INTRODUCTION TO ROBOTICS

Segunda edição

SK Saha
Professor
Departamento de Engenharia Mecânica
Instituto Indiano de Tecnologia (IIT) Delhi
Nova Déli

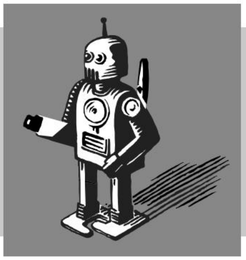
McGraw Hill Education (Índia) Private Limited
NOVA DÉLHI

Escritórios de Educação McGraw Hill

Nova Délhi Nova York St Louis São Francisco Auckland Bogotá Caracas
Kuala Lumpur Lisboa Londres Madrid Cidade do México Milão Montreal
San Juan Santiago Singapura Sydney Tóquio Toronto

12

Planejamento de movimento



O objetivo do planejamento de movimento de um robô é gerar uma função segundo a qual as articulações do robô se moverão. Essa geração de função depende das tarefas do robô, por exemplo, pegar um objeto de um ponto e colocá-lo em outro, ou soldar duas peças de metal ao longo de uma curva. No primeiro caso, são atribuídos pontos inicial e final, ou seja, movimento ponto a ponto, enquanto no segundo caso, uma sequência finita de pontos precisa ser especificada, ou seja, movimento de trajetória contínua. Um usuário de robô normalmente especifica uma série de parâmetros para descrever uma tarefa ponto a ponto ou de trajetória c Um algoritmo então calcula as entradas para o controlador de movimento do robô.

O planejamento de movimento, também conhecido na literatura como planejamento de trajetória, pode ser feito tanto no espaço articular, ou seja, em termos de posições, velocidades e acelerações articulares, quanto no espaço cartesiano (também chamado de espaço operacional), ou seja, em termos das posições, orientações e derivadas temporais dos efetores finais. Normalmente, este último é preferido por um operador, pois permite uma descrição natural da tarefa que o robô deve executar. No entanto, a ação de controle sobre o robô é realizada no espaço articular. Assim, um algoritmo de cinemática inversa adequado deve ser usado para reconstruir a sequência temporal das variáveis articulares correspondentes à sequência acima no espaço cartesiano.

> **Por que planejamento de movimento?**
>
> Assim como uma pessoa decide uma rota a partir de de um lugar para outro, o caminho de um robô precisa ser decidido por meio do movimento planejamento.

O planejamento de movimento no espaço cartesiano naturalmente permite levar em conta a presença de quaisquer restrições ao longo do caminho do efetor final. Estas são devidas a regiões do espaço de trabalho que são proibidas para o robô, por exemplo, devido à presença de obstáculos. Tais restrições são melhor descritas no espaço cartesiano porque seus pontos correspondentes no espaço articular são difíceis de calcular. Mas na vizinhança de configurações singulares, o planejamento de trajetória no espaço cartesiano não é possível. Isto se deve ao fato de que nenhuma variável articular pode ser calculada para variáveis do efetor final dadas devido à inexistência do inverso da matriz de transferência de movimento associada, chamada de matriz Jacobiana. Em tais casos, é aconselhável especificar o movimento do efetor final em termos das variáveis articulares, ou seja, planejamento do espaço articular. Portanto, uma sequência temporal de variáveis articulares deve ser gerada. Para completar, ambos os tipos de planejamento de movimento são apresentados nas seções a seguir.

12.1 PLANEJAMENTO DO ESPAÇO CONJUNTO

Nesta seção, são considerados métodos para determinar uma trajetória desejada de variáveis articulares ao longo do tempo. No esquema do espaço articular, assume-se que as posições articulares inicial e final são dadas ou calculadas a partir das configurações iniciais e finais correspondentes do efetor final ou são conhecidas a partir das soluções cinemáticas inversas para a posição, conforme fornecido no Capítulo 6. Então, o problema básico é como selecionar uma trajetória entre as posições articulares inicial e final dadas com o intervalo de tempo permitido para se mover entre elas. Uma abordagem simples e direta poderia ser unir os ângulos articulares inicial e final, denotados por θ_0 e θ_f no instante $t = t_0$ e no instante $t = t_f$, respectivamente, usando uma função de linha reta, que pode ser expressa como

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t, \text{ onde } a_0 \equiv \theta(t_0) \text{ e } a_1 \equiv \frac{\theta_f - \theta_0}{t_f - t_0} \qquad (12.1)$$

onde $\theta(t)$ é o ângulo da junta em qualquer instante t, e a_1 é a inclinação da reta mostrada na Fig. 12.1(a), que é constante. Isso implica que a velocidade da junta tem um valor constante de a_1, como mostrado na Fig. 12.1(b), enquanto a aceleração é zero, como indicado na Fig. 12.1(c). Se mais de um ponto tiver que ser conectado, uma série dessas retas deve ser unida.

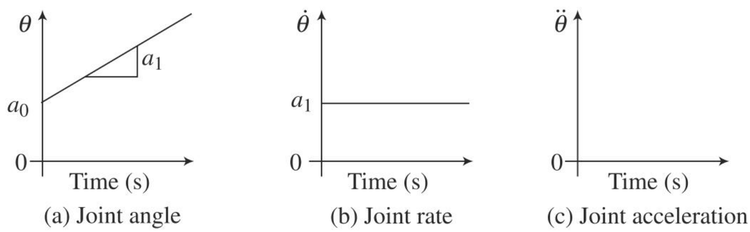


Fig. 12.1 Uma trajetória em linha reta

Essa trajetória polinomial de primeira ordem geralmente não é desejada devido às suas descontinuidades nas velocidades das juntas. Observe que, para uma junta robótica real seguir uma trajetória retilínea da Eq. (12.1), o motor de acionamento, digamos, um elétrico, precisará atingir uma velocidade quase instantânea. Isso implica que o motor elétrico deve fornecer uma aceleração quase infinita, exigindo uma corrente muito alta. Como resultado, o motor pode queimar. Portanto, tal trajetória não deve ser utilizada.

12.1.1 Polinômios Cúbicos

Uma opção alternativa onde a continuidade do nível de velocidade e aceleração precisa ser mantida é usar um polinômio de terceira ordem ou cúbico dado por

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \qquad (12.2a)$$

onde os quatro coeficientes a_0, a_1, a_2 e a_3 são calculados a partir das condições de velocidade e aceleração nos tempos t_0 e t_f, ou seja,

$$\theta(t_0) = \theta_0;\ \theta(t_f) = \theta_f \text{ e } \dot{\theta}(t_0) = 0;\ \dot{\theta}(t_f) = 0 \qquad (12.2b)$$

Para calcular os coeficientes, as primeiras derivadas temporais da Eq. (12.2a) são obtidas como

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \qquad (12.2c)$$

Agora, se substituirmos as condições da Eq. (12.2b) na expressão de velocidade da Eq. (12.2c), ele produz o seguinte conjunto de equações algébricas lineares:

$$Ax = b \tag{12.3a}$$

onde a matriz 4 × 4 A, o vetor desconhecido de 4 dimensões x contendo os coeficientes polinomiais e o vetor conhecido de 4 dimensões b de condições finais são definidos abaixo:

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix}, \quad x \equiv \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \text{ e } b \equiv \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_f \\ \dot\theta_0 \\ \dot\theta_f \end{bmatrix} \tag{12.3b}$$

A solução para o conjunto de equações algébricas lineares dadas pelas Eqs. (12.3ab) pode ser obtido como $x = A^{-1}b$, o que resulta no seguinte:

$$a_0 = \theta_0;\ a_1 = \dot\theta_0 \tag{12.3c}$$

$$a_2 = \frac{1}{t_f^2}[3(\theta_f - \theta_0) - (2\dot\theta_0 + \dot\theta_f)t_f] \tag{12.3d}$$

$$a_3 = \frac{1}{t_f^3}[2(\theta_0 - \theta_f) + (\dot\theta_0 + \dot\theta_f)t_f] \tag{12.3e}$$

Note que se a relação mostrada na Fig. 12.2 for satisfeita por θ_0, θ_f, $\dot\theta_0$ e $\dot\theta_f$, isto é, se

$$\theta_f - \theta_0 = \frac{t_f}{2}(\dot\theta_0 + \dot\theta_f) \tag{12.3f}$$

então $a_3 = 0$ da Eq. (12.3e), o que implica que apenas um polinômio de segunda ordem é necessário para $\theta(t)$. O coeficiente correspondente a_2 é então dado por

$$a_2 = \frac{1}{2t_f}(\dot\theta_f - \dot\theta_0) \tag{12,3g}$$

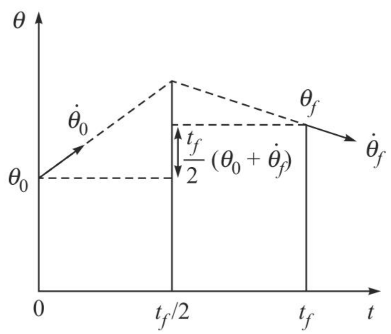


Fig. 12.2 Condições de contorno

12.1.2 Polinômios Cúbicos com Pontos Intermediários

Durante o movimento de um robô, muitas vezes é desejado que um ou mais pontos intermediários precisem ser especificados. Há também possibilidades de especificar apenas velocidades, ou velocidades e acelerações, nesses pontos intermediários. Se alguém escolher usar polinômios cúbicos, pode haver n + 1 segmentos para n pontos intermediários especificados. É possível encontrar os coeficientes para cada segmento como $a_{0i}, \ldots, a_{3i}$, para i = 1, …, n usando a metodologia explicada na Eq. (12.3). Como visto anteriormente, apenas a continuidade da velocidade pode ser mantida, mas não as acelerações. Isso é ilustrado no Exemplo 12.1 abaixo. Caso apenas a posição dos pontos intermediários seja fornecida e não haja restrição de velocidade e aceleração, pode-se obter uma curva contínua suave. Isso também é ilustrado no Exemplo 12.1.

Exemplo 12.1 Cubic Polynomials with Specified Intermediate Velocidades

Suponha que uma articulação robótica tenha que se mover de 0° a 90° em 5 segundos. As velocidades inicial e final da articulação são, respectivamente, 25°/s e –25°/s. No ponto intermediário de 45° no instante t = 3 s, a velocidade da articulação é assumida como –8°/s. Duas trajetórias cúb A equação (12.3) é a seguinte:

$$\theta \quad tt + 9^{2\ 3}\ 1(t) - \frac{13}{25} \qquad (12.4a)$$

$$\theta_1(t) = \frac{4335}{4\ 42} - 860\,ttt + \frac{919}{(12.4b)}^2 - \frac{39}{}^3$$

onde a primeira e a segunda derivadas de tempo que simbolizam a velocidade e a aceleração das articulações, respectivamente, são dadas por

$$\dot{\theta}_1(\ )\ 25 = 2\ (\ )\ 2\ tt + tt\ 3 - \frac{13}{}^2, \ddot{\theta}_1 = -\frac{26}{3} \qquad (12.4c)$$

$$\dot{\theta}_2(\ )\ 860\ \text{toneladas} + \frac{919\ 117\ 919}{} - \frac{, (\ )\ 117\ t\ tt\ t\ 22\ 2}{}^2\ \theta_2 = \frac{}{} - \qquad (12.4d)$$

Os gráficos para as Eqs. (12.4ad) são mostrados na Fig. 12.3(a). As descontinuidades na junta a aceleração indicada como “Accn.” na figura é claramente visível.

