptyset,\mathcal{F})$ も第三種である．

注意 5.7.2 $\mathbb{P}$ のある空でない部分集合に最大元が無いという条件は，定理 5.7.1 における $\mathbb{P}$ が整列集合でないという条件と双対を成すと共に，$\mathbb{P}$ に最大元が無いという条件の拡張である．

略解　注意 3.9.1 により，$\mathcal{P}\mathbb{P}\times\mathcal{P}\mathbb{P}$ の元 (P,Q) で

1. 任意の $(\mathrm{p},\mathrm{q})\in\mathrm{P}\times\mathrm{Q}$ が $\mathrm{p}<\mathrm{q}$ をみたす
2. $\mathrm{P}\neq\emptyset$ であって $\max\mathrm{P}$ は存在しない
3. $\mathbb{P}=\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}$

なる三条件をみたすものが有って $P \neq \{0\}$ が成り立つ．そこで，$A_\emptyset$ の部分集合 M を

$$M = \{\mathfrak{a}\,[p{\to})\pi\mathrm{one}\triangle \mid p \in P\} \cup \{\mathfrak{a}\,({\leftarrow}q)\pi\mathrm{one}\triangle \mid q \in Q\}$$

と定める．そうすると，定理 5.7.1 と同様に $M \notin \overleftarrow{\mathcal{F}}$ が示される．また，各 $N \in \mathcal{P}'M$ に応じて

$$P_N = \{p \in P \mid \mathfrak{a}\,[p{\to})\pi\mathrm{one}\triangle \in N\} \qquad Q_N = \{q \in Q \mid \mathfrak{a}\,({\leftarrow}q)\pi\mathrm{one}\triangle \in N\}$$

と定め，$P_N \neq \emptyset$ の場合は $\max P_N < r \in P$ なる r をとり，$P_N = \emptyset$ の場合は $0 < r \in P$ なる r をとって，後は定理 5.7.1 の証明と同様にすれば，$N \in \overleftarrow{\mathcal{F}}$ が示される．

5.7.2　実例存在定理

§ ここでは，用論対 $(H, \mathcal{G})$ と文論対 $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ の特性法則を定理 3.30.15 によって求めることに関わる標記の定理を証明する．そこで，**この項を通じて次のことを仮定する．**

a. 正の限量子系 $\mathfrak{P}$ は限量系 $\mathbb{P}$ の偏区間包である．

b. 体元の全体 G は高々可算の集合である．

c. 格集合 K は有限集合である．

定理 5.7.2 H^* **上の関係** $\preccurlyeq_*$ **が** $(H, \mathcal{G})$ **の恒真関係** $\preccurlyeq$ **に含まれ，**$\preccurlyeq_*$ **とその対称核** $\asymp_*$ **が H 上の算法** $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ **に関するブール律と第 5.6.1.2 条に記した片格出律から** $\forall x$ **入律までの二十七法則に従うものとする．また，**(X, Y) **は** $\preccurlyeq_*$ **による H の切断であって次の二条件をみたすものとする．**

1. $X \cup Y$ **に属す用元に自由に現れない** Var_ε **の元が可算個ある．**

2. $X \cup Y$ **に現れる** $\mathbb{P}$ **の元（この意味は補題 5.6.25 の直前に定めた）は有限個である．**

このとき，(X, Y) **に** $\mathcal{G}$ **実例が存在する．**

定理 5.7.2 の言うブール律と二十七法則を合わせた法則は，すなわち第 5.6.1.1 条で定めた生成的法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ である．そこで示した通り $\vec{R}$ は，用論対 $(H, \mathcal{G})$ に随伴する式論対と弱同値な論対 $(\vec{H}, \vec{\mathcal{G}})$ の弱論理であり，$\vec{D}$ は $(H, \mathcal{G})$ の恒真式である．つまり $\preccurlyeq$ は法則 $(\vec{R}, \vec{D})$ に従う．そこで，条件 a, b, c に加えて

d. Var_ε は可算集合である．

という仮定を設けたとする．そうすると，$\preccurlyeq_*$ による H の有限な切断 (X, Y) はすべて定理 5.7.2 の条件 1, 2 をみたすから，(X, Y) に $\mathcal{G}$ 実例が存在する．従って定理 3.30.15 により，$(\vec{R}, \vec{D})$ が $(H, \mathcal{G})$ の特性法則であることが分かる．

5.8　一階述語論理系の単相格論理系への埋め込み

$ この節では，一階述語論理系から出来る文論対が適当な単相格論理系から出来る文論対に埋め込まれることを示そう．また，一階述語言語で表現可能な関数が単相格言語でも表現可能であることを示そう．私たちは，一階述語論理の式を関数記号交じりの日本語に言い換え，その式の意味を理解したりそれについて推論したりすることができる．この節で示す事柄は，私たちにそういう精神過程が可能な理由の説明の一端である．そこで**この節を通じて，**$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を単相格言語とし，K や** ε **や** $\mathfrak{F}$ **や** $\mathfrak{U}$ **の意味はこれまで通りとする．**

5.8.1　形式言語の埋め込み

§ この項では，m を自然数または ∞ として，格集合 K について

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n < m\} \subseteq K$$

と仮定し，さらに，$n < m$ なるある自然数 n に対しては $\mathrm{Con}_{\{1,2,\dots,n\}} \neq \emptyset$ であると仮定する．

そうすると定理 5.1.1 により，$n < m$ なる各自然数 n と各 $f \in \mathrm{Con}_{\{1,2,\dots,n\}}$ に対し，A 上の n 項算法 f_0 で $(A_\varepsilon)^n$ を定義域として $A_\emptyset$ の中に値を持つものを次のように定めることができる．すなわち，任意の $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (A_\varepsilon)^n$ に対して

$$f_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1\, \breve{o}1\, (a_2\, \breve{o}2\, (\cdots (a_n\, \breve{o}n\, f) \cdots)) \tag{5.8.1}$$

また A の閉全包元 one を任意にとって，各 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対し，A 上の単項算法 $\forall x$ と $\exists x$ で $A_\emptyset$ を定義域として $A_\emptyset$ の中に値を持つものを次のように定めることができる．すなわち，任意の $g \in A_\emptyset$ に対して

$$\forall x\, g = \mathrm{one}\, \forall\pi\, (g\, \Omega x) \triangle \qquad\qquad \exists x\, g = \mathrm{one}\, \exists\pi\, (g\, \Omega x) \triangle \tag{5.8.2}$$

以上の算法を使って代数系 A_0 を次のように作る．すなわちまず，A の単相格言語としての算法の中の $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と関号 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ のすべてと，各 $f \in \bigcup_{n<m} \mathrm{Con}_{\{1,2,\dots,n\}}$ が (5.8.1) のように定める算法 f_0 のすべてと，各 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が (5.8.2) のように定める算法 $\forall x$ と $\exists x$ のすべてとを集合 A に与えて代数系とする．そして，この代数系において Prm_ε が生成する台部分系を A_0 とする．こうして出来る代数系 A_0 の代数構造は

$$\mathfrak{F} \cup \left\{ f_0 \;\middle|\; f \in \textstyle\bigcup_{n<m} \mathrm{Con}_{\{1,2,\dots,n\}} \right\} \cup \{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\} \cup \{\forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}_\varepsilon\} \tag{5.8.3}$$

に属す算法の A_0 への制限全体である．また，定理 5.1.2 により $A_\varepsilon = [\mathrm{Prm}_\varepsilon]_{\mathfrak{F}}$ であること等から

$$A_0 = A_\varepsilon \cup (A_\emptyset \cap A_0) \tag{5.8.4}$$

が導かれる．さらに第 3.8 節の諸定理により，A_0 が Prm_ε 上の有基代数系であることが分かる．

なおさらに，A_0 を次のように普遍型付代数系 $(A_0, T_0, \sigma_0, \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ とみなすことができる．まず A_0 の型代数系 T_0 の台集合としては，A の型代数系 $T = \{\delta, \varepsilon\} \cup \mathcal{P}K$ の部分集合 $\{\varepsilon, \emptyset\}$ をとる．

$$T_0 = \{\varepsilon, \emptyset\}$$

T_0 の代数構造は次のように定める．T の代数構造の定め方により，集合 T_0 は算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ と任意の関号 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ で閉じている．そこで，まずこれら算法を T_0 上の算法とみなす．次に各 $f \in \mathrm{Con}_{\{1,2,\dots,n\}}$ に対して，T_0 上の n 項算法 f_0 を

$$\mathrm{Dom}\, f_0 = \{\varepsilon\}^n \qquad\qquad f_0(\varepsilon, \dots, \varepsilon) = \emptyset$$

と定める $(n < m)$．次に各 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して，T_0 上の単項算法 $\forall x$ と $\exists x$ を

$$\mathrm{Dom}\, \forall x = \mathrm{Dom}\, \exists x = \{\emptyset\} \qquad\qquad \forall x\, \emptyset = \exists x\, \emptyset = \emptyset$$

と定める．以上三種の算法を集合 T_0 に与えれば，T_0 は A_0 と同類の代数系となる．次に，σ の A_0 への制限を σ_0 で表す．そうすると (5.8.4) 等により，σ_0 が A_0 から T_0 への準写であることが確かめ

られる．以上により (A_0, T_0, σ_0) は型付代数系であり，従って定理 3.8.5 により，$(A_0, T_0, \sigma_0, \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ は確かに普遍型付代数系である．

しかも，以上の定め方を例 4.1.2 と照らし合わせれば，A_0 が一階述語言語であることが分かる．すなわち，A の単体定数系 Con_ε が A_0 の定数系であり，A の単体変数系 Var_ε が A_0 の変数系であってこれは空集合ではなく，A の関号の A_0 への制限が A_0 の関数記号であり，各 $f \in \bigcup_{n<m} \mathrm{Con}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ が (5.8.1) のように定める算法 f_0 の A_0 への制限が A_0 の述語記号であってこれは少なくとも一つは有り，A の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ の A_0 への制限が A_0 のブール子であり，各 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が (5.8.2) のように定める算法 $\forall x$ と $\exists x$ の A_0 への制限が A_0 の極量子である．

さらに，図 5.1 が可換図式であるという意味で，一階述語言語 $(A_0, T_0, \sigma_0, \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ は単相格言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ に埋め込まれる（この埋め込みと系拡大の関連について定義 3.12.3 参照）．

図 5.1: 一階述語言語の単相格言語への埋め込み

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Prm}_\varepsilon & \xrightarrow{i} & A_0 & \xrightarrow{\sigma_0} & T_0 \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow \\
\mathrm{Prm} & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{\sigma} & T
\end{array}$$

図中の記号 i はすべて埋め込み写像を表す．

なおさらに，A_0 の定数と変数の個数は，A の単体定数と単体変数の個数を変えることにより自由に変えられる．A_0 の関数記号の種類や個数は，A の関号の種類や個数を変えることにより自由に変えられる．A_0 の述語記号の種類や個数は，m と $\mathrm{Con}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ $(n < m)$ を変えることにより自由に変えられる．

従って一階述語言語はすべて，以上のようにして単相格言語に埋め込むことができる．

5.8.2　文論対の埋め込み

§ この項では $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm}), \mathcal{W}$ を単相格論理系とする．そうすると，これの定める文論対は $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ と表される．また，単相格言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ から前項のように一階述語言語 $(A_0, T_0, \sigma_0, \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ を作ったとして，これにとっての認識対象世界の全体を $\mathcal{W}_0$ で表す．そうすると (5.8.4) 等により，一階述語論理系 $(A_0, T_0, \sigma_0, \mathrm{Prm}_\varepsilon), \mathcal{W}_0$ の定める文論対は $(A_\emptyset \cap A_0, \mathcal{F}_0)$ と表される．これらについての次の定理を証明することがこの項の目標である．

定理 5.8.1 $(A_\emptyset \cap A_0, \mathcal{F}_0)$ **は** $(A_\emptyset, \mathcal{F})$ **の縮小である．**

そこでこれまで通り，A から $\mathcal{W}$ に属す共通の単相格世界への定付値と変付値の組みの全体を $\mathfrak{V}$ で表し，$(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ が定める $A_\emptyset$ から $\mathbb{T}$ への写像 $f \mapsto (\Phi^* f)\nu$ を Φ^ν で表す．(Φ, ν) を $\mathfrak{V}$ 全体に亘らせての Φ^ν の全体が $\mathcal{F}$ である．同様に，A_0 から $\mathcal{W}_0$ に属す共通の認識対象世界への定付値と変付値の組みの全体を $\mathfrak{V}_0$ で表し，$(\Phi_0, \nu_0) \in \mathfrak{V}_0$ が定める $A_\emptyset \cap A_0$ から $\mathbb{T}$ への写像 $f \mapsto (\Phi_0^* f)\nu_0$ を $\Phi_0^{\nu_0}$ で表す．(Φ_0, ν_0) を $\mathfrak{V}_0$ 全体に亘らせての $\Phi_0^{\nu_0}$ の全体が $\mathcal{F}_0$ である．そうすると上記目標は，次の二つのことを示すことに帰着する（定理 4.7.1 の証明参照）．

1. 各 $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ に応じて，$\Phi_0^{\nu_0} = \Phi^\nu|_{A_\emptyset \cap A_0}$ なる $(\Phi_0, \nu_0) \in \mathfrak{V}_0$ が存在する．

2. 各 $(\Phi_0, \nu_0) \in \mathfrak{V}_0$ に応じて，$\Phi_0^{\nu_0} = \Phi^{\nu}|_{A_\emptyset \cap A_0}$ なる $(\Phi, \nu) \in \mathfrak{V}$ が存在する．

そこでまず，Φ を A から $W \in \mathcal{W}$ への定付値とする．このとき，W と Φ を次のように縮小制限して，$W_0 \in \mathcal{W}_0$ と A_0 から W_0 への定付値 Φ_0 を作ることができる．すなわちまず，W の部分集合 W_0 を

$$W_0 = W_\varepsilon \cup W_\emptyset \tag{5.8.5}$$

と定める．そうすると，W_0 は W の算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ と任意の関号 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ で閉じているから，これら算法を W_0 に制限して W_0 上の算法と成す．また，問題 5.2.1 により各 $f \in \mathrm{Con}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ に対し，W_0 上の n 項算法 f_0 で $(W_\varepsilon)^n$ を定義域として $W_\emptyset$ $(= \mathbb{T})$ の中に値を持つものを次のように定めることができる $(n < m)$．すなわち，任意の $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in (W_\varepsilon)^n$ に対して

$$f_0(w_1, w_2, \ldots, w_n) = w_1 \,\breve{o}1\, (w_2 \,\breve{o}2\, (\cdots (w_n \,\breve{o}n\, \Phi f) \cdots)) \tag{5.8.6}$$

以上二種の算法を集合 W_0 に与えて代数系を作る．また，W_0 の型代数系としては，T_0 の代数構造から算法 $\forall x$ と $\exists x$ $(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ を取り除いて出来る算部分系をとり，これを U_0 で表す．また，W_0 の型分割は，$U_0 = \{\varepsilon, \emptyset\}$ に留意して (5.8.5) の通りとする．そうすると，W_0 が U_0 型代数系であることが確かめられる．しかも $W_\varepsilon \neq \emptyset$, $W_\emptyset = \mathbb{T}$ であって，算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ は (4.2.2) に相当する

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Dom} \wedge = \mathrm{Dom} \vee = \mathrm{Dom} \Rightarrow = (W_\emptyset)^2 & \mathrm{Im} \wedge,\ \mathrm{Im} \vee,\ \mathrm{Im} \Rightarrow \subseteq W_\emptyset \\ \mathrm{Dom} \lozenge = W_\emptyset & \mathrm{Im} \lozenge \subseteq W_\emptyset \end{array}$$

なる条件と (4.2.1) をみたす．つまり W_0 は，A_0 にとって例 4.2.2 の意味でブール的な認識可能世界であり，従って $\mathcal{W}_0$ に属す．しかも，A_0 の定数系は Con_ε に等しいから，Φ の Con_ε への制限 Φ_0 は A_0 から W_0 への定付値となる．同様に，A から W への変付値 ν の Var_ε への制限 ν_0 は A_0 から W_0 への変付値となる．

逆に，$W_0 = S \amalg \mathbb{T} \in \mathcal{W}_0$ とし，Φ_0 を A_0 から W_0 への定付値とするとき，これらを $W \in \mathcal{W}$ と A から W への定付値 Φ に次のように拡張することができる．すなわちまず注意 5.2.3 の手順に従って，$T_{\mathfrak{F}}$ と同類の汎代数系として S をとり，S 上の反射的関係 $\ni$ と $\mathbb{P}$ 測度 $|X|$ は任意に定め，それで S を基底とし $\ni$ を基本関係とし $|X|$ を測度とする単相格世界 $W \in \mathcal{W}$ を作る．そうすると (5.8.5) が成り立ち，W 上の算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ と関号は W_0 上の算法 $\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ と関数記号の拡張である．Φ_0 を A から W への定付値 Φ に拡張できることは自明である．ただし f_0 を A_0 の n 変数述語記号とすれば，$f \in \mathrm{Con}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ であり，f_0 に対応する W_0 上の算法（これも f_0 で表す）は

$$S^n {\to} \mathbb{T} = \big(\{1, 2, \ldots, n\} {\to} S\big) {\to} \mathbb{T} = W_{\{1,2,\ldots,n\}}$$

の元である．従って Φ_0 を拡張して A から W への定付値 Φ を作るときに，$\Phi f = f_0$ なるようにすることができ，そうすると定理 5.2.4 系により (5.8.6) が成り立つ．つまりこの W_0, Φ_0 は，W, Φ を前段のように縮小制限して作ったものと一致する．なお，A_0 から W_0 への変付値 ν_0 が A から W への変付値 ν に拡張できることも自明である．

以上のことから，Φ と ν を A から $W \in \mathcal{W}$ への定付値と変付値とするとき，これらを上記のように縮小制限して $W_0 \in \mathcal{W}_0$ および A_0 から W_0 への定付値 Φ_0 と変付値 ν_0 を作ることができる．逆に，Φ_0 と ν_0 を A_0 から $W_0 \in \mathcal{W}_0$ への定付値と変付値とするとき，これらを上記のように拡張して $W \in \mathcal{W}$ および A から W への定付値 Φ と変付値 ν を作ることができる．

$\mathfrak{V}$ と $\mathfrak{V}_0$ にこういう関係があるので，上記 1 と 2 を証明するには，次のことを証明すればいい．

3. Φ と ν を A から $W \in \mathcal{W}$ への定付値と変付値とし，これらを上記のように縮小制限して $W_0 \in \mathcal{W}_0$ と A_0 から W_0 への定付値 Φ_0 と変付値 ν_0 を作れば，$\Phi_0^{\nu_0} = \Phi^{\nu}|_{A_\emptyset \cap A_0}$ が成り立つ．

そこで以下，Φ を A から $W \in \mathcal{W}$ への定付値とし，W と Φ を前記のように縮小制限して $W_0 \in \mathcal{W}_0$ と A_0 から W_0 への定付値 Φ_0 を作ったとする．また，A から W への変付値の全体をこれまで通り Val_W で表し，A_0 から W_0 の変付値の全体を Val_{W_0} で表す．

そうすると変付値についての前記のことにより，Val_W から Val_{W_0} への全射

$$\nu \mapsto \nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}$$

が出来る．従ってまた定理 3.10.3 により，U 型代数系 W の巾代数系 $W^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ から同じく U 型代数系 W の巾代数系 W^{Val_W} への保型準写 ψ で各 $b \in W^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ と $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$(\psi b)\nu = b(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon})$$

をみたすものがある．また，Φ_0 の定める意味写像 Φ_0^* は A_0 から W_0 の巾代数系 $W_0^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ への写像であるが，(5.8.5) により $W_0^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ は $W^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ に含まれる．従って合成写像 $\psi\Phi_0^*$ が定義できて，これは A_0 から W^{Val_W} への写像である．他方，Φ の定める意味写像 Φ^* は A から W^{Val_W} への写像である．そこで，これら意味写像が任意の $a \in A_0$ に対して次の式をみたすことを証明しよう．

$$\psi(\Phi_0^* a) = \Phi^* a \tag{5.8.7}$$

この式から上記 3 が直ちに導かれる．なぜならこの式は，任意の $a \in A_0$ と $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$(\Phi_0^* a)(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}) = (\Phi^* a)\nu \tag{5.8.8}$$

なる式が成り立つことと同等だからである．なおこれらの式は，図 5.2 が可換図式であることとも同等である．ただし図中の記号 ψ_0 は，ψ の $W_0^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ への制限を表す．

図 5.2: 一階述語論理系の単相格論理系への埋め込みの可換図式

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "\Phi_0^*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A_0}"'] & W_0^{\mathrm{Val}_{W_0}} \arrow[d, "\psi_0"] \\ A \arrow[r, "\Phi^*"'] & W^{\mathrm{Val}_W} \end{tikzcd}$$

(5.8.7) は a の A_0 における階数 r についての帰納法で次のように証明される．まず $a \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ の場合は，$\Phi_0 = \Phi|_{\mathrm{Con}_\varepsilon}$ であるから，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ に対して

$$(\psi(\Phi_0^* a))\nu = (\Phi_0^* a)(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}) = \Phi_0 a = \Phi a = (\Phi^* a)\nu$$

従って $\psi(\Phi_0^* a) = \Phi^* a$ が成り立つ．次に $a \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ の場合は

$$(\psi(\Phi_0^* a))\nu = (\Phi_0^* a)(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}) = \nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon} a = \nu a = (\Phi^* a)\nu$$

従って $\psi(\Phi_0^* a) = \Phi^* a$ が成り立つ．そこで $r \geq 1$ と仮定する．

まず，$a = f(a_1, \ldots, a_n)$ なる n 項関数記号 $f \in \mathfrak{F}$ と $(a_1, \ldots, a_n) \in (A_\varepsilon)^n$ がある場合，Φ_0^* も ψ も Φ^* も f についての擬写であることと帰納法の仮定により

$$\psi(\Phi_0^* a) = \psi\bigl(\Phi_0^*\bigl(f(a_1, \ldots, a_n)\bigr)\bigr) = f\bigl(\psi(\Phi_0^* a_1), \ldots, \psi(\Phi_0^* a_n)\bigr)$$

$$= \mathfrak{f}(\Phi^* a_1, \ldots, \Phi^* a_n) = \Phi^*\big(\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n)\big) = \Phi^* a$$

$a = g \wedge h$, $g \vee h$, $g^{\Diamond}$, $g \Rightarrow h$ なる $g, h \in A_\emptyset \cap A_0$ がある場合も同様である．

残りの $\bigcup_{n<m} \mathrm{Con}_{\{1,2,\ldots,n\}} \cup \{\forall x, \exists x \mid x \in \mathrm{Var}_\varepsilon\}$ に属す算法を扱うための準備として，$W_0^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ 上のこれら算法と ψ の関係を調べる．まず，各 $f \in \mathrm{Con}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ に対応する $W_0^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ の算法 f_0 については，任意の $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathrm{Val}_{W_0} \to W_\varepsilon$ に対して次の式が成り立つ $(n < m)$．

$$\psi\big(f_0(b_1, b_2, \ldots, b_n)\big) = \psi b_1 \,\breve{o}1\, (\psi b_2 \,\breve{o}2\, (\cdots (\psi b_n \,\breve{o}n\, \Phi^* f) \cdots)) \tag{5.8.9}$$

これは，任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ をとっての次の計算で確かめられる．ただし $\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}$ を ν_0 で表す．

$$\begin{aligned}
&\big(\psi\big(f_0(b_1, b_2, \ldots, b_n)\big)\big)\nu \\
&= \big(f_0(b_1, b_2, \ldots, b_n)\big)\nu_0 \\
&= f_0(b_1\nu_0, b_2\nu, \ldots, b_n\nu_0) \\
&= b_1\nu_0 \,\breve{o}1\, (b_2\nu_0 \,\breve{o}2\, (\cdots (b_n\nu_0 \,\breve{o}n\, \Phi f) \cdots)) && \big((5.8.6)\text{ による}\big) \\
&= (\psi b_1)\nu \,\breve{o}1\, \big((\psi b_2)\nu \,\breve{o}2\, \big(\cdots \big((\psi b_n)\nu \,\breve{o}n\, \Phi f\big) \cdots\big)\big) \\
&= (\psi b_1)\nu \,\breve{o}1\, \big((\psi b_2)\nu \,\breve{o}2\, \big(\cdots \big((\psi b_n)\nu \,\breve{o}n\, (\Phi^* f)\nu\big) \cdots\big)\big) && (f \in \mathrm{Con}\text{ だから}) \\
&= \big(\psi b_1 \,\breve{o}1\, (\psi b_2 \,\breve{o}2\, (\cdots (\psi b_n \,\breve{o}n\, \Phi^* f) \cdots))\big)\nu
\end{aligned}$$

なおこの計算で，二番目の等式が成り立つのは射影 $\mathrm{pr}_{\nu_0} \in W_0^{\mathrm{Val}_{W_0}} \to W_0$ が f_0 に関して擬写だからであり，最後の等式が成り立つのは，射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}_W} \to W$ が $\breve{o}1, \ldots, \breve{o}n$ に関して擬写だからである．

次に，${W_0}^{\mathrm{Val}_{W_0}}$ の算法 $\forall x$ と $\exists x$ については，任意の $b \in \mathrm{Val}_{W_0} \to W_\emptyset$ に対して

$$\psi(\forall x\, b) = 1 \,\forall\pi\, \big((\psi b)\, \Omega x\big)\triangle \qquad\qquad \psi(\exists x\, b) = 1 \,\exists\pi\, \big((\psi b)\, \Omega x\big)\triangle \tag{5.8.10}$$

なる二式の成り立つことが分かる．ただし，右辺の 1 は $\mathrm{Val}_W \to W_\delta$ の最大元である．このうち $\forall x$ についての式は，やはり任意の $\nu \in \mathrm{Val}_W$ をとっての次の計算で確かめられる．

$$\begin{aligned}
&\big(\psi(\forall x\, b)\big)\nu = 1 \\
\iff\ &(\forall x\, b)(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}) = 1 \\
\iff\ &\inf\big\{b\big((x/w)(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon})\big) \;\big|\; w \in W_\varepsilon\big\} = 1 && (\text{例 4.3.2 による}) \\
\iff\ &\text{任意の } w \in W_\varepsilon \text{ に対して } b\big((x/w)(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon})\big) = 1 \\
\iff\ &\text{任意の } w \in W_\varepsilon \text{ に対して } (\psi b)\big((x/w)\nu\big) = 1 \\
\iff\ &\text{任意の } w \in W_\varepsilon \text{ に対して } \big((\psi b)\, \Omega x\big)\nu \ni w && (\text{算法 } \Omega x \text{ の定義による}) \\
\iff\ &1\nu \,\forall\pi\, \big(\big((\psi b)\, \Omega x\big)\nu\big)\triangle = 1 && (\text{問題 5.2.25 による}) \\
\iff\ &\big(1 \,\forall\pi\, \big((\psi b)\, \Omega x\big)\triangle\big)\nu = 1
\end{aligned}$$

ただし，この推論における 1 は $\mathbb{T}$ あるいは $\mathrm{Val}_W \to W_\delta$ の最大元を表す．また，四番目の $\iff$ が成り立つのは $(x/w)(\nu|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}) = \big((x/w)\nu\big)|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}$ だからであり，最後の $\iff$ が成り立つのは，pr_ν が $\triangle$ と $\forall\pi$ に関して擬写だからである．$\exists x$ についての式も同様に確かめられる．

以上の準備の下で (5.8.7) の証明が次のように完結される．まず $a = f_0(a_1, \ldots, a_n)$ なる n 変数述語記号 f_0 と $(a_1, \ldots, a_n) \in (A_\varepsilon)^n$ がある場合，

$$\psi(\Phi_0^* a) = \psi\big(\big(\Phi_0^*\big(f_0(a_1, \ldots, a_n)\big)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi\bigl(f_0(\Phi_0^* a_1, \ldots, \Phi_0^* a_n)\bigr) \\
&= \psi(\Phi_0^* a_1)\,\breve{o}1\,\bigl(\psi(\Phi_0^* a_2)\,\breve{o}2\,\bigl(\cdots\bigl(\psi(\Phi_0^* a_n)\,\breve{o}n\,\Phi^* f\bigr)\cdots\bigr)\bigr) && \text{((5.8.9) による)} \\
&= \Phi^* a_1\,\breve{o}1\,(\Phi^* a_2\,\breve{o}2\,\bigl(\cdots(\Phi^* a_n\,\breve{o}n\,\Phi^* f)\cdots)\bigr) && \text{(帰納法の仮定による)} \\
&= \Phi^*\bigl(a_1\,\breve{o}1\,(a_2\,\breve{o}2\,(\cdots(a_n\,\breve{o}n\,f)\cdots))\bigr) \\
&= \Phi^*\bigl(f_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)\bigr) && \bigl(\text{(5.8.1) による}\bigr) \\
&= \Phi^* a
\end{aligned}
$$

次に $a = \forall x\, g$ なる $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ と $g \in A_\emptyset \cap A_0$ がある場合，

$$
\begin{aligned}
\psi(\Phi_0^* a) &= \psi\bigl(\Phi_0^*(\forall x\, g)\bigr) \\
&= \psi\bigl(\forall x\,(\Phi_0^* g)\bigr) \\
&= 1\,\forall\pi\,\bigl(\bigl(\psi(\Phi_0^* g)\bigr)\,\Omega x\bigr)\triangle && \bigl(\text{(5.8.10) による}\bigr) \\
&= 1\,\forall\pi\,\bigl((\Phi^* g)\,\Omega x\bigr)\triangle && \text{(帰納法の仮定による)} \\
&= (\Phi^* \mathrm{one})\,\forall\pi\,\bigl((\Phi^* g)\,\Omega x\bigr)\triangle && \text{(問題 5.5.6)} \\
&= \Phi^*\bigl(\mathrm{one}\,\forall\pi\,(g\,\Omega x)\triangle\bigr) \\
&= \Phi^*(\forall x\, g) && \bigl(\text{(5.8.2) による}\bigr) \\
&= \Phi^* a
\end{aligned}
$$

最後に $a = \exists x\, g$ なる $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ と $g \in A_\emptyset \cap A_0$ がある場合も同様である．これで (5.8.7) の証明が完成した．

5.8.3　表現関数の埋め込み

§ この項では，W を単相格言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ にとって認識可能な単相格世界とし，Φ を A から W への定付値とする．また，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ から第 5.8.1 項のようにして一階述語言語 $(A_0, T_0, \sigma_0, \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ を作り，W と Φ を第 5.8.2 項でのように縮小制限して A_0 にとっての認識対象世界 W_0 と A_0 から W_0 への定付値 Φ_0 を作ったとする．

補題 5.8.1　$a \in A_0$，$x \in \mathrm{Var}$ **とするとき，**x **が** A **において** a **に自由に現れるためには，**$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **であって** x **が** A_0 **において** a **に自由に現れることとが必要十分である．**

証明　x が A において a に自由に現れることをこれまで通り $x \ll a$ で表す．また，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ の場合に，x が A_0 において a に自由に現れることを $x \ll_0 a$ で表す．そうすると $a \in \mathrm{Prm}_\varepsilon$ のときは，定理 3.16.2 により次のことが成り立つ．

$$
x \ll a \iff x = a \iff x \in \mathrm{Var}_\varepsilon,\ x = a \iff x \in \mathrm{Var}_\varepsilon,\ x \ll_0 a
$$

そこで a の A_0 における階数についての帰納法を使う．

$a = \mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n)$ なる n 項関数記号 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ と $(a_1, \ldots, a_n) \in (A_\varepsilon)^n$ がある場合：定理 3.16.4 により，$x \ll a$ なるためには，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $x \ll a_i$ なることが必要十分である．そして $x \ll a_i$ なるためには，帰納法の仮定により，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ かつ $x \ll_0 a_i$ なることが必要十分である．従って $x \ll a$ なるためには，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ であってある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $x \ll_0 a_i$ なる

ことが必要十分であり，そのためには定理 3.16.4 により，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ であって $x \ll_0 a$ なることが必要十分である．

$a = g \wedge h$, $g \vee h$, $g^\Diamond$, $g \Rightarrow h$ なる $g, h \in A_\emptyset \cap A_0$ がある場合も同様である．

$a = f_0(a_1, \ldots, a_n)$ なる n 変数述語記号 f_0 と $(a_1, \ldots, a_n) \in (A_\varepsilon)^n$ がある場合：(5.8.1) と定理 3.16.2 と定理 3.16.4 により，$x \ll a$ なるためには，ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $x \ll a_i$ なることが必要十分であり，そのためには帰納法の仮定により，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ であってある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $x \ll_0 a_i$ なることが必要十分であり，そのためには定理 3.16.4 により，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ かつ $x \ll_0 a$ なることが必要十分である．

$a = \forall y\, g$ なる $y \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ と $g \in A_\emptyset \cap A_0$ がある場合：(5.8.2) と定理 3.16.4 により，$x \ll a$ なるためには，$y \neq x \ll g$ なることが必要十分であり，そのためには帰納法の仮定により，$y \neq x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ であって $x \ll_0 g$ なることが必要十分であり，そのためには定理 3.16.4 により，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ かつ $x \ll_0 a$ なることが必要十分である．

$a = \exists y\, g$ なる $y \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ と $g \in A_\emptyset \cap A_0$ がある場合も同様である．

定理 5.8.2 **$a \in A_0$ のとき，a の A における自由変数列は a の A_0 における自由変数列であり，その逆も正しい．そこで $x_1, \ldots, x_n$ をそういう自由変数列とすれば，a の二つの表現関数 $a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $a^{\Phi_0}(x_1, \ldots, x_n)$ は一致する．**

証明　前半は補題 5.8.1 による．後半については，まず (5.8.4) により $a \in A_\varepsilon$ または $a \in A_\emptyset \cap A_0$ であり，次に (5.8.5) により，$a^\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $a^{\Phi_0}(x_1, \ldots, x_n)$ は，$a \in A_\varepsilon$ であれば共に $(W_\varepsilon)^n$ から W_ε への関数であり，$a \in A_\emptyset \cap A_0$ であれば共に $(W_\varepsilon)^n$ から $W_\emptyset$ への関数である．そこで，任意の $(w_1, \ldots, w_n) \in (W_\varepsilon)^n$ をとると，$vx_i = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なる $v \in \mathrm{Val}_W$ があって，(5.8.8) により $a^\Phi(w_1, \ldots, w_n) = (\Phi^* a)v = (\Phi_0^* a)(v|_{\mathrm{Var}_\varepsilon}) = a^{\Phi_0}(w_1, \ldots, w_n)$ が成り立つ．

系　**W_0 上の型関数で Φ_0 の下で表現可能なものは，W 上の型関数として Φ の下で表現可能である．**

5.9　唯時世界

$ ここでは，以下に記す特別な性質を持つ単相格世界 W，およびそれを認識可能世界とする単相格言語 A について説明する．これらは，時刻・時間の他に物のない世界とそれを認識可能な心言語との数理模型である．

5.9.1　定義

§ まず，W の基底 S は一次元ユークリッド空間であり，W の格集合 K には主格 π の他にもう一つの格 ω が含まれているとする．これが W の台についての規定である．W の代数構造に関しては，まず，W の基本関係 $\ni$ は相等関係 $=$ に等しいとする．次に，W の限量系 $\mathbb{P}$ と測度は例 3.32.6 のように定める．つまり，$\mathbb{P} = \mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ とし，次の式で定まる S 上の $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ 測度 $|\cdot|_{\hat{t}}$ を W の測度とする．

$$|X|_{\hat{t}} = \begin{cases} \#X\ (\in \mathbb{Z}_0) & \cdots\quad X \text{ が有限集合のとき} \\ \|X_o\|\ (\in \mathbb{R}_{0\infty}) & \cdots\quad X \text{ が無限集合のとき} \end{cases} \qquad (X \in \mathcal{P}S)$$

ただし，S に基準点 o を定めて出来る S から $\mathbb{R}$ への全単射 $a \mapsto \overrightarrow{oa}$ による $X \in \mathcal{P}S$ の像を X_o で表し，$\mathbb{R}$ 上の外測度を $\|\cdot\|$ で表す．

こういう単相格世界 W は，時刻・時間の他には物の無い世界の数理模型とみなすことができる（そこで W を**唯時世界**と呼ぶ）．つまり，単実在の集合 W_ε すなわち基底 S の元が時刻に当たる．また，複実在の集合 W_δ すなわち $S {\to} \mathbb{T}$ の元が時間に当たる（そこで W_δ の元を**時間**と呼ぶことがある）．$S {\to} \mathbb{T}$ は $\mathcal{P}S$ と同一視される．従って，二つの時刻の間だけでなく，時刻から成る任意の集合を時間と考えている．そして，$X \in \mathcal{P}S$ に対する $|X|_{\hat{t}}$ は時間 X の量に当たる．そこで $|\cdot|_{\hat{t}}$ を**時間測度**と呼ぶ．

時刻・時間の他には何も実在しないような世界は，もちろん，私たちには現実のものとは感ぜられない．私たちの現実の認識の対象世界は，時刻・時間の他に色々な物を含むもっと複雑なものである．しかし，そういう複雑な世界の模型は，次章の格論理学の中で考えなければならない（第 6.6 節参照）．この節は，そこでの考察のための準備である．

さて，S 上に順序関係 $\leq$ を次のように定義して，S から $\mathbb{R}$ への全単射 $a \mapsto \overrightarrow{oa}$ を同順写にすることができる．

$$a \leq b \iff \overrightarrow{oa} \leq \overrightarrow{ob}$$

これを使って，各 $a \in W_\varepsilon$ $(= S)$ に対して，W_δ $(= S {\to} \mathbb{T})$ の二元 $\overleftarrow{a}$，$\overrightarrow{a}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \overleftarrow{a} \ni s &\iff s < a \\ \overrightarrow{a} \ni s &\iff s > a \end{aligned} \qquad (s \in S)$$

ただし,「$s < a$」は「$s \leq a$ かつ $s \neq a$」なることを表し，$>$ は $<$ の双対関係を表す．さらに，$W_{\{\pi,\omega\}}$ $(= (\{\pi,\omega\}{\to}S){\to}\mathbb{T})$ の二元 $\hat{p}$, $\hat{s}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \hat{p}\theta = 1 &\iff \theta\pi < \theta\omega \\ \hat{s}\theta = 1 &\iff \theta\pi > \theta\omega \end{aligned} \qquad \big(\theta \in \{\pi,\omega\}{\to}S\big)$$

記号「$\hat{p}$」「$\hat{s}$」は「precede」「succeed」に由来する．

補題 5.9.1 $a, b \in W_\varepsilon$ **について次のことが成り立つ．**

1. $a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\hat{p}) = a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\triangle$　　**2.** $a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\hat{s}) = a\,\breve{o}\pi\,\overrightarrow{b}\triangle$

証明　結論 1 は次の推論で証明される．結論 2 についても同様である．

$$\begin{aligned} a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\hat{p}) = 1 &\iff a < b && \Big(a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\hat{p}) = \hat{p}\big((\omega/b)(\pi/a)\big) \text{ だから}\Big) \\ &\iff \overleftarrow{b} \ni a && (\overleftarrow{b} \text{ の定義による}) \\ &\iff a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\triangle = 1 && (\text{補題 5.2.10 による}) \end{aligned}$$

問題 5.9.1 $a, b \in W_\varepsilon$ について次のことが成り立つ．

1. $a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\triangle = b\,\breve{o}\pi\,\overrightarrow{a}\triangle = \overrightarrow{a}\,\exists\pi\,\overleftarrow{b}\triangle$
2. $a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\triangle = (\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\triangle) \wedge (a\,\breve{o}\pi\,b\triangle)^\lozenge$
3. $\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\triangle = \overrightarrow{b}\,\forall\pi\,\overrightarrow{a}\triangle$

問題 5.9.2 $a, b, c \in W_\varepsilon$ について次の四つのことが成り立つ．

1. $\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{a}\,\triangle = 1$
2. $(\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle) \wedge (\overleftarrow{b}\,\forall\pi\,\overleftarrow{a}\,\triangle) = a\,\breve{o}\pi\,b\triangle$
3. $\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle,\ \overleftarrow{b}\,\forall\pi\,\overleftarrow{c}\,\triangle \lessdot \overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{c}\,\triangle$
4. $\lessdot\ \overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle,\ \overleftarrow{b}\,\forall\pi\,\overleftarrow{a}\,\triangle$

5.9.2　時間および主格を枠とする事態の容態による分類

§ 唯時世界 W において，W_δ，$W_{\{\pi\}}$ の元が位相的属性によって分類できることを説明する．

まず，補題 5.2.8 の通りに，各 $c \in \mathrm{E}$ と各 $f \in W_{\{\pi\}}$ に対して

$$S^c = \{s \in S \mid c \ni s\} \qquad\qquad S^f = \{s \in S \mid f(\pi/s) = 1\}$$

と定め，これらをそれぞれ c，f の**時容**と呼ぶ．なお，補題 5.2.8 により $c\triangle \in W_{\{\pi\}}$，$S^c = S^{c\triangle}$ が成り立つから，c の時容は $c\triangle$ の時容に等しい．次に，第 5.9.1 項で定めた S 上の順序関係 $\leq$ を使って，任意の $a, b \in S$ に対して，S の八種の部分集合を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in S \mid a \leq x \leq b\} & [a, \rightarrow) &= \{x \in S \mid a \leq x\} \\
(a, b] &= \{x \in S \mid a < x \leq b\} & (a, \rightarrow) &= \{x \in S \mid a < x\} \\
[a, b) &= \{x \in S \mid a \leq x < b\} & (\leftarrow, a] &= \{x \in S \mid x \leq a\} \\
(a, b) &= \{x \in S \mid a < x < b\} & (\leftarrow, a) &= \{x \in S \mid x < a\}
\end{aligned}$$

これらと S とを S の**区間**と総称し，左側の四種の区間を**有界区間**と呼ぶ．$\emptyset \in \mathcal{P}S$ は区間 (a, a) とみなされる．また，S の単元部分集合 $\{a\}$ も区間 $[a, a]$ とみなされる．

さて，W_δ $(= S \rightarrow \mathbb{T})$ は $\mathcal{P}S$ と同一視されるが，$c \in W_\delta$ と同一視されるべき $\mathcal{P}S$ の元がすなわち時容 S^c である．また，$f \in W_{\{\pi\}}$ の時容については

$$S^f = \bigl\{\theta\pi \mid \theta \in \{\pi\} \rightarrow S,\ f\theta = 1\bigr\} \tag{5.9.1}$$

が成り立つ．$W_{\{\pi\}} = (\{\pi\} \rightarrow S) \rightarrow \mathbb{T}$ であるから，$(\{\pi\} \rightarrow S) \ni \theta \longleftrightarrow \theta\pi \in S$ なる対応によって $\{\pi\} \rightarrow S$ を S と同一視すれば，$f \in S \rightarrow \mathbb{T}$ とみなされる．そうみなした f はさらに集合 $\{x \in S \mid fx = 1\}$ と同一視されるが，(5.9.1) は S^f がこの集合に相当することを示す．要するに $W_\delta \cup W_{\{\pi\}}$ の元 d は，その時容なる $\mathcal{P}S$ の元 S^d と同一視される．

従って $W_\delta \cup W_{\{\pi\}}$ の元は，一次元ユークリッド空間 S の部分位相空間となり，位相的属性の違いによって表 5.2 のように分類される．これを**容態（ようたい）による分類**と呼ぶ．

表 5.2: 時間および主格を枠とする事態の容態による分類

連続的	持続的	一時的	$(a, b),\ [a, b),\ (a, b],\ [a, b],\ a < b$
		始続的	$(a, \rightarrow),\ [a, \rightarrow)$
		続終的	$(\leftarrow, a),\ (\leftarrow, a]$
		恒常的	S
	空時的		$\emptyset$
	瞬間的		$\{a\}$
断続的			区間以外

容態による分類の基準を事態 $f \in W_{\{\pi\}}$ に即して説明する（時間 $c \in W_\delta$ についても同様である）．まず，S^f が連結位相空間であるとき f は**連続的**であると言う．従って，f が連続的であるためには，任意の $a, b \in S$ に対して

$$a, b \in S^f \implies (a, b) \subseteq S^f \tag{5.9.2}$$

の成り立つことが必要十分であり [14]，またこのためには，S^f が区間であることが必要十分である．連続的な事態 f の中でも，S^f が単元集合でも $\emptyset$ でもない有界区間であるものを特に**一時的**事態と呼ぶ．また，S^f が区間 $(a, \to)$ または $[a, \to)$ に等しいとき，f は**始続的**であると言う．同様に，S^f が区間 $(\leftarrow, a)$ または $(\leftarrow, a]$ に等しいとき，f は**続終的**であると言う．また，$S^f = S$ のとき f は**恒常的**であると言い，$S^f = \emptyset$ のとき f は**空時的**であると言う．また，S^f が単元集合であるとき f は**瞬間的**であると言う．さらに，空時的でも瞬間的でもない連続的事態を**持続的**事態と総称する．最後に，連続的でない事態を**断続的**な事態と呼ぶ．断続的事態は時容の連結成分に応じてさらに細かく分類することもできる．なお時間の場合は，事態の場合とは違って「一時的時間」「空時的時間」「瞬間的時間」と呼ぶのは変なので,「一時（いちじ・いっとき・ひととき）」「空時」「瞬間」と呼ぶ．

以上の分類を踏まえ，$W_\delta \cup W_{\{\pi\}}$ の各元 d に対して，$|S^d|_{\dot{t}}$ を d の**容量**と呼び，$\|(S^d)_\circ\|$ $(\in \mathbb{R}_{0\infty})$ を d の**長さ**と呼ぶ．そうすると「容量 $\leq$ 長さ」が一般に成り立つ．しかし，容量と長さは必ずしも等しくない．実際，空時の容量は $\mathbb{P}$ の単位元 0 に等しく，長さは $\mathbb{R}_{0\infty}$ の単位元 $0'$ に等しい．また，瞬間の容量は $\mathbb{Z}_0$ の元 1 に等しく，長さは $0'$ に等しい．

問題 5.9.3 持続的な時間または事態 d の容量と長さは等しい．これを q で表せば，$0' < q \leq \infty$ が成り立ち，$q < \infty$ であるためには d が一時的であることが必要十分である．

5.9.3　その分類の恒不等式による表現

§ 前項で行なった $W_\delta \cup W_{\{\pi\}}$ の元の分類基準を，算法 $\lambda\pi$ や関係 $\lessdot$ によって表現することができる．このことを事態 $f \in W_{\{\pi\}}$ に即して説明する．時間 $c \in W_\delta$ については，以下の説明における f を c や $c\triangle$ で適宜に置き換えればいい．c の時容は $c\triangle$ の時容に等しいからである．

まず，次のことが明らかに成り立つ．

補題 5.9.2 任意の $a \in S$ に対して $S^{\overleftarrow{a}} = (\leftarrow, a)$，$S^{\overrightarrow{a}} = (a, \to)$ が成り立つ．

そして，これと補題 5.2.8 と補題 5.2.9 とを合わせれば，次のことが証明される．

定理 5.9.1 事態 $f \in W_{\{\pi\}}$ が連続的であるためには，次の三条件のいずれもが必要十分である．

1. **任意の $a, b \in W_\varepsilon$ に対して $a\,\breve{o}\pi\,f,\ b\,\breve{o}\pi\,f \lessdot (\overrightarrow{a} \sqcap \overleftarrow{b})\,\forall\pi\,f$ が成り立つ．**
2. **任意の $a \in W_\varepsilon$ に対して $\overleftarrow{a}\,\exists\pi\,f,\ \overrightarrow{a}\,\exists\pi\,f \lessdot a\,\breve{o}\pi\,f$ が成り立つ．**
3. **任意の $a \in W_\varepsilon$ に対して $a\,\breve{o}\pi\,f^\lozenge \lessdot \overleftarrow{a}\,\forall\pi\,f^\lozenge,\ \overrightarrow{a}\,\forall\pi\,f^\lozenge$ が成り立つ．**

証明　(1) 定理 5.2.3 により，条件 1 の不等式は次のことと同等である．

$$a\,\breve{o}\pi\,f = 1 \text{ かつ } b\,\breve{o}\pi\,f = 1 \implies (\overrightarrow{a} \sqcap \overleftarrow{b})\,\forall\pi\,f = 1 \tag{5.9.3}$$

---

[14] $a < b$ と仮定する必要はない．$a \geq b$ なら $(a, b) = \emptyset$ だからである．

そして補題 5.2.9 により，$\Longrightarrow$ の左側は $a, b \in S^f$ と同等であり，右側は $S^{\overrightarrow{a} \sqcap \overleftarrow{b}} \subseteq S^f$ と同等である．さらに，補題 5.2.8 と補題 5.9.2 により

$$S^{\overrightarrow{a} \sqcap \overleftarrow{b}} = S^{\overrightarrow{a}} \cap S^{\overleftarrow{b}} = (a, \rightarrow) \cap (\leftarrow, b) = (a, b)$$

が成り立つ．従って (5.9.3) は，連続性の条件 (5.9.2) と同等である．

(2) (5.9.2) は次のように書き換えることができる．

$$a \in S - S^f \implies (\leftarrow, a) \cap S^f = \emptyset \text{ または } (a, \rightarrow) \cap S^f = \emptyset \tag{5.9.4}$$

そしてこれは，補題 5.2.9 と補題 5.9.2 により，次のことと同等である．

$$a \breve{o} \pi f = 0 \implies \overleftarrow{a} \exists \pi f = 0 \text{ または } \overrightarrow{a} \exists \pi f = 0 \tag{5.9.5}$$

そしてこれは，定理 5.2.3 により条件 2 の不等式と同等である．

(3) 定理 5.2.8 により，(5.9.5) は次のことと同等である．

$$a \breve{o} \pi f^{\Diamond} = 1 \implies \overleftarrow{a} \forall \pi f^{\Diamond} = 1 \text{ または } \overrightarrow{a} \forall \pi f^{\Diamond} = 1$$

そしてこれは，定理 5.2.3 により条件 3 の不等式と同等である．

定理 5.9.2 事態 $f \in W_{\{\pi\}}$ が空時的でないためには，次の二条件のいずれもが必要十分である．

1. **$\lessdot 1 \exists \pi f$ が成り立つ（1 は $W_\delta = S \rightarrow \mathbb{T}$ の最大元を表す）．**
2. **任意の $a \in W_\varepsilon$ に対して $a \breve{o} \pi f^{\Diamond} \lessdot a^{\Box} \exists \pi f$ が成り立つ．**

証明　**(1)** 補題 5.2.1 により，$\lessdot 1 \exists \pi f$ なることは $1 \exists \pi f = 1$ なることと同等である（右辺の 1 は $\mathbb{T}$ の最大元を表す）．また，$S^1 = S$ であるから，補題 5.2.9 により，$1 \exists \pi f = 1$ なることは $S^f \neq \emptyset$ なることと同等である．

(2) $a \breve{o} \pi f^{\Diamond} \lessdot a^{\Box} \exists \pi f$ なるためには，$a \breve{o} \pi f^{\Diamond} = 1$ のときに $a^{\Box} \exists \pi f = 1$ となることが必要十分である．補題 5.2.9 により，$a \breve{o} \pi f^{\Diamond} = 1$ なることは $a \in S^{f^{\Diamond}}$ なることと同等であり，$a^{\Box} \exists \pi f = 1$ なることは $S^{a^{\Box}} \cap S^f \neq \emptyset$ なることと同等である．そして，補題 5.2.8 および S 上の基本関係 $\exists$ が相等関係 $=$ に等しいことにより，

$$S^{f^{\Diamond}} = S - S^f \qquad\qquad S^{a^{\Box}} = S - S^a = S - \{a\}$$

が成り立つ．従って結局，任意の $a \in W_\varepsilon$ に対して $a \breve{o} \pi f^{\Diamond} \lessdot a^{\Box} \exists \pi f$ なることは，$S^f \neq \emptyset$ なることと同等である．

問題 5.9.4 事態 $f \in W_{\{\pi\}}$ が恒常的であるためには，事態 $f^{\Diamond}$ が空時的であることが必要十分である．また，f が始続的であるためには，$f^{\Diamond}$ が続終的であることが必要十分である．

問題 5.9.5 事態 $f \in W_{\{\pi\}}$ が恒常的であるためには $\lessdot 1 \forall \pi f$ なることが必要十分である．

問題 5.9.6 事態 $f \in W_{\{\pi\}}$ が瞬間的でないためには，任意の $a \in W_\varepsilon$ に対して $a \breve{o} \pi f \lessdot a^{\Box} \exists \pi f$ の成り立つことが必要十分である．

定理 5.9.3 **事態 $\mathrm{f} \in W_{\{\pi\}}$ が一時的で長さが p であるためには，f が恒常的でなく，$0' < \mathrm{p} < \infty$ であり，かつ，任意の $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ に対して次の条件の成り立つことが必要十分である．**

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \;\lessdot\; \overleftarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overrightarrow{\mathrm{a}}\,\mathrm{p}\pi\,\mathrm{f},\;\; \overrightarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overleftarrow{\mathrm{a}}\,\mathrm{p}\pi\,\mathrm{f} \tag{5.9.6}$$

証明　(5.9.6) が成り立つためには，$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} = 1$ すなわち $\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f} = 0$ のときに

$$\overleftarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overrightarrow{\mathrm{a}}\,\mathrm{p}\pi\,\mathrm{f} = 1 \tag{5.9.7}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overleftarrow{\mathrm{a}}\,\mathrm{p}\pi\,\mathrm{f} = 1 \tag{5.9.8}$$

のどちらかが成り立つことが必要十分である．$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f} = 0$ なることは $\mathrm{a} \in S - S^{\mathrm{f}}$ なることと同等である．他方 (5.9.7) は，$\overleftarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} = 1$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{a}}\,\mathrm{p}\pi\,\mathrm{f} = 1$ なることと同等であり，従って

$$(\leftarrow, \mathrm{a}) \cap S^{\mathrm{f}} = \emptyset \qquad \text{かつ} \qquad |(\mathrm{a}, \rightarrow) \cap S^{\mathrm{f}}|_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{p} \tag{5.9.9}$$

なることと同等である．同様に，(5.9.8) は次の条件と同等である．

$$(\mathrm{a}, \rightarrow) \cap S^{\mathrm{f}} = \emptyset \qquad \text{かつ} \qquad |(\leftarrow, \mathrm{a}) \cap S^{\mathrm{f}}|_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{p} \tag{5.9.10}$$

従って (5.9.6) は，$\mathrm{a} \in S - S^{\mathrm{f}}$ のときに (5.9.9) または (5.9.10) が成り立つことと同等である．

そこでまず，f が長さ p の一時的事態であると仮定し，任意の $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ をとる．S^{f} は区間であるから，$\mathrm{a} \in S - S^{\mathrm{f}}$ なら，$S^{\mathrm{f}} \subseteq (\mathrm{a}, \rightarrow)$ か $S^{\mathrm{f}} \subseteq (\leftarrow, \mathrm{a})$ のどちらかが成り立つ．問題 5.9.3 により $|S^{\mathrm{f}}|_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{p}$ であるから，$S^{\mathrm{f}} \subseteq (\mathrm{a}, \rightarrow)$ なら (5.9.9) が成り立ち，$S^{\mathrm{f}} \subseteq (\leftarrow, \mathrm{a})$ なら (5.9.10) が成り立つ．従って (5.9.6) が成り立つ．もちろん，$0' < \mathrm{p} < \infty$ であり，f は恒常的でない．

