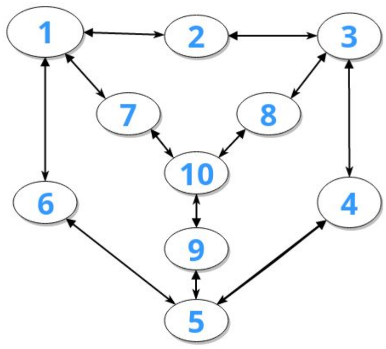
Trabalho para casa 1 - Markov Chains

a) A Markov Chain é caracterizada pelo par ($\boldsymbol{X}$, **P**) em que $\boldsymbol{X}$ é o conjunto de estados possíveis tal que $\boldsymbol{X}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e **P** é a transition probability matrix[1].

Cada estado x_i corresponde a uma célula do tabuleiro de jogo. Por exemplo, no nosso exercício, a célula do centro corresponde ao estado 10.

Dado o facto de existirem 6 resultados equiprováveis no lançamento do dado, a matriz **P** é dada por **P** = $\frac{1}{6}\sum_{d=1}^{6} P_d$ em que P_d corresponde à transition probability matrix assumindo que o dado mostra sempre o valor *d*.



Para simplificar e seguindo a sugestão do enunciado, comecemos por calcular P_1. Na figura ao lado, podemos observar uma representação gráfica das transições no caso do valor do dado = 1.

Com base nesta representação, obtivemos a matriz P_1 representada na tabela seguinte.

P (d=1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,333	0	0	0	0,333	0,333	0	0	0
2	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,333	0	0,333	0	0	0	0,333	0	0
4	0	0	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0,333	0	0,333	0	0	0,333	0
6	0,5	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0
7	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5
8	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0,5
9	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0,5
10	0	0	0	0	0	0	0,333	0,333	0,333	0

Para obter a matriz P_2 basta considerarmos que uma jogada com dado = 2 corresponde a realizar duas jogadas seguidas com dado = 1, logo P_2 é dado por $P_2 = P_1 \times P_1$.

Assim, as restantes matrizes P_d são calculadas através das potências da matriz P_1 e, substituindo os resultados em **P** = $\frac{1}{6}\sum_{d=1}^{6} P_d$, obtemos a transition probability matrix pretendida representada na tabela seguinte.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,185	0,123	0,105	0,043	0,105	0,123	0,123	0,043	0,043	0,105
2	0,185	0,123	0,185	0,083	0,065	0,083	0,083	0,083	0,043	0,065
3	0,105	0,123	0,185	0,123	0,105	0,043	0,043	0,123	0,043	0,105
4	0,065	0,083	0,185	0,123	0,185	0,083	0,043	0,083	0,083	0,065
5	0,105	0,043	0,105	0,123	0,185	0,123	0,043	0,043	0,123	0,105
6	0,185	0,083	0,065	0,083	0,185	0,123	0,083	0,043	0,083	0,065
7	0,185	0,083	0,065	0,043	0,065	0,083	0,123	0,083	0,083	0,185
8	0,065	0,083	0,185	0,083	0,065	0,043	0,083	0,123	0,083	0,185
9	0,065	0,043	0,065	0,083	0,185	0,083	0,083	0,083	0,123	0,185
10	0,105	0,043	0,105	0,043	0,105	0,043	0,123	0,123	0,123	0,185

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_matrix

Grupo 3
Daniel Correia, 80967
Pedro Orvalho, 81151

b) A seguinte matriz corresponde à potência de 3 da matriz **P** e representa a probabilidade de o jogador estar em cada célula ao fim de t=3.

P^3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1289	0,0849	0,1237	0,0818	0,1237	0,0849	0,0849	0,0818	0,0818	0,1237
2	0,1273	0,0859	0,1273	0,0833	0,1227	0,0833	0,0833	0,0833	0,0807	0,1227
3	0,1237	0,0849	0,1289	0,0849	0,1237	0,0818	0,0818	0,0849	0,0818	0,1237
4	0,1227	0,0833	0,1273	0,0859	0,1273	0,0833	0,0807	0,0833	0,0833	0,1227
5	0,1237	0,0818	0,1237	0,0849	0,1289	0,0849	0,0818	0,0818	0,0849	0,1237
6	0,1273	0,0833	0,1227	0,0833	0,1273	0,0859	0,0833	0,0807	0,0833	0,1227
7	0,1273	0,0833	0,1227	0,0807	0,1227	0,0833	0,0859	0,0833	0,0833	0,1273
8	0,1227	0,0833	0,1273	0,0833	0,1227	0,0807	0,0833	0,0859	0,0833	0,1273
9	0,1227	0,0807	0,1227	0,0833	0,1273	0,0833	0,0833	0,0833	0,0859	0,1273
10	0,1237	0,0818	0,1237	0,0818	0,1237	0,0818	0,0849	0,0849	0,0849	0,1289

Logo a distribuição pelos estados em t=3 sabendo que o jogador começa na posição central (10) em t=0 é dada por:

μ_3 =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1237	0,0818	0,1237	0,0818	0,1237	0,0818	0,0849	0,0849	0,0849	0,1289