Caso se queira ter um perfil de aceleração contínuo, algumas restrições existentes precisam ser relaxadas, por exemplo, a velocidade no ponto intermediário não é especificada. Em tal situação, pode-se colocar a restrição de velocidade e aceleração contínuas no ponto intermediário. Com isso, os dois primeiros coeficientes do primeiro polinômio cúbico que une os pontos inicial e intermediário podem ser obtidos facilmente como a01 = 1(0) = 0, a11 = 1(0) = 25, onde o primeiro subscrito corresponde à ordem do tempo, e o segundo corresponde à primeira trajetória. Os outros coeficientes são obtidos resolvendo seis equações algébricas lineares obtidas a partir de seis restrições, que são a posição do ponto intermediário expressa usando o primeiro e o segundo polinômios cúbicos, a posição e a velocidade do ponto final usando o segundo polinômio, e a velocidade e a aceleração iguais obtidas a partir de dois polinômios. Se eles sa

$$\text{UM} \equiv \begin{bmatrix} 3\ 9\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 3\ 9\ 27 \\ 0\ 0\ 1\ 5\ 25\ 125 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 10\ 75 \\ 6\ 27\ 0\ 1\ 6\ 27 - \quad - \quad - \\ 1900\ 1 \quad - \quad -9 \end{bmatrix}, \text{xb} \equiv \begin{bmatrix} um_{21} \\ um_{31} \\ um_{02} \\ um_{12} \\ um_{22} \\ um_{32} \end{bmatrix} (12.5a)\ \text{e}\ 25 \equiv \begin{bmatrix} -10 \\ 45 \\ 90 \\ - \\ -25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

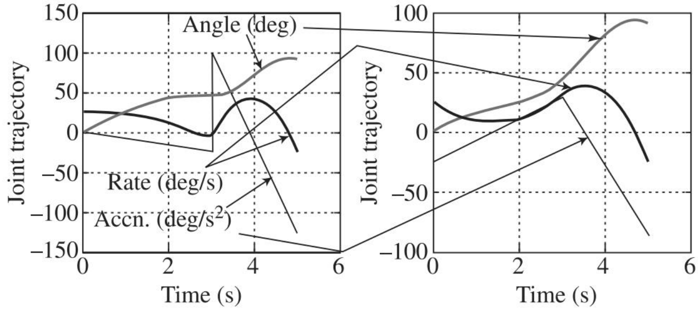
A solução da Eq. (12.5a) pode ser obtida facilmente usando MATLAB como

- Para o primeiro polinômio cúbico:

$$um_{21} = -\frac{49\ 107\ e}{4} \quad um_{31} = \frac{}{36} \qquad (12.5b)$$

- **Para o segundo polinômio cúbico:**

$$a_{02} = \frac{5415}{16},\quad a_{12} = -\frac{5015}{16},\quad a_{22} = \frac{1609}{16},\quad a_{32} = -\frac{153}{16} \qquad (12.5c)$$



(a) Discontinuous acceleration (b) Continuous acceleration

Fig. 12.3 Dois polinômios cúbicos com um ponto intermediário

A Figura 12.3 (b) mostra a aceleração contínua no ponto intermediário. No exemplo acima, apenas um ponto intermediário foi considerado. Se mais pontos intermediários forem considerados, a análise pode ser estendida de forma semelhante. Por outro lado, se a velocidade e a aceleração devem ser satisfeitas no ponto intermediário, a ordem do polinômio deve ser aumentada para valores mais altos. Além disso, se as acelerações nos pontos inicial e final também precisarem ser especificadas, a ordem do polinômio deve ser aumentada ainda mais, conforme e

12.1.3 Polinômio Quíntico

Um gráfico polinomial cúbico típico é mostrado na Fig. 12.3. Na trajetória de terceira ordem, como feito na Eq. (12.2a), pode-se especificar apenas um total de quatro condições nas duas extremidades da trajetória. Não há controle sobre a aceleração. Portanto, no início e no fim, os valores de aceleração aumentam ou diminuem quase instantaneamente. Isso pode causar danos aos motores que controlam as articulações do robô. Portanto, é necessário usar um polinômio de quinta ordem ou quíntico para satisfazer todas as seis condições, ou seja, posições, velocidade e acelerações nas duas extremidades, a fim de obter uma trajetória suave. Um polinômio quíntico é definido por

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \qquad (12.6a)$$

cujas duas primeiras derivadas temporais são

$$\dot\theta(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \qquad (12.6b)$$

$$\ddot\theta(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \qquad (12.6c)$$

As condições finais são tomadas como

$$\theta(t_i) = \theta_0;\ \theta(t_f) = \theta_f,\ \dot\theta(0) = \dot\theta_0,\ \dot\theta(t_f) = \dot\theta_f,\ \text{e}\ \ddot\theta(0) = \ddot\theta_0,\ \ddot\theta(t_f) = \ddot\theta_f \qquad (12.7)$$

Embora muitas funções suaves possam satisfazer as restrições dadas pela Eq. (12.7), polinômios de tempo t são escolhidos aqui devido à sua facilidade de cálculo e simplicidade de expressão. A ordem mais baixa que pode satisfazer todas as seis condições da Eq.

cinco. Substituindo as condições da Eq. (12.7) nas Eqs. (12.6ac), seis equações com incógnitas $a_0, \ldots, a_5$ são obtidas como

$$\theta(0) \equiv \theta_0 = a_0 \tag{12.8a}$$

$$\theta(t_f) \equiv \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \tag{12.8b}$$

$$\dot{\theta}(0) \equiv \dot{\theta}_0 = a_1 \tag{12.8c}$$

$$\dot{\theta}(t_f) \equiv \dot{\theta}_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \tag{12.8d}$$

$$\ddot{\theta}(0) = 2a_2 \tag{12.8e}$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 3a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \tag{12.8f}$$

As equações (12.8af) podem ser colocadas em uma forma de matriz-vetor mais compacta como $Ax = b$, onde a matriz 6×6 A, o vetor desconhecido de 6 dimensões x contendo os coeficientes polinomiais e o vetor conhecido de 6 dimensões b de condições finais são expressos abaixo:

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix}, \quad x \equiv \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}, \text{ e } b \equiv \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_f \\ \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_f \end{bmatrix} \tag{12.8g}$$

A solução para o conjunto de equações algébricas lineares, a saber, Eq. (12.8g) pode ser obtido como $x = A^{-1}b$, que produz os coeficientes desconhecidos, $a_0, \ldots, a_5$, como

$$a_0 = \theta_0; \quad a_1 = \dot{\theta}_0; \quad a_2 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}_0 \tag{12.9a}$$

$$a_3 = \frac{1}{2t_f^3}\left[20(\theta_f - \theta_0) - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2\right] \tag{12.9b}$$

$$a_4 = \frac{1}{2t_f^4}\left[30(\theta_0 - \theta_f) + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2\right] \tag{12.9c}$$

$$a_5 = \frac{1}{2t_f^5}\left[12(\theta_f - \theta_0) - 6(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2\right] \tag{12.9d}$$

Observe que, se $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_f = 0$, e a relação mostrada na Fig. 12.2 for satisfeita por $\theta_0, \theta_f, \dot{\theta}_0$ e $\dot{\theta}_f$, ou seja, se a Eq. (12.3f) for válida, então $a_5 = 0$ da Eq. (12.9d). Isso implica 0, que apenas um polinômio de quarta ordem é necessário para $\theta(t)$. Consequentemente, os coeficientes a_3 e a_4 são dados por

$$a_3 = \frac{1}{t_f^2}(\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0), \text{ e } a_4 = -\frac{1}{2t_f^3}(\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0) \tag{12.9e}$$

Utilizando combinações de polinômios de quarta ordem e retas, trajetórias para vários casos podem ser determinadas com bastante facilidade. Dois desses casos serão explicados nas Seções 12.1.4 a 12.1.5.

Observe que um polinômio quíntico também pode ser usado para planejar um movimento que passa por seis pontos especificados. De fato, quaisquer n pontos intermediários especificados requerem (n–1)-polinômios de grau. Neste caso, no entanto, não há controle sobre a velocidade e a aceleração. Para o polinômio qunítico que passa por seis pontos, o problema pode ser formulado na forma de Ax = b, onde a matriz A de 6 × 6 e o vetor b de 6 dimensões são dados por

$$\text{UM} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^4 & t_1^5 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^4 & t_2^5 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & t_3^4 & t_3^5 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 & t_4^4 & t_4^5 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \end{bmatrix}, \text{ e b } \equiv \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta \\ \theta \\ \theta_4 \\ \theta_f \end{bmatrix} \qquad (12.10)$$

onde t0 = 0 foi assumido. A formulação acima não é desejável para tamanhos grandes de n, pois haverá oscilação na trajetória. Além disso, o problema é mal condicionado e computacionalmente custoso. Uma ilustração é dada no Exemplo 12.2.

Exemplo 12.2 Planejamento de movimento de uma articulação

O programa MATLAB mostrado na Fig. 12.4 calcula a expressão analítica dos coeficientes dados pela Eq. (12.9ad).

```
>> % MATLAB program for quintic polynomial coefficients
>> claro
>> syms tf tf2 tf3 tf4 tf5 th_0 th_f th_d_0 th_d_f th_dd_0 th_dd_f
>> tf2 = tf*tf; tf3 = tf2*tf; tf4 = tf3*tf; tf5 = tf4*tf;

>> A=[1 0 0 0 0 0; 1 tf tf2 tf3 tf4 tf5; ...
   0 1 0 0 0 0; 0 1 2*tf 3*tf2 4*tf3 5*tf4;...
   0 0 2 0 0 0; 0 0 2 6*tf 12*tf2 20*tf3]
>> b=[th_0;th_f;th_d_0;th_d_f;th_dd_0;th_dd_f]
>> x=A\b
>> pretty(simplify(x))
>> %MATLAB program ends
```

Figura 12.4 MATLAB program to find the coefficients of quintic polynomial

Exemplo 12.3 Trajetória de uma junta como polinômio quíntico

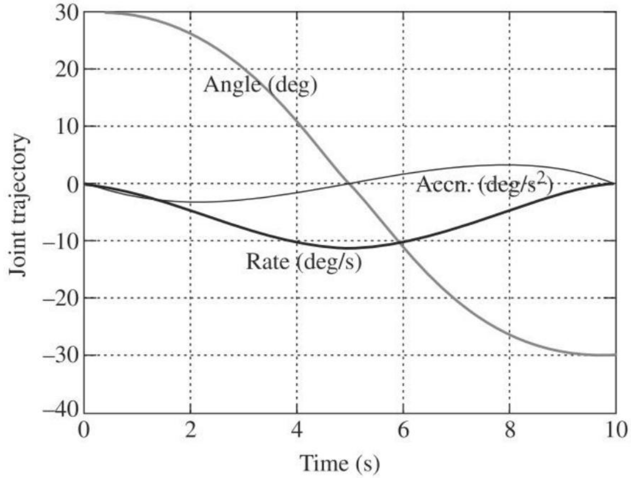
Para um determinado conjunto de condições iniciais e finais de ângulos de junta, taxas ou velocidades e acelerações de uma junta de robô, o vetor conhecido b é lido como segue:

$$b = \Big[\underbrace{\pi/6}_{\text{radical}}\ \underbrace{60\text{-}0\pi}_{\text{radical}}\ 0\ \underbrace{0}_{r/s}\ \underbrace{}_{r/s}\ \underbrace{}_{r/s^2}\ \underbrace{}_{r/s^2}\Big]^T \qquad (12.11)$$

O polinômio quíntico correspondente e suas derivadas temporais são mostrados em Fig. 12.5(a), onde tf = 10 segundos e intervalo de tempo tΔ= 0,01 segundo. O programa MATLAB usado para gerar a Fig. 12.5(a) é apresentado na Fig. 12.5(b). Observe na Fig. 12.5(a) que as velocidades e acelerações inicial e final são zero. Isso garantirá um início e uma parada suaves do movimento articular.

