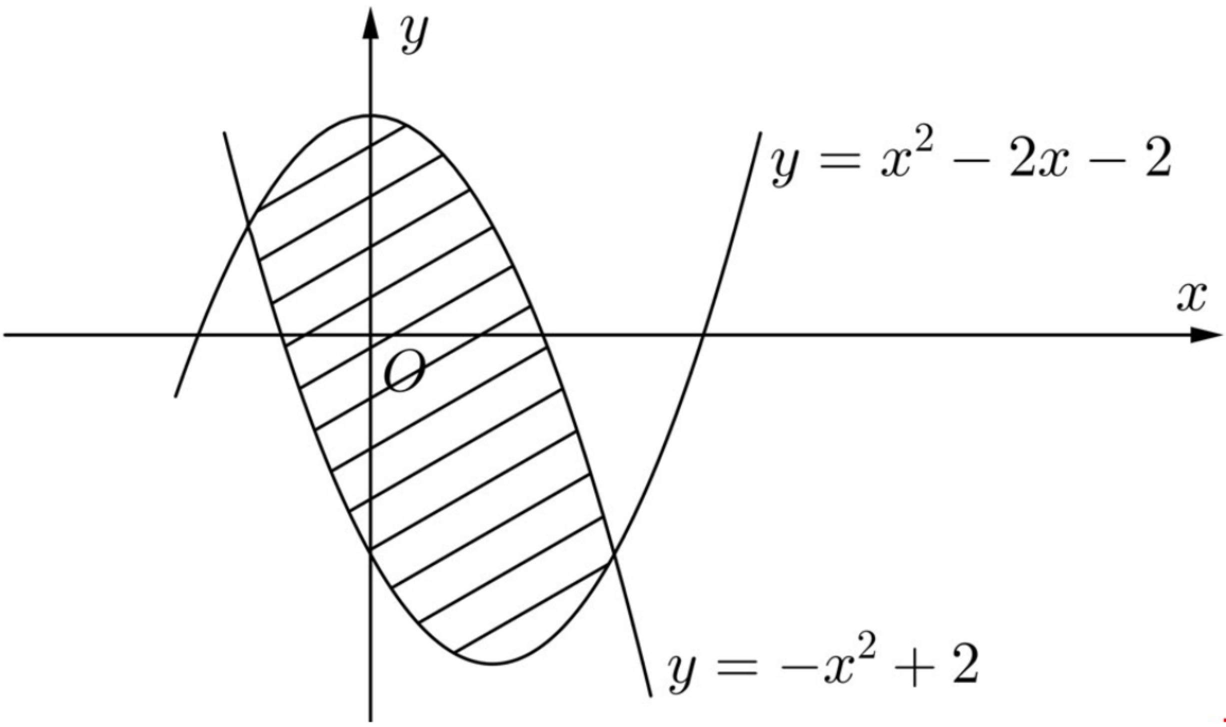
PHAN NHẬT LINH

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG

TÀI LIỆU MỚI NĂM 2024

File word cho giáo viên liên hệ Zalo: 0817.098.716



NẮM TRỌN CÁC CHUYÊN ĐỀ NĂM 2024 - PHAN NHẬT LINH

CHƯƠNG 5

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ 11 NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CƠ BẢN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x)=F(x)+C$.

Chú ý: Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2. Tính chất

Nếu f,g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ (với $k\neq 0$) $\Rightarrow\int[k.f(x)+l.g(x)]\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x+l\int g(x)\mathrm{d}x$

$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)+C$

3. Công thức đổi biến số: $\boxed{\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=F[u(x)]+C}$

4. Công thức nguyên hàm từng phần: $\boxed{\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u}$

5. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u=u(x)$	Thường gặp
$\int \mathrm{d}x=x+C$	$\int \mathrm{d}u=u+C$	Vi phân $\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)=\mathrm{d}x$
$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	$\int(ax+b)^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C$
$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\lvert x\rvert+C\ (x\neq 0)$	$\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln\lvert u\rvert+C\ (u(x)\neq 0)$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C\ (a\neq 0)$
$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$	$\int\cos u\mathrm{d}u=\sin u+C$	$\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$	$\int\sin u\mathrm{d}u=-\cos u+C$	$\int\sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\tan u+C$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$	$\int e^u \mathrm{d}u = e^u + C$	$\int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q}\mathrm{d}x = \frac{1}{p.\ln a}a^{px+q} + C \ (0 < a \neq 1)$

6. Một số nguyên tắc tính nguyên hàm cơ bản

Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.

Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.

Bậc chẵn của sin hoặc $cos \xrightarrow{PP}$ hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2a$; $cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2a$

Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

- **Phương pháp đổi biến số**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C$

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích hàm số đã cho $f(x) = g[u(x)].u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó, ta thấy $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$.

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

- **Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ** $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

Nếu bậc của tử số $P(x) \leq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp chia để đưa về công thức nguyên hàm số.

Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

- **Nguyên hàm từng phần**

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó ta có được $\int udv = uv - \int vdu \quad (*)$

Để tính nguyên hàm $\int udv = uv - \int vdu$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x)dx = udv$ (Chú ý: $dv = v'(x)dx$ và), tính $v = \int dv$ và $du = u'dx$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$.

Mẹo nhớ: “**Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**”

Dạng 1: Nguyên hàm của hàm số cơ bản

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x^3 + 3x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng:

A. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + Cx$. **B.** $f(x) = 6x^2 + 6x + C$.

C. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3$. **D.** $f(x) = 6x^2 + 6x$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int a^x\mathrm{d}x = a^x \ln a + C\ (0 < a \neq 1)$. **B.** $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

C. $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall \alpha \neq -1$. **D.** $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f(3) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(0) + 2f(4)$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $7 + 3\ln 2$. **D.** $-5 + 7\ln 2$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 4: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{2x}$ và $F\left(0\right)=0$. Giá trị của $F\left(\ln 3\right)$ bằng

A. 2 **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=12x^2+2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(1\right)=3$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2$, khi đó $F\left(1\right)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 7.

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F'(x)=\frac{-1}{\ln x}$ **B.** $F'(x)=\frac{-1}{\ln x}+C$.

C. $F'(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. **D.** $F'(x)=-\frac{1}{\ln^2 x}$

Câu 2: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu:

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K$. **B.** $F'(x)=f(x),\forall x\in K$.

C. $f'(x)=F(x),\forall x\in K$. **D.** $f'(x)=-F(x),\forall x\in K$.

Câu 3: Cho $\int \frac{1}{x^2}dx = F(x)+C.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x)=-\frac{1}{x}.$ **B.** $F(x)=\frac{1}{x}.$ **C.** $F(x)=\ln x.$ **D.** $F(x)=\ln x^2.$

Câu 4: Cho hàm số $y=x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $F(2)-F(0)=16\cdot$ **B.** $F(2)-F(0)=1\cdot$ **C.** $F(2)-F(0)=8\cdot$ **D.** $F(2)-F(0)=4\cdot$

Câu 5: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$?

A. $F(x)=3x^2$. **B.** $F(x)=3x^4$. **C.** $F(x)=4x^4$. **D.** $F(x)=\frac{1}{4}x^4$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $\int f(x)dx = 2x^2+x+1+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$,C là hằng số. Tính $f(2023)$.

A. 4047. **B.** 4046. **C.** 8093. **D.** 8092.

Câu 7: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng

A. 5. **B.** 625. **C.** 25. **D.** 125.

Câu 8: Tìm nguyên hàm $F(t)=\int txdt$.

A. $F(t)=x+t+C$. **B.** $F(t)=\frac{x^2t}{2}+C$.

C. $F(t)=\frac{xt^2}{2}+C$. **D.** $F(t)=\frac{(tx)^2}{2}+C$.

Câu 9: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F(5)=2$ và $F(0)=1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $F(-1)=2-\ln 2$. **B.** $F(2)=2-2\ln 2$. **C.** $F(3)=1+\ln 2$. **D.** $F(-3)=2$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=2\cos\left[2(x+\pi)\right]-3x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2\sin\left[2(x+\pi)\right]-x^3+C$. **B.** $\int f(x)dx=\sin 2x - x^3+C$.

C. $\int f(x)dx=-\sin\left[2(x+\pi)\right]-x^3+C$. **D.** $\int f(x)dx=-4\sin\left[2(x+\pi)\right]-6x+C$.

Câu 11: Tính $\int \sin^2 2x\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{\sin 4x}{8}+C$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 4x}{8}+C$. **C.** $-\dfrac{\cos^3 2x}{3}+C$. **D.** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 4x}{8}+C$.

Câu 12: Một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{3x+1}-2x^2$ là

A. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}-2x^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-x^3$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-2x^3$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}-x^3}{3}$.

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3\cos x+\dfrac{1}{x^2}$ trên $\left(0;+\infty\right)$ là

A. $-3\sin x+\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $3\cos x+\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $3\cos x+\ln x+C$. **D.** $3\sin x-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 14: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2$ là

A. $H(x)=6x$. **B.** $G(x)=x^3+1$. **C.** $F(x)=x^3+x$. **D.** $K(x)=3x^3$.

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2x^3-3x^2-1$ là

A. $2x^4-3x^3-x+C$. **B.** $2x^2-3x+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}x^4-x^3-x+C$. **D.** $6x^2-6x+C$.

Câu 16: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ trên $\left(0;+\infty\right)$ và $F\left(1\right)=1$. Tính $F\left(3\right)$?

A. $F\left(3\right)=\ln 3$. **B.** $F\left(3\right)=\ln 3+C$. **C.** $F\left(3\right)=\ln 3+1$. **D.** $F\left(3\right)=\ln 3+3$.

Câu 17: Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^{-\frac{4}{5}}$ là

A. $-\dfrac{5}{9}x^{-\frac{9}{5}}+C$. **B.** $\dfrac{1}{5}x^{\frac{1}{5}}+C$. **C.** $5x^{\frac{1}{5}}+C$. **D.** $-\dfrac{9}{5}x^{-\frac{9}{5}}+C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=4^x+\cos 2x$ là

A. $\dfrac{4^x}{\ln 4}-\dfrac{\sin 2x}{2}+C$. **B.** $4^x\ln 4+\dfrac{\sin 2x}{2}+C$.

C. $4^x\ln 4-\dfrac{\sin 2x}{2}+C$. **D.** $\dfrac{4^x}{\ln 4}+\dfrac{\sin 2x}{2}+C$.

Câu 19: Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ là

A. $\int f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx=3x^{\frac{1}{3}}+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **D.** $\int f\left(x\right)dx=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$.

Câu 20: Cho hàm số $y=F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Tính $F'\left(25\right)$.

A. 5. **B.** 25. **C.** 625. **D.** 125.

Câu 21: Cho $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=F\left(-\pi\right)+2F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $S=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $S=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\pi}{8}$. **C.** $S=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3\pi}{8}$. **D.** $S=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3\pi}{8}$.

Câu 22: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=1-2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ là

A. $1-x^2+\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C.$ **B.** $x-x^2-\sqrt{x}+C$. **C.** $x-x^2-\sqrt{x}+C$. **D.** $1-x^2+\sqrt{x}+C$.

Câu 23: Tìm nguyên hàm L của hàm số $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2$.

A. $L=2\left(x+1\right)+C$, C là hằng số. **B.** $L=2x+C$, C là hằng số.

C. $L=\dfrac{\left(x+1\right)^3}{3}+C$, C là hằng số. **D.** $L=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+C$, C là hằng số.

Câu 24: Họ các nguyên hàm $\int\sin\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$ là

A. $-\dfrac{\cos\left(2x+1\right)}{2}+C$. **B.** $\dfrac{\cos\left(2x+1\right)}{2}+C$. **C.** $\dfrac{\sin\left(2x+1\right)}{2}+C$. **D.** $-\cos x+C$.

Câu 25: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=5x^4+4x^3+\mathrm{e}^x$ là

A. $x^5+x^4+\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$. **B.** $20x^3+12x^2+\mathrm{e}^x+C$.

C. $x^5+x^4+\mathrm{e}^x+C$. **D.** $x^5+x^4+\mathrm{e}^{x+1}+C$.

Câu 26: Nguyên hàm $I=\int\dfrac{1}{2x+3}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+3\right|+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+3\right|+C$. **C.** $-\ln\left|2x+3\right|+C$. **D.** $\ln\left|2x+3\right|+C$.

Câu 27: Kết quả $\int\left(x+e^{2020x}\right)dx$ bằng

A. $x^2+\dfrac{e^{2020x}}{2020}+C$. **B.** $x^3+\dfrac{e^{2020x}}{2020}+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{e^{2020x}}{2020}+C$. **D.** $x+\dfrac{e^{2020x}}{2020}+C$.

Câu 28: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(2x+1\right)^3$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$. Hãy tính $P=F\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

A. $P=32$. **B.** $P=34$. **C.** $P=18$. **D.** $P=30$.

Câu 29: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{-x}\left(2+\dfrac{e^x}{\cos^2x}\right)$.

A. $F\left(x\right)=-\dfrac{2}{e^x}+\tan x+C$. **B.** $F\left(x\right)=2e^x-\tan x+C$.

C. $F\left(x\right)=-\dfrac{2}{e^x}-\tan x+C$. **D.** $F\left(x\right)=2e^{-x}+\tan x+C$.

Câu 30: $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{dx}{5x+9}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{5}\ln\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{3}{2}$. **D.** $10\ln\dfrac{3}{2}$.

Câu 31: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=6x+\sin 3x$ và $F(0)=\dfrac{2}{3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x)=3x^2+\dfrac{\cos 3x}{3}+1$. **B.** $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+\dfrac{2}{3}$.

C. $F(x)=3x^2+\dfrac{\cos 3x}{3}-1$. **D.** $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+1$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=2x^4+3x^3+2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x)dx=8x^3+9x^2+2+C$. **B.** $\int f(x)dx=2x^4+8x^3+9x^2+2+C$.

C. $\int f(x)dx=2x^5+3x^4+2x^2+C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{2x^5}{5}+\dfrac{3x^4}{4}+x^2+C$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=\cos x-2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\sin x-x^2+C$. **B.** $\int f(x)dx=-\sin x-x^2$.

C. $\int f(x)dx=\sin x-x^2$. **D.** $\int f(x)dx=-\sin x-x^2+C$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

Câu 35: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x-1)^4$ là

A. $\int f(x)dx=\dfrac{(3x-1)^5}{15}+C$. **B.** $\int f(x)dx=12(3x-1)^3+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{(3x-1)^4}{5}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{(3x-1)^5}{12}+C$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\tan x+\cot x+x+C$. **B.** $\int f(x)dx=\tan x-\cot x-x+C$.

C. $\int f(x)dx=\tan x+\cot x-x+C$. **D.** $\int f(x)dx=-\tan x+\cot x-x+C$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=x^3-11$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=3x+C$. **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{x^4}{4}-11x+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{x^4}{4}+11x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x^4-11x+C$

Câu 38: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$

A. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}-\ln|x|+C$.

B. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.

C. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}-\ln x+C$.

D. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Câu 39: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $2\sqrt{x^2+1}+C$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$. **D.** $\sqrt{x^2+1}+C$.

Câu 40: Cho $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2+\sin x+C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(x\right)=x^3+\cos x$. **B.** $f\left(x\right)=x^3-\cos x$. **C.** $f\left(x\right)=6x-\cos x$. **D.** $f\left(x\right)=6x+\cos x$.

Câu 41: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\ \ x\ =x^2-3x+\dfrac{2}{x}$ **là**

A. $F\ \ x\ =\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2\ln x+C$.

B. $F\ \ x\ =\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2\ln x+C$.

C. $F\ \ x\ =2x-3-\dfrac{2}{x^2}+C$.

D. $F\ \ x\ =\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2\ln|x|+C$.

Câu 42: Cho $F\ \ x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\ \ x\ =\mathrm{e}^{x^2}\ \ x^3-4x$. Hàm số $F\ \ x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=4x^3-m+1,\ f\left(2\right)=1$ và có đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm được $f\left(x\right)=ax^4+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c.$

A. -11. **B.** -5. **C.** -13. **D.** -7.

Câu 44: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}e^{2x}+1 & \text{khi } x\geq 0\\ 4x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$**. Giả sử** $F\left(x\right)$ **là nguyên hàm của** $f\left(x\right)$ **trên** $\mathbb{R}$ **thoả mãn** $F\left(-2\right)=5$**. Biết rằng** $F\left(1\right)+3F\left(-1\right)=ae^2+b$ **(trong đó** a,b **là các số hữu tỉ). Khi đó** $a+b$ **bằng**

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 45: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(\sin x-\cos x\right)^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=-x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

B. $\int f\left(x\right)dx=-x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

D. $\int f\left(x\right)dx=x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=e^x+2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=1$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(1\right)=e$. Tính $F\left(0\right)$.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{5}{6}$.

Câu 47: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\ge 1\\ 3x^2+2 & khi\ x<1\end{cases}$. Giả sử $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $F\left(-2\right)+2F\left(3\right)$.

A. 60. **B.** 28. **C.** -1. **D.** -48.

Câu 48: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $R\backslash\left\{1\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{1}{x-1}$, $f\left(0\right)=2021$, $f\left(2\right)=2022$. Tính $S=f\left(5\right)-f\left(-1\right)$.