次に，f が恒常的でなく，$0' < \mathrm{p} < \infty$ であり，かつ，任意の $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ に対して (5.9.6) が成り立つと仮定する．そうすると先ず，(5.9.6) により (5.9.4) が成り立つから，f は連続的ある．次に，f が恒常的でないから，$\mathrm{a} \in S - S^{\mathrm{f}}$ なる a が存在する．そして (5.9.6) により，この a に対して (5.9.9) か (5.9.10) かが成り立つ．どちらにしても $|S^{\mathrm{f}}|_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{p}$ が成り立つ．$0' < \mathrm{p} < \infty$ であるから c は一時的事態であり，従って問題 5.9.3 により，f の長さは p に等しい．

問題 5.9.7 事態 $\mathrm{f} \in W_{\{\pi\}}$ が一時的または恒常的であるためには，任意の $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ に対して次の条件の成り立つことが必要十分である．

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \;\lessdot\; \overleftarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overrightarrow{\mathrm{a}}\,(0'\infty)\pi\,\mathrm{f},\;\; \overrightarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overleftarrow{\mathrm{a}}\,(0'\infty)\pi\,\mathrm{f}$$

問題 5.9.8 事態 $\mathrm{f} \in W_{\{\pi\}}$ が始続的または続終的または恒常的であるためには，任意の $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ に対して次の条件の成り立つことが必要十分である．

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \;\lessdot\; \overleftarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overrightarrow{\mathrm{a}}\,[\infty\infty]\pi\,\mathrm{f},\;\; \overrightarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overleftarrow{\mathrm{a}}\,[\infty\infty]\pi\,\mathrm{f}$$

問題 5.9.9 事態 $\mathrm{f} \in W_{\{\pi\}}$ が始続的または恒常的であるためには，任意の $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ に対して

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \lessdot \overleftarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overrightarrow{\mathrm{a}}\,[\infty\infty]\pi\,\mathrm{f}$$

の成り立つことが必要十分である．また，f が続終的または恒常的であるためには，任意の $\mathrm{a} \in W_{\varepsilon}$ に対して次の条件の成り立つことが必要十分である．

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \lessdot \overrightarrow{\mathrm{a}}\,\forall\pi\,\mathrm{f}^{\Diamond} \wedge \overleftarrow{\mathrm{a}}\,[\infty\infty]\pi\,\mathrm{f}$$

問題 5.9.10 事態 $\mathrm{f} \in W_{\{\pi\}}$ の時容が n 点集合であるためには，$\lessdot 1\,\mathrm{n}\pi\,\mathrm{f}$ の成り立つことが必要十分である ($\mathrm{n} \in \mathbb{Z}_0$)．ただし $\mathrm{n}\pi$ における n は，$\mathbb{P} = \mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ の直和成分 $\mathbb{Z}_0$ の元とみなす．

5.9.4　唯時世界を認識可能な単相格言語

§ 第 5.9.1 項で唯時世界を定義したのに対応して，次のような単相格言語 A について考える．
まず，A の格集合 K には主格 π の他にもう一つの格 ω が含まれているとする．次に，A の限量系 $\mathbb{P}$ は $\mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{R}_{0\infty}$ に等しいとする．さらに，A の素元系 Prm について次の二つのことを仮定する．

1. $\mathrm{Con}_{\{\pi,\omega\}}$ に $\check{\mathrm{p}}$, $\check{\mathrm{s}}$ なる相異なる二元が含まれている．
2. $\#\mathrm{Var}_\varepsilon > 1$

最初の仮定は，第 5.9.1 項で唯時世界 W に対して $W_{\{\pi,\omega\}}$ の二元 $\hat{\mathrm{p}}$, $\hat{\mathrm{s}}$ を定義したのに対応する．
以上の仮定の下で，各 $a \in A_\varepsilon$ に対して A_δ の二元 $\overleftarrow{a}$，$\overrightarrow{a}$ を次のように定義する．すなわち，$\#\mathrm{Var}_\varepsilon > 1$ との仮定により $a \neq x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ なる x が存在するから，そういう x を任意にとって

$$\overleftarrow{a} = \big(x\,\breve{o}\pi\,(a\,\breve{o}\omega\,\check{\mathrm{p}})\big)\,\Omega x \qquad\qquad \overrightarrow{a} = \big(x\,\breve{o}\pi\,(a\,\breve{o}\omega\,\check{\mathrm{s}})\big)\,\Omega x$$

とする．ただし，この式における x は a に応じて変わってもいいし，実際，変えなくてはならないが，$a \notin \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対しては同じ x をとることができる．なおこの定義は，やはり，唯時世界 W において各 $a \in W_\varepsilon$ に対して W_δ の二元 $\overleftarrow{a}$，$\overrightarrow{a}$ を定義したのに対応する．

補題 5.9.3 $a, b \in A_\varepsilon$ **のとき次の二式が成り立つ．**

$$a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle \asymp a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\check{\mathrm{p}}) \qquad\qquad a\,\breve{o}\pi\,\overrightarrow{b}\,\triangle \asymp a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\check{\mathrm{s}})$$

証明　$\overleftarrow{b} = f\,\Omega x$，$f = x\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\check{\mathrm{p}})$ とすれば，定理 5.5.16 と $b \neq x$ なることにより，

$$a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle = a\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle \asymp f(x/a) = a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}\omega\,\check{\mathrm{p}})$$

すなわち第一式が成り立つ．第二式も同様にして証明される．

定理 5.9.4 A **から唯時世界** W **への定付値** Φ **で** $\Phi\check{\mathrm{p}} = \hat{\mathrm{p}}$，$\Phi\check{\mathrm{s}} = \hat{\mathrm{s}}$ **なるものと** $a \in A_\varepsilon$ **および** $\nu \in \mathrm{Val}_W$ **について次の二式が成り立つ．**

$$(\Phi^*\overleftarrow{a})\nu = \overleftarrow{(\Phi^*a)\nu} \qquad\qquad (\Phi^*\overrightarrow{a})\nu = \overrightarrow{(\Phi^*a)\nu}$$

証明　左側の式だけ証明する（右側の証明も同様である）．$a, \overleftarrow{a}$ に自由に現れる単体変数は高々一個であり，$\#\mathrm{Var}_\varepsilon > 1$ と仮定しているから，$a, \overleftarrow{a}$ のどちらにも自由に現れない単体変数 x がある．任意の $s \in S$ をとって $\nu' = (x/s)\nu$ と定める．そうすると，次のように推論することができる．

$$\begin{aligned}
(\Phi^*\overleftarrow{a})\nu' \ni (\Phi^*x)\nu' &\iff (\Phi^*x)\nu'\,\breve{o}\pi\,\big((\Phi^*\overleftarrow{a})\nu'\big)\triangle = 1 && (\text{補題 5.2.10 による})\\
&\iff (\Phi^*x)\nu'\,\breve{o}\pi\,\big((\Phi^*a)\nu'\,\breve{o}\omega\,(\Phi^*\check{\mathrm{p}})\nu'\big) = 1 && (\text{補題 5.9.3 による})\\
&\iff (\Phi^*x)\nu'\,\breve{o}\pi\,\big((\Phi^*a)\nu'\,\breve{o}\omega\,\hat{\mathrm{p}}\big) = 1 && (\Phi\check{\mathrm{p}} = \hat{\mathrm{p}}\ \text{だから})\\
&\iff (\Phi^*x)\nu'\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{(\Phi^*a)\nu'}\triangle = 1 && (\text{補題 5.9.1 による})\\
&\iff \overleftarrow{(\Phi^*a)\nu'} \ni (\Phi^*x)\nu' && (\text{補題 5.2.10 による})
\end{aligned}$$

$(\Phi^*x)\nu' = s$ であり，また定理 4.4.1 により $(\Phi^*\overleftarrow{a})\nu' = (\Phi^*\overleftarrow{a})\nu$，$(\Phi^*a)\nu' = (\Phi^*a)\nu$ であるから，結局「$(\Phi^*\overleftarrow{a})\nu \ni s \iff \overleftarrow{(\Phi^*a)\nu} \ni s$」が成り立つ．$s$ が任意であるから，$(\Phi^*\overleftarrow{a})\nu = \overleftarrow{(\Phi^*a)\nu}$ が成り立つ．　**終**

この定理の意味を説明しよう．まず，各 $a \in A_\varepsilon$ に対して A_δ の元 $\overleftarrow{a}$，$\overrightarrow{a}$ を定めたのは，A 上に単項算法 $a \mapsto \overleftarrow{a}$ と $a \mapsto \overrightarrow{a}$ を定めたものとみなせる．同様に，唯時世界 W において各 $a \in W_\varepsilon$ に対して W_δ の元 $\overleftarrow{a}$，$\overrightarrow{a}$ を定めたのは，W 上に単項算法 $a \mapsto \overleftarrow{a}$ と $a \mapsto \overrightarrow{a}$ を定めたのである．従って，これらに対応して W の巾代数系 W^{Val_W} 上に単項算法 $\alpha \mapsto \overleftarrow{\alpha}$ と $\alpha \mapsto \overrightarrow{\alpha}$ を定め，Val_W の各元の定める W^{Val_W} から W への射影がこの二算法に関して準写であるようにすることができる．すなわち，各 $\alpha \in \mathrm{Val}_W \to W_\varepsilon$ に対して，$\mathrm{Val}_W \to W_\delta$ の元 $\overleftarrow{\alpha}$，$\overrightarrow{\alpha}$ を

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\alpha}\nu &= \overleftarrow{\alpha\nu} \\ \overrightarrow{\alpha}\nu &= \overrightarrow{\alpha\nu} \end{aligned} \qquad\qquad (\nu \in \mathrm{Val}_W)$$

と定める．そうすると定理 5.9.4 は，意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}_W}$ がこれらの算法に関しても擬写であることを示す．

問題 5.9.11 A から唯時世界 W への定付値 Φ で $\Phi\check{p} = \hat{p}$，$\Phi\check{s} = \hat{s}$ なるものと $a, b \in A_\varepsilon$ について次のことが成り立つ．

1. $a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle \asymp_\Phi b\,\breve{o}\pi\,\overrightarrow{a}\,\triangle \asymp_\Phi \overrightarrow{a}\,\exists\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle$
2. $a\,\breve{o}\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle \asymp_\Phi (\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle) \wedge (a\,\breve{o}\pi\, b\triangle)^\Diamond$
3. $\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle \asymp_\Phi \overrightarrow{b}\,\forall\pi\,\overrightarrow{a}\,\triangle$

問題 5.9.12 A から唯時世界 W への定付値 Φ で $\Phi\check{p} = \hat{p}$，$\Phi\check{s} = \hat{s}$ なるものと $a, b, c \in A_\varepsilon$ について次の四つのことが成り立つ．

1. $\preccurlyeq_\Phi \overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{a}\,\triangle$
2. $(\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle) \wedge (\overleftarrow{b}\,\forall\pi\,\overleftarrow{a}\,\triangle) \asymp_\Phi a\,\breve{o}\pi\, b\triangle$
3. $\overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle,\ \overleftarrow{b}\,\forall\pi\,\overleftarrow{c}\,\triangle \preccurlyeq_\Phi \overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{c}\,\triangle$
4. $\preccurlyeq_\Phi \overleftarrow{a}\,\forall\pi\,\overleftarrow{b}\,\triangle,\ \overleftarrow{b}\,\forall\pi\,\overleftarrow{a}\,\triangle$

第6章　格論理学

¢ 前章では，第 1 章・第 2 章で説明した数理心理学の問題意識と構想の下で，単相格言語という特殊な形式言語上の論理学すなわち単相格論理学について論じた．この章では，数理心理学の問題意識と構想により相応しく，かつより一般的に，格言語という名の特殊な形式言語上の論理学すなわち格論理学について論ずる．

第 1 章で数理心理学の基本的な考え方を説明した中で，数理心理学の当面の課題は心言語という形式言語上の論理学を研究することであると述べた．特に第 1.4.1 項において，心言語の代数構造は如何なるものかという基本問題 1 を掲げ，これに関し，心言語は普遍型付代数系であるという仮説 1 を提示した．と同時に，「普遍型付代数系」は非常に広い範囲の代数系の総称であって，基本問題 1 はこの普遍型付代数系の構造を助変数を込めて特定するよう求めているのだとも述べた．格言語という形式言語が，この問への妥当な答と期待されるものである．

第 5.1 節冒頭に記した通り，格言語の特徴は格集合という助変数と限量子にあり，限量子は複数の相に分かれている．しかしそういう複数の相のある格言語上の論理学にまで一挙に進むのは難しいので，相が一つしかない格言語すなわち単相格言語をまず前章で取り上げ，その理解を踏まえていよいよ，相の数が任意の格言語をこの章で取り上げるのである．

その意味で，格言語上の論理学は単相格言語上の論理学の一般化である．従って以下の説明の中には，前章の対応する部分を少し変更して繰り返すに過ぎないものも多い．そういう場合には，断り無しに説明を端折ることがある．読者は，端折られたものを前章から補いつつ読み進んでほしい．

ただしこの章では，前章の内容を一般化するだけではない．一般化したものの各所を逆に特殊化して数理心理学により相応しいものに作り上げることが最終の目標である．

6.1　格言語

$ 第 1.4.1 項で触れたように論理学の三本柱は形式言語の文法論・意味論・演繹論であるが，この節では格言語の文法論を行なう．

6.1.1　普遍型付代数系としての構成

§ 以下のように構成される普遍型付代数系 A を**格言語**と呼ぶ．

定理 3.5.1 により，A の普遍型付代数系としての構成法を述べるには，A の素元系 Prm と型代数系 T および型分割写像 $\tau \in \mathrm{Prm} \to \mathrm{T}$ がどういうものかを述べればいい．

そこでまず Prm としては，空集合でない集合を任意にとって，これを二つの部分集合 Con と Var $(\neq \emptyset)$ によって直和分割しておくものとする．

$$\mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \amalg \mathrm{Var} \qquad\qquad \mathrm{Var} \neq \emptyset$$

Con と Var それぞれの元を**定数**・**変数**と呼ぶ．

格言語 A の型代数系 T の台は，空でない集合 N と K を一組み指定することにより定まる．一つ目の集合 N を**相集合**と呼び，N の元を**相**と呼ぶ．二つ目の集合 K を**格集合**と呼び，K の元を**格**と呼ぶ．相集合 N と格集合 K には以下のものをあらかじめ定めておくものとする．まず相集合 N には，各 $\nu \in N$ に応じて**副相集合**という名の

$$N_\nu \subseteq N - \{\nu\}$$

をみたす特別な有限部分集合 N_ν をあらかじめ定めておくものとし，

$$N' = \bigcup_{\nu \in N} N_\nu$$

と定め，これを**従相集合**と呼ぶ．他方で格集合 K には，**主格**という名の特別な元 π と，各 $\mu \in N'$ に応じた μ 相の**従格**という名の特別な元 ϖ_μ とを，

$$\begin{aligned} &\pi \neq \varpi_\mu && (\mu \in N') \\ &\varpi_\mu \neq \varpi_{\mu'} && (\mu, \mu' \in N',\ \mu \neq \mu') \end{aligned}$$

なるようあらかじめ定めておくものとする [1]．そして K の部分集合 K' と K_ν を

$$K' = \{\varpi_\mu \mid \mu \in N'\} \qquad K_\nu = \{\varpi_\mu \mid \mu \in N_\nu\}$$

と定め $(\nu \in N)$，K' を**従格集合**と呼び，K_ν を ν 相の**副格集合**と呼ぶ．以上の定めによれば

$$\pi \in K - K' \qquad \#K' = \#N' \qquad \#K_\nu = \#N_\nu < \infty$$

が成り立ち，特に，$N_\nu = \emptyset$ なる ν については $K_\nu = \emptyset$ である．

型代数系 T の台は，K の巾集合 $\mathcal{P}K$ に相異なる特別な元 $\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ $(\nu \in N)$ を合わせたものである．

$$T = \left(\coprod_{\nu \in N} \{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\}\right) \amalg \mathcal{P}K \qquad \delta_\nu \neq \varepsilon_\nu \quad (\nu \in N)$$

素元系 Prm の T 分割写像 τ は，任意の $\nu \in N$ に対して変数系 Var の ε_ν 部分

$$\mathrm{Var}_{\varepsilon_\nu} = \mathrm{Var} \cap \tau^{-1}\varepsilon_\nu$$

が空集合でないように任意に定める．そして，Var の部分集合 Var_ε を次のように定める．

$$\mathrm{Var}_\varepsilon = \bigcup_{\nu \in N} \mathrm{Var}_{\varepsilon_\nu}$$

型代数系 T の代数構造は，次に示す九種類の算法から成るものとする．うち第二種の算法は，各 $\nu \in N$ に対して量系 $\mathbb{P}_\nu$ で $\#\mathbb{P}_\nu > 1$ なるものを一つずつ指定することにより定まる．この $\mathbb{P}_\nu$ を A の ν 相の**限量系**と呼ぶ．

限量系により「限量子」が定まる．すなわち，各 $\nu \in N$ に対して $\mathfrak{P}_\nu$ を $\mathbb{P}_\nu$ の区間包または偏区間包とし，

$$\neg\mathfrak{P}_\nu = \{\neg\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\nu\}$$

を $\mathfrak{P}_\nu$ の複製で $\neg\mathfrak{P}_\nu \cap \mathfrak{P}_\nu = \emptyset$ なるものとし，

$$\mathfrak{Q}_\nu = \neg\mathfrak{P}_\nu \cup \mathfrak{P}_\nu \qquad \mathfrak{Q} = \bigcup_{\nu \in N} \mathfrak{Q}_\nu$$

[1] ϖ は π の異体字である．端書きのギリシア文字の説明参照．

と定め，$\mathfrak{Q}$ の元を**限量子**と呼ぶ．また，$\bigcup_{\nu\in N}\mathfrak{P}_\nu$ の元と $\bigcup_{\nu\in N}\neg\mathfrak{P}_\nu$ の元を**正の限量子・負の限量子**と呼び分ける．なお，$\nu,\mu\in N$ が $\nu\neq\mu$ をみたしても $\mathbb{P}_\nu\neq\mathbb{P}_\mu$ とは限らない．それにも拘らず，**$\nu\neq\mu$ なら $\mathfrak{Q}_\nu\cap\mathfrak{Q}_\mu=\emptyset$ であるとみなす．**各 $\nu\in N$ に対して $\mathbb{P}_\nu$ の $(p,q]$ 等の区間に $(p,q]_\nu$ 等と ν を添えて表せば，みなしではなく本当に，$\nu\neq\mu$ なら $\mathfrak{Q}_\nu\cap\mathfrak{Q}_\mu=\emptyset$ となる．しかし，そういう煩雑な記法はとらず，みなすのである．このみなしにより，$\lambda\in\mathfrak{Q}$ であれば $\lambda\in\mathfrak{Q}_\nu$ なる $\nu\in N$ が一意に定まるから，この ν を **λ の相**と呼ぶ．逆に，$\mathfrak{Q}_\nu$ の元を **ν 相の限量子**と呼ぶ $(\nu\in N)$．

なお，第二種の算法の成す族の添数集合として，$\mathfrak{Q}\times K$ の部分集合 $\mathcal{J}$ を次のように定める．

$$\mathcal{J}=\bigl(\mathfrak{Q}\times(K-K')\bigr)\cup\bigcup_{\mu\in N'}(\mathfrak{Q}_\mu\times\{\varpi_\mu\})$$

また，第一種の算法を識別表示する便宜のために，$\breve{o}$ を限量子とは異なる記号とする．また，第八種の算法の全体を $\mathfrak{F}$ で表す．これは，部分集合 $\mathfrak{F}_\nu$ $(\nu\in N)$ により分割しておくものとする．

$$\mathfrak{F}=\coprod_{\nu\in N}\mathfrak{F}_\nu$$

また，各 $\mathfrak{f}\in\mathfrak{F}$ に応じて，$\mathfrak{f}\in\mathfrak{F}_\nu$ なる $\nu\in N$ を **$\mathfrak{f}$ の相**と呼ぶ．

算法 $\breve{o}k$ $(k\in K)$：　これらは二項算法であって，その定義は k が従格でないかあるかによって異なる．すなわち，$K\supseteq K'=\{\varpi_\mu\mid\mu\in N'\}$ であることに留意して次のように定める．

1. $k\in K-K'$ の場合の算法 $\breve{o}k$ は，任意の $\nu\in N$ に対する ε_ν と $k\in P$ なる任意の $P\in\mathcal{P}K$ の組み (ε_ν,P) に施されてこれを $\mathcal{P}K$ の元 $P-\{k\}$ に変える．

$$\mathrm{Dom}\,\breve{o}k=\{\varepsilon_\nu\mid\nu\in N\}\times\{P\in\mathcal{P}K\mid k\in P\}\qquad\qquad \varepsilon_\nu\,\breve{o}k\,P=P-\{k\}$$

2. 各 $\mu\in N'$ に対して算法 $\breve{o}\varpi_\mu$ は，ε_μ と $\varpi_\mu\in P$ なる任意の $P\in\mathcal{P}K$ の組み (ε_μ,P) に施されてこれを $\mathcal{P}K$ の元 $P-\{\varpi_\mu\}$ に変える．

$$\mathrm{Dom}\,\breve{o}\varpi_\mu=\{\varepsilon_\mu\}\times\{P\in\mathcal{P}K\mid\varpi_\mu\in P\}\qquad\qquad \varepsilon_\mu\,\breve{o}\varpi_\mu\,P=P-\{\varpi_\mu\}$$

算法 λk $\bigl((\lambda,k)\in\mathcal{J}\bigr)$：　これらは二項算法であって，その定義は限量子 λ の相によって異なる．すなわち $\lambda\in\mathfrak{Q}_\nu$ のとき算法 λk は，$\delta_\nu,\varepsilon_\nu$ と $k\in P$ なる任意の $P\in\mathcal{P}K$ の組み $(\delta_\nu,P),(\varepsilon_\nu,P)$ に施されてこれらを $\mathcal{P}K$ の元 $P-\{k\}$ に変える $(\nu\in N)$．

$$\lambda\in\mathfrak{Q}_\nu\text{ のとき}\qquad \mathrm{Dom}\,\lambda k=\{\delta_\nu,\varepsilon_\nu\}\times\{P\in\mathcal{P}K\mid k\in P\}\qquad\qquad \delta_\nu\,\lambda k\,P=\varepsilon_\nu\,\lambda k\,P=P-\{k\}$$

なお，$(\lambda,\varpi_\mu)\in\mathcal{J}$ なる λ は $\mathfrak{Q}_\mu$ に属すので，上の定めによれば次のことが成り立つ $(\mu\in N')$．

$$\mathrm{Dom}\,\lambda\varpi_\mu=\{\delta_\mu,\varepsilon_\mu\}\times\{P\in\mathcal{P}K\mid\varpi_\mu\in P\}\qquad\qquad \delta_\mu\,\lambda\varpi_\mu\,P=\varepsilon_\mu\,\lambda\varpi_\mu\,P=P-\{\varpi_\mu\}$$

算法 $\wedge,\vee,\Rightarrow$：　これら三つの算法は二項算法であって，任意の $(P,Q)\in(\mathcal{P}K)^2$ に施されてこれを $\mathcal{P}K$ の元 $P\cup Q$ に変える．

$$\mathrm{Dom}\wedge=\mathrm{Dom}\vee=\mathrm{Dom}\Rightarrow=(\mathcal{P}K)^2\qquad\qquad P\wedge Q=P\vee Q=P\Rightarrow Q=P\cup Q$$

算法 $\Diamond$：　これは単項算法であって，任意の $P\in\mathcal{P}K$ に施されてこれを変えない．

$$\mathrm{Dom}\,\Diamond=\mathcal{P}K\qquad\qquad P^{\Diamond}=P$$

算法 $\triangle$**：**　これは単項算法であって，$\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ に施されてこれを $\mathcal{P}K$ の元 $\{\pi\} \cup K_\nu$ に変える $(\nu \in N)$.

$$\mathrm{Dom}\,\triangle = \bigcup_{\nu \in N} \{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\} \qquad\qquad \delta_\nu\triangle = \varepsilon_\nu\triangle = \{\pi\} \cup K_\nu$$

従って $N_\nu = \emptyset$ なる ν については，$K_\nu = \emptyset$ であるから $\delta_\nu\triangle = \varepsilon_\nu\triangle = \{\pi\}$ である.

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　これらは二項算法であって，任意の $(\xi, \eta) \in \{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\}^2$ に施されてこれを δ_ν に変える $(\nu \in N)$.

$$\mathrm{Dom}\,\sqcap = \mathrm{Dom}\,\sqcup = \bigcup_{\nu \in N} \{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\}^2 \qquad (\xi, \eta) \in \{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\}^2 \text{ のとき } \xi \sqcap \eta = \xi \sqcup \eta = \delta_\nu$$

算法 $\square$**：**　これは単項算法であって，$\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ に施されてこれを δ_ν に変える $(\nu \in N)$.

$$\mathrm{Dom}\,\square = \bigcup_{\nu \in N} \{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\} \qquad\qquad {\delta_\nu}^{\square} = {\varepsilon_\nu}^{\square} = \delta_\nu$$

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F} = \coprod_{\nu \in N} \mathfrak{F}_\nu$**：**　これらの算法 $\mathfrak{f}$ の項数はそれぞれ任意であって，それを n とし $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}_\nu$ とすれば，$\mathfrak{f}$ は ε_ν の n 個組み $(\varepsilon_\nu, \ldots, \varepsilon_\nu)$ に施されてこれを ε_ν に変える $(\nu \in N)$.

$$\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}_\nu \text{ のとき} \qquad \mathrm{Dom}\,\mathfrak{f} = \{\varepsilon_\nu\}^n \qquad \mathfrak{f}(\varepsilon_\nu, \ldots, \varepsilon_\nu) = \varepsilon_\nu$$

算号 $\mathfrak{f}$ とそれの表す算法とを**関数記号**または**関号**と呼ぶ.

算法 $\Omega x \ \left(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon\right)$**：**　これらは単項算法であって，その定義は x の相によって異なる．すなわち $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\nu}$ のとき，算法 Ωx は任意の $P \in \mathcal{P}K_\nu$ に施されてこれを δ_ν に変える $(\nu \in N)$.

$$x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\nu} \text{ のとき} \qquad \mathrm{Dom}\,\Omega x = \mathcal{P}K_\nu \qquad P\,\Omega x = \delta_\nu$$

従って $N_\nu = \emptyset$ なる ν については，$K_\nu = \emptyset$ であるから $\mathrm{Dom}\,\Omega x = \{\emptyset\}$ である．算号 Ωx とそれの表す算法とを**抽象子**と呼ぶ.

型代数系 T の代数構造の定義は以上の通りである．これで集合 Prm と代数系 T および写像 $\tau \in \mathrm{Prm} {\rightarrow} T$ を定めたから，定理 3.5.1 により，普遍型付代数系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ で $\sigma|_{\mathrm{Prm}} = \tau$ なるものが一意に定まる．こういう普遍型付代数系を**格言語**と呼ぶ.

格言語 A は以下に示すように，定義 4.1.1 の意味での形式言語とみなされる．まず，素元系 Prm が二つの部分集合 Con と Var $(\neq \emptyset)$ によって直和分割されている．次に，型代数系 T の算号系を Λ で表せば,

$$\Lambda = \{\breve{o}k, \lambda k', \wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \triangle, \sqcap, \sqcup, \square, \mathfrak{f}, \Omega x \mid k \in K,\ (\lambda, k') \in \mathcal{J},\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F},\ x \in \mathrm{Var}_\varepsilon\}$$

であるから，集合 Γ を

$$\Gamma = \{\breve{o}k, \lambda k', \wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \triangle, \sqcap, \sqcup, \square, \mathfrak{f}, \Omega \mid k \in K,\ (\lambda, k') \in \mathcal{J},\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F}\}$$

と定めれば，Γ と Prm の直和 $\Gamma \amalg \mathrm{Prm}$ 上の普遍半群 $(\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^+$ において

$$\Lambda \subseteq \Gamma \cup \Gamma\mathrm{Var} \qquad\qquad \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} = \{\Omega x \mid x \in \mathrm{Var}_\varepsilon\}$$

が成り立って Ωx が単項算号であるから，Γ が算号基の要件をみたす．以上により，格言語は $\mathrm{Prm}, \mathbb{T}, \tau, \mathrm{Con}, \mathrm{Var}, \Gamma$ を文法とする形式言語であって，その可変子は抽象子 Ωx $(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ であり，不変子の全体 $\Lambda \cap \Gamma$ と修飾変数の全体 Qvar については

$$\Lambda \cap \Gamma = \{\breve{o}k, \lambda k', \wedge, \vee, \Rightarrow, \Diamond, \triangle, \sqcap, \sqcup, \Box, \mathfrak{f} \mid k \in K,\ (\lambda, k') \in \mathcal{J},\ \mathfrak{f} \in \mathfrak{F}\}$$
$$\mathrm{Qvar} = \mathrm{Var}_\varepsilon$$

が成り立つ．そこで定義 4.1.1 の後の約束に従って，T の算部分系 $T_{\Lambda\cap\Gamma}$ を $\mathfrak{U}$ で表す．また，後に $\mathcal{P}K$ $(\subseteq T)$ の元 $\emptyset$ を真偽とする論理系を作るので，先回りをして A の $\emptyset$ 型の元を**文**と呼ぶ．

以後，格言語 $(A, \mathbb{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ に言及するときは，これを定めるのに上で使った諸々の記号は，そうでない旨断らない限り，上と同じ意味で使う．

6.1.2　型分割と諸元の命名

§ 格言語 A は T を型代数系とする型付代数系であるから，台集合が t 部分 A_t $(t \in T)$ によって分割される．そして T は，相異なる元 $\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ $(\nu \in N)$ と格集合 K によって $T = \left(\amalg_{\nu\in N}\{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\}\right) \amalg \mathcal{P}K$ と定義されている．従って，A は次のように分割される．

$$A = \bigcup_{\nu\in N} A_{\{\delta_\nu,\varepsilon_\nu\}} \cup A_{\mathcal{P}K} = \bigcup_{\nu\in N} A_{\delta_\nu} \cup \bigcup_{\nu\in N} A_{\varepsilon_\nu} \cup \bigcup_{P\in\mathcal{P}K} A_P$$

$\bigcup_{\nu\in N} A_{\{\delta_\nu,\varepsilon_\nu\}} = \bigcup_{\nu\in N} A_{\delta_\nu} \cup \bigcup_{\nu\in N} A_{\varepsilon_\nu}$ と $A_{\mathcal{P}K} = \bigcup_{P\in\mathcal{P}K} A_P$ それぞれの元を**体元・用元**と呼び，$\bigcup_{\nu\in N} A_{\delta_\nu}$ と $\bigcup_{\nu\in N} A_{\varepsilon_\nu}$ それぞれの元を**複体元・単体元**と呼ぶ．また,「単体定数」「用定数」などの意味を表 5.1 に準じて定める．それらのうち $A_{\{\delta_\nu,\varepsilon_\nu\}}$ の元は，時に「ν 相の」を冠して，**ν 相の体元・複体元・単体元**などと呼ぶ $(\nu \in N)$．そうして，ν 相の体元の全体を G_ν で表し，体元の全体を G で表し，用元の全体を H で表す．

$$G_\nu = A_{\{\delta_\nu,\varepsilon_\nu\}} = A_{\delta_\nu} \cup A_{\varepsilon_\nu}$$
$$G = \bigcup_{\nu\in N} G_\nu = \bigcup_{\nu\in N} A_{\{\delta_\nu,\varepsilon_\nu\}} = \bigcup_{\nu\in N} A_{\delta_\nu} \cup \bigcup_{\nu\in N} A_{\varepsilon_\nu}$$
$$H = A_{\mathcal{P}K} = \bigcup_{P\in\mathcal{P}K} A_P$$

また，各用元 f の型すなわち $f \in A_P$ なる $P \in \mathcal{P}K$ を，f の**格域**とも呼び，時に K_f で表す．

6.1.3　算法の定義域と値域

§ ここでは，今までに定義した記号や用語を使って，格言語 A の算法の定義域と値域について説明する．証明は容易であるか第 5.1.3 項におけると同様であるから省略する．

算法 $\breve{o}k$ $(k \in K)$**：**　$a, f \in A$ と $k \in K$ に対して $a\,\breve{o}k\,f$ が定義されるためには，a が単体元であり，かつ k が従格であれば a と k は同相であり，かつ f が用元であって k が f の格域 P に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，$a\,\breve{o}k\,f$ は $P - \{k\}$ を格域とする用元である．

算法 λk $\left((\lambda, k) \in \mathcal{J}\right)$**：**　$a, f \in A$ と $(\lambda, k) \in \mathcal{J}$ に対して $a\,\lambda k\,f$ が定義されるためには，a が λ と同相の体元であり，かつ f が用元であって k が f の格域 P に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，$a\,\lambda k\,f$ は $P - \{k\}$ を格域とする用元である．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$**：**　$f, g \in A$ と $\mu \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ に対して $f\,\mu\,g$ が定義されるためには f, g が用元であることが必要十分であり，この条件の下で $f\,\mu\,g$ も用元となり，その格域は f, g の格域の和に等しい．

算法 $\Diamond$**：**　$f \in A$ に対して $f^{\Diamond}$ が定義されるためには f が用元であることが必要十分であり，この条件の下で $f^{\Diamond}$ は f と同じ格域を持つ用元となる．

算法 $\triangle$**：**　$a \in A$ に対して $a\triangle$ が定義されるためには a が体元であることが必要十分であり，この条件の下でさらに a の相を ν とすれば，$a\triangle$ は $\{\pi\} \cup K_\nu$ を格域とする用元となる $(\nu \in N)$．

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　$a, b \in A$ と $\mu \in \{\sqcap, \sqcup\}$ に対して $a\,\mu\,b$ が定義されるためには a, b が同相の体元であることが必要十分であり，この条件の下で $a\,\mu\,b$ は a, b と同相の複体元となる．

算法 $\square$**：**　$a \in A$ に対して $a^{\square}$ が定義されるためには a が体元であることが必要十分であり，この条件の下で $a^{\square}$ は a と同相の複体元となる．

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F} = \coprod_{\nu \in N} \mathfrak{F}_\nu$**：**　$\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}_\nu$ のとき，$(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ に対して $\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n)$ が定義されるためには $a_1, \ldots, a_n$ が ν 相の単体元で n が $\mathfrak{f}$ の T の算法としての項数に等しいことが必要十分であり，この条件の下で $\mathfrak{f}(a_1, \ldots, a_n)$ は ν 相の単体元となる $(\nu \in N)$．

算法 $\Omega x \ \left(x \in \mathrm{Var}_\varepsilon\right)$**：**　$x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\nu}$ のとき，$f \in A$ に対して $f\,\Omega x$ が定義されるためには f が K_ν の部分集合を格域とする用元であることが必要十分であり，この条件の下で $f\,\Omega x$ は ν 相の複体元となる $(\nu \in N)$．

問題 6.1.1　$a_1, \ldots, a_n, f \in A$ と $(\lambda_1, k_1), \ldots, (\lambda_n, k_n) \in (\{\breve{o}\} \times K) \cup \mathcal{J}$ に対して

$$g = a_1\,\lambda_1 k_1\,(a_2\,\lambda_2 k_2\,(\cdots\,(a_n\,\lambda_n k_n\,f)\cdots))$$

が定義されるためには，次の二条件のみたされることが必要十分である．

1. $\lambda_i = \breve{o}$ であれば a_i は単体元であり，$\lambda_i = \breve{o}$ で k_i が従格であれば a_i は k_i と同相の単体元であり，λ_i が限量子であれば a_i は λ_i と同相の体元である $(i = 1, \ldots, n)$．
2. f は用元であって $k_1, \ldots, k_n$ は f の格域 P の相異なる元である．

また，これらの条件の下で，g は $P - \{k_1, \ldots, k_n\}$ を格域とする用元である．

問題 6.1.2　H と A_P $(P \in \mathcal{P}K)$ は A の $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 部分系であり，しかも全域的である．

問題 6.1.3　G_ν と A_{δ_ν} は A の $\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 部分系であり，しかも全域的である $(\nu \in N)$．

問題 6.1.4　A_{ε_ν} は A の $\mathfrak{F}_\nu$ 部分系であり，しかも $\mathrm{Prm}_{\varepsilon_\nu}$ を素元系とする普遍汎 $\mathfrak{F}_\nu$ 代数系であり，特に $A_{\varepsilon_\nu} = [\mathrm{Prm}_{\varepsilon_\nu}]_{\mathfrak{F}_\nu}$ をみたす $(\nu \in N)$．

問題 6.1.5　$A_{\delta_\nu} - \mathrm{Prm}_{\delta_\nu}$ は空集合ではなく，その元は $b \sqcap c$，$b \sqcup c$，$b^{\square}$，$f\,\Omega x$ のいずれかの形をしている $(\nu \in N)$．

問題 6.1.6　$A_{\mathcal{P}K} - \mathrm{Prm}_{\mathcal{P}K}$ は空集合ではなく，その元は $a\,\lambda k\,f$，$f \wedge g$，$f \vee g$，$f \Rightarrow g$，$f^{\Diamond}$，$a\triangle$ のいずれかの形をしている．

6.1.4　単相格言語との関係

§ 格言語はその相集合が単元集合なら単相格言語となる．このことを説明するために以下，相集合 N を単元集合 $\{\nu\}$ としたときに格言語 $(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ の定め方がどうなるかに焦点を当てて，諸概念を復習する．ただし，相集合に依存しない概念は復習しない．

まず N 自身については，$\mathsf{N} = \{\nu\}$ であるから副相集合は N_ν のみであり，$\mathsf{N}_\nu \subseteq \mathsf{N} - \{\nu\} = \emptyset$ であるから N_ν は空集合と定まる．従って，副相集合の和と定められた従相集合 N' も空集合となる．このため，型代数系 T と素元系 Prm の T 分割写像 τ の定め方は以下のように簡略になる．

まず格集合 K については，$\mathsf{N}' = \mathsf{N}_\nu = \emptyset$ であるから，従格集合 $\mathsf{K}' = \{\varpi_\mu \mid \mu \in \mathsf{N}'\}$ と ν 相の副格集合 $\mathsf{K}_\nu = \{\varpi_\mu \mid \mu \in \mathsf{N}_\nu\}$ も空集合と定まる．従って，K として空でない任意の集合をとり，主格 π として K の任意の元をとることになる．

次に T の台は，$\mathsf{N} = \{\nu\}$ であるから

$$\mathrm{T} = \{\delta, \varepsilon\} \amalg \mathcal{P}\mathsf{K} \qquad\qquad \delta \neq \varepsilon$$

と定める．ただし，$\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ の添え字の ν は省略した．今後も必要のない添え字 ν は省略する．

次に Prm の T 分割写像 τ は，変数系 Var の ε 部分

$$\mathrm{Var}_\varepsilon = \mathrm{Var} \cap \tau^{-1}\varepsilon$$

が空集合でないように定める．

次に，量系 $\mathbb{P}$ で $\#\mathbb{P} > 1$ なるものを一つとり，$\mathfrak{P}$ をその区間包または偏区間包とし，$\mathfrak{P}$ の複製

$$\neg\mathfrak{P} = \{\neg\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{P}\}$$

で $\neg\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P} = \emptyset$ なるものをとり，

$$\mathfrak{Q} = \neg\mathfrak{P} \cup \mathfrak{P}$$

と定める．これが限量子の全体である．

最後に，T の九種の算法のうち N に依存する七種は，以下のように定まる．なお，第二種の算号の添数集合 $\mathcal{J}$ は，$\mathsf{K}' = \emptyset$，$\mathsf{N}' = \emptyset$ であるから $\mathfrak{Q} \times \mathsf{K}$ と定まる．

算法 $\breve{o}k$ $(k \in \mathsf{K})$**：**　$\mathsf{K}' = \emptyset$，$\mathsf{N} = \{\nu\}$，$\mathsf{N}' = \emptyset$ であるから

$$\mathrm{Dom}\,\breve{o}k = \{\varepsilon\} \times \{P \in \mathcal{P}\mathsf{K} \mid k \in P\} \qquad\qquad \varepsilon\,\breve{o}k\,P = P - \{k\}$$

算法 λk $\big((\lambda, k) \in \mathfrak{Q} \times \mathsf{K}\big)$**：**　$\mathsf{N} = \{\nu\}$ であるから

$$\mathrm{Dom}\,\lambda k = \{\delta, \varepsilon\} \times \{P \in \mathcal{P}\mathsf{K} \mid k \in P\} \qquad\qquad \delta\,\lambda k\,P = \varepsilon\,\lambda k\,P = P - \{k\}$$

算法 $\triangle$**：**　$\mathsf{N} = \{\nu\}$，$\mathsf{K}_\nu = \emptyset$ であるから

$$\mathrm{Dom}\,\triangle = \{\delta, \varepsilon\} \qquad\qquad \delta\triangle = \varepsilon\triangle = \{\pi\}$$

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　$\mathsf{N} = \{\nu\}$ であるから

$$\mathrm{Dom}\,\sqcap = \mathrm{Dom}\,\sqcup = \{\delta, \varepsilon\}^2 \qquad\qquad (\xi, \eta) \in \{\delta, \varepsilon\}^2 \text{ のとき } \xi \sqcap \eta = \xi \sqcup \eta = \delta$$

算法 $\square$：　$N=\{\nu\}$ であるから

$$\mathrm{Dom}\,\square=\{\delta,\varepsilon\} \qquad\qquad \delta^{\square}=\varepsilon^{\square}=\delta$$

算法 $\mathfrak{f}\in\mathfrak{F}=\coprod_{\nu\in N}\mathfrak{F}_\nu$：　項数を n とすれば，$N=\{\nu\}$ であるから

$$\mathrm{Dom}\,\mathfrak{f}=\{\varepsilon\}^n \qquad\qquad \mathfrak{f}(\varepsilon,\ldots,\varepsilon)=\varepsilon$$

算法 $\Omega x\ \bigl(x\in\mathrm{Var}_\varepsilon\bigr)$：　$N=\{\nu\}$, $K_\nu=\emptyset$ であるから

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x=\{\emptyset\} \qquad\qquad \emptyset\,\Omega x=\delta$$

以上，$N=\{\nu\}$ の場合の格言語 $(A,T,\sigma,\mathrm{Prm})$ の定め方を復習した．これを第 5.1.1 項での単相格言語の定め方と照らし合わせれば，同一であることが分かる．従って格言語は，その相集合が単元集合なら単相格言語である．

6.1.5　高岡言語

§ 単相格言語はこれまでの説明が示す通り，格言語の祖型であると共に格言語の特殊化である．ここでは，格言語のもう一つの特殊化について説明する．この特殊な格言語は，高岡洋介氏が 2006 年度東京大学修士論文「状況相を持つ格論理学」において定義した形式言語の類似物であるので，**高岡言語**と呼ぶ．端書き冒頭に記した通りこの本は加筆・改良のために頻繁に改訂し，格言語の定義法も変遷してきている．高岡氏の定義した形式言語は，この節で定義した通りの格言語の特殊化ではないが，単相格言語や以前の格言語に倣って定義したものであると共に，格言語の現在の定義法を示唆したものであり，その意味で格言語の母型である．ただし単相格言語も高岡言語も格言語も，その文法論はそれに先立つ世界論に応じたものであるから，より重要なのはそれら世界論であって，これら文法論の関連・相違は，それら世界論の関連・相違の結果に過ぎない．

高岡言語は，格言語 $(A,T,\sigma,\mathrm{Prm})$ の相集合 N と副相集合 N_ν $(\nu\in N)$ を

$$N=\{1,2\} \qquad\qquad N_1=\{2\} \qquad\qquad N_2=\emptyset$$

と特殊化して得られる．この特殊化は，副相集合の要件 $N_\nu\subseteq N-\{\nu\}$ をみたす $(\nu\in N)$．

こうした特殊化の結果，従相集合 N' は

$$N'=\{2\}$$

と定まり，従格は 2 相の従格 ϖ_2 のみであり，これが主格 π と異なる．

$$\pi\neq\varpi_2$$

さらに，従格集合 K' と副格集合 K_1,K_2 は次のように定まる．

$$K'=K_1=\{\varpi_2\} \qquad\qquad K_2=\emptyset$$

また，型代数系 T の台は，相異なる元 $\delta_1,\varepsilon_1,\delta_2,\varepsilon_2$ によって次のように定まる．

$$T=\{\delta_1,\varepsilon_1,\delta_2,\varepsilon_2\}\amalg\mathcal{P}K$$

そして T の九種の算法については，取り分け次のことが成り立つ．なお，第二種の算号の添数集合 $\mathcal{J}$ は，ν 相の限量子系 $\mathfrak{Q}_\nu$ $(\nu=1,2)$ によって次のように定まる．

$$\mathcal{J}=\bigl((\mathfrak{Q}_1\cup\mathfrak{Q}_2)\times(K-\{\varpi_2\})\bigr)\cup(\mathfrak{Q}_2\times\{\varpi_2\})$$

算法 $\check{o}k$ $(k \in K)$**：**

$$
\begin{array}{lll}
k \neq \varpi_2 \text{ のとき} & \mathrm{Dom}\,\check{o}k = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \times \{P \in \mathcal{P}K \mid k \in P\} & \varepsilon_1\, \check{o}k\, P = \varepsilon_2\, \check{o}k\, P = P - \{k\} \\
\varpi_2 \text{ に対し} & \mathrm{Dom}\,\check{o}\varpi_2 = \{\varepsilon_2\} \times \{P \in \mathcal{P}K \mid \varpi_2 \in P\} & \varepsilon_2\, \check{o}\varpi_2\, P = P - \{\varpi_2\}
\end{array}
$$

算法 λk $\big((\lambda, k) \in \mathcal{J}\big)$**：**　$\nu = 1, 2$ に対し

$$
\lambda \in \mathfrak{Q}_\nu \text{ のとき} \quad \mathrm{Dom}\,\lambda k = \{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\} \times \{P \in \mathcal{P}K \mid k \in P\} \qquad \delta_\nu\, \lambda k\, P = \varepsilon_\nu\, \lambda k\, P = P - \{k\}
$$

特に $(\lambda, \varpi_2) \in \mathcal{J}$ であれば，$\lambda \in \mathfrak{Q}_2$ であるから

$$
\mathrm{Dom}\,\lambda\varpi_2 = \{\delta_2, \varepsilon_2\} \times \{P \in \mathcal{P}K \mid \varpi_2 \in P\} \qquad \delta_2\, \lambda\varpi_2\, P = \varepsilon_2\, \lambda\varpi_2\, P = P - \{\varpi_2\}
$$

算法 $\triangle$**：**

$$
\mathrm{Dom}\,\triangle = \{\delta_1, \varepsilon_1, \delta_2, \varepsilon_2\} \qquad \delta_1 \triangle = \varepsilon_1 \triangle = \{\pi, \varpi_2\} \qquad \delta_2 \triangle = \varepsilon_2 \triangle = \{\pi\}
$$

算法 Ωx $\big(x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_1} \cup \mathrm{Var}_{\varepsilon_2}\big)$**：**

$$
\begin{array}{lll}
x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_1} \text{ のとき} & \mathrm{Dom}\,\Omega x = \big\{\emptyset, \{\varpi_2\}\big\} & \emptyset\, \Omega x = \{\varpi_2\}\, \Omega x = \delta_1 \\
x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_2} \text{ のとき} & \mathrm{Dom}\,\Omega x = \{\emptyset\} & \emptyset\, \Omega x = \delta_2
\end{array}
$$

6.2　格世界

\$ 前節では格言語の文法論を行なった．この節以降第 6.4 節までは，格言語の意味論を行なう．第 1.4.2 項で触れた通り，意味論は世界論・対応論・真偽論から成る．そこでまず世界論をここで行なう．

この節を通じ，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を格言語とし，**$N, K, \mathbb{P}_\nu, \mathfrak{Q}_\nu, \mathfrak{F}_\nu$ **をその相集合・格集合・限量系・限量子系・関号系とし，その他の** $U, \delta_\nu, \varepsilon_\nu$ **等の記号の意味もこれまで通りとする** $(\nu \in N)$**．**そして以下，A にとっての認識可能世界である**格世界**なるものを定義し，その構造を調べる．A は定義 4.1.1 の通りの形式言語の一種であるから，A にとっての認識可能世界とは，定義 4.2.1 で定めた通り，U 型代数系 W であって任意の $t \in \sigma\mathrm{Prm}$ に対して $W_t \neq \emptyset$ をみたすもののことを言う．A にとって認識可能な格世界は，そういう認識可能世界の一種であると共に，第 5.2 節の単相格世界の定義を拡張して得られる．ただし「A にとって認識可能な」は，「A の相集合・格集合・限量系・限量子系・関号系の五つ組み $N, K, \mathbb{P}_\nu, \mathfrak{Q}_\nu, \mathfrak{F}_\nu$ から構成された」と同義で重要な語句であるものの，常に付けるのは煩わしいので，誤解の恐れの無い場合には省略する．

第 1.4.2 項で述べた通り如何なる論理学においても，問題意識に応じて認識可能世界の範囲を適当に限定したものを，**認識対象世界**の範囲としなければならない．そこで格論理学においては，認識可能世界の中の格世界だけを認識対象世界と考える．それは，ひとえに心理学的問題意識による．第 1.4.1 項で述べた通り，心言語の代数構造が如何なるものかという基本問題 1 は，単独で答えられるものではなく，人間にとっての認識の対象世界が如何なるものかという基本問題 4 に答えなければ答えられない問である．そして，心言語は格言語であるとの仮説に先立って人間の認識の対象世界と仮設されたのが格世界である（これら仮説・仮設は前章のそれを修正したものである）．格世界の定義より先に格言語の定義を記したのは，記述上の便宜からに過ぎない．

6.2.1　台と型写像

§ 格言語 A にとって認識可能な格世界 W の台は，A の相集合 N を添数集合とする空でない集合から成る族 $(S_\nu)_{\nu\in N}$ の直和

$$S = \coprod_{\nu\in N} S_\nu$$

を任意にとり，これらと各 $\nu \in N$ に対する集合族 $(S_\mu)_{\mu\in N_\nu}$ の直積 [2]

$$O_\nu = \prod_{\mu\in N_\nu} S_\mu$$

と A の格集合 K によって

$$W = \bigcup_{\nu\in N} \bigl(O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})\bigr) \cup S \cup \bigcup_{P\in\mathcal{P}K} \bigl((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\bigr)$$

と定める．ただし，右辺の $P{\rightsquigarrow}S$ は

$$P{\rightsquigarrow}S = \{\theta \in P{\to}S \mid \varpi_\mu \in P \text{ なる任意の } \mu \in N' \text{ に対して } \theta\varpi_\mu \in S_\mu\}$$

と定義する．集合 S および S_ν を W の**基底**および ν **相の基底**と呼び，O_ν を W の ν 相の**修飾**と呼ぶ ($\nu \in N$)．また N, K は，A の相集合・格集合であったが，W の相集合・格集合とも呼ぶ.

なお，$K' = \{\varpi_\mu \mid \mu \in N'\}$ であったから，

$$P \in \mathcal{P}(K - K') \implies P{\rightsquigarrow}S = P{\to}S$$

が成り立ち，特に

$$\emptyset{\rightsquigarrow}S = \emptyset{\to}S \qquad\qquad \{\pi\}{\rightsquigarrow}S = \{\pi\}{\to}S$$

が成り立つ．第二式は $\pi \in K - K'$ と定めてあったことによる．また，

$$Q \subseteq P \in \mathcal{P}K,\ \theta \in P{\rightsquigarrow}S \implies \theta|_Q \in Q{\rightsquigarrow}S$$

が成り立つ．これらのことは今後，断りなく使うことがある．

なお，W の台の上記定義において空集合 $\emptyset \in \mathcal{P}K$ については，端書きに記した空集合律により

$$\emptyset{\rightsquigarrow}S = \{\emptyset\}$$

従って $(\emptyset{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T} = \{\emptyset\}{\to}\mathbb{T}$ であるので，同じく端書きに記した一乗便法により

$$(\emptyset{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T} = \mathbb{T}$$

と約定する．つまり，写像 $f \in (P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}$ を $\theta \in P{\rightsquigarrow}S$ に施して得られる $\mathbb{T}$ の元は当然 $f\theta$ と書くが，$P = \emptyset$ の場合には $f \in \mathbb{T}$，$\theta = \emptyset$，$f\emptyset = f$ である．また，$N_\nu = \emptyset$ なる ν については同様に，空集合律により $O_\nu = \{\emptyset\}$，従って $O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T}) = \{\emptyset\}{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$ であるから，一乗便法により $O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T}) = S_\nu{\to}\mathbb{T}$ と約定する．つまり，写像 $a \in O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$ を $o \in O_\nu$ に施して得られる $S_\nu{\to}\mathbb{T}$ の元は当然 ao と書くが，$N_\nu = \emptyset$ の場合には $a \in S_\nu{\to}\mathbb{T}$，$o = \emptyset$，$a\emptyset = a$ である．こういう二通りの約定を**空集合規約**と呼ぶ.

[2]直積の概念とその元の表し方については端書き参照.

