

SISTEMAS DE CONTROL

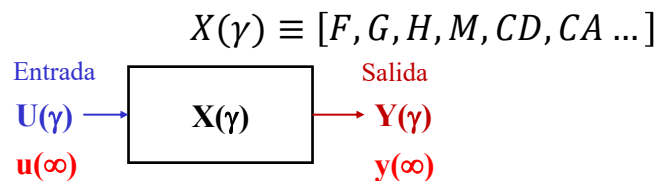
TEMA 2 Análisis Temporal de los Sistemas de Control

- 2.1. Ganancias en régimen permanente de un sistema.
- 2.2. Error y constantes de error en régimen permanente.
- 2.3. Respuesta de un sistema con polos reales dominantes.
- 2.4. Respuesta de un sistema con polos complejos conjugados dominantes.

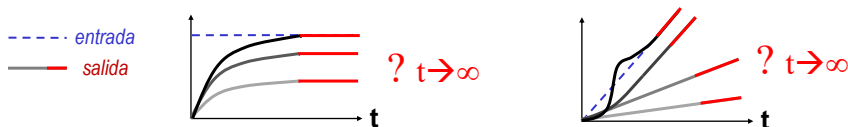
01/10/2025 - Sistemas de Control - 1

1

Concepto



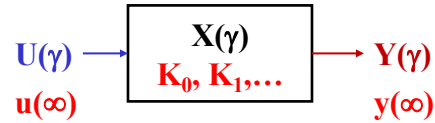
- Análisis de la influencia de los sistemas sobre el **régimen permanente** (RP) de su respuesta



01/10/2025 - Sistemas de Control - 2

2

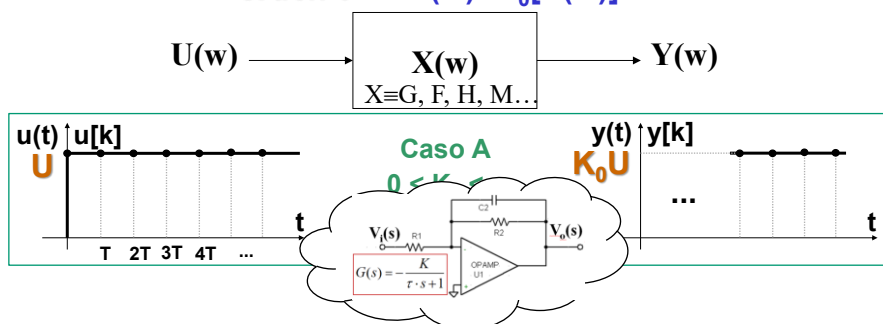
Concepto



- Análisis de la influencia de los sistemas sobre el régimen permanente (RP) de su respuesta.
- Se caracterizará mediante una serie ordenada de **ganancias** ($K_0, K_1, K_2 \dots$).
- En función del tipo de influencia del sistema sobre el RP sólo una de las ganancias será **significativa**:
 - K_0 significativa \Leftrightarrow sistema sin factores integrales.
 - K_1 significativa \Leftrightarrow sistema con un factor integral.
 - ...
- El valor de la ganancia significativa **cuantificará** la influencia del sistema.

