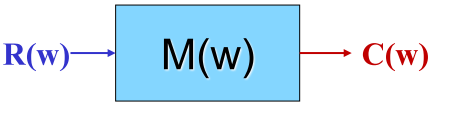
SISTEMAS DE CONTROL

TEMA 2
Análisis temporal de los Sistemas de Control

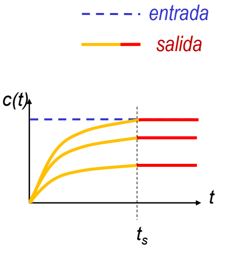
2.1. Ganancias en régimen permanente de un sistema.
2.2. Error y constantes de error en régimen permanente.
2.3. Respuesta de un sistema con polos reales dominantes.
2.4. Respuesta de un sistema con polos complejos conjugados dominantes.

© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Repaso



- Los sistemas de control en tiempo continuo o discreto son **analizados** mediante entradas *"estándar"*: impulso, escalón, rampa, oscilantes…
- Las características de diseño deseadas de los sistemas de control (continuos o discretos) se especifican en términos de **cantidades** en el dominio del tiempo.
- La respuesta temporal de un sistema estable lineal invariante en el tiempo puede descomponerse en **dos partes**:
  - La respuesta transitoria es originada por la propia característica dinámica del sistema.
  - La respuesta estacionaria depende fundamentalmente de la señal de excitación al sistema.

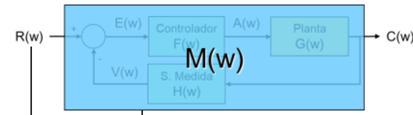


$t \to 0$ — Sistema M-RT

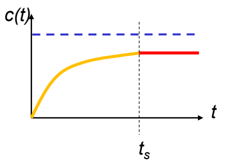
$t \to \infty$ — Entrada R-RP

Conceptos Previos

Régimen Permanente (RP)
+
Régimen Transitorio (RT)



$$c(t) = \underbrace{c_{rp}(t)}_{entrada} + \underbrace{c_{rt}(t)}_{sistema}$$



- **Régimen transitorio de la respuesta *c(t)*:**
  - **Matemáticamente:** $c_{rt}(t) = c(t) - c_{rp}(t)$
  - **Operativamente:** $c_{rp}(t) = c(t)\big|_{t \geq t_s}$
- **Pasos a seguir para analizar la salida:**
  1. Fijar R(w) y hallar M(w)
  2. C(w)=M(w)·R(w)
  3. c(t)=TL^{-1}[C(s)] si w=s

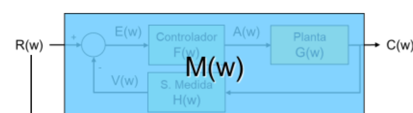
     c[k]=TZ^{-1}[C(z)] si w=z

Matlab (SMT)

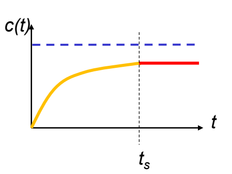
	Señal c(t)	Secuencia c[k]
1	>> R=U/s	>> R=Uz/(z-1)
	Definir G, F y H	
	>> M=F*G/(1+F*G*H)	
2	>> C=M*R	
3	>> c=ilaplace(C)	>> c=iztrans(C)

Conceptos Previos

Régimen Permanente (RP)
+
Régimen Transitorio (RT)



$$c(t) = \underbrace{c_{rp}(t)}_{entrada} + \underbrace{c_{rt}(t)}_{sistema}$$



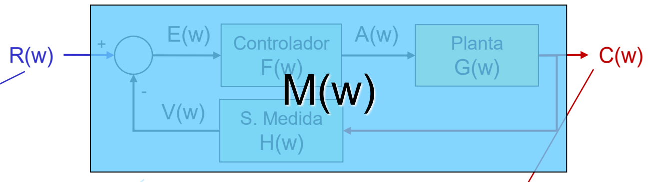
- **Régimen transitorio de la respuesta *c(t)*:**
  - **Matemáticamente:** $c_{rt}(t) = c(t) - c_{rp}(t)$
  - **Operativamente:** $c_{rp}(t) = c(t)\big|_{t \geq t_s}$
- **Pasos a seguir para analizar la salida:**
  1. Fijar R(w) y hallar M(w)
  2. C(w)=M(w)·R(w)
  3. c(t)=TL^{-1}[C(s)] si w=s

     c[k]=TZ^{-1}[C(z)] si w=z

Matlab (CST)