A. $S=\ln 4043$. **B.** $S=1+\ln 2$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Dạng 2: Nguyên hàm của hàm số phân thức hữu tỷ

Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

- Nếu bậc của tử số $P(x)\geq$ bậc của mẫu số $Q(x)\xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x)\leq$ bậc của mẫu số $Q(x)\xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp chia để đưa về công thức nguyên hàm số.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X=a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng X^2+a^2.

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$.

A. $x+\frac{1}{x-2}+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-2|+C$. **C.** $x^2+\ln|x-2|+C$. **D.** $1+\frac{1}{(x-2)^2}+C$.

Lời giải

....

....

....

Câu 2: Cho $F(x)=\int \frac{1}{x(x+3)}dx$. Kết quả nào sau đây đúng ?

A. $F(x)=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right|+C$. **B.** $F(x)=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$.

Lời giải

....

....

....

Câu 3: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$?

A. $F(x)=\ln|x|+\ln|x-1|$. **B.** $F(x)=-\ln|x|+\ln|x-1|$.

C. $F(x)=\ln|x|-\ln|x-1|$. **D.** $F(x)=-\ln|x|-\ln|x-1|$.

Lời giải

....

....

....

Câu 4: Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x = a\ln|x+1| + b\ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

✍ **Lời giải**

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{1-2x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\ln|1-2x| + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\ln|1-2x| + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -4\ln|1-2x| + C$.

✍ **Lời giải**

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 6: Họ các nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ là

A. $F(x) = x + \ln(x+1) + C$. **B.** $F(x) = x + \ln|x+1| + C$.

C. $F(x) = x + 2\ln(x+1) + C$. **D.** $F(x) = x + 2\ln|x+1| + C$.

✍ **Lời giải**

....

....

....

....

....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trên khoảng $-5;+\infty$, họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+5}$ là

A. $\ln\left|x+5\right|+C$. **B.** $\dfrac{1}{x+5}+C$. **C.** $\dfrac{1}{5}\ln\left|x+5\right|+C$. **D.** $\dfrac{-1}{\left(x+5\right)^2}+C$.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+\dfrac{1}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2+\dfrac{1}{x^2}+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2-\dfrac{1}{x^2}+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\ln\left|x\right|+C$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sin x+5x^4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=-\cos x+20x^3+C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx=\cos x+20x^3+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=-\cos x+x^5+C$. **D.** $\int f\left(x\right)dx=\cos x+x^5+C$.

Câu 4: Họ các nguyên hàm $\int\dfrac{1}{2x+1}dx$ là

A. $\ln\left(2x+1\right)+C$. **B.** $\ln\left|2x+1\right|+C$. **C.** $\dfrac{\ln\left|2x+1\right|}{2}+C$. **D.** $\dfrac{\ln\left|x\right|}{2}+C$.

Câu 5: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$ là

A. $2x+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+C$. **B.** $2x+\ln\left(x+1\right)+C$. **C.** $2x+3\ln\left(x+1\right)+C$. **D.** $2x-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+C$.

Câu 6: Biết $\int\limits_0^1\dfrac{1}{x^2+3x+2}dx=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $a+b=-2$. **C.** $a+2b=2$. **D.** $a+b=2$.

Câu 7: Họ nguyên hàm $\int\dfrac{1}{x^2-x}dx$ là

A. $-\ln\left|x\left(x-1\right)\right|+C$. **B.** $\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+C$. **C.** $\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$. **D.** $\ln\left|x\left(x-1\right)\right|+C$.

Câu 8: Cho biết $\int\dfrac{2x+7}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=a\ln\left|x+2\right|+b\ln\left|x+3\right|+C\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Tính $P=a^2+ab+b^2$.

A. $P=3$. **B.** $P=12$. **C.** $P=7$. **D.** $P=13$.

Câu 9: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ là:

A. $\int\dfrac{dx}{x(x-1)}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$. **B.** $\int\dfrac{dx}{x(x-1)}=\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+C$.

C. $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$. **D.** $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$.

Câu 10: Họ các nguyên hàm $\int \frac{1}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$ là

A. $\frac{-1}{4x-2}+C$. **B.** $\frac{1}{2x-1}+C$. **C.** $\frac{-1}{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{4x-2}+C$.

Câu 11: Cho biết $\int_1^3 \frac{x+4}{x}\mathrm{d}x = a+b\ln c,\ a,b,c\in\mathbb{Z}, c<9$. Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. $S=5$. **B.** $S=7$. **C.** $S=3$. **D.** $S=9$.

Câu 12: Họ các nguyên hàm $\int \frac{x^2-x+1}{x-1}dx$ bằng

A. $x+\frac{1}{x-1}+C$. **B.** $x^2+\ln|x-1|+C$. **C.** $1-\frac{1}{(x-1)^2}+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x+4}$ là:

A. $\frac{1}{5}\ln(5x+4)+C$. **B.** $\ln|5x+4|+C$. **C.** $\frac{1}{\ln 5}\ln|5x+4|+C$. **D.** $\frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$.

Câu 14: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}+C$. **B.** $3\ln(x-2)-\frac{2}{x-2}+C$.

C. $3\ln(x-2)-\frac{4}{x-2}+C$. **D.** $3\ln(x-2)+\frac{4}{x-2}+C$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}, f(0)=2022, f(2)=2023$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$, $f(0)=\frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}\ln 20+\frac{1}{3}$.

C. $\ln 80+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{0;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-2x}$. Biết rằng $f(-2)+f(4)=0$ và $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=2018$. Tính $T=f(-1)+f(1)+f(5)$

A. $T=\frac{1}{2}\ln 5+1009$. **B.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}+1009$ **C.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}+2018$. **D.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Câu 18: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+2x^3-10x^2-2x+1}$ có dạng $F(x)=\frac{a}{b}\ln\left|\frac{x^2-cx-1}{x^2+dx-1}\right|$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b+c+d$.

A. 24. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 13.

Dạng 3: Tìm nguyên hàm thỏa mãn điều kiện cho trước

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\dfrac{1}{2}$. **C.** $F(3)=\ln 2+1$. **D.** $F(3)=\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$; $f(0)=1$ và $f(1)=2$

Tính $P=f(-1)+f(3)$

A. $P=3+\ln 3$. **B.** $P=3+\ln 5$. **C.** $P=3+\ln 15$. **D.** $P=3-\ln 15$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Câu 3: Biết $F(x)$ là môt nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=e^{2x}+1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{3}{2}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=\frac{5}{4}$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $\frac{e^2+2}{4}$. **B.** $\frac{e^2+10}{4}$. **C.** $\frac{e+1}{2}$. **D.** $\frac{e+5}{2}$.

Lời giải

....

Câu 5: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$ thì $F(2022)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\ln 2020$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\ln 2021+1$.

Lời giải

....

Câu 6: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right)=2$, $F(e)=\ln 2$. Biết: $F\left(\frac{1}{e^2}\right)-F\left(e^2\right)=a+\ln b$. Giá trị của $a.b$ bằng

A 1. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x-\sin x$ là:

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}-\cos x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}+\cos x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3x^2+\cos x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3-\cos x+C$.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=2x+e^{-x}$. Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2023$

A. $F\left(x\right)=x^2-e^{-x}+2023.$ **B.** $F\left(x\right)=x^2-e^{x}+2024.$

C. $F\left(x\right)=x^2+e^{-x}+2022.$ **D.** $F\left(x\right)=x^2-e^{-x}+2024.$

Câu 3: Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, $f\left(x\right)=f'\left(x\right)\cdot\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f\left(5\right)<4$. **B.** $1<f\left(5\right)<2$. **C.** $4<f\left(5\right)<5$. **D.** $2<f\left(5\right)<3$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'\left(x\right)=\cos^2 x.\sin x$ và $f\left(0\right)=1$. Tìm $f\left(x\right)$.

A. $f\left(x\right)=\dfrac{\cos^3 x}{3}+\dfrac{11}{3}$. **B.** $f\left(x\right)=\cos^3 x+4$.

C. $f\left(x\right)=-\dfrac{\cos^3 x}{3}+\dfrac{13}{3}$. **D.** $f\left(x\right)=-\cos^3 x+5$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ thoả mãn $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$, $f\left(0\right)=2022$, $f\left(2\right)=2023$. Tính $S=f\left(3\right)-f\left(-1\right)$.

A. $S=0$. **B.** $S=\ln 4045$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\ln 2$.

Câu 6: Cho hàm số $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^2+6x$. Biết $F\left(3\right)=27$. Tính $F\left(-3\right)$.

A. $F\left(-3\right)=18.$ **B.** $F\left(-3\right)=0.$ **C.** $F\left(-3\right)=9.$ **D.** $F\left(-3\right)=-9.$

Câu 7: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-1}$. Biết $F\left(1\right)=1$, giá trị của $F\left(5\right)$ bằng

A. $1+\ln 2$. **B.** $1+\ln 3$. **C.** $\ln 3$. **D.** $\ln 2$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=2x+1-\dfrac{2}{x-2}$ biết $F\left(1\right)=3$.

A. $F\left(x\right)=x^2+x-2\ln\left(2-x\right)+1$. **B.** $F\left(x\right)=x^2+x+2\ln\left|x-2\right|+1$.

C. $F\left(x\right)=x^2+x-\ln\left|x-2\right|+1$. **D.** $F\left(x\right)=x^2+x-2\ln\left|x-2\right|+1$.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^2+\sin x+1$. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ và $F\left(0\right)=1$. Tìm $F\left(x\right)$.

A. $F(x)=x^3-\cos x+x+2$.
B. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos x+x$.
C. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.
D. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+2$.

Câu 10: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x+2}$ và $F(-1)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 5-1$. **B.** $F(3)=\ln 5+2$. **C.** $F(3)=\ln 5+1$. **D.** $F(3)=\frac{1}{5}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=24x^2+5x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $-2\cdot$ **B.** $\frac{-8}{3}\cdot$ **C.** $\frac{-13}{2}\cdot$ **D.** $\frac{-15}{2}\cdot$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $F(x)=x^3+2x^2+(m^2-1)x+C$ (C là hằng số) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+4x+3$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm 4$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\pm 2$.

Câu 13: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(1)$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e+2$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Câu 14: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{-x^2-2x}{(x+1)^4}$ thoả $F(0)=-\frac{2}{3}$. Tính $F(1)$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{-7}{6}$. **C.** $\frac{-7}{24}$. **D.** $\frac{11}{24}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=(2x-3)^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa mãn $F(2)=\frac{9}{8}$. Tính $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{1}{2}\right)=-1$. **B.** $F\left(\frac{1}{2}\right)=5$. **C.** $F\left(\frac{1}{2}\right)=3$. **D.** $F\left(\frac{1}{2}\right)=-2$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=4-3\sin x$ và $f(\pi)=5$. Tìm hàm số $f(x)$.

A. $f(x)=4x-3\cos x+8$.
B. $f(x)=4x+3\cos x+1$.
C. $f(x)=4x+3\cos x+8$.
D. $f(x)=4x-3\cos x+1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-5}$, $f(4)=2021$, $f(6)=2022$. Đặt $P=21f(10)-20f(0)$. Hỏi giá trị của P xấp xỉ bằng?

A. 2022. **B.** $2043,6$. **C.** $2042,6$. **D.** 2021.

Câu 18: Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}\cdot\sqrt{\ln^2 x+1}$ và thỏa mãn $F(1)=\frac{1}{3}\cdot$ Giá trị của $\left[F(e)\right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{3}\cdot$ **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot$. **C.** $\frac{1}{9}\cdot$. **D.** $\frac{8}{9}\cdot$

Câu 19: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0)=\frac{21}{2}\cdot$ Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

A. $\frac{e}{2}+10$. **B.** $2e+10$. **C.** $\frac{e}{2}+50$. **D.** $\frac{e}{2}+11$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=\sin x+x\cos x$ và $f(0)=0$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $\frac{\pi}{2}-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-2$. **D.** $\frac{\pi}{2}+2$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$ và $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x)=\sin 2x+e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=2$. Khi đó $f(\pi)$ có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(22;25)$. **B.** $(28;30)$. **C.** $(5;8)$. **D.** $(19;22)$.

Câu 23: Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$ và thoả mãn $F(\pi)=1$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=2$, $f(-e)=4$. Giá trị của $f(-2)-2f\left(e^2\right)$ bằng

A. $-8+\ln 2$. **B.** $-5+\ln 2$. **C.** $-2+\ln 2$. **D.** $-1+\ln 2$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-20x^3+6x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(-1)=2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(1)=3$, khi đó $F(2)$ bằng

A. -17. **B.** -1. **C.** -15. **D.** -74.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=24x^2-18x+8,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=4$, khi đó $F(-1)$ bằng

A. -30. **B.** 20. **C.** -5. **D.** 2.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x+\frac{1}{x},\forall x>0$ và $f(1)=\frac{1}{2}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thoả mãn $F(1)=\frac{1}{6}$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $\frac{2}{3}+2\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}+\ln 4$. **C.** $\frac{1}{3}+\ln 2$. **D.** $\frac{1}{3}+\ln 4$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1,\ f(1)=-2$. Giá trị $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $2+\ln 15$. **B.** $\ln 15-1$. **C.** $3-\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$. Biết $3x^2$ là một nguyên hàm của $x^2f'(x)$ trên $(0;+\infty)$ và $f(1)=2$. Tính giá trị $f(\mathrm{e})$.

A. $f(\mathrm{e})=8$. **B.** $f(\mathrm{e})=6\mathrm{e}-2$. **C.** $f(\mathrm{e})=4$. **D.** $f(\mathrm{e})=3\mathrm{e}+2$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Giá trị của $f(\pi)$ bằng

A. $1+\frac{\pi}{2}$. **B.** $-1+\frac{\pi}{2}$. **C.** $1+\pi$. **D.** $-1+\pi$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $R\setminus\{0\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}, f(-2)=\frac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$ .Tính giá trị biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng.

A. $\frac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\frac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\frac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\frac{8\ln 2-3}{4}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn $f'(x)=\mathrm{e}^x\cdot\left[f(x)\right]^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=-1$, khi đó $f(-1)$ bằng

A. e. **B.** -1. **C.** $-\mathrm{e}$. **D.** $-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+2$ và $f(2)=\frac{9}{2}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(2)=4+\ln 2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $3+\ln 2$. **B.** $-3-\ln 2$. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{x-4}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(2)=0$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+2f(-1)-f(3)$ bằng

A. $3\ln\frac{5}{2}+2$. **B.** $3\ln\frac{2}{5}+2$. **C.** $2\ln\frac{2}{5}+2$. **D.** $3\ln\frac{2}{5}+3$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x+x.\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=F(\pi)=1$, khi đó giá trị của $F(2\pi)$ bằng.

A. $1+2\pi$. **B.** $1-4\pi$. **C.** $1-2\pi$. **D.** 4π.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}, f(0)=1$ và $f(1)=3$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng

A. $5+\ln 21$. **B.** $5+\ln 12$. **C.** $4+\ln 12$. **D.** $4+\ln 21$.

Câu 37: Biết rằng $x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $2f'(x)\cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{4}$, giá trị của $F(\pi)$ bằng:

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $-\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=12x^2-2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ và $F(1)=-1$, khi đó $f(2)$ bằng

A. 30. **B.** 36. **C.** -3. **D.** 26.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=e$ và $f'(x)+f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{e}$. **B.** $1-\frac{1}{e}$. **C.** $1+\frac{1}{e}$. **D.** 2.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ và $f'(x)=\cos x\left(6\sin^2 x-1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=\frac{2}{3}$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{2x},\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=-\frac{1}{3}$, khi đó $F(9)$ bằng

A. $\frac{8}{3}+8\ln 3$. **B.** $9+18\ln 3$. **C.** $9+27\ln 3$. **D.** $-\frac{8}{3}+8\ln 3$

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x+x\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(\pi)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(\pi)=2\pi$, khi đó $F(0)$ bằng

A. π. **B.** -3π. **C.** $-\pi$. **D.** 3π.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thoả mãn $f(1)=2$; $f'(x)=\frac{x^2}{\left(f(x)\right)^2}$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. $\sqrt[3]{34}$. **B.** 34. **C.** 3. **D.** $\sqrt[3]{20}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x-1}+6x,\ \forall x\in(1;+\infty)$ và $f(2)=12$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa $F(x)=6$, khi đó giá trị biểu thức $P=F(5)-4F(3)$ bằng

A. 20. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 25.

Câu 46: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+...+F(2021)+F(2022)$ bằng

A. $\dfrac{2022}{2023}$. **B.** $\dfrac{2022.2024}{2023}$. **C.** $2021\dfrac{1}{2023}$. **D.** $-\dfrac{2022}{2023}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=\left|-x^2-4x-3\right|$ thỏa mãn $f(-4)+f(0)=3$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(2)+f\left(-\dfrac{5}{2}\right)$.

A. 21. **B.** -12. **C.** $\dfrac{301}{24}$. **D.** $\dfrac{-301}{24}$.

Câu 48: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$. **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$.

