חישוביות וקוגניציה - תרגיל 1 ־ פרסپטרון בינארי

להגשה עד: $18/01/2024$ בשעה 21:00

שימו לב: בתחילת התרגיל מופיעות כמה שאלות הקדמה אמריקאיות. יש להגיש את התשובות אליהן, עם משפט נימוק קצר לכל שאלה. לאחר מכן, שאלה 1 היא שאלה אנליטית ושאלה 2 היא שאלת תכנות.
לשימושכם, אלגוריתם הלמידה של הפרספטרון מופיע בסוף התרגיל.

שאלות הקדמה

נתון הפרספטרון הבינארי $y = H(\bar{w} \cdot \bar{x})$, שמקבל דוגמאות דו־מימדיות $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

1. אם ידוע כי $w_2 = 0$ וכי הדוגמה $\bar{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ מסווגת ב־ 0, מה ניתן לומר על הסיווג של הדוגמה $\bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$?
   (א) תסווג כ־ 1
   (ב) תסווג כ־ 0
   (ג) לא ניתן לדעת

2. עבור $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, מה מהבאים **יבטיח** שדוגמה תסווג ב־ 1? (תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה)
   (א) $x_1 = x_2$
   (ב) $x_1 > x_2$
   (ג) $x_1 > -x_2$
   (ד) $x_2 < -x_1$
   (ה) $x_2 > -x_1$
   (ו) $-x_1 > -x_2$

3. נתון פרספטרון בינארי עם וקטור משקולות $\bar{w}$.
   נתונות שתי דוגמאות $\bar{x}^1$ ו־$\bar{x}^2$, עבורן מתקיים:
   $$\bar{w}^T\bar{x}^1 \neq 0 \ , \ \ \bar{w}^T\bar{x}^2 \neq 0$$
   מה מהבאים **יבטיח** ששתי דוגמאות **לא** יסווגו באותו הסיווג?
   (א) הדוגמאות מקיימות $\bar{x}^1 = \alpha\bar{w}$ עבור $\alpha > 0$ ו־ $\bar{x}^2 = \beta\bar{w}$ עבור $\beta > 0$
   (ב) הדוגמאות מקיימות $\alpha\left(\bar{x}^1 + \bar{x}^2\right) = \bar{w}$ עבור α סקלר כלשהו
   (ג) הדוגמאות מקיימות $\bar{w}^T\bar{x}^1 = \alpha\bar{w}^T\bar{x}^2$ עבור $\alpha < 0$
   (ד) כל התשובות לא מבטיחות ששתי הדוגמאות לא יסווגו באותו הסיווג

שאלה 1

עבור הפרספטרון הבינארי: $y = H(\bar{w} \cdot \bar{x})$, נתונות הדוגמאות הבאות וסיווגן הרצוי:

- $\mathbf{x}^1 = (2,2)$, $y^1 = 1$
- $\mathbf{x}^2 = (1,3)$, $y^2 = 1$
- $\mathbf{x}^3 = (-1,0)$, $y^3 = 0$
- $\mathbf{x}^4 = (-1,2)$, $y^4 = 0$

סעיף א'

התחילו מוקטור משקולות $\mathbf{w} = [1,1]$. ציירו באופן סכמטי את הנקודות, את וקטור המשקולות ואת הישר המפריד.

הציגו לפרספטרון את הדוגמאות הנתונות לפי הסדר, ועדכנו את המשקולות בהתאם לכלל הלמידה של הפרספטרון עד להתכנסות (כלומר, עד שהפרספטרון מסווג נכונה את כל ארבע הדוגמאות).

ציירו באופן סכמטי את הנקודות, את וקטור המשקולות ואת הישר המפריד לאחר ההתכנסות.

סעיף ב'

נתון פרספטרון בינארי עם סף $y = \mathrm{H}\left(w_1 x_1 + w_2 x_2 + T\right)$.

מצאו ערכי $\bar{w}$ ו־ T עבורם מתקיימים הכללים הבאים. הסבירו את תשובתכם.

