Differential Geometry HW1

段奎元
SID: 201821130049
dkuei@outlook.com

September 18, 2018

1. S^n的N极和S极球极投影是相同的光滑结构。

   SOLUTION: 将S^n作为$\mathbb{R}^{n+1}$的子拓扑, 并用球坐标$(\rho, \theta_1, \cdots, \theta_n) = (\rho, \vec{\theta})$表示. 有球极投影$\varphi_1 : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_1 : \vec{\theta} \mapsto \frac{2}{\tan\frac{\theta_1}{2}}(\cos\theta_2, \cos\theta_3 \sin\theta_2, \ldots, \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_2)$$
$$\varphi_2 : \vec{\theta} \mapsto 2\tan\frac{\theta_1}{2}(\cos\theta_2, \cos\theta_3 \sin\theta_2, \ldots, \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_2)$$

   这样, 在$S^n \setminus \{N, S\}$上的坐标变换函数为,

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$2\tan\frac{\theta_1}{2}(\cos\theta_2, \cos\theta_3 \sin\theta_2, \ldots, \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_2) \mapsto \frac{2}{\tan\frac{\theta_1}{2}}(\cos\theta_2, \cos\theta_3 \sin\theta_2, \ldots, \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_2)$$

   将上式转化为$\mathbb{R}^n$的直角坐标,

$$\vec{x} \mapsto 4\frac{\vec{x}}{\vec{x}^2}$$

   在$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$中, 函数$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\vec{x}) = \frac{4\vec{x}}{\vec{x}^2}$是光滑函数. 因此, $\{(S^n \setminus \{N\}, \varphi_1), (S^n \setminus \{S\}, \varphi_2)\}$是$S^n$的一个光滑结构.

2. 映射$\varphi : \mathbb{R} \to T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$,

$$t \mapsto [(t, rt)], \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \sim y \text{ iff } x - y \in \mathbb{Z}^2$$

   是单的浸入但不是嵌入，若r是无理数。

   SOLUTION:

   (a) φ是单射。$\forall s, t \in \mathbb{R}$, 若$\varphi(s) = \varphi(t)$, 则$\varphi(s) - \varphi(t) \in \mathbb{Z}^2$, 即

$$(s - t, r(s - t)) \in \mathbb{Z}^2.$$

   因r是无理数, 上式成立当且仅当$s = t$, φ是单射.
   若$r \in \mathbb{Q}$, 由上式可知φ是周期函数.

   (b) $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{d}\varphi_t$是单射。$\forall t \in \mathbb{R}$, $T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, 取$X, Y \in T_t\mathbb{R}$且$X \neq Y$, 则存在$k \in \mathbb{R}, k \neq 1$使得$Y = kX$. 记$T^2$的投影映射$f : T^2 \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}$,

$$[(x, y)] \mapsto \bar{x} - \frac{1}{2},$$

其中$\bar{x}$表示x的小数部分. 限制曲线参数在$(-\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$计算

$$\mathrm{d}\varphi_t X(f)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0}t=1,$$

$\mathrm{d}\varphi_t Y(f)=k\mathrm{d}\varphi_t X(f)=k\neq 1$, 所以$\mathrm{d}\varphi_t X\neq \mathrm{d}\varphi_t Y$. $\mathrm{d}\varphi_t$是单射.

(c) $\mathbb{R}\ncong\varphi(\mathbb{R})\subset T^2$，因此不是嵌入。$\forall[(x,y)]\in T^2$, $\exists n\in\mathbb{Z},[(x+n,r(x+n))]\in\varphi(\mathbb{R})$. 因为$r\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$在$\mathbb{R}$中稠密, $\forall\varepsilon>0$存在n使得$d(0,[(n,r(x+n)-y)])<\varepsilon$. 因此$\varphi(\mathbb{R})$在$T^2$中稠密.
如前所述, 若$[(x,y)]\in\varphi(\mathbb{R})$, 对每个$\varepsilon>0$存在$n$可取一列$x+n_i\subset\mathbb{R}$, $x+n_i$在$\mathbb{R}$不一定收敛, 而在$\varphi(R)$中收敛到$[(x,y)]$. 因而$\mathbb{R}\ncong\varphi(\mathbb{R})\subset T^2$, φ不是嵌入.