	Señal c(t)	Secuencia c[k]
1	Definir G, F, y H (T)	
1,2	M=feedback(series(F,G),H)	
1,3	c=step(M)	

Conceptos Previos
Salida vs. Sistema vs. Entrada



$$R(w)=\frac{N_R}{D_R}=\frac{N_R}{(w-\gamma)^{q_r}}$$

$$M(w)=\frac{N_M}{D_M}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(w-c_j)}{\prod_{i=1}^{n}(w-p_i)}$$

Tipo *q*
Orden *n*

Orden *n*

$$CA(w)=\frac{N_{CA}}{D_{CA}}=\frac{N_{CA}}{(w-\gamma)^{q}\prod_{i=1}^{n-q}(w-\alpha_i)}$$

$N_C=N_R\cdot N_M$

Si $K_0[H]=1$
$N_M=N_{CA}$

$$C(w)=\frac{N_C(w)}{\underbrace{(w-\gamma)^{q_r}}_{entrada}\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(w-p_i)}_{sistema}}$$

$D_C=D_R\cdot D_M$

POLITÉCNICA

5

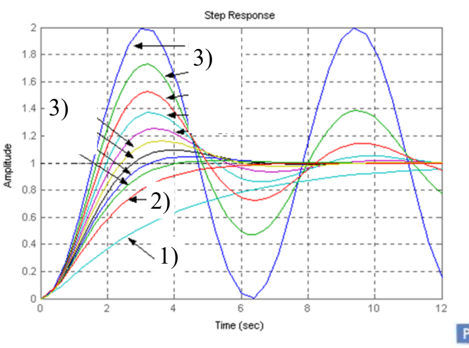
Conceptos Previos
Raíces de la ecuación característica

Según los polos de M(w), las componentes de entrada se sumarán a:

típicamente $\left\{\begin{array}{l}\text{Exponenciales crecientes o decrecientes (1)}\\ \text{Oscilaciones sinusoidales con envolventes exponenciales (3)}\end{array}\right.$

Depende de los *polos dominantes* de M(w):

1. Polos reales simples: **respuesta sobreamortiguada**
2. Polos reales dobles: **respuesta críticamente amortiguada**
3. Polos complejos conjugados: **respuesta subamortiguada**