W の型写像を定めるには，型分割 $W = \bigcup_{t \in T} W_t$ を，$W_t \neq \emptyset$ $(t \in \sigma\mathrm{Prm})$ かつ $W_\emptyset = \mathbb{T}$ なるよう定めなければならない．$W_\emptyset = \mathbb{T}$ とするのは，前述の通り後に $\emptyset$ を真偽とする論理系を作るためである．そこで，$T = \left(\coprod_{\nu \in N}\{\delta_\nu, \varepsilon_\nu\}\right) \amalg \mathcal{P}K$ と $\delta_\nu \neq \varepsilon_\nu$ $(\nu \in N)$ に留意して

$$W_{\delta_\nu} = O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T}) \qquad W_{\varepsilon_\nu} = S_\nu \qquad W_P = (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$$

と定める $(\nu \in N,\ P \in \mathcal{P}K)$．そうすると，$\sigma\mathrm{Prm}$ の如何に関わらず

$$W_t \neq \emptyset \quad (t \in T) \qquad W_\emptyset = \mathbb{T}$$

が成り立ち，W は次のように分割される．

$$W = \bigcup_{\nu \in N} W_{\delta_\nu} \cup \bigcup_{\nu \in N} W_{\varepsilon_\nu} \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} W_P$$

記述の便のために

$$E_\nu = W_{\delta_\nu} \cup W_{\varepsilon_\nu} \quad (\nu \in N) \qquad E = \bigcup_{\nu \in N} \left(W_{\delta_\nu} \cup W_{\varepsilon_\nu}\right) \qquad F = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} W_P$$

と定める．そうすると次の式が成り立つ．

$$E = \bigcup_{\nu \in N} E_\nu = \bigcup_{\nu \in N} W_{\delta_\nu} \cup \bigcup_{\nu \in N} W_{\varepsilon_\nu} \qquad W = E \cup F$$

E と F それぞれの元を**実在**・**事態**と呼び，$\bigcup_{\nu \in N} W_{\delta_\nu}$ と $\bigcup_{\nu \in N} W_{\varepsilon_\nu}$ それぞれの元を**複実在**・**単実在**と呼ぶ．E_ν の元は，時に「ν 相の」を冠して，ν **相の実在**・**複実在**・**単実在**などと呼ぶ $(\nu \in N)$．また，事態 f の型すなわち $f \in W_P$ なる $P \in \mathcal{P}K$ を，f の**枠**または**枠組み**とも呼び，時に K_f で表す．

注意 6.2.1 格世界 W は完備ブール束を沢山含んでいる．すなわちまず問題 3.13.16 により，$\mathbb{T}$ $(= W_\emptyset)$ は通常の順序関係 $\leq$ について完備ブール束であり，そのブール論法は

$$a \wedge b = \inf\{a, b\} \qquad a \vee b = \sup\{a, b\} \qquad a^\Diamond = 1 - a \qquad a \Rightarrow b = \sup\{1 - a, b\}$$

をみたす．従って問題 3.13.18 により，$W_P = (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ は $\mathbb{T}$ の巾ブール束として完備ブール束であり，$W_{\delta_\nu} = O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})$ は，$\mathbb{T}$ の巾ブール束 $S_\nu \to \mathbb{T}$ の巾ブール束として完備ブール束である $(\nu \in N)$．そこで以降，W_P の順序関係を，いずれの P に対しても $\leq$ で表し，W_{δ_ν} の順序関係を，いずれの ν に対しても $\sqsubset$ で表す．また，W_P と W_{δ_ν} のいずれについても，最小元と最大元を 0 と 1 で表す．$W_\emptyset$ の 1 と 0 は W における真と偽に他ならない．

問題 3.13.9 によれば，W_P の順序関係 $\leq$ については

$$f \leq g \iff \text{任意の } \theta \in P \rightsquigarrow S \text{ に対して } f\theta \leq g\theta$$

が成り立ち，W_{δ_ν} の順序関係 $\sqsubset$ については

$$a \sqsubset b \iff \text{任意の } o \in O_\nu \text{ と } s \in S_\nu \text{ に対して } (ao)s \leq (bo)s$$

が成り立つ．また問題 3.9.12 または問題 3.13.8 によれば，W_P の 0 と 1 はそれぞれ，任意の $\theta \in P \rightsquigarrow S$ に対して $0\theta = 0$ と $1\theta = 1$ をみたすことで特徴付けられ，W_{δ_ν} の 0 と 1 はそれぞれ，任意の $o \in O_\nu$ と $s \in S_\nu$ に対して $(0o)s = 0$ と $(1o)s = 1$ をみたすことで特徴付けられる．

問題 6.2.1 $O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})$ の各元 a に応じて，$(O_\nu \times S_\nu) \to \mathbb{T}$ の元 a_* で各 $(o, s) \in O_\nu \times S_\nu$ に対して $a_*(o, s) = (ao)s$ をみたすものが一意に存在し，写像 $a \mapsto a_*$ は $O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})$ から $(O_\nu \times S_\nu) \to \mathbb{T}$ への全単射である．この意味で，$O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})$ は $\left(\prod_{\mu \in N_\nu \cup \{\nu\}} S_\mu\right) \to \mathbb{T}$ と同一視される $(\nu \in N)$．

略解　補題 3.10.1 による．

6.2.2　代数構造

§ 格言語 A にとって認識可能な格世界 W の U 型代数構造を決める助変数が三つある．一つ目は各 $\nu \in N$ に対して各 $o \in O_\nu$ に応じて S_ν 上に定められた反射的関係 $\ni_o$ であり，これらの関係 $\ni_o$ $(o \in O_\nu)$ を S_ν 上の**基本関係**または W の ν 相の基本関係と呼ぶ．ただし $N_\nu = \emptyset$ の場合は，空集合律により $O_\nu = \{\emptyset\}$，従って S_ν 上の基本関係は $\ni_\emptyset$ 唯一つである．これを $\ni_\nu$ で表す．

助変数の二つ目は各 $\nu \in N$ に対して S_ν 上に定められた $\mathbb{P}_\nu$ 測度 $X \mapsto |X|_\nu$ であり，これを W の ν 相の**測度**とも呼ぶ．なお $\mathbb{P}_\nu$ $(\nu \in N)$ は，A の限量系であったが，W の限量系とも呼ぶ．

助変数の三つ目は各 $\mu \in N'$ に応じて定められた S_μ の元 p_μ であり，これを S_μ の**基点**または W の μ 相の基点と呼ぶ．

格世界 W の U 型代数構造を定めるための準備が五つある．その一つ目として，S_ν 上の基本関係 $\ni_o$ を $\bigl(O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})\bigr) \cup S_\nu, S_\nu$ 間の関係にまで次のように拡張する $(o \in O_\nu,\ \nu \in N)$．すなわち $a \in O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})$，$b \in S_\nu$ の場合には，$a \ni_o b$ なることを

$$a \ni_o b \iff (ao)b = 1$$

と定義する．ただし $(ao)b$ は，写像 $a \in O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})$ を $o \in O_\nu$ に施して得られる写像 $ao \in S_\nu \to \mathbb{T}$ をさらに $b \in S_\nu$ に施して得られる $\mathbb{T}$ の元を表す．こう拡張された関係 $\ni_o$ を W の ν 相の**拡張関係**と呼ぶ．ただし $N_\nu = \emptyset$ の場合は，$O_\nu = \{\emptyset\}$ なので S_ν 上の基本関係は $\ni_\emptyset$ 唯一つであり，これを $\ni_\nu$ で表すよう定めてあったが，これを $\{\emptyset\} \to (S_\nu \to \mathbb{T}) = S_\nu \to \mathbb{T}$ という空集合規約の下で $(S_\nu \to \mathbb{T}) \cup S_\nu, S_\nu$ 間の関係にまで拡張する．つまり $a \in S_\nu \to \mathbb{T}$，$b \in S_\nu$ については，

$$a \ni_\nu b \iff ab = 1$$

であって，ab は写像 $a \in S_\nu \to \mathbb{T}$ を $b \in S_\nu$ に施して得られる $\mathbb{T}$ の元を表す．

準備の二つ目として，各 $\nu \in N$ と各 $\theta \in P \rightsquigarrow S$ $(P \in \mathcal{P}K)$ に対して，$\bigl(O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})\bigr) \cup S_\nu, S_\nu$ 間の関係 $\ni_{\nu,\theta}$ を次のように定め，これを W の ν 相の θ **関係**と呼ぶ．すなわち，$\theta \in P \rightsquigarrow S$ であるから，$\varpi_\mu \in P$ なる任意の $\mu \in N_\nu$ に対して $\theta\varpi_\mu \in S_\mu$ であり，従って O_ν の元 $o = (o_\mu)_{\mu \in N_\nu}$ を

$$o_\mu = \begin{cases} \theta\varpi_\mu & \cdots \quad \varpi_\mu \in P \text{ のとき} \\ p_\mu & \cdots \quad \varpi_\mu \notin P \text{ のとき} \end{cases} \qquad (\mu \in N_\nu) \tag{6.2.1}$$

と定めることができるから，この o に応ずる拡張関係 $\ni_o$ を $\ni_{\nu,\theta}$ とする．特に $N_\nu = \emptyset$ なる ν に対しては，$O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T}) = S_\nu \to \mathbb{T}$，$o = \emptyset$ であるから，$\ni_{\nu,\theta}$ は $(S_\nu \to \mathbb{T}) \cup S_\nu, S_\nu$ 間の関係であって，θ によらずに $\ni_{\nu,\theta} = \ni_\nu$ である．なお，$\ni_o$ が反射的であるから $\ni_{\nu,\theta}$ も反射的である．

準備の三つ目として，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$s \in S$ のとき，各 $\theta \in (P - \{k\}) \to S$ に対して，$P \to S$ の元 $(k/s)\theta$ を次のように定義する（二か所で $\rightsquigarrow S$ でなく $\to S$ であることに注意）．

$$\bigl((k/s)\theta\bigr)x = \begin{cases} s & \cdots \quad x = k \text{ のとき} \\ \theta x & \cdots \quad x \in P - \{k\} \text{ のとき} \end{cases}$$

$P = \{k\}$ の場合には，$P - \{k\} = \emptyset$，従って空集合律により $\theta = \emptyset$ となるが，この場合は $(k/s)\theta$ を (k/s) で表すことと約定する．すなわち，(k/s) は $(k/s)k = s$ なる $\{k\} \to S$ の元である．こういう約定も，$(\emptyset \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T} = \mathbb{T}$ などとした先の約定と同様に**空集合規約**と呼ぶ．

準備の四つ目として，$K \supseteq K' = \{\varpi_\mu \mid \mu \in N'\}$ であることに留意して，各 $k \in K$ に対して S の部分集合 S_k を次のように定める．

$$S_k = \begin{cases} S & \cdots \quad k \in K - K' \text{ のとき} \\ S_\mu & \cdots \quad k = \varpi_\mu \text{ のとき } (\mu \in N') \end{cases} \tag{6.2.2}$$

そうすると $k \in P \in \mathcal{P}K$，$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ のとき，$s \in S$ が $(k/s)\theta \in P \rightsquigarrow S$ をみたすためには $s \in S_k$ であることが必要十分である．また，$(\lambda, k) \in \mathcal{J}$，$\lambda \in \mathfrak{Q}_\nu$ であれば，$S_\nu \subseteq S_k$ が成り立つ $(\nu \in N)$．なぜなら，$k = \varpi_\mu$ $(\mu \in N')$ のときには $\mathcal{J}$ の定義により $\nu = \mu$ となるからである．

準備の五つ目として，各 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\nu$ に対して

$$\neg(\neg\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \tag{6.2.3}$$

と定める $(\nu \in N)$．従って，$\lambda \in \mathfrak{P}_\nu$ なら $\neg\lambda \in \neg\mathfrak{P}_\nu$ であり，$\lambda \in \neg\mathfrak{P}_\nu$ なら $\neg\lambda \in \mathfrak{P}_\nu$ である．

以上の準備の下で，W の U 型代数構造を以下のように定める．その算法は，格言語 A の九種の算法から抽象子を除いた八種に対応する．

算法 $\breve{o}k$ $(k \in K)$**：**　これらは二項算法であって，$k \in P$ なる任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(s, f) \in S_k \times \big((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P - \{k\}) \rightsquigarrow S\big) \to \mathbb{T}$ の元 $s\,\breve{o}k\,f$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$(s\,\breve{o}k\,f)\theta = f\big((k/s)\theta\big) \qquad \big(\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S\big)$$

(6.2.2) への注意により $(k/s)\theta \in P \rightsquigarrow S$ であるから，この定義は可能である．

算法 λk $\big((\lambda, k) \in \mathcal{J}\big)$**：**　これらは二項算法であって，その定義は限量子 λ の相によって異なる．すなわち $\lambda \in \mathfrak{Q}_\nu$ $(\nu \in N)$ のときの算法 λk は，$k \in P$ なる任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(a, f) \in \Big(\big(O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})\big) \cup S_\nu\Big) \times \big((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P - \{k\}) \rightsquigarrow S\big) \to \mathbb{T}$ の元 $a\,\lambda k\,f$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して

$$(a\,\lambda k\,f)\theta = 1 \iff \begin{cases} \big|\big\{s \in S_\nu \mid a\ \exists_{\nu,\theta}\ s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 0\big\}\big|_\nu \in \neg\lambda & \cdots \quad \lambda \in \neg\mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \\ \big|\big\{s \in S_\nu \mid a\ \exists_{\nu,\theta}\ s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 1\big\}\big|_\nu \in \lambda & \cdots \quad \lambda \in \mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \end{cases}$$

(6.2.2) への注意により $S_\nu \subseteq S_k$，従って $s \in S_\nu$ なら $(k/s)\theta \in P \rightsquigarrow S$ であるから，この定義は可能である．なお，$f\big((k/s)\theta\big) = (s\,\breve{o}k\,f)\theta$ である．

特に $\lambda \in \mathfrak{Q}_\nu$，$N_\nu = \emptyset$ のときの算法 λk は，$k \in P$ なる任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(a, f) \in \big((S_\nu \to \mathbb{T}) \cup S_\nu\big) \times \big((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P - \{k\}) \rightsquigarrow S\big) \to \mathbb{T}$ の元 $a\,\lambda k\,f$ を生じ，任意の $\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して

$$(a\,\lambda k\,f)\theta = 1 \iff \begin{cases} \big|\big\{s \in S_\nu \mid a\ \exists_\nu\ s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 0\big\}\big|_\nu \in \neg\lambda & \cdots \quad \lambda \in \neg\mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \\ \big|\big\{s \in S_\nu \mid a\ \exists_\nu\ s,\ f\big((k/s)\theta\big) = 1\big\}\big|_\nu \in \lambda & \cdots \quad \lambda \in \mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \end{cases}$$

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$：　これらは二項算法であって，任意の $P, Q \in \mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(f, g) \in \bigl((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}\bigr) \times \bigl((Q \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}\bigr)$$

に施されて $\bigl((P \cup Q) \rightsquigarrow S\bigr) \to \mathbb{T}$ の元 $f \wedge g$，$f \vee g$，$f \Rightarrow g$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$\begin{aligned} (f \wedge g)\theta &= f(\theta|_P) \wedge g(\theta|_Q) \\ (f \vee g)\theta &= f(\theta|_P) \vee g(\theta|_Q) \\ (f \Rightarrow g)\theta &= f(\theta|_P) \Rightarrow g(\theta|_Q) \end{aligned} \qquad \bigl(\theta \in (P \cup Q) \rightsquigarrow S\bigr)$$

$\theta \in (P \cup Q) \rightsquigarrow S$ であれば $\theta|_P \in P \rightsquigarrow S$，$\theta|_Q \in Q \rightsquigarrow S$ となるので，この定義は可能である．

算法 $\lozenge$：　これは単項算法であって，任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$$

に施されて $(P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ の元 $f^{\lozenge}$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$(f^{\lozenge})\theta = (f\theta)^{\lozenge} \qquad (\theta \in P \rightsquigarrow S)$$

算法 $\triangle$：　これは単項算法であって，任意の $\nu \in N$ に対して，任意の

$$a \in \bigl(O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})\bigr) \cup S_\nu$$

に施されて $\bigl((\{\pi\} \cup K_\nu) \rightsquigarrow S\bigr) \to \mathbb{T}$ の元 $a\triangle$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta \in (\{\pi\} \cup K_\nu) \rightsquigarrow S$ に対して

$$(a\triangle)\theta = 1 \iff \theta\pi \in S_\nu \text{ であって } a \ni_{\nu,\theta} \theta\pi$$

この定義を関係 $\ni_{\nu,\theta}$ の定義によって書き直せば，$K_\nu = \{\varpi_\mu \mid \mu \in N_\nu\}$ であるから次にようになる．

$$(a\triangle)\theta = 1 \iff \begin{cases} \theta\pi \in S_\nu \\ o = (\theta\varpi_\mu)_{\mu \in N_\nu} \in O_\nu \text{ に対して } a \ni_o \theta\pi \end{cases}$$

特に $N_\nu = \emptyset$ なる ν に対しては，$O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T}) = S_\nu \to \mathbb{T}$，$K_\nu = \emptyset$ であって，任意の $\theta \in \{\pi\} \rightsquigarrow S$ に対して $\ni_{\nu,\theta} = \ni_\nu$ であるから，算法 $\triangle$ は任意の

$$a \in (S_\nu \to \mathbb{T}) \cup S_\nu$$

に施されて $(\{\pi\} \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ の元 $a\triangle$ を生じ，任意の $\theta \in \{\pi\} \rightsquigarrow S$ に対して次のことが成り立つ．

$$(a\triangle)\theta = 1 \iff \theta\pi \in S_\nu \text{ であって } a \ni_\nu \theta\pi$$

なお，$\{\pi\} \rightsquigarrow S = \{\pi\} \to S$ である．

算法 $\sqcap, \sqcup$：　これらは二項算法であって，任意の $\nu \in N$ に対して，任意の

$$(a, b) \in \Bigl(\bigl(O_\nu \to (S_\nu \to \mathbb{T})\bigr) \cup S_\nu\Bigr)^2$$

に施されて $O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$ の元 $a \sqcap b$，$a \sqcup b$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$\begin{aligned} a \sqcap b \ni_o s &\iff a \ni_o s \text{ かつ } b \ni_o s \\ a \sqcup b \ni_o s &\iff a \ni_o s \text{ または } b \ni_o s \end{aligned} \qquad (o \in O_\nu,\ s \in S_\nu)$$

これで $a \sqcap b$，$a \sqcup b$ が定まるのは，$c \in O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$，$o \in O_\nu$，$s \in S_\nu$ に対しては拡張関係 $\ni_o$ が「$(co)s = 1 \iff c \ni_o s$」をみたすからである．

特に $N_\nu = \emptyset$ なる ν に対しては，$O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T}) = S_\nu{\to}\mathbb{T}$ であるから，$\sqcap, \sqcup$ は任意の

$$(a, b) \in \big((S_\nu{\to}\mathbb{T}) \cup S_\nu\big)^2$$

に施されて $S_\nu{\to}\mathbb{T}$ の元 $a \sqcap b$，$a \sqcup b$ を生じ，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} a \sqcap b \ni_\nu s &\iff a \ni_\nu s \text{ かつ } b \ni_\nu s \\ a \sqcup b \ni_\nu s &\iff a \ni_\nu s \text{ または } b \ni_\nu s \end{aligned} \qquad (s \in S_\nu)$$

算法 $\square$：　これは単項算法であって，任意の $\nu \in N$ に対して，任意の

$$a \in \big(O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})\big) \cup S_\nu$$

に施されて $O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$ の元 $a^\square$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$a^\square \ni_o s \iff a \not\ni_o s \qquad (o \in O_\nu,\ s \in S_\nu)$$

これで $a^\square$ が定まるのは，$a \sqcap b$，$a \sqcup b$ が定まるのと同じ理由からである．

特に $N_\nu = \emptyset$ なる ν に対しては，$O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T}) = S_\nu{\to}\mathbb{T}$ であるから，$\square$ は任意の

$$a \in (S_\nu{\to}\mathbb{T}) \cup S_\nu$$

に施されて $S_\nu{\to}\mathbb{T}$ の元 $a^\square$ を生じ，次のことが成り立つ．

$$a^\square \ni_\nu s \iff a \not\ni_\nu s \qquad (s \in S_\nu)$$

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F} = \coprod_{\nu \in N} \mathfrak{F}_\nu$：　これらはそれぞれ，T の算法としての項数と同じ項数を持ち，それが n で相が ν なら，任意の

$$(s_1, \ldots, s_n) \in (S_\nu)^n$$

に施されて S_ν の元 $\mathfrak{f}(s_1, \ldots, s_n)$ を生ずる $(\nu \in N)$．その定義は任意とする．

W の U 型代数構造は以上の通りである．これら算法の定義域と値域について第 6.1.3 項と同じ形式でまとめれば以下のようになる．

算法 $\breve{o}k$ $(k \in K)$：　$s, f \in W$ と $k \in K$ に対して $s\,\breve{o}k\,f$ が定義されるためには，s が単実在であり，かつ k が従格であれば s と k は同相であり，かつ f が事態であって k が f の枠 P に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，$s\,\breve{o}k\,f$ は $P - \{k\}$ を枠とする事態である．

算法 λk $\big((\lambda, k) \in \mathcal{J}\big)$：　$a, f \in W$ と $(\lambda, k) \in \mathcal{J}$ に対して $a\,\lambda k\,f$ が定義されるためには，a が λ と同相の実在であり，かつ f が事態であって k が f の枠 P に属すことが必要十分であり，これらの条件の下で，$a\,\lambda k\,f$ は $P - \{k\}$ を枠とする事態である．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$**：**　$f, g \in W$ と $\mu \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ に対して $f\,\mu\,g$ が定義されるためには f, g が事態であることが必要十分であり，この条件の下で $f\,\mu\,g$ も事態となり，その枠は f, g の枠の和に等しい．

算法 $\Diamond$**：**　$f \in W$ に対して $f^{\Diamond}$ が定義されるためには f が事態であることが必要十分であり，この条件の下で $f^{\Diamond}$ は f と同じ枠を持つ事態となる．

算法 $\triangle$**：**　$a \in W$ に対して $a\triangle$ が定義されるためには a が実在であることが必要十分であり，この条件の下でさらに a の相を ν とすれば，$a\triangle$ は $\{\pi\} \cup K_\nu$ を枠とする事態となる $(\nu \in N)$．

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　$a, b \in W$ と $\mu \in \{\sqcap, \sqcup\}$ に対して $a\,\mu\,b$ が定義されるためには a, b が同相の実在であることが必要十分であり，この条件の下で $a\,\mu\,b$ は a, b と同相の複実在となる．

算法 $\Box$**：**　$a \in W$ に対して $a^{\Box}$ が定義されるためには a が実在であることが必要十分であり，この条件の下で $a^{\Box}$ は a と同相の複実在となる．

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F} = \coprod_{\nu \in N} \mathfrak{F}_\nu$**：**　$\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}_\nu$ のとき，$(s_1, \ldots, s_n) \in W^n$ に対して $\mathfrak{f}(s_1, \ldots, s_n)$ が定義されるためには $s_1, \ldots, s_n$ が ν 相の単実在で n が $\mathfrak{f}$ の項数であることが必要十分であり，この条件の下で $\mathfrak{f}(s_1, \ldots, s_n)$ は ν 相の単実在となる $(\nu \in N)$．

以上のまとめは，W が実際に U 型代数系となったことを示している．そして $W_t \neq \emptyset$ $(t \in T)$ であったから，W は格言語 A にとっての認識可能世界となる．こうして出来る認識可能世界を A にとって認識可能な**格世界**と呼び，それらだけを A にとっての認識対象世界と考える．

注意 6.2.2 以上の説明によれば，A にとって認識可能な格世界 W を作るには，次の四手順を踏むことが必要かつ十分である．

手順 1. T の算部分系 $T_{\mathfrak{F}_\nu}$ と同類の汎代数系 S_ν $(\neq \emptyset)$ をとる $(\nu \in N)$．

手順 2. S_ν 上の反射的関係 $\ni_o$ を定める $(o \in O_\nu,\ \nu \in N)$．

手順 3. S_ν 上の $\mathbb{P}_\nu$ 測度 $|X|_\nu$ を定める $(\nu \in N)$．

手順 4. S_μ の点 p_μ を定める $(\mu \in N')$．

これだけの手順を踏めば，S_ν を ν 相の基底とし $\ni_o$ $(o \in O_\nu)$ を ν 相の基本関係とし $|X|_\nu$ を ν 相の測度とし p_μ を μ 相の基点として A にとって認識可能な格世界 W が出来る．第 6.1.3 項により A_{ε_ν} が $\mathfrak{F}_\nu$ 代数系として $T_{\mathfrak{F}_\nu}$ と同類の汎代数系であるから，手順 1 において S_ν として，たとえば A_{ε_ν} の台部分系や問題 3.12.4 の意味での台拡大をとることができる $(\nu \in N)$．

以降この節の終わりまで，いま構成した格世界 W の U 型代数構造について敷衍する．その際，**記号** $S, S, \ni_o$ **等をこれまで通りの意味で使う．**

問題 6.2.2 $a_1, \ldots, a_n, f \in W$ と $(\lambda_1, k_1), \ldots, (\lambda_n, k_n) \in (\{\check{o}\} \times K) \cup \mathcal{J}$ に対して

$$g = a_1\, \lambda_1 k_1\, (a_2\, \lambda_2 k_2\, (\cdots\, (a_n\, \lambda_n k_n\, f) \cdots))$$

が定義されるためには，次の二条件のみたされることが必要十分である．

1. a_i は，$\lambda_i = \breve{o}$ であれば S_{k_i} に属し，λ_i が限量子であれば λ_i と同相の実在である ($i = 1, \ldots, n$).
2. f は事態であって $k_1, \ldots, k_n$ は f の枠 P の相異なる元である.

また，これらの条件の下で，g は $P - \{k_1, \ldots, k_n\}$ を枠とする事態である.

問題 6.2.3 F と W_P ($P \in \mathcal{P}K$) は，W の $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 部分系であって $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 代数系として全域的である.

問題 6.2.4 任意の $f, g \in F$ について $f \Rightarrow g = f^{\Diamond} \vee g$ が成り立つ．また，W 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ を W_P ($P \in \mathcal{P}K$) に制限したものは，巾ブール束 $(P{\rightsquigarrow}S){\rightarrow}\mathbb{T}$ としての W_P のブール論法に等しい．また，各 $\theta \in P{\rightsquigarrow}S$ の定める射影 $\mathrm{pr}_\theta \in W_P{\rightarrow}\mathbb{T}$ は，$\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写である.

問題 6.2.5 E_ν と W_{δ_ν} は，W の $\{\sqcap, \sqcup, \Box\}$ 部分系であって $\{\sqcap, \sqcup, \Box\}$ 代数系として全域的である ($\nu \in N$).

問題 6.2.6 W 上の算法 $\sqcap, \sqcup, \Box$ を W_{δ_ν} に制限したものは，巾ブール束の巾ブール束 $O_\nu{\rightarrow}(S_\nu{\rightarrow}\mathbb{T})$ としての W_{δ_ν} のブール算法に他ならない ($\nu \in N$).

略解　任意の $a, b \in W_{\delta_\nu}$ と $o \in O_\nu$ と $s \in S_\nu$ について $\big((a \sqcap b)o\big)s = (ao)s \wedge (bo)s$ であることは，次の推論で示される.

$$\begin{aligned}\big((a \sqcap b)o\big)s = 1 &\iff a \sqcap b \ni_o s \iff a \ni_o s \text{ かつ } b \ni_o s \\ &\iff (ao)s = 1 \text{ かつ } (bo)s = 1 \iff (ao)s \wedge (bo)s = 1\end{aligned}$$

6.2.3　単相格世界との関係

§ 第 6.1.4 項では，格言語 A はその相集合 N が単元集合なら単相格言語となることを示した．それを踏まえてここでは，格言語 A にとって認識可能な格世界 W は，その相集合 N が単元集合なら，単相格言語 A にとって認識可能な単相格世界となることを説明する．そのために以下，$N = \{\nu\}$ の場合の格世界 W の定め方を復習する.

まず W の基底 S については，$N = \{\nu\}$ であるから

$$S = S_\nu$$

が成り立つ．次に，第 6.1.4 項に記した通り，N', N_ν, K', K_ν はいずれも空集合である．従って，空集合律により ν 相の修飾 O_ν について

$$O_\nu = \{\emptyset\}$$

が成り立ち，一乗便法により $O_\nu{\rightarrow}(S_\nu{\rightarrow}\mathbb{T}) = S_\nu{\rightarrow}\mathbb{T}$ となる．また，$K' = \emptyset$ であるから，任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して $P{\rightsquigarrow}S = P{\rightarrow}S$ が成り立つ．従って，格世界 W の台集合については

$$W = (S{\rightarrow}\mathbb{T}) \cup S \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} \big((P{\rightarrow}S){\rightarrow}\mathbb{T}\big)$$

が成り立つ．これは，S を基底とし K を格集合とする単相格世界の台集合に等しい.

次に，格世界 W の代数構造を決める三つの助変数について第 6.2.2 項から復習する．まず，$\mathrm{N}_\nu=\emptyset$ であるから，S_ν 上の基本関係は $\exists_\nu$ 唯一つである．次に，$\mathrm{N}=\{\nu\}$ であるから，W の限量系は $\mathbb{P}_\nu$ 唯一つである．最後に，$\mathrm{N}'=\emptyset$ であるから基点は存在しない．

次に，W の代数構造を決めるための五つの準備について復習する．まず，$\mathrm{N}_\nu=\emptyset$ であるから，W の ν 相の拡張関係は，$(\mathrm{S}_\nu\to\mathbb{T})\cup\mathrm{S}_\nu,\mathrm{S}_\nu$ 間の関係 $\exists_\nu$ であって $a\in\mathrm{S}_\nu\to\mathbb{T}$，$b\in\mathrm{S}_\nu$ に対し

$$a\,\exists_\nu\,b\iff ab=1$$

をみたす．次に，やはり $\mathrm{N}_\nu=\emptyset$ であるから，任意の $\theta\in\mathrm{P}\rightsquigarrow\mathrm{S}\ (\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K})$ に対し，W の ν 相の θ 関係 $\exists_{\nu,\theta}$ は，W の ν 相の拡張関係 $\exists_\nu$ に等しい．次に，$k\in\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}$，$s\in\mathrm{S}$ のとき，各 $\theta\in(\mathrm{P}-\{k\})\to\mathrm{S}$ に対して定義した $\mathrm{P}\to\mathrm{S}$ の元 $(k/s)\theta$ は，相集合 N によらない概念であるから，$\mathrm{N}=\{\nu\}$ としたことに影響されない．次に，$\mathrm{K}'=\emptyset$ であるから，各 $k\in\mathrm{K}$ に対して (6.2.2) で定義した S の部分集合 S_k は，いずれの k に対しても S に等しい．最後に，(6.2.3) のように定める．

以下，W の八種の算法の定義を復習するが，$\mathrm{N}_\nu,\mathrm{K}_\nu$ 以外の記号の添え字の ν は省略する．なお，第二種の算号の添数集合 $\mathcal{J}$ は，$\mathrm{K}'=\emptyset$，$\mathrm{N}'=\emptyset$ であるから $\mathfrak{Q}\times\mathrm{K}$ と定まる．

算法 $\breve{o}k\ (k\in\mathrm{K})$**：**　$\mathrm{S}_k=\mathrm{S}$ であるから算法 $\breve{o}k$ は，$k\in\mathrm{P}$ なる任意の $\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}$ に対して，任意の

$$(s,f)\in\mathrm{S}\times\big((\mathrm{P}\to\mathrm{S})\to\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((\mathrm{P}-\{k\})\to\mathrm{S}\big)\to\mathbb{T}$ の元 $s\,\breve{o}k\,f$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$(s\,\breve{o}k\,f)\theta=f\big((k/s)\theta\big)\qquad\qquad\big(\theta\in(\mathrm{P}-\{k\})\to\mathrm{S}\big)$$

算法 $\lambda k\ \big((\lambda,k)\in\mathfrak{Q}\times\mathrm{K}\big)$**：**　$\mathrm{N}=\{\nu\}$，$\mathrm{N}_\nu=\emptyset$ であるから算法 λk は，$k\in\mathrm{P}$ なる任意の $\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}$ に対して，任意の

$$(a,f)\in\big((\mathrm{S}\to\mathbb{T})\cup\mathrm{S}\big)\times\big((\mathrm{P}\to\mathrm{S})\to\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((\mathrm{P}-\{k\})\to\mathrm{S}\big)\to\mathbb{T}$ の元 $a\,\lambda k\,f$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta\in(\mathrm{P}-\{k\})\to\mathrm{S}$ に対して

$$(a\,\lambda k\,f)\theta=1\iff\begin{cases}\big|\big\{s\in\mathrm{S}\mid a\,\exists\,s,\ f\big((k/s)\theta\big)=0\big\}\big|\in\neg\lambda & \cdots\quad \lambda\in\neg\mathfrak{P}\ \text{のとき}\\ \big|\big\{s\in\mathrm{S}\mid a\,\exists\,s,\ f\big((k/s)\theta\big)=1\big\}\big|\in\lambda & \cdots\quad \lambda\in\mathfrak{P}\ \text{のとき}\end{cases}$$

算法 $\wedge,\vee,\Rightarrow$**：**　これらの算法は，任意の $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathcal{P}\mathrm{K}$ に対して，任意の

$$(f,g)\in\big((\mathrm{P}\to\mathrm{S})\to\mathbb{T}\big)\times\big((\mathrm{Q}\to\mathrm{S})\to\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((\mathrm{P}\cup\mathrm{Q})\to\mathrm{S}\big)\to\mathbb{T}$ の元 $f\wedge g$，$f\vee g$，$f\Rightarrow g$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$\left.\begin{aligned}(f\wedge g)\theta&=f(\theta|_\mathrm{P})\wedge g(\theta|_\mathrm{Q})\\(f\vee g)\theta&=f(\theta|_\mathrm{P})\vee g(\theta|_\mathrm{Q})\\(f\Rightarrow g)\theta&=f(\theta|_\mathrm{P})\Rightarrow g(\theta|_\mathrm{Q})\end{aligned}\right.\qquad\big(\theta\in(\mathrm{P}\cup\mathrm{Q})\to\mathrm{S}\big)$$

算法 $\Diamond$**：**　この算法は，任意の $\mathrm{P}\in\mathcal{P}\mathrm{K}$ に対して，任意の

$$f\in(\mathrm{P}\to\mathrm{S})\to\mathbb{T}$$

に施されて $(\mathrm{P}\to\mathrm{S})\to\mathbb{T}$ の元 $f^\Diamond$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$(f^\Diamond)\theta=(f\theta)^\Diamond\qquad\qquad(\theta\in\mathrm{P}\to\mathrm{S})$$

算法 $\triangle$**：**　$N = \{\nu\}$，$N_\nu = \emptyset$ であるから算法 $\triangle$ は，任意の

$$a \in (S{\to}\mathbb{T}) \cup S$$

に施されて $(\{\pi\}{\to}S){\to}\mathbb{T}$ の元 $a\triangle$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta \in \{\pi\}{\to}S$ に対して

$$(a\triangle)\theta = 1 \iff a \ni \theta\pi$$

算法 $\sqcap, \sqcup$**：**　$N = \{\nu\}$，$N_\nu = \emptyset$ であるから算法 $\sqcap, \sqcup$ は，任意の

$$(a, b) \in \big((S{\to}\mathbb{T}) \cup S\big)^2$$

に施されて $S{\to}\mathbb{T}$ の元 $a \sqcap b$，$a \sqcup b$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$\begin{aligned} a \sqcap b \ni s &\iff a \ni s \text{ かつ } b \ni s \\ a \sqcup b \ni s &\iff a \ni s \text{ または } b \ni s \end{aligned} \qquad (s \in S)$$

算法 $\square$**：**　$N = \{\nu\}$，$N_\nu = \emptyset$ であるから算法 $\square$ は，任意の

$$a \in (S{\to}\mathbb{T}) \cup S$$

に施されて $S{\to}\mathbb{T}$ の元 $a^\square$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$a^\square \ni s \iff a \not\ni s \qquad (s \in S)$$

算法 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F} = \coprod_{\nu \in N} \mathfrak{F}_\nu$**：**　$N = \{\nu\}$ であるから算法 $\mathfrak{f}$ は，その T での項数が n なら，任意の

$$(s_1, \ldots, s_n) \in S^n$$

に施されて S の元 $\mathfrak{f}(s_1, \ldots, s_n)$ を生ずる．

以上，$N = \{\nu\}$ の場合の格世界 W の定義を復習した．これを第 5.2 節での単相格世界の定義と照らし合わせれば，W が単相格世界であることが分かる．

6.2.4　高岡世界

§ 単相格世界はこれまでの説明が示す通り，格世界の祖型であると共に格世界の特殊化である．ここでは，格世界のもう一つの特殊化について説明する．この特殊な格世界は，第 6.1.5 項の高岡言語にとって認識可能な格世界であると共に，そこで引用した論文において高岡洋介氏が定義した世界の類似物であるので，**高岡世界**と呼ぶ．端書き冒頭に記した通り，この本は加筆・改良のために頻繁に改訂し，格世界の定義法も変遷してきている．高岡氏の定義した世界は，この節で定義した通りの格世界の特殊化ではないが，単相格世界や以前の格世界に倣って定義したものであると共に，格世界の現在の定義法を示唆したものであり，その意味で格世界の母型である．

高岡言語 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ は，格言語の相集合 N と副相集合 N_ν $(\nu \in N)$ を

$$N = \{1, 2\} \qquad N_1 = \{2\} \qquad N_2 = \emptyset$$

と特殊化して得られた．その結果，従相集合 N' は

$$N' = \{2\}$$

と定まり，従格は 2 相の従格 ϖ_2 唯一つであり，これは主格 π と異なる．

$$\pi \neq \varpi_2$$

さらに，従格集合 K' と副格集合 K_1, K_2 は次のように定まった．

$$K' = K_1 = \{\varpi_2\} \qquad\qquad K_2 = \emptyset$$

そこで W を A にとって認識可能な格世界とすれば，W の基底 S は

$$S = S_1 \amalg S_2$$

と分割され，W の各相の修飾は

$$O_1 = S_2 \qquad\qquad O_2 = \{\emptyset\}$$

となり，従って空集合規約により，W の台は

$$W = \big(S_2 {\to} (S_1 {\to} \mathbb{T})\big) \cup (S_2 {\to} \mathbb{T}) \cup S_1 \cup S_2 \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} \big((P {\rightsquigarrow} S) {\to} \mathbb{T}\big)$$

となる．ただし，

$$P {\rightsquigarrow} S = \{\theta \in P {\to} S \mid \varpi_2 \in P \text{ なら } \theta\varpi_2 \in S_2\}$$

各相の基本関係として，S_1 上には各 $o \in S_2$ に応じて関係 $\exists_o$ があり，S_2 上には関係 $\exists_2$ が唯一つある．また，基点は 2 相の基点 $p_2 \in S_2$ のみである．また，各 $\nu \in N$ と各 $\theta \in P {\rightsquigarrow} S$ $(P \in \mathcal{P}K)$ に対して，W の ν 相の θ 関係 $\exists_{\nu,\theta}$ は次のように定まる．

$$\exists_{1,\theta} = \begin{cases} \exists_{\theta\varpi_2} & \cdots \quad \varpi_2 \in P \text{ のとき} \\ \exists_{p_2} & \cdots \quad \varpi_2 \notin P \text{ のとき} \end{cases} \qquad\qquad \exists_{2,\theta} = \exists_2$$

また，各 $k \in K$ に対して (6.2.2) で定義した S の部分集合 S_k については，次のことが成り立つ．

$$S_k = \begin{cases} S & \cdots \quad k \in K - \{\varpi_2\} \text{ のとき} \\ S_2 & \cdots \quad k = \varpi_2 \text{ のとき} \end{cases}$$

W の代数構造については取り分け次のことが成り立つ．なお，次の式が成り立つ．

$$\mathcal{J} = \big((\mathfrak{Q}_1 \cup \mathfrak{Q}_2) \times (K - \{\varpi_2\})\big) \cup (\mathfrak{Q}_2 \times \{\varpi_2\})$$

算法 $\breve{o}k$ $(k \in K)$**：**　これは，$k \neq \varpi_2$ の場合は，$k \in P$ なる任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して任意の

$$(s, f) \in S \times \big((P {\rightsquigarrow} S) {\to} \mathbb{T}\big)$$

に施され，$k = \varpi_2$ の場合は，$k \in P$ なる任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対して任意の

$$(s, f) \in S_2 \times \big((P {\rightsquigarrow} S) {\to} \mathbb{T}\big)$$

に施され，いずれの場合も $\big((P - \{k\}) {\rightsquigarrow} S\big) {\to} \mathbb{T}$ の元 $s\,\breve{o}k\,f$ を生ずる．その定義は次の通りである．

$$(s\,\breve{o}k\,f)\theta = f\big((k/s)\theta\big) \qquad\qquad \big(\theta \in (P - \{k\}) {\rightsquigarrow} S\big)$$

算法 $\lambda k\ \big((\lambda,k)\in\mathcal{J}\big)$**：**　これらの算法の定義は限量子 λ の相によって異なる．すなわち，まず $\lambda\in\mathfrak{Q}_1$ のとき算法 λk は，$k\in P$ なる任意の $P\in\mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(a,f)\in\Big(\big(S_2{\to}(S_1{\to}\mathbb{T})\big)\cup S_1\Big)\times\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P-\{k\}){\rightsquigarrow}S\big){\to}\mathbb{T}$ の元 $a\lambda k f$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta\in(P-\{k\}){\rightsquigarrow}S$ に対して

$$(a\lambda k f)\theta=1\iff\begin{cases}\big|\big\{s\in S_1\mid a\ \exists_{1,\theta}\ s,\ f\big((k/s)\theta\big)=0\big\}\big|_1\in\neg\lambda & \cdots\quad \lambda\in\neg\mathfrak{P}_1\text{ のとき}\\ \big|\big\{s\in S_1\mid a\ \exists_{1,\theta}\ s,\ f\big((k/s)\theta\big)=1\big\}\big|_1\in\lambda & \cdots\quad \lambda\in\mathfrak{P}_1\text{ のとき}\end{cases}$$

ただし $a\ \exists_{1,\theta}\ s$ であるためには，次の二条件のいずれかのみたされることが必要十分である．

$$\varpi_2\in P-\{k\},\ a\ \exists_{\theta\varpi_2}\ s\qquad\qquad \varpi_2\notin P-\{k\},\ a\ \exists_{p_2}\ s$$

次に $\lambda\in\mathfrak{Q}_2$ のとき算法 λk は，$k\in P$ なる任意の $P\in\mathcal{P}K$ に対して，任意の

$$(a,f)\in\big((S_2{\to}\mathbb{T})\cup S_2\big)\times\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)$$

に施されて $\big((P-\{k\}){\rightsquigarrow}S\big){\to}\mathbb{T}$ の元 $a\lambda k f$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，任意の $\theta\in(P-\{k\}){\rightsquigarrow}S$ に対して

$$(a\lambda k f)\theta=1\iff\begin{cases}\big|\big\{s\in S_2\mid a\ \exists_2\ s,\ f\big((k/s)\theta\big)=0\big\}\big|_2\in\neg\lambda & \cdots\quad \lambda\in\neg\mathfrak{P}_2\text{ のとき}\\ \big|\big\{s\in S_2\mid a\ \exists_2\ s,\ f\big((k/s)\theta\big)=1\big\}\big|_2\in\lambda & \cdots\quad \lambda\in\mathfrak{P}_2\text{ のとき}\end{cases}$$

算法 $\triangle$**：**　これは任意の

$$a\in\big(S_2{\to}(S_1{\to}\mathbb{T})\big)\cup(S_2{\to}\mathbb{T})\cup S_1\cup S_2$$

に施されて $a\triangle$ を生ずる．その定義は次の通りである．すなわち，まず $a\in\big(S_2{\to}(S_1{\to}\mathbb{T})\big)\cup S_1$ のときは，$a\triangle\in\big((\{\pi,\varpi_2\}){\rightsquigarrow}S\big){\to}\mathbb{T}$ であって，任意の $\theta\in(\{\pi,\varpi_2\}){\rightsquigarrow}S$ に対して

$$(a\triangle)\theta=1\iff\theta\pi\in S_1\text{ であって }a\ \exists_{\theta\varpi_2}\ \theta\pi$$

次に $a\in(S_2{\to}\mathbb{T})\cup S_2$ のときは，$a\triangle\in(\{\pi\}{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}$ であって，任意の $\theta\in\{\pi\}{\rightsquigarrow}S$ に対して

$$(a\triangle)\theta=1\iff\theta\pi\in S_2\text{ であって }a\ \exists_2\ \theta\pi$$

6.2.5　ν 相の実在列間の擬ブール関係

§ **この項を通じて ν を N の任意の元とする．**そうすると格世界 W の ν 相の実在の集合 $E_\nu=W_{\delta_\nu}\cup W_{\varepsilon_\nu}=W_{\delta_\nu}\cup S_\nu$ について，第 5.2.3 項と同様に以下のことが成り立つ．

まず問題 6.2.5 により E_ν と W_{δ_ν} は汎 $\{\sqcap,\sqcup,\square\}$ 代数系とみなせ，問題 6.2.6 により W_{δ_ν} は $\sqcap,\sqcup,\square$ をブール算法とするブール束である．次に，E_ν 上の関係 $a\sqsubseteq b$ を

$$a\sqsubseteq b\iff\text{任意の }o\in O_\nu\text{ と }s\in S_\nu\text{ に対して「}a\ \exists_o\ s\implies b\ \exists_o\ s\text{」}$$

と定義する．そうすると問題 3.9.54 と問題 3.9.47 により，$\sqsubseteq$ は擬順序関係になる．従って，E 上の関係 $\equiv$ を

$$a\equiv b\iff a\sqsubseteq b\text{ かつ }a\sqsupseteq b$$

$$\iff \text{任意の } o \in O_\nu \text{ と } s \in S_\nu \text{ に対して「} a \exists_o s \iff b \exists_o s \text{」}$$

と定義すれば（$\sqsupseteq$ は $\sqsubseteq$ の双対関係を表す），問題 3.9.55 により $\equiv$ は同値関係になる．

同様に，各 $o \in O_\nu$ に応じて E_ν 上の関係 $\sqsubseteq_o$ と $\equiv_o$ を

$$a \sqsubseteq_o b \iff \text{任意の } s \in S_\nu \text{ に対して「} a \exists_o s \implies b \exists_o s \text{」}$$
$$a \equiv_o b \iff a \sqsubseteq_o b \text{ かつ } a \sqsupseteq_o b$$

と定義すれば，$\sqsubseteq_o$ は擬順序関係であって $\equiv_o$ は同値関係である．また，各 $\theta \in P \rightsquigarrow S$ $(P \in \mathcal{P}K)$ に応じて E_ν 上の関係 $\sqsubseteq_{\nu,\theta}$ と $\equiv_{\nu,\theta}$ を

$$a \sqsubseteq_{\nu,\theta} b \iff \text{任意の } s \in S_\nu \text{ に対して「} a \exists_{\nu,\theta} s \implies b \exists_{\nu,\theta} s \text{」}$$
$$a \equiv_{\nu,\theta} b \iff a \sqsubseteq_{\nu,\theta} b \text{ かつ } a \sqsupseteq_{\nu,\theta} b$$

と定義すれば，$\sqsubseteq_{\nu,\theta}$ は擬順序関係であって $\equiv_{\nu,\theta}$ は同値関係である．

問題 6.2.7 E_ν 上の関係 $\sqsubseteq$ を W_{δ_ν} に制限したものは，巾ブール束の巾ブール束 $O_\nu \rightarrow (S_\nu \rightarrow \mathbb{T})$ としての W_{δ_ν} 上の順序関係 $\sqsubset$ と一致する．従って，E_ν 上の関係 $\equiv$ を W_{δ_ν} に制限したものは，W_{δ_ν} の相等関係 $=$ と一致する．関係 $\equiv$ はまた，W 上の算法 $\sqcap, \sqcup, \Box$ を E_ν に制限したものと両立する．また，W_{δ_ν} の最小元 0 と最大元 1 とは，任意の $a \in E_\nu$ に対して $0 \sqsubseteq a$ と $a \sqsubseteq 1$ とをみたす．

略解　任意の $a, b \in W_\delta$ に対し次のように推論することができる．

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq b &\iff (ao)s = 1 \text{ なる任意の } o \in O_\nu \text{ と } s \in S_\nu \text{ に対して } (bo)s = 1 \\ &\iff \text{任意の } o \in O_\nu \text{ と } s \in S_\nu \text{ に対して } (ao)s \le (bo)s \\ &\iff a \sqsubset b \qquad\qquad (\text{注意 6.2.1 による}) \end{aligned}$$

また，$a, a', b, b' \in E_\nu$ が $a \equiv a'$，$b \equiv b'$ をみたせば，任意の $o \in O_\nu$ と $s \in S_\nu$ に対して

$$\begin{aligned} a \sqcap b \exists_o s &\iff a \exists_o s \text{ かつ } b \exists_o s \\ &\iff a' \exists_o s \text{ かつ } b' \exists_o s \iff a' \sqcap b' \exists_o s \end{aligned}$$

が成り立つから，$a \sqcap b \equiv a' \sqcap b'$ が成り立つ．注意 6.2.1 により任意の $o \in O_\nu$ と $s \in S_\nu$ に対して $(0o)s = 0$ と $(1o)s = 1$，すなわち $0 \not\exists_o s$ と $1 \exists_o s$ が成り立つ．これから最後の結論が得られる．　**終**

各 $a \in E_\nu$ に対して，$a^\natural \in W_{\delta_\nu}$ を次のように定めることができる．

$$a^\natural \exists_o s \iff a \exists_o s \qquad (o \in O_\nu,\ s \in S_\nu)$$

この $a^\natural$ を a の**複実在化**または**複化**と呼ぶ．各 $a \in E_\nu$ に $a^\natural \in W_{\delta_\nu}$ を対応させる写像を $\natural$ で表す．

問題 6.2.8 写像 $\natural$ は，$a^\natural \equiv a$ と「$a \sqsubseteq b \iff a^\natural \sqsubset b^\natural$」をみたし，$\{\sqcap, \sqcup, \Box\}$ 代数系としての準写かつ全射であり，$a \in W_{\delta_\nu}$ については $a^\natural = a$ をみたす．

問題 6.2.9 $a \in E_\nu$，$\lambda \in \Omega_\nu$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$ のとき，$a \lambda k f = a^\natural \lambda k f$ が成り立つ．

略解　各 $\theta \in (P - \{k\}) \to S$ に応じて $\exists_{\nu,\theta} = \exists_o$ なる $o \in O_\nu$ があって $\{s \in S_\nu \mid a \exists_o s\} = \{s \in S_\nu \mid a^\natural \exists_o s\}$ が成り立つからである．　**終**

W_{δ_ν} は束であるから，W_{δ_ν} の任意の有限部分集合に W_{δ_ν} 上の順序関係 $\sqsubset$ に関する下限と上限がある．そこで，E_ν の元の列 $a_1 \cdots a_m$ と $b_1 \cdots b_n$ が

$$\inf_{W_{\delta_\nu}}\{a_1{}^\natural, \ldots, a_m{}^\natural\} \sqsubset \sup_{W_{\delta_\nu}}\{b_1{}^\natural, \ldots, b_n{}^\natural\} \tag{6.2.4}$$

をみたすことを次のように表す．

$$a_1 \cdots a_m \sqsubseteq b_1 \cdots b_n \tag{6.2.5}$$

そうするとこの $\sqsubseteq$ は，普遍単位半群 $E_\nu{}^* = \bigcup_{n \geq 0} E_\nu{}^n$ 上の関係とみなせる．なお (6.2.4) において，$m = 0$ の場合の左辺と $n = 0$ の場合の右辺は，第 3.9.3 項の下限・上限の定義により，それぞれ W_{δ_ν} の最大元と最小元に等しい．またこれらの場合，(6.2.5) の左辺または右辺は空列であるが，空列は第 5.1.1 項で述べた通り空白で表す．

三つ組み $(E_\nu, W_{\delta_\nu}, \natural)$ は束写系であり，$E_\nu{}^*$ 上の関係 $\sqsubseteq$ は $\natural$ 真関係に等しい．しかも，W_{δ_ν} は $\sqcap, \sqcup, \square$ をブール算法とするブール束であり，問題 6.2.8 により $\natural$ は $\{\sqcap, \sqcup, \square\}$ 準写（すなわち擬ブール表現）かつ全射である．従って，第 3.19 節と第 3.21 節の定理等を $E_\nu, W_{\delta_\nu}, \natural$ に適用して，$E_\nu{}^*$ 上の関係 $\sqsubseteq$ と E_ν 上での算法 $\sqcap, \sqcup, \square$ について色々なことを知ることができる．特に次のことが分かる．

定理 6.2.1 **$E_\nu{}^*$ 上の関係 $\sqsubseteq$ は，W 上の算法 $\sqcap, \sqcup, \square$ を E_ν に制限したものについて擬ブール関係であり，E_ν 上の擬順序関係 $\sqsubseteq$ の最大束拡張である．**

証明　定理 5.2.1 と同様である．

問題 6.2.10 W 上の算法 $\sqcap, \sqcup, \square$ は次の法則に従う．ただし，結合律の等式の左辺と可換律の等式の両辺で算法 $\sqcap, \sqcup$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意であり，可換律における ρ は n 次の任意の置換である（重補律だけ等式ではなく $\equiv$ 式であることに注意）．

$$\left.\begin{aligned} a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_n &= (\cdots(a_1 \sqcap a_2) \sqcap \cdots) \sqcap a_n \\ a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n &= (\cdots(a_1 \sqcup a_2) \sqcup \cdots) \sqcup a_n \end{aligned}\right\} \quad \text{(結合律)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{\rho 1} \sqcap \cdots \sqcap a_{\rho n} &= a_1 \sqcap \cdots \sqcap a_n \\ a_{\rho 1} \sqcup \cdots \sqcup a_{\rho n} &= a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n \end{aligned}\right\} \quad \text{(可換律)}$$

$$\left.\begin{aligned} (a \sqcap b)^\square &= a^\square \sqcup b^\square \\ (a \sqcup b)^\square &= a^\square \sqcap b^\square \end{aligned}\right\} \quad \text{(双対律)}$$

$$(a^\square)^\square \equiv a \quad \text{(重補律)}$$

問題 6.2.11 $a \in E_\nu$ とし $0, 1$ を W_{δ_ν} の最小元と最大元とする．このとき，$E_\nu{}^*$ 上の関係 $\sqsubseteq$ について $a \sqsubseteq$ なるためには $a = 0$ なることが必要十分であり，$a \sqsupseteq$ なるためには $a \equiv 1$ なることが必要十分である．特に $a \in W_{\delta_\nu}$ の場合には，$a \sqsupseteq$ なるためには $a = 1$ なることが必要十分である．

問題 6.2.12 任意の $a, b \in E_\nu$ について次のことが成り立つ．

$$(a \sqcap b)\triangle = a\triangle \wedge b\triangle \qquad a \sqsubseteq b \iff a\triangle \leq b\triangle$$

$$(a \sqcup b)\triangle = a\triangle \vee b\triangle \qquad a \equiv b \iff a\triangle = b\triangle$$

$$(a^\square)\triangle \leq (a\triangle)^\lozenge$$

略解　$(\mathrm{a} \sqcap \mathrm{b})\triangle = \mathrm{a}\triangle \wedge \mathrm{b}\triangle$ であることは，任意の $\theta \in (\{\pi\} \cup \mathrm{K}_\nu){\rightsquigarrow}\mathrm{S}$ をとっての次の推論で示される．ただし $\mathrm{o} = (\theta\varpi_\mu)_{\mu \in \mathrm{N}_\nu} \in \mathrm{O}_\nu$ である．

$$\begin{aligned}\big((\mathrm{a} \sqcap \mathrm{b})\triangle\big)\theta = 1 &\iff \theta\pi \in \mathrm{S}_\nu,\ \mathrm{a} \sqcap \mathrm{b} \ni_{\mathrm{o}} \theta\pi \\ &\iff \theta\pi \in \mathrm{S}_\nu,\ \mathrm{a} \ni_{\mathrm{o}} \theta\pi,\ \mathrm{b} \ni_{\mathrm{o}} \theta\pi \\ &\iff (\mathrm{a}\triangle)\theta = 1,\ (\mathrm{b}\triangle)\theta = 1 \\ &\iff (\mathrm{a}\triangle)\theta \wedge (\mathrm{b}\triangle)\theta = 1 \\ &\iff (\mathrm{a}\triangle \wedge \mathrm{b}\triangle)\theta = 1\end{aligned}$$

また，$(\mathrm{a}^\square)\triangle \leq (\mathrm{a}\triangle)^\lozenge$ であることは次の推論で示される．

$$\begin{aligned}\big((\mathrm{a}^\square)\triangle\big)\theta = 1 &\iff \theta\pi \in \mathrm{S}_\nu,\ \mathrm{a}^\square \ni_{\mathrm{o}} \theta\pi \\ &\iff \theta\pi \in \mathrm{S}_\nu,\ \mathrm{a} \not\ni_{\mathrm{o}} \theta\pi \\ &\implies (\mathrm{a}\triangle)\theta = 0 \\ &\iff \big((\mathrm{a}\triangle)\theta\big)^\lozenge = 1 \\ &\iff (\mathrm{a}\triangle)^\lozenge\theta = 1\end{aligned}$$

注意 6.2.3 問題 6.2.12 において $(\mathrm{a}^\square)\triangle = (\mathrm{a}\triangle)^\lozenge$ は必ずしも成り立たない（問題 5.2.11 参照）．

6.2.6　事態列間のブール関係

§ 前項では格世界 W の ν 相の実在の集合 E_ν に対し $\mathrm{E}_\nu{}^*$ 上に出来る擬ブール関係について説明した $(\nu \in \mathrm{N})$．それと同様のものが W の事態の集合 $\mathrm{F} = W_{\mathcal{P}\mathrm{K}} = \bigcup_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K}} W_\mathrm{P}$ に対しても出来る．すなわち第 5.2.4 項と同様に以下のことが成り立つ．

