SISTEMAS DE CONTROL

TEMA 2
Análisis temporal de los Sistemas de Control

2.1. Ganancias en régimen permanente de un sistema.
2.2. Error y constantes de error en régimen permanente.
2.3. Respuesta de un sistema con polos reales dominantes.
2.4. Respuesta de un sistema con polos complejos conjugados dominantes.

© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

1

© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Sistemas sobreamortiguados
Polos dominantes reales simples

$$M(w) \approx \frac{K}{\prod_{i=1}^{n}(w-p_i)}$$

Respuesta transitoria:

$$m(t) \approx \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot e^{p_i t}\right) \cdot u(t) \qquad m[k] \approx \left[\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot (p_i)^k\right] \cdot u[k]$$

Serán dominantes aquéllos para los que $\begin{cases} p_i \uparrow\uparrow \text{ (si w=s)} \\ |p_i| \uparrow\uparrow \text{ (si w=z)} \end{cases}$

Se podrán despreciar los p_j que cumplan con respecto a los demás p_i: $\begin{cases} p_j \ll p_i \text{ (si w=s)} \\ |p_j| \ll |p_i| \text{ (si w=z)} \end{cases}$

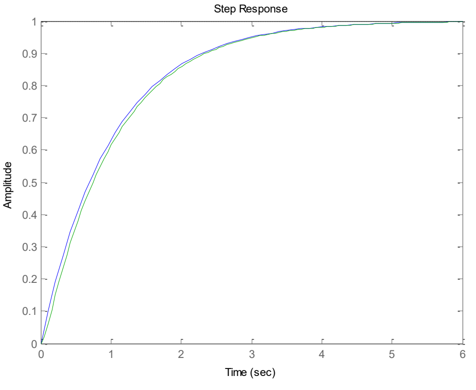
La simplificación de M(w) no debe afectar su comportamiento permanente
Los retardos (en z) y su ganancia significativa debe mantenerse

2

Sistemas sobreamortiguados

Ejemplo 1:

$$M(s)=\frac{20}{(s+1)(s+20)} \quad \text{➔ Simplificación ➔} \quad M'(s)=\frac{1}{(s+1)}$$




```
>> M = zpk([],[-1 -20],20)
>> step(M)
>> hold on
>> Maux = zpk([],-1,1)
>> Mp = Maux*dcgain(M)/dcgain(Maux)
>> step(Mp)
```


© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Sistemas sobreamortiguados

Ejemplo 2:

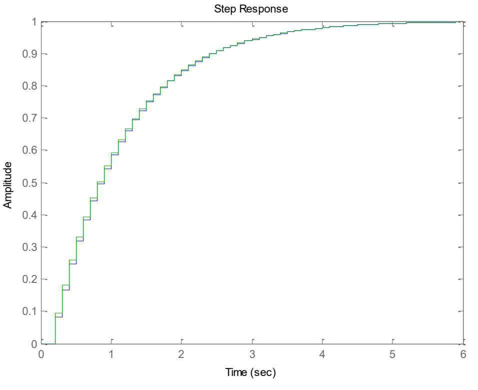
$$M(z)=\frac{0.0822}{(z-0.905)(z-0.135)} \quad \text{➔ Simplificación ➔} \quad M'(z)=\frac{0.095}{z(z-0.905)}$$

Se añade un polo en z=0 para mantener el retardo E/S en el modelo simplificado

Sistemas sobreamortiguados

Ejemplo 2:

$$M(z) = \frac{0.0822}{(z-0.905)(z-0.135)} \rightarrow \text{Simplificación} \rightarrow M'(z) = \frac{0.095}{z(z-0.905)}$$



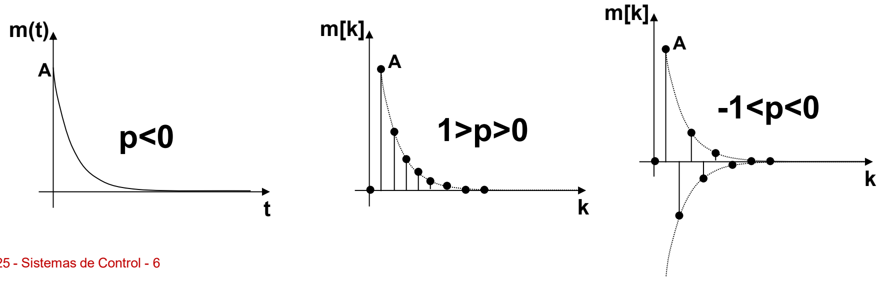

```
>> M = zpk([],[0.905 0.135],0.0822,0.1)
>> step(M)
>> hold on
>> Maux = zpk([],[0 0.905],1,0.1)
>> Mp = Maux/dcgain(Maux)*dcgain(M)
>> step(Mp)
```

