Universidade do Minho
Escola de Engenharia

22/03/2024

Universidade do Minho - Escola de Engenharia

Investigação Operacional - Trabalho Prático 1

Afonso Dionísio
A104276

Diogo Matos
A100741

Gonçalo Costa
A100824

Miguel Guimarães
A100837

Sumário

1 Dados do Problema

De acordo com o enunciado, foram calculados os dados do problema relativos ao nosso grupo. Sendo o maior número mecanográfico de aluno entre os membros do grupo o número **104276**, obtiveram-se os seguintes valores:

contentores	
comprimento	quantidade
11	ilimitado
10	5
7	8

itens	
comprimento	quantidade
1	0
2	4
3	10
4	8
5	5

Seguindo as regras definidas no enunciado do trabalho prático:

- $B + 1 = 4 + 1 = 5$, pelo que a quantidade de contentores de comprimento 10 é 5;
- $D + 1 = 7 + 1 = 8$, pelo que a quantidade de contentores de comprimento 7 é 8;
- Dado que $B = 4$ é par, $k_1 = 0$;
- Dado que $C = 2$ é par, $k_2 = 4 + 2 = 4$;
- Dado que $D = 7$ é ímpar, $k_3 = 10$;
- Dado que $E = 6$ é par, $k_4 = 6 + 2 = 8$.

Onde $[k_1..k_4]$ são as quantidades dos itens de comprimento 1 a 4, respetivamente.

A soma dos comprimentos dos itens a empacotar é dada por:

$$\sum(\text{quantidade} * \text{comprimento}) = 4 * 2 + 10 * 3 + 8 * 4 + 5 * 5 = 95$$

2 Formulação do Problema

2.1 Descrição do Problema

O problema apresentado trata-se de um clássico problema de empacotamento, onde se pretende encontrar a forma ótima de empacotar/acomodar uma quantidade de itens de diferentes comprimentos numa quantidade de contentores de, também, diferentes comprimentos. É importante realçar que os itens a empacotar são indivisíveis, isto é, não podem ser divididos de modo a serem acomodados em contentores diferentes.

A quantidade de itens e contentores de cada comprimento para o nosso problema foi especificada no capítulo anterior (Dados do Problema 1).

Vale também realçar que nos foi pedido que a resolução deste problema fosse resolvida respeitando o *Modelo de Dyckhoff*.

2.2 Objetivo

O principal objetivo é encontrar a disposição mais eficiente dos itens pelos contentores disponíveis de modo a minimizar o somatório dos comprimentos dos contentores usados.

Alcançar este objetivo requer traduzir o problema para um modelo matemático coerente que represente todas as condições inerentes ao mesmo. Isto só é possível através da definição de um conjunto de variáveis de decisão que permitem formular a função objetivo, que determina o custo da nossa solução, assim como algumas restrições do problema.

2.3 Definição das Variáveis de Decisão

A definição das variáveis de decisão seguiu a abordagem de *Harald Dyckhoff* para a resolução de problemas de corte, onde cada variável define não um padrão de corte, mas um "um-corte" ou "padrão de um corte" possível. Por exemplo, o corte de um comprimento 10 em comprimentos 5, 3 e 2 representaria uma única variável de decisão no modelo dos padrões de corte, já no modelo de *Dyckhoff* este estado seria representado por um corte 5/5, seguido de um corte 3/2 sob o comprimento residual 5, onde cada um dos dois cortes efetuados (5/5 e 3/2) compõe uma variável de decisão.

No contexto do problema proposto, cada "um-corte" define uma possível divisão do espaço do contentor, mas não a sua divisão final, tendo em conta que o espaço residual de cada divisão poderá ser sucessivamente subdivido. Para a modelagem matemática do problema, apenas nos interessa considerar os **espaços residuais úteis** resultantes destas subdivisões, isto é, aqueles que são resultantes de divisões onde pelo menos um dos dois comprimentos resultantes corresponde ao comprimento de um dos itens a empacotar (2, 3, 4 ou 5).