まず問題 6.2.3 により F と W_P は汎 $\{\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow\}$ 代数系とみなせて，問題 6.2.4 により W_P $\big(= (\mathrm{P}{\rightsquigarrow}\mathrm{S}){\rightarrow}\mathbb{T}\big)$ は，$\wedge, \vee, \lozenge, \Rightarrow$ をブール論法とするブール束である $(\mathrm{P} \in \mathcal{P}\mathrm{K})$．次に，F 上の関係 $\mathrm{f} \lessdot \mathrm{g}$ を次のように定義する．すなわち，$\mathrm{f} \in W_\mathrm{P}$，$\mathrm{g} \in W_\mathrm{Q}$ のとき，

$$\mathrm{f} \lessdot \mathrm{g} \iff \text{任意の } \theta \in (\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}){\rightsquigarrow}\mathrm{S} \text{ に対して } \mathrm{f}(\theta|_\mathrm{P}) \leq \mathrm{g}(\theta|_\mathrm{Q}) \tag{6.2.6}$$

ただし，右辺の $\leq$ は $\mathbb{T}$ 上の通常の順序関係を表す．また，$\mathrm{P} = \emptyset$ あるいは $\mathrm{Q} = \emptyset$ の場合には，空集合規約により $\theta|_\mathrm{P}$ あるいは $\theta|_\mathrm{Q}$ は無いものとみなしていい．

問題 6.2.13 $\mathrm{f} \in W_\mathrm{P}$，$\mathrm{g} \in W_\mathrm{Q}$ が $\mathrm{f} \lessdot \mathrm{g}$ をみたすためには，次の三条件のいずれも必要十分である．

1. $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$ なる任意の R と任意の $\theta \in \mathrm{R}{\rightsquigarrow}\mathrm{S}$ に対して $\mathrm{f}(\theta|_\mathrm{P}) \leq \mathrm{g}(\theta|_\mathrm{Q})$ が成り立つ．
2. $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R} \in \mathcal{P}\mathrm{K}$ なるある R と任意の $\theta \in \mathrm{R}{\rightsquigarrow}\mathrm{S}$ に対して $\mathrm{f}(\theta|_\mathrm{P}) \leq \mathrm{g}(\theta|_\mathrm{Q})$ が成り立つ．
3. $\mathrm{f}(\theta|_\mathrm{P}) = 1$ なる任意の $\theta \in \mathrm{K}{\rightsquigarrow}\mathrm{S}$ に対して $\mathrm{g}(\theta|_\mathrm{Q}) = 1$ が成り立つ．　終

$\mathrm{f} \in \mathrm{F}$ と $\theta \in \mathrm{K}{\rightsquigarrow}\mathrm{S}$ が f の枠 P に対して $\mathrm{f}(\theta|_\mathrm{P}) = 1$ をみたすことを $\mathrm{f} \ni_\mathrm{K} \theta$ で表せば，$\ni_\mathrm{K}$ は F, $\mathrm{K}{\rightsquigarrow}\mathrm{S}$ 間の関係であって，問題 6.2.13 により任意の $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{F}$ について

$$\mathrm{f} \lessdot \mathrm{g} \iff \mathrm{f} \ni_\mathrm{K} \theta \text{ なる任意の } \theta \in \mathrm{K}{\rightsquigarrow}\mathrm{S} \text{ に対して } \mathrm{g} \ni_\mathrm{K} \theta$$

が成り立つから，問題 3.9.54 により $\lessdot$ は擬順序関係である．従って，F 上の関係 $f \doteq g$ を

$$\begin{aligned} f \doteq g &\iff f \lessdot g \text{ かつ } f \gtrdot g \\ &\iff \text{任意の } \theta \in K{\rightsquigarrow}S \text{ に対して「} f \exists_K \theta \iff g \exists_K \theta \text{」} \\ &\iff \text{任意の } \theta \in K{\rightsquigarrow}S \text{ に対して } f(\theta|_{K_f}) = g(\theta|_{K_g}) \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

と定義すれば（$\gtrdot$ は $\lessdot$ の双対関係を表す），問題 3.9.55 により $\doteq$ は同値関係になる．

問題 6.2.14 $f, g \in F$ と $\theta \in K{\rightsquigarrow}S$ に対して次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \exists_K \theta &\iff f \exists_K \theta \text{ かつ } g \exists_K \theta \\ (f \vee g) \exists_K \theta &\iff f \exists_K \theta \text{ または } g \exists_K \theta \\ (f \Rightarrow g) \exists_K \theta &\iff f \not\exists_K \theta \text{ または } g \exists_K \theta \\ (f^{\Diamond}) \exists_K \theta &\iff f \not\exists_K \theta \end{aligned}$$

問題 6.2.15 F 上の関係 $\lessdot$ を W_P に制限したものは，巾ブール束 $(P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}$ としての W_P 上の順序関係 $\le$ と一致する．従って，F 上の関係 $\doteq$ を W_P に制限したものは，W_P の相等関係 $=$ と一致する．関係 $\doteq$ はまた，W 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ を F に制限したものと両立する．また，W_P の最小元 0 と最大元 1 とは，任意の $f \in F$ に対して $0 \lessdot f$ と $f \lessdot 1$ とをみたす．　**終**

各 $f \in F$ に対して，f の枠組み P によって $f^\sharp \in W_K$ を次のように定める．

$$f^\sharp\theta = f(\theta|_P) \qquad (\theta \in K{\rightsquigarrow}S) \tag{6.2.8}$$

この $f^\sharp$ を f の**誇張**と呼ぶ．各 $f \in F$ に $f^\sharp \in W_K$ を対応させる写像を $\sharp$ で表す．

問題 6.2.16 写像 $\sharp$ は，$f^\sharp \doteq f$ と「$f \lessdot g \iff f^\sharp \le g^\sharp$」をみたし，$\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 代数系としての準写かつ全射であり，$f \in W_K$ については $f^\sharp = f$ をみたす．

W_K は束であるから，W_K の任意の有限部分集合に W_K 上の順序関係 $\le$ に関する下限と上限がある．そこで，F の元の列 $f_1 \cdots f_m$ と $g_1 \cdots g_n$ が

$$\inf_{W_K}\{{f_1}^\sharp, \ldots, {f_m}^\sharp\} \le \sup_{W_K}\{{g_1}^\sharp, \ldots, {g_n}^\sharp\} \tag{6.2.9}$$

をみたすことを次のように表す．

$$f_1 \cdots f_m \lessdot g_1 \cdots g_n \tag{6.2.10}$$

そうするとこの $\lessdot$ は，普遍単位半群 $F^* = \bigcup_{n \ge 0} F^n$ 上の関係とみなせる．なお (6.2.9) において，$m = 0$ の場合の左辺と $n = 0$ の場合の右辺は，第 3.9.3 項の下限・上限の定義により，それぞれ W_K の最大元と最小元に等しい．またこれらの場合，(6.2.10) の左辺または右辺は空列であるが，空列は第 5.1.1 項で述べた通り空白で表す．

三つ組み $(F, W_K, \sharp)$ は束写系であり，F^* 上の関係 $\lessdot$ は $\sharp$ 真関係に等しい．しかも，W_K は $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ をブール論法とするブール束であり，問題 6.2.16 により $\sharp$ は $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 準写（すなわちブール表現）かつ全射である．従って，第 3.19 節と第 3.21 節の定理等を $F, W_K, \sharp$ に適用して，F^* 上の関係 $\lessdot$ と F 上での算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ について色々なことを知ることができる．特に次のことが分かる．

定理 6.2.2 **F^* 上の関係 $\lessdot$ は，W 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow$ を F に制限したものについてブール関係であり，F 上の擬順序関係 $\lessdot$ の最大束拡張である．**

証明　定理 5.2.2 の証明に倣う．

問題 6.2.17 W 上の算法 $\wedge, \vee, \Diamond$ は次の法則に従う．ただし，結合律の等式の左辺と可換律の等式の両辺で算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番（括弧の付け方）は任意であり，可換律における ρ は n 次の任意の置換である．

$$\left.\begin{aligned} f_1 \wedge \cdots \wedge f_n &= (\cdots(f_1 \wedge f_2) \wedge \cdots) \wedge f_n) \\ f_1 \vee \cdots \vee f_n &= (\cdots(f_1 \vee f_2) \vee \cdots) \vee f_n) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(結合律)}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{\rho 1} \wedge \cdots \wedge f_{\rho n} &= f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \\ f_{\rho 1} \vee \cdots \vee f_{\rho n} &= f_1 \vee \cdots \vee f_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(可換律)}$$

$$\left.\begin{aligned} (f \wedge g)^{\Diamond} &= f^{\Diamond} \vee g^{\Diamond} \\ (f \vee g)^{\Diamond} &= f^{\Diamond} \wedge g^{\Diamond} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(双対律)}$$

$$(f^{\Diamond})^{\Diamond} = f \qquad \text{(重補律)}$$

補題 6.2.1 $f \in F$ **とし** $0, 1$ **を** W_P **の最小元と最大元とする．このとき，**F **上の関係** $\lessdot$ **について** $f \lessdot$ **なるためには** $f \doteq 0$ **なることが必要十分であり，**$f \gtrdot$ **なるためには** $f \doteq 1$ **なることが必要十分である．特に** $f \in W_P$ **の場合には，**$f \lessdot$ **なるためには** $f = 0$ **なることが必要十分であり，**$f \gtrdot$ **なるためには** $f = 1$ **なることが必要十分である．**

証明　補題 5.2.1 の証明に倣う．

定理 6.2.3 $f_i \in W_{P_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$，$g_j \in W_{Q_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$，$\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} Q_j\right) \subseteq R \in \mathcal{P}K$ **とするとき，**F **の元の列** $f_1 \cdots f_m$ **と** $g_1 \cdots g_n$ **が** (6.2.10) **をみたすためには，任意の** $\theta \in R \rightsquigarrow S$ **に対して次の不等式をみたすことが必要十分である．**

$$\inf_{\mathbb{T}}\{f_1(\theta|_{P_1}), \ldots, f_m(\theta|_{P_m})\} \leq \sup_{\mathbb{T}}\{g_1(\theta|_{Q_1}), \ldots, g_n(\theta|_{Q_n})\}$$

証明　定理 5.2.3 の証明に倣う．

補題 6.2.2 F **の任意の部分集合** X **に対して次のことが成り立つ．**

1. F **における** $\lessdot$ **に関する** X **の擬下限の全体** $\mathrm{qinf}_F X$ **は空集合ではない．**
2. $g \in F$ **が** $\mathrm{qinf}_F X$ **に属すためには，**$g^{\sharp} = \inf_{W_K} X^{\sharp}$ **なることが必要十分である．**
3. $X \subseteq W_P$ **の場合には，**$\inf_{W_P} X$ **は** $\mathrm{qinf}_F X$ **に属す．**

擬上限についても同様のことが成り立つ．

証明　補題 5.2.2 の証明に倣う．

問題 6.2.18 X が W_P の部分集合で $g \in W_Q$ であれば，次の二式が成り立つ．

$$(\inf_{W_P} X) \vee g = \inf_{W_{P \cup Q}}\{f \vee g \mid f \in X\}$$

$$(\sup_{W_P} X) \wedge g = \sup_{W_{P \cup Q}}\{f \wedge g \mid f \in X\}$$

6.2.7　算法 $\check{o}k$ の繰り返しの意味と性質

§ 問題 6.2.2 により，$k_1,\ldots,k_n$ を $P\in\mathcal{P}K$ の相異なる元とし $s_i\in S_{k_i}$ $(i=1,\ldots,n)$，$f\in W_P$ とすれば，$s_1\,\check{o}k_1\,(s_2\,\check{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\check{o}k_n\,f)\cdots))$ が定義されて $W_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ に属す．こうして出来る元の意味と性質をここで説明する．なお，この元を時に $(s_i\,\check{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f$ や $(s_i\,\check{o}k_i)_i f$ で表す．

$$(s_i\,\check{o}k_i)_{i=1,\ldots,n}f=(s_i\,\check{o}k_i)_i f=s_1\,\check{o}k_1\,(s_2\,\check{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\check{o}k_n\,f)\cdots))$$

定義 6.2.1 $k_1,\ldots,k_n$ を $P\in\mathcal{P}K$ の相異なる元とし，$\theta\in(P-\{k_1,\ldots,k_n\})\!\to\! S$，$s_i\in S$ $(i=1,\ldots,n)$ とする．このとき，$P\!\to\! S$ の元 $\begin{pmatrix}k_1,\ldots,k_n\\ \hline s_1,\ldots,s_n\end{pmatrix}\theta$ を次のように定義する（$s_i\in S_{k_i}$ でなく $s_i\in S$ であることと，二か所で $\rightsquigarrow S$ でなく $\to S$ であることに注意）．

$$\left(\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)\theta\right)k=\begin{cases}s_i & \cdots\quad k=k_i\ \text{のとき}\ (i=1,\ldots,n)\\ \theta k & \cdots\quad k\in P-\{k_1,\ldots,k_n\}\ \text{のとき}\end{cases}$$

$P=\{k_1,\ldots,k_n\}$ の場合には，$P-\{k_1,\ldots,k_n\}=\emptyset$，従って空集合律により $\theta=\emptyset$ となるが，この場合は $\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)\theta$ を $\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)$ で表すことと約定する．すなわち，$\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)$ は $\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)k_i=s_i$ なる $\{k_1,\ldots,k_n\}\!\to\! S$ の元である．こういう約定も**空集合規約**と呼ぶ．なお，記号 $\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)$ を時に $(k_i/s_i)_{i=1,\ldots,n}$ や $(k_i/s_i)_i$ で表す．

$$(k_i/s_i)_{i=1,\ldots,n}=(k_i/s_i)_i=\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)$$

問題 6.2.19 $k_1,\ldots,k_n$ を $P\in\mathcal{P}K$ の相異なる元とし，$P\subseteq Q\in\mathcal{P}K$ とし，$k_{n+1},\ldots,k_m$ を $Q-P$ の相異なる元とし，$\theta\in(Q-\{k_1,\ldots,k_m\})\!\to\! S$，$s_i\in S$ $(i=1,\ldots,m)$ とする．このとき，$P-\{k_1,\ldots,k_n\}\subseteq Q-\{k_1,\ldots,k_m\}$ であって

$$\left.\left(\left(\frac{k_1,\ldots,k_m}{s_1,\ldots,s_m}\right)\theta\right)\right|_P=\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)\theta|_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$$

が成り立つ．

問題 6.2.20 $k_1,\ldots,k_n$ を $P\in\mathcal{P}K$ の相異なる元とし，$\theta\in(P-\{k_1,\ldots,k_n\})\!\rightsquigarrow\! S$，$s_i\in S$ $(i=1,\ldots,n)$ とする．このとき，$\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)\theta\in P\!\rightsquigarrow\! S$ であるためには，$s_i\in S_{k_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ であることが必要十分である（二か所で $\to S$ でなく $\rightsquigarrow S$ であることに注意）．

定理 6.2.4 $k_1,\ldots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i\in S_{k_i}$ $(i=1,\ldots,n)$，$f\in W_P$ **とする．このとき，任意の** $\theta\in(P-\{k_1,\ldots,k_n\})\!\rightsquigarrow\! S$ **に対して次の式が成り立つ．**

$$(s_1\,\check{o}k_1\,(s_2\,\check{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\check{o}k_n\,f)\cdots)))\theta=f\left(\left(\frac{k_1,\ldots,k_n}{s_1,\ldots,s_n}\right)\theta\right)$$

証明　問題 6.2.2 と問題 6.2.20 により，この式の両辺とも定義される．また，$Q=P-\{k_n\}$ と定めれば，$\theta\in(Q-\{k_1,\ldots,k_{n-1}\})\!\rightsquigarrow\! S$ であるから $\theta'=\left(\frac{k_1,\ldots,k_{n-1}}{s_1,\ldots,s_{n-1}}\right)\theta$ は $Q\!\rightsquigarrow\! S$ に属す．算法 $\check{o}k_n$ の定義により，$n>1$ としてよく，$g=s_n\,\check{o}k_n\,f$ と定めれば，$g\in W_Q$，$g\theta'=f\big((k_n/s_n)\theta'\big)$

が成り立つ．自明に $(k_n/s_n)\theta' = \begin{pmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ s_1,\ldots,s_n \end{pmatrix}\theta$ が成り立つ．以上のことと n についての帰納法を使っての次の計算で（帰納法を使うところで改行してある）証明を完成することができる．

$$\begin{aligned}(s_1 \,\breve{o} k_1\,(s_2 \,\breve{o} k_2\,(\cdots(s_n \,\breve{o} k_n\, f)\cdots)))\theta &= (s_1 \,\breve{o} k_1\,(s_2 \,\breve{o} k_2\,(\cdots(s_{n-1} \,\breve{o} k_{n-1}\, g)\cdots)))\theta \\ &= g\left(\begin{pmatrix} k_1,\ldots,k_{n-1} \\ s_1,\ldots,s_{n-1} \end{pmatrix}\theta\right) = g\theta' = f\big((k_n/s_n)\theta'\big) = f\left(\begin{pmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ s_1,\ldots,s_n \end{pmatrix}\theta\right)\end{aligned}$$

系　$k_1,\ldots,k_n$ **を** K **の相異なる元とし，**$s_i \in S_{k_i}$ $(i=1,\ldots,n)$, $f \in W_{\{k_1,\ldots,k_n\}}$ **とすれば**

$$s_1 \,\breve{o} k_1\,(s_2 \,\breve{o} k_2\,(\cdots(s_n \,\breve{o} k_n\, f)\cdots)) = f\begin{pmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ s_1,\ldots,s_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

証明　定理 6.2.4 を $P = \{k_1,\ldots,k_n\}$ として使ってから二種類の空集合規約に従ったものである．

系 2 $k_1,\ldots,k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i \in S_{k_i}$ $(i=1,\ldots,n)$, $f \in W_P$ **とする．このとき，**n **次の任意の置換** ρ **に対して次の式が成り立つ．**

$$s_1 \,\breve{o} k_1\,(s_2 \,\breve{o} k_2\,(\cdots(s_n \,\breve{o} k_n\, f)\cdots)) = s_{\rho 1} \,\breve{o} k_{\rho 1}\,(s_{\rho 2} \,\breve{o} k_{\rho 2}\,(\cdots(s_{\rho n} \,\breve{o} k_{\rho n}\, f)\cdots))$$

証明　各 $\theta \in (P-\{k_1,\ldots,k_n\}) \rightsquigarrow S$ に対し定理 6.2.4 により $(s_1 \,\breve{o} k_1\,(s_2 \,\breve{o} k_2\,(\cdots(s_n \,\breve{o} k_n\, f)\cdots)))\theta = f\left(\begin{pmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ s_1,\ldots,s_n \end{pmatrix}\theta\right) = f\left(\begin{pmatrix} k_{\rho 1},\ldots,k_{\rho n} \\ s_{\rho 1},\ldots,s_{\rho n} \end{pmatrix}\theta\right) = (s_{\rho 1} \,\breve{o} k_{\rho 1}\,(s_{\rho 2} \,\breve{o} k_{\rho 2}\,(\cdots(s_{\rho n} \,\breve{o} k_{\rho n}\, f)\cdots)))\theta$ が成り立つからである．

系 3 $k_1,\ldots,k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし** $f \in W_P$ **とすれば，任意の** $\theta \in P \rightsquigarrow S$ **に対して**

$$f\theta = \Big((\theta k_1) \,\breve{o} k_1\,\Big((\theta k_2) \,\breve{o} k_2\,\Big(\cdots\big((\theta k_n) \,\breve{o} k_n\, f\big)\cdots\Big)\Big)\Big)\theta|_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$$

が成り立つ．

証明　$\theta = \begin{pmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ \theta k_1,\ldots,\theta k_n \end{pmatrix}\theta|_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ と $\theta k_i \in S_{k_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ が成り立つから，定理 6.2.4 によりこの系が成り立つ．

系 4 $k_1,\ldots,k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i \in S_{k_i}$ $(i=1,\ldots,n)$, $f \in W_P$ **とする．このとき**

$$(s_i \,\breve{o} k_i)_i(f^{\Diamond}) = \big((s_i \,\breve{o} k_i)_i f\big)^{\Diamond}$$

が成り立つ．

証明　任意の $\theta \in (P-\{k_1,\ldots,k_n\}) \rightsquigarrow S$ をとると，定理 6.2.4 と算法 $\Diamond$ の定義により

$$\big((s_i \,\breve{o} k_i)_i(f^{\Diamond})\big)\theta = f^{\Diamond}\big((k_i/s_i)_i\theta\big) = \Big(f\big((k_i/s_i)_i\theta\big)\Big)^{\Diamond} = \Big(\big((s_i \,\breve{o} k_i)_i f\big)\theta\Big)^{\Diamond} = \big((s_i \,\breve{o} k_i)_i f\big)^{\Diamond}\theta$$

と計算することができ，これでこの系が証明された．

系 5　$k_1,\dots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とすれば，任意の** $s_i\in S_{k_i}$ $(i=1,\dots,n)$ **に対して**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,1)\cdots))=1 \qquad s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,0)\cdots))=0$$

が成り立つ．ただし，左辺の 1 **と** 0 **は** W_P **の最大元と最小元であり，右辺の** 1 **と** 0 **は** $W_{P-\{k_1,\dots,k_n\}}$ **の最大元と最小元である．**

証明　定理 6.2.4 により任意の $\theta\in(P-\{k_1,\dots,k_n\})\rightsquigarrow S$ に対して

$$(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,1)\cdots)))\theta=1\left(\left(\frac{k_1,\dots,k_n}{s_1,\dots,s_n}\right)\theta\right)=1$$

であるから，注意 6.2.1 により第一式が成り立つ．第二式についても同様である．なお，注意 6.2.1 と系 4 と後出の補題 6.2.4 により W_P から $W_{P-\{k_1,\dots,k_n\}}$ への写像 $f\mapsto(s_i\,\breve{o}k_i)_i f$ がブール束の準写であるから，問題 3.13.6 によってもこの系が成り立つ．

補題 6.2.3　$k_1,\dots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$k_{n+1},\dots,k_m$ **を** $K-P$ **の相異なる元とし，** $s_i\in S_{k_i}$ $(i=1,\dots,m)$, $f\in W_P$ **とする．このとき，**f **の誇張** $f^\sharp\in W_K$ **について次の式が成り立つ．**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_m\,\breve{o}k_m\,f^\sharp)\cdots))\doteq s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots))$$

証明　任意の $\theta\in(K-\{k_1,\dots,k_m\})\rightsquigarrow S$ をとる．そうすると，定理 6.2.4 と誇張の定義 (6.2.8) と問題 6.2.19 を使って次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_m\,\breve{o}k_m\,f^\sharp)\cdots)))\theta&=f^\sharp\left(\left(\frac{k_1,\dots,k_m}{s_1,\dots,s_m}\right)\theta\right)\\&=f\left(\left.\left(\left(\frac{k_1,\dots,k_m}{s_1,\dots,s_m}\right)\theta\right)\right|_P\right)=f\left(\left(\frac{k_1,\dots,k_n}{s_1,\dots,s_n}\right)\theta|_{P-\{k_1,\dots,k_n\}}\right)\\&=(s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)))\theta|_{P-\{k_1,\dots,k_n\}}\end{aligned}$$

関係 $\doteq$ の定義 (6.2.7) により，これでこの補題が証明された．

注意 6.2.4　問題 6.2.16 により任意の $f\in F$ に対して $f^\sharp\doteq f$ が成り立つから，補題 6.2.3 は後出の定理 6.2.6 からも導かれる．しかし，定理 6.2.6 の証明に補題 6.2.3 を使う．

補題 6.2.4　$k_1,\dots,k_n$ **を** $P\in\mathcal{P}K$ **の相異なる元とし，**$s_i\in S_{k_i}$ $(i=1,\dots,n)$, $f,g\in W_P$ **とする．このとき次の三式が成り立つ．**

$$(s_i\,\breve{o}k_i)_i(f\wedge g)=(s_i\,\breve{o}k_i)_i f\wedge(s_i\,\breve{o}k_i)_i g$$
$$(s_i\,\breve{o}k_i)_i(f\vee g)=(s_i\,\breve{o}k_i)_i f\vee(s_i\,\breve{o}k_i)_i g$$
$$(s_i\,\breve{o}k_i)_i(f\Rightarrow g)=(s_i\,\breve{o}k_i)_i f\Rightarrow(s_i\,\breve{o}k_i)_i g$$

証明　三つの算法 $\wedge,\vee,\Rightarrow$ の任意の一つを $*$ で表し，任意の $\theta\in(P-\{k_1,\dots,k_n\})\rightsquigarrow S$ をとる．そうすると，定理 6.2.4 と算法 $*$ の定義により，次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}\big((s_i\,\breve{o}k_i)_i(f*g)\big)\theta&=(f*g)\big((k_i/s_i)_i\theta\big)=f\big((k_i/s_i)_i\theta\big)*g\big((k_i/s_i)_i\theta\big)\\&=\big((s_i\,\breve{o}k_i)_i f\big)\theta*\big((s_i\,\breve{o}k_i)_i g\big)\theta=\big((s_i\,\breve{o}k_i)_i f*(s_i\,\breve{o}k_i)_i g\big)\theta\end{aligned}$$

これでこの補題が証明された．

注意 6.2.5 補題 6.2.4 は，これを使って次に証明する定理 6.2.5 に含まれる．

定理 6.2.5 $P, Q \in \mathcal{P}K$ **とし，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** $P - Q$ **の相異なる元とし，**$k_{n+1}, \ldots, k_m$ **を** $P \cap Q$ **の相異なる元とし，**$k_{m+1}, \ldots, k_l$ **を** $Q - P$ **の相異なる元とし** $(n \leq m \leq l)$，$s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, l)$, $f \in W_P$，$g \in W_Q$ **とする．このとき次の三式が成り立つ．**

$$(s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \wedge g) = (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m} f \wedge (s_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l} g$$
$$(s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \vee g) = (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m} f \vee (s_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l} g$$
$$(s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f \Rightarrow g) = (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m} f \Rightarrow (s_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l} g$$

証明　三つの算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ の任意の一つを $*$ で表す．そうすると，補題 6.2.3 と問題 6.2.16 と補題 6.2.4 と問題 6.2.15 を使って次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}(s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f * g) &\doteq (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f * g)^\sharp = (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f^\sharp * g^\sharp) \\ &= (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l} f^\sharp * (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l} g^\sharp \doteq (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m} f * (s_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l} g\end{aligned}$$

従って $(s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,l}(f * g) \doteq (s_i \breve{o} k_i)_{i=1,\ldots,m} f * (s_i \breve{o} k_i)_{i=n+1,\ldots,l} g$ であるが，両辺とも $(P \cup Q) - \{k_1, \ldots, k_l\}$ を枠とする事態であるから，問題 6.2.15 により，この式は $\doteq$ を $=$ に替えても成り立つ．

補題 6.2.5 $k_1, \ldots, k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし** $f, g \in W_P$ **とする．このとき，**$f \leq g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ **に対して**

$$s_1 \breve{o} k_1 \, (s_2 \breve{o} k_2 \, (\cdots (s_n \breve{o} k_n \, f) \cdots)) \leq s_1 \breve{o} k_1 \, (s_2 \breve{o} k_2 \, (\cdots (s_n \breve{o} k_n \, g) \cdots))$$

の成り立つことが必要十分である．従って $f = g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ **に対して次の式の成り立つことが必要十分である．**

$$s_1 \breve{o} k_1 \, (s_2 \breve{o} k_2 \, (\cdots (s_n \breve{o} k_n \, f) \cdots)) = s_1 \breve{o} k_1 \, (s_2 \breve{o} k_2 \, (\cdots (s_n \breve{o} k_n \, g) \cdots))$$

証明　$f \leq g$ とすれば，任意の $\theta \in (P - \{k_1, \ldots, k_n\}) \rightsquigarrow S$ に対して定理 6.2.4 と注意 6.2.1 により

$$\begin{aligned}(s_1 \breve{o} k_1 \, (s_2 \breve{o} k_2 \, (\cdots (s_n \breve{o} k_n \, f) \cdots)))\theta &= f\left(\left(\frac{k_1, \ldots, k_n}{s_1, \ldots, s_n}\right)\theta\right) \\ &\leq g\left(\left(\frac{k_1, \ldots, k_n}{s_1, \ldots, s_n}\right)\theta\right) = (s_1 \breve{o} k_1 \, (s_2 \breve{o} k_2 \, (\cdots (s_n \breve{o} k_n \, g) \cdots)))\theta\end{aligned}$$

が成り立つから，注意 6.2.1 により問題の不等式が成り立つ．逆に，この不等式が任意の $s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して成り立てば，任意の $\theta \in P \rightsquigarrow S$ に対して定理 6.2.4 系 3 と注意 6.2.1 により

$$\begin{aligned}f\theta &= \big((\theta k_1) \, \breve{o} k_1 \, \big((\theta k_2) \, \breve{o} k_2 \, \big(\cdots \big((\theta k_n) \, \breve{o} k_n \, f\big) \cdots\big)\big)\big)\theta|_{P - \{k_1, \ldots, k_n\}} \\ &\leq \big((\theta k_1) \, \breve{o} k_1 \, \big((\theta k_2) \, \breve{o} k_2 \, \big(\cdots \big((\theta k_n) \, \breve{o} k_n \, g\big) \cdots\big)\big)\big)\theta|_{P - \{k_1, \ldots, k_n\}} = g\theta\end{aligned}$$

が成り立つから，注意 6.2.1 により $f \leq g$ 成り立つ．なお，後半を「逆に」以降の論法で証明してそれと補題 6.2.4 から前半を導くこともできる．

注意 6.2.6 問題 6.2.15 によりこの補題 6.2.5 は，これを使って次に証明する定理 6.2.6 に含まれる．

定理 6.2.6 $P, Q \in \mathcal{P}K$ **とし，**$k_1, \ldots, k_n$ **を** $P - Q$ **の相異なる元とし，**$k_{n+1}, \ldots, k_m$ **を** $P \cap Q$ **の相異なる元とし，**$k_{m+1}, \ldots, k_l$ **を** $Q - P$ **の相異なる元とし，**$f \in W_P$, $g \in W_Q$ **とする．このとき** $f \lessdot g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, l)$ **に対して**

$$s_1 \check{o}k_1 (s_2 \check{o}k_2 (\cdots (s_m \check{o}k_m f) \cdots)) \lessdot s_{n+1} \check{o}k_{n+1} (s_2 \check{o}k_2 (\cdots (s_l \check{o}k_l g) \cdots))$$

の成り立つことが必要十分である．従って $f \doteq g$ **であるためには，任意の** $s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, l)$ **に対して次の式の成り立つことが必要十分である．**

$$s_1 \check{o}k_1 (s_2 \check{o}k_2 (\cdots (s_m \check{o}k_m f) \cdots)) \doteq s_{n+1} \check{o}k_{n+1} (s_2 \check{o}k_2 (\cdots (s_l \check{o}k_l g) \cdots))$$

証明　問題 6.2.16 により，$f \lessdot g$ なることは $f^\sharp \leq g^\sharp$ なることと同等である．補題 6.2.5 により，$f^\sharp \leq g^\sharp$ なることは，任意の $s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, l)$ に対して $(s_i \check{o}k_i)_i f^\sharp \leq (s_i \check{o}k_i)_i g^\sharp$ なることと同等である．問題 6.2.15 により，$(s_i \check{o}k_i)_i f^\sharp \leq (s_i \check{o}k_i)_i g^\sharp$ なることは $(s_i \check{o}k_i)_i f^\sharp \lessdot (s_i \check{o}k_i)_i g^\sharp$ なることと同等である．補題 6.2.3 により $(s_i \check{o}k_i)_i f^\sharp \doteq (s_i \check{o}k_i)_{i=1,\ldots,m} f$ と $(s_i \check{o}k_i)_i g^\sharp \doteq (s_i \check{o}k_i)_{i=n+1,\ldots,l} g$ が成り立つ．以上のことからこの定理が成り立つ．

系　$k_1, \ldots, k_n$ **を** $P \in \mathcal{P}K$ **の相異なる元とし** $f \in W_P$ **とする．このとき，**$f = 1$ **であるためには，任意の** $s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ **に対して** $s_1 \check{o}k_1 (s_2 \check{o}k_2 (\cdots (s_n \check{o}k_n f) \cdots)) = 1$ **の成り立つことが必要十分である．ただし二か所の 1 は，それぞれ** W_P **と** $W_{P-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ **の最大元である．これら 1 を最少元 0 に替えても同様に成り立つ．**

証明　定理 6.2.6 または補題 6.2.5 と定理 6.2.4 系 5 による．

定理 6.2.7 $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \in F$, $\alpha, \beta \in F^*$ **とし，**$k \in K$ **が** $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ **の枠に属すが** α, β **に現れる事態の枠には属さないものとする．このとき，**

$$f_1 \cdots f_m \alpha \lessdot g_1 \cdots g_n \beta$$

が成り立つためには，任意の $s \in S_k$ **に対して次の式の成り立つことが必要十分である．**

$$s \check{o}k f_1, \cdots, s \check{o}k f_m, \alpha \lessdot s \check{o}k g_1, \cdots, s \check{o}k g_n, \beta$$

証明　$\alpha = f'_1 \cdots f'_{m'}$, $\beta = g'_1 \cdots g'_{n'}$ なる事態 $f'_1, \ldots, f'_{m'}, g'_1, \ldots, g'_{n'}$ をとって

$$f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_m \wedge f'_1 \wedge \cdots \wedge f'_{m'} \qquad g = g_1 \vee \cdots \vee g_n \vee g'_1 \vee \cdots \vee g'_{n'}$$

と定める．そうすると，$m \neq 0 \neq n$ の場合は次のように推論することができる．

$$\begin{aligned} f_1 \cdots f_m \alpha \lessdot g_1 \cdots g_n \beta &\iff f \lessdot g \\ &\iff \text{任意の } s \in S_k \text{ に対して } s \check{o}k f \lessdot s \check{o}k g \end{aligned}$$

ただし，一番目の $\iff$ は定理 6.2.2 と定理 3.21.2 により，二番目の $\iff$ は定理 6.2.6 による．さらに，定理 6.2.5 と定理 3.21.2 により，次のように推論することができる．

$$\begin{aligned} & s \check{o}k f \lessdot s \check{o}k g \\ \iff\ & s \check{o}k f_1 \wedge \cdots \wedge s \check{o}k f_m \wedge f'_1 \wedge \cdots \wedge f'_{m'} \lessdot s \check{o}k g_1 \vee \cdots \vee s \check{o}k g_n \vee g'_1 \vee \cdots \vee g'_{n'} \\ \iff\ & s \check{o}k f_1, \cdots, s \check{o}k f_m, \alpha \lessdot s \check{o}k g_1, \cdots, s \check{o}k g_n, \beta \end{aligned}$$

これで $m \neq 0 \neq n$ の場合は証明された．$m = 0 \neq n$ の場合は $s \check{o}k f$ を f に変え，$m \neq 0 = n$ の場合は $s \check{o}k g$ を g に変え，$m = n = 0$ の場合は $s \check{o}k f$ と $s \check{o}k g$ を f と g に変えれば，同様に証明される．

6.2.8　算法 λk と $\triangle$ の意味と性質

§ ここでは，格世界 W の算法 λk $\big((\lambda, k) \in (\{\breve{o}\} \times K) \cup \mathcal{J}\big)$ と $\triangle$ を関連させながらその意味と性質を説明する．

定義 6.2.2 $\nu \in N$，$\theta \in P \rightsquigarrow S$ $(P \in \mathcal{P}K)$ のとき，各 $a \in E_\nu$ に対して S_ν の部分集合 $S^a_{\nu,\theta}$ を

$$S^a_{\nu,\theta} = \{s \in S_\nu \mid a \ni_{\nu,\theta} s\}$$

と定める．他方，各 $k \in K$ に対して S の部分集合 S_k を (6.2.2) のように定めてあったが，さらに $k \in P \in \mathcal{P}K$，$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$，$f \in W_P$ のとき，S_k の部分集合 $S^{\theta,f}_k$ を次のように定める．

$$S^{\theta,f}_k = \{s \in S_k \mid f\big((k/s)\theta\big) = 1\}$$

(6.2.2) への注意により $s \in S_k$ なら $(k/s)\theta \in P \rightsquigarrow S$ であるから，この定義は可能である．

問題 6.2.21 $\nu \in N$，$\theta \in P \rightsquigarrow S$ $(P \in \mathcal{P}K)$ のとき，任意の $a \in S_\nu$ に対して $a \in S^a_{\nu,\theta}$ が成り立つ．

略解　ある $o \in O_\nu$ に対して $\ni_{\nu,\theta} = \ni_o$ であって $\ni_o$ が S_ν 上で反射的だからである．

問題 6.2.22 $k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$，$s \in S_k$ とすれば，任意の $\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して

$$(s\,\breve{o}k\,f)\theta = 1 \iff s \in S^{\theta,f}_k$$

が成り立つ．

略解　定義 6.2.2 により算法 $\breve{o}k$ の定義の一部を書き換えたに過ぎない．

定理 6.2.8 $\nu \in N$，$\theta \in P \rightsquigarrow S$ $(P \in \mathcal{P}K)$ **とすれば，**$K_\nu - P = \{\varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}\}$ **なる** N_ν **の相異なる元** $\mu_1, \ldots, \mu_n$ **がとれて，任意の** $a \in E_\nu$ **と** $s \in S$ **について次のことが成り立つ．**

$$s \in S^a_{\nu,\theta} \iff (s\,\breve{o}\pi\,(p_{\mu_1}\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(p_{\mu_2}\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(p_{\mu_n}\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,a\triangle)\cdots))))\theta|_{K_\nu \cap P} = 1$$

証明　$\#N_\nu < \infty$ であるから，$K_\nu - P = \{\varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}\}$ なる相異なる元 $\mu_1, \ldots, \mu_n \in N_\nu$ がある．$\pi, \varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}$ が $\{\pi\} \cup K_\nu$ の相異なる元であり，(6.2.2) と基点の定め方により $s \in S_\pi$ と $p_\mu \in S_{\varpi_\mu}$ $(\mu \in N')$ が成り立ち，$a\triangle \in W_{\{\pi\} \cup K_\nu}$ であって $(\{\pi\} \cup K_\nu) - \{\pi, \varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}\} = K_\nu \cap P$ であるから，$\theta' = \left(\dfrac{\pi, \varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}}{s, p_{\mu_1}, \ldots, p_{\mu_n}}\right)\theta|_{K_\nu \cap P}$ と定めれば，定理 6.2.4 により

$$(s\,\breve{o}\pi\,(p_{\mu_1}\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(p_{\mu_2}\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(p_{\mu_n}\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,a\triangle)\cdots))))\theta|_{K_\nu \cap P} = (a\triangle)\theta'$$

が成り立つ．他方で，算法 $\triangle$ の定義により

$$(a\triangle)\theta' = 1 \iff \begin{cases} \theta'\pi \in S_\nu \\ o = (\theta'\varpi_\mu)_{\mu \in N_\nu} \in O_\nu \text{ に対して } a \ni_o \theta'\pi \end{cases}$$

が成り立つが，θ' の定義により o が (6.2.1) をみたすから，関係 $\ni_{\nu,\theta}$ の定義により，

$$(a\triangle)\theta' = 1 \iff s \in S^a_{\nu,\theta}$$

が成り立つ．これで証明された．

系　$a \in E_\nu$ **とすれば次のことが成り立つ** $(\nu \in \mathrm{N})$**．**

1. **任意の** $s \in S$ **と** $\theta \in K_\nu \rightsquigarrow S$ **について「**$(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle)\theta = 1 \iff s \in S^{a}_{\nu,\theta}$**」が成り立つ．**
2. $s \in S - S_\nu$ **なら** $s\,\breve{o}\pi\, a\triangle = 0$ **が成り立つ．ただし，**0 **は** W_{K_ν} **の最小元である．**
3. $a \in S_\nu$ **なら** $a\,\breve{o}\pi\, a\triangle = 1$ **が成り立つ．ただし，**1 **は** W_{K_ν} **の最大元である．**
4. **任意の** $\theta \in K_\nu \rightsquigarrow S$ **に対して** $S^{a}_{\nu,\theta} = S^{\theta, a\triangle}_{\pi}$ **が成り立つ．**

証明　結論 1 は定理 6.2.8 において $P = K_\nu$ として得られる．$S^{a}_{\nu,\theta} \subseteq S_\nu$ だから，結論 1 から結論 2 が得られる．結論 3 は，結論 1 において $s = a$ として問題 6.2.21 を使えば得られる．問題 6.2.22 により，$s \in S$ と $\theta \in K_\nu \rightsquigarrow S$ について「$(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle)\theta = 1 \iff s \in S^{\theta, a\triangle}_{\pi}$」が得られる．これと結論 1 を合わせれば結論 4 が得られる．

系 2 $k_1, \ldots, k_n$ **を** $\{\pi\} \cup K_\nu$ **の相異なる元とし，ある** $j \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して** $k_j = \pi$ **であるとし，**$s_i \in S_{k_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$，$a \in E_\nu$ **とする．このとき，**

$$s_1\,\breve{o}k_1\,(s_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\, a\triangle)\cdots)) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad s_j \in S - S_\nu \text{ のとき} \\ 1 & \cdots \quad s_j = a \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ $(\nu \in \mathrm{N})$**．ただしこの式中の** 0 **と** 1 **は，**$W_{(\{\pi\}\cup K_\nu)-\{k_1,\ldots,k_n\}}$ **の最小元と最大元である．**

証明　系と定理 6.2.4 の系 5 と系 2 による．

問題 6.2.23 $a \in E_\nu$，$\lambda \in \mathfrak{Q}_\nu$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$ とすれば，任意の $\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して

$$(a\lambda k\, f)\theta = 1 \iff \begin{cases} \left|S^{a}_{\nu,\theta} - S^{\theta,f}_{k}\right|_\nu \in \neg\lambda & \cdots \quad \lambda \in \neg\mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \\ \left|S^{a}_{\nu,\theta} \cap S^{\theta,f}_{k}\right|_\nu \in \lambda & \cdots \quad \lambda \in \mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ $(\nu \in \mathrm{N})$．

略解　定義 6.2.2 により算法 λk の定義の一部を言い換えたに過ぎない．

注意 6.2.7 問題 6.2.23 では，算法 λk を考察したのだから厳密には $(\lambda, k) \in \mathcal{J}$ と書き加えるべきであったが，自明のことなので省略した．**こういう省略を今後も同様の場面で行なう．**

定義 6.2.3 $\mathbb{P}_\nu$ の二種の区間 $(\leftarrow p]$，$(p \rightarrow) \in \mathfrak{P}_\nu$ の定める二種の限量子 $\neg(\leftarrow p]$，$(p \rightarrow) \in \mathfrak{Q}_\nu$ を，それぞれ $\underline{p}$，$\overline{p}$ と略記する $(p \in \mathbb{P}_\nu,\ \nu \in \mathrm{N})$．

$$\underline{p} = \neg(\leftarrow p] \qquad\qquad \overline{p} = (p \rightarrow)$$

さらに，いずれの $\nu \in \mathrm{N}$ に対しても，$\mathbb{P}_\nu$ の単位元かつ最小元を 0 で表し，限量子 $\underline{0}$ と $\overline{0}$ をそれぞれ $\forall$ と $\exists$ とも書く．

$$\forall = \underline{0} = \neg(\leftarrow 0] \qquad\qquad \exists = \overline{0} = (0 \rightarrow)$$

これらを，それぞれ ν 相の**全称子・存称子**と呼んで，ν 相の**極量子**と総称する．

問題 6.2.24 $a \in E_\nu$，$p \in \mathbb{P}_\nu$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in \mathcal{W}_P$ とすれば，任意の $\theta \in (P-\{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して

$$(a\,\underline{p}k\,f)\theta = 1 \iff \left|S^a_{\nu,\theta} - S^{\theta,f}_k\right|_\nu \leq p$$
$$(a\,\overline{p}k\,f)\theta = 1 \iff \left|S^a_{\nu,\theta} \cap S^{\theta,f}_k\right|_\nu > p$$

が成り立つ ($\nu \in N$).

略解　問題 6.2.23 を限量子 $\underline{p} = \neg(\leftarrow p]$，$\overline{p} = (p\rightarrow) \in \mathfrak{Q}_\nu$ に適用したに過ぎない.

問題 6.2.25 $a \in E_\nu$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in \mathcal{W}_P$ とすれば，ν 相の極量子 $\forall, \exists$ と任意の $\theta \in (P-\{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して次のことが成り立つ ($\nu \in N$).

$$(a\,\forall k\,f)\theta = 1 \iff S^a_{\nu,\theta} \subseteq S^{\theta,f}_k$$
$$(a\,\exists k\,f)\theta = 1 \iff S^a_{\nu,\theta} \cap S^{\theta,f}_k \neq \emptyset$$

略解　問題 6.2.24 において $p = 0$ としてから ν 相の測度の零値律と正値律を使ったに過ぎない.

問題 6.2.26 $a \in E_\nu$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in \mathcal{W}_P$ とし，$K_\nu - (P-\{k\}) = \{\varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}\}$ なる N_ν の相異なる元 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ をとる ($\nu \in N$)．このとき，ν 相の極量子 $\forall, \exists$ と任意の $\theta \in (P-\{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して，次の二つのことが成り立つ．すなわちまず，$(a\,\forall k\,f)\theta = 1$ なるためには，

$$(s\,\breve{o}\pi\,(p_{\mu_1}\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(p_{\mu_2}\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(p_{\mu_n}\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,a\triangle)\cdots))))\theta|_{K_\nu\cap(P-\{k\})} = 1 \tag{6.2.11}$$

なる任意の $s \in S_\nu$ が $(s\,\breve{o}k\,f)\theta = 1$ をみたすことが必要十分である．次に，$(a\,\exists k\,f)\theta = 1$ なるためには，(6.2.11) と $(s\,\breve{o}k\,f)\theta = 1$ をみたす $s \in S_\nu$ の存在することが必要十分である.

略解　問題 6.2.25 を定理 6.2.8 と問題 6.2.22 によって書き換えたに過ぎない.

問題 6.2.27 $a \in E_\nu$，$k \in K$，$f \in \mathcal{W}_{\{k\}}$ とし，$K_\nu = \{\varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}\}$ なる N_ν の相異なる元 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ をとる ($\nu \in N$)．このとき，ν 相の全称子 $\forall$ について $a\,\forall k\,f = 1$ なるためには，

$$s\,\breve{o}\pi\,(p_{\mu_1}\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(p_{\mu_2}\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(p_{\mu_n}\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,a\triangle)\cdots))) = 1 \tag{6.2.12}$$

なる任意の $s \in S_\nu$ が $s\,\breve{o}k\,f = 1$ をみたすことが必要十分である．また，ν 相の存称子 $\exists$ について $a\,\exists k\,f = 1$ なるためには，(6.2.12) と $s\,\breve{o}k\,f = 1$ をみたす $s \in S_\nu$ の存在することが必要十分である.

略解　問題 6.2.26 において $P = \{k\}$ とすればいい.

問題 6.2.28 $a, b \in E_\nu$ とし，$K_\nu = \{\varpi_{\mu_1}, \ldots, \varpi_{\mu_n}\}$ なる N_ν の相異なる元 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ をとり，$s_i \in S_{\mu_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする ($\nu \in N$)．このとき，ν 相の全称子 $\forall$ について

$$a\,\forall\pi\,(s_1\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(s_2\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(s_n\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,b\triangle)\cdots))) = 1$$

なるためには，(6.2.12) をみたす任意の $s \in S_\nu$ が $s\,\breve{o}\pi\,(s_1\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(s_2\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(s_n\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,b\triangle)\cdots)))$ $= 1$ をみたすことが必要十分である．また，ν 相の存称子 $\exists$ について

$$a\,\exists\pi\,(s_1\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(s_2\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(s_n\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,b\triangle)\cdots))) = 1$$

なるためには，(6.2.12) と $s\,\breve{o}\pi\,(s_1\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(s_2\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(s_n\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,b\triangle)\cdots))) = 1$ をみたす $s \in S_\nu$ の存在することが必要十分である.