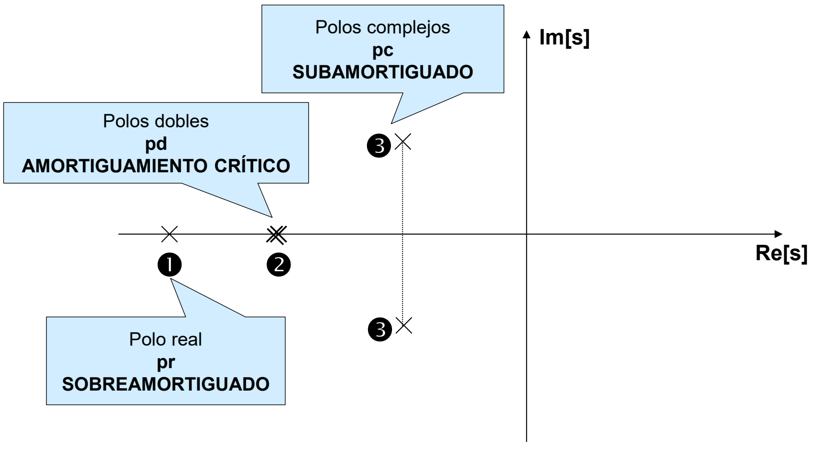


POLITÉCNICA

6

Clasificación de la respuesta temporal - S

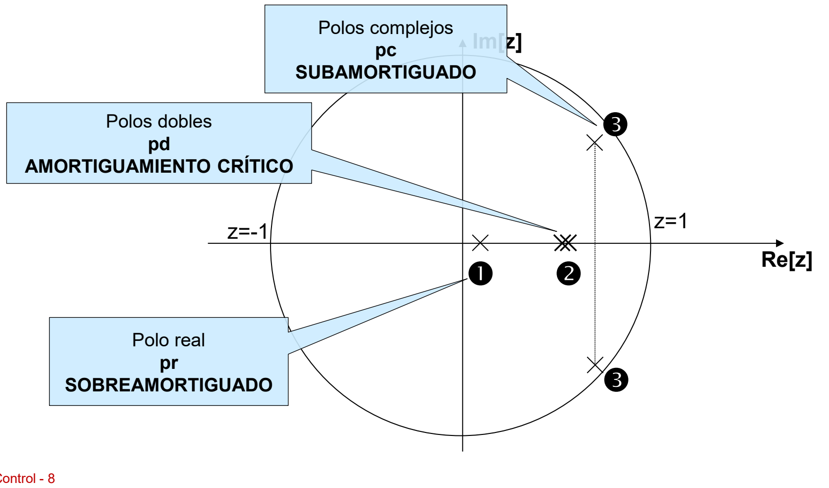
- Polos dominantes



7

Clasificación de la respuesta temporal - Z

- Polos dominantes



8

Conceptos Previos
Respuesta temporal

$$M(w) = \underbrace{M_1(w)}_{\text{Orden n1}} \cdot \underbrace{M_2(w)}_{\text{Orden n2}} \cdot \underbrace{M_3(w)}_{\text{Orden n3}}$$

Sea un sistema de orden n=n1+n2+n3 con:

- **n_1 polos reales**
- **$n_2/2$ polos dobles**
- **$n_3/2$ pares de polos complejos conjugados**

$$\frac{K}{D_M} = \frac{K_1}{D_{M1}} \cdot \frac{K_2}{D_{M2}} \cdot \frac{K_3}{D_{M3}}$$

$$M(w) = \frac{K}{\underbrace{\left[\prod_{i=1}^{n_1}(w-pr_i)\right]}_{D_{M1}} \underbrace{\left[\prod_{j=1}^{n_2/2}(w-pd_j)^2\right]}_{D_{M2}} \underbrace{\left[\prod_{q=1}^{n_3/2}(w-\mathrm{Re}[pc_q]-j\,\mathrm{Im}[pc_q])(w-\mathrm{Re}[pc_q]+j\,\mathrm{Im}[pc_q])\right]}_{D_{M3}}}$$

Respuesta transitoria:

$$m(t) = \left\{\sum_{i=1}^{n_1} Ar_i \cdot e^{pr_i t} + \sum_{j=1}^{n_2/2} Ad_j \cdot t \cdot e^{pd_j t} + \sum_{q=1}^{n_3/2}\left[Ac_q \cdot e^{\mathrm{Re}[pc_q]t} \cdot sen(\mathrm{Im}[pc_q]\cdot t)\right]\right\} \cdot u(t)$$

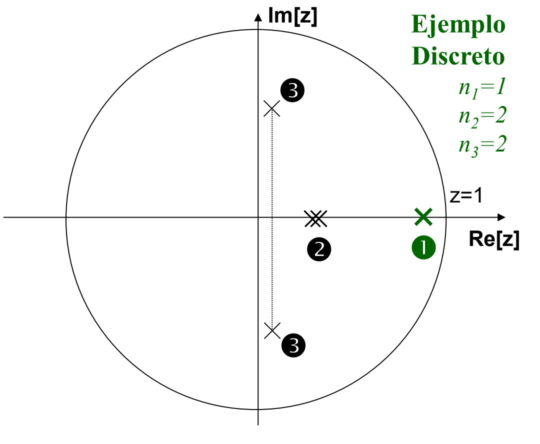
$$m[k] \approx \left\{\underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} Ar_i \cdot (pr_i)^k}_{m_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_2/2} Ad_j \cdot k \cdot (pd_j)^k}_{m_2} + \underbrace{\sum_{q=1}^{n_3/2}\left[Ac_q \cdot |pc_q|^k \cdot sen(k \cdot \underline{/\,pc_q})\right]}_{m_3}\right\} \cdot u[k]$$

Conceptos Previos
Respuesta temporal

Polos dominantes:

Aquellos cuya correspondiente exponencial decrece *mucho* más lentamente que las demás

- **Sistema continuo: parte real *mucho* mayor**
- **Sistema discreto: módulo *mucho* mayor**