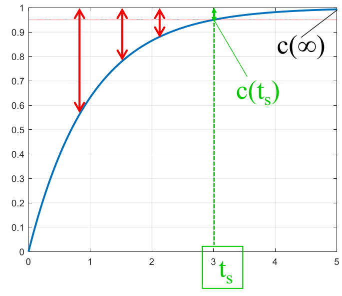

Sistemas sobreamortiguados

Respuesta sobreamortiguada
Sistemas sobreamortiguados

$$M(w) \approx \frac{K}{w-p}$$

Respuesta transitoria: $m(t) \approx A \cdot e^{pt} \cdot u(t)$ $\quad m[k] \approx A \cdot (p)^{k-1} \cdot u[k-1]$





© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Sistemas sobreamortiguados

Caracterización de la respuesta transitoria

Cálculo del Tiempo de Establecimiento

Tiempo que tarda la respuesta ante escalón en llegar a 0.95·c(∞)

Sistemas continuos:

$$\left|\frac{c(t_s)-c(\infty)}{c(\infty)}\right| = 0.05$$

$$\boxed{t_s = \frac{\ln 0.05}{p} \approx \frac{-\pi}{p} = \frac{\pi}{|p|} = \frac{\pi}{|\mathrm{Re}[p]|}}$$

Sistemas discretos:

$$\left|\frac{c[k_s]-c[\infty]}{c[\infty]}\right| = 0.05$$

$$\boxed{t_s = k_s \cdot T}$$

$$\boxed{k_s = \left\lceil \frac{\ln 0.05}{\ln|p|} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{-\pi}{\ln|p|} \right\rceil}$$

$$ln(0.05) = -2.9957$$

$$t_s \approx \frac{-3}{p}$$

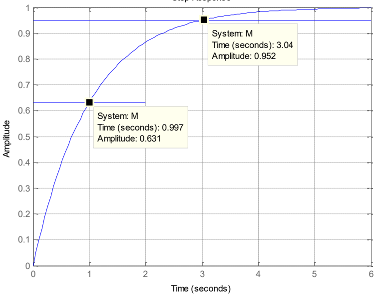
$$k_s \approx \left\lceil \frac{-3}{\ln|p|} \right\rceil$$

© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Tiempo de establecimiento Sistemas continuos

$$M(s) = \frac{K}{s-p}$$

$$c(t) = \frac{K}{-p}\left(1-e^{pt}\right)\cdot u(t)$$

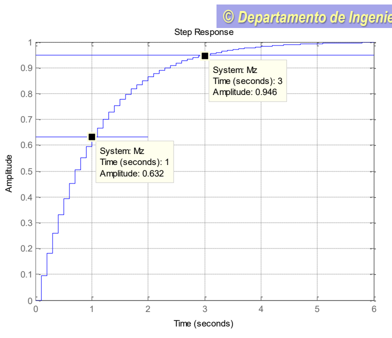


Definición de tiempo de establecimiento → $\left|\frac{c(t_s)-c(\infty)}{c(\infty)}\right| = 0.05$ ⇒ $\left|\frac{\frac{K}{-p}\left(1-e^{pt_s}\right)-\frac{K}{-p}}{\frac{K}{-p}}\right| = 0.05$

$$e^{pt_s} = 0.05$$

$$\boxed{t_s = \frac{\ln 0.05}{p}}$$

Tiempo de establecimiento
Sistemas discretos



$$M(z)=\frac{K}{z-p}$$

$$c[k]=\frac{K}{1-p}\left(1-p^{k}\right)\cdot u[k]$$

Definición de intervalo de establecimiento → $\left|\frac{c[k_s]-c[\infty]}{c[\infty]}\right|=0.05$

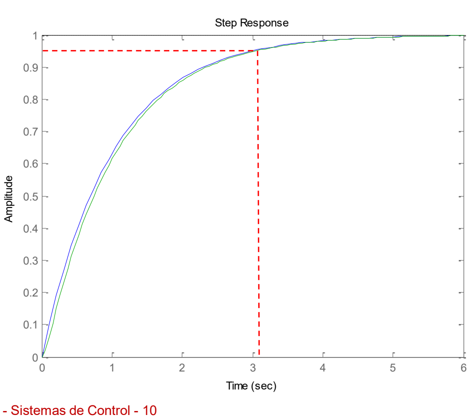
$$\boxed{k_s=\left\lceil\frac{\ln 0.05}{\ln|p|}\right\rceil}$$