略解　問題 6.2.27 において $k=\pi$, $f=s_1\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(s_2\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(s_n\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,b\triangle)\cdots))$ すればいい．

問題 6.2.29　$a,b\in E_\nu$, $\lambda\in\mathfrak{Q}_\nu$, $\theta\in K_\nu{\leadsto}S$ とすれば，

$$(a\,\lambda\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff \begin{cases} \left|S^a_{\nu,\theta}-S^b_{\nu,\theta}\right|_\nu\in\neg\lambda & \cdots\quad \lambda\in\neg\mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \\ \left|S^a_{\nu,\theta}\cap S^b_{\nu,\theta}\right|_\nu\in\lambda & \cdots\quad \lambda\in\mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ $(\nu\in\mathrm{N})$．特に，$p\in\mathbb{P}_\nu$ とすれば

$$(a\,\underline{p}\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff \left|S^a_{\nu,\theta}-S^b_{\nu,\theta}\right|_\nu\le p$$
$$(a\,\overline{p}\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff \left|S^a_{\nu,\theta}\cap S^b_{\nu,\theta}\right|_\nu> p$$

が成り立つ．さらに特に，ν 相の極量子 $\forall,\exists$ について次のことが成り立つ．

$$(a\,\forall\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff S^a_{\nu,\theta}\subseteq S^b_{\nu,\theta}$$
$$(a\,\exists\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff S^a_{\nu,\theta}\cap S^b_{\nu,\theta}\ne\emptyset$$

略解　一番目のことは，問題 6.2.23 を $k=\pi$ と $f=b\triangle\in W_{\{\pi\}\cup K_\nu}$ に適用してから定理 6.2.8 系により $S^{\theta,b\triangle}_\pi=S^b_{\nu,\theta}$ であることを使って得られる．これを限量子 $\neg(\leftarrow p]$ と $(p\rightarrow)$ に適用すれば二番目のことが得られ，さらに $p=0$ として ν 相の測度の零値律と正値律を使えば三番目のことが得られる．

問題 6.2.30　$a\in E_\nu$ であれば，ν 相の全称子 $\forall$ について $a\,\forall\pi\,a\triangle=1$ が成り立つ $(\nu\in\mathrm{N})$．

略解　問題 6.2.29 により任意の $\theta\in K_\nu{\leadsto}S$ に対して $(a\,\forall\pi\,a\triangle)\theta=1$ が成り立つからである．

注意 6.2.8　$a\in E_\nu$ とし，$K_\nu=\{\varpi_{\mu_1},\ldots,\varpi_{\mu_n}\}$ なる N_ν の相異なる元 $\mu_1,\ldots,\mu_n$ をとり，$s_i\in S_{\mu_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ とする $(\nu\in\mathrm{N})$．そうすると，問題 6.2.30 と定理 6.2.6 系により

$$s_1\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(s_2\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(s_n\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,(a\,\forall\pi\,a\triangle))\cdots))=1$$

が成り立つ．他方で問題 6.2.28 によれば，

$$a\,\forall\pi(s_1\,\breve{o}\varpi_{\mu_1}\,(s_2\,\breve{o}\varpi_{\mu_2}(\cdots(s_n\,\breve{o}\varpi_{\mu_n}\,a\triangle)\cdots)))=1$$

は必ずしも成り立たない．

問題 6.2.31　$a\in E_\nu$, $\lambda\in\mathfrak{Q}_\nu$, $b\in E_\mu$, $\nu\ne\mu$, $\theta\in K_\mu{\leadsto}S$ とすれば，

$$(a\,\lambda\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff \begin{cases} \left|S^a_{\nu,\theta}\right|_\nu\in\neg\lambda & \cdots\quad \lambda\in\neg\mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \\ 0\in\lambda & \cdots\quad \lambda\in\mathfrak{P}_\nu \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ $(\nu,\mu\in\mathrm{N})$．特に，$p\in\mathbb{P}_\nu$ とすれば

$$(a\,\underline{p}\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff \left|S^a_{\nu,\theta}\right|_\nu\le p$$
$$(a\,\overline{p}\pi\,b\triangle)\theta=0$$

が成り立つ．さらに特に，ν 相の全称子 $\forall$ について次のことが成り立つ．

$$(a\,\forall\pi\,b\triangle)\theta=1 \iff S^a_{\nu,\theta}=\emptyset$$

略解　一番目のことは，問題 6.2.23 を $k = \pi$ と $f = b\triangle \in W_{\{\pi\}\cup K_\mu}$ に適用してから，定理 6.2.8 系により $S_\pi^{\theta, b\triangle} = S_{\mu,\theta}^{b}$ であることと，$\nu \neq \mu$ であるために $S_\nu \cap S_\mu = \emptyset$ であることと，ν 相の測度の零値性を使って得られる．これを限量子 $\neg(\leftarrow p]$ と $(p\rightarrow)$ に適用すれば二番目のことが得られ，さらに $p = 0$ として ν 相の測度の零値律と正値律を使えば三番目のことが得られる．

6.2.9　算法 λk と関係 $\lessdot$

§ ここでは，算法 λk と F^* 上の関係 $\lessdot$ や F 上の関係 $\doteq$ のみたす式について調べる．各種命題の証明の都合上，双対性に関する事柄をまずとりあげる．

各 $\nu \in N$ に対し，$\mathfrak{P}_\nu$ は集合算法 $\cap, \cup, \circ$ をブール算法とするブール束であり，$\neg\mathfrak{P}_\nu$ は次の算法 $\cap, \cup, \circ$ をブール算法とするブール束である．

$$(\neg\mathfrak{p}) \cap (\neg\mathfrak{q}) = \neg(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \qquad (\neg\mathfrak{p}) \cup (\neg\mathfrak{q}) = \neg(\mathfrak{p} \cup \mathfrak{q}) \qquad (\neg\mathfrak{p})^\circ = \neg(\mathfrak{p}^\circ) \tag{6.2.13}$$

この束における順序関係も $\subseteq$ で表す．すなわち，

$$\neg\mathfrak{p} \subseteq \neg\mathfrak{q} \iff \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$$

補題 6.2.6 $a \in E_\nu$，$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\nu$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$ **のとき次の式が成り立つ** $(\nu \in N)$**．**

$$(a\,\mathfrak{p}k\,f)^\Diamond = a\,\mathfrak{p}^\circ k\,f \qquad (a\,\neg\mathfrak{p}k\,f)^\Diamond = a\,\neg\mathfrak{p}^\circ k\,f \tag{6.2.14}$$

$$a\,\mathfrak{p}k\,f = a\,\neg\mathfrak{p}k\,f^\Diamond \qquad a\,\neg\mathfrak{p}k\,f = a\,\mathfrak{p}k\,f^\Diamond \tag{6.2.15}$$

注意 6.2.9 (6.2.3) と (6.2.13) のように定めたことにより，(6.2.14) と (6.2.15) はそれぞれ次のようにまとめて書くことができる．すなわち，$a \in E_\nu$，$\lambda \in \mathfrak{Q}_\nu$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in W_P$ のとき

$$(a\lambda k\,f)^\Diamond = a\lambda^\circ k\,f \qquad a\lambda k\,f = a\neg\lambda k\,f^\Diamond$$

この二式を問題 6.2.17 の重補律を使って変形したり組み合わせたりすれば，次の四式も得られる．

$$(a\lambda^\circ k\,f)^\Diamond = a\lambda k\,f, \quad a\neg\lambda k\,f = a\lambda k\,f^\Diamond, \quad (a\lambda k\,f)^\Diamond = a\neg\lambda^\circ k\,f^\Diamond, \quad (a\lambda k\,f^\Diamond)^\Diamond = a\neg\lambda^\circ k\,f$$

証明　(6.2.14) と (6.2.15) の第一式は，任意の $\theta \in (P - \{k\}){\rightsquigarrow}S$ をとっての次の推論で証明される．

$$\begin{aligned}
(a\,\mathfrak{p}k\,f)^\Diamond\theta = 1 &\iff (a\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 0\\
&\iff \bigl|\bigl\{s \in S_\nu \mid a\ \exists_{\nu,\theta}\ s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\bigr\}\bigr|_\nu \in \mathfrak{p}^\circ \iff (a\,\mathfrak{p}^\circ k\,f)\theta = 1\\
(a\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 &\iff \bigl|\bigl\{s \in S_\nu \mid a\ \exists_{\nu,\theta}\ s,\ f\bigl((k/s)\theta\bigr) = 1\bigr\}\bigr|_\nu \in \mathfrak{p}\\
&\iff \bigl|\bigl\{s \in S_\nu \mid a\ \exists_{\nu,\theta}\ s,\ f^\Diamond\bigl((k/s)\theta\bigr) = 0\bigr\}\bigr|_\nu \in \mathfrak{p} \iff (a\,\neg\mathfrak{p}k\,f^\Diamond)\theta = 1
\end{aligned}$$

残りの式も同様に証明できるが，証明済みの式から導くこともできる．すなわち，(6.2.15) の第一式において f を $f^\Diamond$ で置き換えれば，問題 6.2.17 により $(f^\Diamond)^\Diamond = f$ が成り立つので，(6.2.15) の第二式が得られる．また，(6.2.14) の第一式において f を $f^\Diamond$ で置き換えてから (6.2.15) の第二式を使えば，(6.2.14) の第二式が得られる．

注意 6.2.10 定理 6.2.2 により F^* 上の関係 $\lessdot$ は特に算法 $\wedge, \vee, \Diamond$ について擬ブール関係であるから，これらの算法と関係 $\lessdot$ と $\doteq$ およびその W_P $(P \in \mathcal{P}K)$ への制限である $\leq$ と $=$ について，定

義 3.21.3 の意味での双対性を使うことができる．ただし，この双対性を以下で使うときには，補題 6.2.6 の諸式（これらも双対性の一種とみなせる）を併用するので，記号 $\wedge, \vee, \lessdot, \leq$ を $\vee, \wedge, \gtrdot, \geq$ に機械的に置き換えるのでなく，定理 3.21.3 の背理律・道理律・対偶律や問題 6.2.17 の重補律・双対律を使っての計算の形をとることにする．

系　$a \in E_\nu$, $p \in \mathbb{P}_\nu$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **のとき次の二式が成り立つ** $(\nu \in N)$**．**

$$(a\,\underline{p}k\,f)^\Diamond = a\,\overline{p}k\,f^\Diamond \qquad\qquad (a\,\overline{p}k\,f)^\Diamond = a\,\underline{p}k\,f^\Diamond$$

特に，$a \in E_\nu$, $k \in P \in \mathcal{P}K$, $f \in W_P$ **のとき，**ν **相の極量子について次の二式が成り立つ．**

$$(a\,\forall k\,f)^\Diamond = a\,\exists k\,f^\Diamond \qquad\qquad (a\,\exists k\,f)^\Diamond = a\,\forall k\,f^\Diamond$$

証明　後半は，前半と $\forall = \underline{0}$, $\exists = \overline{0}$ なる定義による．前半の第一式は次の計算で証明される．

$$(a\,\underline{p}k\,f)^\Diamond = (a\,\neg(\leftarrow p]k\,f)^\Diamond = a\,(\leftarrow p]^\circ k\,f^\Diamond = a\,(p\rightarrow)k\,f^\Diamond = a\,\overline{p}k\,f^\Diamond$$

第二式も同様に示せるが，第一式から双対性によって導くこともできる．すなわち，

$$(a\,\overline{p}k\,f)^\Diamond = (a\,\overline{p}k\,f^{\Diamond\Diamond})^\Diamond = (a\,\underline{p}k\,f^\Diamond)^{\Diamond\Diamond} = a\,\underline{p}k\,f^\Diamond$$

（つづく）

6.3　付値と意味写像

$ 前節では，格言語の意味論の第一弾として世界論を行ない，格言語にとって認識可能な格世界を定義してその構造を調べた．ここでは格言語の意味論の第二弾として対応論を行なう．つまり，格言語がそれにとって認識可能な格世界に対応付けられる仕組みを説明する．ただし，格言語とそれにとって認識可能な格世界は定義 4.1.1 と定義 4.2.1 の意味の形式言語とそれにとっての認識可能世界の特殊例であるから，以下の対応論では，第 4.3 節 – 第 4.6 節の一般論の簡略な復習に若干の特殊論を加えるに過ぎない．

この節を通じて，$(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ **を格言語とし，**N **をその相集合とし，その他の記号の意味もこれまで通りとする．また，**W **を** A **にとって認識可能な格世界とする．**

6.3.1　定付値と変付値

§ 第 4.3.1 項での定義通りに，A の定数系 Con から W への保型写像 Φ を A から W への**定付値**と呼び，A の変数系 Var から W への保型写像 ν を A から W への**変付値**と呼び，A から W への変付値の全体を Val_W で表す．ただし誤解の恐れのない場合には，添え字の W を省略して Val で表す．この節の主目標は A から W^{Val} への意味写像を定義することである．

6.3.2　格世界の Val 乗の T 型代数構造

§ 第 4.3.2 項での定義に従って，格世界 W の Val 乗 $W^{\mathrm{Val}} = \bigcup_{t \in T}(\mathrm{Val} \to W_t)$ に T 型代数構造を定める．つまり，抽象子 Ωx ($x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\nu}$, $\nu \in N$) を W^{Val} 上の単項算法として然るべく定義し，そ

れを W の巾代数系としての W^{Val} の U 型代数構造に付け加える．そのためには Ωx の W での意味 $(\Omega x)_W$ を然るべく定めればいいが，$\sigma x = \varepsilon_\nu$，$W_{\varepsilon_\nu} = S_\nu$ であり，Ωx の T での定義域 $T_{\Omega x}$ が $\mathcal{P}K_\nu$ に等しく，各 $P \in \mathcal{P}K_\nu$ に対して $W_P = (P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}$，$P\,\Omega x = \delta_\nu$ であり，$W_{\delta_\nu} = O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$ であるから，

$$(\Omega x)_W \in \left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}K_\nu}\Big(S_\nu{\to}\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)\Big)\right){\to}W$$

であって各 $P \in \mathcal{P}K_\nu$ に対して

$$(\Omega x)_W\Big(S_\nu{\to}\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)\Big) \subseteq O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$$

なるように $(\Omega x)_W$ を定めればいい．そこでまず，$P \subseteq K_\nu = \{\varpi_\mu \mid \mu \in N_\nu\}$ であること，$\mu, \mu' \in N_\nu$，$\mu \neq \mu'$ であれば $\varpi_\mu \neq \varpi_{\mu'}$ であること，$O_\nu = \prod_{\mu\in N_\nu} S_\mu$ であること，$\bigcup_{\mu\in N_\nu} S_\mu \subseteq S$ であること，これらすべてに留意して，各 $o = (o_\mu)_{\mu\in N_\nu} \in O_\nu$ に対して，$P{\rightsquigarrow}S$ の元 $\theta_{P,o}$ を

$$\theta_{P,o}\varpi_\mu = o_\mu \qquad\qquad (\varpi_\mu \in P,\ \mu \in N_\nu)$$

と定める．特に $\theta_{\{\varpi_\mu\},o} = (\varpi_\mu/o_\mu)$ である $(\mu \in N_\nu)$．次に，各 $f \in S_\nu{\to}\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)$ に対して，$(\Omega x)_W f \in O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})$ を次のように定める．すなわち，任意の $o \in O_\nu$ と $s \in S_\nu$ に対して

$$\Big(\big((\Omega x)_W f\big)o\Big)s = (fs)\theta_{P,o}$$

ただし $P = \emptyset$ の場合は，空集合律と空集合規約により $P{\rightsquigarrow}S = \{\emptyset\}$，$\theta_{P,o} = \emptyset$，$S_\nu{\to}\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big) = S_\nu{\to}\mathbb{T}$ であるから，上の式は各 $f \in S_\nu{\to}\mathbb{T}$ に対して $\Big(\big((\Omega x)_W f\big)o\Big)s = fs$ と定めている．

こういう意味付け $\Omega x \mapsto (\Omega x)_W$ によって定まる W^{Val} 上の算法 Ωx は，第 4.3.2 項での定義によれば，定義域については

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \bigcup_{P\in\mathcal{P}K_\nu}\Big(\mathrm{Val}{\to}\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)\Big)$$

をみたし，値域については $P \in \mathcal{P}K_\nu$，$\varphi \in \mathrm{Val}{\to}\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)$ のとき

$$\varphi\,\Omega x \in \mathrm{Val}{\to}\big(O_\nu{\to}(S_\nu{\to}\mathbb{T})\big)$$

をみたし，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ と $o \in O_\nu$ と $s \in S_\nu$ に対して

$$\Big(\big((\varphi\,\Omega x)\nu\big)o\Big)s = \Big(\varphi\big((x/s)\nu\big)\Big)\theta_{P,o}$$

すなわち拡張関係 $\ni_o$ について

$$(\varphi\,\Omega x)\nu \ni_o s \iff \Big(\varphi\big((x/s)\nu\big)\Big)\theta_{P,o} = 1$$

をみたす．ただし $(x/s)\nu$ は，次のように定義される Val の元である．

$$\big((x/s)\nu\big)y = \begin{cases} s & \cdots \quad y = x \text{ のとき} \\ \nu y & \cdots \quad \mathrm{Var} \ni y \neq x \text{ のとき} \end{cases}$$

また，$P = \emptyset$ の場合は，$\varphi \in \mathrm{Val}{\to}\big((P{\rightsquigarrow}S){\to}\mathbb{T}\big)$ は $\varphi \in \mathrm{Val}{\to}\mathbb{T}$ を意味し，そういう φ に対して，$\Big(\varphi\big((x/s)\nu\big)\Big)\theta_{P,o}$ は $\varphi\big((x/s)\nu\big)$ を表す．

W の Val 乗 W^{Val} は，こう定めた算法 Ωx ($x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\nu}$，$\nu \in \mathrm{N}$) と W の巾代数系としての U 型代数構造とにより T 型代数系になり，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ の定める射影 $\mathrm{pr}_\nu \in W^{\mathrm{Val}} \to W$ は，U 型代数系としての保型準写である．

なお $\mathrm{N}_\nu = \emptyset$ の場合は，$\mathrm{K}_\nu = \emptyset$ であることと空集合規約により，算法 Ωx は定義域については $\mathrm{Dom}\,\Omega x = \mathrm{Val} \to \mathbb{T}$ をみたし，値域については $\varphi \in \mathrm{Val} \to \mathbb{T}$ のとき $\varphi\,\Omega x \in \mathrm{Val} \to (\mathrm{S}_\nu \to \mathbb{T})$ をみたし，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ と $s \in \mathrm{S}_\nu$ に対して $\big((\varphi\,\Omega x)\nu\big)s = \varphi\big((x/s)\nu\big)$，すなわち ν 相の拡張関係 $\exists_\nu$ について「$(\varphi\,\Omega x)\nu \mathrel{\exists_\nu} s \iff \varphi\big((x/s)\nu\big) = 1$」をみたす．

N が単元集合 $\{\nu\}$ の場合，$\mathrm{N}_\nu = \emptyset$ であって第 6.2.3 項により W は単相格世界であるが，この場合の算法 Ωx の上記の定め方は，第 5.3.2 項での算法 Ωx の定め方と同じである．

$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ が高岡言語で W が高岡世界の場合，$\mathrm{N} = \{1, 2\}$ であるから抽象子は Ωx ($x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_1} \cup \mathrm{Var}_{\varepsilon_2}$) であるが，$x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_2}$ の場合は，$\mathrm{N}_2 = \emptyset$ であるから上記の通り，$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \mathrm{Val} \to \mathbb{T}$ であり，$\varphi \in \mathrm{Val} \to \mathbb{T}$ のとき $\varphi\,\Omega x \in \mathrm{Val} \to (\mathrm{S}_2 \to \mathbb{T})$ であり，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ と $s \in \mathrm{S}_2$ に対して $\big((\varphi\,\Omega x)\nu\big)s = \varphi\big((x/s)\nu\big)$，すなわち 2 相の拡張関係 $\exists_2$ について「$(\varphi\,\Omega x)\nu \mathrel{\exists_2} s \iff \varphi\big((x/s)\nu\big) = 1$」が成り立つ．$x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_1}$ の場合は，$\mathrm{N}_1 = \{2\}$，$\mathrm{K}_1 = \{\varpi_2\}$，$\mathrm{O}_1 = \mathrm{S}_2$ であるから上記の通り，

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \Big(\mathrm{Val} \to \big((\{\varpi_2\} \rightsquigarrow \mathrm{S}) \to \mathbb{T}\big)\Big) \cup (\mathrm{Val} \to \mathbb{T})$$

であり，$\varphi \in \Big(\mathrm{Val} \to \big((\{\varpi_2\} \rightsquigarrow \mathrm{S}) \to \mathbb{T}\big)\Big) \cup (\mathrm{Val} \to \mathbb{T})$ のとき，$\varphi\,\Omega x \in \mathrm{Val} \to \big(\mathrm{S}_2 \to (\mathrm{S}_1 \to \mathbb{T})\big)$ であって，各 $\nu \in \mathrm{Val}$ と $s_i \in \mathrm{S}_i$ $(i = 1, 2)$ に対して次の式が成り立つ．

$$\Big(\big((\varphi\,\Omega x)\nu\big)s_2\Big)s_1 = \begin{cases} \varphi\big((x/s_1)\nu\big)(\varpi_2/s_2) & \cdots \quad \varphi \in \mathrm{Val} \to \big((\{\varpi_2\} \rightsquigarrow \mathrm{S}) \to \mathbb{T}\big) \text{ のとき} \\ \varphi\big((x/s_1)\nu\big) & \cdots \quad \varphi \in \mathrm{Val} \to \mathbb{T} \text{ のとき} \end{cases}$$

6.3.3　定付値が定める意味写像

§ 前項のように W^{Val} の T 型代数構造を定めた結果，Φ が A から W への定付値であれば，第 4.3.3 項で示したことにより，保型準写

$$\Phi^* \in \mathrm{A} \to W^{\mathrm{Val}}$$

であって任意の $a \in \mathrm{Prm}$ $(= \mathrm{Con} \amalg \mathrm{Var})$ と $\nu \in \mathrm{Val}$ に対して

$$(\Phi^* a)\nu = \begin{cases} \Phi a & \cdots \quad a \in \mathrm{Con} \text{ のとき} \\ \nu a & \cdots \quad a \in \mathrm{Var} \text{ のとき} \end{cases}$$

をみたすものが一意に存在し，特に保型写像であることにより，Φ^* は

$$\Phi^*(\mathrm{A}_t) \subseteq \mathrm{Val} \to W_t \qquad (t \in \mathrm{T})$$

をみたす．こういう保型準写 Φ^* を定付値 Φ が定める**意味写像**と呼ぶ．

6.3.4　表現関数

§

6.3.5　表現可能関数

§

6.4　用論対

$

6.5　恒真式と全包式

$

6.6　時世界

$

第7章　格言語と日本語

¢ 第 1.4.1 項において「心言語の代数構造は如何なるものか」という基本問題 1 や「人間にとっての認識の対象世界とは如何なるものか」という基本問題 4 を掲げ，前の二章では格論理学なるものを提示することによりこれらの問への私の答を示した．つまり,「**心言語は格言語であり，人間の認識の対象世界は格世界である**」というのが私の答である．私の次の課題は，この答の妥当性を色々な証拠によって示すことである．

第 1.5.1 項冒頭で述べた通り，科学的理論が妥当かどうかは，観察される現象を如何に説明し得るかで判定される（課題 1.5.4 参照）．そして,「心言語は格言語であり，人間の認識の対象世界は格世界である」という理論の妥当性を示すには，何よりも先ず人間の言語行動の中に観察される現象を，この理論と心言語の変形論とで説明して見せなければならない．なぜなら，私は「自然言語には心言語の元が何らかの変形を受けた後に表出している」という仮説 2 に従っているからである．

噛み砕いて言えば，私のこれからの仕事は,「心言語や認識の対象世界がこれこれのものであり，心言語がこれこれの変形をして自然言語として表出するから，自然言語がこれこれのものになる」という説明をすることである．ただし私は，第 1.5.2.3 条で説明した理由で，自然言語の中でも私の母語である日本語を第一に論じなくてはならない．

こういうわけで私は，この章から，日本人の言語行動の中で起きている現象を観察し，そういう現象の起きる理由を心言語の文法論や意味論や変形論で説明するという仕事を始める [1]．

ただし，心言語の文法論や意味論や変形論だけで言語現象のすべてを説明しようと言うのではない．また，すべてを説明する必要もない．数理心理学の研究対象は飽くまでも心であって，自然言語のすべての面が心を映し出すのでもなく（第 1.2.2 項参照），まして自然言語は心言語だけの表出ではないからである (図 1.5 参照）．またこの逆に，心言語のすべてが自然言語に表出するのではない．だから心言語と自然言語との関係も，思考の過程を表す言葉などの心言語以外から表出する言葉や，言葉には現れない「観念」「概念」と呼ばれる心言語の元まで考えて，始めて理解できる．そこで，これらについての準備的説明を第 7.1 節と第 7.2 節とで行なう．

なお，第 1.5.2.4 条で指摘したように,「自然言語」の実態は茫漠としている.「主語」「動詞」などの文法用語の意味も明確ではない．茫漠としたものや明確でないものを論ずるという点で，この章の内容には明らかに論理的曖昧さがあり，これを検討し改善する余地は多く残されている．

ただし，こういう曖昧さは数理科学には必ず付きまとうものであり，完全に排除することはできない．第 1 章冒頭に書いた通り，数理科学者は，まず自然現象を観察し，次いでその現象を抽象して数理模型を作り，さらにその模型についての数学を研究することにより，現実の自然界についての理解を深め発展させようとする．自然界の一部の数理模型を作りそれを数学的に論じている限り（数理心理学の場合，第 5 章と第 6 章がそれに当たる），厳密性を保つことはできる．しかし，模型と現実とを突き合わせるとき（数理心理学の場合，この章や第 1 章がそれに当たる），必ず何らかの曖昧さが，言わば「模型と現実とのあつれき」として生じてくる．それをどう扱いどう論ずるかは，数理科学者一般に関わる問題なのである（第 1.2.4 項参照)．

[1]参考までに英国人についても時々考えるが，これは体系的な考察ではない．

7.1　観念と概念

＄「観念」も「概念」も，元々は哲学者が論じ始めたものであろう．しかし彼らの間でも,「観念」「概念」の明確な定義が合意されているとは思われない．そこでここでは，数理心理学者の観点からこれらを明確に定義し直そう．この章の前書きで注意したように，心言語と自然言語との関係を説明するにも，言葉としては現れない「観念」「概念」まで考えることが必要になるからである．

仮説 1 の後で注意したように，心言語 A は思考機械・人間が受け付ける原材料や生産し得るものの全体であり，従って，脳の中に A の元に相当する実体がすべて存在するのではない．存在するのは，思考機械・人間の現実の生産の原材料と生産品であり，それは A の一部に過ぎない．そこで，脳の中に存在する A の元を**観念**と呼ぶ（従って，A の代数構造が人によって変わらなくても，観念の内容は人によって変わり得る）．そうすると，A は格言語であると仮定しているので，観念は体元と用元とに分かれる．そこで，体元である観念を特に**概念**と呼ぶ．これが「観念」「概念」の数理心理学的再定義である．

しかし,「観念」「概念」という語は，日常語として使い古されていて学術用語として使うにはあまり適さない．そこで，これらの語をいま定義した意味で使うのはできるだけ差し控え，そう使うときにはそうと断ることにする．ただし，この節では断らない．

なお今の定義において，心言語 A の元が脳の中に存在するとは具体的に如何なることかを問う必要はない．第 1.1.2 項で宣言した通り，数理心理学者はそういうことを出発点から捨象しているのである．また，第 7.2 節で説明するように，心論理代数系上の計算代数系の元も広義には観念と呼ぶ．しかし通常は，いま説明した狭い意味で「観念」を使う．

さて，仮説 2 によれば，自然言語には心言語 A の元が何らかの変形を受けた後に表出するが，もちろん，脳の中に実在したものが表出して来るのである．従って仮説 2 は次のように言い換えることができる．

仮説 6 自然言語には観念が何らかの変形を受けた後に表出している．

ただし，自然言語は観念だけの表出ではないし，観念のすべてが表出するのでもない．

哲学や従来の心理学で「観念」「概念」と紛らわしく使われる言葉に「表象」がある．これもついでに，関連する「指象」と共に，数理心理学者の観点から厳密に再定義しよう．この定義は，第 1.4.4 項で示唆しておいたものである．

心言語 A から認識の対象世界 W への定付値 Φ をとる．このとき，Φ は意味写像 $\Phi^* \in \mathrm{A} \to W^{\mathrm{Val}_W}$ を定める．そこで，$a \in \mathrm{A}$ と $w \in W$ がある $v \in \mathrm{Val}_W$ に対して $(\Phi^* a)v = w$ をみたすとき，a は **Φ の下での w の表象**であると言い，w は **Φ の下での a の指象**であると言う．これが「表象」「指象」の数理心理学的定義である．従って,「観念」「概念」が A だけによって定義されたのと異なり,「表象」は認識の対象世界と定付値との組み W, Φ に応じて「W の何らかの元の表象」として定義される．また,「表象」は脳の中に存在するかどうかに関わらない．

以上の定義の背景は第 1.4.2 項に説明してある．すなわち，思考機械・人間が外界の特定のもの事を記銘すると，そのもの事に対応した一定の生理的単位が脳神経系の中に出来る．こういう生理的単位を「定記銘単位」と呼び，定記銘単位の各々に記銘相手のもの事を対応させる写像を「定記銘写像」と呼ぶ．心言語 A の定数系 Con は定記銘単位の集まりの数理模型であり，定付値 Φ は定記銘写像の数理模型である．こういう主旨の説明をしてある．そうすると，Con は実際に脳内に存在するのだから，Con の元 a はすべて観念だということになる．しかも，任意の $v \in \mathrm{Val}_W$ に対して $(\Phi^* a)v = \Phi a$ が成り立つ．従って Φ の下で，a は Φa の表象であり Φa は a の唯一つの指象

である．つまり，定記銘単位は記銘相手のもの事の表象であり，定記銘単位の記銘相手であるもの事は，その定記銘単位の唯一つの指象である．

7.2　推論の過程と思考の過程

$ 思考機械・人脳は心言語ないしは心論理代数系と抽象される．そして仮説 2 によれば，心言語の元は何らかの変形の後に音素列として表出して言葉となる．しかし，言葉は心言語だけからの表出ではない．第 1.4.1 項で注意したように，自然言語には推論過程すなわち心論理代数系での演算の過程の表出もあり，従って推論過程の有限列である思考過程の表出もある．

第 1.4.1 項での定義によれば，心言語 A の台集合（それも慣例に従って A で表す）は世界のもの事の記述の全体であり，心論理代数系とは事の記述から成る A の部分集合 B に何らかの代数構造を与えて代数系としたものであった．また，推論過程とは B 上の計算図のことであった．しかしそれやこれやの定義は，必要な概念がまだ用意されていないための便宜的なものであった．今は用意も済み，また A は格言語であるとしているので，それに合わせて第 1.4.1 項での定義を一部仕直そう．

まず，これは第 1.4.1 項での説明の通りであるが，心論理代数系の代数構造は A 上の健全な論理から成ると仮定するのが当面は妥当に思われる．ただし，この章では A は格言語であると仮定している．そして格言語上の健全な論理については，第 5.4 節と第 6.4 節において第 1.4 節とはやや異なる説明をしてある．そこに倣い，まず，健全な論理を用論理または単に論理と呼ぶ．また，A の用元の全体を H で表す．そうすると A 上の論理とは，H^*, H 間の関係であって任意の用理論を閉ざすもののことである．そこで，心論理代数系の台集合は H であるとする．そして慣例に従って心論理代数系も H で表す．注意 5.4.1 に記した通り，H の代数構造としては論理の中で H 上の算法とみなせるものを幾つか特定しなければならない．従って，格言語上の論理について述べた第 5.4 節，第 5.5.9 項，第 6.4 節と，関係が算法とみなせる条件について述べた注意 3.24.6 が重要になる．ただし，心言語 A の代数構造はすでに格言語として特定してあるのに対し，心論理代数系 H の代数構造は直ぐには特定せず，これから具体的な問題を考えて行く中で徐々に特定する．

次に，心論理代数系 H 上の計算代数系 C(H) の元を**推論過程**と呼ぶ．これがいわゆる「推論の過程」に相当する数学的概念である．なぜ計算代数系の元がすなわち「推論の過程」に相当するものなのかについては，第 3.6.2 項などで説明してある．

最後に，C(H) 上の普遍半群 $C(H)^+ = \bigcup_{n\geq 1} C(H)^n$ の元を，すなわち推論過程の有限列を**思考過程**と定義する．これがいわゆる「思考の過程」に相当する数学的概念である．

「推論の過程」や「思考の過程」をこうはっきり定義することは，それについて客観的に論じて行くためにはもちろんのこと，心言語と日本語との関係について考えるためにも必要である．なお，H は C(H) の生成系であり C(H) は $C(H)^+$ の生成系であるから，$H \subseteq C(H) \subseteq C(H)^+$ が成り立つ．従って，H の元の有限列も思考過程の一種である．

計算代数系 C(H) は脳の中にどのようにして存在するかについて付言しよう．心言語についての同様の問題については，第 1.4.1 項などで説明してある．つまり，心言語の台集合 A は思考機械・人間が受け付ける原材料や生産し得るものの全体であり，従って，脳の中に A の元に相当する実体がすべて存在するのではない．存在するのは，思考機械・人間の現実の生産の原材料と生産品であり，そういう存在するものを第 7.1 節で観念と名付けた．C(H) についても同様であり，脳の中に C(H) の元に相当する実体がすべて存在するのではない．そこで，第 7.1 節で予告した通り，脳の中に実在する C(H) の元も広義には**観念**と呼ぶ．

なお，普遍型付代数系は型代数系と素元系および素元系の型分割写像によって定まるという理由で，心言語 A のすべてが脳の中に実在すると仮想することはできた．C(H) は H を型代数系かつ素元系とし id_{H} を素元系 H の型分割写像として作られる普遍型付代数系であるから，A と同様に C(H) の元もすべて人脳の中に実在すると仮想することはできる．

7.3　単相格言語と日本語

\$ この節から心言語と日本語の関係についての説明を始めるが，格論理学に先立って単相格論理学を論じたのに合わせて，ここでも単相格論理学を題材とした説明から始めよう．つまりこの節では，単相格言語を心言語とし，単相格世界を認識の対象世界の模型とする．そして，単相格言語と日本語の関係を説明する過程で，単相格言語が心言語の候補者としていい点を沢山持つ反面で欠点も合わせ持つことを示そう．それは，単相格論理学を格論理学にまで拡張する必要がなぜあったかの説明になるはずである．そういう意味でこの節は「格言語と日本語」論の小手調べなので，系統的・網羅的な説明は必ずしも目指さないが，重要な事柄は漏らさず説明する積もりである．

さてそこで，**この節を通じて，**$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ **は単相格言語であり，**$\mathrm{K}, \pi, \mathbb{P}$ **等の意味は第 5.1 節の通りであるとする．** ただし，A には複体定数は無いと仮定する（表 5.1 参照）．この仮定は，心言語については妥当なものと思われる．また，A には関号も無いと仮定する．これは関号が，数学的思考などの特殊な思考の際に使われる特殊な言語表現，たとえば数学の教科書の関数記号混じりの文章に関連するからである（第 1.5.2.4 条参照）．

7.3.1　限量語を含まない単純な「である」文

§ この項から第 7.3.7 項にかけて，まず単相格言語の元や算号と言葉の関係について基本的なことを説明しよう．話を簡単で具体的なことから始めるために，

$$\mathrm{a}\,\breve{\mathrm{o}}\pi(\mathrm{b}\triangle) \tag{7.3.1}$$

なる A の元を最初の題材とする．第 5.1.3 項で説明したことにより，(7.3.1) が A に存在するためには a が単体元であって b が体元であることが必要十分であり，この条件の下で (7.3.1) は文，すなわち $\mathrm{A}_{\emptyset}$ の元となる．しかしこの項では，b も単体元であると仮定し，さらに (7.3.1) が閉元である場合を考える．そうすると，関号が無いとの仮定と定理 5.1.2 と Prm の定義により，単体元の全体 A_{ε} について

$$\mathrm{A}_{\varepsilon} = \mathrm{Prm}_{\varepsilon} = \mathrm{Con}_{\varepsilon} \amalg \mathrm{Var}_{\varepsilon} \tag{7.3.2}$$

が成り立つから $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{Con}_{\varepsilon}$，すなわち a, b は単体定数である（表 5.1 参照）．標題の「単純な」はこのことを指す．

7.3.1.1　「ピーターは兎である」

‡ ここでの私の目標は，(7.3.1) を日本語でどう読み下したらいいかを説明することである．

数学に現れる色々な式の意味を理解しようとするとき，私たちは，それらを言葉で読み下す．たとえば $(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$ という数式は,「a 足す b 掛ける a 引く b は a の自乗引く b の自乗に等しい」などと読んで理解する．特に，算号 +, −, × や相等関係を表す記号 = を「足す」

「引く」「掛ける」「〜は〜に等しい」などと読む．それと同様のことを (7.3.1) に対して行なうにはどうしたらいいかを説明しようというのである．

「同様のこと」と述べたが，本当は同様ではない．(7.3.1) を読み下してみせるのは，数式を読み下すのとは意味が違う．数式の場合は,「足す」「引く」「掛ける」「等しい」という観念が先にあり，それらを $+$, $-$, $\times$, $=$ という記号で表したのだから，これらを「足す」「引く」「掛ける」「等しい」と読むのは当たり前のことである．これに対し (7.3.1) を読み下してみせるのは，この心言語文がどういう言葉に変形して表出するかの説明であり，心言語の変形論の重要な一環なのである．

このことを読者が正しく理解するには，自分が思考機械・日本人の発声器官（声帯・舌など）になったと想像してみるといいだろう．つまり，発声器官である読者に向かって，思考機械・日本人の然るべき箇所から (7.3.1) が入力される．発声器官・読者は，この心言語文を国語文に変換して出力する．その変換の仕方を発声器官に教え込むこと．それが私のここでの仕事なのである．従って (7.3.1) の読み下し方の説明と言っても，それは本当の日本語らしい読み下し方の説明でなければならない．思考機械・日本人は日本語らしい日本語を話す機械だからである．

(7.3.1) の読み下し方の原則は四つある．ただし，どの原則にも後で修正や但し書きを加える．

原則 1　単体定数は名詞や代名詞に置き換える．

原則 2　算号 $\breve{o}\pi$ は主語を表す格助詞の「が」あるいは係り助詞の「は」に置き換える．

原則 3　算号 $\triangle$ は「だ」「です」「である」などの断定の意味を表す語に置き換える．

原則 4　括弧は取り除くか音素間隙や句読点などの区切り記号に置き換える．

これらの原則通りに，たとえば

$\mathrm{a} \to$ ピーター　　　$\breve{o}\pi \to$ は　　　$\mathrm{b} \to$ 兎　　　$\triangle \to$ である

という置き換えをし括弧を取り除けば，(7.3.1) は「ピーターは兎である」という国語文となる．この類の国語文を,「である」が「だ」「です」などに替わっていても，**「である」文**と呼ぶ．

原則 1 – 4 について取り敢えず初歩的な注意をいくつか述べる．

まず，原則 1 – 4 は，上述の通り心言語の元の表出の仕方の原則であり，従ってこれら原則において「に置き換える」としたのは「として表出する」を意味し,「取り除く」は「表出しない」または「空語として表出する」を意味する．

次に原則 1 は，正確には，単体定数の各々に一つまたはそれ以上の名詞あるいは代名詞が対応していて各単体定数がそれに対応する名詞または代名詞のいずれかへと表出することを意味する（そこで，この対応関係を**表出関係**と呼ぶ）．上で「$\mathrm{a} \to$ ピーター」と書いたのは，表出関係によって a に「ピーター」が対応すると仮定したのであり,「$\mathrm{b} \to$ 兎」についても同様である．

次に，$\breve{o}$ は A の第一種の算法 $\breve{o}k$ ($k \in K$) を識別表示する便宜のための記号だから，原則 2 は主格 π の読み下し方（＝国語への表出の仕方）を示すのだと考えていい．

最後に，原則 1 – 4 は，(7.3.1) 以外の A の元に現れる単体定数と算号 $\breve{o}\pi, \triangle$ および括弧にも適用する [2]．**以後に示す他の読み下し方の原則についても同様である**．ただし，このことにも後で修正を加えなければならない．たとえば，$\mathrm{a} \sqcup \mathrm{b}$ における単体定数 a, b には原則 1 でなく後出の原則 21 を適用する．また，変数に施された算号には後出の原則 15 を適用する．

原則 1 – 4 についてのこの他のより重要な注意は，以下の条に分けて述べよう．

[2] 代数系において元や算号が元に現れることの定義は第 3.15 節にある．

7.3.1.2　表出の状況依存性と不定性

‡ 前条に示した (7.3.1) の読み下し方の原則 1 – 4 に対して，読者は色々な疑問を懐くだろう．たとえば，原則 2 については

$\breve{o}\pi$ を「が」と「は」のどちらに置き換えるかは如何にして決定するのか

という疑問を持つだろうし，原則 1, 3, 4 についても同様の疑問を持つはずである．

以下，原則 3 に即してこういう疑問に答える．

まず，この原則には少し修正を加えなければならない．すなわち，算号 $\triangle$ は必ずしも「だ」「である」などの断定語に置き換えなくてもいい．空（から）の語すなわち**空語**（これを以後◯で表す）に置き換えて (7.3.1) を「ピーターは兎」と読み下しても構わない．あるいは単に空語に置き換えるのではなく，語気を強めたり目を剥いても構わない．要するに，断定の意味を表す何らかの身体表現（これを**断定記号**と呼ぶ）に置き換えてもいいのである．

次に，前条で示唆したように，読者が思考機械・人間の発声器官になったと想像してほしい．発声器官・読者に心言語文 (7.3.1) が入力された場合，これを読者は「ピーターは兎です」と出力すべきか，それとも「ピーターは兎である」と出力すべきかなどを，どうやって決定できるだろうか．無論，決定できはしない．読者は発声器官に過ぎないのだから．しかし，もしも (7.3.1) だけが入力されたのではなく，ある用元 f に引き続いて (7.3.1) が入力されたなら，事情は変わってくる．用元 f の如何に応じて「です」「である」などの断定記号を選択して出力する，そして f 自身は空語として出力する，というように発声器官を設計することは可能だからである．たとえば，f が「私（＝思考機械自身）の話し相手は目上の人である」を意味するときには「です」を選択し，「私はいま演説している」を意味するときには「である」を選択するというように．ただしこの場合の発声器官とは，声帯や舌だけではなく，何らかのパターン認識装置を伴ったかなり複雑なものと考えなければならない．あるいは，f の如何に応じて断定記号を選択するのは，発声器官ではなく思考機械の一部だと考えるべきかもしれない．

私は今まったく常識的なことを説明しているに過ぎない．私たちが日常の会話で「だ」「です」「である」などの断定記号をどう使い分けるかと言えば，状況に応じて使い分けるのである．そしてその会話時には，私たちはその状況を認識しているのであるから，その状況を記述する用元が私たちの脳のどこかに存在している．その用元がすなわちさっきの f なのである [3]．

ただし一般には，状況を表す用元は唯一つとは限らないし，空語として出力されるとも限らない．発声器官に入力される A の元の時系列の中で (7.3.1) に先行する用元は，すべて (7.3.1) にとっての状況記述となり得る．また，(7.3.1) が他の用元 g の一部として入力された場合には，g 自身も (7.3.1) にとっての状況記述となり得る．だから，いまの考えは次のように修正しなければならない．すなわち，発声器官に入力される A の元の時系列 $(f_i)_{i \in I}$ の中の f_i に現れる心言語文 $a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ は，それに先行する用元 f_j $(j \leq i)$ の幾つかに応じて「ピーターは兎です」や「ピーターは兎である」などの色々な言葉に変形して表出する（だから，$a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ が逆に他の元の表出を左右することもある）．これが表出の**状況依存性**である．また，表出の状況依存の仕組み，すなわち状況を表す用元 f_j $(j \leq i)$ と断定記号との対応関係は，すべての思考機械・人間に一定普遍のものではない．これが表出の**不定性**である．そしてこの二つの性質のために，心言語文 $a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ を単独で取り出した場合，この中の $\triangle$ がどういう言葉として表出するかを決定することはできないのである．

算号 $\triangle$ の読み下し方の原則 3 は，こういう色々な但し書き付きのものと理解しなければならない．原則 1, 2, 4 についても同様である．つまりまず，$\triangle$ が空語として表出し得るのと同様，単体

[3] 文章の場合も「状況に応じて」とすべきであり,「文脈に応じて」とすべきではない.「文脈に応じて」とすると，文章中に表出しない用元を無視することになり勝ちだからである．文脈は状況の一部であって全部ではない．

定数や ŏπ も空語として表出し得ると考えなければならない．次に，状況を表す用元は，△ の表出を左右するだけでなく，ŏπ が「が」となるか「は」となるかも，その他のことも左右すると考えなければならない．そしてその左右の仕方は，すべての思考機械・人間に一定普遍のものではない．

ただし，状況と断定記号や「が」「は」などの間には，一定普遍の対応関係が無いまでも，何らかの関係があるのも事実である．そして，そういう関係を調べるのも無意味ではなかろう．つまり，私たちが日常の会話で断定記号や「が」「は」などを状況に応じてどう使い分ける傾向があるかの調査である．しかしこれは，もう数理心理学の課題ではなく，国語学の課題であろう．

要するに，数理心理学者は，心言語文 (7.3.1) が状況に応じて「ピーターは兎だ」「ピーターは兎」「兎だ」などの色々な言葉となって表出すると考える．言語学者なら，こういう色々な言葉を別種のものと捉えて，その違いを論ずるだろう．論ずる意義もあるかもしれない．しかし数理心理学者は，自然言語ではなく心言語を研究するのだから，表出する言葉が様々であるのに囚われることなく，唯一つかつ大本の (7.3.1) なる心言語文に注目すればいいのである．

問題 7.3.1 私たちは火急の場合に「火事だ！」「泥棒だ！」のように言うことがある．これは心言語のどういう元の表出と解釈できるか．

問題 7.3.2 会話では,「ピーターは兎だ」と言うべきところを「兎だ ピーターは」と言うことがある．これは心言語のどういう元の表出と解釈できるか．

課題 7.3.1 次の四つの文は，それぞれどういう状況で使われるか．

1. 野菜は好物だ　2. 野菜が好物だ　3. 好物は野菜だ　4. 好物が野菜だ

好物の範囲に限れば，文 2 と文 3 は意味が同じで文 1 を含意するように感ぜられるが，文 1 が文 2, 3 を含意するようには感ぜられない．また，文 4 は奇妙な表現に感ぜられる．これはなぜか．

7.3.1.3　「が」と「は」の代用問題の一般化

‡ 私たちは日常の会話で，格助詞の「が」と係り助詞の「は」を状況に応じて使い分ける．たとえば,「野菜は好物だ」と言ったり「野菜が好物だ」と言ったりする．どう使い分ける傾向があるかを調べるのは国語学の課題であり，現に国語学者が盛んに調べている．しかし数理心理学の観点から見ると，この問題はもっと一般化して考える必要がある．そのわけをここで説明しよう．

まず,「が」の代わりに使える係り助詞は「は」だけではなく,「も」「こそ」「しか」なども代わりに使うことができる．副助詞まで考えれば,「だけ」「ばかり」「さえ」「まで」「でも」なども「が」の代わりに使うことができる．その他にも，通説で助動詞とされる「なら」も「が」の代わりに使うことができる．また，係り助詞や副助詞を組み合わせた「だけは」「さえも」などの連語も「が」の代わりに使うことができる．さらに「こそ」「ばかり」「まで」などは,「が」と組み合わせて「こそが」「ばかりが」「までが」のように使うこともできる．

もちろん,「が」をこれらの助詞や助動詞（これらを**助辞**と総称する）や連語に替えれば文全体の意味が変わる．しかしとにかく,「が」の代わりに使うことのできる言葉は「は」以外にも沢山あるのだから，ŏπ の読み下し方の原則 2 は修正しなければならないことになる．つまりそこには,「が」「は」だけでなく,「が」の代わりに使える言葉をすべて列挙しなければならない．そして，前条で説明したように，状況を表す用元の如何に応じてそういう言葉が選択されて表出するのだと考えな

ければならない．ただし，そういう言葉が実際にどれくらいあり状況に応じてどう使い分けられるかを調べるのは，やはり国語学の課題である．

さて次に，助辞や連語に替えられる格助詞は「が」だけではない.「を」も替えることができる．たとえば,「レタスを食べる」の「を」を「も」「だけ」「なら」に替えて「レタスも食べる」「レタスだけ食べる」「レタスなら食べる」のように言うことができる．係り助詞や副助詞と組み合わせて「をば」「をも」「をこそ」「だけを」「ばかりを」「までを」のように使うこともできる [4]．

助辞と組み合わせて使える格助詞は「が」「を」だけではない.「に」「へ」「で」「と」「より」「から」「まで」などの格助詞も [5]，たとえば「には」「へまで」「でこそ」「となら」「よりも」「からさえ」「までしか」のように使うことができる．ただしこれらの格助詞は，助辞と組み合わせて使うのみで,「が」「を」のように他の助辞に替えることはあまり自由にはできない．なぜならたとえば,「このハサミでは切れない」と言いたいときに「で」を省いて「このハサミは切れない」と言えば，意味が正しく伝わらないからである．

しかしとにかく，格助詞はたいてい助辞や連語に替えることができる．このことが心言語の変形論では重要な意味を持つ．なぜなら心言語の変形論では，算号 ŏπ だけでなく ŏk ($k \in K$) なる算号はすべて格助詞として表出すると考えたいのである．しかしいま示したように，たいていの格助詞は色々な助辞や連語に替えることができる．従って，ŏk が格助詞として表出すると考えるのは本当は正しくなく,「格助詞およびそれに替えられる語として表出する」というのが正しい考え方なのである．そして，どの格助詞がどういう状況でどういう語に替えられるかの問題，つまり状況を表す用元と ŏk の表出との関係の問題は，国語学の中で論じるべき問題となる．

ŏk 以外の A の記号の表出についても事情は同様である．しかし，一々こういう但し書きをするのは煩わしい．そこで**以後は，こういう但し書きは暗黙の了解として，すべて省略する**．算号 ŏk に即して言えば，これの読み下し方の原則を単に「ŏk は格助詞に置き換える」と述べても，これは今の但し書き付きのものと理解しなければならない．

なお，これまでの説明から明らかなように,「が」と「は」の代用関係だけをことさらに取り立てて論ずる理由はあまりない.「が」の代わりに「は」を使うのはむしろ例外的な用法であり，格助詞は助辞と組みにして「には」「へまで」「でこそ」「となら」のように使うのが日本語の主原則ではなかろうか.「が」も，助辞と組みにして「がは」「がも」などのように使われて然るべきだったのに，発音や伝達効率上の理由などで「が」が消滅したために,「が」が「は」「も」などに変わったように見えているだけではないか．そう想像したくなる．想像の当否はともかく，要するに「が」と「は」の問題は，数理心理学の観点から見ると，色々な助辞が組み合わせて使われる現象の一部として論ずることが必要なのである [6]．

7.3.1.4　「である」文の多様性？

‡ 原則 1 – 4 によれば (7.3.1) は「である」文として表出する．しかし，逆は必ずしも真ではない．つまり，すべての「である」文が (7.3.1) なる心言語文の表出なのではない．たとえば，**ウナギ文**として言語学者の間で有名らしい「僕はウナギだ」は,「僕の食べたいものはウナギだ」などとして表出するはずの心言語文が「の食べたいもの」の消失という変形を経て表出したものと考えられる（「の食べたいもの」でなく「の好きなもの」などの場合もある）．その心言語文も (7.3.1) によく

[4]「をば」は定説では「を＋は」の転とされるようであるが,「を」と同じ役割の古語「ば」との重複用法だという説もあり，これにも説得力がある．現在でも「を」の代わりに「ば」を使う方言がある．

[5]「まで」には格助詞の用法もあると考える．端書き参照．

[6]第 2.4 節で例に使った「これからが大変だ」の「からが」などは，語の省略から生じた見かけ上の組み合せ用法である．こういうものは別に扱わなければならない．

似た形をしているが，$\mathfrak{a}$ は単体元ではなく「僕の食べたいもの」などに相当する複体元に替わり，それに伴い算号 $\check{o}\pi$ も λk に替わる $(\lambda \in \mathfrak{Q})$.

なお岩波国語辞典（第五版）は，恐らく食べ物屋での「あなたは何にする？ ぼくはお寿司だ」という会話を例に引いて,「A は B だ」という国語文における「〜は〜だ」は A と B の間のさまざまな関係を表し得ると説く．つまりたとえば,「ピーターって何者？ピーターは兎だ」における「〜は〜だ」が表す「ピーター」と「兎」の関係は,「あなたは何にする？ ぼくはお寿司だ」における「〜は〜だ」が表す「ぼく」と「お寿司」の関係と異なると言うのだろう．しかしそういう趣旨だとすると，これは甚だ不適切な説明である．なぜなら,「僕はウナギだ」と同様に「ぼくはお寿司だ」は,「ぼくの食べたいものはお寿司だ」から「の食べたいもの」という語が失われたもの等と解すべきものだ．だから,「ぼくはお寿司だ」における「〜は〜だ」は,「ぼく」と「お寿司」の関係を表すのではなく,「ぼくの食べたいもの」と「お寿司」の関係を表すと考えなければならない．そして,「ぼくの食べたいものはお寿司だ」における「ぼくの食べたいもの」と「お寿司」の関係と,「ピーターは兎だ」における「ピーター」と「兎」の関係との間にさほどの違いはない（第 7.3.9 項参照）.

「ぼくはお寿司だ」の例から窺える通り，また，第 1.5.3.3 条などで繰り返し指摘した通り，言葉は一般に意味の不完全な表現なのだ．意味を不完全にしか表していない言葉の表面形態を基準にして意味の異同を論じても意味が無かろう．言葉が意味を不完全にしか表さないのは，意味をより完全に表すために必要な言葉が省略されているためである．省略された言葉の意味や役割が多様であれば，省略せず残された言葉が一見多様な意味や役割を持つようにも見える.「〜は〜だ」なる文が多様な意味を表すように見えるのも，まさにそのためである．事実は,「〜は〜だ」が多様な意味を表すのではなく,「〜」の部分やその他のところに有るべくして省略されている言葉が多様なのだ.

問題 7.3.3 次の「である」文ではどういう語が省略されていると考えるべきか.

1. 東京は晴れだ　　2. 春は桜だ　　3. 次は大阪だ

7.3.1.5　表出と陳述態度

‡ 「だ」「です」「である」などの語は断定の意味を表す．つまり,「断定する」という話者の陳述態度を表現する．これをもう少し詳しく説明すれば次のようになる.「〜だ」「〜です」などの国語文における「〜」は，外界の何らかの事態を記述する．そして話者は，その記述を確かなものと感ずるときに,「だ」「です」などの言葉を使う．その「感じ」の実態は，第 1.6.1 項で触れた心言語文の確度の高さであるだろう．だから,「だ」「です」などの言葉は心言語文の確度が高いことを表すのである.

ここで仮説 2 の後の注意を思い出そう．そこでは,「心言語は外界のもの事の記述のための装置であるが，自然言語表現にはもの事の記述でない話者の陳述態度の表現などが含まれるから，自然言語は心言語からだけの表出ではない」という趣旨のことを述べた．つまり，陳述態度を表現する語は心言語からの表出ではない．ところが原則 3 は，心言語の算号 △ が陳述態度を表現する「だ」「である」などの語として表出すると主張している．これは矛盾ではないか，と読者は思うかもしれない．しかし矛盾ではない．国語には，純粋に算号 △だけの表出である語が存在せず，△ の表出が，同時に断定という陳述態度をも表現する．そう考えればいいのである.