Câu 49: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ và $F(1)=1$. Hệ số tự do của $F(x)$ thuộc khoảng

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x & \text{khi } x\ge 1\\ 4x^3-2x+3 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=\dfrac{88}{9}$. Biết $2F(0)+F(4)=-\dfrac{a}{b}$,$(a,b)=1$ và a,b là các số nguyên dương. Khi đó, giá trị biểu thức $T=3a+b$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 2021. **D.** 2024.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2+3 & \text{khi } x\ge 1\\ 5-x & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=20$. Giá trị của $F(-1)$ là

A. $-\dfrac{11}{3}$. **B.** $-\dfrac{14}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2021 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2020 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Tính $4F(-2)+5F(2)$.

A. 4051. **B.** -2020. **C.** 2021. **D.** 4036.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=2$, $f(-e)=4$. Giá trị của $f(-2)-2f\left(e^2\right)$ bằng

A. $-8+\ln 2$. **B.** $-5+\ln 2$. **C.** $-2+\ln 2$. **D.** $-1+\ln 2$.

Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x+\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=3$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $3\pi^3+\pi$. **B.** $\dfrac{\pi^3}{3}+\pi+3$. **C.** $\pi^3+\dfrac{\pi}{2}+3$. **D.** $\pi^3+\pi+3$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}+6x$, $\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(2)=12$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa $F(2)=6$, khi đó giá trị biểu thức $P=F(5)-4F(3)$ bằng

A. 20. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 25.

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x-\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=3$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\pi^3+12\pi}{6}+2$. **B.** $\dfrac{\pi^3-12\pi}{8}+2$. **C.** $\dfrac{\pi^3+12\pi}{8}+2$. **D.** $\dfrac{\pi^3-12\pi}{6}+2$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=2$, $f(-e)=4$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F\left(e^2\right)=2e$, khi đó $F(e)$ bằng

A. $3e-4e^2$. **B.** $4e-3e^2$. **C.** $4e-5e^2$. **D.** $5e^2-4e$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=2x^2-x-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và tiếp tuyến của $F(x)$ tại điểm $M(0;2)$ có hệ số góc bằng 0. Khi đó $F(1)$ bằng

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{-7}{2}$. **C.** $\dfrac{-1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x-e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $1-e$. **B.** $2e$. **C.** $\dfrac{1}{e}$. **D.** e.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-4x^3+2x-1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $-\dfrac{131}{30}$. **B.** $\dfrac{131}{30}$. **C.** $\dfrac{41}{30}$. **D.** $-\dfrac{41}{30}$.

Câu 61: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\cos x-e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-3$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $2\pi-e^{-\pi}$. **B.** $2\pi+e^{\pi}$. **C.** $2+\pi-e^{-\pi}$. **D.** $2\pi-e^{\pi}$.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x^2-2x+3, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(-2)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F(0)=2$. Tính $F(1)+2F(-2)$.

A. 26. **B.** $-\dfrac{314}{3}$. **C.** $-\dfrac{334}{3}$. **D.** -46.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+3 \text{ khi } x\ge 1 \\ 5-x \quad \text{khi } x<1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=20$. Giá trị của $F(-1)$ là

A. $-\dfrac{11}{3}$. **B.** $-\dfrac{14}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=2\sin^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=f(0)=1$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+4\pi+3}{16}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+4\pi+12}{16}$.

C. $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+\pi+3}{16}$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+\pi+12}{16}$.

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=4x^3+4x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Khi đó $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{4}{15}$. **B.** $\dfrac{26}{15}$. **C.** $\dfrac{-4}{15}$. **D.** 0.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $f(0)=0, f(2)=2$. Khi đó $f(-1)+f(3)$ bằng:

A. $2-\ln 2$. **B.** $2+\ln 2$. **C.** 2. **D.** $2+2\ln 2$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x-9\cos 3x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. -2π. **B.** $2-2\pi$. **C.** 2π. **D.** $2+2\pi$.

Câu 68: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x)=2e^{2x}+1, \forall x, f(0)=2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{3}{2}$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{e^2}{2}+4$. **B.** $\dfrac{e^4}{2}+\dfrac{e^2}{2}+4$. **C.** $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{e^2}{2}-4$. **D.** $\dfrac{e^4}{2}+\dfrac{e^2}{2}-4$.

Câu 69: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thoả mãn $f'(x)=\dfrac{2x-5}{x-1}$, $f(3)=2$ và $f(0)=4$. Giá trị của biểu thức $f(-3)-2f(5)$ bằng

A. -14. **B.** $6-3\ln 2$. **C.** $-2-6\ln 2$. **D.** 14.

Câu 70: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 71: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=6x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=2$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $\frac{37}{2}$. **B.** $-\frac{37}{2}$. **C.** $\frac{2}{37}$. **D.** $-\frac{2}{37}$.

Câu 72: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=24e^{2x}+e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=12e^2+e$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=6e^2+e+3$, khi đó $F(0)$ bằng

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Câu 73: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=12x^2+6x+6$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(-1)=-5$. Biết hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=-8$. Tính $F(-1)$.

A. -10. **B.** 10. **C.** -14. **D.** 8.

Câu 74: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3-2x-1, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(1)=-1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $\frac{41}{30}$. **B.** $-\frac{41}{30}$. **C.** $\frac{21}{10}$. **D.** $\frac{26}{15}$.

Câu 75: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+18x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và thỏa mãn $f(0)=F(0)=0$. Khi đó $F(1)$ bằng

A. 5. **B.** -5. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 76: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin 3x+e^{-x}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=3$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $-e^{-\pi}+2$. **B.** $e^{-\pi}+2$. **C.** $e^{-\pi}-2$. **D.** $-e^{-\pi}-2$.

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{13}{4}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

A. $\frac{\pi+2\sqrt{2}+48}{16}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi-\sqrt{2}-8}{16}$. **D.** $\frac{\pi-2\sqrt{2}+48}{16}$.

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^*$ có đạo hàm đến cấp hai thỏa mãn $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f(-1)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(-3)=\ln 3$. Giá trị $f(-2)$ bằng

A. $4\ln 2$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $1+2\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x+\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(\pi)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(2\pi)=3$, khi đó $F(3\pi)$ bằng

A. $\pi-1$. **B.** $\pi+5$. **C.** $3\pi-1$. **D.** $3\pi+5$.

Câu 80: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x^2-2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F(2)$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 81: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^3+2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(-1)=3$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$, khi đó $F(-1)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $-\frac{14}{15}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{-3}{5}$.

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)>0, \forall x \in (1;3)$. Biết rằng $e^{2x}.f^3(x)+1=3e^x.f'(x).\sqrt{f(x)}$, $\forall x \in (1;3)$ và $f(2)=e^{-\frac{4}{3}}$, khi đó giá trị của $f\left(\frac{3}{2}\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$.

Dạng 4: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin 2x$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.\cos 2x+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\cos 2x+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\cos 2x+C$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 2: Tính nguyên hàm $\int x\sqrt{x+2}dx$ bằng cách đặt $t=\sqrt{x+2}$ ta thu được nguyên hàm nào dưới đây?

A. $\int 2(t^2-2)t^2dt$. **B.** $\int 2t^2dt$. **C.** $\int (t^2-2)tdt$. **D.** $\int 2(t^2-2)tdt$

Lời giải

....

....

....

....

Câu 3: Nếu đặt $t=1+\ln x$ thì $I=\int \frac{\ln x}{x\left(1+\ln x\right)}\mathrm{d}x$ trở thành

A. $I=\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)e^t\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int \left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int \left(1-\frac{1}{t}\right)e^t\mathrm{d}t$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\left(x^2+1\right)^{2022}$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{4046}$. Giá trị của $F(1)$ bằng:

A. 2^{2023} **B.** $\dfrac{2^{2023}}{2023}$ **C.** 2^{2022} **D.** $\dfrac{2^{2022}}{2023}$

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 5: Biết $\int x(1-2x)^{2022}\,\mathrm{d}x=\dfrac{(1-2x)^{2024}}{a}-\dfrac{(1-2x)^{2023}}{b}+C$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 4.

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính $\int x^2\left(2x^3-1\right)^3dx$

A. $\frac{\left(2x^3-1\right)^4}{24}+C$. **B.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^4}{4}+C$. **C.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{4}$. **D.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^4}{24}$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

A. $\int f\left(x\right)dx=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{6}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=-\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **D.** $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

Câu 3: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int \sin 2x\mathrm{d}x=2\cos 2x+C$. **B.** $\int \sin 2x\mathrm{d}x=-2\cos 2x+C$.

C. $\int \sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\int \sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 4: Tìm nguyên hàm $\int\frac{\sin x}{2021\cos x+2022}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $t=2021\cos x+2022$. Khi đó nguyên hàm đã cho trở thành nguyên hàm nào sau đây?

A. $2021\int t\mathrm{d}t$. **B.** $-\frac{1}{2021}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **C.** $\frac{1}{2021}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **D.** $-2021\int t\mathrm{d}t$.

Câu 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{3x}$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\mathrm{e}^{3x}$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x}+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\ln\left|3x\right|+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\mathrm{e}^{3x}+C$.

Câu 6: Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin 21x$ là

A. $\int f\left(x\right)\,dx=\frac{1}{21}\cos 21x+C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx=21\cos 21x+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=-\frac{1}{21}\cos 21x+C$. **D.** $\int f\left(x\right)dx=-21\cos 21x+C$.

Câu 7: Hàm số $F\left(x\right)=2x+\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $x^2+\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $2+2\cos 2x$. **C.** $x^2-\frac{1}{2}\cos 2x$. **D.** $2-2\cos 2x$.

Câu 8: Xét nguyên hàm $I=\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sqrt{x+2}$ thì ta được

A. $I=\int\left(2t^4-4t^2\right)dt$. **B.** $I=\int\left(2t^4-t^2\right)dt$.

C. $I=\int\left(t^4-2t^2\right)dt$. **D.** $I=\int\left(4t^4-2t^2\right)dt$.

Câu 9: Xét nguyên hàm $I=\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sqrt{x+2}$ thì ta được

A. $I=\int\left(2t^4-4t^2\right)dt$.
B. $I=\int\left(2t^4-t^2\right)dt$.
C. $I=\int\left(t^4-2t^2\right)dt$.
D. $I=\int\left(4t^4-2t^2\right)dt$.

Câu 10: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos 2x+C$.
B. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$.
C. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.
D. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=2\cos 2x+C$.

Câu 11: Cho $\int x(2x-3)^5dx=A(2x-3)^7+B(2x-3)^6+C,$ với $A,B,C\in\mathbb{R}$.Tính giá trị biểu thức $7A-2B$

A. 0.
B. $\frac{1}{2}$.
C. 3.
D. 5.

Câu 12: Tìm nguyên hàm $\int x\left(x^2+7\right)^9\mathrm{d}x$?

A. $\frac{1}{20}(x^2+7)^{10}+C$.
B. $9(x^2+7)^8+C$.
C. $\frac{1}{16}(x^2+7)^8+C$.
D. $\frac{1}{10}\left(x^2+7\right)^{10}+C$.

Câu 13: Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+2}$.

A. $F(x)=e^{2x}-4\ln(e^x+2)+C.$
B. $F(x)=e^x+2\ln(e^x+2)+C.$
C. $F(x)=e^x-2\ln(e^x+2)+C.$
D. $F(x)=\ln(e^x+2)+C.$

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int f(x)dx=F(x)+C$. Tìm kết luận đúng.

A. $\int f(2x+3)dx=2.F(2x+3)+C$.
B. $\int f(2x+3)dx=\frac{1}{3}.F(2x+3)+C$.
C. $\int f(2x+3)dx=\frac{1}{2}.F(2x+3)+C$.
D. $\int f(2x+3)dx=F(2x+3)+C$.

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $2\sqrt{x^2+1}+C$.
B. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.
C. $\sqrt{x^2+1}+C$.
D. $\sqrt{x^2+1}+C$.

Câu 16: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\left(x^2+2\right)^5$ là

A. $\frac{1}{12}\left(x^2+2\right)^6+C$.
B. $\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^6+C$.
C. $\frac{1}{6}\left(x^2+2\right)^6+C$.
D. $\left(x^2+2\right)^6+C$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln^2 x+C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln^2 x+C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{5x+4}$ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{5}\ln\left|5x+4\right|+C.$ **B.** $\int f\left(x\right)dx=\ln\left|5x+4\right|+C.$

C. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{\ln 5}\ln\left|5x+4\right|+C.$ **D.** $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{5}\ln\left(5x+4\right)+C.$

Câu 19: Họ nguyên hàm của hàm $\int\frac{1+2\ln x}{x}dx$ là

A. $\ln x+2\ln^2 x+C$. **B.** $\ln x+\ln^2 x+C$. **C.** $x+\ln^2 x+C$. **D.** $x+\ln^2 x+C$.

Câu 20: Họ nguyên hàm $F\left(x\right)$của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}$ là:

A. $F\left(x\right)=-\frac{\cos x}{\sin x}+C$. **B.** $F\left(x\right)=\frac{1}{\sin x}+C$. **C.** $F\left(x\right)=-\frac{1}{\sin x}+C$. **D.** $F\left(x\right)=\frac{1}{\sin^2 x}+C$.

Câu 21: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $2\sqrt{x^2+1}+C$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$. **D.** $\sqrt{x^2+1}+C$.

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)=x.\left(x^2+1\right)^{2016}$. Khi đó:

A. $\int f\left(x\right)d\mathrm{x}=\frac{\left(x^2+1\right)^{2017}}{2017}+C.$ **B.** $\int f\left(x\right)d\mathrm{x}=\frac{\left(x^2+1\right)^{2016}}{2016}+C.$

C. $\int f\left(x\right)d\mathrm{x}=\frac{\left(x^2+1\right)^{2017}}{4034}+C.$ **D.** $\int f\left(x\right)d\mathrm{x}=\frac{\left(x^2+1\right)^{2016}}{4032}+C.$

Câu 23: Họ các nguyên hàm $\int xe^{x^2+1}dx$ là:

A. $x.e^{x^2+1}+C$ **B.** $e^{x^2+1}+C$ **C.** $\frac{e^{x^2+1}}{2}+C$ **D.** $\frac{x.e^{x^2+1}}{2}+C$

Câu 24: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3+1}+\mathrm{C}.$ **B.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+\mathrm{C}.$ **C.** $\sqrt{x^3+1}+\mathrm{C}.$ **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{x^3+1}+\mathrm{C}.$

Câu 25: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{\cos^2 2x}$ là:

A. $\frac{-\cot 2x}{2}+C$. **B.** $\cot 2x+C$. **C.** $\tan 2x+C$. **D.** $\frac{\tan 2x}{2}+C$.

Câu 26: Gọi $F\left(x\right)$ là một họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$. Tìm $F\left(x\right)$.

A. $\frac{3}{2}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}+C.$ **B.** $\frac{2}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{2}{3}}+C.$ **C.** $\frac{3}{2}\left(x^2+4\right)^{\frac{2}{3}}+C.$ **D.** $\frac{2}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}+C.$

Câu 27: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=e^{kx}\ (k\neq 0)$ sao cho $F(0)=\dfrac{1}{k}$. Giá trị k thuộc khoảng nào sau đây để $F(x)=f(x)$?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$. Tìm khẳng định đúng.

A. $\ln|f(x)|=\ln|x|+C.$

B. $\ln|f(x)|=-\dfrac{1}{x^2}+C.$

C. $-\dfrac{1}{f^2(x)}=-\dfrac{1}{x^2}+C.$

D. $-\dfrac{1}{f^2(x)}=\ln|x|+C.$

Câu 29: Tìm $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$ có kết quả là:

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$. **B.** $\ln|\ln x|+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}(\ln x-1)+C$. **D.** $\ln\dfrac{x^2}{2}+C$.

Câu 30: Cho tích phân $I=\int\limits_1^e\dfrac{3\ln x+1}{x}dx$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\int\limits_1^e\dfrac{3t+1}{t}dt$. **B.** $I=\int\limits_0^1\dfrac{3t+1}{e^t}dt$. **C.** $I=\int\limits_0^1(3t+1)dt$. **D.** $I=\int\limits_1^e(3t+1)dt$.

Câu 31: Tìm nguyên hàm $\int 2x\left(x^2+7\right)^{15}dx$:

A. $\dfrac{1}{2}\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

B. $\dfrac{1}{16}x\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

C. $-\dfrac{1}{16}\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

D. $\dfrac{1}{16}\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

Câu 32: Khi tính nguyên hàm $\int\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$. **B.** $\int\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **C.** $\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\int 2u\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Câu 33: Nguyên hàm $\int x\left(x^2+3\right)^5\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\left(x^2+3\right)^6+C$. **B.** $\dfrac{1}{10}\left(x^2+3\right)^6+C$. **C.** $\dfrac{1}{6}\left(x^2+3\right)^6+C$. **D.** $\dfrac{1}{12}\left(x^2+3\right)^6+C$.

Câu 34: Tính nguyên hàm $\int\dfrac{(\ln x+2)}{x\ln x}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $t=\ln x$ ta được nguyên hàm nào sau đây?