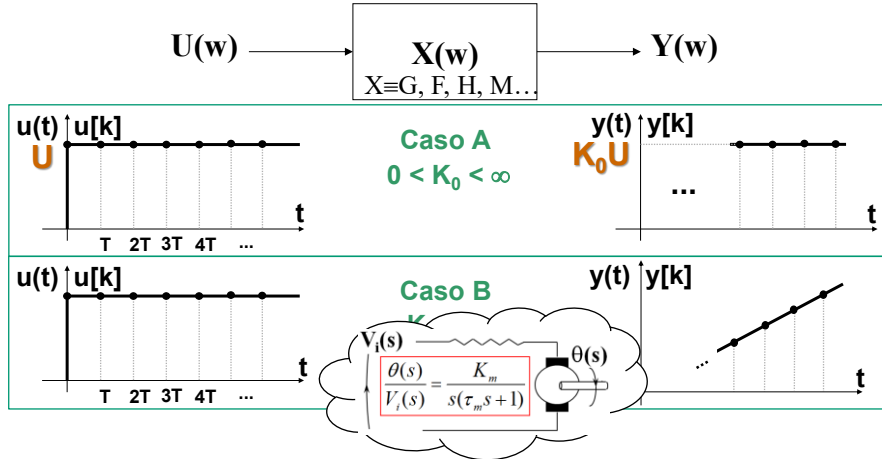
Ganancia de Orden 0 de un sistema X

• **Ganancia de orden 0** de $X(w)$: $K_0[X(w)]$



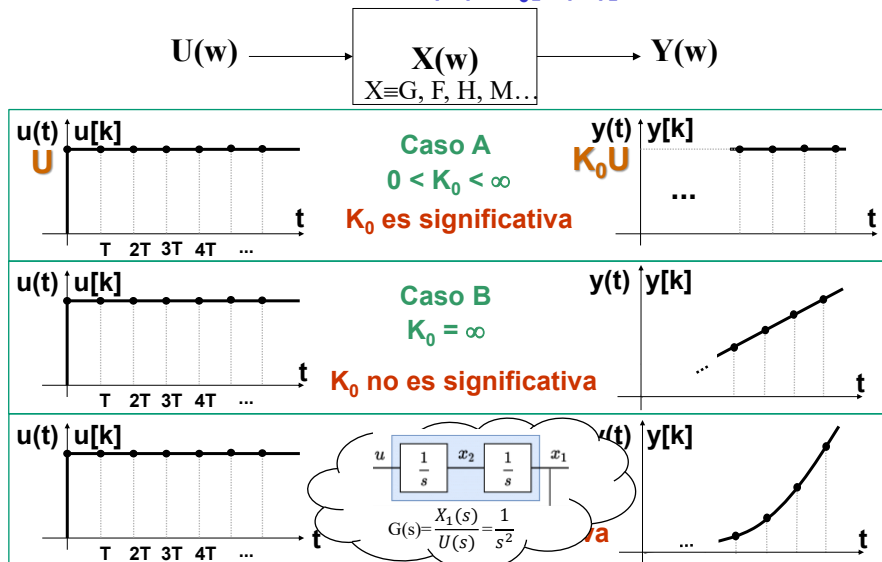
Ganancia de Orden 0 de un sistema X

•Ganancia de orden 0 de $X(w)$: $K_0[X(w)]$



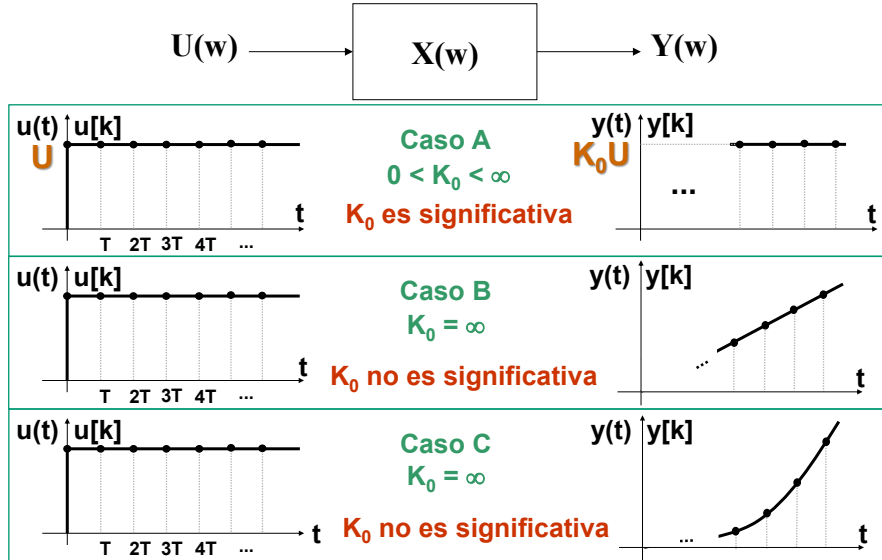
Ganancia de Orden 0 de un sistema X

•Ganancia de orden 0 de $X(w)$: $K_0[X(w)]$



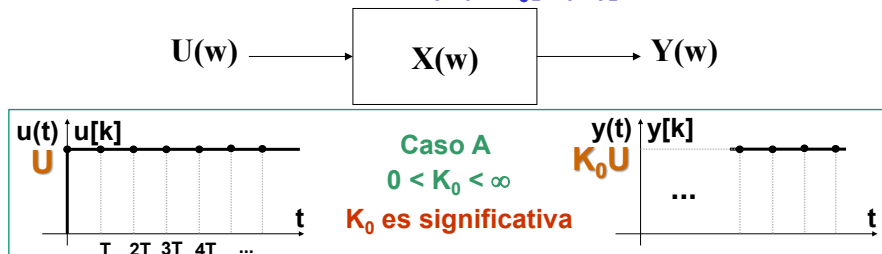
Ganancia de Orden 0 de un sistema X

•Ganancia de orden 0 de $X(w)$: $K_0[X(w)]$

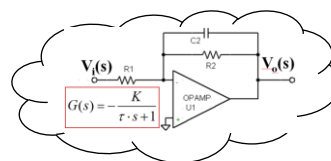


Ganancia de Orden 0 de un sistema X

•Ganancia de orden 0 de $X(w)$: $K_0[X(w)]$

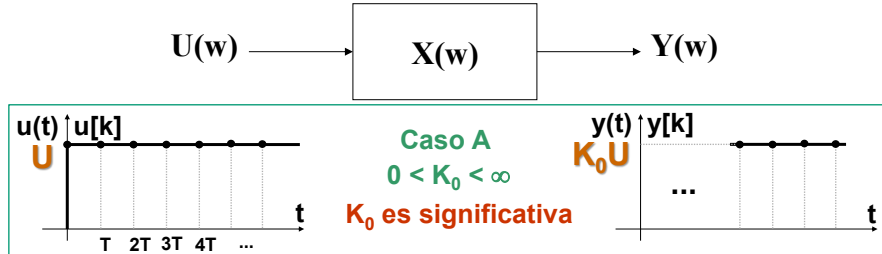


$$X(w) = \frac{N_X(w)}{(w - \gamma)^0 \prod_{i=1}^n (w - p_i)}$$



Ganancia de Orden 0 de un sistema X

•Ganancia de orden 0 de $X(w)$: $K_0[X(w)]$



$$X(w) = \frac{N_X(w)}{(w - \gamma)^0 \prod_{i=1}^n (w - p_i)}$$

Ganancia estática de X

$$K_0[X(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma)^0 X(w)$$

>> **dcgain(X)**
(ganancia estática)

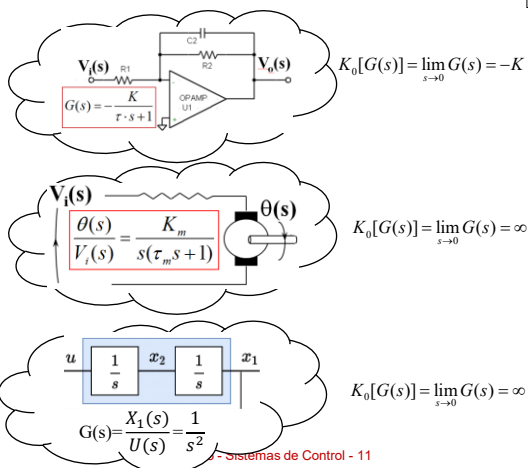
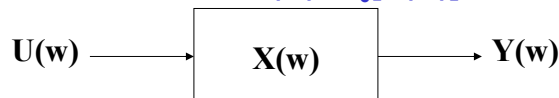
01/10/2025 - Sistemas de Control - 10

POLITÉCNICA

10

Ganancia de Orden 0 de un sistema X

•Ganancia de orden 0 de $X(w)$: $K_0[X(w)]$



Ante una entrada constante, K_0 condiciona el valor de la amplitud de la salida en RP

Ganancia estática de X

$$K_0[X(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma)^0 X(w)$$

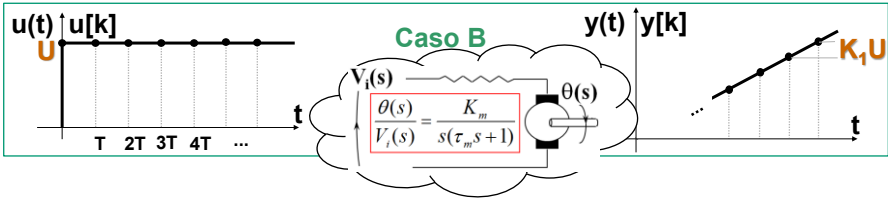
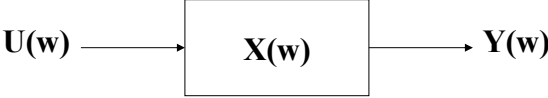
01/10/2025 - Sistemas de Control - 11