Os espaços residuais úteis do nosso problema obtém-se facilmente, seja $S = \{7, 10, 11\}$ o conjunto dos comprimentos dos contentores disponíveis, $D = \{2, 3, 4, 5\}$ o conjunto dos comprimentos dos itens a empacotar e R o conjunto de espaços residuais úteis:

$$R = \left\{\forall_{s \in S, d \in D}\colon s - d \mid s - d > 2\right\} = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3\}$$

Definir este conjunto garante que padrões inúteis de "um-corte" não são considerados, como por exemplo a divisão 10/1 do contentor 11, onde nenhum dos comprimentos resultantes corresponde ao comprimento de um item.

Assim, os valores de cada variável de decisão representam a quantidade de padrões de "um-corte" de cada tipo que devem ser aplicados aos contentores disponíveis e aos espaços residuais resultantes. Estes valores podem ser depois facilmente interpretados para definir a divisão concreta de cada um dos contentores usados.

Por exemplo, uma solução que indique 1 corte de um contentor de comprimento 10 em 5/5 e 1 corte em um resíduo de 5 em 3/2, assumindo que só estão disponíveis contentores de comprimento 10, indica uma solução onde é utilizado 1 contentor de comprimento 10 que é divido sob o padrão 5/3/2. Naturalmente, esta abordagem poderá devolver soluções ótimas onde exista mais do que uma possibilidade de acomodação dos itens pelos contentores.

2.4 Construção do Modelo

Transformar um problema real para um modelo matemático coerente requer a definição de um conjunto de restrições que permitam definir de forma clara e específica o espaço de soluções admissíveis do mesmo.

No contexto do nosso problema, estas restrições resumem-se essencialmente ao número de contentores disponíveis para cada comprimento e ao número mínimo de itens de cada comprimento que devem ser empacotados. Estas restrições permitem garantir que o modelo nos devolve uma solução onde sejam empacotados todos os itens de diferentes comprimentos e onde não sejam utilizados mais contentores do que aqueles que estão disponíveis. É de notar que poderão existir soluções onde o número de itens acomodados seja superior ao número de itens disponíveis, caso a melhor solução encontrada permita acomodar mais itens sem custos adicionais.

Tendo em conta a forma como foram definidas as variáveis de decisão na secção anterior, os valores a serem restringidos são obtidos através de um somatório específico de quantidades de diferentes padrões de “um-corte”. Por exemplo, a quantidade de contentores de um determinado comprimento é dada pela soma das quantidades de padrões de “um-corte” que dele originam, subtraindo eventuais padrões de igual comprimento que originem residualmente de contentores de comprimento superior.

De forma não menos importante, a construção de uma função objetivo adequada é fundamental para assegurar que o modelo desenvolvido trabalha na direção pretendida, minimizando ou maximizando o custo. Neste caso, pretende-se minimizar o comprimento total dos contentores utilizados na solução, pelo que a função objetivo se obtém do somatório da quantidade de cada tipo de contentor que é utilizada, multiplicada pelo comprimento respetivo.

3 Modelação do Problema

3.1 Variáveis de Decisão

- $y_{k,l}$: número de contentores ou resíduos de comprimento k divididos numa secção de comprimento l e numa secção residual de comprimento $k - l$
- $y_{k,l} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

De acordo com os conjuntos S, D e R definidos em Definição das Variáveis de Decisão 2.3:

- $k \in S \cup R = \{11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3\}$
- $l \in D \wedge l < k$

A tabela seguinte enumera todas as variáveis resultantes:

		k								
		11	10	9	8	7	6	5	4	3
l	2	$y_{11,2}$	$y_{10,2}$	$y_{9,2}$	$y_{8,2}$	$y_{7,2}$	$y_{6,2}$	$y_{5,2}$	$y_{4,2}$	$y_{3,2}$
	3	$y_{11,3}$	$y_{10,3}$	$y_{9,3}$	$y_{8,3}$	$y_{7,3}$	$y_{6,3}$	$y_{5,3}$	$y_{4,2}$	-
	4	$y_{11,4}$	$y_{11,4}$	$y_{9,4}$	$y_{8,4}$	$y_{7,4}$	$y_{6,4}$	$y_{5,4}$	-	-
	5	$y_{11,5}$	$y_{11,5}$	$y_{9,5}$	$y_{8,5}$	$y_{7,5}$	$y_{6,5}$	-	-	-