A. $\int\left(1+\dfrac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$. **B.** $\int\dfrac{t}{t-2}\mathrm{d}t$. **C.** $\int\dfrac{(t+2)}{t^2}\mathrm{d}t$. **D.** $\int(t+2)\mathrm{d}t$.

Câu 35: Cho hàm số $\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx = \sqrt{x}+1+C$. **B.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx = \frac{2}{\sqrt{x}+1}+C$.

C. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx = \frac{-2}{\sqrt{x}+1}+C$. **D.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{x}+1}{2}+C$.

Câu 36: Tính nguyên hàm $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{x+4}$ ta thu được nguyên hàm nào?

A. $\int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2-4}$. **B.** $\int \frac{2t\mathrm{d}t}{\left(t^2-4\right)}$. **C.** $\int \frac{2\mathrm{d}t}{\left(t^2-4\right)t}$. **D.** $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}$.

Câu 37: Xét nguyên hàm $\int x(2x+1)^3\,\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=2x+1$ thì nguyên hàm cần tính trở thành

A. $\int\left(t^4-t^3\right)\mathrm{d}t$. **B.** $\frac{1}{4}\int\left(t^4-t^3\right)\mathrm{d}t$. **C.** $\frac{1}{2}\int\left(t^4-t^3\right)\mathrm{d}t$. **D.** $2\int\left(t^4-t^3\right)\mathrm{d}t$.

Câu 38: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2+x+1\right)(2x+1)$ là

A. $\left(x^2+x+1\right)^2+C$. **B.** $-\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)^2+C$.

C. $\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)^2+C$. **D.** $(2x+1)^2+2\left(x^2+x+1\right)+C$.

Câu 39: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+9}$ là

A. $\ln\left|x^2-3x+9\right|+C$. **B.** $\frac{1}{x^2-3x+9}+C$.

C. $-\ln\left(x^2-2x+9\right)+C$. **D.** $\ln\left(x^2-2x+9\right)$.

Câu 40: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x-3}$ là

A. $\frac{2}{3}\sqrt{x-3}+C$. **B.** $\frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3}+C$.

C. $\frac{3}{2}(x-3)\sqrt{x-3}+C$. **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{x-3}+C$.

Câu 41: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)}.\ln\left(x^2+1\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{4}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\ln^2\left(x^2+1\right)}{4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\ln^2\left(x^2+1\right)}{2}+C$.

Câu 42: Tính nguyên hàm $\int x^2\left(2x^3-1\right)^2\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{18}+C$. **B.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{3}+C$. **C.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{6}+C$. **D.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{9}+C$.

Câu 43: Tính nguyên hàm $\int \frac{x-1}{\left(x^2-2x+3\right)^{2021}}dx$.

A. $\frac{-1}{2020\left(x^2-2x+3\right)^{2020}}+C$.

B. $\frac{-1}{4044\left(x^2-2x+3\right)^{2022}}+C$.

C. $\frac{-1}{4040\left(x^2-2x+3\right)^{2020}}+C$.

D. $\frac{1}{4040\left(x^2-2x+3\right)^{2020}}+C$.

Câu 44: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F(x)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+\sqrt{x^2+1}$.

B. $F(x)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-\sqrt{x^2+1}$.

C. $F(x)=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}+\sqrt{x^2+1}$.

D. $F(x)=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}-\sqrt{x^2+1}$.

Câu 45: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(e^x+1\right)^2 e^{2x}$ thỏa mãn $F(\ln 2)=\frac{1}{4}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=\frac{1}{4}\left(e^x+1\right)^4-\frac{1}{3}\left(e^x+1\right)^3+11$.

B. $F(x)=\frac{1}{4}\left(e^x+1\right)^4+\frac{1}{3}\left(e^x+1\right)^3-11$.

C. $F(x)=\frac{1}{4}\left(e^x+1\right)^4+\frac{1}{3}\left(e^x+1\right)^3+11$.

D. $F(x)=\frac{1}{4}\left(e^x+1\right)^4-\frac{1}{3}\left(e^x+1\right)^3-11$.

Câu 46: Tính $\int \frac{\ln^2 x}{x\log x}dx$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

B. $\frac{\ln^2 x}{\ln 10}+C$.

C. $\ln 10.\ln^2 x+C$.

D. $\ln 10.\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

Câu 47: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là

A. $\frac{1}{3\sqrt{x^3+1}}+C$.

B. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

C. $\frac{2}{3\sqrt{x^3+1}}+C$.

D. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

Câu 48: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt[3]{x^2+1}$ là

A. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$.

B. $\frac{1}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$.

C. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$.

D. $\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$.

Câu 49: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x+1}$?

A. $F(x)=\frac{1-2\sin x-3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x+1}}$.

B. $F(x)=\frac{2}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}$.

C. $F(x)=\frac{1}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}$. **D.** $F(x)=\frac{1}{3}\sin x\sqrt{\sin x+1}$.

Câu 50: Với cách đặt $t=2\sin x+3$ thì $I=\int\frac{\cos x}{2\sin x+3}\mathrm{d}x$ trở thành:

A. $I=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **B.** $I=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **C.** $I=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **D.** $I=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=\sin x.\cos^3 x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\cos^4 x}{4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{\cos^4 x}{4}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos^4 x+C$.

Câu 52: Khi tính nguyên hàm $\int\frac{x-2021}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào dưới đây?

A. $2\int u(u^2-2022)\mathrm{d}u$. **B.** $\int(u^2-2022)\mathrm{d}u$. **C.** $2\int(u^2-2022)\mathrm{d}u$. **D.** $2\int(u^2-2021)\mathrm{d}u$.

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(1+3\cos^2 x)\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-4$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+2]dx$.

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 54: Biết $\int\frac{(x-1)^{2020}}{(x+1)^{2022}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b+C,\ x\neq 1;a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{a}{b}$.

A. 2021. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 2020.

Câu 55: Nếu $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=2f(x)-x+C$ thì $f(x)$ bằng

A. e^x+1. **B.** e^x. **C.** e^x-1. **D.** $\ln(\mathrm{e}^x+1)$.

Câu 56: Cho $f\left(\frac{3x-4}{3x+4}\right)=x+2$. Khi đó $I=\int f(x)dx$ bằng

A. $I=e^{x+2}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|+C$. **B.** $I=-\frac{8}{3}\ln|1-x|+\frac{2}{3}x+C$.

C. $I=\frac{8}{3}\ln|x-1|+\frac{x}{3}+C$. **D.** $I=\frac{8}{3}\ln|x-1|+x+C$.

Câu 57: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.(x^2+1)^{2022}$ thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{4046}$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 2^{2023}. **B.** $\frac{2^{2023}}{2023}$. **C.** 2^{2023}. **D.** $\frac{2^{2022}}{2023}$.

Câu 58: Khi tính $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}$, người ta đặt $t=g(x)$ thì $I=\int 2\mathrm{d}t$. Biết $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0)+g(1)$ là

A. $\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$.

Câu 59: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left[x(x+1)(x+2)(x+3)\right]^2(2x+3)$ là

A. $\frac{\left(x^2+3x\right)^5}{5}+\left(x^2+3x\right)^4+\frac{4}{3}\left(x^2+3x\right)^3+C$. **B.** $\left(x^2+3x\right)^4+\left(x^2+3x\right)^2+C$.

C. $5\left(x^2+3x\right)^5+\left(x^2+3x\right)^4+12.\left(x^2+3x\right)^3+C$. **D.** $\frac{\left(x^2-3x\right)^5}{4}+\left(x^2-3x\right)^4+\frac{4}{5}\left(x^2-3x\right)^3+C$.

Câu 60: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{(x-2021)^{2020}}{(x+2022)^{2022}}$ là

A. $\frac{1}{2022}\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2020}+C$. **B.** $\frac{2021}{4043}\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2021}+C$.

C. $\frac{1}{4043.2021}\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2021}+C$. **D.** $\frac{1}{2021}.\frac{4043}{(x+2022)^{2021}}+C$.

Câu 61: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}$ là

A. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}+C$. **B.** $-\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+C$.

C. $-6.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+C$. **D.** $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+C$.

Câu 62: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}$ là

A. $x+\ln\left|2\sin x\right|+C$. **B.** $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}.\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$.

C. $\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}.\ln\left|2\cos x-\sin x\right|+C$. **D.** $\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}.\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$.

Câu 63: $\int\left((x+1)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x$ có dạng $\frac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$, trong đó a,b là hai số hữu tỉ. Tính $a+b$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 64: Tính $G=\int\frac{2x^2+(1+2\ln x).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$.

A. $G=\frac{-1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **B.** $G=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}+C$.

C. $G=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\ln x}+C$. **D.** $G=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\ln x}+C$.

Câu 65: Giả sử $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\frac{\ln\left(x+3\right)}{x^2}$ sao cho $F\left(-2\right)+F\left(1\right)=0$. Giá trị của $F\left(-1\right)+F\left(2\right)$ bằng

A. $\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5$. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3}\ln 2$. **D.** $\frac{2}{3}\ln 2+\frac{3}{6}\ln 5$.

Câu 66: Hàm số $f(x)=x(1-x)^4$ có họ các nguyên hàm là

A. $F(x)=\frac{(x-1)^6}{6}-\frac{(x-1)^5}{5}+C$. **B.** $F(x)=\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^5}{5}+C$.

C. $F(x)=\frac{(x-1)^6}{5}-\frac{(x-1)^5}{4}+C$. **D.** $F(x)=\frac{(x-1)^6}{5}+\frac{(x-1)^5}{4}+C$.

Câu 67: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên đoạn $\left[-1;2\right]$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1$ và $f^2\left(x\right).f'\left(x\right)=1+2x+3x^2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ là:

A. $\min\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{40}$. **B.** $\min\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{-2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{40}$.

C. $\min\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{-2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{43}$. **D.** $\min\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f\left(x\right)=\sqrt[3]{43}$.

Câu 68: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{e^x}{e^x+3}}$ và $F\left(0\right)=1$. $F\left(1\right)$ có giá trị thuộc khoảng

A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Dạng 5: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm khẳng định đúng.

A. $\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x + \int \sin x\mathrm{d}x.$ **B.** $\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x.$

C. $\int x\cos x\mathrm{d}x = -x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x.$ **D.** $\int x\cos x\mathrm{d}x = -x\sin x + \int \sin x\mathrm{d}x.$

Lời giải

....

....

....

....

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + \left(x-1\right)e^x + C$. **B.** $4x^3 + \left(x+1\right)e^x + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. **D.** $\frac{1}{5}x^5 + \left(x+1\right)e^x + C$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = 2x\ln x$ là

A. $x^2\ln x + \frac{x^2}{2} + C$. **B.** $x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + 1$. **C.** $x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C$. **D.** $x^2\ln x - x + C$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 4: Biết $\int x\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{a}\ln x-\int\dfrac{x}{b}\mathrm{d}x$ với a,b là các số nguyên. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** −4. **C.** 4. **D.** 1.

✍ **Lời giải**

....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 5: Cho $F(x)=\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$, $\forall x\neq k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Tìm $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x$.

A. $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x=\cot x-\sin x+C$.

B. $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x=\cot x+\sin x+C$.

C. $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x=\cos x\cot x-\sin x+C$.

D. $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x=\cos x\cot x+\sin x+C$.

✍ **Lời giải**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho 2 hàm số $u=u(x)$ và $v=v(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng K. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$.

B. $\int u(x)v'(x)dx=u'(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$.

C. $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u(x)v(x)dx$.

D. $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v'(x)-\int u'(x)v(x)dx$.

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^x$ là

A. $(x-1)e^x$. **B.** $(x+1)e^x$. **C.** $(x-1)e^x+C$. **D.** $(x+1)e^x+C$.

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x.e^x$

A. $\frac{1}{5}x^5+(x-1)e^x+C$. **B.** $4x^3+(x+1)e^x+C$.

C. $\frac{1}{5}x^5+xe^x+C$. **D.** $\frac{1}{5}x^5+(x+1)e^x+C$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=xe^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x(x-1)+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x(x+1)+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=xe^x+C$.

Câu 5: Cho $\int x\cos 2x\mathrm{d}x=a\cos 2x+bx\sin 2x+C$ với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a+b$ bằng.

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** 0 **D.** 1

Câu 6: Biết $\int xe^{2x}\mathrm{d}x=axe^{2x}+be^{2x}+C$ $(a,b\in\mathbb{Q},C\in\mathbb{R})$. Tính tích $a.b$.

A. $ab=-\frac{1}{8}\cdot$ **B.** $ab=-\frac{1}{4}\cdot$ **C.** $ab=\frac{1}{8}\cdot$ **D.** $ab=\frac{1}{4}\cdot$

Câu 7: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $\int F(x)\mathrm{d}x=x^{2022}+C$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\int xf(x)\mathrm{d}x=xF(x)+x^{2022}+C.$ **B.** $\int xf(x)\mathrm{d}x=xF(x)-x^{2022}-C.$

C. $\int xf(x)\mathrm{d}x=xf(x)-x^{2022}-C.$ **D.** $\int xf(x)\mathrm{d}x=xf(x)+2022x^{2021}+C.$

Câu 8: Họ nguyên hàm $\int x\cos x\mathrm{d}x$ là

A. $-\cos x+x\sin x+C$. **B.** $-\cos x-x\sin x+C$.

C. $\cos x-x\sin x+C$. **D.** $\cos x+x\sin x+C$.

Câu 9: Để tính $I=\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ theo phương pháp nguyên hàm từng phần, ta đặt $u=x, dv=\cos xdx.$ Lúc đó, hãy chọn khẳng định đúng

A. $I=x\cos x+\int\sin xdx.$ **B.** $I=x\cos x-\int\sin xdx.$

C. $I = x\sin x - \int \sin xdx.$ **D.** $I = x\sin x + \int \sin xdx.$

Câu 10: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C,$ C là hằng số.

B. $4x^3 + \left(x-1\right)e^x + C,$ C là hằng số.

C. $\frac{1}{5}x^5 + \left(x+1\right)e^x + C,$ C là hằng số.

D. $\frac{1}{5}x^5 + \left(x-1\right)e^x + C,$ C là hằng số.

Câu 11: Mệnh đề nào dưới đây đúng:

A. $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x + \int e^x dx$. **B.** $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x + 5\int e^x dx$.

C. $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x - 5\int e^x dx$. **D.** $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x - \int e^x dx$.

Câu 12: Phát biểu nào sau đây là **đúng**

A. $\int e^x \sin x\mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \cos x\mathrm{d}x$. **B.** $\int e^x \sin x\mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\mathrm{d}x$.

C. $\int e^x \sin x\mathrm{d}x = e^x \cos x - \int e^x \cos x\mathrm{d}x$. **D.** $\int e^x \sin x\mathrm{d}x = -e^x \cos x - \int e^x \cos x\mathrm{d}x$.

Câu 13: Nguyên hàm $\int 2x.e^x\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\left(x-1\right)e^x + C$. **B.** $\left(2x+1\right)e^x + C$. **C.** $\left(2x-1\right)e^x + C$. **D.** $\left(2x-1\right)e^x + C$.

Câu 14: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = \left(5x+1\right)\mathrm{e}^x$ và $F\left(0\right) = 3$. Hãy tính $F\left(\ln 2\right)$.

A. $F\left(1\right) = 5\mathrm{e} - 3$. **B.** $F\left(\ln 2\right) = 10e - 1$. **C.** $F\left(\ln 2\right) = 10\ln 2 - 1$ **D.** $F\left(\ln 2\right) = 5\ln 2 - 1$.

Câu 15: Biết $\int_0^1 \left(2x+1\right)e^x\mathrm{d}x = a + be$. Tích ab bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 16: Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = \left(3x^2+1\right).\ln x$.

A. $\int f\left(x\right)dx = x\left(x^2+1\right)\ln x - \frac{x^3}{3} + C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx = x^3\ln x - \frac{x^3}{3} + C$.

C. $\int f\left(x\right)dx = x\left(x^2+1\right)\ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$. **D.** $\int f\left(x\right)dx = x^3\ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

Câu 17: Nguyên hàm của $\int xe^{3x-1}\mathrm{d}x$ là

A. $\frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$. **B.** $\frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{9}e^{3x-1} + C$.

C. $\frac{1}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{9}e^{3x-1} + C$. **D.** $\frac{1}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$.

Câu 18: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = \ln x$

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = x\ln x + C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = \ln x + C$.

C. $\int f(x)dx = x(\ln x - 1) + C$. **D.** $\int f(x)dx = e^x + C$.

Câu 19: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.2^x$

A. $\int f(x)dx = 2^x \ln x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 2^x(1 + x.\ln 2) + C$.

C. $\int f(x)dx = \left(x - \frac{1}{\ln 2}\right).\frac{2^x}{\ln 2} + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln^2 2} + C$.

Câu 20: Tính $I = \int (x+1).\ln x\, dx$. Bằng cách dùng nguyên hàm từng phần, ta sẽ đặt

A. $\begin{cases} x+1 = u \\ \ln x dx = dv \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} (x+1)\ln x = u \\ dx = dv \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} \ln x dx = u \\ x+1 = dv \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} \ln x = u \\ (x+1)dx = dv \end{cases}$.