POLITÉCNICA

11

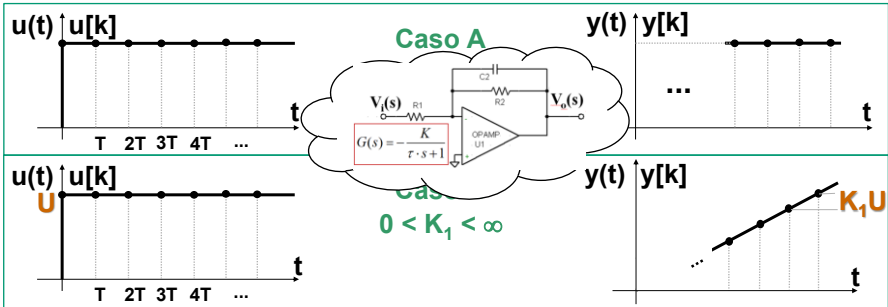
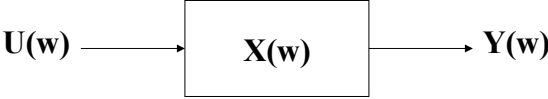
Ganancia de Orden 1 de un sistema X

•Ganancia de **orden 1** de $X(w)$: $K_1[X(w)]$



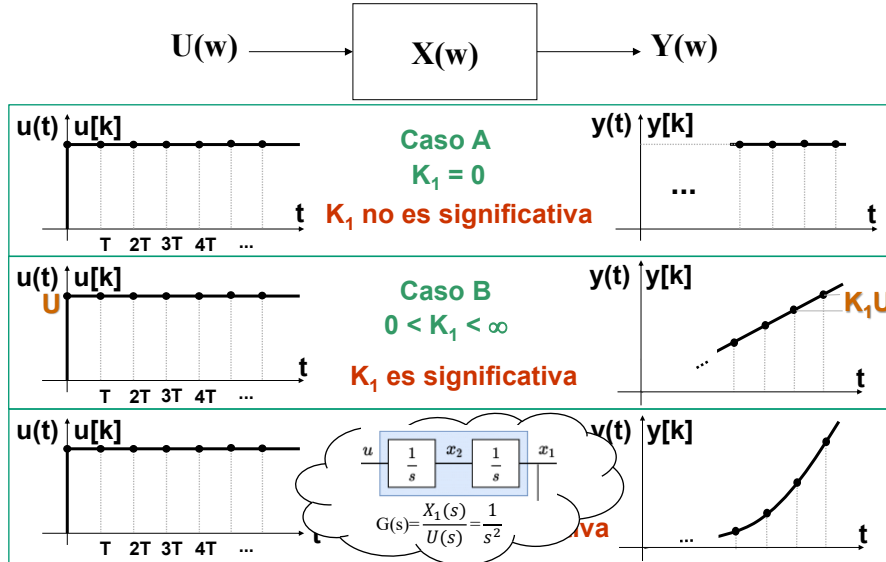
Ganancia de Orden 1 de un sistema X

•Ganancia de **orden 1** de $X(w)$: $K_1[X(w)]$



Ganancia de Orden 1 de un sistema X

•Ganancia de orden 1 de $X(w)$: $K_1[X(w)]$

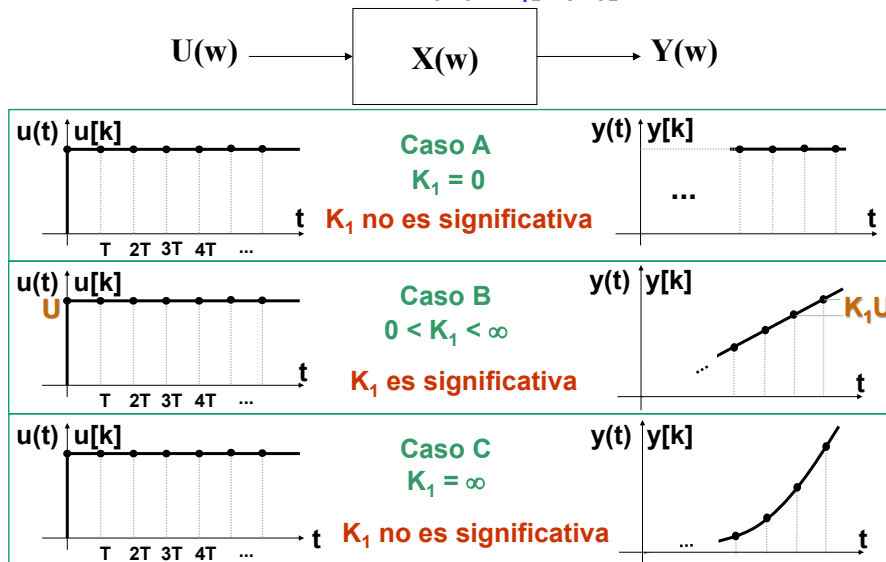


POLITÉCNICA

14

Ganancia de Orden 1 de un sistema X

•Ganancia de orden 1 de $X(w)$: $K_1[X(w)]$

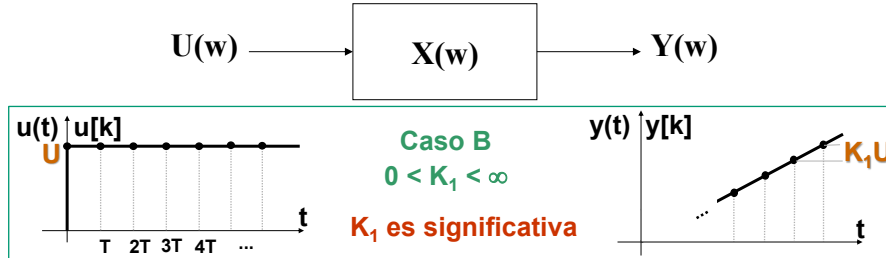


POLITÉCNICA

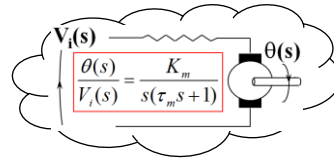
15

Ganancia de Orden 1 de un sistema X

•Ganancia de orden 1 de $X(w)$: $K_1[X(w)]$



$$X(w) = \frac{N_X(w)}{(w - \gamma)^1 \prod_{i=1}^{n-1} (w - p_i)}$$



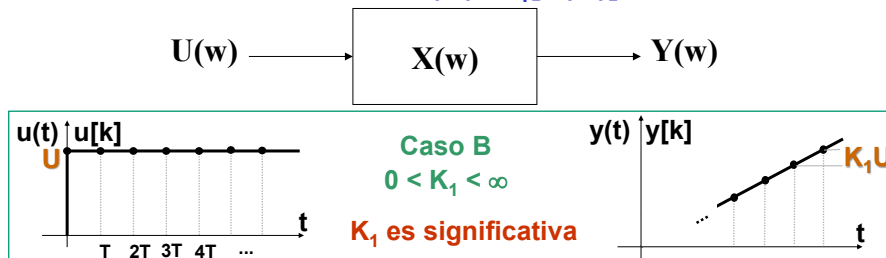
01/10/2025 - Sistemas de Control - 16

POLITÉCNICA

16

Ganancia de Orden 1 de un sistema X

•Ganancia de orden 1 de $X(w)$: $K_1[X(w)]$



$$X(w) = \frac{N_X(w)}{(w - \gamma)^1 \prod_{i=1}^{n-1} (w - p_i)}$$

$$K_1[X(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma)^1 X(w)$$

```
>> % X1=X sin integral
>> K1=dcgain(X1);
>> dcgain(X)
```