1. $y = 1$ אם ורק אם $2x_1 + x_2 > 0$
2. $y = 1$ אם ורק אם $x_1 < 3x_2 + 4$

סעיף ג'

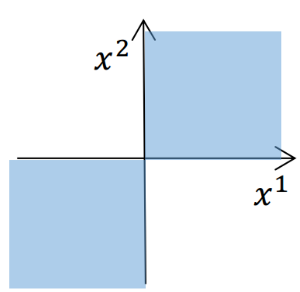
ראינו בכיתה כי פרספטרון בינארי לא מסוגל לבצע הפרדות שאינן לינאריות. בשביל הפרדות כאלו, נוכל להשתמש ברשת של כמה פרספטרונים בינאריים.

בנו רשת של פרספטרונים שתממש את הפונקציה **NXOR**:

$y = 1$ אם ורק אם $(x_1 > 0$ וגם $x_2 > 0)$ <u>או</u> $(x_1 < 0$ וגם $x_2 < 0)$

ראו בציור המצורף מטה.

השתדלו לבנות את הרשת היעילה ביותר שניתן לבנות, כלומר, עם כמה שפחות תאים/נוירונים (רמז: בשכבה הראשונה לא אמורים להיות יותר משלושה).



שאלה 2

1. כתבו פונקציה שמקבלת כקלט מטריצה בגודל $N \times P$, בה יש P דוגמאות ממרחב N־מימדי. הפונקציה מקבלת גם וקטור באורך P, בו כל התיוגים הרצויים לדוגמאות.
בעזרת אלגוריתם הלמידה של הפרספטרון, הפונקציה צריכה למצוא וקטור משקולות $\bar{w}$, שבעזרתו הפרספטרון מסווג נכונה את כל הדוגמאות.

2. הגדירו $N = 2$, והגרילו $P = 1000$ נקודות דו־מימדיות, כאשר כל קואורדינטה (x_1, x_2) מתפלגת בהתפלגות אחידה (רציפה) בין -10 ל־ 10. שתי הקואורדינטות מוגרלות באופן בלתי תלוי.
נקודות עבורן $x_2 > x_1$ יתויגו $y = 1$, ונקודות עבורן $x_2 < x_1$ יתויגו $y = 0$.

3. השתמשו בפונקציה שכתבתם בסעיף 1, ומצאו את הסיווג שקובע הפרספטרון לנקודות שהגרלתם בסעיף 2.
הציגו בגרף את המישור של x_1, x_2 ואת 1000 הנקודות שהגרלתן, כאשר הנקודות המתויגות לפי הפרספטרון ב־1 יוצגו בכחול והנקודות המתויגות לפי הפרספטרון ב־ 0 יוצגו באדום. ציירו על המישור את וקטור המשקולות שמצאה הפונקציה. חשבו (באופן אנליטי) את הישר המפריד מתוך הוקטור שהתקבל וציירו גם אותו על המישור.
<u>**הערה**</u>: אתחלו את האלגוריתם עם תנאי ההתחלה $\bar{w} = [1, 1]$.

4. נרצה להעריך את השגיאה בין הוקטור $\bar{w}$ אליו התכנס האלגוריתם על סמך הדוגמאות שראה, לבין פתרון אופטימלי $\bar{w}^*$, שמסווג נכונה כל דוגמה אפשרית. (מהו פתרון אופטימלי במקרה שלנו? האם קיים רק אחד כזה?)
נגדיר שגיאה זו כערך המוחלט של הזווית (במעלות) בין $\bar{w}$ ל־$\bar{w}^*$.
נרצה לבדוק כיצד השגיאה הממוצעת משתנה כפונקציה של מספר הדוגמאות מהן האלגוריתם למד. לצורך כך, עבור כל ערך של $P = 5, 20, 30, 50, 100, 150, 200, 500$ הריצו $M = 100$ סימולציות (**בכל סימולציה הגרילו את הנקודות מחדש**) וחשבו את השגיאה הממוצעת על פני M הסימולציות. הציגו גרף של השגיאה הממוצעת כפונקציה של P, והסבירו את התוצאה.