Câu 21: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\ln(x+1)$ là

A. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + C$. **B.** $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + C$.

C. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + C$. **D.** $(x^2-1)\ln(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + C$.

Câu 22: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ là

A. $x\ln x + C$. **B.** $\ln x + C$. **C.** $x\ln x - x + C$. **D.** $\ln x - x + C$.

Câu 23: Cho $F(x) = x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).2022^x$. Khi đó $\int f'(x).2022^x dx$ bằng

A. $\sin x + x\cos x - x\sin x.\ln 2022 + C$. **B.** $\sin x - x\cos x - x\sin x.\ln 2022 + C$.

C. $x\cos x + \sin x - x\sin x.\ln 2022 + C$. **D.** $\cos x - x\sin x.\ln 2022 + C$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $\int_0^2 [f(x) - 2]dx$.

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 25: Cho $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x.\cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{4}$. Hàm số $f(x)$ là

A. $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$. **B.** $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$.

C. $-\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$. **D.** $-\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$.

Câu 26: Cho nguyên hàm của $\int x^2 \ln x dx = ax^3 \ln x - bx^3 + C$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính giá trị $T = a + b$

A. $T = \frac{4}{9}$. **B.** $T = \frac{5}{9}$. **C.** $T = \frac{2}{9}$. **D.** $T = \frac{1}{3}$.

Câu 27: Họ các nguyên hàm của hàm số $y = xe^x$ là?

A. $x^2e^x + C$. **B.** $(x-1)e^x + C$. **C.** $(x+1)e^x + C$. **D.** $xe^x + C$.

Câu 28: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sin x$. Biết $F(0) = 1$, giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** $1 + \frac{\pi}{2}$. **D.** -1.

Câu 29: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x+1)$.

B. $\int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x+1)+C$.

C. $\int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x-1)+C$.

D. $\int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x-1)$.

Câu 30: Chọn khẳng định sai.

A. $\int x^2\ln(x-2)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{2-x}\mathrm{d}x, \forall x\in(2;+\infty)$.

B. $\int x^2\ln(x-2)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x-2)-\frac{1}{3}\int\frac{x^2}{x-2}\mathrm{d}x, \forall x\in(2;+\infty)$.

C. $\int x^2\ln(x-2)\mathrm{d}x = \frac{x^3-8}{3}\ln(x-2)-\int\frac{x^2+2x+4}{3}\mathrm{d}x, \forall x\in(2;+\infty)$.

D. $\int x^2\ln(x-2)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x-2)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x-2}\mathrm{d}x, \forall x\in(2;+\infty)$.

Câu 31: Cho $F(x)=-x.e^x$ là một nguyên hàm của $f(x).e^{2x}$. Tìm họ nguyên hàm của $f'(x).e^{2x}$

A. $(x-2)e^x+C$. **B.** $2(1-x)e^x+C$. **C.** $(x-1)e^x+C$. **D.** $\frac{1-x}{2}e^x+C$.

Câu 32: Tính $\int x\ln^2 x\mathrm{d}x$. Chọn kết quả đúng?

A. $\frac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x+2\ln x+1\right)+C$.

B. $\frac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x-2\ln x+1\right)+C$.

C. $\frac{1}{2}x^2\left(2\ln^2 x-2\ln x+1\right)+C$.

D. $\frac{1}{2}x^2\left(2\ln^2 x+2\ln x+1\right)+C$.

Câu 33: Cho $F(x)=x^2$ là nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Tìm nguyên hàm I của hàm số $f'(x).e^{2x}$

A. $I=-x^2-2x+C$.

B. $I=-2x^2+2x+C$.

C. $I=-x^2+x+C$.

D. $I=-2x^2+C$.

Câu 34: Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x.$

B. $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x.$

C. $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos x-\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x.$

D. $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\cos x-\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x.$

Câu 35: Biết $\int(x+3)e^{-2x}dx=-\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n)+C$ với $m,n\in\mathbb{Q}$. Khi đó, tổng m^2+n^2 có giá trị bằng

A. 10. **B.** 65. **C.** 41. **D.** 5.

Câu 36: Biết $F(x)=\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f'(x).\left(x^3+1\right)\mathrm{d}x = 4x+\frac{2}{x^2}+C$.

B. $\int f'(x).\left(x^3+1\right)\mathrm{d}x = 4x-\frac{2}{x^2}+C$.

C. $\int f'(x).\left(x^3+1\right)\mathrm{d}x = -4x-\frac{2}{x^2}+C$.

D. $\int f'(x).\left(x^3+1\right)\mathrm{d}x = x+\frac{2}{x^2}+C$.

Câu 37: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{\ln(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Hệ số tự do của $F(x)$ thuộc khoảng

A. $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}$, $f\left(0\right)=0$ và $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(ax+b\right)\mathrm{e}^{x}+c$ với a,b,c là các hằng số. Khi đó:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a+b=0$.

Dạng 1: Tính, rút gọn, so sánh các số liên quan đến lũy thừa

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=e; f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $10<f\left(5\right)<11$. **B.** $3<f\left(5\right)<4$. **C.** $11<f\left(5\right)<12$. **D.** $4<f\left(5\right)<5$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 2: Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và luôn nhận giá trị dương, đồng thời thỏa mãn $f\left(x\right).f'\left(x\right)-f^2\left(x\right)=2e^{6x}$ với mọi x. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(1\right)=a.e^b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 3: Cho hàm số $f(x) \neq 0$; $f'(x) = (2x+1).f^2(x)$ và $f(1) = -0,5$. Tính tổng $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2017) = \dfrac{a}{b}$; $(a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{N})$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng

A. $\dfrac{a}{b} < -1$. **B.** $b - a = 4035$. **C.** $a \in (-2017; 2017)$. **D.** $a + b = -1$.

✍ Lời giải

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$

A. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$ **B.** $\dfrac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$ **C.** $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$ **D.** $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$

✍ Lời giải

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)<0$, $\forall x>0$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\left(2x+3\right)f^2\left(x\right)$, $\forall x>0$ và $f\left(1\right)=-\frac{1}{6}$. Giá trị của biểu thức $f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2023\right)$ bằng

A. $-\frac{2021}{4046}$ **B.** $-\frac{2022}{2023}$ **C.** $-\frac{2023}{4050}$ **D.** $-\frac{2021}{2023}$

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-2;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)+2\left(x+2\right)f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ và $f\left(2\right)=\frac{1}{4}\ln 4$. Giá trị của $f\left(7\right)$ bằng

A. $f\left(7\right)=\frac{1}{2}\ln 3+3$. **B.** $f\left(7\right)=\frac{1}{3}\ln 3+\frac{1}{2}$. **C.** $f\left(7\right)=\frac{1}{3}\ln 3+1$. **D.** $f\left(7\right)=\frac{1}{3}\ln 3$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $\left(x+2\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-x^3,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(1\right)=e$. Giá trị của $f\left(2\right)$ là

A. $4e^2+4e-2$. **B.** $4e^2+4e-4$. **C.** $4e^2+2e-2$. **D.** $4e^2+2e-4$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn $f\left(x\right).f'\left(x\right)-\left[f\left(x\right)\right]^2=2e^{6x},\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(1\right)=a.e^b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 5: Cho hàm số thỏa mãn $f\left(1\right)=\frac{1}{2}$ và $f'\left(x\right)-\frac{f\left(x\right)}{x^2+x}=\frac{x}{x+1}$, $\forall x\left(0;+\infty\right)$. Giá trị của $f\left(2\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;2\right)$.. **B.** $\left(2;3\right)$.. **C.** $\left(3;4\right)$.. **D.** $\left(0;1\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f\left(x\right)\ln f\left(x\right)=x\left(2f\left(x\right)-f'\left(x\right)\right)$, $\forall x\in\left(0;+\infty\right)$. Biết $f\left(1\right)=f\left(4\right)$, giá trị $f\left(2\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(54;56\right)$. **B.** $\left(74;76\right)$. **C.** $\left(10;12\right)$. **D.** $\left(3;5\right)$.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$; $f\left(2\right)=-\frac{1}{25}$ và $f'\left(x\right)=4x^3\left[f\left(x\right)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(1\right)-f\left(0\right)$ bằng

A. $\frac{1}{90}$. **B.** $-\frac{1}{90}$. **C.** $-\frac{1}{72}$. **D.** $\frac{1}{72}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và khác không với mọi x thỏa mãn $f\left(0\right)=-1$ và $f'\left(x\right)=e^x.f^2\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(-1\right)$ bằng

A. -1. **B.** $-e$. **C.** e. **D.** $-\dfrac{1}{e}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ là

A. $xe^{x}+x+C$. **B.** $(x+1)e^{x}+C$. **C.** $xe^{-x}+x+C$. **D.** $(x-1)e^{x}+C$.

Câu 10: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=e$, $f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $11<f(5)<12$. **C.** $10<f(5)<11$. **D.** $4<f(5)<5$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ thỏa mãn $x.(x+2).f'(x)+2f(x)=x^2+2x$ và $f(1)=-6\ln 3$. Biết $f(3)=a+b.\ln 5\ (a,b\in\mathbb{R})$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $f'(x)-(2x+3)f^2(x)=0$ và $f(x)<0$ với mọi $x>0$ và $f(1)=-\dfrac{1}{6}$. Giá trị của biểu thức: $T=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2022)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thoả mãn $f(x)>-1$ và $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1},\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0)=0$, khi đó $f(2)$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $\left(x^2+1\right)^2 f'(x)=[f(x)]^2\left(x^2-1\right)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Tính giá trị $f(3)$.

A. $\dfrac{8}{3}$ **B.** 4 **C.** $\dfrac{10}{3}$ **D.** 5

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x>\dfrac{1}{2}$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ thỏa mãn $f'(x)+8x.f^2(x)=0,\forall x>\dfrac{1}{2}$ và $f(1)=\dfrac{1}{3}$. Tính tổng: $f(1)+f(2)+...+f(1011)$.

A. $\dfrac{1}{2}.\dfrac{2022}{2023}$. **B.** $\dfrac{2021}{2043}$. **C.** $\dfrac{2022}{4045}$. **D.** $\dfrac{1}{2}.\dfrac{2021}{2022}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=x^3-2x,\ \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính $f^2(1)$.

A. $f^2(1)=\dfrac{43}{15}$. **B.** $f^2(1)=\dfrac{26}{15}$. **C.** $f^2(1)=\dfrac{47}{30}$. **D.** $f^2(1)=\dfrac{73}{30}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+(2x+1)f(x)=\frac{1}{x}-1$ và $f(1)=1$. Biết $f(2)=a+b\ln 2$. Khi đó $a+b$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=\ln x.f^2(x),\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(e)=2$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=1$.

A. $y=-\frac{2}{3}x+2.$ **B.** $y=-\frac{2}{3}.$ **C.** $y=\frac{2}{3}x+1.$ **D.** $y=\frac{2}{3}.$

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)>0$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=e^3$. Biết $f'(x)=(2x-3)f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi phương trình $f(x)=e^{2x^4-3x+4}$ có bao nhiêu nghiệm

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+\frac{1}{2}f'(x)=\frac{1}{e^{2x}}$, biết $f(0)=1$. Tìm hàm số $f(x)$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2021.f(x)=2021.x^{2020}.e^{2021x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2021$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2021.e^{2021}$. **B.** $f(1)=2022.e^{2021}$. **C.** $f(1)=2021.e^{-2021}$. **D.** $f(1)=2020.e^{2021}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=1$. Tính $f(4)$?

A. $\frac{33}{2}$. **B.** $\frac{65}{2}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** $\frac{65}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=x.f'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 15. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 5.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x)=x\ln x.f'(x)+2\left[xf(x)\right]^2,\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(e)=\frac{1}{e^2}$. Tính $f(2)$

A. $\frac{\ln 2}{4}$. **B.** $\frac{\ln 2}{2}$. **C.** $-\frac{\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{\ln 2}{8}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2021)+f(2022)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=3035$. **D.** $b-a=3035$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** 10.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ dương và liên tục trên $(0;+\infty)$, có $f(0) = \sqrt{3}$ và thỏa mãn $f^2(x) + (x+1)f'(x)f(x) = (x+1)\sqrt{f^2(x)+1} - 1$. Khi đó giá trị của $f(0) + f(2)$ bằng

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $3+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

A. $T = \frac{21}{16}$. **B.** $T = \frac{3}{2}$. **C.** $T = \frac{-3}{16}$. **D.** $T = 0$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $x^2 f'(x) - xf(x) = 2x^4 - 2$, với mọi $x \in (0;+\infty)$ và $f(1) = 3$. Tính $f(2)$.

A. $\frac{19}{2}$. **B.** $-\frac{21}{2}$. **C.** $-\frac{23}{2}$. **D.** $\frac{21}{2}$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên khoảng $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{f^3(x) + f(x)}$, $f(0) = 1$ và $\int f^2(x)dx = \frac{1}{6}\left(\sqrt{4x+a}\right)^3 + bx + c$. Tính $a + b$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng

A. 28.. **B.** 22.. **C.** $\frac{19}{2}$.. **D.** 10.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ dương và liên tục trên $(0;+\infty)$, có $f(0) = \sqrt{3}$ và thỏa mãn $f^2(x) + (x+1)f'(x)f(x) = (x+1)\sqrt{f^2(x)+1} - 1$. Khi đó giá trị của $f(0) + f(2)$ bằng

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $3+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai dương trên $(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn $\left[f''(x)\right]^2 - 2\sqrt{x}\left[f''(x) + 1\right] - 1 = 0$ với mọi $x \in (0;+\infty)$. Biết $f'(1) = \frac{7}{3}$ và $f(1) = \frac{31}{30}$. Tính $f(4)$.

A. $\frac{376}{15}$. **B.** $\frac{202}{3}$. **C.** $\frac{221}{15}$. **D.** $\frac{179}{3}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$\left(f'(x)\right)^2 = f(x).\mathrm{e}^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(9;10)$. **C.** $(11;12)$. **D.** $(13;14)$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=3x+12,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(2)=12$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. -9. **B.** 4. **C.** -7. **D.** 26.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\left(x^2+1\right).f'(x)+2x.f(x)-x^2-2x-1=0$ và $f(1)=\frac{43}{24}$. Khi đó $f(2)$ bằng

A. $\frac{119}{60}$. **B.** $\frac{26}{15}$. **C.** $-\frac{119}{60}$. **D.** $\frac{119}{36}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2022$, khi đó $F(1)$ bằng?

A. $\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}+\frac{4035}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}+\frac{4037}{2}$. **C.** $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+\frac{4037}{2}$. **D.** $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+2020$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(-1)=\frac{1}{4}$. Khi đó $F(1)$ bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)-f(x)=(x+1)e^{3x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=\frac{5}{4}$, giá trị $f(1)$ bằng

A. $\frac{5}{4}e^3+e$. **B.** $\frac{3}{4}e^3+e$. **C.** $\frac{3}{4}e^3-e$. **D.** $\frac{5}{4}e^3-e$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x>\frac{1}{2}$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ thỏa mãn $f'(x)+8xf^2(x)=0,\forall x>\frac{1}{2}$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Tính $f(1)+f(2)+...+f(1011)$.

A. $\frac{1}{2}.\frac{2022}{2023}$. **B.** $\frac{2021}{2043}$. **C.** $\frac{2022}{4045}$. **D.** $\frac{1}{2}.\frac{2021}{2022}$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(1;3)$, thỏa man $f(2)=\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}$

và $e^x f^3(x)+e^{-x}=3\sqrt{f(x)}.f'(x),\forall x\in(1;3)$. Khi đó $f\left(\frac{3}{2}\right)$ thuộc khoảng

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$. **B.** $-\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $-\frac{4}{9}$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ (a, $b\in\mathbb{Q}$). Giá trị $2\left(a^2+b^2\right)$ là

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{-3}{16}$. **B.** $T=\frac{21}{16}$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2=(x+1)f(x)$. Tính $f(8)$

A. $f(8)=49$. **B.** $f(8)=\frac{49}{64}$. **C.** $f(8)=256$. **D.** $f(8)=\frac{1}{16}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $f(0)=-\frac{5}{4}$ và $f'(x)=x^4f^2(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{5}{36}$. **D.** -1.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp hai trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ và $f''(x)+[f'(x)]^2+x^2=1+2xf'(x)$. Tính $f(2)$.

A. $1+\ln 3$. **B.** $2+\ln 3$. **C.** $2-\ln 3$. **D.** $1-\ln 3$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right),\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(40;42)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(32;34)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x) = x\left(f(x) - f'(x)\right), \forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(1) = f(4)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(8;10)$. **C.** $(6;8)$. **D.** $(13;15)$.