Onde as variáveis destacadas a cinzento são consideradas **redundantes**, uma vez que representam um padrão de “um-corte” idêntico a uma outra variável. Seguem-se essas correspondências:

var. redundante	var. equivalente
$y_{9,4}$	$y_{9,5}$
$y_{8,3}$	$y_{8,5}$
$y_{7,3}$	$y_{7,4}$
$y_{7,2}$	$y_{7,5}$
$y_{6,2}$	$y_{6,4}$
$y_{5,2}$	$y_{5,3}$

3.2 Parâmetros

O problema é constiuído por dois parâmetros essenciais:

- Número de contentores de cada comprimento disponíveis;
- Número de itens de cada comprimento a empacotar.

Cujos valores foram já definidos em Dados do Problema 1.

3.3 Função Objetivo

Como mencionado anteriormente, pretende-se **minimizar o comprimento total dos contentores utilizados**. Para isso, basta que a função objetivo componha a soma da quantidade de cada tipo de contentor, multiplicada pelo seu comprimento (que neste problema é o seu custo).

A quantidade de cada tipo de contentor é obtida através da soma de todos os padrões de "um-corte" que dele provêm. No entanto, uma vez que no modelo de *Dyckhoff* um padrão de "um-corte" como, por exemplo, $y_{7,2}$ pode originar tanto de um contentor de comprimento 7 como de um resíduo de comprimento 7 (*i.e.* a sua origem é indistinguível) é necessário subtrair a quantidade de resíduos de comprimento 7 que são gerados.

Seguindo o exemplo o contentor de comprimento 7, a sua quantidade seria dada por:

$$y_{7,5} + y_{7,4} - y_{9,2} - y_{11,4} - y_{10,3}$$

No entanto, esta abordagem traz outro problema. Na eventualidade de não serem utilizados quaisquer contentores de comprimento 7 mas existirem resíduos desperdiçados do mesmo comprimento, a quantidade será negativa, anulando o custo desse desperdício. Assim, esta fórmula tem de ser adaptada de modo a não admitir valores negativos:

$$\max\{0, y_{7,5} + y_{7,4} - y_{9,2} - y_{11,4} - y_{10,3}\}$$

Realizando este processo de forma análoga para os outros tipos de contentor, obtemos a seguinte função objetivo:

$$(\min)\ 7x_1 + 10x_2 + 11x_3$$

Onde

$$x_1 = \max\{0, y_{7,5} + y_{7,4} - y_{9,2} - y_{11,4} - y_{10,3}\}$$

$$x_2 = \max\left\{0, y_{10_5} + y_{10_4} + y_{10_3} + y_{10_2}\right\}$$

$$x_3 = \max\left\{0, y_{11_5} + y_{11_4} + y_{11_3} + y_{11_2}\right\}$$

3.4 Restrições

3.4.1 Número de contentores disponíveis

Tal como o processo de construção da função objetivo, também as restrições relativas ao número de contentores disponíveis de cada tipo requerem o cálculo dessa quantidade através das variáveis de decisão definidas.

O cálculo é efetuado de forma análoga, à exceção da necessidade de manter o valor positivo, uma vez que o único objetivo da restrição é impedir que o mesmo ultrapasse um determinado valor. Assim, as restrições são definidas da seguinte forma:

$$y_{7,5} + y_{7,4} - y_{9,2} - y_{11,4} - y_{10,3} \leq 8$$

$$y_{10,5} + y_{10,4} + y_{10,3} + y_{10,2} \leq 5$$

Para os contentores de comprimento 7 e 10, respetivamente. Como o contentor de comprimento 11 tem quantidade ilimitada, nenhuma restrição é necessária.

3.4.2 Número de itens a empacotar

Construir restrições que garantam que todos os itens de diferentes comprimentos são empacotados requer, mais uma vez, que essa quantidade seja calculada através das variáveis de decisão definidas.