Definición de tiempo de establecimiento → $\boxed{t_s=k_s\cdot T}$

Cálculo de t_s

Ejemplo 1:

$M(s)=\frac{20}{(s+1)(s+20)}$ → Simplificación → $M'(s)=\frac{1}{(s+1)}$



$$t_s\approx\frac{\pi}{|\mathrm{Re}[p]|}=\frac{\pi}{|-1|}=3.14s$$

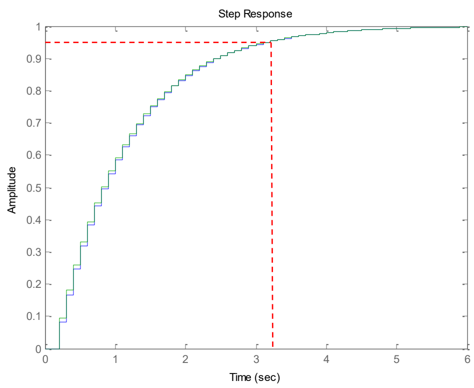
Cálculo de t_s

Ejemplo 2:

$$M(z) = \frac{0.0822}{(z-0.905)(z-0.135)} \rightarrow \text{Simplificación} \rightarrow M'(z) = \frac{0.095}{z(z-0.905)}$$

Periodo de muestreo T=100ms

$$M'(z) = \frac{0.095}{z-0.905} \cdot z^{-1}$$



$$k_s \approx \left\lceil \frac{-\pi}{\ln|p|} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{-\pi}{\ln 0.905} \right\rceil + 1 = 33$$