CHƯƠNG 5 NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ 11 TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ CƠ BẢN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- **Định nghĩa**: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Chú ý: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du = \int\limits_a^b f(y)dy = ...$

2. Tính chất

⊕ $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

⊕ $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

⊕ $\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx \; (a < b < c)$

⊕ $\int\limits_a^b k.f(x)dx = k.\int\limits_a^b f(x)dx \; (k \in \mathbb{R})$

⊕ $\int\limits_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u = u(x)$	Thường gặp
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	Vi phân $\frac{1}{a}d(ax+b) = dx$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C \; (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C \; (u(x) \neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + C \; (a \neq 0)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p.\ln a}a^{px+q} + C \ (0 < a \neq 1)$

4. Phương pháp đổi biến số

- **Dạng 1:** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có :

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.}$$

- **Dạng 2:** Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha;\beta]$ Khi đó:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

$\oplus$ $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a|\sin t;\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\oplus$ $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t};\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \backslash \{0\}$

$\oplus$ $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a|\tan t;\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$\oplus$ $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a.\cos 2t$

5. Phương pháp từng phần

- Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì :

$$\boxed{\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu}$$

- **Các dạng cơ bản:** Giả sử cần tính $I = \int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\sin kx$ hoặc $\cos kx$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là e^{kx}	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\ln(ax+b)$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\frac{1}{\sin^2 x}$
Cách đặt	$u = P(x)$ dv là phần còn lại	$u = P(x)$ dv là phần còn lại	$u = \ln(ax+b)$ $dv = P(x)dx$	$u = P(x)$ dv là phần còn lại

Dạng 7: Tích phân của hàm số cơ bản

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_2^1 g(x)dx = 1$ thì $\int_1^2 [f(x)+2g(x)]dx$ bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 2: Cho $\int_{-2}^5 f(x)dx = 8$ và $\int_{-2}^5 g(x)dx = -3$. Tính $\int_{-2}^5 [f(x)-4g(x)-1]dx$

A. $I=-11$. **B.** $I=13$. **C.** $I=27$. **D.** $I=3$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 3: Cho $\int_0^3 [f(x)-2x]dx = 1$. Khi đó $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 1. **D.** 10

Lời giải

....

....

....

....

Câu 4: Biết $\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)dx = a+\ln b$ với a, $b\in\mathbb{R}$, $b>0$. Tính $S=b^2-a$.

A. 1. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 7.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ và các số thực a,b thỏa mãn điều kiện $\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^3\left[af\left(x\right)+b+1\right]\mathrm{d}x=10$. Tính $a+b$.

A. $a+b=4$. **B.** $a+b=8$. **C.** $a+b=12$. **D.** $a+b=0$.

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nếu $\int\limits_5^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_2^5 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -6. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(-1)=3$, $f(2)=-1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-1}^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** −2. **C.** −4. **D.** 2.

Câu 3: Cho $\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x = 1, \int\limits_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t = -4$. Tính $I = \int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=-5$.

Câu 4: Cho hàm số $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -3. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 5: Nếu $\int\limits_0^1 \left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 6: Nếu $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -3, \int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = -7$ thì $\int\limits_3^5 \left[2+f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** -4. **D.** 0.

Câu 7: Nếu $\int\limits_0^1 \left[3f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 8: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 3$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+3\sin x\right]dx$.

A. $I=5+\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=3$. **D.** $I=6$.

Câu 9: Nếu $\int\limits_0^2 \left(2x-3f(x)\right)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Câu 10: Cho $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 10$, $\int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 5$. Giá trị của $\int\limits_0^3 \left[2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. −5. **B.** 15. **C.** 5. **D.** −20.

Câu 11: Biết $F(x)=x^4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-1}^{2}(6x+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{78}{5}$. **B.** 24. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** 33.

Câu 12: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[3f(x)-2\sin x\right]\mathrm{d}x$.

A. $P=13$. **B.** $P=17$. **C.** $P=7$. **D.** $P=3$.

Câu 13: Nếu $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int_0^{\pi}\left[f(x)+\sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 10. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 5.

Câu 14: Tích phân $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^3+\frac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$. **D.** e^3-1.

Câu 15: Tích phân $\int_1^2 (x+3)^2\,dx$ bằng

A. 61. **B.** $\frac{61}{3}$. **C.** $\frac{61}{9}$. **D.** 4.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ và $f'(x)=\frac{2}{\sin^2 x}+1$, $\forall x\in(0;\pi)$. Khi đó $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\ln 2+\frac{\pi^2}{32}+\pi$. **B.** $\ln 2-\frac{\pi^2}{32}+\pi$. **C.** $-\ln 2+\frac{\pi^2}{32}-\pi$. **D.** $\ln 2+\frac{\pi^2}{32}-\pi$.

Câu 17: . Nếu $\int_0^{\ln 3}\left[f(x)+e^x\right]dx=6$ thì $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx$ bằng

A. $6+\ln 3$. **B.** $6-\ln 3$. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 18: Nếu $\int_0^3\left[4f(x)-3x^2\right]dx=5$ thì $\int_0^3 f(x)dx$ bằng :

A. 18. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 20.

Câu 19: Tích phân $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

A. $\log\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{15}$. **C.** $\frac{16}{225}$. **D.** $\ln\frac{5}{3}$.

Câu 20: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int_0^2\left[2f(t)+1\right]\mathrm{d}t$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\pi}\left[f(x)+\sin x\right]\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int\limits_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=6$.

Câu 22: Nếu $\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$ thì $\int\limits_{-2}^{1}\left[f\left(x\right)+3\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 14. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 23: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số $m>1$ để tích phân $\int\limits_1^{m}\left(2x-1\right)dx=6$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 24: Cho hàm số $f\left(x\right)$. Biết $f\left(0\right)=4$ và $f'\left(x\right)=2-\cos 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$ **B.** $\dfrac{\pi^2-4}{16}$ **C.** $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$ **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$

Câu 25: Gọi a,b là các số nguyên sao cho $\int\limits_0^{2}\sqrt{e^{x+2}}\mathrm{d}x=2ae^2+be$. Giá trị của a^2+b^2 bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 26: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $\left(\pi;3\pi\right)$ sao cho $\int\limits_{\pi}^{b}4\cos 2x\mathrm{d}x=1$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 27: Biết $\int\limits_0^{1}\left[f\left(x\right)+2x\right]\mathrm{d}x=5$. Khi đó $\int\limits_0^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 28: Tích phân $\int\limits_1^{2}x^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{17}{4}$. **B.** $\dfrac{15}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

Câu 29: Cho biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4-\sin x\right)dx=a\pi+b$, với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 30: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx$.

A. $I=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $I=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $I=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31: Cho $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \cos x\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $c<0$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -77. **B.** 103. **C.** -17. **D.** 43.

Câu 32: Biết $\int_{1}^{13} \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \ln a$ với $a \in \mathbb{Q}$. Giá trị của a là

A. 5. **B.** 25. **C.** 1. **D.** 125.

Câu 33: Biết $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x = a - \frac{\pi}{b}\left(a,b \in \mathbb{Z}\right)$. Tính $S = a + b^2$.

A. $S=5$. **B.** $S=17$. **C.** $S=2$. **D.** $S=26$.

Câu 34: Biết $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{3}}{b}\left(a,b \in \mathbb{Z}\right)$. Tính $P = \frac{a-2b}{b}$

A. $P=\frac{4}{3}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C.** $P=-\frac{2}{3}$. **D.** $P=\frac{2}{3}$.

Câu 35: Cho $\int_{0}^{m} \left(3x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 36: Biết $\int_{1}^{2} \left(2x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = a + \ln b$. Giá trị của biểu thức $T = a - b$ là

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 37: Nếu $\int_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_{0}^{2} \left[2f\left(x\right) - 3x^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** -6. **C.** -5. **D.** -9.

Câu 38: Nếu $\int_{2}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_{2}^{3} g\left(x\right)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int_{2}^{3} \left[f\left(x\right) - g\left(x\right) - 2x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 1.

Câu 39: Cho $\int_{2}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_{3}^{2} g\left(x\right)\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int_{2}^{3} \left[\frac{f\left(x\right)}{2} + 3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** -13. **D.** -1.

Câu 40: Biết $F\left(x\right) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{3} \left[2 + f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 14. **B.** 12. **C.** $\frac{38}{3}$. **D.** 11.

Câu 41: Cho $\int_{0}^{\ln 2} \left(2f\left(x\right) + e^x\right)dx = 5$. Khi đó $\int_{0}^{\ln 2} f\left(x\right)dx$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 42: Cho $\int_1^2 f(x)dx=3$ và $\int_1^2[3f(x)-g(x)]dx=10$. Khi đó $\int_1^2 g(x)dx$ bằng:

A. 1. **B.** -4. **C.** 17. **D.** -1.

Câu 43: Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=-2$ thì giá trị của $I=\int_1^4\left[\frac{3}{2}f(x)+1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** -6 **C.** 0. **D.** 3.

Câu 44: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=4$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2f(x)+\sin x]\mathrm{d}x$ bằng

A. $8+\frac{\pi}{2}$. **B.** $4+\pi$. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$ thì $\int_1^2 f'(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 46: Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$ thì $\int_0^2\left[\frac{1}{2}f(x)-2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 8. **D.** -2.

Câu 47: Tính $I=\int_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $2+\ln\sqrt{3}$. **B.** $4+\ln 3$. **C.** $2+\ln 3$. **D.** $1+\ln\sqrt{3}$.

Câu 48: Nếu $\int_1^3 f(x)dx=3$ thì $\int_1^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]dx$ bằng

A. 5. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\cos x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi^2}{8}+1$, khi đó $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$ **C.** $\frac{\pi}{2}-1$ **D.** 1

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x$ với mọi $x>0$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{4}$ **B.** $\frac{7}{12}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 51: Biết $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\ln a$, giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1)=1$ và $f'(x)=4x^3+3x^2-1.\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $P=a,b$ là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là số tối giản. Tính $P=a-b$

A. 37. **B.** 39. **C.** 42. **D.** 47.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2-3}{32}$. **B.** $\frac{\pi^2-6}{18}$. **C.** $\frac{3\pi^2-6}{112}$. **D.** $\frac{\pi^2-4}{16}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $f(-1)=1$ và $f(1)=-1$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

A. $3\ln 2+\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\frac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $3\ln 2-\frac{7}{4}$.

Câu 55: Tích phân $I=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}dx$ bằng

A. $3\sqrt{3}-1$. **B.** $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$. **C.** $2\sqrt{3}+\frac{2}{3}$. **D.** $3\sqrt{3}+1$.

Câu 56: Tích phân $I=\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}dx$ bằng

A. $\frac{8}{3}\left(4-3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$. **B.** $\frac{4}{3}\left(4-3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$. **C.** $\frac{8}{3}\left(4+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$. **D.** $\frac{4}{3}\left(4+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2e^{2x}+4x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 3x^2+2x+3 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(-1)=1$. Biết rằng $2F(2)-F(-3)=ae^4+b$ (trong đó a,b là các số hữu tỉ). Khi đó $a+b$ bằng

A. 18 **B.** 51. **C.** 50. **D.** 17.

Câu 58: Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{a}-\frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=50$. **B.** $T=59$. **C.** $T=16$. **D.** $T=69$.

Câu 59: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(\sin x+2\cos x\right)^2}$ với mọi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f\left(0\right)=0$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3\pi+2\ln 2}{10}$. **B.** $\dfrac{\pi-\ln 2}{5}$. **C.** $\dfrac{-\pi+\ln 2}{5}$. **D.** $\dfrac{\pi+4\ln 2}{20}$.

Câu 60: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left(0;+\infty\right)$. Biết x^2 là một nguyên hàm của $x^2f'\left(x\right)$ trên $\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(1\right)=1$. Tính $f\left(e\right)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $2e+1$. **D.** e.

Dạng 8: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$ bằng

A. $e-1$. **B.** $e+1$. **C.** $1-e$. **D.** e.

Lời giải

....

....

....

Câu 2: Cho $\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$, giá trị của $\int_0^1 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

....

....

....

Câu 3: Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u = x^2-1$ mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **B.** $I = \int\limits_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **C.** $I = 2\int\limits_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **D.** $I = \int\limits_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 4: Cho $I = \int\limits_0^1 x\left(x^2+1\right)^3\mathrm{d}x$. Nếu đặt $u = x^2+1$ thì I bằng

A. $\int\limits_0^1 u^3\mathrm{d}u$. **B.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^3\mathrm{d}u$. **C.** $\frac{1}{2}\int\limits_1^2 u^3\mathrm{d}u$. **D.** $\int\limits_1^2 u^3\mathrm{d}u$.

Lời giải

....

....

....

Câu 5: Tích phân $\int\limits_0^1 e^{2x}.\mathrm{d}x$ bằng

A. $e^2+\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{e^2-1}{2}$. **C.** $\dfrac{e^3-1}{2}$. **D.** e^2-1.

✍ Lời giải

....

....

....

....

Câu 6: Tích phân $\int\limits_0^2 4048(2x-1)^{2023}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2.3^{2024}-2$ **B.** $3^{2024}-1$ **C.** $3^{2024}+1$ **D.** $2.3^{2024}+2$

✍ Lời giải

....

....

....

....

Câu 7: Giá trị $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{n-1}$. **B.** $\dfrac{1}{2n}$. **C.** $-\dfrac{1}{n+1}$. **D.** $\dfrac{1}{n+1}$.

✍ Lời giải

....

....

....

....

Câu 8: Thực hiện phép biến đổi $t=\sqrt[3]{3x+1}$ thì tích phân $\int\limits_0^{\frac{7}{3}}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 g(t).\mathrm{d}t$. Khi đó:

A. $g(3)=31$. **B.** $g(3)=29$. **C.** $g(3)=33$. **D.** $g(3)=25$.

✍ Lời giải

....

....

....

....

Câu 9: Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2}dx = \frac{a}{2}\left(e^b - e^c\right)$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $a-b+c$ bằng

A. 6. **B.** 0. **C.** 7. **D.** 4.

✍ Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_0^2 f\left(x\right)dx = 4$ thì $\int_0^1 f\left(2x\right)dx$ bằng.

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 8.

✍ Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^3 f(2x-1)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** 1 **D.** 6 .

Câu 2: Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị tích phân $I = \int_2^5 f(3x-6)\mathrm{d}x$ là

A. $I = 9$. **B.** $I = 27$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 3$.

Câu 3: Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$, tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3\cos x f(\sin x) - 2\right]\mathrm{d}x$

A. $I = 9 - \pi$. **B.** $I = 3 - 2\pi$. **C.** $I = 9 - 2\pi$. **D.** $I = 3 + 2\pi$.

Câu 4: Cho $I = \int_0^2 \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx.$ Đặt $u = \sqrt{x^2+5},$ mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $I = \int_{\sqrt{5}}^3 \dfrac{2du}{u}.$ **B.** $I = \int_{\sqrt{5}}^3 2udu.$ **C.** $I = \int_{\sqrt{5}}^3 2du.$ **D.** $I = \int_0^2 2du.$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(3) = 4$ và $\int_0^1 f'(2x+1)\mathrm{d}x = 6$ Tính giá trị của $f(1)$.

A. $f(1) = -8$. **B.** $f(1) = -2$. **C.** $f(1) = 16$. **D.** $f(1) = 10$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^1 f(2x)dx$ bằng.

A. 2 . **B.** 4 . **C.** -2 . **D.** 8 .

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = \dfrac{3}{2}$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Cho $\int_5^{12} \dfrac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $c = a - b.$ **B.** $b = 2c..$ **C.** $a = b - c$. **D.** $b = c - a..$

Câu 9: Xét $I=\int_0^1 2x\left(x^2+2\right)^{2022}dx$, nếu đặt $u=x^2+2$ thì I bằng

A. $\int_2^3 u^{2022}du$. **B.** $\int_0^1 u^{2022}du$. **C.** $2\int_2^3 u^{2022}du$. **D.** $\frac{1}{2}\int_2^3 u^{2022}du$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_3^7 f(x)dx=10$. Tính $I=\int_0^2 xf\left(x^2+3\right)dx$.

A. $I=20$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=10$. **D.** $I=5$.

Câu 11: Cho $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=3$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=6$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(2;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$ và $f\left(e^2\right)=0$. Tính $f\left(e^4\right)$.

A. $f\left(e^4\right)=\ln 2$. **B.** $f\left(e^4\right)=3\ln 2$. **C.** $f\left(e^4\right)=2$. **D.** $f\left(e^4\right)=-\ln 2$.

Câu 13: Cho tích phân $I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$. Đổi biến $t=\sqrt{1+\ln x}$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $I=2\int_1^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{d}t$. **B.** $I=2\int_1^{\sqrt{2}} t\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int_1^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{d}t$. **D.** $I=2\int_1^{2} t^2\mathrm{d}t$.

Câu 14: Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **B.** $I=2\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **C.** $I=\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **D.** $I=\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(3)$ bằng

A. $\ln 10-2$. **B.** 10. **C.** $\ln 10+2$. **D.** $\frac{1}{2}\ln 10+1$.

Câu 16: Có bao nhiêu số thực a thoả mãn $\int_0^1 \frac{x}{x^2+a}dx=\frac{1}{2}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17: Cho $\int_0^1 f(x)dx=6$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(2\sin x)\cos x dx$.