>> Inf

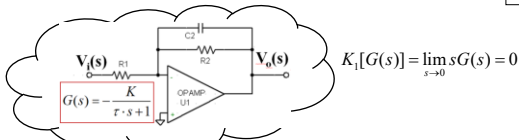
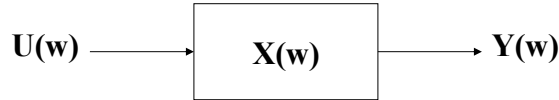
01/10/2025 - Sistemas de Control - 17

POLITÉCNICA

17

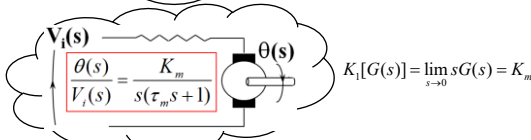
Ganancia de Orden 1 de un sistema X

•Ganancia de orden 1 de $X(w)$: $K_1[X(w)]$



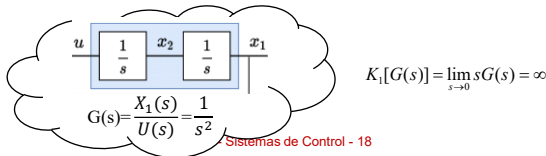
$$K_1[G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

Ante una entrada constante, K_1 condiciona el valor de la pendiente de la salida en RP



$$K_1[G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_m$$

$$K_1[X(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma) X(w)$$



$$K_1[G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$$

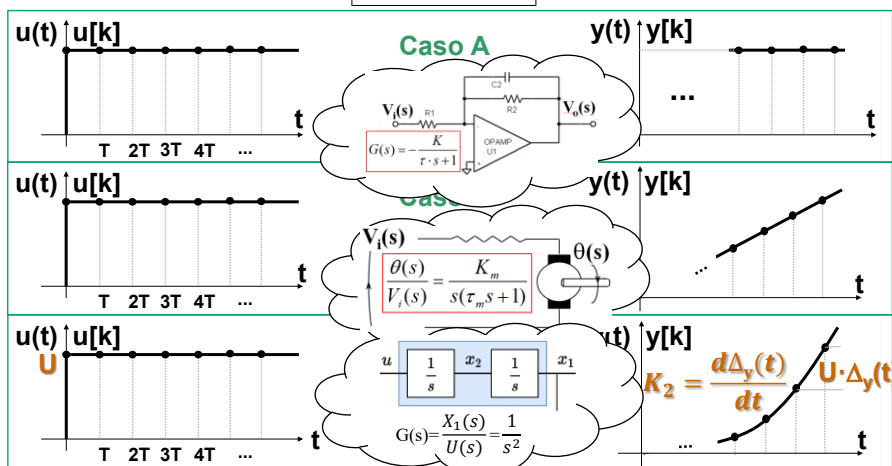
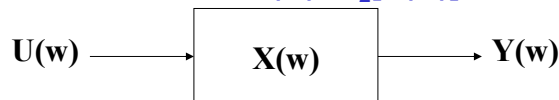
Sistemas de Control - 18