$$t_s = k_s \cdot T = 33 \cdot 0.1 = 3.3s$$

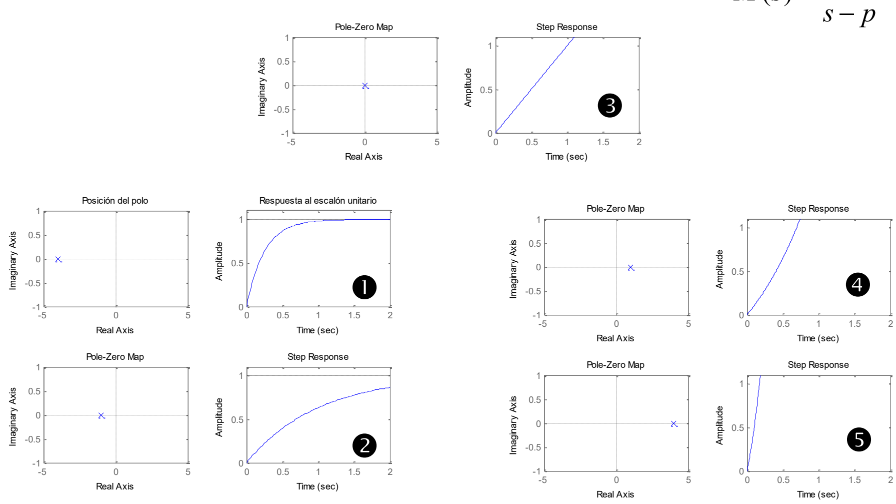
Nº entero

Múltiplo de T

Relación polo-respuesta Continuos

• Sistema sobreamortiguado de orden 1

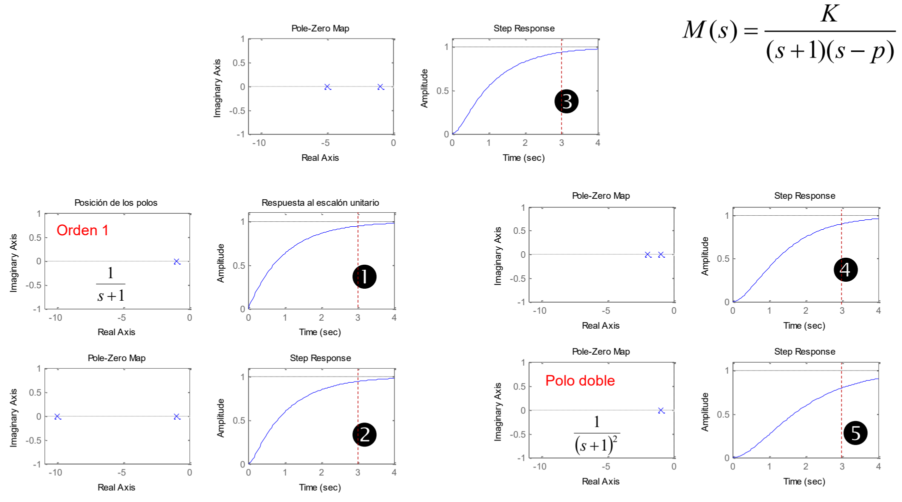
$$M(s) = \frac{K}{s-p}$$



Relación polo-respuesta Continuos

•Sistema sobreamortiguado de orden 2 con polo dominante

$$M(s)=\frac{K}{(s+1)(s-p)}$$



POLITÉCNICA

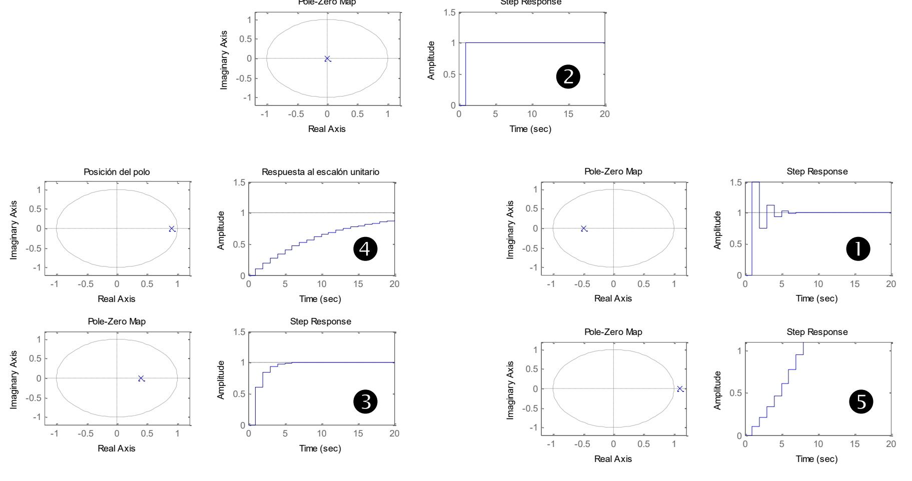
13

© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Relación polo-respuesta Discretos

•Sistema sobreamortiguado de orden 1

$$M(z)=\frac{K}{z-p}$$



POLITÉCNICA

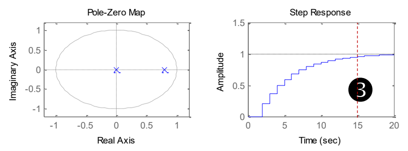
14

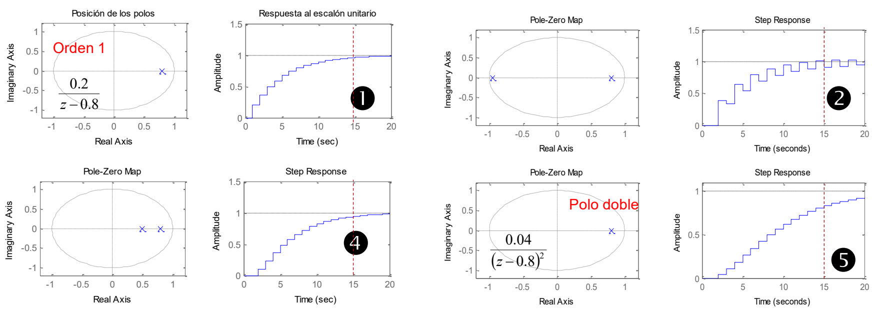
© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Relación polo-respuesta Discretos

•Sistema sobreamortiguado de orden 2 con polo dominante

$$M(z)=\frac{K}{(z-0.8)(z-p)}$$





POLITÉCNICA

© Departamento de Ingeniería Telemática y Electrónica

Ejercicio 1

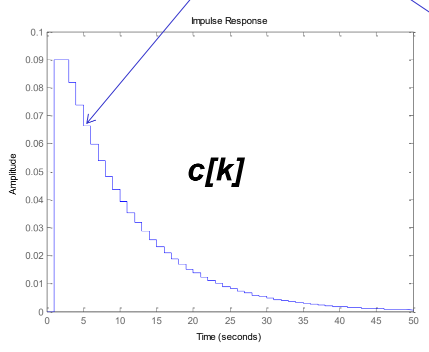
- Obtenga la FT simplificada del sistema en lazo cerrado en caso de que sea posible y calcule su tiempo de establecimiento
- T=1s