A. 3. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -6.

Câu 18: Cho tích phân $I=\int\limits_0^{2021}(1+x)^{12}\,dx$. Đặt $u=x+1$ ta được

A. $I=\int\limits_0^{2021}u^{12}du$.   **B.** $I=\int\limits_1^{2022}u^{12}du$.

C. $I=\int\limits_1^{2022}(u-1)^{12}\,du$.   **D.** $I=\int\limits_0^{2021}(u-1)^{12}\,du$.

Câu 19: Cho $\int\limits_{-3}^{7}f(x)dx=12$. Tích phân $\int\limits_0^5 f(2x-3)dx$ bằng

A. 6.   **B.** 21.   **C.** 12.   **D.** 24.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{-4}^{2}f(x)dx=2$. Tính $I=\int\limits_0^2 f(2-3x)dx$.

A. $\frac{2}{3}$.   **B.** $-\frac{2}{3}$.   **C.** $\frac{1}{3}$.   **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^{11}f(x)dx=45$. Giá trị của $\int\limits_0^2 f(5x+1)dx$ bằng

A. 9.   **B.** 10.   **C.** 90.   **D.** 91.

Câu 22: Tính tích phân $\int\limits_0^1 x(x^2+3)dx$ bằng cách đặt ẩn phụ $t=x^2+3$ thì tích phân trở thành:

A. $\int\limits_0^1\frac{t}{2}dt$.   **B.** $\int\limits_3^4\frac{t}{2}dt$.   **C.** $\int\limits_3^4 tdt$ **D.** $-\int\limits_0^1 tdt$

Câu 23: Cho a la số thực dương, a là hằng số. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^a\sqrt{4x+1}\,dx$ bằng

A. $I=\frac{(4a+1)\sqrt{4a+1}-1}{3}$.   **B.** $I=\frac{(4a+1)\sqrt{4a+1}-1}{6}$.

C. $I=\frac{(4a+1)-1}{3}$.   **D.** $I=\frac{2(4a+1)\sqrt{4a+1}-2}{3}$.

Câu 24: Cho $A=\int\limits_1^3(x-1)(x^2-2x)^4\,dx=\frac{a}{b};\ (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị $a-b^2$ bằng

A. 122.   **B.** 117.   **C.** 97.   **D.** 127.

Câu 25: $\int\limits_1^2 x(x-1)^{2021}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}$.   **B.** $\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}$.   **C.** $\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}$.   **D.** $\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=1$ và đạo hàm $f'(x)=x(x^2+1)^5$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó, $f(1)$ bằng.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{36}{5}$. **C.** $\frac{21}{10}$. **D.** $\frac{26}{5}$.

Câu 27: Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log\frac{7}{3}$. **B.** $\ln\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{7}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$.

Câu 28: Biết $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$

A. $S=73$. **B.** $S=71$. **C.** $S=65$. **D.** $S=68$.

Câu 29: Khi tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$ ta được tích phân nào bên dưới

A. $I=\frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{u}.\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int_1^2 \sqrt{u}.\mathrm{d}u$. **C.** $I=\int_0^3 \sqrt{u}.\mathrm{d}u$. **D.** $I=2\int_0^3 \sqrt{u}.\mathrm{d}u$.

Câu 30: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $t=\cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^1 t^7\mathrm{d}t$. **B.** $I=-\int_0^1 t^7\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^7\mathrm{d}t$. **D.** $I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^7\mathrm{d}t$.

Câu 31: Tính tích phân $I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}\mathrm{d}x$ bằng cách đổi biến số, đặt $\sqrt{\ln x+1}=u$ thì I bằng

A. $\int_1^{\mathrm{e}} u\,\mathrm{d}u$. **B.** $2\int_1^{\mathrm{e}} u\,\mathrm{d}u$. **C.** $\int_1^{\sqrt{2}} u\,\mathrm{d}u$. **D.** $2\int_1^{\sqrt{2}} u^2\,\mathrm{d}u$.

Câu 32: Biết $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=37$ và $\int_0^4 \left[2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=26$. Khi đó $\int_0^2 g(2x)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. -8. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 32.

Câu 33: Cho tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^7}{\left(1+x^2\right)^5}\mathrm{d}x$, đặt $t=1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\frac{3}{2}\int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$.

Câu 34: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{e^x}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{e^{3x}}{x}\mathrm{d}x$ bằng giá trị nào sau đây?

A. $\frac{F(6)-F(3)}{3}$. **B.** $F(6)-F(3)$.

C. $3\left[F(2)-F(1)\right]$. **D.** $3\left[F(6)-F(3)\right]$.

Câu 35: Cho tích phân $I=\int\limits_{-4}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{5-x}}=a-b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $E=a.b$ bằng

A. $E=6$ **B.** $E=28$. **C.** $E=8$. **D.** $E=30$.

Câu 36: Biết $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=40$. **B.** $S=10$. **C.** $S=4$. **D.** $S=9$.

Câu 37: Biết $\int\limits_{1}^{2022}\frac{\log_{2022}x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln 2022}{a}$. Tìm a.

A. $a=3$. **B.** $a=2022$. **C.** $a=2$. **D.** $a=1$.

Câu 38: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{-1}^{5}\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=16$ và $\int\limits_{-1}^{5}\left[f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{2}f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 39: Biết $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x=a\sqrt{2}+b$ với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $\frac{b}{a}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 40: Biết tích phân $\int\limits_{0}^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. $T=-1$. **B.** $T=1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân

$$I=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x\cdot f\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x+2\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^{2x}\cdot f\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x.$$

A. 79. **B.** 78. **C.** 77. **D.** 76.

Câu 42: Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_{0}^{1}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{0}^{1}\left[f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=11$. Giá trị của biểu thức $\int\limits_{2021}^{2022}f(2022-x)\mathrm{d}x+5\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}g(3x)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 10. **B.** $0\cdot$ **C.** $20\cdot$ **D.** $5\cdot$

Câu 43: Giá trị của tích phân $\int_0^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx = a\ln 3 - b\ln 2 + c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b+c$ bằng:

A. 6. **B.** 9. **C.** -3. **D.** 3

Câu 44: Biết $I=\int_2^4 \frac{2x+1}{x^2+x}dx = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $P=2a+3b+4c$.

A. $P=9$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 20$ và $\int_8^{10} f(x)dx = 6$. Tính $I=\int_0^4 f(2x)dx$

A. $I=7$. **B.** $I=14$. **C.** $I=3$. **D.** $I=12$.

Câu 46: Cho $\int_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}dx = \ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị $a+b+c+d$ bằng

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 47: Biết $\int_1^2 \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx = a+b\sqrt{3}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $P=3a-5b$.

A. 12. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 48: Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3}+b\ln 2 + c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 1.

Câu 49: Biết $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3} = 3\ln a - \ln b$ với a, b là hai số nguyên dương. Tích $P=ab$ bằng

A. $P=10$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=20$. **D.** $P=15$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int_0^{\ln 2} f(e^x+1)e^x dx = \frac{5}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(1+2\cos x)\sin x dx$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Câu 51: Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{(x+2)^{2017}}{x^{2019}}dx$.

A. $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{2018}$. **B.** $\frac{3^{2017}}{4037}-\frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{4036}$. **D.** $\frac{3^{2021}-2^{2021}}{4040}$.

Câu 52: Cho $\int_0^1 x(x-1)^{10}\,dx = \frac{1}{a(a+1)}$. Giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(11;13)$. **B.** $(9;11)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(10;12)$.

Câu 53: Cho $\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx = \frac{a\ln 2 + b\ln 3}{2}, (a,b\in\mathbb{Z})$. Giá trị của $S = 2a+3b$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 19. **D.** 1.

Câu 54: Cho $\int_0^1 x^3.\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{a\left(\sqrt{b}+1\right)}{c}, a,b,c\in\mathbb{Z}, \frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a+b+c$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Câu 55: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx = a\sqrt{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $T = ab$.

A. $T=1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=3$. **D.** $T=4$.

Câu 56: Biết $I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{a}(2\ln a - \ln b)$ với a,b là các số nguyên dương và a là số nguyên tố. Tính giá trị biểu thức $P = 2a-b$.

A. $P=4$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=1$.

Câu 57: Biết rằng $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos x - 2\sin x}{\sin x + 3\cos x}\,dx = \frac{a\pi}{2} + b\ln 2 - c\ln 3$, với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $P = abc$.

A. $P=\frac{3}{4}$. **B.** $P=\frac{3}{4}$. **C.** $P=0$. **D.** $P=\frac{2}{3}$.

Câu 58: Biết $\int_0^2 \frac{\left(x^2+1\right)e^x + xe^{2x} + 2x + 2}{xe^x + 2}\,dx = a + be^2 - \ln\left(ce^2+1\right)$ (với $a, b, c\in\mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 - c^2$.

A. . **B.** -11. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(x) = \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính $\int_3^4 f(x)\,dx$.

A. $3+2\ln^2 2$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $2\ln^2 2$. **D.** $\ln^2 2$.

Câu 60: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x+1)\,dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} f\left(\ln^2 x\right)dx = \frac{3}{2}$ và $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{a}{b}$ (trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính ab.

A. 18. **B.** -18. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 61: Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\ x$, $G\ x$ là hai nguyên hàm của $f\ x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\ 8\ +G\ 8\ =8$ và $F\ 0\ +G\ 0\ =-2$. Khi đó $\int\limits_{-2}^{0} f\ -4x\ \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{4}$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Câu 62: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=x+3$ .Tính $\int\limits_{1}^{5} f\left(x\right)dx$.

A. 192. **B.** $\frac{4}{57}$. **C.** $\frac{57}{4}$. **D.** 196.

Câu 63: Gọi a,b là các số hữu tỉ sao cho $\int\limits_{0}^{1} \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\pi$. Giá trị của tích ab bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{dx}$ bằng

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 65: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ đi qua điểm $A\left(1;0\right)$ và nhận điểm $I\left(2;2\right)$ làm tâm đối xứng. Giá trị của $\int\limits_{1}^{3} x\left(x-2\right)\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx$ bằng

A. $-\frac{8}{3}$. **B.** $-\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 66: Số thực dương m thỏa mãn $I=\int\limits_{m}^{4m} \frac{x^2-2m^2}{x^4+4m^4}dx=\frac{1}{4}$ có thể biểu diễn về dạng $a\ln 5 - b\ln 13$ (trong đó a,b là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $a+2021b$ là

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 67: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa: $f\left(x\right)=x^2-3x+2\int_0^1 f\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị thực dương của a để $\int_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}a$.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Dạng 9: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Phát biểu nào sau đây **đúng?**

A. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x\Big|_1^2 + \int_1^2 1dx$.

B. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 1dx$.

C. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x - \int_1^2 1dx$.

D. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x + \int_1^2 1dx$

Lời giải

....

....

....

....

Câu 2: Biết $I = \int_1^2 \left(3x^2 + 2x\right)\ln x\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ với $a,b \in \mathbb{Q}$. Tính $a + 6b$

A. $\frac{49}{6}$ **B.** $-\frac{49}{6}$ **C.** 11 **D.** -11

Lời giải

....

....

....

....

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int_0^1 \left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x = 10$ và $2f\left(1\right) - f\left(0\right) = 2$. Tính $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = -12$. **C.** $I = -8$. **D.** $I = 10$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 4: Biết $\int\limits_0^1 2x\ln\left(x+1\right)\mathrm{dx}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $a.b$.

A. $a.b=2$. **B.** $a.b=1$. **C.** $a.b=6$. **D.** $a.b=-2$.

✍ Lời giải

Câu 5: Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln\left(2x+1\right)dx=\dfrac{a}{b}\ln 3-c$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=64$. **B.** $T=68$. **C.** $T=60$. **D.** $T=70$.

✍ Lời giải

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tích phân $I=\int\limits_1^5 x.\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. Tìm mệnh đề đúng

A. $I=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}|_1^5-\frac{1}{2}\int\limits_1^5\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.
B. $I=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}|_1^5-\int\limits_1^5\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.
C. $I=x\mathrm{e}^{2x}|_1^5-\int\limits_1^5\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.
D. $I=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}|_1^5-\frac{1}{2}\int\limits_1^5\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

Câu 2: Cho hàm số $f\ \ x$ thỏa $2f\ \ 1\ -f\ \ 0\ =2$ và $\int\limits_0^1\ x+1\ \ f'\ \ x\ \ \mathrm{d}x=10$. Tính $\int\limits_0^1 f\ \ x\ \ \mathrm{d}x$

A. $I=-8$. **B.** $I=-12$. **C.** $I=8$. **D.** $I=1$.

Câu 3: Cho $\int\limits_0^1(x-1)e^{2x}dx=a+be^2$, với $a;b\in\mathbb{Q},a,b$ là các phân số tối giản. Tổng $a+b$ bằng

A. -3. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 4: Biết $\int\limits_0^2(3x-1)e^{\frac{x}{2}}dx=a+be$, với a,b là số hữa tỉ. Tính a^2-b^2.

A. 192. **B.** -192. **C.** 200. **D.** -200.

Câu 5: Cho Tích phân $I=\int\limits_1^2(2x-1)\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=2\ln 2+\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2\ln 2$. **D.** $I=2\ln 2-\frac{1}{2}$.

Câu 6: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}x.\cos 2xdx=a+b\pi,$ với a,b là các số hữu tỷ. Giá trị $S=a+2b$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 7: Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x=a\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $T=a+b$.

A. $T=6$. **B.** $T=8$. **C.** $T=7$. **D.** $T=5$.

Câu 8: Biết $\int\limits_0^1(1-x)f'(x)\mathrm{d}x=2$ và $f(0)=3$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 9: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+1)\cos x\,\mathrm{d}x=a\pi+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 10: Cho $\int_1^e (2+x\ln x)\mathrm{d}x = ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=c$. **B.** $a+b=-c$. **C.** $a+b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 12: Cho $\int_1^e x^2\ln x dx = \frac{a}{b}e^3+\frac{c}{d}$ với $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên, $\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P=a+2b+3c+4d$ bằng

A. 51 **B.** 59 **C.** 61 **D.** 53

Câu 13: Tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\ln 2$. **B.** $1-\frac{2}{e}$. **C.** $\frac{13}{50}$. **D.** $1+\frac{2}{e}$.

Câu 14: Cho $\int_1^2 (2x+1)e^x\mathrm{d}x = a.e^2+b.e$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 15: Biết tích phân $I=\int_0^m xe^x\mathrm{d}x=1,$ hỏi số thực m thuộc khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 16: Kết quả tính tích phân $I=\int_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ được viết dưới dạng $I=ae+b$, với a,b là các số nguyên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^3+b^3=28$. **B.** $a.b=3$. **C.** $a+2b=1$. **D.** $a-b=2$.

Câu 17: Tính tích phân $I=\int_4^5 (x+1)\ln(x-3)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{19}{4}-10\ln 2$. **B.** $10\ln 2+\frac{19}{4}$. **C.** $10\ln 2$. **D.** $10\ln 2-\frac{19}{4}$.

Câu 18: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{\pi}{a}-\frac{b}{c}$ (với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $ab+c$ bằng.

A. 12. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trong đoạn $\left[1;e\right]$, biết $\int\limits_1^e \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=3$, $f\left(e\right)=6$. Khi đó $I=\int\limits_1^e f'\left(x\right).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=0$.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 21: Cho $\int\limits_0^1 xe^{2022x}\mathrm{d}x=ae^{2022}+b$, $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{2021}$. **B.** $\frac{1}{2022}$. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 22: Giả sử $I=\int\limits_3^4\left(x-2\right)\ln\left(x-1\right)\mathrm{d}x=\frac{a\ln 3-b}{c}$, trong đó a, b, c là các số nguyên và $\left(b,c\right)=1$. Tính $S=a+2b+c$.

A. $S=8$. **B.** $S=12$. **C.** $S=10$. **D.** $S=11$.

Câu 23: Biết $\int\limits_1^4\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{b}{c}+a\ln 2$ (với a là số hữu tỉ, $b;c$ là số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $T=2a+3b+c$.

A. $T=-12$. **B.** $T=13$. **C.** $T=12$. **D.** $T=-13$.

Câu 24: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x+1\right)\cos xdx=a\pi+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A. 10. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=e^x+\int\limits_0^1 tf(t)dt,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(\ln 2022)$.

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2024.

Câu 26: Cho $\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+2(b+c)$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 27: Cho $\int\limits_1^e\left(2+x\ln x\right)dx=ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=c$. **B.** $a+b=-c$. **C.** $a+b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Câu 28: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^3 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=10$ và $f\left(3\right)=6$. Tính

$I=\int_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{8}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{8}{3}$. **C.** $I=\dfrac{10}{3}$. **D.** $I=24$.

Câu 29: Hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(0)=2$ và $\int_0^2 (2x-4)f'(x)\mathrm{d}x=0$. Tính $I=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=2$.