Exemplo 12.4 Comparação de um polinômio cúbico com um polinômio quíntico

Utilizando as quatro primeiras condições da Eq. (12.11), uma trajetória polinomial cúbica também é determinada e comparada na Figura 12.6. Observe que, embora o polinômio quíntico não apresente descontinuidade na aceleração nas extremidades da trajetória, ele dispara no meio de todos os três gráficos, ou seja, ângulos, velocidades e acelerações. À medida que a ordem do polinômio aumenta, esse disparo para cima se torna cada vez mais proemine



(a) Trajetória

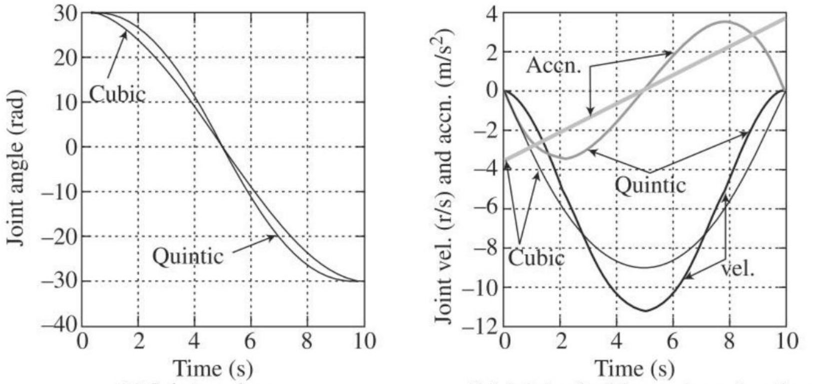
%% Programa MATLAB para polinômio quíntico
claro

```
tf = 10;
th_0 = pi/6; th_f = -pi/6; th_d_0 = 0; th_d_f = 0; th_dd_0 = 0;
th_dd_f = 0;
tf2 = tf*tf; tf3 = tf2*tf; tf4 = tf3*tf; tf5 = tf4*tf;

A=[1 0 0 0 0 0; 1 tf tf2 tf3 tf4 tf5; ...
  0 1 0 0 0 0; 0 1 2*tf 3*tf2 4*tf3 5*tf4;...
  0 0 2 0 0 0; 0 0 2 6*tf 12*tf2 20*tf3]
b=[th_0;th_f;th_d_0;th_d_f;th_dd_0;th_dd_f]
x=A\b
delt = tf/10;
for i=1:11
    t (i) = (i-1)*delt
th(i)=x(1)+x(2)*t(i)+x(3)*t(i)^2+x(4)*t(i)^3+…
x(5)*t(i)^4+x(6)*t(i)^5;
th_d(i)=x(2)+2*x(3)*t(i)+3*x(4)*t(i)^2+4*x(5)*t(i)^3+…
5*x(6)*t(i)^4;
th_dd(i)=2*x(3)+6*x(4)*t(i)+12*x(5)*t(i)^2+20*x(6)*t(i)^3;
    end
plot(t,th,t,th_d,t,th_dd); grid on
xlabel ('time (sec)')
ylabel ('angle (rad), rate (r/s), and acceleration (r/s^2)')
%% MATLAB program ends
```

(b) Programa MATLAB

Figura 12.5 A quintic polynomial trajectory for a robot joint



(a) Joint angles (b) Joint velocities and accelerations

Figura 12.6 Comparison of cubic and quintic polynomials

12.1.4 Trajetória com pontos iniciais e finais dados f q_0 e q

Como na Fig. 12.7, desenvolve-se uma trajetória que parte do repouso em 0, passa pelas fases de aceleração, θ velocidade constante e desaceleração e, finalmente, para completamente em . Para tanto, escolhe-se primeiro o valor do parâmetro que denota metade do período de aceleração e desaceleração. Em θ_f. segundo lugar, determinam-se os pontos auxiliares e , utilizando o seguinte procedimento: dois pontos Δ e 02 01 nos instantes t = e t = tf – são tomados como e e 02

θ θ_{f1} θ

θ_{f2} Δ Δ $\theta_{01} = \theta$ e f . $\theta_{f2} = \theta$ Em seguida, 0 são θ_{01} θ_{f2}

estão conectados por uma linha reta e θ θ_{f1} determinados como os pontos em e 0

linha reta no tempo t = 2 e t = tf – 2 Δ Δ. Os segmentos de trajetória entre θ

θ e 02, θ_{f1} e θ_f, são então determinados usando polinômios de quarta ordem,

de modo que suas velocidades coincidam com a composição de linhas retas que conectam 0- 01- θ θ θ

θ_f em pontos de fronteira e de modo que suas acelerações sejam zero em f , e é especificado pelo 02 θ_{01}, θ_{f2} θ e 0. θ

esses pontos de fronteira. O segmento de trajetória entre a reta. θ θ_{f1}

Assim, toda a trajetória é dada pela linha contínua em negrito na Fig. 12.7.

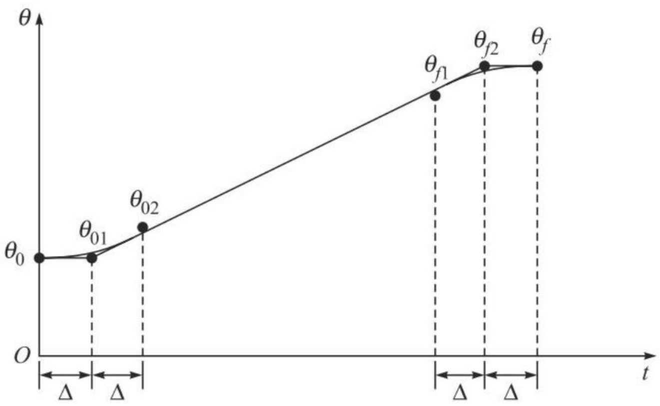


Fig. 12.7 Trajetória com aceleração, velocidade constante e desaceleração

Exemplo 12.5 Planejamento de trajetória para um braço planar de dois elos

Aplicando o método acima ao braço plano de dois elos mostrado na Fig. 12.8, gera-se uma trajetória que parte do repouso na posição inicial da Fig. 12.8(a) e para completamente na posição final mostrada na Fig. 12.8(b) em 3,0 segundos. Suponha que escolhemos = 0,3 s. Então, o primeiro ângulo da junta é obtido da seguinte forma: Primeiro, escolhemos θ_1 = 90° no instante t = 0,3 s, e θ θ_{f2} = 45° em t = 2,7 s. A equação da reta é então 01 obtido como

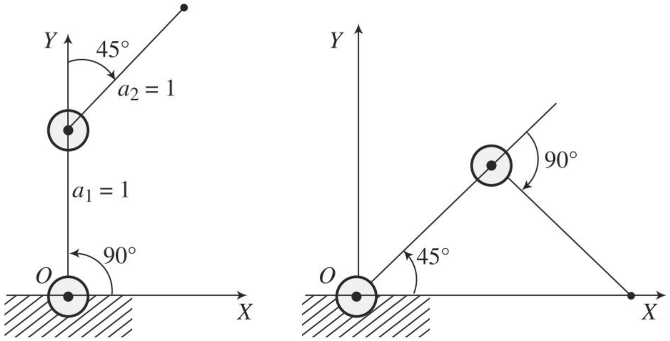
$$\theta_1 = -\frac{150}{8}t + \frac{675}{8} \tag{12.12a}$$

Por isso, θ_{02} em t = 0,6 s, e θ_{f1} em t = 2,4 s são encontrados como

$$\theta_{02} = \frac{675}{8}^\circ;\ e \quad \theta_{f1} = \frac{405}{8}^\circ \tag{12.12b}$$

Agora, para o polinômio de quarta ordem entre obtido θ e 0 θ os coeficientes são 02, como

$$a_0 = 90^\circ;\ a_1 = a_2 = 0^\circ;\ a_3 = -\frac{1875}{36}^\circ;\ e\ a_4 = \frac{9375}{216}^\circ \tag{12.12c}$$



(a) Initial Position (b) Final Position

Fig. 12.8 Braço planar de dois elos

Observe que, $\dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta} = 0$, e f $\theta_f - \theta_0$ $\dot{\theta} + \dot{\theta}$ As condições tf /2(0) foram usadas para encontrar os valores dos coeficientes. Para o intervalo 0 < t ≤ 0,5, a trajetória conjunta é a seguinte:

$$\theta_1 = 90 - \frac{1875}{36}t^3 + \frac{9375}{216}t^4 \tag{12.12d}$$

Para a linha reta entre θ e 02 θ_{f1}, ou seja, 0,6 ≤ t 2,4, pode ser facilmente obtido como

$$\theta_1 = \frac{675}{8} - \frac{150}{8}(t - 0{,}6) \tag{12.12e}$$

Finalmente, o polinômio de quarta ordem entre θ e f2 θ_f, ou seja, 1,5 ≤ t 2,0, pode ser escrito como

$$\theta_1(t) = a_0 + a_1(t - 2{,}4) + a_3(t - 2{,}4)^3 + a_4(t - 2{,}4)^4 \tag{12.12f}$$

cujos coeficientes são calculados como

$$a_0 = \frac{405}{8}^\circ;\ a_1 = -\frac{150}{8}^\circ;\ a_3 = \frac{625}{12}^\circ;\ e\ a_4 = -\frac{3125}{72}^\circ \tag{12,12g}$$

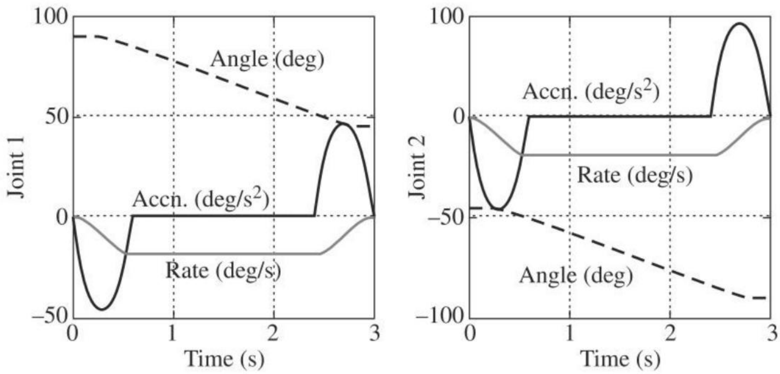
Portanto, a trajetória final para θ_1 é escrito como

$$\theta_1(t)=\begin{cases} 90-\dfrac{1875}{36}t^3+\dfrac{9375}{216}t^4, & 0\le t\le 0{,}6\\[2mm] \dfrac{675}{8}-\dfrac{150}{8}(t-0{,}6), & 0{,}6<t\le 2.4\\[2mm] \dfrac{405}{8}-\dfrac{150}{8}(t-2{,}4)+\dfrac{625}{12}(t-2{,}4)^3-\dfrac{3125}{72}(t-2{,}4)^4, & 2{,}4<t\le 3.0 \end{cases} \tag{12h12}$$

Da mesma forma, o segundo ângulo articular θ_2 é obtido como

$$\theta_2(t)=\begin{cases} -45-\dfrac{625}{12}t^3+\dfrac{3125}{72}t^4, & 0\le t\le 0{,}6\\[2mm] -\dfrac{405}{8}-\dfrac{150}{8}(t-0{,}6), & 0{,}6<t\le 2.4\\[2mm] -\dfrac{675}{8}-\dfrac{150}{8}(t-2{,}4)+\dfrac{625}{12}(t-2{,}4)^3-\dfrac{3125}{72}(t-2{,}4)^4, & 2{,}4<t\le 3.0 \end{cases} \tag{12.13}$$

As Figuras 12.9(ab) mostram as trajetórias finais resultantes para as duas juntas do braço de dois elos, enquanto a Figura 12.9(c) mostra o programa MATLAB correspondente que gerou os gráficos das Figuras 12.9(ab). Para melhor visualização, a Figura 12.10 mostra as capturas de tela do RoboAnalyzer durante a animação do



(a) Joint 1 trajectories (b) Joint 2 trajectories

```
>>%% MATLAB program for joint trajectories of 2-link arm
>> claro
>> tf = 3; N = 100; delt = tf/N
>> for i=1:N+1
>>t (i) = (i-1)*delt
>>if (t (i) <= 0.6)
>>     th_1 (i) = 90-1875/36*t(i)^3+9375/216*t(i)^4
>>     th_d_1 (i) = -1875/12*t(i)^2 + 9375/54*t(i)^3
>>    th_dd_1 (i) = -1875/6*t(i) + 9375/18*t(i)^2
>>    th_2 (i) = -45-625/12*t(i)^3+3125/72*t(i)^4
>>    th_d_2 (i) = -625/4*t(i)^2 + 3125/18*t(i)^3
```