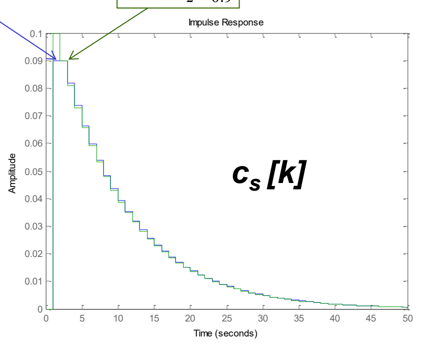
$$M(1)=\frac{0.09}{(1-0.1)(1-0.9)}=1$$

$$\boxed{M(z)=\frac{0.09z}{(z-0.1)(z-0.9)}}$$

$$M_s(1)=\frac{K_s}{1-0.9}=M(1)=1$$

$$\boxed{M_s(z)=\frac{0.1}{z-0.9}}$$





$$k_s \approx \left\lceil \frac{-\pi}{\ln|p|} \right\rceil = \left\lceil \frac{-\pi}{\ln 0.9} \right\rceil = 30$$

$$t_s = k_s \cdot T = 30 \cdot 1 = 30s$$

POLITÉCNICA

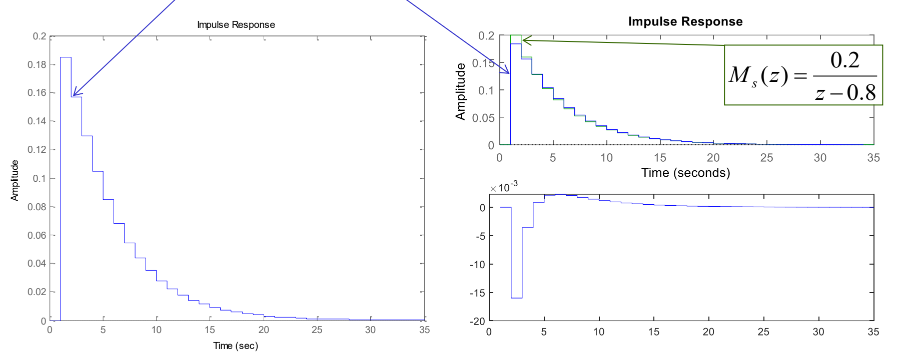
Ejercicio 2

- Obtenga la FT simplificada del sistema en lazo cerrado en caso de que sea posible
- T=1s

$$M(1)=\frac{0.185(1-0.35)}{(1-0.4)(1-0.8)}=1$$

$$M(z)=\frac{0.185(z-0.35)}{(z-0.4)(z-0.8)}$$

$$M_s(1)=\frac{K_s}{1-0.8}=M(1)=1$$



$$M_s(z)=\frac{0.2}{z-0.8}$$

Ejercicio 3

- Obtener la respuesta temporal a un impulso unitario aplicado a un sistema cuya F.de T. es la siguiente:

$$G(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

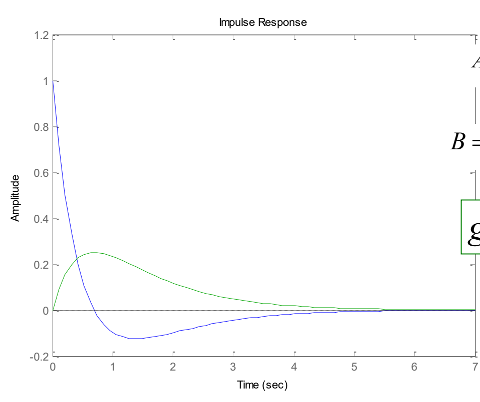
$$G_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$A=\lim_{s\to -1}(s+1)G(s)=\lim_{s\to -1}\frac{s}{s+2}=-1$$

$$B=\lim_{s\to -2}(s+2)G(s)=\lim_{s\to -2}\frac{s}{s+1}=2$$

$$\boxed{g(t)=-e^{-t}+2e^{-2t}}$$



$$A=\lim_{s\to -1}(s+1)G_1(s)=1$$

$$B=\lim_{s\to -2}(s+2)G_1(s)=-1$$

$$\boxed{g_1(t)=e^{-t}-e^{-2t}}$$

Ejercicio 4

- Simplificar las siguientes FdeT sabiendo que la ganancia estática es unitaria:

FdeT	Simplificación
$M_1(s)=\dfrac{K_1}{(s+1)(s+5)(s+20)}$	
$M_2(z)=\dfrac{K_2}{(z-0.9)(z-0.5)(z-0.2)}$	
$M_3(s)=\dfrac{K_3(s+0.9)}{(s+1)(s+5)(s+20)}$	
$M_4(z)=\dfrac{K_4(z-0.91)}{(z-0.9)(z-0.6)(z-0.1)}$	
$M_5(z)=\dfrac{K_5(z-0.89)(z-0.51)}{(z-0.9)(z-0.5)(z-0.2)}$	