POLITÉCNICA

18

Ganancia de Orden 2 de un sistema X

•Ganancia de orden 2 de $X(w)$: $K_2[X(w)]$

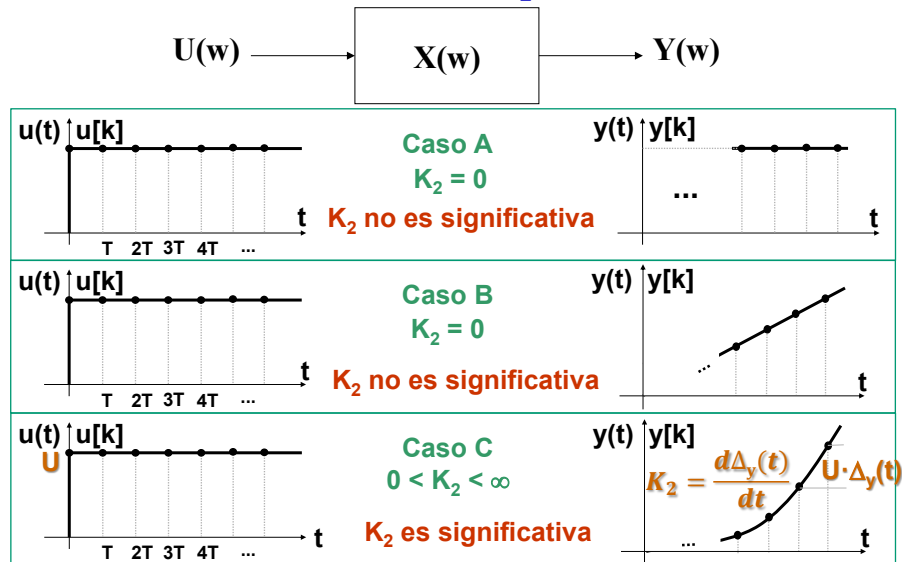


POLITÉCNICA

19

Ganancia de Orden 2 de un sistema X

•Ganancia de orden 2 de $X(w)$: $K_2[X(w)]$

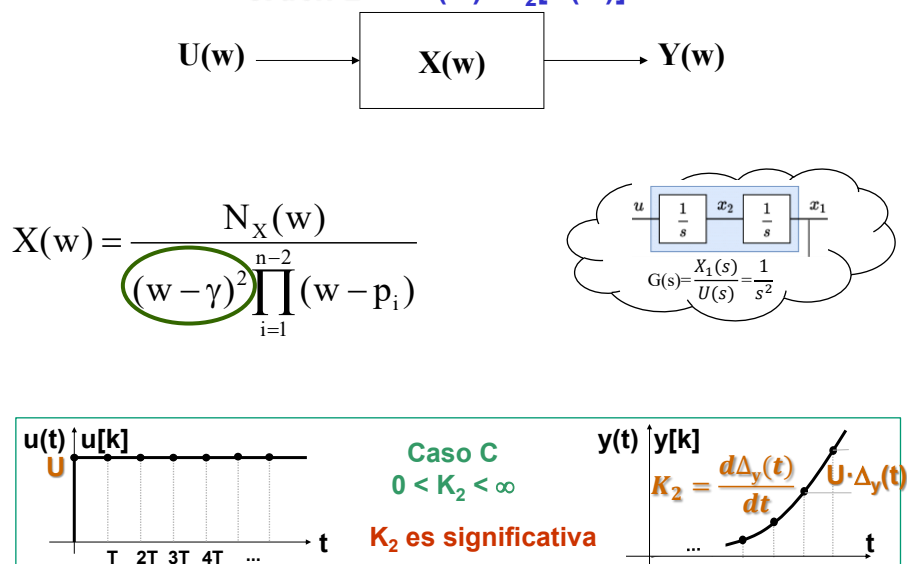


POLITÉCNICA

20

Ganancia de Orden 2 de un sistema X

•Ganancia de orden 2 de $X(w)$: $K_2[X(w)]$

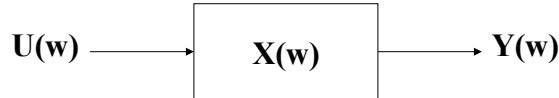


POLITÉCNICA

21

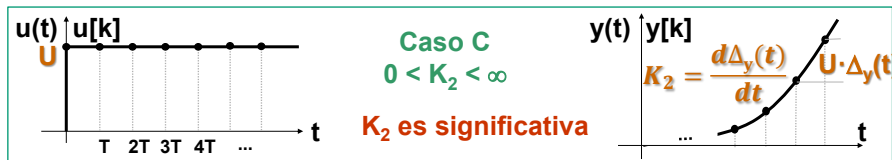
Ganancia de Orden 2 de un sistema X

•Ganancia de orden 2 de $X(w)$: $K_2[X(w)]$



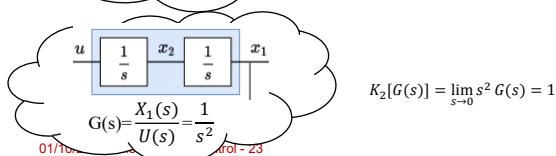
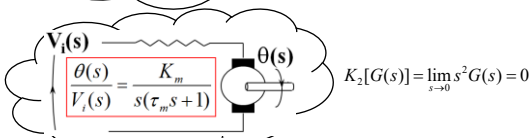
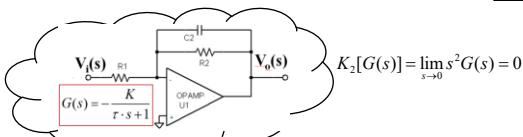
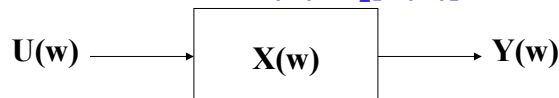
$$X(w) = \frac{N_X(w)}{(w - \gamma)^2 \prod_{i=1}^{n-2} (w - p_i)}$$

$$K_2[X(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma)^2 X(w)$$



Ganancia de Orden 2 de un sistema X

•Ganancia de orden 2 de $X(w)$: $K_2[X(w)]$



$$K_2[X(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma)^2 X(w)$$

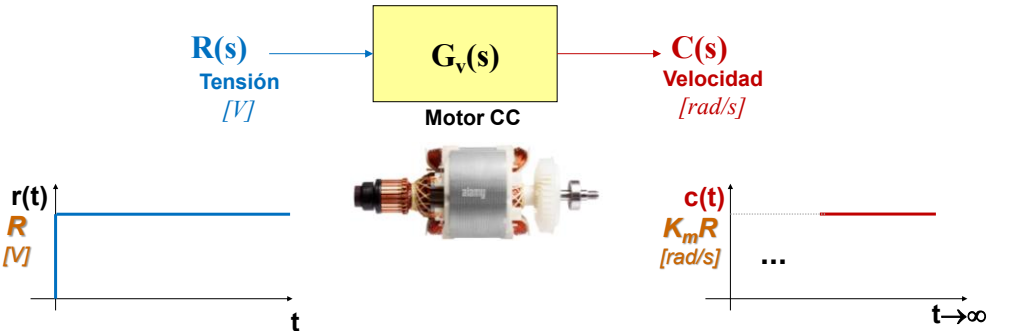
Ante una entrada constante, K_2 condiciona el valor de las variaciones de la pendiente de la salida en RP

Orden del polo en $w=\gamma$ del sistema	Ganancia en RP del sistema			
	K_0	K_1	K_2	...
0	✓	0	0	...
1	∞	✓	0	...
2	∞	∞	✓	
...		

✓: Ganancia significativa ($\neq \infty \wedge \neq 0$)

Ejemplo 1:
Ganancia de orden 0 significativa

$$G_v(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \left(\frac{rad/s}{V} \right)$$

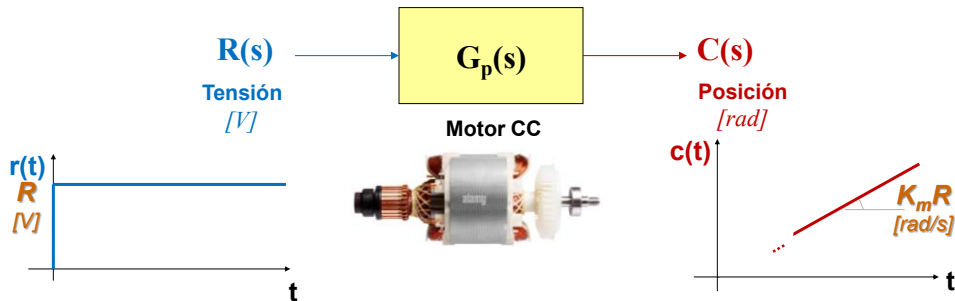


$$K_0[G_v(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} G_v(s) = K_m \left(\frac{rad/s}{V} \right)$$

Entrada Tensión	K_0	Salida Vel. angular
R[V]	K_m	C[rad/s]
1	0.1 [rad/s/V]	0.1
5		0.5
10		1

Ejemplo 2: Ganancia de orden 1 significativa

$$G_p(s) = \frac{K_m}{(\tau_m s + 1)s} \left(\frac{\text{rad}}{\text{V}} \right)$$



$$K_1[G_p(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_p(s) = K_m \left(\frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{V}} \right)$$

01/10/2025 - Sistemas de Control - 26

Entrada Tensión	K_1	Salida Pos. angular
R[V]	K_m	Pendiente de C[rad/s]
1	0.1 [rad/s/V]	0.1
5		0.5
10		1

ENICA

26



POLITÉCNICA



SISTEMAS DE CONTROL

TEMA 2 Análisis Temporal de los Sistemas de Control

- 2.1. Ganancias en régimen permanente de un sistema.
- 2.2. Error y constantes de error en régimen permanente.
- 2.3. Respuesta de un sistema con polos reales dominantes.
- 2.4. Respuesta de un sistema con polos complejos conjugados dominantes.