A quantidade de itens de um dado comprimento é obtida através da soma das quantidades de todos os padrões de "um-corte" que geram pelo menos uma secção de comprimento idêntico ao tipo de item em questão, subtraindo possíveis padrões que efetuem posteriores subdivisões desse comprimento. Assim, a quantidade de, por exemplo, itens de comprimento 3 é dada por:

$$y_{9_3} + y_{8_5} + y_{7_4} + y_{6_3} + y_{6_3} + y_{5_3} + y_{4_3} + y_{11_3} + y_{10_3} - y_{3_2}$$

Realizando o mesmo processo para os restantes comprimentos e aplicando a restrição de quantidade adequada obtemos:

$$y_{9_2} + y_{8_2} + y_{7_5} + y_{6_4} + y_{5_3} + y_{4_2} + y_{4_2} + y_{3_2} + y_{11_2} + y_{10_2} \geq 4$$

$$y_{9_3} + y_{8_5} + y_{7_4} + y_{6_3} + y_{6_3} + y_{5_3} + y_{4_3} + y_{11_3} + y_{10_3} - y_{3_2} \geq 10$$

$$y_{9_5} + y_{8_4} + y_{8_4} + y_{7_4} + y_{6_4} + y_{5_4} + y_{11_4} + y_{10_4} - y_{4_3} - y_{4_2} \geq 8$$

$$y_{9_5} + y_{8_5} + y_{7_5} + y_{6_5} + y_{11_5} + y_{10_5} + y_{10_5} - y_{5_4} - y_{5_3} \geq 5$$

Para os itens de comprimento 2, 3, 4 e 5, respetivamente.

3.4.3 Restrições adicionais

No processo de obtenção de uma solução, para além de serem gerados espaços de comprimento idêntico a um dos tipos de itens a empacotar, são também gerados comprimentos "intermédios", isto é, comprimentos residuais que só se provam úteis se forem subdivididos novamente, sendo desperdiçados caso contrário. Este conjunto de comprimentos pode ser definido da seguinte forma, considerando os conjuntos já definidos em Definição das Variáveis de Decisão 2.3:

$$\{x \in R \mid x \notin D)\} = \{6, 7, 8, 9\}$$

Destes, até agora, apenas a quantidade de comprimentos 7 está restringida (pela restrição relativa à quantidade de contentores de comprimento 7 disponíveis). No entanto, é necessário garantir que o modelo desenvolvido não permite a utilização de comprimentos "intermédios" se estes ainda não tiverem sido gerados como resultado de um corte. Para isso, a quantidade de cada um deles deve ser restringida para que nunca assuma valores negativos, o que se obtém de forma análoga ao processo utilizado anteriormente em Número de itens a empacotar 3.4.2, resultando nas seguintes restrições:

$$y_{9_3} + y_{8_2} + y_{11_5} + y_{10_4} - y_{6_5} - y_{6_4} - y_{6_3} \geq 0$$

$$y_{11_3} + y_{10_2} - y_{8_5} - y_{8_4} - y_{8_2} \geq 0$$

$$y_{11_2} - y_{9_5} - y_{9_3} - y_{9_2} \geq 0$$

Relativas à quantidade de comprimentos 6, 8 e 9, respetivamente.

4 Resolução do Problema com *LPSolve*

Com o processo de modelação concluído, o problema pode ser inserido no programa *LPSolve* para a sua resolução, efetuando os ajustes de sintaxe necessários para a interpretação do ficheiro pelo programa.

4.1 Input

As variáveis de decisão definidas são representadas da seguinte forma no ficheiro de *input* do programa: $y_{k,l} \Rightarrow$ `yk_l`.

Para além disso, a definição de máximo entre dois valores utilizada na definição da função objetivo teve de ser adaptada, tendo em conta que o *LPSolve* não suporta introdução de expressões matemáticas complexas. Assim, para cada variável x_7, x_{10} e x_{11} foram introduzidas duas restrições que garantem a mesma funcionalidade, impondo que que a mesma tome ou o valor 0 ou um valor igual ou superior ao comprimento total dos contentores desse tipo.