(Continuação)

```
>>     th_dd_2 (i) = -625/2*t(i) + 3125/6*t(i)^2
>>   elseif (t(i) <= 2.4)
>>       th_1 (i) = 675/8 - 75/4*(t(i)-0.6)
>>       th_d_1 (i) = -75/4
>>       th_dd_1 (i) = 0
>>       th_2 (i) = - 405/8 - 75/4*(t(i)-0.6)
>>       th_d_2 (i) = -75/4
>>       th_dd_2 (i) = 0
>>   else
>>       th_1 (i) = 405/8-150/8*(t(i)-2.4)+625/12*(t(i)-2.4)^3 ...
>>       -3125/72*(t(i)-2.4)^4
>>        th_d_1 (i) = -150/8+625/4*(t(i)-2.4)^2-3125/18*(t(i)-2.4)^3
>>        th_dd_1 (i) = 625/2*(t(i)-2.4)-3125/6*(t(i)-2.4)^2

>>     th_2 (i) = -675/8-150/8*(t(i)-2.4)+625/12*(t(i)-2.4)^3 ...
>>      -3125/72*(t(i)-2.4)^4
>>     th_d_2 (i) = -150/8+625/4*(t(i)-2.4)^2-3125/18*(t(i)-2.4)^3
>>     th_dd_2 (i) = 625/2*(t(i)-2.4)-3125/6*(t(i)-2.4)^2
>>   end
>> end
>> subplot (1,2,1), plot(t,th_1,t,th_d_1,t,th_dd_1), grid on
>> subplot (1,2,2), plot(t,th_2,t,th_d_2,t,th_dd_2), grid on
>> % MATLAB program ends
```

(c) Programa MATLAB

Figura 12.9 Plot of joint trajectories for two-link arm

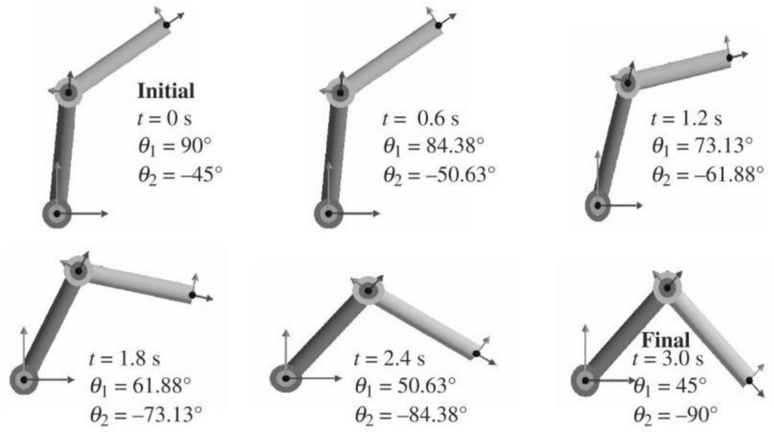


Figura 12.10 RoboAnalyzer screenshots of two-link arm

12.1.5 Trajetória com pontos iniciais, vários intermediários e finais fornecidos

Aqui, obtém-se uma trajetória que parte do repouso na posição inicial posições intermediárias e para na θ_0, passa por f . Primeiro, posição final 1 a trajetória passa exatamente pelos θ θ_2 pontos 02, 11, 12, …, f1 e 0, f2 θ considera-se o caso em que os θ e 1 θ_2 auxiliares são especificados, como na Fig. 12.11. Os θ θ θ θ valores nos pontos e 01 e estão na reta entre e θ θ θ θ_f são iguais. Além disso, θ_{02} $_{01}$ θ_{11} θ θ_1. Da mesma forma, os pontos θ_{12}, …, $_{f1}$ θ são determinados. Pode-se então obter a trajetória

entre (0, 02), (11, 12), ..., ((02, θ f1, θ f) usando polinômios de quarta ordem, e entre 22, 11), (12, 21) e (com linhas θ f1) usando retas. A trajetória final é mostrada em negrito na Fig. 12.11. Caso a trajetória tenha que passar exatamente por θ e 1 o θ2, número de pontos auxiliares precisa ser aumentado, conforme ilustrado na Fig. 12.12(a). Esses pontos auxiliares são determinados da seguinte forma: Referindo-se à Fig. 12.12(b), θ i2(i = 1, 2) é o ponto médio entre A, que nada mais é do que a intersecção da linha de

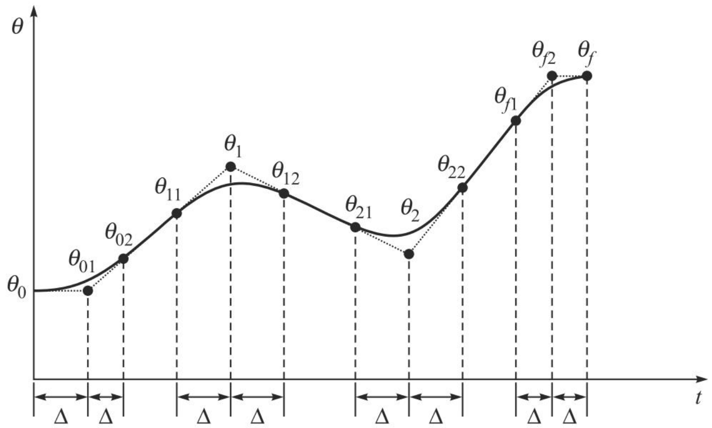


Fig. 12.11 Trajetória passando perto dos pontos intermediários

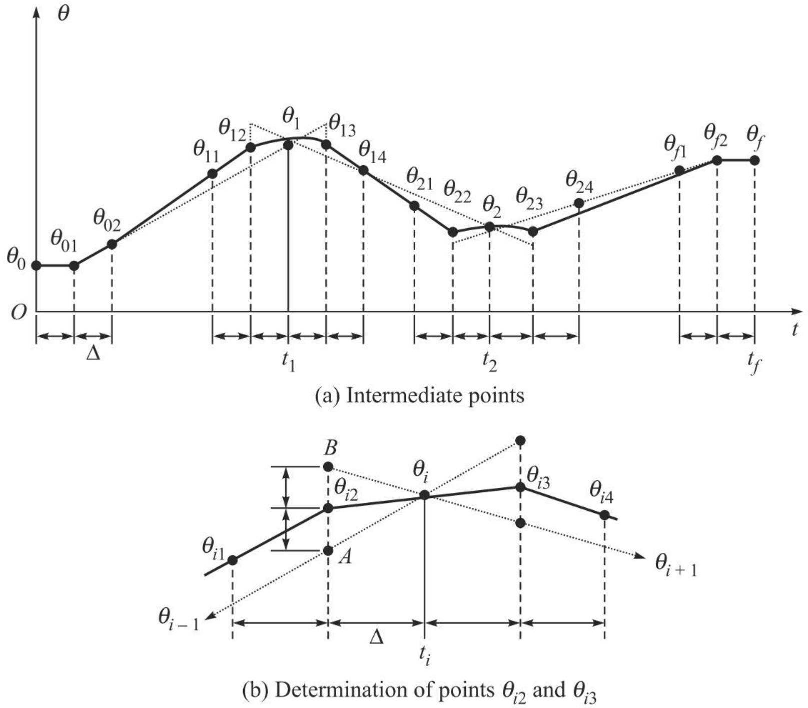


Fig. 12.12 Trajetória passando pelos pontos intermediários

t = ti – com a reta entre a interseção da reta de θ_{i-1} (θ_{01} quando i = 1) e e i θ_{eu} e B, ou seja, o t = ti – com a reta entre o ponto é obtido de forma semelhante. Então, θ θ_{i+1} (θ f2quando i = 1). segmentos θ_{is} entre (0, 02), ( ) são obtidos usando polinômios de quarta ordem, e θ11, 1), (1, 14), …, $\theta_{f1,f}$ θ aqueles entre (24, f1) usando retas, como feito acima. θ02, 11), (14, 21) e (θ θ

12.1.6 Segmentos Lineares com Mistura Parabólica (LSPB)

Uma combinação alternativa de trajetórias, mais comum nas indústrias, é a de arcos parabólicos. Ela normalmente possui três partes: (1) aceleração constante, ou seja, velocidade de rampa ou posição parabólica; (2) aceleração zero, ou seja, velocidade constante ou posição linear; e (3) desaceleração constante, ou seja, velocidade de rampa ou posição parabólica. Geralmente, os tempos de aceleração e desaceleração são considerados iguais. Portanto, resulta uma trajetória simétrica em relação à posição central, ou seja, (tf – t0)/2, conforme indicado na Figura 12.13. Tal trajetória também é chamada de perfil de velocidade trapezoidal devido ao formato trapezoidal do gráfico de velocidade.

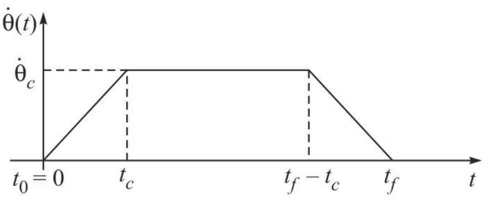


Figura 12.13 Trapezoidal velocity profile

Considerando a primeira parte da trajetória como parabólica em nível de posição, o ângulo de articulação θ1(t) entre t0(=0) $\geq$ t $\leq$ tc pode ser expresso como um polinômio de segunda ordem, a saber,

$$\theta_1(t) = a_{01} + a_{11}t + a_{21}t^2 \qquad (12.14a)$$

cujas derivadas temporais são dadas como

$$\dot\theta_1(t) = a_{11} + 2a_{21}t \text{ e } \ddot\theta_1(t) = 2a_{21} \qquad (12.14b)$$

As três restrições a seguir são então impostas para calcular as três incógnitas coeficientes da Eq. (12.14a):

$$\theta_1(0) = \theta_0, \dot\theta_1(0) = 0, \text{ Usando } \dot\theta_1(t_c) = \dot\theta_c \text{ (Constante)} \qquad (12.14c)$$

a Eq. (12.14ac), os coeficientes são calculados como a01 = θ01, a11 = 0, e para θc/2. A equação resultante para a trajetória durante aceleração constante, ou seja, a21 = 0 t $\geq$ $\leq$ tc, é dado por

$$\theta_1(t) = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot\theta_c t^2, \quad \text{onde} \quad \ddot\theta_c = \dot\theta_c / t_c \text{ (Constante)} \qquad (12.15)$$

A seguir, o segmento de velocidade constante, ou seja, a trajetória em linha reta para a junta denotado como θ2(t) é dado por

$$\theta_2(t) = a_{02} + a_{12}t \qquad (12.16a)$$

Observando que para trajetória contínua θ2(tc) = θ1(tc), e os coeficientes $\dot\theta_2(t_c) = \dot\theta_c$. O da equação da reta, Eq. (12.16a), são calculados como a02 = θ_{01} – $\dot\theta_c t_c/2$ e a12 = $\dot\theta_c$. Portanto, a equação da trajetória da reta para tc $\geq$ t $\leq$ tf – tc é obtido como

$$\theta_2(t) = \theta_0 + \dot\theta_c(t - t_c/2) \qquad (12.16b)$$

Continuando da mesma forma que a parte da aceleração, pode-se assumir outra função parabólica para a junta denotada por θ3(t) como

$$\theta_3(t) = a_{03} + a_{13}t + a_{23}t^2 \qquad (12.17a)$$

cujas derivadas temporais são dadas como

$$\dot\theta_3(t) = a_{13} + 2a_{23}t \text{ e onde } \ddot\theta_3(t) = 2a_{23} \qquad (12.17b)$$

as restrições impostas são as seguintes:

$$\theta_3(t_f) = \theta_f, \dot\theta_3(t_f) = 0, \dot\theta_3(t_f - t_c) = \dot\theta_c \qquad (12.17c)$$

Usando a Eq. (12.17ac), os coeficientes são calculados como $a_{03} = \theta_f - \ddot\theta_c t_f^2/2$, $a_{13} = \ddot\theta_c t_f$, e $a_{23} = -\ddot\theta_c/2$. A equação resultante para a trajetória durante aceleração constante, ou seja, para $t_f - t_c \le t \le t_f$, é dada por

$$\theta_3(t) = \theta_f - \ddot\theta_c(t_f - t)^2/2 \qquad (12.18)$$

As três seções da trajetória podem agora ser resumidas como

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \ddot\theta_c t^2/2 && \text{para } 0 \le t \le t_c \\ &= \theta_0 + \dot\theta_c(t - t_c/2) && \text{para } t_c \le t \le t_f - t_c \\ &= \theta_f - \ddot\theta_c(t_f - t)^2/2 && \text{para } t_f - t_c \le t \le t_f \end{aligned} \qquad (12.19)$$

Note que para haver continuidade na trajetória da posição, a condição $\theta_2(t_c) = \theta_3(t_f - t_c)$ precisa ser satisfeito, o que produz

$$\dot\theta_c = \frac{\theta_f - \theta_0}{t_f - t_c} \qquad (12.20)$$

A Figura 12.14 mostra os gráficos para a trajetória LSPB onde a Eq. (12.20) é satisfeita para os valores numéricos do Exemplo 12.6.