<u>תזכורת</u>: קוסינוס הזווית בין שני וקטורים $\bar{u}, \bar{v}$ הוא $\frac{\bar{u}^T \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}$.
במטלב, הפונקציה acosd היא הפונקציה ההופכית לקוסינוס שמחזירה ערכים במעלות. בפייתון, ניתן להשתמש בפונקציות np.arccos ו־ np.rad2deg.

אלגוריתם הלמידה של הפרספטרון - תזכורת

קלט: נקודות $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^P$ והסיווג לכל נקודה $y^1, \ldots, y^P$ ($y^\mu \in \{0, 1\}$)
אתחול: אתחלו את $\bar{w}$ לוקטור כלשהו
איטרציות:

1. עברו על כל הנקודות בסדר מסוים קבוע
2. לכל נקודה $\bar{x}^\mu$, אם המסווג טועה לגביה, עדכנו את וקטור המשקולות באופן הבא:

$$\bar{w}\left(k+1\right) = \bar{w}\left(k\right) + \left(2y^\mu - 1\right)\bar{x}^\mu$$

3. עצרו כאשר כל הנקודות מסווגות נכונה, כלומר לא היה שינוי בערך של $\bar{w}$ בכל האיטרציה האחרונה

<u>הערה</u>: במידה ומאתחלים את $\bar{w}$ להיות וקטור האפס, הדוגמה הראשונה שמציגים תמיד תסווג כטעות.

גן סרבג'
207044959
6119

חישוביות וקוג'

שאלות הקדמה

נתון הפרספטרון הבינארי $y = H(\bar{w}\cdot\bar{x})$, שמקבל דוגמאות דו־מימדיות $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

.1 אם ידוע כי $w_2 = 0$ וכי הדוגמה $\bar{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ מסווגת ב־ 0, מה ניתן לומר על הסיווג של הדוגמה $\bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$?

(א) תסווג כ־ 1
(ב) תסווג כ־ 0
(ג) לא ניתן לדעת

נימוק:

$$H(\bar{w}\cdot\bar{x}) = H\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = H(w_1\cdot 7) = 0 \Rightarrow w_1 < 0$$

ולכן:

$$H\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}\right) = H(w_1\cdot 5) = 0$$

.2 עבור $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, מה מהבאים **יבטיח** שדוגמה תסווג ב־ 1? (תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה)

(א) $x_1 = x_2$
(ב) $x_1 > x_2$
(ג) $x_1 > -x_2$
(ד) $x_2 < -x_1$
(ה) $x_2 > -x_1$
(ו) $-x_1 > -x_2$

$$H\left(\sum_{i=1}^{2} w_i x_i\right) = H(x_1 + x_2) = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > -x_2$$

.3 נתון פרספטרון בינארי עם וקטור משקולות $\bar{w}$.
נתונות שתי דוגמאות $\bar{x}^1$ ו־$\bar{x}^2$, עבורן מתקיים:

$$\bar{w}^T\bar{x}^1 \neq 0\ ,\ \ \bar{w}^T\bar{x}^2 \neq 0$$

מה מהבאים **יבטיח** ששתי דוגמאות **לא** יסווגו באותו הסיווג?

(א) הדוגמאות מקיימות $\bar{x}^1 = \alpha\bar{w}$ עבור $\alpha > 0$ ו־ $\bar{x}^2 = \beta\bar{w}$ עבור $\beta > 0$
(ב) הדוגמאות מקיימות $\alpha\left(\bar{x}^1 + \bar{x}^2\right) = \bar{w}$ עבור α סקלר כלשהו
(ג) הדוגמאות מקיימות $\bar{w}^T\bar{x}^1 = \alpha\bar{w}^T\bar{x}^2$ עבור $\alpha < 0$
(ד) כל התשובות לא מבטיחות ששתי הדוגמאות לא יסווגו באותו הסיווג

שתמש בלמינג'ה:

א) עבור $w=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\bar{x}^1=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $\bar{x}^2=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$, $\alpha=2$, $\beta=3$ נבנה משוואה

המקיימת את התנאים של מסווגת לינארית סימ.