Segue-se o ficheiro introduzido:

```
/* MINIMIZAR: */

min: x7 + x10 + x11;

/* SUJEITO A: */

x7 >= 0;
x7 >= 7 y7_5 + 7 y7_4 - 7 y9_2 - 7 y11_4 - 7 y10_3;

x10 >= 0;
x10 >= 10 y10_5 + 10 y10_4 + 10 y10_3 + 10 y10_2;

x11 >= 0;
x11 >= 11 y11_5 + 11 y11_4 + 11 y11_3 + 11 y11_2;

y7_5 + y7_4 - y9_2 - y11_4 - y10_3 <= 8;
y10_5 + y10_4 + y10_3 + y10_2 <= 5;

y9_2 + y8_2 + y7_5 + y6_4 + y5_3 + y4_2 + y4_2 + y3_2 + y11_2 + y10_2 >= 4;
y9_3 + y8_5 + y7_4 + y6_3 + y6_3 + y5_3 + y4_3 + y11_3 + y10_3 - y3_2 >= 10;
y9_5 + y8_4 + y8_4 + y7_4 + y6_4 + y5_4 + y11_4 + y10_4 - y4_3 - y4_2 >= 8;
y9_5 + y8_5 + y7_5 + y6_5 + y11_5 + y10_5 + y10_5 - y5_4 - y5_3 >= 5;

y9_3 + y8_2 + y11_5 + y10_4 - y6_5 - y6_4 - y6_3 >= 0;
y11_3 + y10_2 - y8_5 - y8_4 - y8_2 >= 0;
y11_2 - y9_5 - y9_3 - y9_2 >= 0;

/* --- */

int y9_5, y9_3, y9_2, y8_5, y8_4, y8_2, y7_5, y7_4, y6_5, y6_4, y6_3, y5_4, y5_3, y4_3,
y4_2, y3_2, y11_5, y11_4, y11_3, y11_2, y10_5, y10_4, y10_3, y10_2;
```

4.2 Output

Fornecendo este ficheiro ao programa pela consola (`$ lp_solve input.lp`), obtemos o seguinte *output*:

```
Value of objective function: 95.00000000

Actual values of the variables:
x7                             42
x10                            20
x11                            33
y7_5                            4
y7_4                            6
y9_2                            0
y11_4                           2
y10_3                           2
y10_5                           0
y10_4                           0
y10_2                           0
y11_5                           0
y11_3                           1
y11_2                           0
y8_2                            0
y6_4                            0
y5_3                            0
y4_2                            0
y3_2                            0
y9_3                            0
y8_5                            1
y6_3                            0
y4_3                            0
y9_5                            0
y8_4                            0
y5_4                            0
y6_5                            0
```

5 Interpretação da Solução Ótima

A análise dos resultados devolvidos pelo *LPSolve* permite concluir que o valor da função objetivo é 95 unidades de comprimento, isto é, o comprimento total dos diferentes tipos de contentores utilizados na solução ótima calculada é 95. Conclui-se também, pelo valor de `x7`, `x10` e `x11`, que desse comprimento total, 42 unidades correspondem a contentores de comprimento 7, 20 unidades a contentores de comprimento 10 e 33 unidades a contentores de comprimento 11. Facilmente obtemos também o número de contentores de cada tipo que foram utilizados, dividindo estes valores pelo comprimento respetivo:

- $\frac{42}{7} = 6$ contentores de comprimento 7;
- $\frac{20}{10} = 2$ contentores de comprimento 10;
- $\frac{33}{11} = 3$ contentores de comprimento 11.

As restantes variáveis permitem concluir de que forma o espaço de cada contentor foi distribuído de modo a alocar os itens existentes. Por exemplo, sabendo que foi realizado um corte de padrão `y11_4` e um corte de padrão `y7_5` podemos assumir que, numa distribuição possível, o primeiro corte resultou num resíduo de comprimento 7 que foi depois subdividido em comprimentos 2 e 5, resultando num contentor 11 dividido da seguinte forma: 4/5/2. Outra possibilidade seria o resíduo de comprimento 7 ser dividido de acordo com o padrão `y7_4`, caso em que a divisão final seria: 4/4/3. Na análise da nossa solução, vamos assumir que todos os resíduos de comprimento 7 gerados foram divididos de acordo com o padrão `y7_5`, embora qualquer outra combinação seja igualmente aceitável, não existindo qualquer outra situação ambígua na nossa solução.