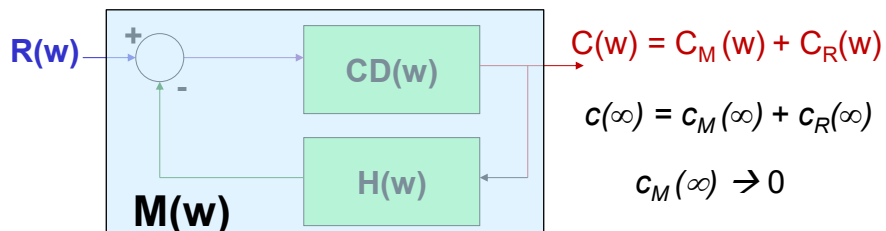
01/10/2025 - Sistemas de Control - 29

29

Definiciones generales

- Entradas de prueba: impulso, escalón, rampa, ...
- Se suponen sistemas estables.
- La salida temporal de un sistema se puede dividir en dos partes:
 - Propia del sistema (C_M)
 - Forzada por la entrada (C_R)
- El régimen permanente es C_R

```
>> syms t s U
>> U=1/s
>> M=1/(0.1*s+1)
>> C=M*U
>> c=ilaplace(C)
      1 - 1/exp(10*t)
>> pretty(c)
      1 - exp(-10 t)
>> t=Inf
>> eval(c)
      ans = 1
```

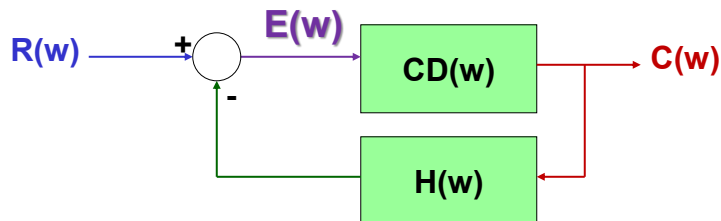


01/10/2025 - Sistemas de Control - 30

POLITÉCNICA

30

Error en RP



Se define como el valor de RP de la salida del comparador del **sistema realimentado**

Da idea de la precisión del sistema al relacionar entrada y salida

$$E(w) = R(w) - C(w)H(w)$$

Nota:

El error en RP sólo coincide con la diferencia entrada-salida cuando $K_0[H(w)]=1$

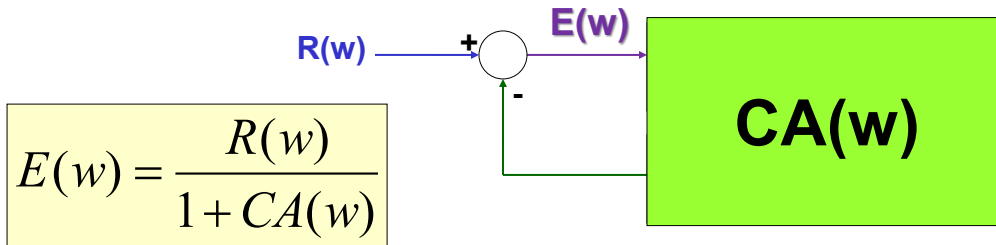
Sólo en este caso el error en RP mide la precisión de un sistema

01/10/2025 - Sistemas de Control - 31

POLITÉCNICA

31

Error en RP. Cadena abierta



$$E(w) = \frac{R(w)}{1 + CA(w)}$$

$$e_{rp} = \lim_{w \rightarrow \gamma} [(w - \gamma)E(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} \frac{(w - \gamma)R(w)}{1 + CA(w)}$$

$$e_{rp} \left\{ \begin{array}{l} R(w) = \frac{N_R(w)}{(w - \gamma)^{q_r}} \\ CA(w) = \frac{N_{CA}(w)}{(w - \gamma)^q D'_{CA}(w)} \end{array} \right.$$

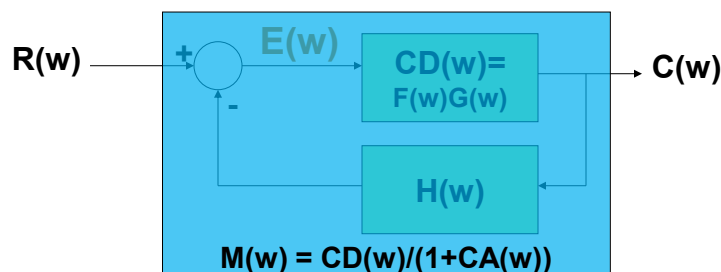
El error en RP queda definido por la entrada y por los polos en $w = \gamma$ de la CA (orden de la ganancia significativa en RP)

01/10/2025 - Sistemas de Control - 32

POLITÉCNICA

32

Error en RP. Cadena Cerrada



$$E(w) = R(w) - C(w)H(w) = R(w) - M(w)R(w)H(w)$$

$$e_{rp} = \lim_{w \rightarrow \gamma} [(w - \gamma)E(w)] = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma)R(w)(1 - M(w)H(w))$$

$$e_{rp} \Big|_{H=1} = \lim_{w \rightarrow \gamma} (w - \gamma)R(w)(1 - M(w))$$

01/10/2025 - Sistemas de Control - 33

POLITÉCNICA

33

Tipo de un Sistema de Control Realimentado

Concepto de tipo de un sistema realimentado **M**:
(influye sobre el error en RP)

$$\left. \begin{aligned} M(w) &= \frac{CD(w)}{1 + CA(w)} \\ CA(w) &= \frac{K \prod_{j=1}^m (w - c_j)}{(w - \gamma)^q \prod_{i=1}^{n-q} (w - p_i)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_M = q$$