Exemplo 12.6 Trajetória com LSPB ou Trapezoidal Velocity Profile

Para gerar os gráficos da trajetória dos segmentos lineares com blend parabólico ou do perfil de velocidade trapezoidal, são considerados os seguintes valores numéricos:

$$t_f = 5\text{s}, t_c = 2\text{s}, \theta_1(0) = 30°, \theta_3(t_f) = -30°, \dot\theta_c = 20°/\text{s} \qquad (12.21)$$

Os gráficos são apresentados na Fig. 12.14.

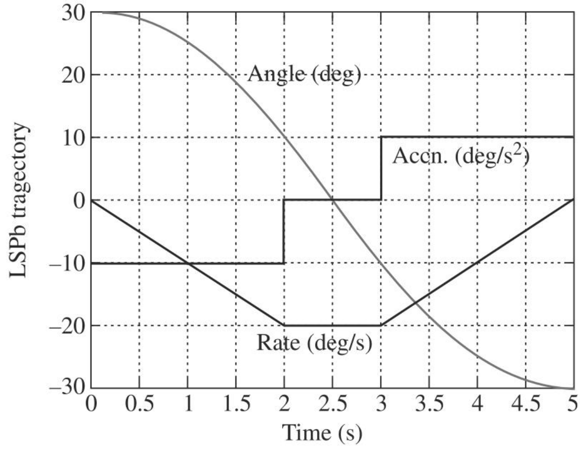


Figura 12.14 Trajectory with LSPB or trapezoidal velocity profile

12.1.7 Trajetória Cicloidal

Ciclóide

Uma ciclóide is defined as the curve traced by **um ponto em um círculo enquanto ele rola em uma linha reta** line without slipping. It is a geometric entity **usado em engrenagens e cames.**

Sem recorrer a um polinômio de ordem superior, por exemplo, um polinômio quíntico, que pode ter disparos maiores no meio de uma trajetória, como visto na Fig. 12.6, pode-se satisfazer velocidade e aceleração zero no início e no fim de uma trajetória, ou seja, nos pontos inicial e final, respectivamente, usando uma trajetória cicloidal. Isto pode ser dado por

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{\theta_f - \theta_0}{T}\left[\Delta t - \frac{T}{2\pi}\,\text{pecado}\,\frac{2\pi\Delta t}{T}\right] \quad (12.22a)$$

onde $T \equiv t_f - t_0$ e $\Delta t \equiv t - t_0$. Suas derivadas temporais podem ser dadas por

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta_f - \theta_0}{T}\left[1 - \cos\frac{2\pi\Delta t}{T}\right], \quad \text{e}\quad \ddot{\theta}(t) = \frac{\theta_f - \theta_0}{T\,T}\left[2\pi\,\text{pecados}\,\frac{2\pi\Delta t}{T}\right] \quad (12.22b)$$

Um gráfico típico da Eq. (12.22a) e suas derivadas temporais fornecidas pela Eq. (12.22b) são mostrados na Figura 12.15. Observe que, devido ao comportamento suave dessa trajetória, ela foi utilizada nos Capítulos 6, 8 e 9, além de ser implementada no software RoboAnalyzer como trajetória padrão.

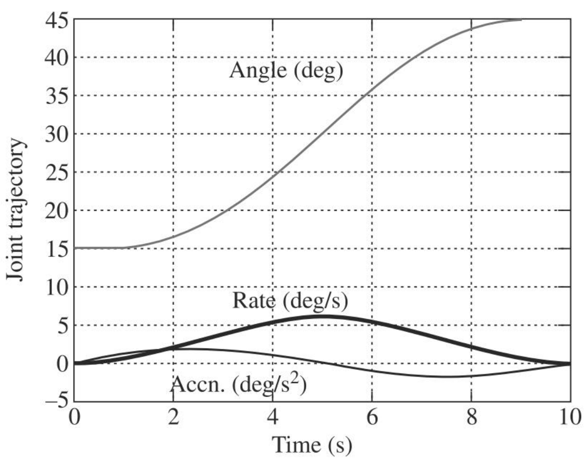


Figura 12.15 Cycloidal trajectory of a joint motion

Exemplo 12.7 Trajetória Cicloidal

Para a geração de uma trajetória cicloidal usando as Eqs. (12.22ab), as seguintes entradas numéricas para o tempo total de T = 10 s são tomadas como

Ângulos articulares iniciais e finais: $\theta_0 = 15°$, $\theta_f = 45°$

Velocidades articulares iniciais e finais: $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_f = 0$ graus/s; $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_f = 0$ graus/s^2

Acelerações articulares iniciais e finais: $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_f = 0$ graus/s^2

12.1.8 Trajetória de Spline

Spline

O termo spline vem de desenho, where splines are flexible strips guided by points on a paper. They are used do draw curves.

Uma trajetória que passa por N pontos pode ser obtida conectando um (N – 1) polinômio de grau. Se N for grande, a presença de oscilações, como observado na Figura 12.6, torna a trajetória inaceitável, particularmente em aplicações robóticas. Para N pontos intermediários, pode-se escolher N – 1 polinômios de ordem inferior em vez de considerar um polinômio de ordem N – 1, como ilustrado na Figura 12.16. Os polinômios podem ser escolhidos de forma que não apenas a continuidade na posição seja mantida, mas também na velocidade e na aceleração. Um exemplo poderia ser o polinômio cúbico tratado na Seção 12.1.2. Sejam quaisquer dois pontos intermediários consecutivos, digamos, (t_k, θ_k) e (t_{k+1}, θ_{k+1}), estão conectados pelo k-ésimo polinômio cúbico, denotado por ρ_k que pode ser dado por

$$\rho_k = a_{0k} + a_{1k}(t - t_k) + a_{2k}(t - t_k)^2 + a_{3k}(t - t_k)^3 \qquad (12.23)$$

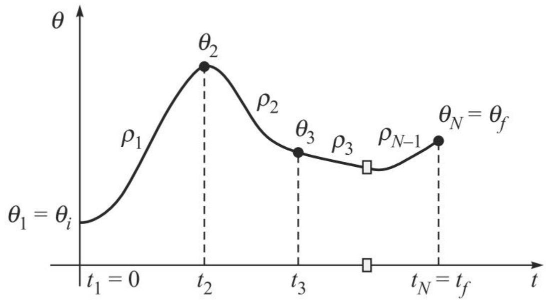


Fig. 12.16 Trajetória de spline conectando pontos intermediários

para $t_k \le t \le t_{k+1}$. Assim, para k = 1, …, N – 1, splines, 4(N ÿ 1) coeficientes devem ser avaliados. Esses coeficientes serão avaliados em termos dos valores da função e suas segundas derivadas, a saber, θ_k's e $\ddot{\theta}_k$'s, como feito em Angeles (2003). Um método alternativo para avaliar os coeficientes em termos das velocidades, ou seja, $\dot{\theta}_k$'s, também é possível, como apresentado em Biagotti e Melchiorri (2008). Os passos para encontrar as expressões dos coeficientes são os seguintes:

1. Primeira e segunda derivadas da equação (12.23) Nesta etapa, as expressões das primeira e segunda derivadas da k-ésima spline cúbica são obtidas como

$$\dot{\rho}_k = a_{1k} + 2a_{2k}(t - t_k) + 3a_{3k}(t - t_k)^2 \qquad (12.24a)$$

$$\ddot{\rho}_k = 2a_{2k} + 6a_{3k}(t - t_k) \qquad (12.24b)$$

2. *Expressions for the Coefficients* a_{0k}, a_{1k} e a_{2k} Substituindo $t = t_k$, em Eqs. (12.23) e (12.24ab), podemos encontrar os coeficientes do polinômio como

$$a_{0k} = \theta_k,\; a_{1k} = \dot{\theta}_k,\; \text{e } a_{2k} = \frac{\ddot{\theta}_k}{2} \qquad (12.25)$$

onde $\theta_k \equiv \rho_k(t_k)$, $\dot{\theta}_k \equiv \dot{\rho}_k(t_k)$ e $\ddot{\theta}_k \equiv \ddot{\rho}_k(t_k)$.

3. Condições de igualdade de duas splines consecutivas no ponto de apoio k + 1 Observe que os dois polinômios no ponto de apoio k + 1, ou seja, em tk + 1, ρ_k e ρ_{k+1} também conhecido como nó em algumas literaturas, têm os mesmos valores, ou seja,

$$\rho_k(t_{k+1}) = \theta_{k+1}, \quad \rho_{k+1}(t_{k+1}) = \theta_{k+1} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho}_k(t_{k+1}) = \ddot{\theta}_{k+1} \tag{12.26}$$

em que, conforme as definições após a Eq. (12.25), θ_{k+1}, $\dot{\theta}_{k+1}$ e $\ddot{\theta}_{k+1}$ são iguais a $\rho_{k+1}(t_{k+1})$, $\dot{\rho}_{k+1}(t_{k+1})$ e $\ddot{\rho}_{k+1}(t_{k+1})$, respectivamente.

4. Expression for the Coefficient a_{3k} Para encontrar a expressão os coeficientes da spline $\ddot{\rho}_k$ na Eq. (12.23), a expressão para $\ddot{\rho}_k(t_{k+1})$ de Eq. (12.24b) são igualados a $\ddot{\rho}_{k+1}$, isto é,

$$2a_{2k} + 6a_{3k}(t_{k+1} - t_k) = \ddot{\theta}_{k+1} \quad \text{ou} \quad 6a_{3k}\Delta t_k = \ddot{\theta}_{k+1} - \ddot{\theta}_k \tag{12.27}$$

onde $\Delta t_k \equiv t_{k+1} - t_k$ e a expressão para o coeficiente a_{2k} é substituída por Equação (12.25).

5. Reescreva a expressão para a_{1k} Como o objetivo aqui é expressar os coeficientes em termos da posição e suas derivadas duplas, a Eq. (12.23) é reescrita em t_{k+1} e igualada a $\rho_{k+1}(t_{k+1})$, ou seja,

$$a_{0k} + a_{1k}\Delta t_k + a_{2k}\Delta t_k^2 + a_{3k}\Delta t_k^3 = \theta_{k+1} \tag{12.28a}$$

Substituindo todos os coeficientes obtidos acima, exceto a_{1k}, obtém-se como

$$a_{1k} = \frac{\Delta\theta_k}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k}{6}\left(\Delta\ddot{\theta}_{k+1} + 2\Delta\ddot{\theta}_k\right) \tag{12.28b}$$

onde $\Delta\theta_k \equiv \theta_{k+1} - \theta_k$ e $\Delta\ddot{\theta}_k \equiv \ddot{\theta}_{k+1} - \ddot{\theta}_k$ enquanto Δt_k é definido após a Eq. (12.27).

6. Continuidade em primeiras derivadas A continuidade em primeiras derivadas entre dois polinômios ρ_{k-1} e ρ_k em t_k são formuladas como

$$a_{1,k-1} + 2a_{2,k-1}\Delta t_{k-1} + 3a_{3,k-1}\Delta t_{k-1}^2 = a_{1k} \tag{12.29a}$$

Substituindo os coeficientes das Eqs. (12.25) e (12.28b) na Eq. (12.29a), obtém-se uma equação linear relacionada como $\ddot{\rho}_{k+1}$, $\ddot{\rho}_k$ e $\ddot{\rho}_{k-1}$

$$\Delta t_k\ddot{\theta}_{k+1} + 2(\Delta t_{k-1} + \Delta t_k)\ddot{\theta}_k + \Delta t_{k-1}\ddot{\theta}_{k-1} = 6\left(\frac{\Delta\theta_k}{\Delta t_k} - \frac{\Delta\theta_{k-1}}{\Delta t_{k-1}}\right) \tag{12.29b}$$

7. Formulação de equações lineares em incógnitas $\ddot{\rho}$ A equação de k (12.29b) é agora combinada para k = 1, ..., N – 1, e escrita de forma compacta como

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = 6\mathbf{B}\mathbf{q} \tag{12h30}$$

onde (N – 2) × N matrizes, A e B, e os vetores N-dimensionais r e r̈ são dados por

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \Delta t_1 & 2(\Delta t_1 + \Delta t_2) & \Delta t_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t_2 & 2(\Delta t_2 + \Delta t_3) & \Delta t_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta t_{N-3} & 2(\Delta t_{N-3} + \Delta t_{N-2}) & \Delta t_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta t_{N-2} & 2(\Delta t_{N-2} + \Delta t_{N-1}) & \Delta t_{N-1} \end{bmatrix} \tag{12.30b}$$

$$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} \Delta t_1^{-1} & -\Delta'_{12} & \Delta t_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & \Delta t_2^{-1} & -\Delta'_{23} & \Delta t_3^{-1} & \cdots & & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta t_{N-3}^{-1} & -\Delta'_{N-3,N-2} & & \Delta t_{N-2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta t_{N-2}^{-1} & & -\Delta'_{N-2,N-1} & \Delta t_{N-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (12h30)$$

$$\mathbf{q} \equiv \begin{bmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_N \end{bmatrix}^T \; \text{e} \; \ddot{\mathbf{q}} \equiv \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 & \cdots & \ddot{\theta}_N \end{bmatrix}^T \quad (12h30)$$

onde $\Delta t_{ij} \equiv \Delta t_i + \Delta t_j$ e $\Delta'_{ij} \equiv \Delta t_i^{-1} + \Delta t_j^{-1}$.