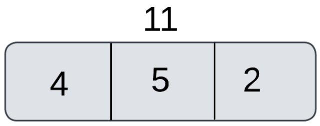

Figura 2: Ilustração da divisão de um contentor após 'cortes' sucessivos de `y11_4` e `y7_5`

Assim, tendo em conta que existiram dois contentores de 11 divididos como ilustrado na imagem acima, podemos concluir que foi possível armazenar nos mesmos dois itens de comprimento 4, dois itens de comprimento 5 e dois itens de comprimento 2.

Repetindo este mesmo processo para todos os contentores, obtemos a seguinte distribuição:

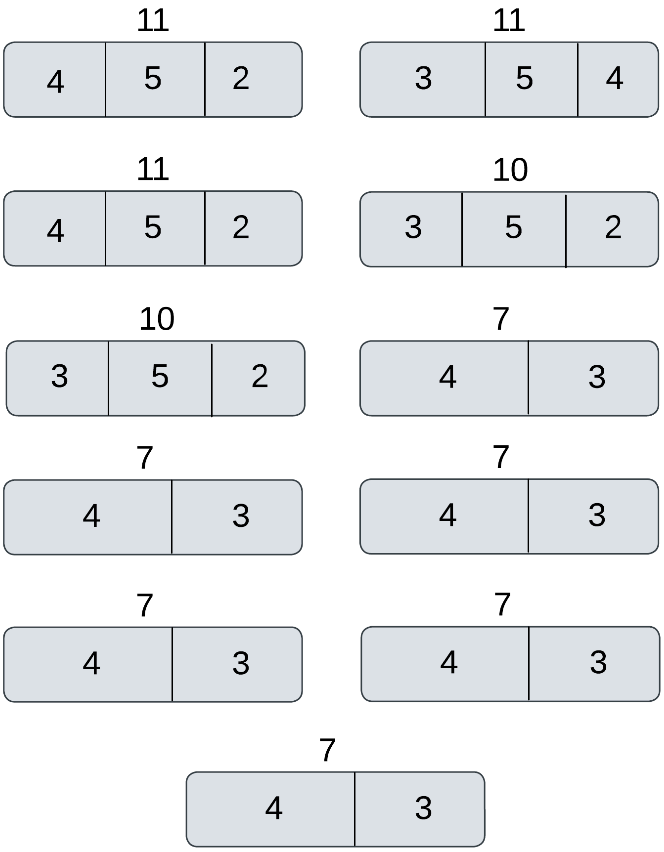

Figura 3: Ilustração da distribuição dos itens pelos contentores

6 Validação do Modelo

Interpretada a solução, é crucial assegurar que a mesma é, de facto, uma solução ótima, que cumpre todas as restrições definidas e que faz sentido na prática.

Numa abordagem inicial, é importante garantir que a solução dada oferece o espaço necessário ao empacotamento dos itens, o que obtemos através da comparação entre o comprimento total dos contentores utilizados e o comprimento total dos itens a empacotar, já calculado em Dados do Problema 1, assim:

$$x_7 + x_{10} + x_{11} \geq 95 \Leftrightarrow$$

$$42 + 20 + 33 \geq 95 \Leftrightarrow$$

$$95 \geq 95$$

Pelo que, em princípio, podemos concluir que existe justamente o espaço necessário para todos os itens. Para além disso, sendo o comprimento dos contentores precisamente igual ao comprimento dos itens e assumindo que a solução é validada como bem definida de seguida, é garantido que a solução é ótima, uma vez que qualquer valor menor implicaria que os itens não coubessem nos contentores.