Respuesta transitoria:

$$m(t) = \left\{\sum_{i=1}^{n_1} Ar_i \cdot e^{pr_i t} + \sum_{j=1}^{n_2/2} Ad_j \cdot t \cdot e^{pd_j t} + \sum_{q=1}^{n_3/2}\left[Ac_q \cdot e^{\mathrm{Re}[pc_q]t} \cdot sen(\mathrm{Im}[pc_q]\cdot t)\right]\right\} \cdot u(t)$$

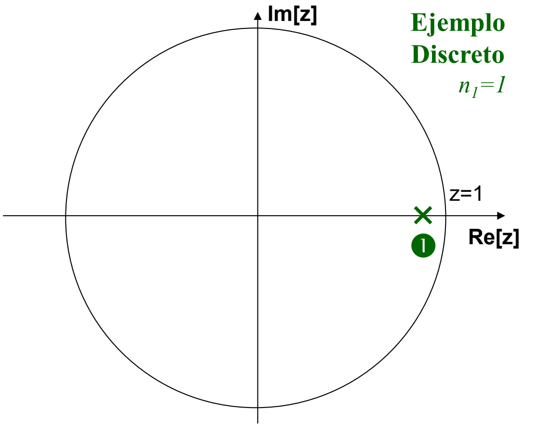
$$\boxed{m[k] \approx \left\{\underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} Ar_i \cdot (pr_i)^k}_{m1}\right.} + \underbrace{\cancel{\sum_{j=1}^{n_2/2} Ad_j \cdot k \cdot (pd_j)^k}}_{m_2} + \underbrace{\cancel{\sum_{q=1}^{n_3/2}\left[Ac_q \cdot |pc_q|^k \cdot sen(k \cdot \underline{/\,pc_q})\right]}}_{m_3}\left.\right\} \cdot u[k]$$

Conceptos Previos
Respuesta temporal

Polos dominantes:

Aquellos cuya correspondiente exponencial decrece *mucho* más lentamente que las demás

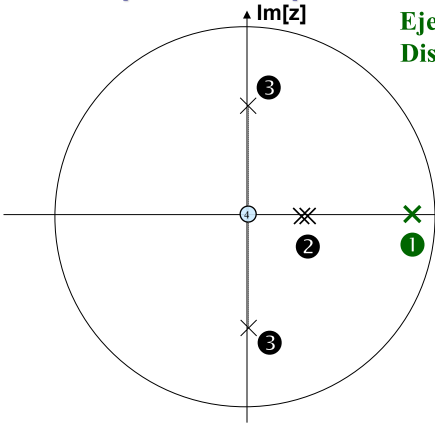
- **Sistema continuo:** parte real *mucho* mayor
- **Sistema discreto:** módulo *mucho* mayor

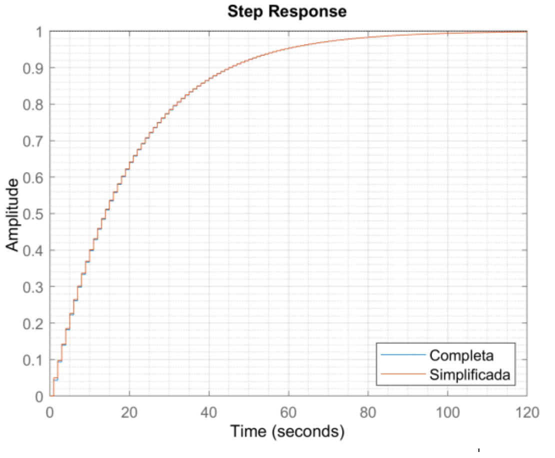


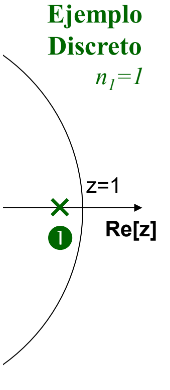
Respuesta transitoria:

$$\boxed{m[k] \approx A \cdot (p)^k \cdot u[k]}$$

Ejemplo
Respuesta temporal







$$M(z) = \frac{0.0349 \cdot z^4}{(z-0.95)\cdot(z-0.2)^2\cdot(z^2+0.09)}$$

$$M(z) \approx \frac{0.05}{(z-0.95)}$$