8. Estratégia de Avaliação das Desconhecidas k's Observe que o número de equações é menor em dois em comparação ao número de incógnitas. Portanto, dois dos k's podem ser atribuídos arbitrariamente. Uma possibilidade é atribuir a primeira e a última acelerações, ou seja, $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_N$ como zeros. Tais splines são chamadas de splines naturais. Nesse caso, nenhum controle é possível sobre os valores das velocidades nas duas extremidades. Isso é óbvio pelos gráficos da Figura 12.17.

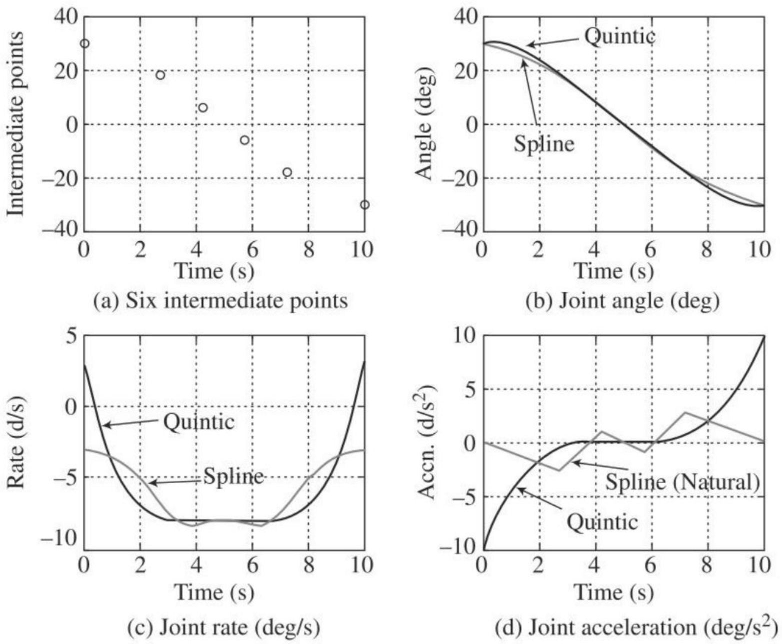


Figura 12.17 Trajectory passing through six specified intermediate points

Para ter controle total sobre as velocidades e acelerações nas duas extremidades, pode-se introduzir o conceito de pontos virtuais (Sicilinao et al., 2011) no primeiro e no último polinômios e introduzir a continuidade em todas as três posições, velocidades e acelerações. Dessa forma, o número de equações e o número de coeficientes polinomiais são iguais, tornando a Eq. (12.30a) um conjunto de equações algébricas determinadas que fornecem soluções únicas.

Exemplo 12.8 Trajetórias de Spline e Quínticas através de Seis Pontos

Com base na formulação da Seção 12.1.8, uma trajetória spline é gerada com seis pontos intermediários, ou seja, N = 6. Outras entradas são as seguintes:

Intervalos de tempo:

$$t_0 \equiv 0;\ t_1 = t_2 = 2{,}75;\ t_3 = 4{,}25;\ t_4 = 5{,}75;\ 7{,}25;\ t_5\ t_6 \equiv t_N = 10 \text{ seg} \qquad (12.31a)$$

Ângulos articulares:

$$\theta_0 (\equiv \theta_1) = 30°;\ \theta_k = [30 + 10(k-1)] \text{ graus, para } k = 2, \ldots, 5;\ \theta_N (\equiv \theta) = -30° \qquad (12.31b)$$

Para as condições finais de acelerações nulas, $\ddot{\theta}_0 (\equiv \ddot{\theta}_1) = \ddot{\theta}\ (\equiv \ddot{\theta}_N) = 0$**, o ou seja, matriz A reduzida 4 × 4 e matriz B 4 × 6 são dadas por**

$$\text{UM} \equiv \begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 6 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{17}{2} \end{bmatrix};\quad B \equiv \begin{bmatrix} \frac{24}{11} & -\frac{68}{11} & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{68}{11} & \frac{24}{11} \end{bmatrix} \qquad (12.32a)$$

As acelerações conjuntas correspondentes nos pontos intermediários são resolvidas usando um programa MATLAB como

$$\ddot{q} \equiv [-30/11\ 10/11\ 10/11\ -30/11]^T \qquad (12.32b)$$

Usando as acelerações conjuntas nos pontos de apoio, os coeficientes para os cinco polinômios cúbicos são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&a_{01} = 30,\ a_{11} = a_{21} - 137/44, && = 0, && = -20/121, \text{ para } 0 \le t \le 2{,}75; \\
&a_{02}\ a_{12}\ a_{22} = 18, && = -151/22, && = -15/11,\ a_{32} = 40/99, \text{ por } 2{,}75 < t \le 4{,}25; \\
&a_{03}\ a_{23} = 6,\ a_{13} && = -181/22, && = 5/11,\ a_{33} = -20/99, \text{ por } 4{,}25 < t \le 5{,}75; \qquad (12.33) \\
&a_{04}\ a_{14}\ a_{24} = 6, && = -181/22, && = -5/11,\ a_{34} = 40/99, \text{ por } 5{,}75 < t \le 7{,}25; \\
&a_{05}\ a_{15}\ a_{25} = 18, && = -151/22, && = 15/11,\ a_{35} = -20/121, \text{ por } 7{,}25 < t \le 10
\end{aligned}$$

Agora é simples gerar a curva spline mostrada na Fig. 12.17, que é comparada com um polinômio de quinta ordem (quintico), conforme explicado na Seção 1 Observe as variações menores em ângulos, taxas e acelerações, que são consideradas vantagens para trajetórias de spline com polinômios de ordem inferior em comparação com polinômios de ordem superior.

12.2 PLANEJAMENTO DO ESPAÇO CARTESIANO

> **Espaço articular vs. espaço cartesiano**
>
> **No espaço articular, ângulos articulares e** displacements are used to define a robot's configuration, whereas the **Coordenadas cartesianas são usadas para o mesmo propósito no espaço cartesiano.**

Quando uma trajetória entre duas configurações do robô é gerada por um esquema de variáveis conjuntas, como descrito na seção anterior, às vezes é difícil prever o movimento do efetor final no espaço cartesiano. Há também casos em que algumas variáveis finais específicas

A trajetória do efetor é necessária. Por exemplo, na soldagem a arco, o eletrodo deve seguir uma costura com precisão. Em outros casos, pode-se desejar gerar uma trajetória em termos da posição e orientação do efetor. Existem várias maneiras de descrever a posição e a orientação, ou seja, a configuração do efetor. Como o efetor é um corpo rígido no espaço cartesiano tridimensional, ele possui seis graus de liberdade; seis variáveis são necessárias para pr

Uma vez escolhido o caminho, os pontos de caminho fornecidos podem ser interpolados com uma sequência de, digamos, um polinômio quíntico, um polinômio cúbico ou polinômios lineares com misturas parabólicas (LSBP), como feito para as trajetórias conjuntas nas seções anteriores. A trajetória de um efetor final obtida dessa forma é muito simples e fácil de visualizar. Alternativamente, os movimentos do efetor final que satisfazem algumas características geométricas precisam ser expressos analiticamente. Isso pode ser feito introduzindo o conceito de primitivas d

Exemplo 12.9 Trajetória de um braço robótico de dois elos no espaço cartesiano

Vamos obter uma trajetória para o problema do Exemplo 12.5 não em termos de variáveis de junta, mas em termos de variáveis de posição do digamos, $\mathbf{r} \equiv [x, y]^T$ efetor final, . Como para o comprimento do elo $a_1 =$ $a_2 = 1$, a posição inicial $\mathbf{r}_0$ é $\left[\sqrt{3}/2, 3/2\right]^T$ e a posição final $\mathbf{r}_f$ é $[1, 0]^T$, a trajetória $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]^T$ é obtida de forma semelhante ao esquema de variáveis conjuntas, ou seja,

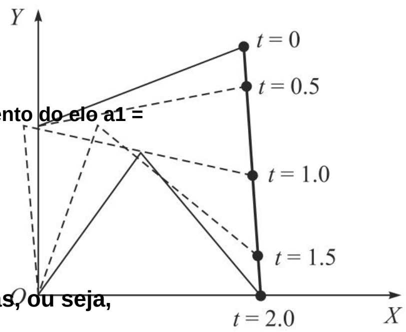


Fig. 12.18 Trajetória do ponto final

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{3}/2 + 4(2-\sqrt{3})t^3/3 - t^4, & 0 \le t \le 0{,}5 \\ (5\sqrt{3}/2 + 1)/12 + (2-\sqrt{3})(t - 0{,}5)/3, & 0{,}5 < t \le 1{,}5 \\ (10-\sqrt{3})/12 + (2-\sqrt{3})(t-1{,}5)/3 - 4(2-\sqrt{3})[(t-1{,}5)^3 - (t-1{,}5)^4]/3, & 1{,}5 < t \le 2 \end{cases} \quad (12.34a)$$

$$y(t) = \begin{cases} 3/2 - 4t^3 + 4t^4, & 0 \le t \le 0{,}5 \\ 5/4 - (t - 0{,}5), & 0{,}5 < t \le 1{,}5 \\ 1/4 - (t-1{,}5) + 4(t-1{,}5)^3 - 4(t-1{,}5)^4, & 1{,}5 < t \le 2{,}0 \end{cases} \quad (12.34b)$$

A Figura 12.18 mostra a trajetória final resultante.

Quanto à orientação do efetor final em questão, suponha que se utilizem ângulos de Euler ou ângulos de rotação-inclinação-guinada. Então, o efetor final se move em linha reta em relação a essas variáveis. No entanto, o movimento correspondente no referencial é difícil de compreender intuitivamente, pois é dado como uma combinação dessas três rotações em torno de três eixos diferentes, variando no tempo.

Exemplo 12.10 Trajetória para orientação do efetor final

Suponha que se queira encontrar uma trajetória que transfira a orientação do efetor final do repouso na orientação inicial mostrada na Fig. 12.19(a) para a orientação final de repouso da Fig. 12.19(b) no tempo tf = 1. Resolva o problema pelo método de rotação de eixo único. É facilmente observado na Fig. 12.19 que a matriz de rotação Q representando a orientação final em relação à inicial é

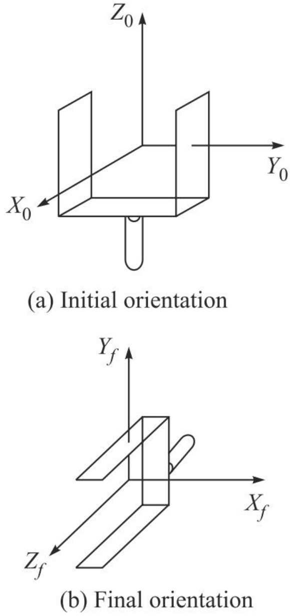


Figura 12.19 Initial and final orientations of the end-effector

$$P \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (12h35)$$

Comparando as equações (5.37) e (12.35), obtém-se o seguinte:

(i) Somando os elementos diagonais, obtém-se

$$(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) C\alpha + 3 C\alpha = 0$$

Como e é o vetor unitário $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$,

e 1 + 2Cα = 0, ou seja, Cα = –1/2. Portanto, α = 120°.