De seguida, é necessário verificar se o modelo está bem definido, o que implica analisar as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições:

- As variáveis de decisão, conforme definidas em Definição das Variáveis de Decisão 2.3, representam o número de contentores ou resíduos divididos em um determinado padrão de "um-corte", utilizando o método de *Dyckhoff*, o que está de acordo com o pretendido;
- A função objetivo minimiza o comprimento total dos contentores utilizados, pelo que é adequada.
- As restrições aplicadas aos itens asseguram que cada item deve ser acomodado de forma adequada e sem alterar as suas dimensões originais, para além de garantir que todos os itens são empacotados, logo cumprem a sua função.
- As restrições aplicadas aos contentores têm como objetivo controlar o número de contentores utilizados no processo de empacotamento e garantir que o número de contentores utilizados nunca ultrapassa a quantidade disponível, o que é o pretendido.

6.1 Validação das Restrições

De seguida, efetuamos a validação de cada tipo de restrições, de forma a assegurar que, para além de bem definidas, foram cumpridas.

6.1.1 Restrições dos Contentores

$$y_{7,5} + y_{7,4} - y_{9,2} - y_{11,4} - y_{10,3} \leq 8$$

$$4 + 6 - 0 - 2 - 2 \leq 8$$

$$6 \leq 8$$

$$y_{10,5} + y_{10,4} + y_{10,3} + y_{10,2} \leq 5$$

$$0 + 0 + 2 + 0 \leq 5$$

$$2 \leq 5$$

6.1.2 Restrições dos Itens

6.1.2.1 Itens de Comprimento 2

$$y_{9,2} + y_{8,2} + y_{7,5} + y_{6,4} + y_{5,3} + y_{4,2} + y_{4,2} + y_{3,2} + y_{11,2} + y_{10,2} \geq 4$$

$$0 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \geq 4 \Leftrightarrow 4 \geq 4$$

6.1.2.2 Itens de Comprimento 3

$$y_{9,3} + y_{8,5} + y_{7,4} + y_{6,3} + y_{6,3} + y_{5,3} + y_{4,3} + y_{11,3} + y_{10,3} - y_{3,2} \geq 10$$

$$0 + 1 + 6 + 0 + 0 + 0 + 1 + 2 - 0 \geq 10 \Leftrightarrow 10 \geq 10$$

6.1.2.3 Itens de Comprimento 4

$$y_{9,5} + y_{8,4} + y_{8,4} + y_{7,4} + y_{6,4} + y_{5,4} + y_{11,4} + y_{10,4} - y_{4,3} - y_{4,2} \geq 8$$

$$0 + 0 + 0 + 6 + 0 + 0 + 2 + 0 - 0 - 0 \geq 8 \Leftrightarrow 8 \geq 8$$

6.1.2.4 Itens de Comprimento 5

$$y_{9,5} + y_{8,5} + y_{7,5} + y_{6,5} + y_{11,5} + y_{10,5} + y_{10,5} - y_{5,4} - y_{5,3} \geq 5$$

$$0 + 1 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0 - 0 \geq 5 \Leftrightarrow 5 \geq 5$$

6.2 Conclusão da Validação

Após análise detalhada e aplicação das restrições aos contentores e itens, verificamos que os valores obtidos pela solução ótima respeitam todas as condições impostas pelo modelo de programação linear.

No que diz respeito às restrições dos contentores, observamos que o número de contentores utilizados está dentro dos limites estabelecidos pela disponibilidade, garantindo assim uma utilização eficiente dos recursos.

Para além disso, ao examinar as restrições dos itens, confirmamos que todos os itens foram empacotados adequadamente nos contentores, sem alterações nas suas dimensões originais, atendendo às exigências do problema de empacotamento.

Portanto, com base na solução obtida e na validação das restrições, podemos concluir que o modelo de programação linear desenvolvido é robusto e eficaz para resolver o desafio de empacotamento de itens em contentores, fornecendo uma solução ótima que minimiza o espaço utilizado.

Esta conclusão reforça a confiança na aplicabilidade do modelo proposto e na sua capacidade de oferecer soluções práticas e viáveis para problemas de otimização semelhantes no futuro.