国語ではそうだが，外国語では必ずしもそうではない．そのことを，英語を例にとって説明しよう．そのためにまず，英国人の心言語にある文 (7.3.1) がその人のどういう言葉となって表出するかを説明する．もちろん，英国人の心言語も日本人と同様に単相格言語であると仮定している．しか

し，同形な代数系でも見かけ上は異なることがある．たとえば，代数系の二項算法 α を元 x, y に施したものは，$\alpha(x,y)$，$x\,\alpha\,y$，$(x,y)\alpha$ などの形や，さらに x, y の順番を入れ替えた形などの色々な形に書くことができる．同形な代数系でも，算法の表現の仕方を替えれば外見が異なる．そして，日本人と英国人の心言語では，算法の表現形式が実際に異なると考えられる．(7.3.1) は日本人の心言語における表現形式である．これに対し英国人の心言語では，(7.3.1) は

$$\pi\breve{o}(a, \triangle b) \tag{7.3.3}$$

なる形に表現される．つまり，まず算号 λk は，英国人の心言語では前後が入れ替わって $k\lambda$ となる [7] $(\lambda \in \mho,\ k \in K)$．そして算法 $\lambda\pi$ は，日本人の心言語では $x\,\alpha\,y$ の形に表現されるが，英国人の心言語では $\alpha(x,y)$ の形に表現される $(\lambda \in \mho)$．また，単項算法 $\triangle$ は，日本人の心言語では $x\triangle$ の形に表現されるが，英国人の心言語では $\triangle x$ の形に表現される [8]．そして，原則 2 と 3 は，英国人においてはそれぞれ次のようになる．

- $\pi\breve{o}$ は言葉として表出しない．つまり，空語として表出する．
- $\triangle$ は「be (am, are, is, was, were)」に置き換える．

他の二つの原則 1 と 4 は変わらない（ただし原則 1 には，冠詞や複数形についての何らかの原則を付け加えなければならない）．そこで，原則に従ってたとえば $a \to$ Peter，$b \to$ a rabbit なる置き換えをすれば，(7.3.3) は「Peter is a rabbit」なる英語文となる．

要するに $\triangle$ は，日本語においては「だ」「である」などとして表出するのに対し，英語においては「be」として表出する（だから，英語の先生が「Peter is a rabbit」の「is」は日本語の「が」「は」に当たると教えては間違いになる）．そして,「だ」「である」などには断定の意味が濃いのに対し,「be」には，アクセントを置かない限り断定の意味は薄いであろう（本当のところは native speaker の判断を仰がなければ分からないが）．つまり，強調なしの「be」は $\triangle$だけの表出と考えられるのである．

7.3.1.6　「兎は兎だ」と心言語の意味論・変形論への要請

‡ ここでは (7.3.1) において $a = b$ なる場合，つまり $a\,\breve{o}\pi(a\triangle)$ なる心言語文を考える．原則 1 – 4 によれば，こういう心言語文は「ピーターはピーターである」とか「兎は兎だ」というような国語文として表出する．そして，私たちはこういう国語文を恒真だと思う．つまり,「ピーター」や「兎」が何を意味しようとこういう文は真だと思う．言い換えれば，私たちは,「A は A である」「A は A だ」というような文は,「A」にどういう名詞を代入しようと真だと思う．

ここで，第 1.4.3 項で説明した心言語の意味論への要請と，その裏として第 1.5.2.4 条で説明した心言語の変形論への第一要請とを思い出そう（以後これらを単に**要請**と呼ぶこともある）．そこではつまり，私たちが理性や直観によって恒真と判定する国語文へと表出する心言語文がすべて心言語の意味論によって恒真となるように，心言語の意味論と変形論とを作らなければならないことを説明した（ただし今ではもう,「心言語文が」を「用元が」に一般化しなければならない）．そうすると，$a\,\breve{o}\pi(a\triangle)$ なる用元は「A は A だ」のような恒真の国語文として表出するとしたのだから，単相格言語の意味論によって恒真でなければならない．そして，定理 5.5.3 により，$a\,\breve{o}\pi(a\triangle)$ は実際に恒真元である．従って，少なくとも $a\,\breve{o}\pi(a\triangle)$ なる用元に関しては，単相格言語の意味論や変形論は要請に応えている．つまり，単相格言語の文法論や意味論や変形論は，少なくともここま

[7] このことの影響は $\lambda = \breve{o}$ のときや $k = \pi$ のときには何もないが，$\lambda \in \mho$，$k \neq \pi$ の場合には影響が出る．
[8] こういう意味で，英国人の心言語は日本人の心言語の**局所的鏡像**である．

では，心言語の理論としてうまく出来ていることになる．これは，ささやかな成功に過ぎないが，重要な第一歩である．

私はこれから，(7.3.1) 以外の色々な種類の用元についても同様の説明をして行こうと思う．そういう説明のうまく行くことは，単相格言語の文法論や意味論や変形論が心言語の理論として妥当であることのいい証拠になるのである．

ありそうな誤解を正すために以下の注意を付け加える．私は,『あなたは「A は A だ」が真だと考えて宜しい』と言っているのではない．つまり，私は考え方の規範を示しているのではない（第 1.2.3 項参照）．人間は，その思考機械としての仕組みにより,「A は A だ」が真だと考えるように出来ているのであり，その仕組みは，認識の対象世界に適応進化して出来上がったものなのである．そこで数理心理学者は，認識の対象世界の構造と思考機械・人間の仕組みおよびそれらの間の関係についての理論を作り，それによって，世界において「A は A だ」がなぜ真なのか，人間が「A は A だ」をなぜ真だと思うのかを説明しようとする．そして，人間の思考機械としての仕組みがどうなっているかの理論が心言語ないしは心論理代数系の理論であり，認識の対象世界の構造や人間との関係がどうなっているかの理論が心言語の意味論なのである（第 1.4 節参照）．

なお，単相格世界において「A は A だ」がなぜ真なのかは，定理 5.5.3 から溯って行けば分かる（厳密には，$a\,\breve{o}\pi(a\triangle)$ がなぜすべての単相格世界において真なのかが分かる）．また，人間が「A は A だ」を真だと思うわけは，第 1.4.3 項で説明した通りである．つまり，思考機械・人間の格納庫には $x\,\breve{o}\pi(x\triangle)$ なる心言語文が一つ例文として格納されている.「A は A だ」という国語文は，何らかの機構によって $a\,\breve{o}\pi(a\triangle)$ なる心言語文に変換される．そしてこれが例文の $x\,\breve{o}\pi(x\triangle)$ と照合され，同じ形と判定される．こういうことが,「A は A だ」を人間が真と思う過程の実態であろう．

7.3.1.7　恒真観念の格納・抽出と変数・代入

‡ 私たちは「A は A だ」という類の恒真観念を沢山持っている．たとえば「兎は兎だ」「犬は犬だ」「猫は猫だ」等の観念である．ここでは，こういう観念が私たちの脳の中にどのように格納されていてどのように抽き出されるのかを考える．ただし，生理的あるいは物理的な実態を問おうと言うのではない．あくまでも，思考機械・人間を心言語・心論理代数系へと抽象した数理心理学の観点に立って考えるのである．

まず考えられるのは,「兎は兎だ」「犬は犬だ」「猫は猫だ」等の観念が

$$a\,\breve{o}\pi(a\triangle) \qquad b\,\breve{o}\pi(b\triangle) \qquad c\,\breve{o}\pi(c\triangle)$$

等の相異なる沢山の心言語文として格納されているという可能性である．ただし a, b, c 等はそれぞれ「兎」「犬」「猫」等へと表出すべき相異なる単体定数である．しかしこういう可能性は，無いとは言い切れないものの，大変低いように思われる．相異なる沢山の心言語文を格納しておくのは，いかにも効率が悪く，こういうものが進化の過程で選び取られたとは考えにくい．

そこで代わりに考えられるのが，単体変数 x から作られる

$$x\,\breve{o}\pi(x\triangle)$$

なる恒真心言語文が一つだけ格納されているという可能性である（これは，前条で触れた,「A は A だ」を真と判定する際の照合用の例文と同じものであろう）．ただしそうすると，思考機械・人間には，$x\,\breve{o}\pi(x\triangle)$ を $a\,\breve{o}\pi(a\triangle)$，$b\,\breve{o}\pi(b\triangle)$，$c\,\breve{o}\pi(c\triangle)$ 等へと変換する機能がなくてはならない．私は，この機能を担うものは定理 5.5.23 で言及した**代入**

$$\left(\frac{x_1, \ldots, x_n}{a_1, \ldots, a_n}\right)$$

であると考える．つまり，この算法を仮に ρ で表すと，

$$\mathrm{Dom}\,\rho = \{f \in H \mid f \text{ において } x_i \text{ が } a_i \text{ から自由 } (i = 1, \dots, n)\}$$

であり，$f \in \mathrm{Dom}\,\rho$ に対して次の式が成り立つ．

$$\rho f = f\left(\frac{x_1, \dots, x_n}{a_1, \dots, a_n}\right)$$

$x\,\breve{o}\pi(x\triangle)$ に代入 (x/a)，(x/b)，(x/c) 等を施せば $a\,\breve{o}\pi\,(a\triangle)$，$b\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$，$c\,\breve{o}\pi\,(c\triangle)$ 等が得られる．従って，$x\,\breve{o}\pi(x\triangle)$ が格納されており，かつ代入算法があれば，実質的には $a\,\breve{o}\pi\,(a\triangle)$，... 等の観念がすべて格納されていることになる．そして代入算法を適用することが，すなわち格納されている観念を抽き出すことに当たる．

以上は，「A は A だ」なる観念を題材にしての説明であったが，この他の恒真観念についても同様である．たとえば，名詞 A, B と動詞 F から作られる「A が B を F なら B を A が F」なる恒真観念を私たちは持っていると思われるが，A, B, F を色々に替えて得られるこういう無数の観念は，単体変数 x, y と用変数 z から作られる唯一つの恒真心言語文

$$\big(x\,\breve{o}k\,(y\,\breve{o}l\,z)\big) \Rightarrow \big(y\,\breve{o}l\,(x\,\breve{o}k\,z)\big)$$

として格納されていると考えられる（第 7.3.3.2 条参照）．そしてそう考えると，心言語に色々な型の変数のあるわけが始めてよく理解できるのである．

ただし，代入算法は H 上の弱論理ではあるが論理ではない．従って，心論理代数系の代数構造は論理から成るという私の考えからすれば，代入は心論理代数系の算法ではない．代入算法は，格納されている恒真観念を抽き出す機能に当たるものであり，推論機能に当たるものではないと考えなければならない．また，観念を抽き出す機能としてあるのは，多数の変数への代入算法ではなく，一つの変数への代入算法であると考えるのが妥当であろう．そうだとすると，同時代入と逐次代入の関係についての定理 3.17.4 が重要となる．

なお，変数 x, y, z から作られる $x\,\breve{o}\pi(x\triangle)$，$\big(x\,\breve{o}k\,(y\,\breve{o}l\,z)\big) \Rightarrow \big(y\,\breve{o}l\,(x\,\breve{o}k\,z)\big)$ 等の心言語文は，後出の原則 15 によれば国語の語としては表出しない．従って，格納されている恒真心言語文は，代入算法により抽き出されて後に言葉として表出することになる．

7.3.2　限量語を含まない単純な単文—格助詞と用言—

§ ここでは次のような形の元を題材にして，単相格言語と日本語の関係について説明しよう．

$$a_1\,\breve{o}k_1\,(a_2\,\breve{o}k_2\,(\cdots(a_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots)) \tag{7.3.4}$$

定理 5.1.1 によれば，(7.3.4) が A に存在するためには，$a_1, \dots, a_n$ が単体元であって f が用元であり，かつ $k_1, \dots, k_n$ が f の格域 P の相異なる元であることが必要十分である．またこの条件の下で，(7.3.4) は $P - \{k_1, \dots, k_n\}$ を格域とする用元である．しかしこの項では，f が用素元であると仮定し（表 5.1 参照），さらに (7.3.4) が閉元である場合を考える．そうすると，(7.3.2) により

$$a_i \in \mathrm{Con}_\varepsilon \qquad\qquad f \in \mathrm{Con}_P$$

すなわち a_i は単体定数で f は用定数である．標題の「単純な」はこのことを指す．

以下 (7.3.4) の読み下し方を，すなわち国語への表出の仕方を説明する．それには，単体定数や括弧の読み下し方は原則 1, 4 で説明済みなので，算号 $\breve{o}k_i$ $(i = 1, \dots, n)$ と用定数 f の読み下し方の原則を示せばいい．それは次の通りである．

原則 5 算号 $\breve{o}k$ $(k \in K)$ は格助詞に置き換える．

ただし $\breve{o}$ は便宜上の記号なので，この原則は格 k の読み下し方を示すのだと考えていい $(k \in K)$．

原則 6 用定数は動詞・形容詞・形容動詞の終止形に置き換えるか，または，それら用言の連用形に完了の意味を表す助動詞「た」を連ねたものに置き換える [9]．

ただしどちらの原則も，第 7.3.1.3 条などで述べた色々な但し書き付きのものと考えなければならない．また算号 $\breve{o}\pi$ には，原則 5 と共に原則 2 を適用しなければならない．

原則 5 と原則 6 の正確な意味も原則 1 と同様である．つまりまず原則 5 は，表出関係によって格の各々に格助詞が一つ対応していて格の各々が対応する格助詞へと表出することを意味する．同様に原則 6 は，表出関係によって各用定数に動詞・形容詞・形容動詞の一つまたはそれ以上が対応していて各用定数が対応する動詞・形容詞・形容動詞のいずれかへと表出することを意味する．

具体例を示そう．たとえば，$n = 2$，$a_1 \neq a_2$，$k_1 = \pi$ だと仮定した上で，原則通りに

$$a_1 \to \text{ピーター} \qquad \breve{o}k_1 \to \text{が} \qquad a_2 \to \text{レタス} \qquad \breve{o}k_2 \to \text{を} \qquad f \to \text{食べる} \tag{7.3.5}$$

という置き換えをしてみる．つまり，a_1, k_1, a_2, k_2, f がそれぞれ「ピーター」「が」「レタス」「を」「食べる」へと表出すると仮定する．そうすると，(7.3.4) は「ピーターがレタスを食べる」という国語文となる（ここでは**括弧を取り除いたが，以後は一々断らずにそうする**）．また，

$$a_1 \to \text{ピーター} \qquad \breve{o}k_1 \to \text{は} \qquad a_2 \to \text{８時} \qquad \breve{o}k_2 \to \text{に} \qquad f \to \text{寝た} \tag{7.3.6}$$

という置き換えをすれば（この場合，k_2 と f は (7.3.5) における k_2 と f と同じ記号であっても違う格と用定数だと考えているのである [10]），(7.3.4) は「ピーターは８時に寝た」という国語文となる．また，$n = 1$，$k_1 = \pi$ だと仮定した上で，

$$a_1 \to \text{ピーター} \qquad \breve{o}k_1 \to \text{は} \qquad f \to \text{腕白だ}$$

という置き換えをすれば，(7.3.4) は「ピーターは腕白だ」という国語文となる．ただし「腕白だ」は,「名詞＋だ」ではなく形容動詞とみなす．なお，これらの例に出て来たような，名詞と助辞と動詞・形容詞・形容動詞の終止形または「連用形＋た」をつなげて出来る国語文を，この項の標題に掲げたように**単文**と呼ぶ（学校文法の用語とは異なる）．

原則 6 について用定数を用言の終止形と「連用形＋た」のどちらに置き換えるかが決定される仕組みも，原則 2 について $\breve{o}\pi$ を「が」と「は」のどちらに置き換えるかが決定される仕組みと同様と考えられる．つまり第 7.3.1.2 条で説明した通り，そういう決定は状況を表す用元列 $(f_i)_{i\in I}$ によるのである．置き換え (7.3.6) に即して説明すれば，$a_1\,\breve{o}k_1\,(a_2\,\breve{o}k_2\,f)$ は，$(f_i)_{i\in I}$ が「今は８時より前だ」を意味するなら終止形に置き換えられ，$(f_i)_{i\in I}$ が「今は８時より後だ」を意味するなら「連用形＋た」に置き換えられるという類の仕組みがあると考えるのである．置き換え (7.3.5) についても同様である．この置き換えには (7.3.6) と違って「８時」のような時間を表す語が無いが，状況 $(f_i)_{i\in I}$ によっては f は「食べた」として表出し得る．

なおこの考え方では，完了を表す助動詞「た」は，断定を表す助動詞「だ」とは性格を異にする．原則 3 により「だ」が単独の算号の表出であるのに「た」はそうでないからである（第 2.4 節参照）．

なお，(7.3.4) の表出中の $a_i\,\breve{o}k_i$ と f の表出や，(7.3.1) の表出中の $a\,\breve{o}\pi$ と $b\triangle$ の表出を**文節**と呼ぶ．たとえば $a_1\,\breve{o}k_1\,(a_2\,\breve{o}k_2\,f)$ の置き換え (7.3.5) による表出「ピーターがレタスを食べる」中

---

[9]「た」は撥音便とガ行五段のイ音便に連なる場合は「だ」となる．

[10] この種の断り書きは以後は省略する．

では，$\mathrm{a}_1\,\breve{o}\mathrm{k}_1$ と $\mathrm{a}_2\,\breve{o}\mathrm{k}_2$ と f の表出である「ピーターが」と「レタスを」と「食べる」が文節である（これは学校文法に則っている）．第 5.6.1 項で ∧ 式などを表記する際に (7.3.4) を $(\mathrm{a}\,\breve{o}\mathrm{k}_i)_{i=1,\ldots,n}\mathrm{f}$ と略記したのは，実は (7.3.4) を「文節分け」したのであった．

次に，第 1.5.2.3 条の始めに例としてあげた (1.5.1) から (1.5.5) までの「言葉」がどういう心言語の元の表出なのかを考える．まず (1.5.1) の「ピーターがレタスを食べる」は，すでに説明したように，$\mathrm{a}_1\,\breve{o}\mathrm{k}_1\,(\mathrm{a}_2\,\breve{o}\mathrm{k}_2\,\mathrm{f})$ に置き換え (7.3.5) をしたものと考えられる．次に (1.5.2) の「レタスがピーターを食べる」は，やはり $\mathrm{a}_1\,\breve{o}\mathrm{k}_1\,(\mathrm{a}_2\,\breve{o}\mathrm{k}_2\,\mathrm{f})$ に

$\mathrm{a}_1 \to$ レタス　　$\breve{o}\mathrm{k}_1 \to$ が　　$\mathrm{a}_2 \to$ ピーター　　$\breve{o}\mathrm{k}_2 \to$ を　　$\mathrm{f} \to$ 食べる

なる置き換えをしたものと考えられる．次に，(1.5.3) の「食べるピーターがレタスを」は，会話で実際に使われた場合は,「食べる」と「ピーターがレタスを」なる二つの文が続いたものとみなすべきだろう．そしてこの二文は，$\mathrm{a}_1\,\breve{o}\mathrm{k}_1\,(\mathrm{a}_2\,\breve{o}\mathrm{k}_2\,\mathrm{f})$ にそれぞれ

$\mathrm{a}_1 \to$ ◯　　$\breve{o}\mathrm{k}_1 \to$ ◯　　$\mathrm{a}_2 \to$ ◯　　$\breve{o}\mathrm{k}_2 \to$ ◯　　$\mathrm{f} \to$ 食べる

なる置き換え（◯は空語を表す）と

$\mathrm{a}_1 \to$ ピーター　　$\breve{o}\mathrm{k}_1 \to$ が　　$\mathrm{a}_2 \to$ レタス　　$\breve{o}\mathrm{k}_2 \to$ を　　$\mathrm{f} \to$ ◯

なる置き換えをしたものと考えられる．残りの (1.5.4) と (1.5.5) については課題としよう．

課題 7.3.2 (1.5.4) の「がピーター食べるをレタス」と (1.5.5) の「とぽちたわへけそみぐあろ」は，これまで掲げた表出の原則 1 – 6 によれば心言語からは表出しない．普通の会話でも，もちろん使われない．しかしどちらも，口にしようと思えば口にすることができる．このことをどう解釈すべきか．

7.3.3　限量語を含まない単純な複文

§ ここでは，A の元 g,h に算法 $\wedge,\vee,\Rightarrow,\Diamond$ を施して得られる

$$\mathrm{g}\wedge\mathrm{h} \qquad \mathrm{g}\vee\mathrm{h} \qquad \mathrm{g}\Rightarrow\mathrm{h} \qquad \mathrm{g}^{\Diamond} \tag{7.3.7}$$

なる元を題材にして説明する．第 5.1.3 項で説明したことにより，上記四種類の元は g,h が用元であれば存在して用元となるが，この項では，g,h が第 7.3.1 項で考えた (7.3.1) や第 7.3.2 項で考えた (7.3.4) のような形の単純な閉用元である場合を考える（標題の「単純な」はこのことを指す）．そうすると定理 3.16.4 により，上記四種類の元も閉用元である．

7.3.3.1　「かつ」「または」「なら」「ない」と中継記号「∗」

‡ ここでは (7.3.7) の読み下し方を，すなわち国語への表出の仕方を説明する．それには，g,h の読み下し方は第 7.3.1.1 条と第 7.3.2 項で説明済みだから，算号 $\wedge,\vee,\Rightarrow,\Diamond$ の読み下し方の原則を示せばいい．それは次の通りである．ただしどの原則も，第 7.3.1.3 条などで述べた色々な但し書き付きのものと考えなければならない．また，後で色々な修正や補足を加える．

原則 7　算号 ∧ は「∗かつ」に置き換える．

原則 8 算号 $\vee$ は「∗または」に置き換える．

原則 9 算号 $\Rightarrow$ は「∗なら」に置き換える．

原則 10 算号 $\Diamond$ は「∗ない」に置き換える．

ただし,「かつ」「または」「なら」「ない」の頭につけた記号∗の意味は次の通りである．たとえば「食べる」という動詞に「かつ眠る」という語をつなげるときには，私たちは「食べかつ眠る」というように「食べる」を連用形（言いさし形）に変える.「食べる」を「可愛い」のような形容詞や「腕白だ」のような形容動詞あるいは「名詞＋だ」に変えた場合も同様である．また,「食べる」「可愛い」に「または眠る」をつなげるときには,「食べるかまたは眠る」「可愛いかまたは眠る」のように「か」を挟む.「腕白だ」に「または眠る」をつなげるときには,「腕白かまたは眠る」のように「腕白だ」を語幹または名詞部「腕白」に変えて「か」を挟む．また,「食べる」「可愛い」に「なら眠る」をつなげるときには何もせずにそのままつなげていいが,「腕白だ」に「なら眠る」をつなげるときには，やはり「腕白だ」を語幹または名詞部に変える．また,「食べる」「可愛い」「腕白だ」に否定の助動詞「ない」をつなげるときには,「食べる」「可愛い」「腕白だ」を未然形や連用形に変えて「食べない」「可愛くない」「腕白でない」とする．また,「腕白である」に「ない」をつなげるときには,「である」を「で」にかえて「腕白でない」とする．場合によってはまた,「食べはしない」「可愛くはない」「腕白ではない」のように,「食べる」「可愛い」「腕白だ」を連用形に変えると共に「は＋し」や「は」を挟むこともある．また,「食べるのではない」「可愛いのではない」「腕白なのではない」のように,「食べる」「可愛い」「腕白だ」を連体形にかえると共に「の＋で＋は」を挟むこともある．

要するに「かつ」「または」「なら」「ない」は，前につく用言の語尾を色々に変化させたり，その用言との間に他の語を挟んだりという作用を持つ．記号∗はこの作用を表すものである（そこで∗を**中継記号**と呼ぶ）．すなわち具体的には，以下のような式が成り立つと考えればいい．

食べる∗かつ眠る＝食べかつ眠る
可愛い∗かつ眠る＝可愛くかつ眠る
腕白だ∗かつ眠る＝腕白でかつ眠る
食べる∗または眠る＝食べるかまたは眠る
可愛い∗または眠る＝可愛いかまたは眠る
腕白だ∗または眠る＝腕白かまたは眠る
食べる∗なら眠る＝食べるなら眠る
可愛い∗なら眠る＝可愛いなら眠る
腕白だ∗なら眠る＝腕白なら眠る
食べる∗ない＝食べない，食べはしない，食べるのではない，等
可愛い∗ない＝可愛いくない，可愛くはない，可愛いのではない，等
腕白だ∗ない＝腕白である∗ない＝腕白でない，腕白ではない，腕白なのではない，等

第 7.3.1.3 条などで述べた但し書きに従って「かつ」「または」「なら」「ない」などを同義語に替える場合も同様である．たとえば,「かつ」の代わりに接続助詞の「て」を使う方が日本語らしい読

み下し方であり，実際私たちは「て」を使う場合の方が多いが，その場合は

食べる＊て眠る＝食べて眠る
可愛い＊て眠る＝可愛くて眠る
腕白だ＊て眠る＝腕白で眠る

となる．この場合の中継記号＊は，前の語への作用を表すだけでなく,「飲んで眠る」「腕白で眠る」におけるように,「て」自身を「で」に変化させたり消滅させたり音便を起こさせたりという作用をも表す.「かつ」「または」「なら」「ない」の同義語や中継記号＊の作用の種類が実際にどれくらいあるかを網羅してみせるのは国語学の課題である．なお，これらの式の右辺のように「かつ」「または」「なら」「ない」や同義語を含む国語文を**複文**と呼ぶ（学校文法の用語とは異なる）.

なお原則 8 に関して,「または」のいわゆる**排他性**をどう考えるかの問題が生ずるが，これについては，算号 $\sqcup$ についての同様の問題と共に第 7.3.6.7 条で説明する.

なおまた原則 10 に関して，動詞につながる「ない」を助動詞とし形容詞や形容動詞や「名詞＋だ」につながる「ない」を形容詞とする文法理論がある．つながり方の形が明らかに異なるから区別すべしという考え方であろう．しかし数理心理学の観点からは，表面の形に囚われずに機能や意味に注目して，どの「ない」も同じものとみなすべきである（第 1.5.3 項参照）.

7.3.3.2　文節順によらない真偽と用元表出の一般・特殊原理

‡ 第 7.3.2 項で例として使った用元 $\mathfrak{a}_1\,\breve{o}\mathrm{k}_1\,(\mathfrak{a}_2\,\breve{o}\mathrm{k}_2\,\mathrm{f})$ が A に存在すれば，用元 $\mathfrak{a}_2\,\breve{o}\mathrm{k}_2\,(\mathfrak{a}_1\,\breve{o}\mathrm{k}_1\,\mathrm{f})$ も A に存在する．そして置き換え (7.3.5) をすれば，これらはそれぞれ

ピーターがレタスを食べる　　　　レタスをピーターが食べる

なる国語文となって表出する．そして私たちは，これらの国語文の真偽は「ピーター」「レタス」「食べる」が何を意味しようと常に一致すると思う．つまり私たちは,

ピーターがレタスを食べる なら レタスをピーターが食べる
レタスをピーターが食べる なら ピーターがレタスを食べる

なる二つの複文は恒真であると思う．言い換えれば,

A が B を F なら B を A が F

なる形の複文は，A と B にどんな名詞を入れ F にどんな動詞を入れても真であると思う．他方，前条で説明したことから，この複文は

$$\big(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathrm{f})\big) \Rightarrow \big(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\big)$$

なる A の用元の表出である．従って，心言語の意味論と変形論への要請により，この用元は単相格言語の意味論によって恒真元でなければならない．そして，実際にそうなっている．なぜなら，問題 5.5.16 により

$$\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathrm{f}) \preccurlyeq \mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})$$

が成り立ち，次いで定理 5.5.5 により，これが

$$\preccurlyeq \big(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathrm{f})\big) \Rightarrow \big(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\big)$$

と同等だからである．つまり，第 7.3.1.6 条と同様ここまでのところでも，単相格論理学や単相格言語の変形論は心言語の理論としてうまく出来ている．

なお，ここでの論法により次の一般原理が得られる．すなわち，**二つの国語文 X, Y の真偽が恒に一致すると私たちに思われるなら，X, Y へと表出する単相格言語の用元 ξ, η の真偽も一致しなければならない．つまり，$\xi \asymp \eta$ が成り立たなければならない**．これの成り立つことは，やはり，単相格論理学や単相格言語の変形論が心言語の理論として妥当なことの証拠になるのである．

この一般原理は，国語文「X なら Y」と心言語文 $\xi \Rightarrow \eta$ とに，第 1.4.3 項の心言語の意味論への要請あるいはその裏である第 1.5.2.4 条の心言語の変形論への第一要請を適用して得られる．この第一要請の代わりに，その逆であり同じく第 1.5.2.4 条で説明した心言語の変形論への第二要請を同様に適用すれば，次の原理も得られる．**単相格言語の二つの用元 ξ, η の真偽が一致するなら，それらの表出である国語文 X, Y の真偽も恒に一致すると私たちに思われなければならない**．ただし第 1.5.2.4 条で説明した通り，第二要請は比較的簡単な用元にだけ適用されるから，この二番目の原理も ξ, η が比較的簡単な場合にだけ適用される．そこでこの第二原理を**特殊原理**と呼ぶ．

7.3.3.3　重複する文節の省略

‡ 単相格論理学や単相格言語のここまでの変形論が妥当である証拠を更に示そう．

私たちは，一般に，一つの文の中に同じ言葉を繰り返すのを嫌う．たとえば，

ピーターは穴に住ん で ピーターはレタスを食べる

という意味のことを言おうとする場合，重複している「ピーターは」という文節の一つを省略して，

ピーターは穴に住ん で レタスを食べる

のように言う．これは伝達効率を上げることを目的とした行動であろうが，こういう行動が社会で許されるのは，もちろん，「ピーターは」を省略しても文の真偽が変わらないからである．つまり私たちは，この二つの国語文の真偽は一致すると思う．

そうすると，さっき述べた一般原理により，これらの国語文へと表出する心言語の用元 ξ, η の真偽も一致しなければならない．そして実際そうなっている．なぜなら，例 5.2.1 と第 5.5.4 項での説明により，$a \in \mathrm{Con}_\varepsilon$，$P$, $Q \in \mathcal{P}K$, $\pi \in P \cap Q$, $f \in A_P$, $g \in A_Q$ のとき

$$a\,\breve{o}\pi\,(f \wedge g) \asymp (a\,\breve{o}\pi\,f) \wedge (a\,\breve{o}\pi\,g)$$

が成り立ち，従って，$f = b\,\breve{o}k\,f'$, $g = c\,\breve{o}l\,g'$ とすれば

$$a\,\breve{o}\pi\,\big((b\,\breve{o}k\,f') \wedge (c\,\breve{o}l\,g')\big) \asymp \big(a\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}k\,f')\big) \wedge \big(a\,\breve{o}\pi\,(c\,\breve{o}l\,g')\big)$$

が成り立つ．そして，これまでに示した読み下し方の原則に従って次の置き換えをすると，この恒真式の両辺が冒頭に掲げた二つの国語文になるのである．

$a \to$ ピーター	$b \to$ 穴	$c \to$ レタス	(原則 1)
$\breve{o}\pi \to$ は	$\breve{o}k \to$ に	$\breve{o}l \to$ を	(原則 2, 原則 5)
$f' \to$ 住む	$g' \to$ 食べる		(原則 6)
$\wedge \to$ ＊て			(原則 7)

「$\wedge$」と「＊て」をそれぞれ「$\vee$」と「＊または」に替えても事情はまったく同様である．

問題 7.3.4　「ピーターは兎である かまたは 兎でない」について同様の考察をせよ．

7.3.4　限量語を含む文

§ ここでは，(7.3.1) と (7.3.4) における算号 $\breve{o}\pi$ と $\breve{o}k_i$ を $\lambda\pi$ と $\lambda_i k_i$ $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{Q})$ に変えて得られる次のような形の元を題材として説明する．

$$a\,\lambda\pi\,(b\triangle) \tag{7.3.8}$$

$$a_1\,\lambda_1 k_1\,(a_2\,\lambda_2 k_2\,(\cdots\,(a_n\,\lambda_n k_n\,f)\cdots)) \tag{7.3.9}$$

第 5.1.3 項で説明したことにより，(7.3.8) が A に存在するためには a, b が体元であることが必要十分であり，この条件の下で (7.3.8) は文となる．また，(7.3.9) が A に存在するためには，$a_1, \ldots, a_n$ が体元であって f が用元であり，かつ $k_1, \ldots, k_n$ が f の格域 P の相異なる元であることが必要十分であり，この条件の下で，(7.3.4) は $P - \{k_1, \ldots, k_n\}$ を格域とする用元である．しかしこの項では，(7.3.8) における a, b と (7.3.9) における $a_1, \ldots, a_n$ は単体元であると仮定する．また，(7.3.9) における f は，第 7.3.1 項で考えた (7.3.1) や第 7.3.2 項で考えた (7.3.4) や第 7.3.3 項で考えた (7.3.7) のような形の用元であると仮定する．さらに，(7.3.8) と (7.3.9) が閉元である場合を考える．そうすると，(7.3.2) により $a, b, a_1, \ldots, a_n$ は単体定数であり，f は閉用元である．

なお以下の説明は，第 2.3 節で「限量語の正しい扱い」と題して説明したことと密接不離に関係する．読者は，あらかじめその節をじっくり復習してから以下の説明を読んでほしい．

7.3.4.1　「すべて」と「少なくとも一つ」

‡ (7.3.8) や (7.3.9) の読み下し方（＝国語への表出の仕方）を説明するには，他の記号の読み下し方は説明済みだから，λk の読み下し方を説明すればいい $(\lambda \in \mathfrak{Q},\ k \in K)$．それにはまた，$\lambda$ と k 個々の読み下し方を説明すればいい．しかし，第 7.3.2 項で算号 $\breve{o}k$ の読み下し方の原則 5 を説明したときに注意した通り，$\breve{o}$ は便宜上の記号に過ぎないので，原則 5 は格 k の読み下し方を示すものとみなしていい．従ってここでは，$\lambda \in \mathfrak{Q}$ の読み下し方だけを説明すれば済む．

さてそうすると，単相格言語の一般的定義においては，$\mathfrak{Q} = \neg\mathfrak{P} \cup \mathfrak{P}$ であり，$\mathfrak{P}$ は $\mathbb{P}$ の区間包または閉区間包であり，$\neg\mathfrak{P} = \{\neg\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{P}\}$ は $\mathfrak{P}$ の複製で $\neg\mathfrak{P} \cap \mathfrak{P} = \emptyset$ なるものであった．また，$\mathbb{P}$ は A の限量系であり，これはすなわち，第 3.32.1 項で定義した量系で $\mathbb{P} \neq \{0\}$ なるものであった．そこでまず，$\mathbb{P}$ と $\mathfrak{P}$ を然るべく特殊化して置く必要がある．ここでは，$\mathbb{P}$ は最大元 ∞ を持ち，$\mathfrak{P}$ は $\mathbb{P}$ の区間包であると仮定する．なお，第 3.32.1 項で示したように，任意の量系 $\mathbb{S}$ に最大元を付加して量系 $\mathbb{S}_\infty$ を作ることができる．また，任意の量系 $\mathbb{S}$ の任意の区間 $[0, m]$ と同順の（従って最大元を持つ）量系 $\mathbb{S}_m$ を作ることができる．

さて，$\lambda \in \mathfrak{Q}$ とすれば，ある $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ に対して $\lambda = \neg\mathfrak{p}$ と $\lambda = \mathfrak{p}$ のどちらかが成り立つ．$\mathfrak{p}$ は一般には $\mathbb{P}$ の有限個の区間の和であるが，単独の区間である場合が特に重要である．そして単独の区間には，下方区間と上方区間と真正区間の三通りがある．ただし，$\mathbb{P}$ 自身と $\emptyset$ とだけは下方区間であってかつ上方区間である [11]．

以上を踏まえて $\lambda \in \mathfrak{Q}$ の読み下し方の原則を述べよう．ただし，例によって色々な但し書きがあり，後で色々な補足・修正を加える．しかし，第 7.3.1.3 条などで述べた類の但し書きは繰り返さない．

原則 11　$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ なら，$\neg\mathfrak{p}$ は逆限語に置き換え，$\mathfrak{p}$ は順限語に置き換える．

---

[11] $\mathbb{P} = [0\to) = (\leftarrow\infty]$，$\emptyset = (\infty\to) = (\leftarrow 0)$

原則 12 $\mathfrak{p}$ **が下方区間** $(\neq \mathbb{P}, \emptyset)$ **なら，**$\neg\mathfrak{p}$ **と** $\mathfrak{p}$ **は上限語に置き換える．特に** $\underline{0} = \neg(\leftarrow 0]$ **は「すべて」を意味する語に置き換える．**

原則 13 $\mathfrak{p}$ **が上方区間** $(\neq \mathbb{P}, \emptyset)$ **なら，**$\neg\mathfrak{p}$ **と** $\mathfrak{p}$ **は下限語に置き換える．特に** $\overline{0} = (0 \rightarrow)$ **は「ゼロでない」を意味する語に置き換える．また，**$[\infty \rightarrow)$ **は「数知れない」を意味する語に置き換える．**

原則 14 $\mathfrak{p}$ **が真正区間なら，**$\neg\mathfrak{p}$ **と** $\mathfrak{p}$ **は両限語に置き換える．特に** $\mathrm{p} = \{\mathrm{p}\} = [\mathrm{pp}]$ $(\mathbb{P} \ni \mathrm{p} \neq 0, \infty)$ **は数詞に置き換える**

これらの原則によれば算号 $\lambda\mathrm{k}$ は限量語と格助詞をつなげたものに置き換えることになるが，つなげる順序は，必ずしも，算号 $\lambda\mathrm{k}$ の書き方の通りに限量語を前にし格助詞を後にしなくてもいい．第 2.3.2 項で指摘した通り，格助詞「が」「を」の場合は,「が」「を」を前にする方が日本語らしい読み下し方である．また，限量語が「どれも」「どれか」「どこも」「どこか」のような連語の場合は，格助詞を「どれ」「どこ」と「も」「か」の間に挟んでもいいし，挟まなければならないこともある．また，国語においては,「すべて」や「ゼロでない」を意味する限量語を普通の会話で使うことはむしろ少ない．つまり，$\underline{0}$, $\overline{0}$ は空語に置き換えるのが普通の読み下し方である（第 7.3.1.2 条の但し書きや後出の問題 7.3.9 参照）.

なお，原則 13 における「ゼロでない」は，個数については「少なくとも一つ」と同義である．標題に「少なくとも一つ」と書いたのはこのことによる．

原則 12, 13 で $\mathfrak{p} = \underline{0}, \overline{0}$ なる場合について，具体例によって説明しよう．慣例に従って，$\underline{0}, \overline{0}$ はそれぞれ $\forall, \exists$ で表す.

対照のために，(7.3.9) の特別のものである次の三つの用元を合わせて考える．

$$\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \tag{7.3.10}$$

$$\mathfrak{a}\,\forall\pi\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \tag{7.3.11}$$

$$\mathfrak{a}\,\exists\pi\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}) \tag{7.3.12}$$

そして $\mathfrak{a}, \pi, \mathrm{b}, \mathrm{k}, \mathrm{f}$ は，前項までに示した原則に従って次のように置き換える．

$$\mathfrak{a} \rightarrow \begin{cases} \text{ジョン} & \cdots \quad \text{(7.3.10) において} \\ \text{少年} & \cdots \quad \text{(7.3.11), (7.3.12) において} \end{cases} \tag{7.3.13}$$

$$\pi \rightarrow \text{が} \qquad \mathrm{b} \rightarrow \text{メアリ} \qquad \mathrm{k} \rightarrow \text{を} \qquad \mathrm{f} \rightarrow \text{好く}$$

$\forall, \exists$ は，原則 12, 13 に従って次のように置き換える．

$$\forall \rightarrow \text{すべて} \qquad\qquad \exists \rightarrow \text{幾人か} \tag{7.3.14}$$

そうすると，(7.3.10), (7.3.11), (7.3.12) はそれぞれ次の国語文となる．

$$\begin{gathered} \text{ジョンがメアリを好く} \\ \text{少年すべてがメアリを好く} \\ \text{少年幾人かがメアリを好く} \end{gathered} \tag{7.3.15}$$

問題 7.3.5 $\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})$, $\mathfrak{a}\,\forall\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})$, $\mathfrak{a}\,\exists\mathrm{k}\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})$ を次の置き換えによって適当に読み下せ．

$$\mathfrak{a} \rightarrow \text{夜} \qquad \mathrm{k} \rightarrow \text{に} \qquad \mathrm{b} \rightarrow \text{鈴虫} \qquad \mathrm{f} \rightarrow \text{鳴く}$$

なお，(7.3.13) において $\mathfrak{a}$ を「ジョン」と「少年」の二通りに読み分けたが，これは別に必要なことではない．(7.3.11), (7.3.12) において「$\mathfrak{a} \to$ ジョン」という置き換えをしても構わない．こう置き換えると，たとえば (7.3.11) は「ジョンすべてがメアリを好く」という国語文となるが，これは別に不合理な文ではない．不合理だと思った人がいるとすれば，それは恐らく,「ジョン」という言葉が唯ひとりの人物を指すと思ったからだろう．そして，なぜそう思ったかといえば,「ジョン」というのが英米人のありふれた名前だからであろう．しかし,「ジョン」が人名であると決まっているわけではないし，人名だとしても,「ジョン」という名の人は世界中に沢山いる.「メアリ」についても同様である．人ではないジョンという名の何かがすべてメアリを好く，あるいはジョンという名の人がすべてメアリを好くという意味にとれば不合理ではない.「ジョンがメアリを好く」が不合理でなく「ジョンすべてがメアリを好く」が不合理だと思うのは,「ジョン」が唯ひとりの人物を表すという知識を持っている場合に限る．そういう知識がなければ,「ジョン」という言葉だけを見てそれが固有名詞かどうかを云々することができないからである．

言語研究者も，言語だけを論じていては「固有名詞」という概念を定義することができない．しかし，言語を論ずるのでなく言語が表現する世界の物を論ずるなら，その物が「固有物」であるかどうかどうかを云々することは確かにできる．問題 5.2.23 において，単相格世界 W の**個実在**という概念を定義した．これはすなわち，W の基底 W_ε の元 $\mathfrak{a}$ であって $\mathfrak{a} \exists \mathfrak{x}$ をみたす $\mathfrak{x} \in W_\varepsilon$ が $\mathfrak{a}$ に限るものを指す．この個実在が「固有物」に相当する．問題 5.2.23 に記したことから，個実在 $\mathfrak{a}$ と事態 $\mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{a}\,\check{o}\pi\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}\,\exists\pi\,\mathfrak{g}$ が定義されるとき，これらはすべて等しい．従ってまた，$\mathfrak{g} = \mathfrak{b}\,\check{o}k\,\mathfrak{f}$ であれば

$$\mathfrak{a}\,\check{o}\pi\,(\mathfrak{b}\,\check{o}k\,\mathfrak{f}) = \mathfrak{a}\,\forall\pi\,(\mathfrak{b}\,\check{o}k\,\mathfrak{f}) = \mathfrak{a}\,\exists\pi\,(\mathfrak{b}\,\check{o}k\,\mathfrak{f}) \tag{7.3.16}$$

が成り立つ．これは，単相格言語 A ではなく単相格世界 W の元についての式であるが，これらの元をさっきの A の元と同様に読み下すと，この式の意味を理解しやすい．ただし，(7.3.13) とは少し違えて，$\mathfrak{a}$ はどれも「ジョン」に置き換える．そうすると，(7.3.16) は次のようになる．

ジョンがメアリを好く＝ジョンすべてがメアリを好く＝ジョン幾人かがメアリを好く

つまり,「ジョン」が単相格世界の個実在なら,「ジョンがメアリを好く」という事態も「ジョンすべてがメアリを好く」という事態も「ジョン幾人かがメアリを好く」という事態も，同一の事態なのである．これはそうあって然るべきことであり，その然るべきことが単相格世界で成り立つのは，単相格世界の定義がうまく出来ていることの証拠の一つである．

問題 7.3.6 次の四つの表現はどういう意味にとれるか．課題 7.3.1 と対比させて考えよ．

1. 野菜はすべて好物だ
2. 野菜すべてが好物だ
3. 好物はすべて野菜だ
4. 好物すべてが野菜だ

7.3.4.2　{John, Every boy, A boy} loves Mary

‡ (7.3.10), (7.3.11), (7.3.12) が英語にはどう表出するかを考えるのも興味深い．ただし第 7.3.1.1 条で注意したように，英国人の心言語における算号や算法の表現形式が日本人の心言語におけるも

のと異なるために，(7.3.10), (7.3.11), (7.3.12) は，英国人の心言語においてはそれぞれ

$$\pi\breve{o}(a, f\,k\breve{o}\,b) \tag{7.3.17}$$

$$\pi\forall(a, f\,k\breve{o}\,b) \tag{7.3.18}$$

$$\pi\exists(a, f\,k\breve{o}\,b) \tag{7.3.19}$$

となっている．つまり，まず算号 λk は，英国人の心言語では前後が入れ替わって $k\lambda$ となる ($\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \mathfrak{Q}$, $k \in K$)．また，代数系の二項算法 α を元 x, y に施したものは，$\alpha(x, y)$, $x\,\alpha\,y$, $(x, y)\alpha$ などの形や，さらに x, y の順番を入れ替えた形などの色々な形に書くことができるが，算法 $\lambda\pi$ は，日本人の心言語では $x\,\alpha\,y$ の形に表現され，英国人の心言語では $\alpha(x, y)$ の形に表現される．これに対し算法 λk ($k \neq \pi$) は，日本人の心言語ではやはり $x\,\alpha\,y$ の形に表現されるが，英国人の心言語では x, y が入れ替わって $y\,\alpha\,x$ の形に表現される．従って，日本人の心言語では $a\,\lambda\pi\,g$ の g に $b\,\breve{o}k\,f$ を代入して $a\,\lambda\pi\,(b\,\breve{o}k\,f)$ が出来るのに対応して，英国人の心言語では $\pi\lambda(a, g)$ の g に $f\,\breve{o}k\,b$ を代入して $\pi\lambda(a, f\,\breve{o}k\,b)$ が出来るのである．

問題 7.3.7 日本人の心言語の元 $a\,\lambda\pi\,\big(b\,\mu k\,(c\,\nu l\,f)\big)$ は英国人の心言語ではどうなるか．

英国人の心言語の表出の原則も日本人のそれに準ずると考えていい．ただし格は，日本人の場合は格助詞すなわち後置詞として表出するが，英国人の場合は前置詞（句）として表出する．そして英国人の場合は，π および「を」に相当する格（これを仮に**「を」格**と呼ぶ）は空語○として表出する（π が○として表出することは第 7.3.1.1 条で既に述べた）．そこで，a, π, b, k, f に

$$a \to \begin{cases} \text{John} & \cdots \quad \text{(7.3.17) において} \\ \text{boy} & \cdots \quad \text{(7.3.18), (7.3.19) において} \end{cases}$$

$$\pi \to \bigcirc \qquad b \to \text{Mary} \qquad k \to \bigcirc \qquad f \to \text{loves}$$

$$\forall \to \text{every} \qquad \exists \to \text{a}$$

なる置き換えをしてみる．そうすると，(7.3.17), (7.3.18), (7.3.19) はそれぞれ次の英文となる．

John loves Mary　　Every boy loves Mary　　A boy loves Mary

これはすなわち，第 2.3 節冒頭に掲げた三つの英文に他ならない．これらをそこに掲げたのは，一階述語言語が自然言語の意味を表すのに適していないのを示すためであった．つまり，これらの英文を一階述語言語で表すと，もとの英文の間にある形態と意味の類似性が失われてしまう．そういう趣旨であった．これに対し単相格言語では，(7.3.17), (7.3.18), (7.3.19) がこれらの英文を表現する（正確には「を表現する」のではなく「として表出する」であるが）．そして (7.3.17), (7.3.18), (7.3.19) は，形態上はもちろん，意味の面でももとの英文の間の類似性を保っている（そのことは単相格世界における算法 $\breve{o}k$, $\forall k$, $\exists k$ の定義や以下の説明を見れば分かる）．これも，単相格論理学が妥当であるという証拠の一つである．ただし単相格論理学は，あくまでも思考機械・人間と認識の対象世界の構造と関係を記述するためのものであり，言語を表現するためのものではない．

ちなみに，(7.3.17), (7.3.18), (7.3.19) に置換 (7.3.13), (7.3.14) を行なえば，国語文から程遠い次のような代物が出来上がる（「love」を「好く」と訳したというわけではない）．

が ジョン 好く を メアリ
がすべて 少年 好く を メアリ　　(7.3.20)
が幾人か 少年 好く を メアリ

つまり，日本人が (7.3.15) のように考えているところを，英国人は (7.3.20) のように考えていることになる（日本人に英語の習得が難しいのは当然に思えてくる）．

要するに日本人と英国人の間には，心言語という代数系の**算号と算法との表現形式の違い**があり，日本語と英語という**言語の違い**は，この表現形式の違いを反映しているのだと考えられる．英国人以外の外国人と日本人の間にもこの種の違いがあるであろう．「すべての少年」とか「幾人かの少年」という言い方，あるいは第 2.3.2 項で引用した堀辰雄の文章にある「多くの少女」とか「幾たりかの少女」という言い方は，こういう思考機械内部の表現形式の違いに気づくことなく（容易に気づくべくもないが）漢語や欧米語の表面を真似て，たとえば (7.3.20) における「すべて 少年」「幾人か 少年」を「すべての少年」「幾人かの少年」に変えて，輸入した語法なのであろう．

7.3.4.3　三段論法と用元表出のもう一つの一般原理

‡ 単相格論理学や単相格言語のここまでの変形論が妥当である証拠を更に示そう．
私たちは次の国語文を恒真だと思う．

ジョンが少年であり かつ 少年すべてがメアリを好く なら ジョンはメアリを好く

つまり,「ジョン」「少年」「メアリ」「好く」が何を指そうとこの文は真であると思う．そうすると，心言語の意味論と変形論への要請により，この国語文へと表出する用元は単相格言語の意味論によって恒真元でなければならない．そして実際そうなっている．なぜなら，$c \in A_\varepsilon$, $a \in G$, $\pi \in P \in \mathcal{P}K$, $g \in A_P$ のとき，まず定理 5.5.10 により

$$c\,\breve{o}\pi\,a\triangle,\ a\,\forall\pi\,g \preccurlyeq c\,\breve{o}\pi\,g$$

が成り立ち，次いで定理 5.5.5 により次の式が成り立つ．

$$\preccurlyeq \big((c\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\wedge(a\,\forall\pi\,g)\big)\Rightarrow(c\,\breve{o}\pi\,g)$$

従ってこれに $g = b\,\breve{o}k\,f$ を代入すれば，

$$\preccurlyeq \Big((c\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\wedge\big(a\,\forall\pi\,(b\,\breve{o}k\,f)\big)\Big)\Rightarrow\big(c\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}k\,f)\big)$$

が成り立つ．そして，前条までに説明した読み下し方の原則に従って次の置き換えをすると，この恒真式の右辺が冒頭に掲げた国語文になるのである．

$a \to$ 少年	$b \to$ メアリ	$c \to$ ジョン	(原則 1)
$\triangle \to$ である			(原則 3)
$\pi \to$ が，は	$k \to$ を		(原則 2，5)
$f \to$ 好く			(原則 6)
$\wedge \to$ ＊かつ	$\Rightarrow\ \to$ ＊なら		(原則 7，9)
$\forall \to$ すべて			(原則 12)

なお，ここでの論法により次の一般原理が得られる．すなわち，**国語文 $F_1, \ldots, F_n, F$ から得られる「F_1 かつ ... かつ F_n なら F」なる国語文を私たちが恒真と思う場合，$F_1, \ldots, F_n, F$ へと表出する単相格言語の用元 $f_1, \ldots, f_n, f$ について $f_1, \ldots, f_n \preccurlyeq f$ が成り立たなければならない．** これの成り立つことは，やはり，単相格論理学や単相格言語の変形論が心言語の理論として妥当なことの証拠になるのである．

問題 7.3.8 同様の考察を「8 月 15 日は夏で，夏はいつも暑い，とすれば 8 月 15 日は暑い」なる国語文について行なえ．

問題 7.3.9 限量語の省略に注意しつつ，次の国語文について同様の考察を行なえ．

1. ジョンが少年で，ジョンがメアリを好く，とすれば少年少なくとも一人がメアリを好く
2. 数学者が科学者で，科学者は自然を研究する，とすれば数学者は自然を研究する
3. ペットは動物で，ペット何匹かが座敷で暮らす，とすれば動物何匹かは座敷で暮らす
4. 力士幾人かがハワイ人で，ハワイ人は英語を話す，とすれば力士幾人かは英語を話す
5. 力士幾人かがハワイ人なら，ハワイ人幾人かが力士である

7.3.4.4　「すべて」と「少なくとも一つ」が絡む文節順変更

‡ 私たちは，また，次の国語文を恒真だと思う．

少年すべてがメアリを好く なら メアリを少年すべてが好く

そうすると，さっき得られた一般原理により，

少年すべてがメアリを好く　　　　　メアリを少年すべてが好く

という二つの国語文へと表出する用元 ξ, η は $\xi \preccurlyeq \eta$ をみたさなければならない．そして実際そうなっている．なぜなら，問題 5.5.16 に記したことから，$a \in G$，$b \in A_{\varepsilon}$，$\lambda \in \{\breve{o}\} \cup \Omega$，$P \in \mathcal{P}K$，$k, l \in P$，$k \neq l$，$f \in A_P$ のとき，

$$a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f) \asymp b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)$$

が成り立つ．そして，この式の両辺において $\lambda = \forall$，$k = \pi$ としてから然るべく置き換えをすれば上記二つの国語文となるからである．このこともやはり，単相格論理学や単相格言語のここまでの変形論が妥当であることの証拠である．

問題 7.3.10 同様の考察を次の国語文について行なえ．ただし，この中には真でないものが含まれている．

1. メアリを少年すべてが好く なら 少年すべてがメアリを好く
2. 少年幾人かがメアリを好く なら メアリを少年幾人かが好く
3. メアリを少年幾人かが好く なら 少年幾人かがメアリを好く
4. 少年すべてが少女すべてを好く なら 少女すべてを少年すべてが好く
5. 少年幾人かが少女すべてを好く なら 少女すべてを少年幾人かが好く
6. 少年すべてが少女幾人かを好く なら 少女幾人かを少年すべてが好く
7. 少女幾人かを少年幾人かが好く なら 少年幾人かが少女幾人かを好く

7.3.4.5　全体の否定と部分の否定

‡ 私たちは次の二つの国語文の真偽は逆であると思う．

社員すべてが男だ　　　　　　社員幾人かが男でない

つまり，一方の否定と他方とは真偽が一致する．そこで,「社員すべてが男だ」の否定文は「社員すべてが男なのではない」であるとしよう．そうすると,「社員すべてが男なのではない」と「社員幾人かが男でない」は真偽が一致する．従って，単相格言語の意味論と変形論が要請に応えるためには，この二つの国語文へと表出する用元 ξ, η が $\xi \asymp \eta$ をみたさなければならない．そして，実際にそうなっている．なぜなら，$a \in G$，$p \in \mathbb{P}$，$k \in P \in \mathcal{P}K$，$f \in A_P$ のとき，定理 5.2.8 により

$$(a\,\underline{p}k\,f)^{\Diamond} \asymp a\,\overline{p}k\,(f^{\Diamond})$$

が成り立ち，特に $p = 0$，$k = \pi$，$f = b\triangle$ とすれば

$$\big(a\,\forall\pi\,(b\triangle)\big)^{\Diamond} \asymp a\,\exists\pi\,\big((b\triangle)^{\Diamond}\big)$$

が成り立つ．そして，これまでに示した読み下し方の原則に従って次の置き換えをすれば，この恒真式の両辺が「社員すべてが男なのではない」と「社員幾人かが男でない」になるからである．

$a \to$ 社員　　$b \to$ 男　　$\pi \to$ が　　$\triangle \to$ だ　　$\Diamond \to$ ∗ない　　$\forall$ すべて　　$\exists \to$ 幾人か

ただし，$\asymp$ の左側の $\triangle))^{\Diamond}$ に対応する「だ∗ない」は「なのではない」と読み下し，右側の $\triangle)^{\Diamond}$ に対応する「だ∗ない」は「でない」と読み下さなければならない（二様の読み下しの先頭の「な」「で」は「男だ」の「だ」の活用形である）．つまり,「(な) のではない」は「社員すべてが男だ」なる文全体の否定を表し,「(で) ない」は「社員幾人かが男だ」の一部である「男だ」の否定を表す．国語にはこのように，文全体を否定する語と文の一部を否定する語の区別がある．

しかし，この区別はあまりはっきりしない．たとえば,「社員すべてが男で**は**ない」という言い方もあるが，これの「(で) はない」が「社員すべてが男だ」全体の否定であるのか，それとも「男だ」の否定であるのかは，はっきりしない．つまり,「社員すべてが男ではない」が $\big(a\,\forall\pi\,(b\triangle)\big)^{\Diamond}$ の表出なのか $a\,\forall\pi\,\big((b\triangle)^{\Diamond}\big)$ の表出なのかがはっきりしない.「社員すべて**は**男でない」という言い方もあるが，これが何を意味するのかもはっきりしない．係り助詞の「は」を使った否定表現の意味は，一般に曖昧のように思われる．

国語の否定表現は，曖昧なだけでなく，十分な量が備わっていない．$a\,\forall k\,(b\,\forall l\,f)$ なる用元を例にとって説明しよう．この用元の全体や一部に算法 $\Diamond$ を適用すると，

$$\big(a\,\forall k\,(b\,\forall l\,f)\big)^{\Diamond} \qquad\qquad a\,\forall k\,\big((b\,\forall l\,f)^{\Diamond}\big) \tag{7.3.21}$$

$$a\,\forall k\,\big(b\,\forall l\,(f^{\Diamond})\big) \tag{7.3.22}$$

なる三種類の用元が出来る．これらから括弧を取り去ればすべて同じものになるから，$\Diamond$ の置き換え方を変えるか括弧の痕跡を残さない限り，同じ国語文として表出する．もとの用元が異なるのに表出の上で区別されなければ，心伝達の面などで支障が出る．それは困った事態のはずであるが，これらをはっきり区別するための語法は十分には発達していない．

定理 5.2.8 によれば，(7.3.21) の二つの用元はそれぞれ次の用元と真偽が一致する．

$$a\,\exists k\,\big(b\,\exists l\,(f^{\Diamond})\big) \qquad\qquad a\,\forall k\,\big(b\,\exists l\,(f^{\Diamond})\big) \tag{7.3.23}$$

そして，諸原則通りに

$$\mathrm{a} \to \text{少女} \qquad \mathrm{b} \to \text{少年} \qquad \mathrm{f} \to \text{好く}$$

などの置き換えをすれば，(7.3.23) の二つの用元と (7.3.22) はそれぞれ次の国語文となる．

少女幾人かが少年幾人かを好かない　　少女すべてが少年幾人かを好かない
少女すべてが少年すべてを好かない

これらの国語文の意味の違いはよく分かる．そしてその意味の違いは用元 (7.3.21), (7.3.22) の間の違いを反映している．しかしこの違いは，(7.3.21), (7.3.22) そのものの表出においてははっきりと区別されない．つまり国語には，そういう区別をするための語法が十分に備わっていない．

また，思考機械・人間には，(7.3.21) の二つの用元を，それと真偽が一致する (7.3.23) の二つの用元に変換する推論能力も乏しいように思われる．これは，大学初年次の数学教育の経験から得た私の感想である．大学以降の数学を理解する際には，(7.3.21) を (7.3.23) に変換する類の推論が必要になることが多い．たとえば，$\lim_{x \to a} f(x) \neq b$ を ε-δ 式に表現する場合や，一次独立・一次従属の概念を理解するときに，そういうことが必要になる．しかしそういう推論能力は，理科系の，しかも優秀と目される学生にさえ十分には備わっていないように感ぜられる．

以上のことは，どれも，(7.3.21) の二つの用元を区別したり違いをはっきり伝達し合うことが，人間の生存のためには余り重要でなかった，少なくとも日本人の普通の生活のためには余り重要でなかったことを示すのだと思われる．

7.3.5　文から作られる複雑な体言「〜もの」と「〜こと」

§ ここでは A の $g\,\Omega x$ なる形の元を題材にして説明する．第 5.1.3 項で説明したことにより，こういう元が A に存在するためには g が文であることが必要十分であり，この条件の下で $g\,\Omega x$ は複体元である．しかしこの項では，g は (7.3.1) または (7.3.4) なる形のものとし，(7.3.1) における b は単体元とし，(7.3.4) における f は用素元とする（表 5.1 参照）．また，これまで通り $g\,\Omega x$ が閉元の場合を考える．そうすると，(7.3.2) が成り立って定理 3.16.4 により g に自由に現れる変数は x 以外にないから，(7.3.1) と (7.3.4) における $a, b, a_1, \ldots, a_n$ は x に等しいか単体定数かであり，(7.3.4) における f は用定数である．

こういう $g\,\Omega x$ の読み下し方（＝国語への表出の仕方）は次の二原則に従う．

原則 15　変数および変数に適用され変数に後置された算号は空語に置き換える．

原則 16　文 g に適用された算号 Ωx は，g に x が自由に現れる場合は「物・者」を意味する「∗もの」に置き換え，g に x が自由に現れない場合は「∗こと」に置き換える．

ただし「もの」と「こと」の頭につけた記号∗は，第 7.3.3.1 条と同様の**中継記号**であり，直前につく活用語の活用語尾を連体形に変えるなどの作用を表す（「などの」としたわけは直ぐ後で分かる）．ただしまた，算号 Ωx を成す二つの記号 Ω と x のうち，本質的なものは x であり，Ω は算号としての x を変数としての x と区別するための便宜上の記号に過ぎない．従って原則 16 は，算号としての x の読み下し方の原則とみなすことができる．

7.3.5.1　「兎であるものは」と体元表出の一般原理

‡ ここでは $\mathrm{g} = \mathrm{x}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle$ $(\mathrm{b} \neq \mathrm{x})$ なる特別な場合の $\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x}$，すなわち

$$(\mathrm{x}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\,\Omega\mathrm{x} \qquad\qquad \mathrm{b} \in \mathrm{Con}_{\varepsilon} \tag{7.3.24}$$