ב) עבור $w=\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$, $\bar{x}^1=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $\bar{x}^2=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$, $\alpha=2$ נבנה משוואה המקיימת

את התנאים של מסווגת לינארית סימ.

ג) עבור $w=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\bar{x}^1=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $\bar{x}^2=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$, $\alpha=\frac{1}{2}$ נבנה משוואה המקיימת

את התנאים של מסווגת לינארית סימ.

שאלה 1

עבור הפרספטרון הבינארי: $y = H(\bar{w}\cdot\bar{x})$, נתונות הדוגמאות הבאות וסיווגן הרצוי:

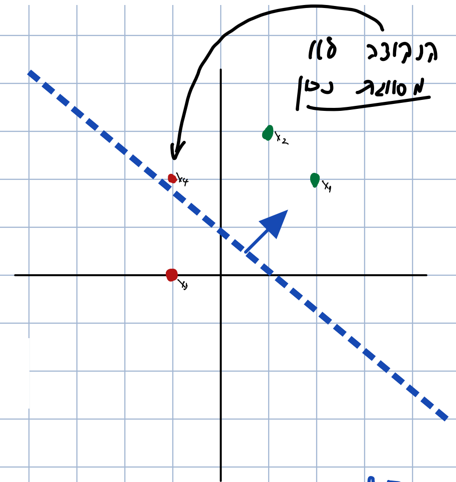
- $\mathbf{x}^1 = (2,2)$, $y^1 = 1$
- $\mathbf{x}^2 = (1,3)$, $y^2 = 1$
- $\mathbf{x}^3 = (-1,0)$, $y^3 = 0$
- $\mathbf{x}^4 = (-1,2)$, $y^4 = 0$

סעיף א'

התחילו מוקטור משקולות $\mathbf{w} = [1,1]$. ציירו באופן סכמטי את הנקודות, את וקטור המשקולות ואת הישר המפריד.

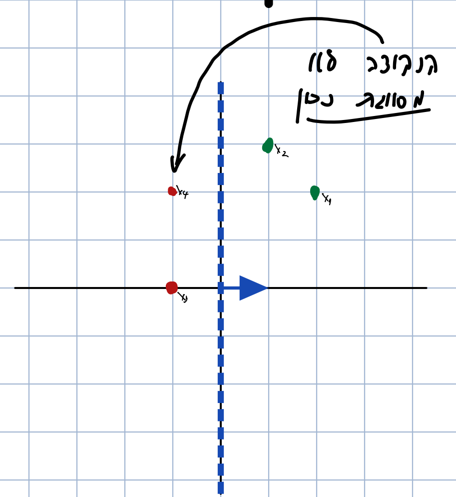
הציגו לפרספטרון את הדוגמאות הנתונות לפי הסדר, ועדכנו את המשקולות בהתאם לכלל הלמידה של הפרספטרון עד להתכנסות (כלומר, עד שהפרספטרון מסווג נכונה את כל ארבע הדוגמאות).

ציירו באופן סכמטי את הנקודות, את וקטור המשקולות ואת הישר המפריד לאחר ההתכנסות.



$$\bar{w}(k+1) = \bar{w}(k) + (2y^{\mu} - 1)\,\bar{x}^{\mu}$$

מצב אפס $w^0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	מצב ראשון $w^1 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$	מצב שני $w^2 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	מצב שלישי $w^3 = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$
✓ $H(w\cdot x^1) = H(4) = 1$	✓ $H(w\cdot x^1) = H(2) = 1$	✓ $H(w\cdot x^1) = H(10) = 1$	✓ $H(w\cdot x^1) = H(8) = 1$
✓ $H(w\cdot x^2) = H(4) = 1$	✗ $H(w\cdot x^2) = H(-1) = 0$	✓ $H(w\cdot x^2) = H(9) = 1$	✓ $H(w\cdot x^2) = H(4) = 1$
✓ $H(w\cdot x^3) = H(-1) = 0$	$\bar{w}^2 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + (2\cdot 1 - 1)\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$	✓ $H(w\cdot x^3) = H(-3) = 0$	✓ $H(w\cdot x^3) = H(-4) = 0$
✗ $H(w\cdot x^4) = H(1) = 1$		✗ $H(w\cdot x^4) = H(1) = 1$	✓ $H(w\cdot x^4) = H(-4) = 0$
$\Rightarrow \bar{w}^1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (2\cdot 0 - 1)\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$		$w^3 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + (2\cdot 0 - 1)\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$	