(ii) A subtração dos elementos fora da diagonal da matriz Q da seguinte maneira fornecerá os componentes do vetor unitário e (Angles, 2003), ou seja,

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_{32} - q_{23} \\ q_{13} - q_{31} \\ q_{21} - q_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_e \\ \Delta q_{por} \end{bmatrix} \qquad (12.36)$$

A expressão acima resulta imediatamente em e $\equiv$ q/ |q|, onde q $\equiv$ [Δq_x Δq_y Δq_z]^T e |q| = $\sqrt{3}$. Portanto, o vetor unitário que representa o eixo de rotação é dada por

$$e \equiv [1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}]^T \qquad (12.37)$$

Se usarmos um polinômio de quinta ordem para interpolação na forma da Eq. (12.6a), a trajetória desta orientação é dada por [e, α], para 0 $\le$ t $\le$ 1, onde

$$\alpha = 1200 t^3 - 1800 t^4 + 720 t^5 \qquad (12.38a)$$

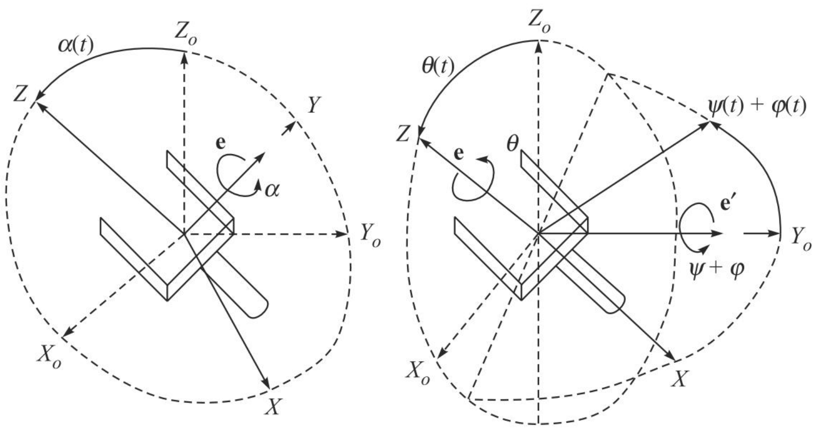
Um exemplo da matriz de rotação representando uma orientação intermediária em t = 0,5 desta trajetória é o seguinte:

$$P \equiv \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad (12.38b)$$

Esta orientação é mostrada na Fig. 12.20(a).

Em seguida, o problema é resolvido pelo método de rotação de eixo duplo, conforme explicado no Capítulo 5. Os ângulos de Euler para as orientações inicial e final são $[\phi, \theta, \psi]^T$ = $[0°, 0°, 0°]^T$ e $[\phi_f, \theta_f, \psi_f]^T$ = $[0°, 90°, 90°]^T$. Portanto, a trajetória é dada por $Q(e, \theta)Q(k, \psi + \phi)$, para $0 \le t \le 1$,

$$\theta = \psi = \phi = 900t^3 - 1350t^4 + 540t^5 \qquad (12.39a)$$



(a) Single-axis rotation (b) Double-axis rotation

Fig. 12.20 Métodos de orientação intermediária

A matriz de rotação Q para uma orientação intermediária no tempo t = 0,5 s para este caso é calculado a partir de $e \equiv [0, 1, 0]^T$ e $\theta = \psi = \phi = 45°$ em t = 0,5 s, ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad (12.39b)$$

Essa orientação é mostrada na Figura 12.20(b). Comparando com a Figura 12.20(a), observa-se que o vetor de aproximação é sempre perpendicular ao eixo Y_o, resultando em seu caminho mais curto. Por outro lado, se o movimento do efetor final tiver que seguir uma trajetória de movimento prescrita, isso deve ser geométrico e analiticamente. É então necessário consultar as primitivas de movimento que definem as características geométricas do caminho e as primitivas de tempo que definem a lei temporal no próprio caminho, conforme apresentado

12.3 PRIMITIVOS DE CAMINHO

Seja x o vetor de variáveis do espaço operacional que expressam orientação e posição do efetor final do manipulador robótico. Gerar uma trajetória no espaço operacional significa determinar uma função x(t) que leva o referencial do efetor final do local inicial ao local final em um tempo tf ao longo de uma trajetória dada com uma lei de movimento-tempo específica. Para definir primitivas de trajetória, a descrição paramétrica de traje introduzido. Suponha que p seja um vetor tridimensional e que f(s) seja uma função vetorial contínua, definida dentro do intervalo de si e sf, como p = f(s).

$$p = f(s) \tag{12.40}$$

A sequência de valores para p com s variável é chamada de caminho no espaço. A equação (12.40) define a representação paramétrica do caminho Γ e o escalar s é chamado de parâmetro. Enquanto s aumenta, o ponto p se move no caminho. Um caminho é fechado se p(sf) = p(si). Caso contrário, é aberto. Seja pi um ponto no caminho aberto Γ no qual uma direção também é fixa. A coordenada do caminho s é então interpretada como o ponto p, que nada mais é do que o comprimento do arco de Γ com pontos extremos p e pi , se p segue pi . Caso contrário, o oposto é verdadeiro se p precede pi. O ponto pi é a origem da coordenada do caminho, ou seja, s = 0. Da descrição acima, fica claro que para cada valor de s, existe um ponto de trajetória correspondente. Então, a coordenada s pode ser usada como parâmetro para definir a trajetória Γ em

consideração, ou seja, p = f(s) (12.41a)

Os valores de s são na verdade a sequência de coordenadas do caminho. Referindo-se a Fig. 12.21 e Eq. (12.41a), seja p um ponto correspondente a um dado valor de s. Exceto em casos especiais, o vetor p define três vetores unitários que caracterizam o caminho, a saber, vetores tangente, normal e bi-normal, enquanto suas direções dependem da direção do caminho. O vetor unitário tangente denotado por et é orientado ao longo da direção ditada por s. O segundo vetor unitário é o vetor unitário normal, que é denotado por en. Este vetor é orientado ao longo da reta que intersecta p em ângulo reto com et e está situado no que é chamado de plano osculante, como mostrado na Fig. 12.21. A direção de en é tal que o caminho Γ ( ), na vizinhança de p em relação ao plano que contém et e normal a en, está do mesmo lado de en. O terceiro vetor unitário é o vetor unitário binormal denotado por eb, que é definido como o produto vetorial de outros dois vetores unitários, ou seja, eb = et × en. A tríade (et , en, eb) forma um sistema de coordenadas destro, mostrado na Fig. 12.21. Observe que tal definição de tríade é útil para tarefas de soldagem, etc. Pode-se demonstrar que os três vetores unitários acima estão relacionados à representação Γ da trajetória, que é uma função da coordenada da trajetória s. Eles são dados por (Siciliano et al., 2011).

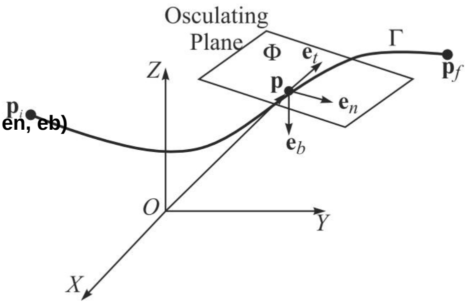


Figura 12.21 Parametric representation of um caminho

$$e_t = \frac{dp}{ds};\quad e_n = \frac{1}{\left\|\frac{d^2p}{ds^2}\right\|}\frac{d^2p}{ds^2} \text{ e } e_b = e_t \times e_n \tag{12.41b}$$

Alguns exemplos abaixo demonstrarão melhor o conceito.

Exemplo 12.11 Linha no Espaço

Considere a linha no espaço que une os pontos pi e pf . A representação paramétrica deste caminho é

Machine Translated by Google

$$p(s) = p_i + \frac{s}{\delta_p} d_p \text{ onde } d_p \equiv p_f - p_i \qquad (12.42a)$$

$\delta_p \equiv \| d_p \|$ é a magnitude de dp. Além disso, p(0) = pi e p(δp) = pf . A equação (12.41a) é a representação paramétrica do caminho de pi a pf . Diferenciando (12.42a) em relação a s, obtém-se a derivada do caminho como

$$\frac{dp}{ds} = \frac{d_p}{\delta_p}; \text{ e } \frac{d^2 p}{ds^2} = 0 \qquad (12.42b)$$

A inclinação do caminho é então dada por dp/ds, que define o vetor tangente et . Entretanto, como a derivada dupla é zero, o vetor normal en se anula. Portanto, não existe um referencial único (et , en, eb) .

Exemplo 12.12 Círculo no Espaço

Considere um círculo no espaço. Seus parâmetros significativos, referentes à Figura 12.22, são os seguintes:

- o vetor unitário que representa o eixo do círculo, denotado por e,
- o vetor posição de um ponto ao longo do eixo, denotado por d, e o vetor posição
- de um ponto no círculo, denotado por vetor p.

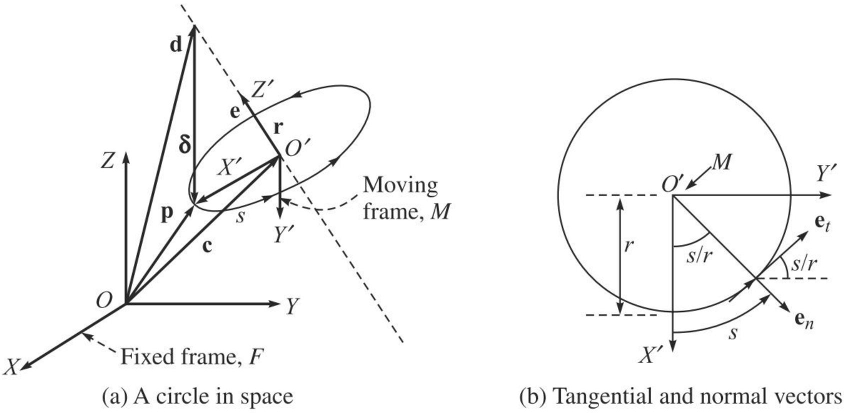


Figura 12.22 Parametric representation of a circle in space

Com os parâmetros acima definidos, pode-se expressar o vetor posição do centro do círculo, ou seja, o vetor c, como

$$c = d + (d^T e)e \qquad (12.43)$$

onde dp ÿ d, e a condição dT e < d deve ser satisfeita.

Com base na Eq. (12.43), é possível expressar uma representação paramétrica do círculo. Para uma escolha adequada do referencial, digamos, O ÿ XYZ de Fig. 12.22, onde O coincide com o centro do círculo, o eixo X está orientado ao longo da direção do vetor p ÿ c, o eixo Z está orientado ao longo de e, e o eixo Y é escolhido de modo a completar um referencial destro. Neste referencial, denotado por M, a representação paramétrica do círculo é dada por

$$[p(s)]_M \equiv [r\cos(\bar{s})\ r\sin(\bar{s})\ 0]^T, \text{ onde } \bar{s} \equiv s/r \qquad (12.44)$$

e r é o raio do círculo dado por r = p – c . ‖ ‖ A representação do caminho de qualquer ponto do círculo no quadro fixo F é então obtida como

$$[\,(\,)\,]\,p\;FF\;M\;\;c\;Qp\;[\,(\,)\,]\,[\,]\;s \qquad (12h45)$$

onde [c]F é expresso no quadro F, ou seja, OÿXYZ, e Q é a matriz de rotação que relaciona os quadros F e M, que pode ser escrita a partir do conhecimento do Capítulo 5 como

$$Q\,[x'\,y'\,z'] \qquad (12.45b)$$

em que x , y , z indica os vetores unitários do quadro M expressos no quadro F. Diferenciando a Eq. (12.45a) em relação a s, obtém-se o seguinte:

$$\frac{dp}{ds} = -\,p\sin(\bar{s})x' + \cos(\bar{s})y' \qquad \frac{d^2}{ds^2} = -\frac{1}{r}\left[\cos(\bar{s})x' + \sin(\bar{s})y'\right] \qquad (12{,}46)$$

12.4 TRAJETÓRIAS CARTESIANAS

Com base no conceito de primitivas de caminho, agora é possível especificar uma trajetória de posição ou orientação com base em suas representações paramétricas. Elas são apresentadas a seguir.