Tipo de $M(w) \equiv$ orden de la ganancia significativa de su $CA(w)$

01/10/2025 - Sistemas de Control - 34

POLITÉCNICA

34

Error en régimen permanente

$$e_{rp} = \lim_{w \rightarrow \gamma} [(w - \gamma)E(w)]$$

Entrada	Error	$W = S$	$W = Z$
Escalón	e_{rpp}	$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s}{1 + CA(s)} \cdot \frac{R}{s} \right)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z-1)}{1 + CA(z)} \cdot \frac{Rz}{z-1} \right)$
Rampa	e_{rpv}	$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s}{1 + CA(s)} \cdot \frac{R}{s^2} \right)$	$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z-1)}{[1 + CA(z)]} \cdot \frac{RTz}{(z-1)^2} \right)$

Se aplica la **entrada**:

$$e_{rp} = \lim_{w \rightarrow \gamma} \left[\frac{(w - \gamma)}{1 + CA(w)} \cdot R(w) \right]$$

01/10/2025 - Sistemas de Control - 36

POLITÉCNICA

36

Error en régimen permanente

Entrada	Error	$W = S$	$W = Z$
Escalón	e_{rpp}	$\frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} CA(s)}$	$\frac{R}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} CA(z)}$
Rampa	e_{rpv}	$\frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} [sCA(s)]}$	$\frac{RT}{\lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)CA(z)]}$

Se aplican los límites

Error en régimen permanente

Entrada	Error	$W = S$	$W = Z$
Escalón	e_{rpp}	$\frac{R}{1 + K_0 [CA(s)]}$	$\frac{R}{1 + K_0 [CA(z)]}$
Rampa	e_{rpv}	$\frac{R}{K_1 [CA(s)]}$	$\frac{RT}{K_1 [CA(z)]}$

Se buscan las ganancias significativas

Error en régimen permanente

Entrada	Error	W
Escalón	e _{rpp}	$\frac{R}{1 + K_0[CA(w)]}$
Rampa	e _{rpv}	$\frac{RT^\gamma}{K_1[CA(w)]}$

Se unifican las variables

Error y constantes de error: *Posición* (Entrada escalón)

Entrada	Error	W
Escalón	e _{rpp}	$\frac{R}{1 + K_p}$
Entrada Escalón: constante de error de posición K_p del sistema realimentado		
$K_p = K_0[CA(w)]$		

Error y constantes de error: *Velocidad* (Entrada rampa)

Entrada	Error	w
Escalón	e_{rpp}	$\frac{R}{1 + K_p}$
Rampa	e_{rpv}	$\frac{R}{K_v} T^\gamma$
Entrada Rampa: constante de error de velocidad K_v del sistema realimentado $K_v = K_1[CA(w)]$		

POLITÉCNICA

41

Error y constantes de error

Entrada	Error	w
Escalón	e_{rpp}	$\frac{R}{1 + K_p}$
Rampa	e_{rpv}	$\frac{R}{K_v} T^\gamma$

POLITÉCNICA

42

Relación Constantes de error - Tipo

Cte. error Tipo sistema	K_p (Para entrada escalón)	K_v (Para entrada rampa)	K_a (Para entrada parábola)
0	$K_0[CA(w)]$	0	0
1	∞	$K_1[CA(w)]$	0
2	∞	∞	$K_2[CA(w)]$
...

Constante de error significativa de un sistema realimentado: $\neq \infty \wedge \neq 0$
(coincide con la Ganancia significativa de su cadena abierta)

Relación Error-Tipo

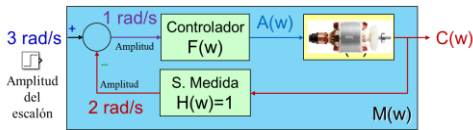
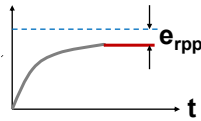
Error ante Tipo sistema	Escalón	Rampa	...
0	$\frac{R}{1 + K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{R}{K_v} T^\gamma$	∞
...	0	0	...

Error en régimen permanente significativo: $\neq \infty \wedge \neq 0$

Relación Error-Tipo

(Con realimentación unitaria)

Error ante Tipo sistema	Escalón	Rampa	Parábola
0	$\frac{R}{1 + K_p}$	∞	∞



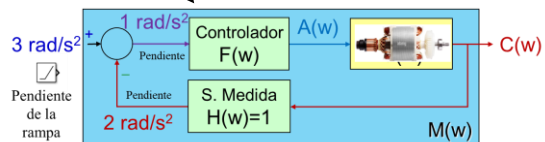
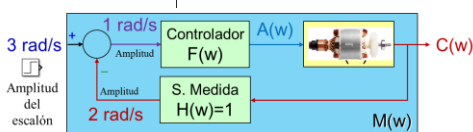
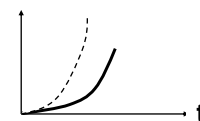
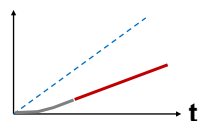
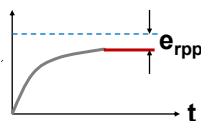
POLITÉCNICA

45

Relación Error-Tipo

(Con realimentación unitaria)

Error ante Tipo sistema	Escalón	Rampa	Parábola
0	$\frac{R}{1 + K_p}$	∞	∞



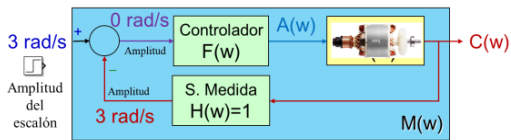
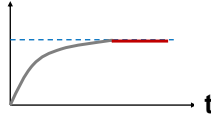
POLITÉCNICA

46

Relación Error-Tipo

(Con realimentación unitaria)

Error ante Tipo sistema	Escalón	Rampa	Parábola
1	0	$\frac{R}{K_v} T^\gamma$	∞



01/10/2025 - Sistemas de Control - 48

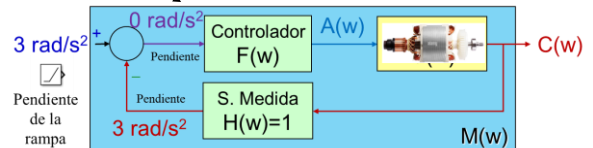
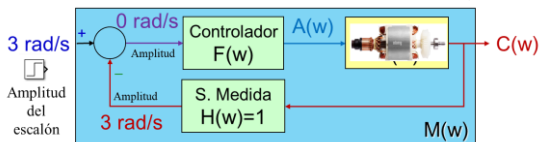
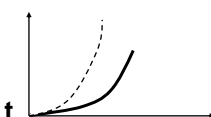
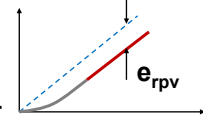
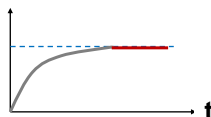
POLITÉCNICA