סעיף ב'

נתון פרספטרון בינארי עם סף $y = \mathrm{H}\left(w_1x_1 + w_2x_2 + T\right)$.
מצאו ערכי $\bar{w}$ ו- T עבורם מתקיימים הכללים הבאים. הסבירו את תשובתכם.

1. $y = 1$ אם ורק אם $2x_1 + x_2 > 0$

נבחין כי פרמטרי המשוואה הינם $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ וכי סף ההפעלה
הינו $T = 0$ לפי השקילות הבאה: $2x_1 + x_2 > 0 \iff H(w_1x_1 + w_2x_2 + T) = 1$

נקבל בהכרח כי:

1. $T = 0 \Rightarrow H(w_1x_1 + w_2x_2 + T) = H(w_1x_1 + w_2x_2)$
2. $w_1x_1 + w_2x_2 = 2x_1 + x_2 \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $y = 1$ אם ורק אם $x_1 < 3x_2 + 4$

מכיוון ש $x_1 < 3x_2 + 4$ שקול ל- $-4 < 3x_2 - x_1$
נקבל כי הפרמטרים של המשוואה הינם $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ וכי סף ההפעלה הוא $T = -4$
לפי השקילות הבאה: $H(w_1x_1 + w_2x_2 + T) = 1 \iff x_1 < 3x_2 + 4 \iff -4 < 3x_2 - x_1$

נקבל בהכרח כי:

1. $T = 0 \Rightarrow H(w_1x_1 + w_2x_2 + T) = H(w_1x_1 + w_2x_2 - 4)$
2. $w_1x_1 + w_2x_2 = 3x_2 - x_1 \Rightarrow w = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

שים ב תמונות ← לא תיימס לגרוש

סעיף ג'

ראינו בכיתה כי פרספטרון בינארי לא מסוגל לבצע הפרדות שאינן לינאריות. בשביל הפרדות כאלו, נוכל להשתמש ברשת של כמה פרספטרונים בינאריים.

בנו רשת של פרספטרונים שתממש את הפונקציה **NXOR**:

$y = 1$ אם ורק אם ($x_1 > 0$ וגם $x_2 > 0$) <u>או</u> ($x_1 < 0$ וגם $x_2 < 0$)

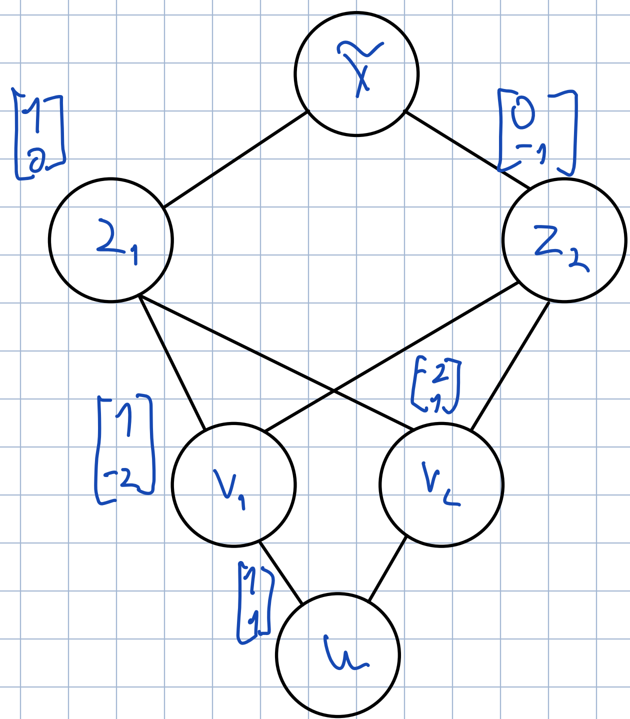
ראו בציור המצורף מטה.