なる複体元について説明する．ただし $\mathrm{b} \in \mathrm{Con}_{\varepsilon}$ となるのは，b が単体元で $\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x}$ が閉元の場合を考えるとしていたからである．こういう元の読み下し方については，まず x と $\check{o}\pi$ は原則 15 により空語に置き換える．また，$\mathrm{x}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle$ には x が自由に現れているから，$\Omega\mathrm{x}$ は原則 16 により「∗もの」に置き換える．その他に，第 7.3.1.1 条で示した原則にも従わなければならない．

具体例で説明しよう．諸原則通りにたとえば

$\mathrm{b} \to$ 兎　　　　△ → だ，である，です　　　　$\Omega\mathrm{x} \to$ ∗もの

と言う置き換えをすれば，$(\mathrm{x}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}$ は

兎だ∗もの　　　　兎である∗もの　　　　兎です∗もの

という体言となる．ただしもちろん,「兎であるもの」だけが日本語らしい言い方である．従って「もの」の頭につく中継記号∗は，前に付く語が「だ」「です」「である」の場合は，これらを連体形に変えるのではなく,「だ」「です」を「である」に替え「である」は替えないという作用を持つことになる．

さて,「兎であるもの」とは「兎」に他ならない．つまり私たちにとっては,

兎であるものは皆 兎である　　　　兎は皆 兎であるもの である

なる二つの国語文は恒真である．そうすると，心言語の意味論と変形論への要請により，これらの国語文へと表出する用元は単相格言語の意味論によって恒真でなければならないが，実際そうなっている．定理 5.5.17 系 2 により

$$(\mathrm{x}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\,\Omega\mathrm{x} \simeq \mathrm{b}$$

が成り立ち，これは補題 5.5.2 により，二つの心言語文

$$\big((\mathrm{x}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle \qquad\qquad \mathrm{b}\,\forall\pi\,\big((\mathrm{x}\,\check{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\,\Omega\mathrm{x}\big)\triangle$$

が恒真であることと同等であり，これらがこれまでに説明した表出の原則によってさっきの二つの国語文へと表出するからである．そしてこのことも，単相格論理学や単相格言語のここまでの変形論が妥当であることの証拠である．

なお，いまの論法により次の一般原理が得られる．すなわち，**国語における体言 X, Y の意味が同じであると私たちに思われるなら，X, Y へと表出する心言語の体元 ξ,η の範囲が等しくなければならない．つまり，$\xi \simeq \eta$ が成り立たなければならない．**これが成り立つことは，やはり，単相格論理学や単相格言語の変形論が心言語の理論として妥当なことの証拠になるのである．

7.3.5.2　One that Peter is

‡ ここでは $\mathrm{g} = \mathrm{a}\,\check{o}\pi\,\mathrm{x}\triangle$ $(\mathrm{a} \neq \mathrm{x})$ の場合の $\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x}$，すなわち

$$(\mathrm{a}\,\check{o}\pi\,\mathrm{x}\triangle)\,\Omega\mathrm{x} \qquad\qquad \mathrm{a} \in \mathrm{Con}_{\varepsilon} \tag{7.3.25}$$

なる複体元について説明する．ただし $\mathfrak{a} \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ となるのは，この節冒頭で $\mathfrak{g}\,\Omega\mathfrak{x}$ が閉元の場合を考えるとしていたからである．

まず国語への表出の仕方（＝読み下し方）であるが，$(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{x}\triangle)\,\Omega\mathfrak{x}$ は言葉としては表出しない．言い換えれば，日本語には $(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{x}\triangle)\,\Omega\mathfrak{x}$ という概念 [12] を表す言葉がない．

仮にそういう言葉 C があるとしてみよう．定理 5.5.16 により，任意の単体定数 $\mathfrak{b}$ に対して

$$\mathfrak{b}\,\breve{o}\pi\,\big((\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{x}\triangle)\,\Omega\mathfrak{x}\big)\triangle \asymp \mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{b}\triangle \tag{7.3.26}$$

が成り立つ．従って，第 7.3.3.2 条に記した特殊原理に照らして，(7.3.26) の両辺の表出先の国語文は，真偽が一致するものと私たちに感ぜられなければならない．(7.3.26) の両辺とも比較的簡単であるから，ここで特殊原理を使うのは妥当であろう．そこで，単体定数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ をそれぞれ名詞 A, B に置き換え，$(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{x}\triangle)\,\Omega\mathfrak{x}$ を C に置き換えれば，(7.3.26) の両辺はそれぞれ「B は C だ」「A は B だ」なる国語文となる．従ってこの二文は，B がどんな名詞であっても真偽が同じであると私たちに感ぜられなければならない．しかしそういう言葉 C は国語には見当たらないのである．

国語ではそうだが，外国語では必ずしもそうではない．そのことを，英語を例にとって説明しよう．まず第 7.3.1.5 条で説明したように，英国人の心言語においては，$\mathfrak{g}$ すなわち $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{x}\triangle$ は $\pi\breve{o}(\mathfrak{a}, \triangle\mathfrak{x})$ なる形に表現される．また，算号 $\Omega\mathfrak{x}$ は $\mathfrak{x}\Omega$ と変わり，$\mathfrak{g}\,\Omega\mathfrak{x}$ は $\mathfrak{x}\Omega\,\mathfrak{g}$ なる形に表現される．その結果 $(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{x}\triangle)\,\Omega\mathfrak{x}$ は

$$\mathfrak{x}\Omega\,\pi\breve{o}(\mathfrak{a}, \triangle\mathfrak{x}) \tag{7.3.27}$$

なる形に表現される．そしてこれの英語への表出の仕方については，原則 15 によれば，変数 $\mathfrak{x}$ は空語に置き換える．また算号 $\triangle$ は，変数 $\mathfrak{x}$ に適用されてはいるが変数に後置されていないから，原則 15 と前掲の原則により「be (am, are, is, was, were)」に置き換える．他方原則 16 によれば，$\mathfrak{x}\Omega$ は「もの（物・者）」を意味する言葉，たとえば「one」に置き換えることになるが，次の原則を特別に付け加える．

- $\mathfrak{g}$ に $\mathfrak{x}$ が自由に現れる場合は「one」に関係代名詞「that」を後置させ，$\mathfrak{g}$ に $\mathfrak{x}$ が自由に現れない場合は「one」に接続詞の「that」を後置させる

ただし接続詞の「that」とは，たとえば「I know that Peter lives in the house」のように使われる「that」を指す．これに対し,「I know the house that Peter lives in」のように使われる「that」は関係代名詞である．英国人の場合は，日本人には無いこういう特別の表出原則のお陰で，すなわち英語に関係代名詞があるお陰で，(7.3.27) のような概念を言葉で表すことができるのである．つまり，今は $\mathfrak{g} = \pi\breve{o}(\mathfrak{a}, \triangle\mathfrak{x})$ には $\mathfrak{x}$ が自由に現れているから，$\mathfrak{x}\Omega$ は「one」に関係代名詞「that」を後置させた「one that」に置き換える．そこでその他の前掲の原則にも従って

$$\mathfrak{x}\Omega \to \text{one that} \qquad \pi\breve{o} \to \bigcirc \qquad \mathfrak{a} \to \text{Peter} \qquad \triangle \to \text{is} \qquad \mathfrak{x} \to \bigcirc$$

と置き換えれば，(7.3.27) は

One that Peter is

となる．つまり「that」は，関係詞節中の be 動詞「is」の補語の役割を演じている.「that」の同様の用例を研究社英和中辞典から拝借して挙げれば「Like the artist **that he is**, he does every thing neatly」「Fool **that I am**」などがあり，太字部が「that Peter is」に類似している．なお，(7.3.26) は英国人の心言語については

$$\pi\breve{o}\big(\mathfrak{b}, \triangle\big(\mathfrak{x}\Omega\,\pi\breve{o}(\mathfrak{a}, \triangle\mathfrak{x})\big)\big) \asymp \pi\breve{o}(\mathfrak{a}, \triangle\mathfrak{b})$$

[12] この「概念」は第 7.1 節で定義したものを指す．

なる式となるが，この式の両辺は，前掲の原則に従ってさらに b を「a rabbit」に置き換えれば，これまでに説明した英語への表出の原則によれば「A rabbit is one that Peter is」「Peter is a rabbit」となる．前者はよい文章ではなかろうが両者の真偽あるいは論理的意味は同じであろう（本当のところは native speaker の判断を仰がなければ分からない）．

7.3.5.3　「誰もがそれをするとすれば」

‡ ここでは $g = x\breve{o}\pi x\triangle$ の場合の $g\,\Omega x$，すなわち

$$(x\,\breve{o}\pi\,x\triangle)\,\Omega x \tag{7.3.28}$$

なる複体元について説明する．この複体元は，問題 5.5.7 により閉全包元であるから，慣例に従って one でも表す．

これの表出の仕方は既出の原則から分かる．原則 15 により，$(x\,\breve{o}\pi\,x\triangle)\,\Omega x$ における x，$\breve{o}\pi$，$\triangle$ は空語に置き換える．従って原則 16 と合わせて，one は「もの」を意味する語に置き換えることになる．

何はともあれ，具体例で説明しよう．そこで，たとえば

$$\mathrm{one}\,\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f) \tag{7.3.29}$$

なる用元において，まず $\lambda = \forall$，$l = \pi$ と仮定して，諸原則通りに

one → もの　　λ → すべて　　k → に　　b → それ　　l → が　　f → 有る

という置き換えをすれば，

ものすべてにそれが有る

という国語文になり，次に $\lambda = \forall$，$k = \pi$ と仮定して，

one → ひと　　λ → 誰も　　k → が　　b → それ　　l → を　　f → する

という置き換えをすれば，

ひと誰もがそれをする

という国語文になる．つまりここでは,「もの」を意味する語として「ひと」を選んである．さらに，λ だけ $\exists$ に替えて「λ → 誰か」という置き換えをすれば，次の国語文になる．

ひと誰かがそれをする

ただし，私たちは普通こういう言い方をしない.「もの」「ひと」を省略して「すべてにそれが有る」「誰もがそれをする」「誰かがそれをする」と言うのが普通である．この例から窺えるとおり，国語においては，one は空語として表出することが多い（第 7.3.1.2 条など参照）．

さて，私たちは次の国語文は恒真であると思う．

誰もがそれをするとすれば彼もそれをする

そうすると，心言語の意味論と変形論への要請により，この国語文へと表出する用元は単相格言語の意味論によって恒真でなければならない．そして実際にそうなっている．なぜなら，定理 5.5.21 などにより，任意の $a \in A_\varepsilon$ と $k \in P \in \mathcal{P}K$，$g \in A_P$ なる任意の k, g に対して

$$(\mathrm{one}\,\forall k\,g) \Rightarrow (a\,\breve{o}k\,g)$$

は恒真元である．従って $\mathrm{k}=\pi$，$\mathrm{g}=\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathrm{f}$ とすれば，

$$\big(\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathrm{f})\big)\Rightarrow\big(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathrm{f})\big)$$

が恒真元であることが分かり，これを然るべく読み下せばさっきの国語文になるのである．そして このことも，単相格論理学や単相格言語のここまでの変形論が妥当であることの証拠である．

7.3.5.4　{Every, Some}one loves Mary

‡ 閉全包元 $\mathrm{one}=(\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{x}\triangle)\Omega\mathrm{x}$ が英語にはどう表出するかを考えると興味深い．

(7.3.29) で $\mathrm{k}=\pi$ なる場合に即して考えよう．ただし，第 7.3.4.2 条などで説明した次第により，この元は英国人の心言語においては

$$\pi\lambda\big(\mathrm{one},(\mathrm{f}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathrm{b})\big) \tag{7.3.30}$$

となる．また one は，英国人の心言語においては

$$\mathrm{x}\Omega\,\pi\breve{o}(\mathrm{x},\triangle\mathrm{x})$$

となり，算号 △ は変数 x に適用されてもう一つの変数 x に後置されているから，原則 15, 16 などの諸原則に従って「もの」を意味する言葉，たとえば「thing」「one」に置き換える．そこで，$\lambda=\forall$ であり l は「を」格であると仮定して種々の原則通りに

$$\pi,\ \mathrm{l}\rightarrow\bigcirc \qquad \lambda\rightarrow\mathrm{every} \qquad \mathrm{one}\rightarrow\mathrm{one} \qquad \mathrm{f}\rightarrow\mathrm{loves} \qquad \mathrm{b}\rightarrow\mathrm{Mary}$$

という置き換えをすれば，(7.3.30) は

Everyone loves Mary

という英語文となる．また，λ だけを ∃ に替えて「$\lambda\rightarrow\mathrm{some}$」と置き換えれば，(7.3.30) は

Someone loves Mary

という英語文となる．

なお，閉全包元を「one」なる記号で表したのは，A から任意の単相格世界 W への任意の定付値 Φ に対して意味写像 Φ^* が閉全包元をブール束 $\mathrm{Val}_W\!\rightarrow\!W_\delta$ の最大元 1 にうつすからであった．つまり,「one」なる記号は数 1 に因む（第 5.5.1 項参照）．ところが英語の場合，閉全包元 one の表出である語「one」が，やはり数 1 に由来する．これは偶然の一致なのであろうか．それとも何か理由があるのであろうか．そう思って日本語の場合を振り返ってみると，閉全包元 one の表出である「ひと」が「ひとつ」と似ていることに気づく．恐らく「ひと（人）」も「ひと（一）」に由来するのであろう [13]．そうだとすると，日本語においても閉全包元 one の表出「ひと」が数 1 に由来することになる．これはちょっと不思議な現象に思われる．

[13]山中襄太著「国語語源辞典」の「ひと」の項に「ヒト（人）とヒト（一）とは同源だとは，西洋人がすでに唱えたところだが，その説には賛成である」という記述がある．そこでも「one」のことが言及されている．

7.3.5.5　「おいしいものは」

‡ ここでは $\mathrm{g} = \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ の場合の $\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x}$，すなわち

$$(\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\Omega\mathrm{x} \qquad \mathrm{f} \in \mathrm{Con}_{\{\mathrm{k}\}} \tag{7.3.31}$$

なる複体元について説明する．ただし $\mathrm{f} \in \mathrm{Con}_{\{\mathrm{k}\}}$ となるのは，この節冒頭で f が用素元で $\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x}$ が閉元の場合を考えるとしていたからである．

この複体元の表出の仕方は既出の原則から分かる．原則 15 により，(7.3.31) における x，$\breve{o}\mathrm{k}$ は空語に置き換える．従って (7.3.31) の表出は $(\mathrm{f})\Omega\mathrm{x}$ の表出と等しい．

たとえば，$\mathrm{k} = \pi$ と仮定したうえで諸原則通りに

$$\mathrm{f} \to \text{おいしい} \qquad \Omega\mathrm{x} \to {*}\text{もの}$$

なる置き換えをすれば，(7.3.31) は「おいしいもの」なる体言となる．また，

$$\mathrm{f} \to \text{きれいだ} \qquad \Omega\mathrm{x} \to {*}\text{もの}$$

なる置き換えをすれば，(7.3.31) は「きれいなもの」なる体言となる．

こういう変形・表出論が単相格言語の意味論と相まって妥当である証拠を二つ示そう．まず，

おいしいものはどれもおいしい

なる国語文を私たちは恒真であると思う．そうすると，心言語の意味論と変形論への要請により，この国語文へと表出する用元は単相格言語の意味論により恒真でなければならない．そして実際そうなっている．x は f に自由に現れないから，定理 5.5.17 系により，

$$\big((\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\,\forall\mathrm{k}\,\mathrm{f}$$

は恒真である．そして $\mathrm{k} = \pi$ と仮定した上で然るべく読み下せば，この心言語文が「おいしいものはどれもおいしい」となるのである．

私たちはまた，次の二つの国語文は真偽が一致すると思う．

これはどれもおいしい　　　　これはどれもおいしいものだ

そうすると，第 7.3.3.2 条に記した一般原理により，これらの国語文へと表出する用元 ξ, η が $\xi \asymp \eta$ をみたさなければならないが，実際にみたすことが定理 5.5.17 に証明してある．

7.3.5.6　「それの するもの・在るところ・起きるとき・するさま」

‡ ここでは $\mathrm{g} = \mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\ (\mathrm{x} \neq \mathrm{a})$ の場合の $\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x}$，すなわち

$$\big(\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\big)\,\Omega\mathrm{x} \qquad \mathrm{a} \in \mathrm{Con}_{\varepsilon} \qquad \mathrm{f} \in \mathrm{Con}_{\{\mathrm{k},\pi\}} \tag{7.3.32}$$

なる複体元について説明する．ただし $\mathrm{a} \in \mathrm{Con}_{\varepsilon}$，$\mathrm{f} \in \mathrm{Con}_{\{\mathrm{k},\pi\}}$ となるのは，この節冒頭で f が用素元で $\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x}$ が閉元の場合を考えるとしていたからである．

この複体元の表出の仕方は，既出の原則から分かる．つまり，x と $\breve{o}\mathrm{k}$ は空語に置き換え，a と f は，それぞれ名詞・代名詞と動詞・形容詞・形容動詞に置き換える．そして，$\Omega\mathrm{x}$ は「もの」を意味する語に置き換える．

そこでまず，k が動作の対象を表す格助詞「を」として表出する格（そういう格を前に「を」格と呼んだが，以後**対格**と呼ぶ）であると仮定して

$$\alpha \to \text{それ} \qquad \breve{o}\pi \to \text{が} \qquad \mathrm{f} \to \text{する} \qquad \Omega\mathrm{x} \to \text{＊もの}$$

なる置き換えをすると，(7.3.32) は次の体言となる．

それがするもの

次に，k が場所を表す格助詞「に」として表出する格（それを**場格**と呼ぶ）であると仮定して

$$\alpha \to \text{それ} \qquad \breve{o}\pi \to \text{が} \qquad \mathrm{f} \to \text{在る} \qquad \Omega\mathrm{x} \to \text{＊ところ}$$

なる置き換えをすると，(7.3.32) は次の体言となる．

それが在るところ

また，k が時を表す格助詞「に」として表出する格（それを**時格**と呼ぶ）であると仮定して

$$\alpha \to \text{それ} \qquad \breve{o}\pi \to \text{が} \qquad \mathrm{f} \to \text{起きる} \qquad \Omega\mathrm{x} \to \text{＊とき}$$

なる置き換えをすると，(7.3.32) は次の体言となる．

それが起きるとき

また，k が様子・様態を表す格助詞「に」として表出する格（それを**様格**と呼ぶ）であると仮定して

$$\alpha \to \text{それ} \qquad \breve{o}\pi \to \text{が} \qquad \mathrm{f} \to \text{する} \qquad \Omega\mathrm{x} \to \text{＊さま}$$

なる置き換えをすると，(7.3.32) は次の体言となる．

それがするさま

ここで注意すべきことは，$\Omega\mathrm{x}$ を「＊もの」だけではなく「＊ところ」「＊とき」「＊さま」にも置き換えていることである．これについて説明しよう．要点は二つある．

まず，$\Omega\mathrm{x}$ は「もの」を意味する語に置き換えるのが原則ではあるが，この「もの」は「実在一般」を総称する言葉だと考えなければならない．そして，色々な場所や色々な時や色々な様子すらも，人間にとっては実在の一種であり，こういう特別な実在を「もの」に代わって総称する言葉が「ところ」「とき」「さま（様）」であると考える．

次に，$\Omega\mathrm{x}$ を「＊もの」「＊ところ」「＊とき」「＊さま」などのどれに置き換えるかは，(7.3.32) において変数 x に施されている算法 $\breve{o}\mathrm{k}$ によって決まる．つまり $\Omega\mathrm{x}$ は，k が場格であれば場所を総称する「＊ところ」に置き換え，k が時格であれば時を総称する「＊とき」に置き換え，k が様格であれば様子を総称する「＊さま」に置き換える．算号 $\breve{o}\mathrm{k}$ そのものは空語に置き換えられて言葉として表出しないが，これが，$\Omega\mathrm{x}$ の表出の仕方を決めるという重要な役割を演ずるのである．

こういう変形・表出論が単相格言語の意味論と相まって妥当であることの証拠を一つ示そう．私たちは，たとえば次のような国語文は恒真であると思う．

それがするもの すべてを それがする

それが在るところ どこにも それが在る

それが起きるとき には いつも それが起きる

それがするよう に それがする

そうすると，心言語の意味論と変形論への要請によって，こういう国語文へと表出する用元は単相格言語の意味論によって恒真でなければならないが，実際そうなっている．なぜなら，(7.3.32) から出来る

$$\Big(\big(x\,\breve{o}k\,(a\,\breve{o}\pi\,f)\big)\,\Omega x\Big)\,\forall k\,(a\,\breve{o}\pi\,f)$$

なる用元がこれらの国語文へと表出するのであり（ただし k が様格の場合，Ωx は「＊さま（様）」ではなく「＊よう（様）」として表出し $\forall$ は空語として表出するという但し書きが必要になる），この用元は定理 5.5.17 系により確かに恒真元だからである．

なお,「それがするもの」「それが在るところ」「それが起きるとき」「それがするさま」のような表現における「が」は「の」と言い換えることがあり，標題ではそういう言い方をとっている．つまりここで，$\breve{o}\pi$ の読み下し方の原則 2 への但し書きがいま一つ必要になる．すなわち，Ωx が施された文に現れる $\breve{o}\pi$ は「の」に置き換えることができ，そう置き換えなければならない場合もある．

7.3.5.7　「それが長い」と「それの長さ」

‡ ここでは，形容詞・形容動詞の語幹に「さ」を付けて出来る「長さ」「大きさ」「静かさ」などの語が，やはり (7.3.32) なる形の複体元の表出に関わることを説明する．これは，読者の多くにとっては，前条の例に比べて意外な事実であろう．そこで，これまでのところを振り返りながら，順を追って詳しく説明しよう．

表出の原則 6 によれば，動詞・形容詞・形容動詞は用定数の表出である [14]．従ってたとえば,「長い」という形容詞として表出する用定数 g がある．この g の格域 Q とは如何なるものかをまず考えたいが，そのためにまた，第 7.3.2 項などで例として使った $a_1\,\breve{o}k_1\,(a_2\,\breve{o}k_2\,f)$ なる用元について考える．こういう用元が A に存在するためには，格 k_1, k_2 が用定数 f の格域 P に含まれていなければならない．そして，(7.3.5) に示した置き換え

$a_1 \to$ ピーター　　$\breve{o}k_1 \to$ が　　$a_2 \to$ レタス　　$\breve{o}k_2 \to$ を　　$f \to$ 食べる

をすると，$a_1\,\breve{o}k_1\,(a_2\,\breve{o}k_2\,f)$ は「ピーターがレタスを食べる」という国語文となる．ここで注意すべきことは，k_1, k_2 の表出「が」「を」がそれぞれこの文の文節「ピーターが」「レタスを」を作っていることである．つまり,「食べる」という動詞から作られる単文には,「〜が」「〜を」という文節が現れ得るが（この他にも時を表す「〜に」などの色々な文節が現れ得る），そういう文節を作る格助詞「が」「を」として表出する格 k_1, k_2 が，f の格域 P に含まれていなければならない．

用定数 g の格域 Q についても同様である．つまり,「長い」という形容詞から作られる単文にも何種類かの文節が現れ得るが，そういう文節を作る格助詞として表出する格が，Q に含まれていなければならない.「長い」という形容詞から作られる単文の典型は「これが長い」というようなものであり，この中には「これが」という文節が現れている．従って Q には，少なくとも,「が」という格助詞として表出する格が，すなわち主格 π が含まれていなければならない．

なお,「長い」という形容詞から作られる単文には「これがあれより長い」というものもあり，この中には,「これが」の他に「あれより」という文節も含まれる．従って Q には,「より」という格

[14] 原則 6 は，厳密には，用定数がすべて動詞・形容詞・形容動詞として表出すると主張するのであり，その逆に動詞・形容詞・形容動詞がすべて用定数の表出だと主張するのではない．実際，通説で形容詞とされる「ない」は，使われ方よって は，用定数の表出とは考えられない．しかし,「長い」のような普通の形容詞は用定数の表出だと考えられる．

助詞として表出する格も含まれると考えるのが当然のようにも思われる．しかし実は，そう考えるのは妥当ではない．この「より」は通説では格助詞とされる．そして，原則 5 によれば格はすべて格助詞として表出する．しかしこの原則は，逆に格助詞がすべて格の表出だとは主張しない．そして実際,「あれより長い」における「より」は格の表出だとは思われない．と言うよりは，この用法の「より」を格助詞とする通説が妥当とは思われない．それがなぜかは，いずれ説明しよう．取り敢えずは，この「より」に相当する英単語の「than」が英文法では前置詞ではなく接続詞とされることを思い浮かべて，何となく納得されたい．ただしもちろん，英語でそうだから日本語でもそうだと言うのではない．あくまでも，日本人の心言語の意味論は如何なるものかという観点からそう考えられるのであり，英文法はこの考えの傍証に過ぎない．

さてそういうわけで，g の格域 Q には，少なくとも主格 π が含まれる．そして，言語の表面を観察する限りでは，他の格が含まれるとは思われない．しかし，形容詞・形容動詞を使う話者の心の中を覗き見れば，Q は π のほかに言葉としては表出しない格 k をもう一つ含み，$\mathrm{Q} = \{\pi, \mathrm{k}\}$ となっていると考えざるを得ないのである．

そのわけを説明しよう．まず，形容詞・形容動詞はもの事の性質・状態を表す語であり，もの事の性質・状態には様々な程度がある（「正しい」の如くに，様々な程度のあることがはっきり認められない性質・状態もある）．形容詞・形容動詞は，そういう様々な程度を表すはずのものである．たとえば,「指が長い」と「腕が長い」における「長い」は，それぞれ別々の程度を暗に表すはずである．もう少し正確に言えば,「指が長い」と言うと時と「腕が長い」と言う時とでは，話者の思い浮かべている長さの程度が当然違うはずである．違う程度を思い浮かべてはいても，その違いが言葉の表面には現れずに,「長い」という同じ言葉となるのである．つまり,「A が長い」と言う時には，話者の心の中には「B の程度に A が長い」という観念があるが（条末の補足参照），この観念の「B の程度に」という部分は言葉となっては現れない．さらに正確に言えば，第 7.1 節で定義した通り，いま観念と呼んだものは心言語の元である．つまり，B に相当する心言語の単体定数 b と「の程度に」に相当する心言語の格 k （これを**度格**と呼ぶ）がある．そして，A に相当する心言語の単体定数 a と $\mathrm{b}, \pi, \mathrm{k}, \mathrm{g}$ とから作られる $\mathrm{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{g})$ なる用元が心言語にある（従って当然，g の格域 Q には度格 k が含まれる）．この用元が「B の程度に A が長いという観念」の実態である．そして，この用元が「A が長い」という言葉となって表出する．つまり

$\mathrm{b} \to$ ○	$\mathrm{a} \to \mathrm{A}$	$\mathrm{g} \to$ 長い
$\breve{o}\mathrm{k} \to$ ○	$\breve{o}\pi \to$ が	

なる置き換えが起きている．これが「A が長い」についての私の考えである．

さてそうすると，任意の単体変数 x に対して，$\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{g})$ は文であるから

$$\big(\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{g})\big)\Omega\mathrm{x}$$

なる複体元が存在する．そしてこれが，次の置き換えの結果「A の長さ」として表出する．

$\mathrm{x} \to$ ○	$\mathrm{a} \to \mathrm{A}$	$\mathrm{g} \to$ 長い
$\breve{o}\mathrm{k} \to$ ○	$\breve{o}\pi \to$ の	$\Omega\mathrm{x} \to$ ＊さ

ただし，$\mathrm{x}, \breve{o}\mathrm{k}$ が○に置き換わるのは原則 15 により，$\breve{o}\pi$ が「が」ではなく「の」に置き換わるのは前条末尾の但し書きによる．また,「＊さ」における記号「＊」の意味は第 7.3.3.1 条と同様であり，形容詞・形容動詞に「＊さ」をつなげたときに形容詞・形容動詞の活用語尾を消滅させるという作用を表す．たとえば,「長い＊さ＝長さ」「静かだ＊さ＝静かさ」である．

これが,「A が長い」についての先ほどの考えから導かれる「A の長さ」についての私の考えである．つまり，前条で考えた例 $\big(\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\big)\,\Omega\mathrm{x}$ において k が場格・時格・様格のいずれであるかに応じて Ωx が「＊ところ」「＊とき」「＊さま」として表出したと同様に，今の例においては，k が度格であるのに応じて Ωx が「＊さ」として表出する．Ωx は「もの」を意味する語として表出するのが原則であるが，前条で注意したとおり，この「もの」は「実在一般」を総称する言葉である．そして，もの事の程度も実在の一種であり，こういう特別な実在を「もの」に代わって総称する言葉が「さ」なのである．あるいは,「さ」は「さま」の特別の場合だと考えるべきかもしれない．つまり,「A の長いさま」が「A の長さ」であると考えるのである．この考えでは，度格は様格と同じものだということになる．

こういう変形・表出論が妥当であるという証拠としては，前条に示した証拠とまったく同様のものがあげられる．つまり，

A の長さ の程度に A は長い

は恒真の国語文であるが，これは

$$\Big(\big(\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{g})\big)\Omega\mathrm{x}\Big)\,\forall\mathrm{k}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{g})$$

なる恒真の心言語文の表出なのである．

いま説明したように，形容詞や形容動詞として表出する心言語の用定数の格域は度格あるいは様格を含むと考えられる．実はさらに一般に，すべての用定数の格域は度格あるいは様格を含むと考えられる．従って，このことを無視して行なってきたこれまでの説明は少し修正する必要があるし，これからも度格・様格を考慮に入れた説明をすべきところである．しかし，度格・様格に本質的に関わらない説明のところでも一々それらを考慮に入れるのは，煩わしいことでもあるし，読者に本質を見失わせることにもなり兼ねない．そこで以後，度格・様格のことは，それらが本質的に関わるところ以外では無視することにする．

補足：「B の程度に A が長い」という観念の意味は,「I weigh 100 pounds」という英文になぞらえてみると理解しやすいかもしれない.「A weigh B」を日本語らしく訳せば,「A の重さは B である」となってもとの英文とは型が違ってしまう.「weigh」に当たる動詞が国語にないからである．実際，類似の文型の「A eat B」は [15],「eat」に当たる「食べる」という動詞があるから，日本語らしく訳しても「A が B を食べる」となって，語順や格助詞の有無という日英間に常在する違いを除けば，もとの英文の型を保つ．そこで,「weigh」に当たる動詞「重る」を新造し（「重る」という語は国語辞典に実在するが，それとは別物と考える）,「A eat B」を「A が B を食べる」と訳すと同様に,「A weigh B」を「A が B を重る」と訳してみる．これの語順を変えれば「B を A が重る」となる.「B の程度に A が長い」という観念は，この「B を A が重る」と同じ種類のものだと理解すればいい．つまり,「B の程度に」は「B を」に相当し,「A が長い」は「A が重る」に相当する．

7.3.6　体言から作られる複雑な体言と連体修飾語

§ ここでは，体元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に算法 ⊓, ⊔, □ を施して得られる

$$\mathfrak{a} \sqcap \mathfrak{b} \qquad\qquad \mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b} \qquad\qquad \mathfrak{a}^{\square}$$

なる形の複体元を題材にして説明する．また，これらと連体修飾語との関連についても述べる．

[15]英文法の定説では,「A weigh B」は「主語＋自動詞＋補語」であるのに対し,「A eat B」は「主語＋他動詞＋目的語」であって，同じ文型とされないであろう．しかし，英和辞典の「weigh」の項にある「How much do you〜?」「I〜 100 pounds」「She〜s more than I do」「She doesn't 〜 much」などの例文の「〜」のところには「eat」を入れてもおかしくないから,「A weigh B」は「A eat B」に酷似している．

7.3.6.1　「雌のネズミ」と「雌であるネズミ」

‡ ここでは $a \sqcap b$ なる複体元の読み下し方を説明するが，それは a がどういう体元かに依存する．すなわちまず，a が $g\,\Omega x$ なる複体元である場合の $a \sqcap b$ の読み下し方は，次の原則に従う．

原則 17 **$(g\,\Omega x) \sqcap b$ における $\Omega x) \sqcap$ は空語に置き換える．**

ただし Ωx は，空語に置き換わっても，原則 16 によって直前の活用語を連体形に変えるという作用を失わないものとする．

たとえば，単体定数 a, b から作られる

$$\big((x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\,\Omega x\big) \sqcap b$$

なる複体元に，原則 17 やその他の原則に従って

$x \to$ 〇	$a \to$ お百姓	$b \to$ マグレガーさん
$\breve{o}\pi \to$ 〇	$\triangle \to$ である	$\Omega x,\ \sqcap \to$ 〇

なる置き換えをすれば,「お百姓であるマグレガーさん」なる国語文が得られる．

次に，a が $g\,\Omega x$ なる複体元以外の体元である場合の $a \sqcap b$ の読み下し方は，次の原則に従う．

原則 18 **算号 $\sqcap$ は「の」に置き換える．**

たとえば，a, b が共に単体定数であり，それぞれが原則 1 に従って「お百姓」「マグレガーさん」と表出すれば，複体元 $a \sqcap b$ は「お百姓のマグレガーさん」として表出する．つまり原則 18 における「の」は,「である」と言い換えられる「の」のことを指している．たとえば「お百姓のマグレガーさん」は,「お百姓であるマグレガーさん」と言い換えられる．また，標題の「雌のネズミ」は「雌であるネズミ」のことであった．

なお，こういう「の」を同格を表すものと説く文法論があるが,「同格」という語は妥当ではない．マグレガーさんはお百姓であっても，お百姓すべてがマグレガーさんではないからである．また，こういう「の」を連体助詞でなく指定の助動詞「だ」の連体形であると説く文法論があるが，これも，原則 18 を設けた観点から見ると妥当ではない．

さて，いま例として使った複体元 $a \sqcap b$ と $(x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\,\Omega x \sqcap b$ はそれぞれ，意味の等しい体言「お百姓のマグレガーさん」と「お百姓であるマグレガーさん」として表出するのであるから，第 7.3.5.1 条に記した一般原理により，これらの複体元の範囲は等しくなければならない．つまり，

$$a \sqcap b \simeq (x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\,\Omega x \sqcap b$$

が成り立たなければならない．そして，これが実際に成り立つことは，定理 5.5.17 系 3 に証明してある．これも，単相格論理学や単相格言語のここまでの変形論が妥当であることの証拠である．

なお，いま使った系と定理 5.5.6 によれば，a, b が単体定数であるとき

$$a \sqcap b \simeq b \sqcap a \simeq (x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\,\Omega x \sqcap b \simeq b \sqcap (x\,\breve{o}\pi\,a\triangle)\,\Omega x \tag{7.3.33}$$

が成り立つ．そして，これまでに示した表出の原則によれば，a, b それぞれが「お百姓」「マグレガーさん」と表出するとき，(7.3.33) における四つの複体元は「お百姓のマグレガーさん」「マグレガーさんのお百姓」「お百姓であるマグレガーさん」「マグレガーさんのお百姓であるひと」などと表出する．しかし私たちは，この四番目のような言い方は普通はしない．二番目の言い方もご

く限られた場面でしかしない（子供のけんかで「〜ちゃんのばか」と言うのもこれに当たる）.「の」を「なる」「という」に替えて「マグレガーさんなるお百姓」「マグレガーさんというお百姓」のように言うのが普通である．また別の例では,「妹のメアリ」における「メアリ」と「妹」の順番を入れ替えると,「メアリの妹」となって，もとの「妹のメアリ」と同じ意味にはどうしてもとれない．同じ意味にしようとすれば，やはり「メアリなる妹」「メアリという妹」のようにしなければならない．しかし標題の「雌のネズミ」では,「雌」と「ネズミ」をただ入れ替えるのは差し支えないが，入れ替えたうえに「ネズミである雌」「ネズミなる雌」「ネズミという雌」と言えば変になる．つまり，いわゆる同格を表す「A の B」やこれに類似の言い方には何らかの制限のあることが分かる．

ここで第 7.3.1.2 条で説明したことを思い出そう．そこでは，たとえば $\mathrm{a}\,\breve{o}\pi(\mathrm{b}\triangle)$ なる単独の心言語文が国語へどう表出するかを問うことはできないことを説明した．これの表出は，状況を表す心言語の用元の如何によるのであり，たとえば $\triangle$ は，状況に応じて「だ」「です」「である」などのどれかとして表出する．

いまの場合も同様であって，(7.3.33) における四つの複体元は，状況を表す用元に応じて色々に表出すると考えなければならない．特に $\sqcap$ は,「の」や空語だけでなく，状況に応じて「なる」「という」などの語としても表出すると考えなければならない．それでは，どういう状況にどういう表出が対応するのか．たとえば,「A の B」「A である B」「A なる B」「A という B」なる言い方は，A と B がどういう関係にあるときに変で，どういう関係にあるときに変でないのか．私は一応の答を持ってはいるが，答を示すのは，国語学の課題なので今はさて措く．

7.3.6.2　「小さい兎」と「森に住む家族」

‡ ここでは，標題のような体言がやはり，文 g と単体定数 b とから作られる $(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\sqcap\mathrm{b}$ なる複体元の表出であることを説明する．

まず，$\mathrm{g}=\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f}$ なる場合の $(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\sqcap\mathrm{b}$ すなわち $\big((\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\,\Omega\mathrm{x}\big)\sqcap\mathrm{b}$ を考える．f は $\{\pi\}$ を格域とする用定数である．この複体元は，諸原則通りに

$$\mathrm{f}\to\text{小さい}\qquad\qquad \mathrm{b}\to\text{兎}\qquad\qquad \mathrm{x},\ \breve{o}\pi,\ \Omega\mathrm{x},\ \sqcap\to\bigcirc$$

と置き換えれば,「小さい兎」となる．なお，第 7.3.5.7 条で説明した次第により，用定数 f の格域は度格あるいは様格を含むはずであるが，いまは説明の便宜上それを無視している．

次に，$\mathrm{g}=\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{c}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})$ なる場合の $(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\sqcap\mathrm{b}$ すなわち，次の複体元を考える．

$$\Big(\big(\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{c}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})\big)\,\Omega\mathrm{x}\Big)\sqcap\mathrm{b}$$

f は $\{\pi,\mathrm{k}\}$ を格域とする用定数であり，c は単体定数である．この複体元は，諸原則通りに

$$\mathrm{c}\to\text{森}\qquad \breve{o}\mathrm{k}\to\text{に}\qquad \mathrm{f}\to\text{住む}\qquad \mathrm{b}\to\text{家族}\qquad \mathrm{x},\ \breve{o}\pi,\ \Omega\mathrm{x},\ \sqcap\to\bigcirc$$

と置き換えれば,「森に住む家族」となる．

以上の例を一般化して言えば，$(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\sqcap\mathrm{b}$ なる複体元における $(\mathrm{g}\,\Omega\mathrm{x})\sqcap$ は，**連体修飾語**として変形・表出する．

こういう論が妥当であるという証拠もいままでと同様にして得られる．たとえば，国語文

小さい兎はみんな小さい　　　　小さい兎はみんな兎である

はどちらも恒真であるから，心言語の意味論と変形論への要請により，これらへと表出する心言語文

$$\Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)\sqcap b\Big)\,\forall\pi\,f \qquad\qquad \Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)\sqcap b\Big)\,\forall\pi\,(b\triangle)$$

が単相格言語の意味論で恒真でなければならないが，実際に恒真であることが証明できる．

左側の文が恒真であることだけ示そう（右側については読者に任せる）．$a=(x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x$ と定めれば，まず定理 5.5.6 により $a\sqcap b\lesssim a$ が成り立ち，従って補題 5.5.2 により

$$\preccurlyeq (a\sqcap b)\,\forall\pi\,(a\triangle)$$

が成り立つ．他方，定理 5.5.17 系により

$$\preccurlyeq a\,\forall\pi\,f$$

が成り立ち，また，定理 5.5.10 により

$$(a\sqcap b)\,\forall\pi\,a\triangle,\ a\,\forall\pi\,f\preccurlyeq (a\sqcap b)\,\forall\pi\,f$$

が成り立つ．これら三式に強消去律を使えば，$\preccurlyeq (a\sqcap b)\,\forall\pi\,f$ つまり $\preccurlyeq \Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)\sqcap b\Big)\,\forall\pi\,f$ なることが分かる．

7.3.6.3　「小さい腕白な兎」と「小さくて腕白な兎」

‡ 私たちはまた，標題の二つの体言は同じ意味だと思う．そうすると，第 7.3.5.1 条に記した一般原理により，これらへと表出する心言語の複体元は範囲が同じでなくてはならないが，実際にそうなっている．なぜならまず，これらの体言はそれぞれ

$$\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)\sqcap\Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,g)\,\Omega x\big)\sqcap b\Big) \qquad\qquad \Big(\big(x\,\breve{o}\pi\,(f\wedge g)\big)\,\Omega x\Big)\sqcap b$$

なる複体元に諸原則通りに

$$f\to\text{小さい}\qquad g\to\text{腕白な}\qquad b\to\text{兎}\qquad \wedge\to\text{＊て}$$

という置き換えをして得られる．ただし，明示した以外の記号は空語に置き換える．また，g が「腕白な」に置き換わるのは，その直後の Ωx が，自身は空語に置き換わっても，原則 16 によって直前の活用語を連体形に変えるという作用を失わないからである．同じ理由で「小さい」も連体形である．また，$\wedge$ の置き換えの「＊て」の意味は，第 7.3.3.1 条で説明してある．

さて，これらの複体元の範囲が等しいことは次の推論で示される．

$$\begin{aligned}\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)\sqcap\Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,g)\,\Omega x\big)\sqcap b\Big) &\simeq \Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)\sqcap\big((x\,\breve{o}\pi\,g)\,\Omega x\big)\Big)\sqcap b\\ &\simeq \Big(\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\wedge(x\,\breve{o}\pi\,g)\big)\,\Omega x\Big)\sqcap b\\ &\simeq \Big(\big(x\,\breve{o}\pi\,(f\wedge g)\big)\,\Omega x\Big)\sqcap b\end{aligned}$$

ただし，一番目の $\simeq$ が成り立つのは定理 5.5.6 により，二番目の $\simeq$ が成り立つのはこの定理と問題 5.5.9 により，三番目の $\simeq$ が成り立つのは，やはりこの定理と例 5.2.1，補題 5.5.3 による．

「小さい腕白な兎」と「小さくて腕白な兎」は，意味が同じであり，言葉の表面上の違いも僅かである．しかし，その表出もとの心言語における違いは僅かではない．その違いや表出の意味が同じになる理由を今はっきりと分析できたのは，やはり，単相格論理学や単相格言語のこれまでの変形論が妥当であるという証拠の一つである．

問題 7.3.11　「小さな兎」「大きな猫」におけるような連体詞「小さな」「大きな」は心言語のどういう元の表出と考えるべきか.

7.3.6.4　「ピーター以外は森へ行く」

‡ ここでは $a^{\square}$ なる複体元の読み下し方の原則を説明する．ただし，体元 a の読み下し方は分かっているものとする．そうすると，算号 □ の読み下し方の原則を示せばいいが，それは次のように述べられる.

原則 19 算号 □ は「以外（のもの）」を意味する言葉に置き換える．

たとえば，単体定数 a, b と用定数 f とから作られる $(a^{\square})\,\breve{o}\pi\,(b\,\breve{o}k\,f)$ なる用元は，原則通りに a, b, f をそれぞれ「ピーター」「森」「行く」に置き換え他は適当に置き換えれば,「ピーター以外は森へ行く」という国語文となる.

こういう変形・表出論が妥当であるという証拠も，いままでと同様にして得られる．たとえば,「それはあれ以外のものだ」と「それはあれでない」という二つの国語文は真偽が一致すると私たちに感ぜられる．そうすると，これらへと表出する心言語文 $b\,\breve{o}\pi\big((a^{\square})\triangle\big)$ と $\big(b\,\breve{o}\pi(a\triangle)\big)^{\Diamond}$ の真偽は一致する，すなわち

$$b\,\breve{o}\pi\big((a^{\square})\triangle\big) \asymp \big(b\,\breve{o}\pi(a\triangle)\big)^{\Diamond}$$

が成り立たなくてはならないが，実際にそうであることが確かに証明できる．またたとえば,「小さいもの以外」と「小さくないもの」とは同じ意味だと感ぜられる．そうすると，これらへと表出する体元 $\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)^{\square}$ と $\big(x\,\breve{o}\pi\,(f^{\Diamond})\big)\,\Omega x$ とは範囲が一致する，すなわち

$$\big((x\,\breve{o}\pi\,f)\,\Omega x\big)^{\square} \simeq \big(x\,\breve{o}\pi\,(f^{\Diamond})\big)\,\Omega x$$

が成り立たなくてはならないが，実際にそうであることも確かに証明できるのである.

問題 7.3.12 これらの証明を実行せよ.

7.3.6.5　表出の逐次的原則

‡ 前条で $a^{\square}$ なる複体元の読み下し方の原則を説明するときに，a の読み下し方は分かっているものとしたので，□ の読み下し方だけを説明した．つまりそこでは，$a^{\square}$ の読み下し方は a の読み下し方と □ の読み下し方とから決まることを暗黙のうちに仮定していたのである．これまでに示した読み下し方の原則は，実は，皆そういう仮定に基づいている.

たとえば第 7.3.1.1 条において，$a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ なる心言語文の読み下し方を四つの原則 1, 2, 3, 4 に分けて示し，その後で，これらの原則は $a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ 以外の A の元に現れる単体定数と算号 $\breve{o}\pi, \triangle$ と括弧にも適用するし，その他の原則についても同様であると述べた（これには例外があるが，それは差し置く）．従って，$a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ の読み下し方は次のように決まると言うこともできる．つまり，まず原則 1 と原則 3 との定める b と $\triangle$ との読み下し方により $b\triangle$ の読み下し方が決まる．次に，原則 1 と原則 2 および原則 4 の定める a と $\breve{o}\pi$ および括弧の読み下し方，ならびに先に決まった $b\triangle$ の読み下し方により，$a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)$ の読み下し方が決まる.

もっと複雑な元の読み下し方についても同様である．たとえば $\big(a\,\breve{o}\pi\,(b\triangle)\big)\wedge(b\,\breve{o}k\,f)$ なる用元の読み下し方は次のように決まると言うこともできる．つまり，まず原則 1, 5, 6 の定める $b, \breve{o}k, f$

の読み下し方により，$\mathfrak{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ の読み下し方が決まる．次に，原則 7 の定める $\wedge$ の読み下し方および先に決まった $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle)$ と $\mathfrak{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f}$ の読み下し方により，$\big(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle)\big)\wedge(\mathfrak{b}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\mathrm{f})$ の読み下し方が決まる．ただし，括弧のことはここでは無視したし，これからも無視する．

より正確に言えば，これらの例に現れた二項算号 $\breve{o}\pi, \breve{o}\mathrm{k}, \wedge$ を λ で表すとき，λ を A の元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に施して得られる元 $\mathfrak{a}\lambda\mathfrak{b}$ の読み下し方は，$\lambda, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ それぞれの読み下し方により次のように決まる．つまり，$\lambda, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ それぞれを L, A, B なる言葉に置き換えるとき，$\mathfrak{a}\lambda\mathfrak{b}$ は A, L, B をつなげた言葉 ALB に置き換える．単項算号 $\triangle$ についても同様である．このことを,「$\lambda, \triangle$ の読み下し方は**逐次的**である」と言い表す.

A の算号すべての読み下し方が逐次的であるなら，A の元の読み下し方を示すには，次の二つの手順で十分である．すなわち,

手順 1. A の素元の読み下し方を示す.

手順 2. A の算号の読み下し方を示す.

この手順を行なえば，A の任意の元の読み下し方が，階数についての帰納法により定まる（定理 3.8.7 系がそのことを示す）．そして，この節冒頭で素元は単体定数か用定数か変数のいずれかであると仮定したので，素元の読み下し方は，原則 1, 6, 15 とで実際に示してある．また，$\sqcup$ 以外の算号の読み下し方も示してある.

これまでの説明に出て来た算号の読み下し方はほとんど逐次的である.「ほとんど」と修飾したのは，原則 15 の中の「変数に施された算号は空語に置き換える」や「$(\mathfrak{g}\,\Omega\mathrm{x})\sqcap\mathfrak{b}$ における $\Omega\mathrm{x})\sqcap$ は空語に置き換える」という原則 17 などは例外だからである．しかしこれらの例外は，原則の逐次性の本質的な例外とは言えないであろう．ところが，逐次性の本質的な例外が一つ存在する．それについては次条で説明しよう.

7.3.6.6　総称と表出の選択的原則・辞書的原則

‡ 複体元 $\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ の読み下し方の逐次的原則は存在しない.

仮に，そういう原則が存在したとしよう．そうすると，まず算号 $\sqcup$ の表出である何らかの語が存在する．それを？で表す（？は空語かもしれない）．そして，体元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ がこれまでに説明した原則に従ってそれぞれ A, B という体言として表出するとすれば，$\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ は「A？B」なる言葉として表出するはずである．しかし日本語には，そういう語？は存在しない．ともすれば安易に，並立や選択を表す「と」「か」などの連体助詞 [16] や「および」「ならびに」「または」「あるいは」などの語が？に当たると考え勝ちである．しかし，そういう考えも妥当ではない．なぜなら,

$$(\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b})\,\forall\pi\,\big((\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b})\triangle\big) \tag{7.3.34}$$

は簡単な恒真元であるから，第 1.5.2.4 条に記した心言語の変形論への第二要請に照らせば，これの表出である国語文「A？B はみな A？B である」は，私たちにとって恒真と感ぜられて然るべきと考えられる．しかし，こういう条件をみたす語？は存在しない．分かりやすくするために A, B をそれぞれ「男」「女」とし，？は並列や選択を表す「と」「か」などの語としてみる．そうすると，恒真と感ぜられるどころか，奇妙な国語文が出来てしまう．たとえば？を「と」「か」とすれば,「男と女はみな男と女である」「男か女はみな男か女である」という国語文が出来るが，どちらも奇妙である.「と」「か」以外の並立や選択を表す語についても同様である．？を空語とするのも妥当で

[16] 意味をとって**並立助詞**とも呼ぶ．端書き参照.

はない．こういう理由で，複体元 $\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ の読み下し方の逐次的原則は存在しないと考えざるを得ないのである．

そこで，$\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ が C なる語として表出するとしたら C はどういう性質を持つべきかを考える．記号を簡単にするために $\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{c}$ で表すと，$\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}\simeq\mathfrak{c}$ なることから，

$$\mathfrak{a}\,\forall\pi\,(\mathfrak{c}\triangle) \qquad\qquad \mathfrak{b}\,\forall\pi\,(\mathfrak{c}\triangle)$$
$$\big(\mathfrak{d}\,\breve{o}\pi\,(\mathfrak{c}\triangle)\big)\Rightarrow\Big(\big(\mathfrak{d}\,\breve{o}\pi\,(\mathfrak{a}\triangle)\big)\vee\big(\mathfrak{d}\,\breve{o}\pi\,(\mathfrak{b}\triangle)\big)\Big)$$

なる心言語文が恒真であることが分かる ($\mathfrak{d}\in\mathrm{Con}_{\varepsilon}$)．そうすると，心言語の変形論への第二要請に照らして，これらの心言語文の表出先である国語文

A はみな C である　　　　B はみな C である
D が C である なら D は A である かまたは D は B である　(7.3.35)

を私たちは D によらず真と感じなければならないであろう．D は名詞または代名詞である．分かりやすくするために再び A, B をそれぞれ「男」「女」としてみると，これらの国語文は

男はみな C である　　　　女はみな C である
D が C である なら D は男である かまたは D は女である

となる．そして，この三つの国語文を D によらず真とする言葉 C が確かに存在する．すなわち，男と女とを引っくるめて呼ぶための言葉「人」「人間」などがそれである．

そこで一般に，体言 A と B とに対して，名詞 C であって (7.3.35) の三つの国語文を D によらず真とするものが存在するとき，C を A と B との**総称**と呼ぶ [17]．従って,「人」は「男」と「女」との総称である．総称は単独の名詞であるから，A と B によっては総称が存在しないこともある．たとえば,「人」と「犬」との総称は存在しない.「人と犬とを引っくるめたもの」の類の体言は「人」と「犬」との総称とはみなさない．(7.3.35) において A, B, C をそれぞれ「人」「犬」「人と犬とを引っくるめたもの」とすれば奇妙なものになるからである．

以上の背景と「総称」の定義に基づいて，複体元 $\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ の読み下し方（＝国語への表出の仕方）の原則を述べる．原則は二つあり，どちらでも可能な方を適用していい（標題の「選択的」はこのことを指す）．ただし，二番目の原則はどういう $\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ にも適用できるが，一番目の原則は $(\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b})\triangle$ における $\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ （これを **$\triangle$ に支配された** $\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ と呼び，これに現れる $\sqcup$ を **$\triangle$ に支配された** $\sqcup$ と呼ぶ）にだけ適用できる．また，一番目の原則は逐次的であり，従って $\sqcup$ の読み下し方だけを記述する．また，一番目の原則には例外規定の原則 26 がある．

原則 20　$\triangle$ に支配された $\sqcup$ は「か」「または」「あるいは」などの選択を表す語に置き換える．

原則 21　これまでに示した読み下し方の原則に従って体元 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ をそれぞれ体言 A, B に置き換えるとき，$\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b}$ は A と B との総称に置き換える．

ただし,「これまでに示した」読み下し方の原則の中には，この原則自身も含める．

つまり原則 21 の場合，思考機械・人間の発声器官には，体言 A, B とその総称 C との対照表すなわち「総称語辞書」が用意されていると考える（標題の「辞書的」はこのことを指す）．あるいは，そういう辞書まで含めたものを発声器官と考える．そして，諸原則に従ってまず $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ が体言

[17] 三つ以上の体言の「総称」も同様に定義できる．たとえば，相撲の「三役」は「大関」「関脇」「小結」の総称である．

A, B に置き換えられ，次いで総称語辞書上で A, B に対応する語 C が捜されて，$\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}$ は C に置き換えられる．そういう仕組みになっていると考えるのである．

心言語文 (7.3.34) を例にとって説明しよう．ただし，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ は単体定数であるとし，それぞれを原則 1 に従って「男」「女」に置き換えるとする．そうすると，(7.3.34) に現れる二つの $\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}$ のうち一番目のものは，△ に支配されていないから原則 21 のみが適用可能で，従って「人」「人間」などに置き換えることになる．二番目の $\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}$ には原則 20, 21 のどちらも適用可能で，従って「人」「人間」「男か女」「男または女」などに置き換えることになる．従って (7.3.34) は

人はみな人である　　　　人はみな男か女である

などの国語文として読み下すことになる．

そうすると,「男と女はみな人である」「好物は野菜と果物だ」などはどういう心言語文の表出なのか．こういう疑問を読者は懐くだろう．これについては第 7.3.8.2 条と第 7.3.9 項で説明しよう．

原則 21 によれば，体言 A, B の総称が無い場合には，△ に支配される以外の $\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}$ は言葉としては表出しない．従って特に，$\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}$ なる概念 [18] を単独で伝達することはできない（「A と B とを引っくるめたもの」などの言葉で不完全に伝達することはできる）．それは心伝達上の困った事態のはずであるが，日本語は兎に角そうなっているのである．

なお，総称のように見えて実は総称でない言葉がある．たとえば,「夫婦」という言葉は「夫」と「妻」との総称ではない．実際，(7.3.35) における A, B, C をそれぞれ「夫」「妻」「夫婦」とすれば,「夫はみな夫婦である」「妻はみな夫婦である」等の国語文が出来るが，これらはみな奇妙な表現である．奇妙でなくすためには,「夫は夫婦の一方である」「妻は夫婦の片方である」などとしなければならない．このことから分かるように,「夫婦」は「夫」と「妻」との総称ではなく,「夫」と「妻」の組みあるいは対（つい）を呼ぶ語である．そういう語を**組称**（そしょう）と呼ぶ（「対称（ついしょう)」と呼んでもいいが「対称（たいしょう)」と紛らわしい）.「夫婦」が「夫」と「婦（＝妻)」を並べて作られたように，A と B の組称は A と B を並べて作られることが多い．しかし，たとえば「年月」という言葉は，組称でもなく総称でもなく，何年何ヶ月の程度の「期間」を指すだろう．また「天地」は,「天」と「地」を両極端とする「世界」を指すだろう．こういう例から窺えるように，総称に類似の語の意味は多岐に亘る．しかしそれについて調べるのは，国語学の課題なので今はさて措く．

問題 7.3.13 次の語が総称であるかどうかを考えよ：収支・真偽・父母・親子・生物・苦楽・神仏．

7.3.6.7　「か」「または」「あるいは」に排他性はない

‡ 原則 20 によれば，$\mathfrak{c}\,\breve{o}\pi\big((\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b})\triangle\big)$ なる心言語文は「C は A か B だ」のような国語文として表出する．そこで問題となるのが,「か」に代表される選択を表す語の排他性である．第 7.3.3.1 条で示した算号 ∨ の読み下し方の原則 8 についても同様の問題が起きる．

国語辞典の「か」の項は,「A か B」と言うときの A, B は意味的に両立しないものだと説明する．たとえば「男か女」は，男であってかつ女である者は存在しないことを含意する．また「君が来るかぼくが行く」は,「君が来るならぼくは行かず，ぼくが行くなら君は来ない」ことを含意する．これらの例のように,「A か B」と言うときには一般に，A であってかつ B であることはないことが含意されるという趣旨の説明であろう．こういう「か」の意味的性質を仮に**排他性**と呼ぶ．また，A であってかつ B であることが実際にないとき，A と B は**排他的**であると言う．

[18] この「概念」は第 7.1 節で定義したものを指す．

「か」にそういう排他性があるとすれば,「C は A か B だ」は「C は B でないかまたは C は A でない」を含意することになる．従って，心言語の意味論と変形論への要請によれば,

$$\Big(\mathfrak{c}\,\breve{o}\pi\big((\mathfrak{a}\sqcup\mathfrak{b})\triangle\big)\Big)\Rightarrow\Big(\big(\mathfrak{c}\,\breve{o}\pi(\mathfrak{b}\triangle)\big)^{\Diamond}\Big)\vee\Big(\big(\mathfrak{c}\,\breve{o}\pi(\mathfrak{a}\triangle)\big)^{\Diamond}\Big) \tag{7.3.36}$$

なる心言語文が単相格言語の意味論によって恒真元でなければならない（$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ は A, B, C の表出もとの体元である）．しかし実際は恒真元ではない．これは単相格論理学の欠陥ではないか，単相格世界の算法 $\sqcup, \vee$ の定義が悪かったのではないかと疑われて，事は一見重大に見える．

しかし，これは単相格論理学の欠陥ではない．数理心理学の観点からは,「か」には排他性がないと考える方がむしろ妥当なのである（さっき「仮に」としたのはこのためである）.