48

Relación Error-Tipo

(Con realimentación unitaria)

Error ante Tipo sistema	Escalón	Rampa	Parábola
1	0	$\frac{R}{K_v} T^\gamma$	∞



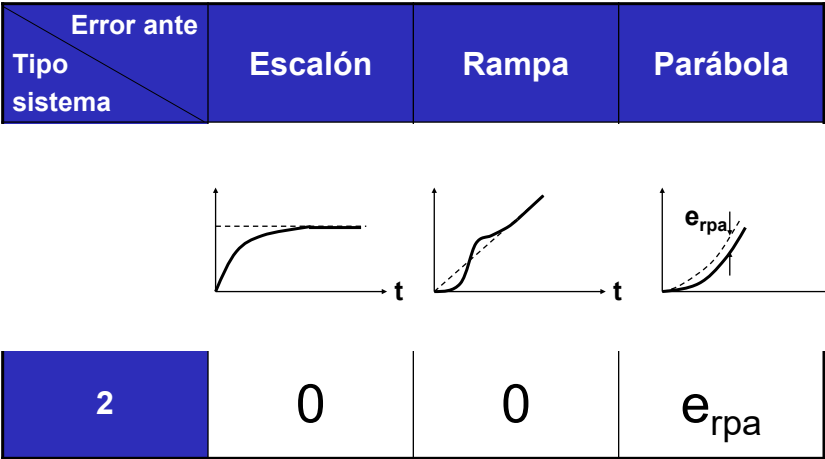
01/10/2025 - Sistemas de Control - 49

POLITÉCNICA

49

Relación Error-Tipo

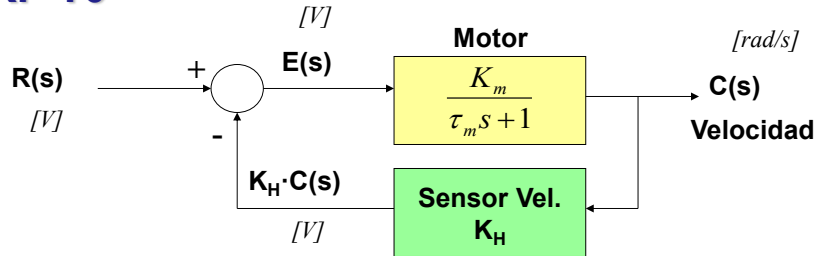
(Con realimentación unitaria)



Resumen

Tipo de sistema realimentado	Ganancia significativa de su CA	Cte. de error significativa	Error en RP significativo
0	K_0	K_p	e_{rpp}
1	K_1	K_v	e_{rpv}
2	K_2	K_a	e_{rpa}

Ejemplo 3: Error en RP T0



Razonamiento (régimen permanente):

Si R es una constante, se espera que C también lo sea.

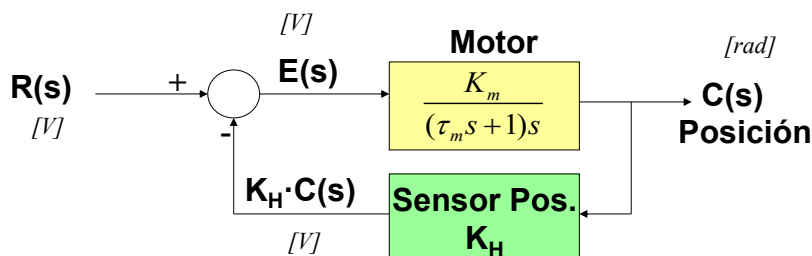
Para que C sea una constante, E también debe serlo
 Si $E=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow$ Motor parado

El error ante
escalón
no puede ser nulo

Justificación (matemática):

El sistema es tipo 0 $\Rightarrow e_{\text{rpp}}$ no es nulo ni infinito

Ejemplo 3: Error en RP T1



Razonamiento (régimen permanente):

Si R es una constante, se espera que C también lo sea.

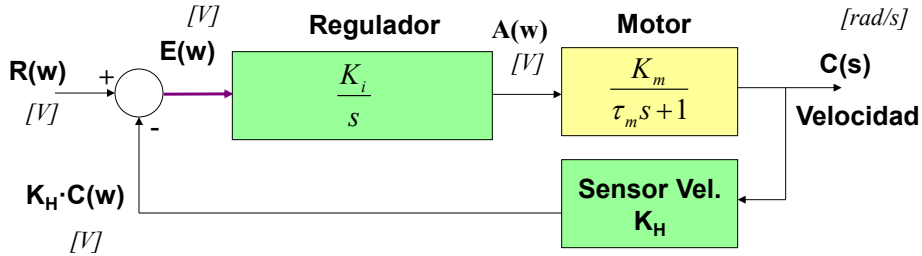
Para que C sea una constante, E debe ser nulo \Rightarrow

El error ante
escalón
debe ser nulo

Justificación (matemática):

El sistema es tipo 1 $\Rightarrow e_{\text{rpp}}$ es nulo

Ejemplo 4: Error en RP Promoción de T0 a T1



Razonamiento (régimen permanente):

Si R es una constante, se espera que C también lo sea.

Para que C sea una constante, E debe ser nulo \Rightarrow

El error ante
escalón
debe ser nulo

Justificación (matemática):

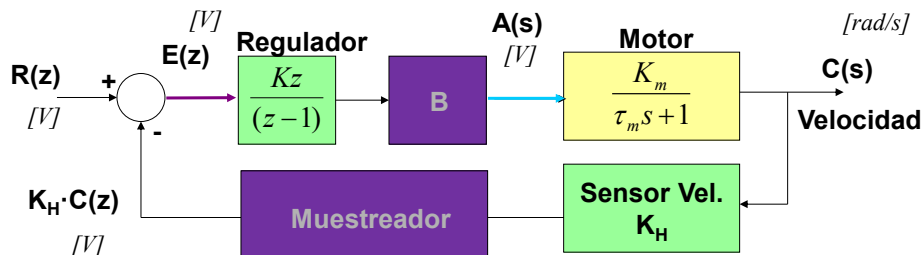
El sistema es tipo 1 $\Rightarrow e_{rpp}$ es nulo

01/10/2025 - Sistemas de Control - 55

POLITÉCNICA

55

Ejemplo 4: Error en RP Promoción de T0 a T1



01/10/2025 - Sistemas de Control - 56

POLITÉCNICA

56