השתדלו לבנות את הרשת היעילה ביותר שניתן לבנות, כלומר, עם כמה שפחות תאים/נוירונים (רמז: <u>בשכבה הראשונה</u> לא אמורים להיות <u>יותר משלושה</u>).

בתשו' נסתכל על תנאי הרשת:

$$y=1 \iff (x_1>0 \wedge x_2>0) \vee (x_1<0 \wedge x_2<0)$$

1.

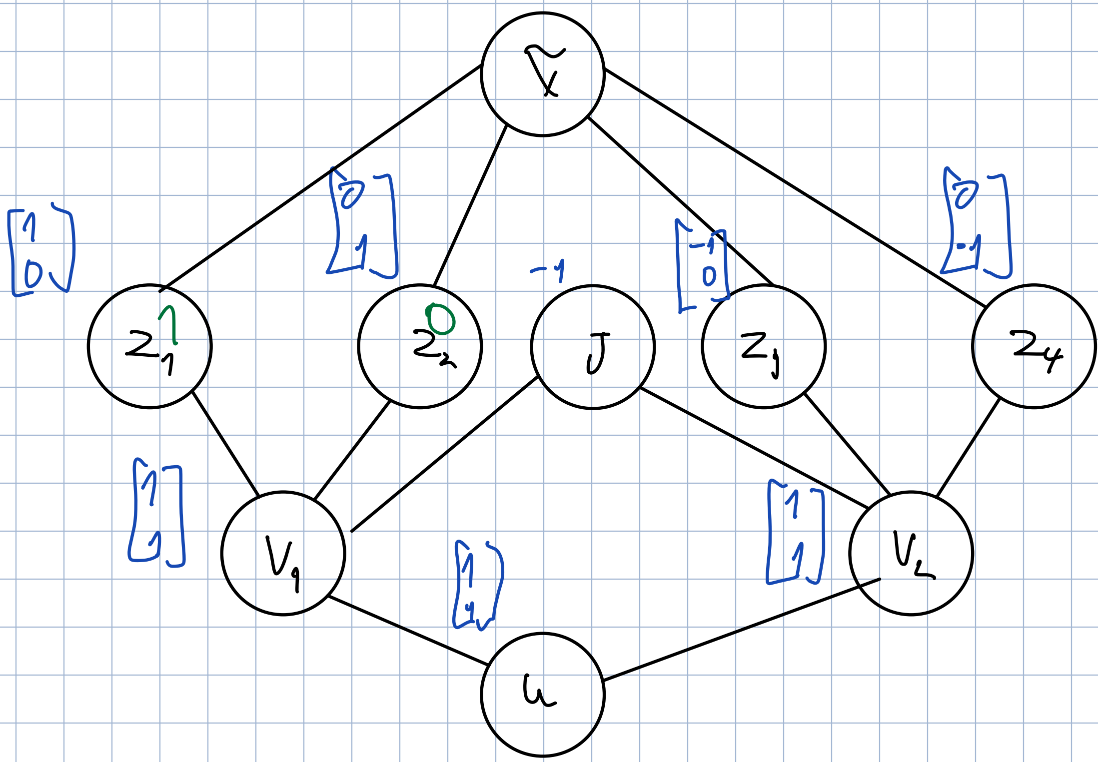


$$z_1 = H\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^t \cdot \tilde{x}\right) \qquad v_1 = H\left(\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\right)$$

$$u = H\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)$$

$$z_2 = H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}^t \cdot \tilde{x}\right) \qquad v_2 = H\left(\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\right)$$

2.