その理由を説明しよう．まず，私たちが「A か B」と言うときには，A, B が排他的であるという意味を常に含めているのではない．また，聞き手も A, B が排他的であると常に理解するのではない．たとえば,「12 で割って 5 余る整数か 8 で割って 1 余る整数」のような表現は数学においては珍しくもないが,「12 で割って 5 余る整数」と「8 で割って 1 余る整数」とは排他的ではない．またたとえば,「アメリカ人か黒人」における「アメリカ人」と「黒人」は排他的ではない.

これは数学の世界の特殊な例や人工的で不自然な例であって日常言語とは違う，日常生活では数学者のように考えないし「アメリカ人か黒人か」などとも考えない，という反論は当然あろう．しかしこの反論こそが,「か」に排他性がないと考えるのが妥当であることを示している．日常生活では，排他的でない A と B を並べて「A か B か」と考える必要がない．排他的な A と B について「A か B か」と考えるだけで済んでいる．数学的に言い換えれば，日常生活で「A か B か」と考えるときには，私たちはもっぱら，(7.3.36) が $\mathfrak{c}$ によらずに真であるような概念の組み $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ だけを操作している[19]．要するに，日常生活では考える範囲が狭く，狭い範囲では「か」が排他性を持つように見える．これが「か」を巡る日常言語の実態であろう.

そういう日常の言語使用の実態を理論化したいのであれば,「か」には排他性があると考えるのが妥当かもしれない．しかし，**数理心理学の目標はそういうことではない**．数理心理学の第一の目標は，人間を思考機械とみなしその構造と潜在能力とを問うことにある．そして私たち思考機械は，思考の範囲を身の回りの事からちょっと広げれば，排他的でない A, B について「A か B」と考えることができる．そう考える潜在能力を持っている．単相格言語と単相格世界の算法 $\sqcup, \vee$ は，そういう思考機械の構造や潜在能力を記述するためのものなのである.

こういう数理心理学の目標や考え方からすれば，$\sqcup, \vee$ の定義は妥当なものである．従ってまた，それらの表出である「か」「または」「あるいは」などには排他性が本来はなく，狭い日常生活においてのみ排他性を持つのだと考えなければならないのである.

7.3.7　逐次的・辞書的な表出の原則のまとめ

§ これまでに示した心言語の元の表出（＝読み下し）の原則を表 7.1 にまとめておこう．ただし，この表はあくまでも要約に過ぎないので，この表だけを見て短絡的に読み下しては，おかしなことになる．第 7.3.1.2 条で説明したように，表出は状況依存的であり，しかもその状況依存の仕組みは，一定普遍の原則としては述べられないのである.

第 7.3.6.5 条で説明したと同様に，心言語 A の任意の元 d の読み下し方は，これらの原則と d の階数についての帰納法により決定される．つまり，まず d が素元のときには，この節冒頭で素元はこの表の三種であると仮定しているので，原則 1, 15, 6 により d の読み下し方が決まる．次に，d

[19] ここでの「概念」は第 7.1 節で定義したものを指す.

表 7.1: 単相格言語の素元・算号・括り記号の逐次的・辞書的表出

表出もと		表出の典型	原則
素元	単体定数	名詞・代名詞	1
	変数	○	15
	用定数	動詞・形容詞・形容動詞の終止形	6
算号等	変数に施された算号	○	15
	主格 π	格助詞「が」	2
	それ以外の格	「が」以外の格助詞	5
	$\triangle$	助動詞「だ」	3
	$\wedge$	「＊かつ」	7
	$\vee$	「＊または」	8
	$\Rightarrow$	「＊なら」	9
	$\lozenge$	「＊ない」	10
	$\neg\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} \in \mathfrak{P})$	逆限語	11
	$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$	順限語	11
	下方区間 $\lambda \in \mathfrak{Q}$	上限語	12
	上方区間 $\lambda \in \mathfrak{Q}$	下限語	13
	真正区間 $\lambda \in \mathfrak{Q}$	両限語	14
	$\Omega x) \sqcap$	○	17
	Ωx	「＊もの」	16
	$\sqcap$	連体助詞「の」	18
	$\square$	「以外」	19
	$\triangle$ に支配された $\sqcup$	連体助詞「か」	20
	$\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ の表出 A, B の総称	21
括り記号	( )	○	4

が素元でないときには，ある二項算法 λ と A の元 a, b によって $d = a\lambda b$ と表されるか，または，ある単項算法 μ と A の元 c によって $d = c\mu$ と表される．元 a, b, c の表出 A, B, C は，a, b, c の階数が d の階数より小さいので，階数についての帰納法で決まる．また，算号 λ, μ の表出 L, M は諸原則により決まる．そして d は，$d = a\lambda b$ の場合には ALB として表出し，$d = c\mu$ の場合には CM として表出する．

ただし例外がある．まず，原則 15 は他の原則に優先する．また，原則 17 は原則 16 に優先する．また，λ が $\triangle$ に支配されない $\sqcup$ の場合は，原則 21 により d は A, B の総称として表出する．

さて，これらの表出の原則を心言語 A の色々な元に適用すると，日本語らしい日本語になることも多いが，そうでない場合も多い．状況依存性などを考慮して読み下してみても，とても日本語とは思えない意味不明の代物になることも多い．

その理由は二つある．まず**第一**に，これまでに示した表出の逐次的・辞書的原則の他にも表出の原則と呼ぶべきものがあり，それについてはまだ説明していないからである．

第二に，これこそが本質的な理由なのであるが，**心言語の元のすべてが意味の分かる言葉として表出し得るのではない**からである．複雑な観念や概念は意味の分かる言葉としては表出し得ない [20]．また，簡単な観念や概念でも，言語によっては，それを表す適切な言葉や語法がないこともある．そういうことは，たとえば，第 7.3.8.4 条で説明する「は」の多重代用機能を見ても分かるが，もっと重要な例は数学の教科書の中にある．数学の定理や概念を普通の言葉だけで説明するのは至難の業であり，説明しようとすれば，色々な記号や数式が必要になるのである [21]．

こう考えると，心言語から日本語への変形・表出論だけでなく，記号・数式混じりの「文章」への変形・表出論が必要だということに気づく．それは，もちろんこの章では差し置くが，将来の重要な研究課題の一つであろう．そこで次の課題を提起する．

課題 7.3.3 自然言語は，文字通り自然に生まれたものであるが，その使われ方には何らかの法則があり，それが通常「文法」と呼ばれる．数学の教科書で使われるような記号や式混じりの文章も，執筆者の間で自然に生まれたものであり，何らかの「文法」に従っていると思われる．その文法を，日本語の文法を追究したと同様に追究せよ．

7.3.8　省略記号

§ 心言語 A の元は，前項までに説明した逐次的・辞書的原則だけに従って表出するのではない．これらの原則に従う表出は，その際の変形が比較的に少ないものである．これに対し，変形の比較的に多い表出というものがある．たとえば，心言語の元のかなりの部分が表出しないことがある．そして表出した言葉の中に，表出しなかった部分の痕跡のような言葉が見出されることがある．そういう言葉を**省略記号**と呼ぶ．この項では，その代表的なものについて説明しよう．

7.3.8.1　連体助詞「の」と表出の随意的原則

‡ 原則 18 によれば，$a \sqcap b$ における算号 $\sqcap$ は，a が $g\,\Omega x$ なる複体元でなければ，連体助詞の「の」として表出する．しかしその他に「の」が省略記号の役割も演ずることを，第 1.5.3.3 条で指摘してある．そこに掲げた表 1.1 を表 7.2 として再掲しよう．表中で，等号の左辺は連体助詞の「の」を使った表現であり，その意味を「の」を使わずに表現したのが右辺である．ただし，意味の取り方は他にもあり得る．

[20] ここでの「観念」「概念」は第 7.1 節で定義したものを指す．
[21] 数学を言葉だけで行なっていた時代には，二次方程式の解法でさえ，僅かの人しか理解できない秘事だったという．

表 7.2: 連体助詞の「の」の用例（再掲）

算数の先生＝算数を教える先生	三時の出発＝三時にする出発
森の道＝森に在る道	森の遊び＝森でする遊び
砂の穴＝砂を掘って作られた穴	放射能の影響＝放射能から受ける影響
君の手紙＝君から来た手紙	明日の営業＝明日に行なう営業
樅の木＝樅と呼ばれる木	雨の日＝雨が降る日
鍬の音＝鍬が出す音	国語の時間＝国語を教える時間
石塀の所＝石塀が在る所	出会いの場所＝出会いが起きる場所

この表の等号の左辺がどういう心言語の元の表出であるかは，読者にももう明らかであろう．等号の右辺へと表出するはずの元が左辺として表出する．つまり,「を教える」「に在る」「を掘って作られた」などに相当する部分が表出しない．表出しない部分の痕跡が「の」だと考えるのである．

もう少し具体的に説明すれば次のようになる．心言語 A の体元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ と用元 $\mathfrak{f}$ とから作られる

$$\Big(\big(\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathfrak{f})\big)\,\Omega\mathrm{x}\Big) \sqcap \mathfrak{b}$$

なる複体元は，これまでに示した表出の原則に従って，たとえば

$\mathfrak{a} \to$ 算数　　$\breve{o}\mathrm{l} \to$ を　　$\mathfrak{f} \to$ 教える　　$\mathfrak{b} \to$ 先生

と置き換え，他は空語に置き換えれば,「算数を教える先生」という国語文となる（$\breve{o}\mathrm{k}$ は常識的には「が」に当たると考えられる）．そうなるはずのものが，$\breve{o}\mathrm{l}\,\mathfrak{f}$ が表出しないで痕跡「の」を残したものが「算数の先生」だと考えるのである．

ただし場合によっては，$\breve{o}\mathrm{l}$ は表出することがあるし，表出しないと意味が正しく伝わらないこともある.「君への手紙」「森での遊び」「放射能からの影響」「東京までの電車」「犬との散歩」などはそういう例である．しかし，なぜか「がの」「をの」「にの」という表出はない．

こういう但し書き付きで，私は，次のような表出の原則があると考える．

原則 22 体元 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ と格 l を諸原則に従って体言 A，B と格助詞または空語 L に置き換えるとき，複体元 $\Big(\big(\mathrm{x}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{l}\,\mathfrak{f})\big)\,\Omega\mathrm{x}\Big) \sqcap \mathfrak{b}$ を「AL の B」に置き換える．

ただし，この原則は適用するもしないも自由である．標題の「随意的」はこのことを指す．しかし，表 7.2 の「森に在る道」あるいは「兎にある耳」「兎が持つ耳」のような存在や所有の表現の場合は，この原則を常に適用して「森の道」「兎の耳」のように表出するのが普通である．

問題 7.3.14 表 7.2 の各例において原則 22 の $\breve{o}\mathrm{k}, \breve{o}\mathrm{l}, \mathfrak{f}$ が何に当たるかを考えよ（課題 1.5.8 参照）．

7.3.8.2　並列・選択を表す「と」「か」

‡ たとえば「レタス**と**パセリを食べる」や「レタス**か**パセリを食べる」のように使われる「と」や「か」は，心言語の元や算号の表出ではなく省略記号と考えるべきものである．つまり，この「と」は「レタスを食べ かつ パセリを食べる」の「を食べ かつ」の省略記号であり，また「か」は「レタスを食べる かまたは パセリを食べる」の「を食べる かまたは」の省略記号なのである．

省略された「を食べ（る)」は他の格助詞と動詞・形容詞・形容動詞の組み合わせに替え得るから，「と」と「か」は，そういう沢山の組み合わせの省略記号だということになる．

いま説明したことを表出の原則として正式かつ一般的に述べよう．ただしこれも，原則 22 と同様に随意的原則である．

原則 23 体元 $a_1,\ldots,a_n$ と算法 λk と用元 f で作られる用元 $(a_1\,\lambda k\,f)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\lambda k\,f)$ における $(n-1)$ ヶ所の $\lambda k\,f)\wedge($ は「と」に置き換え，$(a_1\,\lambda k\,f)\vee\ldots\vee(a_n\,\lambda k\,f)$ における $(n-1)$ ヶ所の $\lambda k\,f)\vee($ は「か」に置き換える．

特に，体元 a, b と算法 λk と用元 f で作られる用元 $(a\,\lambda k\,f)\wedge(b\,\lambda k\,f)$ における $\lambda k\,f)\wedge($ は「と」に置き換え，$(a\,\lambda k\,f)\vee(b\,\lambda k\,f)$ における $\lambda k\,f)\vee($ は「か」に置き換える．

冒頭の例を少し複雑にして説明すれば，a, b, f, k をそれぞれ「レタス」「パセリ」「食べる」「を」に置き換えるとき，$(a\,\forall k\,f)\wedge(b\,\forall k\,f)$ と $(a\,\forall k\,f)\vee(b\,\forall k\,f)$ は，これまでの原則に従えば，それぞれ

a1．レタスをすべて食べる ＊かつ パセリすべてを食べる

a2．レタスをすべて食べる ＊または パセリをすべて食べる

として表出する．しかし原則 23 に従えば，それぞれ次のように表出する．

b1．レタス と パセリをすべて食べる

b2．レタス か パセリをすべて食べる

そして実際，私たちは文 a1, b1 を同じ意味と感じ，文 a2, b2 を同じ意味と感ずる．そう感ぜられることが，こういう変形・表出論が妥当であることの証拠なのである．

「野菜と果物は好物だ」の「と」も文 b1 と同種の省略記号である．つまり，$(a\,\breve{o}\pi c\triangle)\wedge(b\,\breve{o}\pi c\triangle)$ において a, b, c をそれぞれ「野菜」「果物」「好物」に置き換え，さらに原則 23 に従って $\breve{o}\pi c\triangle)\wedge($ を「と」に置き換えて出来るのが「野菜と果物は好物だ」である．これに対して「好物は野菜と果物だ」の「と」は，やはり省略記号であるが，やや性格が異なる．これについては第 7.3.9 項で説明する．

さて，これまでの説明に対して，次のような批判をする人がいるかもしれない．たとえば「バスと電車で行く」という文は，原則 23 によると「バスで行く ＊かつ 電車で行く」という文の省略表現に当たる．ところがこの二つの文は同じ意味にはとれない．前者はバスと電車を乗り継いで行くという一回の行為にとれるのに，後者は，あるときにバスで行き他のときに電車で行くという二回の行為にとれる．だからさっきの変形・表出論は破綻するという批判である．

しかし，こういう批判が逆に批判されなければならない.「バスと電車で」の格助詞「で」がそもそも省略記号なのであり,「が」「を」などの格助詞と同列に扱うべきものではないからである．そのわけは次条で説明しよう．

課題 7.3.4　「と」「か」は以前は「レタスとパセリと」「レタスかパセリか」のように繰り返して使うのが普通だった．このことをどう説明すべきか．

7.3.8.3　格助詞「で」と本来の格助詞

‡ 原則 5 によれば，格は格助詞として表出する．しかし，逆に格助詞が格の表出であるとは限らない．通説で格助詞とされる「で」がまさにその例である．

国語辞典によれば,「バスで行く」「電車で行く」のように使われる「で」は，文語の「にて」から出来たものであり,「にて」は格助詞「に」と接続助詞「て」の間にあるべき動詞の省略された形であると言う．省略された動詞とは，たとえば「にありて」「において」「によりて」における「ある」「おく」「よる」などのことを指す．従って，現代口語の格助詞「で」は，そもそもが省略記号なのである．

「バスと電車で行く」は，こういう「で」の素性から見ても，また単純に意味を考えても,「バスと電車によりて行く」の「によりて」が「で」に置き換わったものとみなすべきものである．そして，第 7.3.3.1 条によれば「バスと電車によりて行く」は「バスと電車による ∗て 行く」である．また前条によれば,「バスと電車による」は「バスによる ∗かつ 電車による」の「による ∗かつ」が「と」に置き換わったものである．従って,「バスと電車で行く」は「(バスによる ∗かつ 電車による）∗て 行く」と解すべきものであり，前条の批判者のように「バスで行く ∗かつ 電車で行く」と解すべきものではない．そして事実,「(バスによる ∗かつ 電車による）∗て 行く」は，バスと電車を乗り継いで行く一回の行為にとれて，その点ではもとの「バスと電車で行く」と同じ意味なのである．

いま説明したことを表出の原則として正式かつ一般的に述べよう．ただしこれも，原則 22 や原則 23 と同様に随意的原則である．

原則 24　格 k を格助詞「に」に置き換え，用定数 f を「ある」「おく」「よる」などの動詞に置き換え，体元 $a_1, \ldots, a_n$ と k, f とで作られる用元

$$(a_1\,\breve{o}\mathrm{k\,f})\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\mathrm{k\,f}) \qquad \textbf{あるいは} \qquad (a_1\,\breve{o}\mathrm{k\,f})\vee\ldots\vee(a_n\,\breve{o}\mathrm{k\,f})$$

における $(n-1)$ ヶ所の $\breve{o}\mathrm{k\,f})\wedge($ あるいは $\breve{o}\mathrm{k\,f})\vee($ を原則 23 に従ってそれぞれ「と」あるいは「か」に置き換えるとき，これらと算法 $\wedge$ および用元 g とで作られる用元

$$\big((a_1\,\breve{o}\mathrm{k\,f})\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\mathrm{k\,f})\big)\wedge g \qquad \textbf{あるいは} \qquad \big((a_1\,\breve{o}\mathrm{k\,f})\vee\ldots\vee(a_n\,\breve{o}\mathrm{k\,f})\big)\wedge g$$

における $\breve{o}\mathrm{k\,f})\big)\wedge$ は「で」に置き換える．特に，体元 a と $\mathrm{k}, \mathrm{f}, g$ とで作られる用元 $(a\,\breve{o}\mathrm{k\,f})\wedge g$ における $\breve{o}\mathrm{kf})\wedge$ は「で」に置き換える．

ただし，この原則が適用される動詞が「ある」「おく」「よる」の他にどの位あるかを調べるのは，国語学の課題なので今はさて措く．

通説で格助詞とされるものの中には,「で」以外にも省略記号とみなすべきものがある．たとえば「へ」は，用法によっては「に向かって」「をさして」の省略と解される．従って,「へ」についても原則 24 と同様の原則があると考えなければならない．

格助詞の中には,「で」や「へ」のように省略記号とみなすべきものと，そうでないものとがある．後者を**本来の格助詞**と呼ぶ.「が」「を」「に」などは本来の格助詞であろう．ただし，一つの格助詞でも色々に使われるのであり，ある用法のものは本来の格助詞で，他の用法のものは本来の格助詞でないと考えるべきであろう．大雑把に言えば，他の格助詞と動詞とで言い換えられない格助詞は本来の格助詞であり，言い換えられる格助詞は本来の格助詞でないと考えられる．そして私は，本来の格助詞だけが格の表出だと考える（原則 5 参照）．従って，**どの格助詞のどの用法のものが本来の格助詞かは，心言語の格集合が如何なるものかという問題と密接に関わる重要な問題である**．

7.3.8.4　複数の格を表す「は」

‡ ここでは日本国憲法引き合いに出して説明する．

> 憲法第二条【皇位の継承】　皇位は，世襲のものであって，国会の議決した皇室典範の定めるところにより，これを継承する

これの意味をとって次のように書き直してみる．

> 皇位は世襲のものであって，国会の議決した皇室典範の定める最上位有資格者が，これを継承する

これをさらに次のように簡略化する．

皇位は世襲のものであって 最上位有資格者がこれを継承する

そして「これを」を「皇位を」に書き換え,「皇位は」も「皇位が」に書き換えると，

皇位が世襲のものであって 最上位有資格者が皇位を継承する

となる.「最上位有資格者が」と「皇位を」の順番を入れ換えると，これは要するに

$$\text{A が B であって A を C が F} \tag{7.3.37}$$

という形をしている．A, B, C は名詞で F は動詞である．しかし，私たちは普段こういう言い方をしない.「皇位を」を省略すると共に「皇位が」を「皇位は」に変えて

$$\text{皇位は世襲のものであって 最上位有資格者が継承する} \tag{7.3.38}$$

と言うのが普通であり，これで十分に意味が通じる（ただし,「皇位が」をそのままにして「皇位を」を省略すると意味が通じなくなる）．そしてこの文は

$$\text{A は B であって C が F} \tag{7.3.39}$$

という形をしている．国語ではこの形の文は珍しくない．たとえば,「フットボールは元々は男のスポーツだが，この頃は女もする」もそうである．この文では「元々は」「が」「この頃は」「も」が呼応してある意味を表しているが，その意味を取り去ってしまえば,「フットボールは男のスポーツであって 女がする」という意味だけが残る．これはまさに (7.3.39) の形をしている．

この同じ意味の国語文 (7.3.37), (7.3.39) がどういう用元の表出なのかを考えよう．しかし，(7.3.37) についてはもう自明であろう．これは

$$\big(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{b}\triangle)\big)\wedge\big(\mathrm{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\big) \tag{7.3.40}$$

なる用元に次の置き換えをしたものである．

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{a}\to\mathrm{A} & \mathrm{b}\to\mathrm{B} & \mathrm{c}\to\mathrm{C} & \mathrm{f}\to\mathrm{F} \\ \breve{o}\pi\to\text{が} & \triangle\to\text{である} & \wedge\to\text{＊て} & \breve{o}\mathrm{k}\to\text{を} \end{array} \tag{7.3.41}$$

ただし，(7.3.40) が心言語 A に存在するために，特に f の格域 P と k,π について

$$\mathrm{k}\neq\pi \qquad\qquad \{\mathrm{k},\pi\}\subseteq\mathrm{P}$$

が成り立つ．そうすると，$\mathrm{b}\triangle$ と $\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f}$ の格域はそれぞれ $\{\pi\}$ と $\mathrm{P}-\{\pi\}$ であるから，$(\mathrm{b}\triangle)\wedge(\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})$ の格域は P に等しく，従って

$$\mathrm{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,\Big(\mathrm{a}\,\breve{o}\pi\big((\mathrm{b}\triangle)\wedge(\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\big)\Big) \tag{7.3.42}$$

なる用元が A に存在する．そして例 5.2.1 により，これは (7.3.40) と真偽が一致する．すなわち，

$$\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\Big(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\big((\mathrm{b}\triangle)\wedge(\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\big)\Big) \asymp \big(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,(\mathrm{b}\triangle)\big)\wedge\big(\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathrm{c}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f})\big)$$

従って，第 7.3.3.2 条に記した特殊原理により，(7.3.40), (7.3.42) の表出先の国語文の真偽は一致すると私たちに思われなければならない（(7.3.40), (7.3.42) は比較的簡単な用元であるから，特殊原理をここで適用するのは妥当であろう）．そこでこれらに置き換え (7.3.41) をしてみる．そのとき (7.3.40) が国語文 (7.3.37) となることは分かっている．他方 (7.3.42) は

A を A が B であって C が F　(7.3.43)

となる．しかしこれは，(7.3.37) と真偽が一致すると思われるどころか，まったく意味不明である．A, B, C, F を具体的な言葉に置き換えてみても

皇位を皇位が世襲のものであって 最上位有資格者が継承する

となって，やはり意味不明である．もちろん，私たちは普通こういう言い方をしはしない．しかし，「皇位を皇位が」を「皇位は」に取り替えると，これが

皇位は世襲のものであって 最上位有資格者が継承する

という，意味のよく分かる国語文に一変する．そして，これは (7.3.38) と同じものである．つまり，(7.3.43) の「A を A が」を「A は」に変えると，形も真偽も (7.3.39) と一致する文となり，その真偽はまた (7.3.37) と一致するのである．

以上のことから，(7.3.39) がどういう用元の表出なのかについて，私は次のように結論する．すなわち，(7.3.39) は (7.3.42) の表出である．ただし，原則通りの表出ではない．(7.3.42) の $\mathfrak{a}\,\breve{o}\mathrm{k}\,(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi$ は，原則通りなら「A を A が」として表出するところを，原則を外れて「A は」として表出する．つまり,「〜は」は「〜を〜が」の省略記号と考えられる．言い換えれば,「は」がそれ一つで二つの格助詞「を」「が」の役割を同時に演ずるのである．これを「は」の**二重代役機能**と呼ぶ．

ただし，問題 7.3.15 に示すように,「は」は色々な格助詞の二重代役を務めることができるし，三重以上の**多重代役**をすることもできる．また，$\wedge$ と「∗て」をそれぞれ $\vee$ と「∗または」に換えても同様である．そこで私は，次に示す表出の原則がある考える．この原則の根拠とするのは，さっき引用した例 5.2.1 の後半である．

原則 25 原則 1 に従い単体定数 $\mathfrak{a}$ を名詞 A に置き換え，また，$i = 1, \ldots, n$ について $P_i \in \mathcal{P}K$, $k_i \in P_i - \bigcup_{j \neq i} P_j$, $f_i \in A_{P_i}$ であるとき，次の二元における $\mathfrak{a}\,\breve{o}k_1\,(\cdots(\mathfrak{a}\,\breve{o}k_n$ は「A は」に置き換える．

$$\mathfrak{a}\,\breve{o}k_1\,(\cdots(\mathfrak{a}\,\breve{o}k_n\,(f_n\wedge\ldots\wedge f_1))\cdots) \qquad \mathfrak{a}\,\breve{o}k_1\,(\cdots(\mathfrak{a}\,\breve{o}k_n\,(f_n\vee\ldots\vee f_1))\cdots)$$

ただし，これらの元において算法 $\wedge, \vee$ を適用する順番は任意である．

なお,「は」のような多重代用機能を持つ便利な語は英語にはない．英国人は，(7.3.42) なる観念をもったとしても[22]，それを言葉で忠実に表すことはできない．これは，第 7.3.7 項で「簡単な観念や概念でも，言語によっては，それを表す適切な言葉や語法がないこともある」と指摘したことの一例である．

問題 7.3.15 次の文について同様の考察をせよ．〔　〕の中は「は」が代役する格助詞を示す．

[22] ここでの「観念」は第 7.1 節で定義したものを指す．

1. その家**は**高台にあって 外国人が住んでいる〔が・に〕
2. 八月**は**暑くて 僕は好かん〔に・を〕
3. その町**は**昔住んでいて 今も懐かしく ときどき訪れる〔に・が・を〕

7.3.9 「A は B だ」と「A が B だ」

§ 第 7.3.1.2 条末尾や第 7.3.1.3 条冒頭で，係り助詞の「は」と格助詞の「が」を状況に応じてどう使い分ける傾向があるかを調べるのは国語学の課題であると述べた．しかし，この課題のすべてが数理心理学者の興味を引かないのではない．ここでは，標題に掲げた「A は B だ」と「A が B だ」という二種類の文の違いを，数理心理学の観点から分析する．これに関連して,「A なら B だ」についても考える．

7.3.9.1 野菜は好物だ・野菜が好物だ・好物は野菜だ・好物が野菜だ

‡ 以下に例文を八つ示す．読者はまず，これらの文を他人が話すのを聞いたと想像し，自分がこれをどういう意味に解するかを考えてほしい．核心は，この話者の好物の範囲がどういうものかである．まず次の四つの例文は，課題 7.3.1 に示したと同じものである．

a1. 野菜は好物だ

a2. 野菜が好物だ

a3. 好物は野菜だ

a4. 好物が野菜だ

次に，これらに限量語「すべて」を加えた文を示す（問題 7.3.6 参照）．野菜にも好物にも色々あるから,「すべて」を加えても不自然ではない．

b1. 野菜はすべて好物だ

b2. 野菜がすべて好物だ

b3. 好物はすべて野菜だ

b4. 好物がすべて野菜だ

ここでは「すべて」を「は」「が」の後ろに入れたが，前に入れた文の意味も考えてほしい（原則 13 の後の注意参照）.「が」は「すべて」の後ろに置いた方がしっくりするようにも感ずる．

これら八つの文を私がどう解するかを説明しよう．読者も同様に解するはずである．母語や文化を共有する人々の間で，解釈がそう変わるはずはない．

まず文 a1 の「野菜は好物だ」を聞くと，私は，この話者には野菜の他にも好物があるかもしれないと思う．ところが次の「野菜が好物だ」を聞くと，私は，この話者には野菜以外に好物はないと思う．また次の「好物は野菜だ」を聞くと，私は，この話者には野菜以外に好物がないだけでなく，野菜は実際にこの話者の好物だと思う．つまり好物の範囲に限れば，文 a2 と文 a3 とは同じ意味であり，文 a2, a3 は文 a1 を含意するように感ぜられるが，文 a1 が文 a2, a3 を含意するようには感ぜられない．文 a4 の「好物が野菜だ」は，好物の範囲を表すものとは解せない [23]．

これはちょっと不思議な現象である.「は」と「が」を入れ替えたり「野菜」と「好物」を入れ替えたりすると，解釈がなぜこう変わるのだろうか．しかし，文 b1 – b4 を考え合わせると，さらに不思議なことが起きる．

---

[23]「好物が野菜だとは知らなかった」のように言うことはあり，この中の「好物が野菜だ」は文 a3 と同じ意味にとれる．

まず文 b1 の「野菜はすべて好物だ」を聞くと，私は，この話者には野菜の他にも好物があるかもしれないと思う．好物の範囲に限れば，文 b1 と文 a1 とは同じ意味に感ぜられる．また次の「野菜がすべて好物だ」を聞くと，私はやはり，この話者には野菜の他にも好物があるかもしれないと思う．そして次の「好物はすべて野菜だ」を聞くと，私は，この話者には野菜以外に好物はないけれども，野菜すべてが好物ではないかもしれないと思う．次の「好物がすべて野菜だ」についても同様である．つまり好物の範囲に限れば，文 b1, b2 は同じ意味であり文 b3, b4 は同じ意味であるが，文 b1, b2 は文 b3, b4 を含意せず，文 b3, b4 は文 b1, b2 を含意しないと感ぜられる．こういう感じは,「すべて」を「は」「が」の前に移しても変わらない．

つまり好物の範囲に限れば，文 a1 – b4 の意味は次のように分類される．なお，第二群は第一群と第三群を含意するが，それ以外の含意関係はない．

$$\{a1, b1, b2\} \qquad \{a2, a3\} \qquad \{b3, b4\} \qquad \{a4\}$$

これは文 a1 – b4 の形態による分類と全く符合しない [24]．そこが不思議である．

なお，文 a4 の「好物が野菜である」は，好物の範囲についての表現としては確かに奇妙である．しかし，野菜の範囲についての表現としては，奇妙とも言い切れない．野菜の範囲についての表現としてもやや奇妙に感ぜられるのは,「好物」という言葉の特殊性によるだろう．そのことは「好物」をたとえば「畑作物」に替えてみれば分かる.「畑作物が野菜である」は，真ではないにも拘わらず奇妙な表現ではない．私たちは，なぜか，野菜が好物の範囲に入るかどうかを考えることはあっても，好物が野菜の範囲に入るかどうかを考えることは余りない．そのために文 a4 を奇妙と感ずるのだと考えられる．

以上の観察から，次のことが一般に正しいように思われる．まず「A は B だ」は，文 a1 のように B であるものの範囲を示す場合と，文 a3 のように A であるものの範囲を示す場合とがある．これに対し「A が B だ」は，B であるものの範囲を示す表現であって，A であるものの範囲を示す表現ではない．また「A はすべて B だ」「A がすべて B だ」は，どちらも B であるものの範囲を示す表現である．そしてこれらの表現は，B であるものの範囲によれば，次のように分類される．

1. 「A は B だ」「A はすべて B だ」「A がすべて B だ」
2. 「A が B だ」「B は A だ」

ただし，第 7.3.1.4 条で注意した通り,「僕はウナギだ」のような省略された表現には，省略されているものを補ってからこの分類法を適用しなければならない

7.3.9.2 「A_1 と. . . と A_n が B だ」と「B は A_1 と. . . と A_n だ」

‡ ここでは，前条で観察したような現象がなぜ起きるのかを，数理心理学の観点から説明する．

基本的なことの復習から始めよう．まず仮説 2 によれば，自然言語には心言語の元が何らかの変形を受けた後に表出する．自然言語は心言語だけからの表出ではないが，文 a1 – b4 は話者の心言語文の表出と考えられる．次に，第 1.4.3 項や基本問題 7 の後で触れたように，文 a1 – b4 の意味を聞手が理解するときには，これらの文が聞手の心言語文に変換される．そしてその変換の過程は，聞手の心言語から自然言語への表出の逆過程である．話者と聞手の心言語はもちろん別物であるが，それらの心言語は，どちらも単相格言語であると仮定されているという意味で，本質的には

[24] こういう例を見れば，文の形態によって行なう文法論が如何に無意味なものかがよく分かる．第 1.5.3 項参照

同じである．そして，話者と聞手が母語や文化を共有すれば，話者の心言語からの表出過程と聞手の心言語からの表出過程とは同様と考えられる [25]．

さてそうすると，数理心理学者は，話者・聞手の違いに囚われることなく，文 a1 – b4 が単相格言語 A の如何なる元の表出なのかを考えればいいことになる（これまではっきりと述べなかったが，この項以外でも実は，すべてこういう考え方に拠っていたのである）．ただし，第 7.3.1.2 条で説明した通り，A の元がどう表出するかは状況に左右される．

以上のことを踏まえて，私は次のような表出の原則があると考える．

原則 26 体元 $a_1, \ldots, a_n, b$ が諸原則に従ってそれぞれ体言 $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}$ へと表出するとき，$b\,\forall\pi\,(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$ なる状況下では $(a_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle)$ は「$\mathbf{A}_1$ と. . . と $\mathbf{A}_n$ が $\mathbf{B}$ だ」へと表出し，逆に，$(a_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle)$ なる状況下では $b\,\forall\pi\,(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$ は「$\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}_1$ と. . . と $\mathbf{A}_n$ だ」へと表出する．

特に，体元 a, b が諸原則に従ってそれぞれ体言 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ へと表出するとき，$b\,\forall\pi\,a\triangle$ なる状況下では $a\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ は「$\mathbf{A}$ が $\mathbf{B}$ だ」へと表出し，逆に，$a\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ なる状況下では $b\,\forall\pi\,a\triangle$ は「$\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ だ」へと表出する．

$(a_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle)$ が「A_1 と. . . と A_n が B だ」へと表出するとしたことは原則 23 と矛盾しない．しかし，$b\,\forall\pi\,(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$ が「B は A_1 と. . . と A_n だ」へと表出するとしたことは原則 20 に反する．原則 20 だけによるなら，「A_1 と. . . と A_n」ではなく「A_1 か. . . か A_n」となるはずである．従って原則 26 は，原則 20 への例外規定である．

$(a_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle)$ が $b\,\forall\pi\,(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$ なる状況下では「A_1 と. . . と A_n が B だ」へと表出することは，次のように考えれば納得できよう（分かりにくければ $A_1, \ldots, A_n$ を「野菜」「果物」などとし B を「好物」として考えればいい）．私たちは一般に，「何が B か」と問われたときには，B であるものすべての名をあげて答えようとするだろう．そしてそうするためには，「A_1 と. . . と A_n は B だ」ではなく「A_1 と. . . と A_n が B だ」という言い方をするだろう．つまり，「A_1 と. . . と A_n が B だ」と答えるときの話者は，「B はすべて A_1 か. . . か A_n だ」に相当する観念を持っている．そして原則 20 によれば，$b\,\forall\pi\,(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$ がまさに「B はすべて A_1 か. . . か A_n だ」に相当する観念である．こういうわけで，$b\,\forall\pi\,(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$ なる状況下では $(a_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle)$ が「A_1 と. . . と A_n が B だ」へと表出すると考えるのである．

$b\,\forall\pi\,(a_1 \sqcup \cdots \sqcup a_n)\triangle$ が $(a_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle)$ なる状況下で「B は A_1 と. . . と A_n だ」へと表出すると考える理由も同様である．私たちは一般に，「B は何か」と問われたときには，実際に B であるものの名をあげようとして，「B は A_1 か. . . か A_n だ」ではなく「B は A_1 と. . . と A_n だ」と答えようとするだろう．つまり，こう答えるときの話者は，「A_1 と. . . と A_n は B だ」に相当する観念を持っている．そして原則 23 によれば，$(a_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge\ldots\wedge(a_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle)$ がまさに「A_1 と. . . と A_n は B だ」に相当する観念なのである．

さて，原則 26 によれば，体元 a, b がそれぞれ「野菜」「好物」へと表出するとき，$b\,\forall\pi\,a\triangle$ なる状況の下で $a\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ は文 a2 へと表出し，$a\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ なる状況の下で $b\,\forall\pi\,a\triangle$ は文 a3 へと表出する．しかし，たとえば $b\,\breve{o}\pi\,a\triangle$ も文 a3 へと表出し得るし，$a\,\breve{o}\pi\,b\triangle$ なる状況下にない単独の $b\,\forall\pi\,a\triangle$ も，限量語の消失という変形を受ければ文 a3 へと表出し得る．

以上は，話者の心言語の元がどう表出するかの説明である．文 a1 – b4 の聞手がこれをどう解するかはまた別の話である．さっきこれらの文を私がどう解するかを説明したが，そう解する時の思考機械・私は，文 a2, a3 を $(a\,\breve{o}\pi\,b\triangle)\wedge(b\,\forall\pi\,a\triangle)$ なる心言語文に変換したのだと考えられる．そ

[25] 逆に，この「表出過程が同様」ということが「母語や文化を共有する」ことの実態と考えられる．第 1.5.2.2 条参照．

して，文 a2, a3 が文 a1, b3 を含意すると感じたのは，文 a1, b3 をそれぞれ $\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle$，$\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle$ なる心言語文に変換した後

$$\frac{(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\wedge(\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle)}{\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle} \qquad \frac{(\mathfrak{a}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\wedge(\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle)}{\mathrm{b}\,\forall\pi\,\mathfrak{a}\triangle}$$

なる心論法を適用したのだと考えられる（第 7.2 節参照）．また，文 a4 を奇妙なものと感じたのは，何らかの理由でこれを心言語文に変換できないでいたのだと考えられる．

問題 7.3.16 私が文 a1, b1, b2 を同じ意味と感じた仕組みはどういうもだと考えるべきか．

7.3.9.3　「A は B だ」「A なら B だ」と全称命題

‡ 国語辞典によれば，係り助詞の「は」は助動詞の「なら」に置き換えられる場合がかなりある．たとえば「偶数は 2 の倍数だ」と「偶数なら 2 の倍数だ」とは同等の表現であると言う．確かに「A は B だ」と「A なら B だ」は，私たちには真偽が一致するように感ぜられる．なぜそうなのかを，数理心理学の観点から説明しよう．

まず,「A は B だ」なる文は「偶数は 2 の倍数だ」を抽象したものであり，これの正確な意味は「偶数はすべて 2 の倍数だ」である．従って,「A は B だ」は $\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle$ なる心言語文の表出だと考えなければならない．これに対して「A なら B だ」なる文は,

$$\mathrm{one}\,\forall\pi\left(\left((\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle)\Rightarrow(\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)\right)\Omega\mathrm{x}\right)\triangle \tag{7.3.44}$$

なる心言語文の表出だと考えられる．これまでに説明した表出の原則によれば，この心言語文は

もの は すべて A だ ＊なら B だ ＊もの だ

などとして表出する．このうちの「ものはすべて」と「＊ものだ」が空記号に置き換わった「A だ＊なら B だ」がすなわち「A なら B だ」であると考えるのである．

つまり私は，次の表出の原則があると考える．ただし，これも随意的原則である．

原則 27 心言語文 f から作られる心言語文 $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ は，f に表出の諸原則を適応して得られる国語文へと表出する．

さっきの例 (7.3.44) に即して敷衍すれば，この例において原則 27 の f に相当するものは

$$(\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle)\Rightarrow(\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle) \tag{7.3.45}$$

である．そして (7.3.44) は，(7.3.45) に表出の諸原則を適応して得られる「A なら B だ」へと表出すると考えるのである．

ただし，(7.3.45) 自身が「A なら B だ」へと表出すると考えるのは妥当ではない．それは次の理由による．もしも (7.3.45) が「A なら B だ」へと表出するなら，心言語文 $\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle$ が「A は B だ」へと表出し,「A は B だ」と「A なら B だ」は真偽が等しいと私たちに感ぜられるのだから，心言語の意味論と変形論への要請から第 7.3.3.2 条で導いた一般原理により，$\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle$ と (7.3.45) とは心言語の意味論によって真偽が一致しなければならない．すなわち,

$$\mathfrak{a}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle \asymp (\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathfrak{a}\triangle)\Rightarrow(\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)$$

が成り立たなければならない．しかしこれは成り立たない（$\mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle \preccurlyeq (\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle) \Rightarrow (\mathrm{x}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{b}\triangle)$ なら成り立つ）.

他方，定理 5.5.16 系 6 によれば，$\mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{b}\triangle$ と (7.3.44) とは心言語の意味論によって真偽が一致する．そこで,「A なら B だ」は (7.3.44) の表出であり，そのために「A は B だ」と「A なら B だ」との真偽が一致すると私たちに感ぜられるのだと考えるのが妥当なのである．

注意 5.5.6 に記したように，(7.3.44) なる形の心言語文 $\mathrm{one}\,\forall\pi\,(\mathrm{f}\,\Omega\mathrm{x})\triangle$ は，述語論理学における $\forall\mathrm{x}\,\mathrm{P}$ に当たる．そこでこういう心言語文を，第 7.1 節を踏まえて，**全称観念**と呼ぶ．また，全称観念から原則 27 に従って表出する国語文を標題に掲げたように**全称命題**と呼ぶ.

7.3.10　推論や思考の過程を表す語

§ 思考機械・人脳は心言語ないしは心論理代数系と抽象される．そして仮説 2 によれば，心言語の元は何らかの変形の後に音素列として表出して言葉となる．しかし，言葉は心言語だけからの表出ではない．自然言語には推論過程や思考過程の表出もある．第 7.2 節で説明した通り，心論理代数系は心言語 A の用元の全体 H に論理を幾つか算法として与えて代数系としたものである．そして，心論理代数系 H 上の計算代数系 C(H) の元が**推論過程**であり，これがいわゆる「推論の過程」に相当する．また，C(H) 上の普遍半群 $C(H)^+$ の元が**思考過程**であり，これがいわゆる「思考の過程」に相当する．そして推論過程も思考過程も，言葉として表出するときには色々な変形が加わる．そこでこの項では，推論過程と思考過程の表出にはどういうものがあるか，それらがどういう変形を経ているかを説明しよう.

7.3.10.1　「ピーターは兎なので白い」と理由を表す語

‡ ここでは理由を表す「ので」を題材にして説明する．つまり，標題の「ピーターは兎なので白い」のように使われる「ので」である．この「ので」は心言語からの表出とは考えられない．正確に言うと，ある人 P が「ピーターは兎なので白い」と言ったときに，この文は P の心言語から表出したものとは考えられない.

なぜなら，心言語の元は認識の対象世界のもの事の記述だから，その表出である自然言語文も世界のもの事の記述になると考えられる．ところが,「ピーターは兎なので白い」という文は，もの事の記述と言うよりは推論の過程の記述である．つまり P は,「兎はみんな白い」という知識を前々から持っており，そこへ「ピーターは兎だ」という新しい知識を得て，そこで「ピーターは兎だ. 兎はみんな白い．従って，ピーターは白い」という推論を行ない，この推論の過程を「ピーターは兎なので白い」という言葉で説明したのだと考えられる．あるいは,「ピーターは兎だ」という知識を前々から持っていたところへ「兎はみんな白い」という新しい知識を得てさっきと同じ推論を行なったとも考えられる [26].

これを踏まえて，私は次のように考える．まず，思考機械・人間の心論理代数系 H の代数構造には

$$\lambda(\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle, \mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{f}) = \mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f}$$

[26]「ピーターは兎だ」も「兎はみんな白い」も，認識の対象世界において真だとは限らない．P にとって確実な知識だとも限らない．つまり，これらに相当する P の知識系の元の確度は必ずしも 1 ではない．第 1.6.1 項参照.

なる論理 λ が含まれていると考える（問題 5.5.22 によりこれは実際に論理である）．従って，H の計算代数系 C(H) には次の階数 1 の計算図が存在する．

$$\frac{\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle \quad \mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{f}}{\lambda} \tag{7.3.46}$$

なお，この計算図の始点は $\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle$ と $\mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{f}$ であり，終点は $\lambda(\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle, \mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{f}) = \mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f}$ である．

私は次に，推論過程すなわち C(H) の元について次のような表出の原則があると考える．

原則 28 階数 1 の計算図 $\dfrac{f_1, \ldots, f_n}{\rho} \in C(H)$ は，A の表出の原則に従って始点 $f_1, \ldots, f_n$ が用言 $F_1, \ldots, F_n$ へと表出し終点 g が用言 G へと表出するとき，「F_1 ＊かつ... ＊かつ F_n ＊ので G」へと表出する．

第 7.3.1.2 条などで説明した但し書きは，この原則にも適用される．特に,「かつ」「ので」はそれらの同義語へも表出する．また,「かつ」の頭についた「＊」は，第 7.3.3.1 条で説明した中継記号であり，前にある語の語尾を変化させるなどの作用を表す.「ので」の頭についた「＊」も同様である．また，しばしば語の消失という変形が起きて,「F_1 ＊かつ... ＊かつ F_n ＊ので G」の一部が空語に置き換わる．

計算図 (7.3.46) を例に説明しよう．ここでは，$\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{a}\triangle$，$\mathrm{a}\,\forall\pi\,\mathrm{f}$ がそれぞれ原則の f_1，f_2 に相当し，$\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f}$ が原則の g に相当する．そこで，体元 a, b と用元 f が A の表出の原則に従ってそれぞれ「兎」「ピーター」「白い」へと表出するとき，f_1, f_2, g はそれぞれ「ピーターは兎だ」「兎はみんな白い」「ピーターは白い」などとなる．従って，語の消失が何もなければ，(7.3.46) は

ピーターは兎で 兎はみんな白い ので ピーターは白い

などとして表出する．ただし「兎で」は「兎だ＊かつ」に当たる．また，もしも「＊かつ F_2」に相当する「＊かつ兎はみんな白い」を空語に置き換えれば，(7.3.46) は

ピーターは兎な ので ピーターは白い

となる．ただし「兎なので」は「兎だ＊ので」に当たる．そして，さらに二つ目の「ピーターは」を空語に置き換えれば，(7.3.46) は

ピーターは兎な ので 白い

となる．これがこの条の標題に掲げた文である．また,「F_1 ＊かつ」に当たる「ピーターは兎だ＊かつ」を空語に置き換えれば，(7.3.46) は

兎はみんな白い ので ピーターは白い

となる．もちろん,「F_1 ＊かつ... ＊かつ F_n ＊ので」に当たる「ピーターは兎だ＊かつ兎はみんな白い＊ので」のすべてを空語に置き換えれば，(7.3.46) は「ピーターは白い」となり，観察者はこれを心言語文 $\mathrm{b}\,\breve{o}\pi\,\mathrm{f}$ の表出と区別することができない．

以下，補足を幾つか述べる．まず，原則 28 は任意階数の推論過程の表出の原則へと一般化することができる．しかしそういう一般化は，類推することは如何にも容易である反面，正確に述べるのは如何にも面倒なので割愛する．なお，階数 2 以上の推論過程が言葉として表出するときには，空語への置き換えが大々的に起きるはずである．なぜなら，階数 n の推論過程の表出には「＊ので」が最大限 n 個含まれるが，私たちは「＊ので」が沢山含まれる文を使うことはないし，理解することもできないからである．

次に,「ピーターは兎なので白い」の例が示すように，言葉の中には心言語 A からではなく C(H) からの表出もある．そして**数理心理学では，論理学の対象となる形式言語は心言語だけである**．従って数理心理学では，言葉のすべてを何らかの形式言語の元に対応付けようという問題意識は生じない．まして，言葉のすべてを形式言語の元に翻訳しようとは企てない（第 1.5.4 項参照）．

次に，原則 28 の後で注意したように,「ので」は同義語へも表出する．従って，(7.3.46) はたとえば「ピーターは兎だから白い」「ピーターは兎だ．だから白い」「ピーターは兎だ．従ってピーターは白い」などとしても表出し得る．つまり数理心理学の観点では,「ので」「から」「だから」「従って」はみな同種のものである．形態を重んずる学校文法の観点はこれと対照的である．「ので」や「から」は「ピーターは兎だ」に付属し得る．しかし「だから」「従って」は,「ピーターは兎だ．だから白い」「ピーターは兎だ．従ってピーターは白い」のように「ピーターは兎だ」との間に音素間隙や句点を挟んで使われる．そういう点で「だから」「従って」が「ので」「から」とは違うという理由で，学校文法は「ので」「から」を接続助詞とし「だから」「従って」を接続詞とする．しかし数理心理学では，そういう形態面の違いを重視しない．接続助詞と接続詞との区別もしない．なぜなら，これまで折に触れて注意してきたように，数理心理学では形態ではなく意味や役割に専心して言葉を観察しなければならないからである．ただし,「ので」「から」「だから」「従って」などの間には，もちろん何らかの違いがある（違いがあるからこそ違う語として存在している）．たとえば「ピーターは兎だから白い」は,「ピーターは兎なので白い」には無い何か を表現している．そしてその「何か」の実態は，第 7.3.1.2 条で説明した「状況を表す用元」であるだろう．しかし，それについて調べることは，数理心理学ではなくもう国語学の領分に属す仕事である．

7.3.10.2　「雨が降っているので出掛けない」と願望・目的を暗示する語

‡ 自然言語の語は，一般に複数の意味・役割を持つ.「ので」やその同義語の「から」「だから」「従って」などもそうであって，前条で説明した理由を表すのとは違う役割でも使われる．たとえば標題の「雨が降っているので出掛けない」における「ので」は，理由を表すのではなく，願望あるいは目的を暗示するものと考えるのが妥当である．以下このことについて説明するが，これは格言語でなくとも，もっと簡略粗雑な形式言語，たとえば命題言語を心言語と考えても十分に説明し得ることである．従って，格言語と日本語との関係を説明するというこの章の目標に鑑みて，ここはごく簡略粗雑な説明で済ますことにする．

さてまず,「雨が降っているので出掛けない」と言った話者の心中を想像すると，たとえば次のような筋道で考えたのではと察せられる．

「雨が降っている」「出掛ければ濡れる」「出掛けなければ濡れない」「出掛けない」

そしてこの話者は,「濡れたくない」という願望があったか,「濡れない」という目的を持っていたために，こう考えたのであろう．

そこで,「雨が降っている」「出掛けない」「濡れない」へと表出する心言語文をそれぞれ $\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}$ で表す．そうすると，この思考機械・話者においては，h の評価値が高かったために [27],

$$\mathrm{f} \qquad\qquad \mathrm{f} \wedge \mathrm{g}^{\Diamond} \Rightarrow \mathrm{h}^{\Diamond} \qquad\qquad \mathrm{f} \wedge \mathrm{g} \Rightarrow \mathrm{h} \qquad\qquad \mathrm{g}$$

なる思考過程が生じ（第 7.2 節で注意した通り，H の元の有限列も思考過程の一種である），この思考過程の先頭の f と最後尾の g が「ので」を間に挟んで「雨が降っているので出掛けない」とし

[27]「評価値」については第 1.6.1 項参照.

て表出したことになる．あるいは，もっと長い思考過程

$$f,\ f \wedge g^{\Diamond} \Rightarrow h_1,\ h_1 \Rightarrow h_2,\ \ldots,\ h_m \Rightarrow h^{\Diamond},\ f \wedge g \Rightarrow k_1,\ k_1 \Rightarrow k_2,\ \ldots,\ k_n \Rightarrow h,\ g$$

から表出したのかもしれない．また，h は「濡れない」とは異なる観念かもしれない．しかしいずれにしても,「雨が降っているので出掛けない」という表現における「ので」は，何らかの思考過程の省略記号であると同時に，この表現には必ずしも現れていない何らかの願望あるいは目的を暗に示す．そういう点でこの「ので」は，前条で例示した「ピーターは兎なので白い」の「ので」とは違う意味・役割を持つのである．

課題 7.3.5　「ので」の今説明した以外の意味・役割について調べよ．

7.3.11　単相格言語の欠点

§

7.4　格言語と日本語

$

7.5　この章の参考文献

$

1. 助詞・助動詞の研究：橋本進吉 著，岩波書店，1969 年