12.4.1 Posição

Seja p = f(s) o vetor tridimensional que representa um caminho cartesiano em forma paramétrica, ou seja, em função da coordenada s do caminho. Assume-se que a origem do referencial do efetor final se move de pi para pf em um tempo tf . Os valores de s são então s = 0 em t = 0 e s = sf (comprimento do caminho) em t = tf . Para encontrar uma função analítica em s(t), qualquer uma das técnicas de geração de trajetória explicadas na Seção 12.1 para movimentos articulares, por exemplo, polinômios cúbicos, quíntuplos, etc., pode ser usada. Observe que a velocidade do ponto p é dada por

$$\dot{p} = \dot{s}\frac{dp}{ds} = \dot{s}e_t \qquad (12.47)$$

onde et é o vetor tangente à trajetória no ponto p na Eq. (12.41b). Então, sÿ é a magnitude do vetor pÿ e et é a direção.

Exemplo 12.13 Velocidade e aceleração da trajetória da reta

Considere o caminho do Exemplo 12.11 conectando os pontos entre pi e pf . A representação paramétrica desse caminho é dada pela Eq. (12.41a). A velocidade e a aceleração de p podem então ser facilmente calculadas usando a regra da diferenciação como

$$\dot{p} = \frac{\dot{s}}{\delta_p}d = \dot{s}e_t \qquad \ddot{p} = \frac{\ddot{s}}{\delta_p}d = \ddot{s}e_t \qquad (12{,}48)$$

onde o vetor dp é definido após a Eq. (12.42a).

Exemplo 12.14 Velocidade e aceleração da trajetória circular

Aqui, considere o círculo do Exemplo 12.12. A partir da representação paramétrica derivada acima e em vista da Eq. (12.46), a velocidade e a aceleração do ponto p no círculo são

$$\dot{} = \dot{} [-\sin(\,) \; \overline{\cos}(\,) \,]\,p \; xy \; ss \; s \;'$$ (12.49a)

e $\ddot{p} = s_2$ [sin ( ) cos ( )] / [cos ( ) sin ( )](s x' + s' xy) Observe que, de acordo com a Fig. 12.22(b), o vetor de velocidade

acima pÿ está alinhado com enquanto o vetor de aceleração é uma combinação de duas contribuições, a saber, et , a primeira está alinhada com et e representa a aceleração tangencial, enquanto a segunda está alinhada com en e representa a aceleração centrípeta.

12.4.2 Orientação

Para a orientação de um efetor final, normalmente, ela é especificada usando uma matriz de rotação variável no tempo do quadro anexado ao efetor final. É bem conhecido que as três colunas da matriz de rotação nada mais são do que aqueles vetores unitários associados ao quadro do efetor final, a saber, et , en e eb. Para gerar uma trajetória de rotação, no entanto, não é conveniente referir-se à matriz de rotação em termos das representações inicial e final dos vetores unitários et , en e eb , pois a condição de ortonormalidade pode não ser garantida durante os passos de tempo intermediários. Em vista da dificuldade acima, pode-se preferir usar o tripleto de ângulo f [, , por exemplo, os ângulos de Euler ZYZ como uma função da lei do tempo. Normalmente, f se move de seu valor inicial fi para seu valor final ff . $\equiv \phi\ \theta,\ \psi]^T$

Um polinômio cúbico ou um segmento linear com misturas parabólicas (LSBP) pode ser usado. Consequentemente, os perfis de velocidade e aceleração podem ser expressos para cada valor escalar dos ângulos em f como

$$ff = f_i + \frac{s}{\delta}\phi; \quad \dot{f} = \frac{\dot{s}}{\delta}\phi \quad e \quad \ddot{f} = \frac{\ddot{s}}{\delta}\phi$$ (12,50)

onde d ff fi e Os três vetores unitários et , en e eb associados ao quadro do efetor final são então calculados com referência à expressão de rotação usando ângulos de Euler, conforme fornecido na Eq. (5.31e). $\phi \equiv$ δ é a diferença no ângulo i ϕ, θ ou ψ.

Uma maneira alternativa de gerar uma trajetória para orientação pode ser a partir da expressão usando o eixo único de rotação apresentada no Capítulo 5. Dados dois quadros de coordenadas no espaço cartesiano com a mesma origem e orientações diferentes, é sempre possível determinar um vetor unitário e, de modo que o segundo quadro seja obtido a partir do primeiro quadro por uma rotação fixa em torno do eixo de rotação par α

Sejam Qi e Qf respectivamente as matrizes de rotação do quadro inicial Oi -Xi Yi Zi e o quadro final Of -Xf Yf Zf , ambos em relação ao quadro base. A matriz de rotação entre os dois quadros é então calculada lembrando que Qf = Qi Qif. Portanto, a matriz Qif é obtida como

$$Q_{if} = Q_i^T Q_f = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$ (12,51)

Se a matriz Q representa a rotação de Qi para Qf então Q(0) = Qi e Q(tf) = Qf . Portanto, a matriz Qif é a rotação em torno de um eixo fixo no espaço que é paralelo ao vetor unitário e por um ângulo de rotação α . Eles podem ser calculados usando o Exemplo 12.10 como

$$\alpha = \text{porque}^{-1}\left(\frac{q_{11} + q_{22} + q_{33} - 1}{2}\right), \text{ e } e \equiv \frac{1}{2\sin\alpha}\begin{bmatrix} q_{32} - q_{23} \\ q_{13} - q_{31} \\ q_{21} - q_{12} \end{bmatrix}$$ (12.52)

"Machine Translated by Google"

para sen $\alpha \neq 0$. A matriz Qif é a função do ângulo . α É suficiente atribuir uma lei de tempo ao ângulo , similar a uma única geração de movimento articular explicada nas Seções 12.1 com α(0) = e α(tf) = Os valores de α(t) são então usados para calcular os componentes do vetor unitário e, a saber, ex, ey, ez. Qualquer matriz de rotação intermediária pode ser dada por Q(t) = Qi Qif(α), que descreve a orientação do efetor final com relação ao quadro fixo como uma função do tempo. Uma vez que um caminho e uma trajetória foram especificados no espaço cartesiano em termos de p e f ou Q, a cinemática inversa pode ser realizada para avaliar as trajetórias articulares correspondentes em termos dos ângulos articulares q(t).

12.5 PLANEJAMENTO DE CAMINHO PONTO A PONTO VS. CONTÍNUO

Independentemente do tipo de planejamento de movimento no espaço articular ou no espaço cartesiano, encontramos dois tipos de trajetórias: ponto a ponto e contínua. A primeira é normalmente aplicável a operações de coleta e posicionamento, enquanto a segunda é mais aplicável a aplicações como soldagem, etc.

No movimento ponto a ponto (PTP) de um robô, ele precisa se mover de uma configuração de junta inicial para uma final em um determinado tempo tf . Aqui, a trajetória real do efetor final não é importante. O algoritmo de planejamento de movimento deve gerar uma trajetória que seja capaz de otimizar alguns critérios de desempenho quando cada articulação é movida de uma posição para outra. Os tipos de trajetórias apresentados nas Seções 12.1 podem ser usados para gerar um movimento PTP.

Aplicação do movimento PTP

Onde são necessárias operações de pick-and-place, por exemplo, pegar uma peça de trabalho de a conveyor belt and place on a machine mesa para processamento.

Em diversas aplicações, como a soldagem de dois tubos, por outro lado, a trajetória precisa ser descrita em termos de um número de pontos, tipicamente maior que dois. Um conjunto de posições intermediárias é definido para a elevação e a descida de uma peça de trabalho, de modo que velocidades reduzidas sejam obtidas em relação à transferência direta do objeto. Para aplicações mais complexas, é desejável especificar uma série de pontos para garantir um melhor monitoramento das trajetórias executadas. Os pontos precisam ser especificados com mais densidade nas seções da trajetória onde obstáculos devem ser evitados ou onde uma curvatura acentuada da trajetória é esperada. O problema é gerar uma trajetória com N pontos no espaço articular ou cartesiano.

Aplicação do movimento CP

Onde é necessário movimento contínuo do efetor final ao longo de um caminho, por exemplo, soldando dois tubos.

RESUMO

Neste capítulo, são apresentadas diversas técnicas de planejamento de movimento. São discutidas as trajetórias conjuntas e cartesianas a serem seguidas pelos atuadores conjuntos e pelo efetor final, respectivamente. As primitivas de trajetória também são explicadas quando o robô precisa manter certas relações com a trajetória que deve seguir. Estratégias para movimento ponto a ponto e contínuo também são mencionadas.

Machine Translated by Google

EXERCÍCIOS

12.1 Deseja-se que a primeira junta de um robô de seis eixos se mova da posição inicial para θ_0 = 15°, uma posição final, θ_f = 75°, em 3 segundos usando um polinômio cúbico. (a) Determine a trajetória.

(b) Calcule o ângulo da junta em 2 segundos.

(c) Comente sobre suas velocidades e acelerações finais.

(c) Compare o resultado presente com os obtidos no Exemplo 12.1.

12.2 Repita o problema do Exercício 12.1, mas desta vez a aceleração inicial e a desaceleração final são especificadas como 5°/s2 .

12.3 Um robô planar com dois graus de liberdade deve seguir uma linha reta entre os pontos inicial (3,10) cm e final (8,15) cm do segmento de movimento. Encontre a variável conjunta para o robô se a trajetória for dividida em 5 segmentos. Suponha que cada elo tenha 10 cm de comprimento.

12.4 Encontre os coeficientes de dois polinômios cúbicos que estão conectados em uma spline de dois segmentos com aceleração contínua nos pontos intermediários.

12.5 Uma única trajetória cúbica é dada por

$$\theta(t) = 10 + 90t^2 - 60t^3 \qquad (12,53)$$

que é usado entre t = 0 e 1 s. Quais são as posições inicial e final, velocidades e acelerações?

12.6 Encontre os coeficientes de um polinômio cúbico

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \qquad (12,54)$$

quando $\theta(0)$, $\dot\theta(0)$, θ(0) e (tf) θ são especificados.

12.7 Uma junta rotativa move-se de –15° a +45° em 4 segundos. Determine uma trajetória polinomial suave se as velocidades e acelerações inicial e final forem zero. Qual é a ordem do polinômio?

12.8 Para um manipulador de 3 graus de liberdade, projete uma trajetória linear com misturas parabólicas. As orientações inicial e final do efetor final, denotadas por Qi e Qf , respectivamente, são especificadas usando as seguintes matrizes:

$$Q_i \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q_f \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12,55)$$

12.9 O perfil de velocidade de uma trajetória é trapezoidal, com segmento de aceleração constante por 0,5 s e velocidade constante de 10°/s. Determine os parâmetros da trajetória suave para interpolar a sequência temporal da posição com esse tipo de trajetória.

12.10 Qual é o efeito negativo do polinômio de grau superior para conectar N pontos?

12.11 Mencione os benefícios das funções spline.

EXERCÍCIOS BASEADOS EM MATLAB

12.12 Trace posições, velocidades e acelerações para a trajetória dada no Exercício 12.5. Use 100 passos entre t = 0 e 1 s.

12.13 Para o Exercício 12.6, encontre os valores numéricos dos coeficientes formulando o problema como equações algébricas lineares na forma de Ax = b, onde x $\equiv$ [a0 a1 a2 a3]^T. Tome θ(0) = 0, $\dot\theta$(0) = 0, θ(tf) = 30° e tf = 5 seg. Gráfico θ(t), $\dot\theta$(t) e $\ddot\theta$(t).

12.14 Determine os coeficientes de um polinômio quíntico formulando o problema como um equações algébricas lineares na forma de Ax = b, onde x $\equiv$ [a0 a1 a2 a3 a4 a5]^T, e θ(0) = 0, θ(tf) = 30o, $\dot\theta$(0) = $\ddot\theta$(0) = $\dot\theta$(tf) = $\ddot\theta$(tf) = 0, tf = 5 seg. Gráfico θ(t), $\dot\theta$(t) e $\ddot\theta$(t).

12.15 Trace os gráficos de posição, velocidade e aceleração do Exercício 12.7.

12.16 Escreva um programa para calcular vetores unitários tangentes, normais e bi-normais de um ponto em uma elipse.