$$z_1 = H\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^t \cdot \tilde{x}\right)$$

$$z_2 = H\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^t \cdot \tilde{x}\right)$$

$$z_3 = H\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}^t \cdot \tilde{x}\right)$$

$$z_4 = H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}^t \cdot \tilde{x}\right)$$

$$J = -1$$

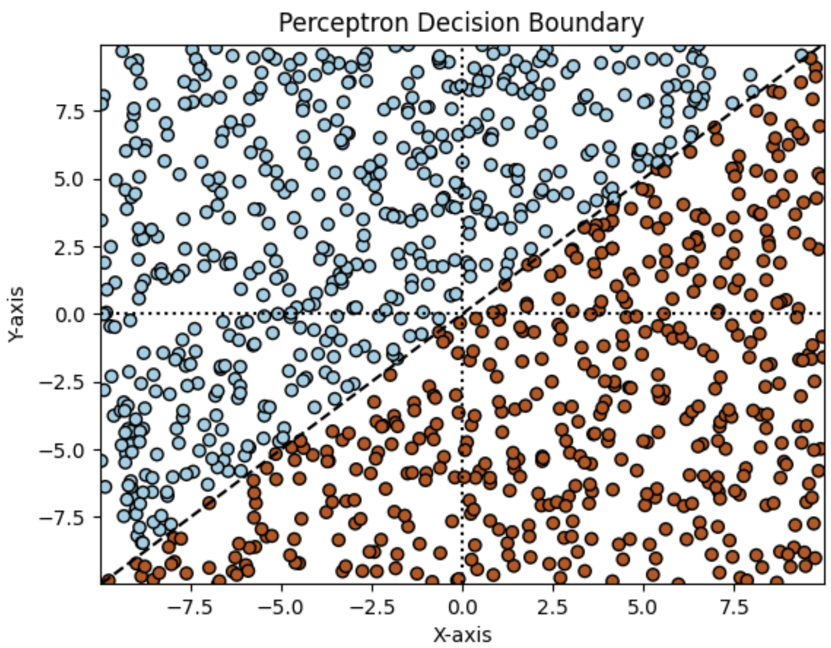
$$v = H\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix} + J\right)$$

$$v = H\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix}z_3\\z_4\end{bmatrix} + J\right)$$

$$u = H\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)$$

שאלה 2

3. השתמשו בפונקציה שכתבתם בסעיף 1, ומצאו את הסיווג שקובע הפרספטרון לנקודות שהגרלתם בסעיף 2. הציגו בגרף את המישור של x_1, x_2 ואת 1000 הנקודות שהגרלתן, כאשר הנקודות המתויגות לפי הפרספטרון ב־1 יוצגו בכחול והנקודות המתויגות לפי הפרספטרון ב־0 יוצגו באדום. ציירו על המישור את וקטור המשקולות שמצאה הפונקציה. חשבו (באופן אנליטי) את הישר המפריד מתוך הוקטור שהתקבל וציירו גם אותו על המישור.
<u>**הערה**</u>: אתחלו את האלגוריתם עם תנאי ההתחלה $\bar{w} = [1, 1]$.



4. נרצה להעריך את השגיאה בין הוקטור $\bar{w}$ אליו התכנס האלגוריתם על סמך הדוגמאות שראה, לבין פתרון אופטימלי $\bar{w}^*$, שמסווג נכונה כל דוגמה אפשרית. (מהו פתרון אופטימלי במקרה שלנו? האם קיים רק אחד כזה?)
נגדיר שגיאה זו כערך המוחלט של הזווית (במעלות) בין $\bar{w}$ ל־$\bar{w}^*$.
נרצה לבדוק כיצד השגיאה הממוצעת משתנה כפונקציה של מספר הדוגמאות מהן האלגוריתם למד. לצורך כך, עבור כל ערך של $P = 5, 20, 30, 50, 100, 150, 200, 500$ הריצו $M = 100$ סימולציות (**בכל סימולציה הגרילו את הנקודות מחדש**) וחשבו את השגיאה הממוצעת על פני M הסימולציות. הציגו גרף של השגיאה הממוצעת כפונקציה של P, והסבירו את התוצאה.

ניתן לראות לפי הממצאים בגרף כי ישנו הקשר מעין הפיך בין גודל סט האימון שלנו לבין פונק"ית ההפסד שלנו.