Câu 30: Biết tích phân $I=\int_1^{10}\dfrac{\log x}{(x+1)^2}dx=a+b\log 2+c\log 11$, trong đó $a,\ b,\ c$ là các số hữu tỷ. Tính $S=11a+2b+3c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** −9. **D.** −11.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;1]$. Biết $\int_0^1 (x+2)f'(x)\mathrm{d}x=5$ và $f(0)=f(1)=7$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 32: Biết $\int_2^{e+1}\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=a+b\mathrm{e}^{-1}$ $(a,b\in\mathbb{R})$, chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $2a^2-3b=4$. **B.** $2a^2-3b=8$. **C.** $2a^2-3b=-4$. **D.** $2a^2-3b=-8$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;1]$. Biết $I=\int_0^1 (x+2)f'(x)\mathrm{d}x=5$ và $f(0)=f(1)=7$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=1$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a$ và $f(1)=b$, $f(2)=c$. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{x}{f(x)}\ \mathrm{d}x$ bằng

A. $2c-b-a$. **B.** $2a-b-c$. **C.** $2c-b+a$. **D.** $2a-b+c$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=1$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3a$ và $f(1)=b+1$, $f(2)=c-1$. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{x}{f(x)}\ \mathrm{d}x$ bằng

A. $2c-b-a-3$. **B.** $2a-b-c-3$. **C.** $2c-b-3a-3$. **D.** $2a-b+c+3$.

Câu 36: Biết $\int_0^1 xf'(x)dx=5$ và $f(1)=-1$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=4$ **B.** $I=-4$ **C.** $I=6$ **D.** $I=-6$

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{1}^{e}\frac{1-f\left(\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x=2$ và $f\left(1\right)=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_{0}^{1}xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2e}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(4\right)=2023,\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tích phân $\int\limits_{0}^{2}xf'\left(2x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 4044.

Câu 39: Biết $\int\limits_{2}^{5}\left(2x+1\right)\ln\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=a\ln3+b\ln2-c$ với a,b,c là các số nguyên. Khi đó a^2+2b-c^2 bằng

A. 8. **B.** 19. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 40: Cho hàm số $f\ \ x$ liên tục trên khoảng $\ 0;+\infty\ $. Biết e^x là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ liên tục trên khoảng $\ 0;+\infty\ $ và $f\ \ 2\ =\frac{1}{\ln2}$. Giá trị của $\int\limits_{1}^{2}\frac{f\ \ x}{x}dx$ bằng

A. $1+e^2+e$. **B.** $1-e^2-e$. **C.** $1+e^2-e$.. **D.** $1-e^2+e$

Câu 41: Cho $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin xdx}{2\cos^3x}=a.\pi+b.\sqrt{3}$ với a,b là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Câu 42: Biết $\int\limits_{0}^{1}\left(2x+3\right)e^x\mathrm{d}x=a.e+b$ với a,b là các số nguyên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b=-1$. **B.** $ab=2$. **C.** $2a+b=5$. **D.** $a-b=-1$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2\left(x\right)dx=\pi$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'\left(x\right)\sin3xdx=\frac{-3\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx$ bằng.

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{-5}{7}$.

Câu 44: Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $\left[0;2\right]$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(x\right)f\left(2-x\right)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in\left[0;2\right]$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx$

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{5}$. **D.** $I=-\frac{16}{3}$.

Dạng 10: Tích phân hàm ẩn và tích phân đặc biệt

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 12$. Tính $\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x = 6$. **B.** $\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x = 4$. **C.** $\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x = -4$. **D.** $\int\limits_0^2 f\left(3x\right)\mathrm{d}x = 36$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 2: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Biết $f'\left(x\right).\cos x + f\left(x\right).\sin x = 1$, $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ và $f\left(0\right) = 1$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f\left(x\right)dx$.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. **D.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 3: Biết $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 5$, tích phân $\int_{1}^{2} f(3-2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{-3}{2}$. **C.** -3. **D.** $\frac{3}{2}$.

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$ và $\int_{0}^{3} f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int_{1}^{2} x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = -4$. **C.** $I = \frac{1}{4}$. **D.** $I = -\frac{1}{4}$.

✍ Lời giải

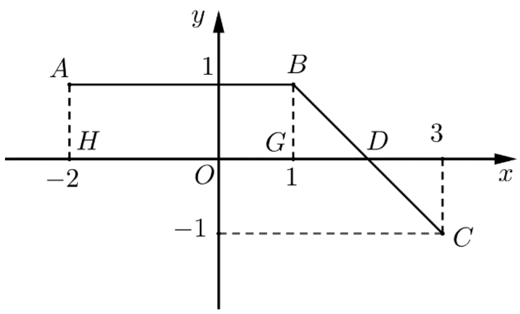
....

....

....

....

Câu 5: Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$.



Tích phân $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

✍ Lời giải

....

....

....

....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3+3x\right)=x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^4 x^2.f'(x)dx$

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{219}{8}$. **C.** $\frac{357}{4}$. **D.** $\frac{27}{8}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1(2x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $f(0)=3f(1)$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-5$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=2$. **D.** $I=5$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn:

$2\cos x.f(1+4\sin x)-\sin 2x.f(3-2\cos 2x)=\sin 4x+4\sin 2x-4\cos x$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó $I=\int\limits_1^5 f(x)dx$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[3;7]$ thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ với mọi $x\in[3;7]$ và $\int\limits_3^7 f(x)dx=4$. Tích phân $I=\int\limits_3^7 xf(x)dx$ bằng

A. 80. **B.** 60. **C.** 20. **D.** 40.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2)=2$; $f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_{-2}^0\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx$.

A. $I=1-2e^2$. **B.** $I=1-2e^{-2}$. **C.** $I=1+2e^2$. **D.** $I=1+2e^{-2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=2, f(2)=1$ và $\int\limits_1^2\left[xf'(x)\right]^2\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_1^2 x^2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f(1)=1,\int\limits_0^1 xf'(x)dx=\frac{2}{3}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 xf\left(x^2\right)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x^2+12\int_0^1 x^2 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x$. Giá trị của $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\frac{2x-3}{x-2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f(3)=2$. Giá trị của biểu thức $f(0)+2f(4)$.

A. 3. **B.** 5. **C.** $-5+7\ln 2$. **D.** $7+3\ln 2$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{4}{3}$. **C.** $I=\frac{28}{3}$. **D.** 2.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thoã mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx=2$ và $f(0)=1$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 12: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=xe^{x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=e^4-1$. **B.** $I=e^4-2$. **C.** $I=\frac{2e-1}{2}$. **D.** $I=\frac{e^4-1}{4}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

A. 16. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 14.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $\int_0^3 f(x)\mathrm{dx}=8$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{dx}=4$. Tính $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)\mathrm{dx}$

A. $\frac{11}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** 6.

Câu 15: Xét hàm số $F(x)=\int\limits_1^x \frac{t+1}{\sqrt{1+t+t^2}}\mathrm{d}t$. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là nhỏ nhất?

A. $F(1)$. **B.** $F(2021)$. **C.** $F(0)$. **D.** $F(-1)$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ và $f(1)=-2\ln 2$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Q}$, tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=\frac{3}{4}$. **B.** $P=\frac{9}{2}$. **C.** $P=\frac{13}{4}$. **D.** $P=\frac{1}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{3}{5};1\right]$ và thoả mãn $3f(x)+5f\left(\frac{3}{5x}\right)=x^2+1$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{3}{5}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{1}{25}+\frac{1}{8}\ln\frac{3}{5}$. **B.** $I=\frac{8}{25}-\frac{1}{8}\ln\frac{3}{5}$. **C.** $I=\frac{2}{25}+\frac{1}{8}\ln\frac{3}{5}$. **D.** $I=\frac{1}{25}-\frac{1}{8}\ln\frac{3}{5}$.

Câu 18: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{4}{75}$. **B.** $I=-\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{1}{25}$. **D.** $I=-\frac{4}{15}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm liên tục có tích phân trên $[0;2]$ thỏa điều kiện $f(x^2)=6x^4+\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-32$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=-6$. **D.** $I=-24$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$. Biết $\int\limits_0^1 f(x).x\mathrm{d}x=6$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}-x}\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=9$. **C.** $I=3$. **D.** $I=18$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[-1;1]$ và thỏa mãn $f(1-x^2)=\frac{x}{x-2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\cos^2 x)\sin 2x\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x)+xf(x^2+1)=x^5+2x^3+x^2+x$. Tính giá trị của $\int_1^2 f(x)dx$ biết $\int_0^2 f(x)dx=\frac{8}{3}$.

A. $-\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(2x+1)f'(x)-f(x)=(2x+1)\sqrt{2x+1}$. Tính $f(4)$.

A. 27. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2.f^2(x).f'(x)+1=4xf^3(x),\forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=2$. Tích phân $\frac{1}{2022}\int_0^{2022} f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 1011. **D.** 2022.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ thoả $f(x)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)\mathrm{d}t,\forall x\in[-1;1]$. Tính $I=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=1$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)=xe^x+2+\int_0^1\left[3f(x)+f'(x)\right]dx$. Biết tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c$ (với $a, b, c\in\mathbb{Z}$). Tính $T=4a^2+2b^2-c^2$.

A. -10. **B.** -12. **C.** 15. **D.** 8.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoã mãn $f\left(\frac{x}{2}\right)=3f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^4 f(x)dx=1$. Tính tích phân $I=\int_2^4 f(x)dx.$

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-\frac{1}{2}$.

Câu 28: Cho hàm đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(2-x)-xf'(x)=-4x^3+6x^2-18x+14,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 18.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0)=-2$ và

$\left(x^2+1\right)f'(x)+xf(x)=-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{4}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=-\dfrac{5}{2}$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $x^2.f\left(x^5\right)+x.f\left(1-x^4\right)=-3x^4+x+3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{23}{28}$. **B.** $\dfrac{207}{560}$. **C.** $-\dfrac{115}{7}$. **D.** $\dfrac{115}{63}$.

Câu 31: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn điều kiện $4xf\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2},\forall x\in[0;1]$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{16}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{20}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)-3f(x)=\left(2x^2+1\right)e^{x^2+3x-1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(2)=2e^9$. Biết $f(1)=ae^b$ với $a,b\in\mathbb{N}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $a+b=5$. **B.** $a-2b=-4$. **C.** $a+3b=10$. **D.** $a-b=-3$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ luôn nhận giá trị dương và có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng $(1;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=f'(1)=2$ và $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\left[f''(x)-\dfrac{f'(x)}{x}\right]=x(2x+1)$. Tính giá trị $f(2)$.

A. $f(2)=\dfrac{\sqrt{82}}{2}$. **B.** $f(2)=\dfrac{133}{6}$. **C.** $f(2)=\dfrac{\sqrt{123}}{4}$. **D.** $f(2)=\dfrac{\sqrt{798}}{6}$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty), y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(3)=\dfrac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1).f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8)=\dfrac{1}{16}$. **B.** $f(8)=64$. **C.** $f(8)=49$. **D.** $f(8)=256$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ với $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. Tính $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx$.

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $-\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=2f(3x)$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=9$ và $2F(1)-3F(9)=-9$. Khi đó $\int\limits_1^9 f(x)dx$ bằng

A. 9 **B.** 1 **C.** 8 **D.** 0

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(5)+G(5)=-2$ và $F(3)+G(3)=0$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f\left(2\sin^2 x+3\right)\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $6x^2.f\left(x^3\right)+4f(1-x)=3\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ là

A. $\dfrac{\pi}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{20}$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn hai điều kiện $\left[f(x)\right]^2+3x^2+2x-1\le 4x.f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x=12$. Giá trị $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 40: Biết $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^7 f(x)dx=F(7)-G(0)+3m\ (m>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x)$, $x=0$ và $x=7$. Khi $S=105$ thì m bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên R thỏa mãn $F(1)-3G(1)=4$ và $F(0)-3G(0)=6$. Nếu $f(1)=2$ thì $\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=5$ và $xf\left(1-x^3\right)+f'(x)=x^7-5x^4+7x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $-\dfrac{5}{6}$ **B.** $-\dfrac{13}{12}$ **C.** $\dfrac{5}{6}$ **D.** $\dfrac{17}{6}$

Câu 43: Cho số phức $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)-x$, $G\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)+x$ trên tập hợp $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(4\right)+G\left(4\right)=5$ và $F\left(1\right)+G\left(1\right)=-1$. Giá trị của $\int\limits_{0}^{1}f\left(3x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 44: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(6\right)+G\left(6\right)=6$ và $F\left(0\right)+G\left(0\right)=2$. Khi đó $\int\limits_{0}^{2}f\left(3x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right);G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(2\right)+2023.G\left(0\right)=5$ và $F\left(0\right)+2023G\left(2\right)=2$. Khi đó $\int\limits_{3}^{5}f\left(5-x\right)dx$ bằng

A. 2023. **B.** $-\frac{3}{2022}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3}{2022}$.

Câu 46: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\left(x\right),G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(4\right)+G\left(4\right)=4$ và $F\left(0\right)+G\left(0\right)=1$. Khi đó $\int\limits_{0}^{2}f\left(2x\right)\mathrm{d}x$ bằng

B. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 47: Cho hàm số bậc nhất $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)dx=4;\ \int\limits_{2}^{3}f\left(x\right)dx=2.$ Tính $I=\int\limits_{0}^{1}f\left(f\left(2x-5\right)\right)dx$

A. 6. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** -4. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 48: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;\pi\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=f\left(x\right).\cot x+2x.\sin x$. Biết $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\frac{\pi^2}{36}$. **B.** $\frac{\pi^2}{72}$. **C.** $\frac{\pi^2}{54}$. **D.** $\frac{\pi^2}{80}$.

Câu 49: Cho hàm số $f\left(x\right)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\left(x+1\right)f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{f\left(x\right)}}{x+2}$ và $f\left(0\right)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f\left(3\right)$ bằng

A. $2\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$. **B.** $\frac{1}{2}\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$. **C.** $4\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$. **D.** $\frac{1}{4}\left(4\ln 2-\ln 5\right)^2$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm xác định trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $x\left[f'(x)+x\right]=(x+1)f(x)$; $f(1)=\mathrm{e}+1$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$; trong đó a; b là những số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó giá trị của $(2a+b)$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(x)+xf'(x)=3x+10, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=6$ Biết $\int\limits_{-1}^{4}\frac{\ln\left(2+\sqrt{f(x)}\right)}{f^2(x)-6f(x)+9}dx=a\ln 5+b\ln 6+\sqrt{c}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $e^{3x}\left(4f(x)+f'(x)\right)=2\sqrt{f(x)}, f(x)>0\ \forall x\geq 0$ và $f(0)=1$. Tính $\int\limits_0^{\ln 2} f(x)dx$

A. $\frac{201}{640}$. **B.** $\frac{11}{24}$. **C.** $\frac{209}{640}$. **D.** $-\frac{1}{12}$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} e^{3x}\left(4f(x)+f'(x)\right)=2\sqrt{f(x)} \\ f(x)>0 \end{cases}, \forall x\geq 0$ và $f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{11}{24}$. **B.** $I=-\frac{1}{12}$. **C.** $I=\frac{209}{640}$. **D.** $I=\frac{201}{640}$.

Câu 54: Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức có các hệ số nguyên. Biết $5f(x)-\left(f'(x)\right)^2=x^2+x+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^3 x+\cos^3 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{a}+\frac{b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $2a+b-c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=5$ và $\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{10}{9}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** $-\frac{10}{9}$. **D.** $-\frac{11}{4}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f'(x)+f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giả sử $f(2)=a$, $f(-3)=b$. Tính $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=b-a$. **B.** $T=a+b$. **C.** $T=-a-b$. **D.** $T=a-b$.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thoả mãn đẳng thức sau $4xf\left(x^2\right)+2f(2x+1)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Giá trị của $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -1. **C.** 27. **D.** 1.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Đặt $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$, biết $g(0)=2,\ g(1)=6$, tính tích phân $\int_0^1\frac{6x-f(x)}{e^x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int_1^2\left[f\left(x^3\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{247}{15}.$$

Giả sử rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[1;8]$. Tích phân $\int_1^8 x\cdot F'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{257\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{257\ln 2}{4}$. **C.** 160. **D.** $\frac{639}{4}$.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{1}{3}}^3\frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 63: Cho hàm số *f* xác định, đơn điệu giảm, có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$3\left[f(x)\right]^2=\int\limits_0^x\left[8\left(f(t)\right)^3+\left(f'(t)\right)^3\right]\mathrm{d}t+x,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^{12}\left(12+f(x)\right)\mathrm{d}x$ nhận giá trị trong khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(10;11)$. **B.** $(11;12)$. **C.** $(12;13)$. **D.** $(13;14)$.

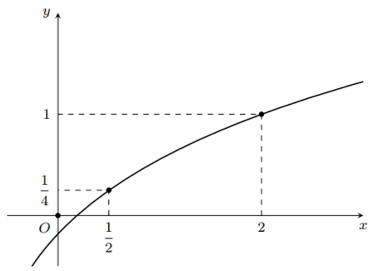
Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1; f(3x)-x^2f\left(x^3\right)=4x^3+2x+1, (\forall x\in\mathbb{R})$. Khi đó $\int\limits_1^3 xf'(x)dx$ bằng:

A. 14 **B.** -1 **C.** 5 **D.** 6

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $\left(x^2+1\right)f'(x)+xf(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{1+f(x)}$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x=3$. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. 14π. **B.** 15π. **C.** 12π. **D.** 13π.

Câu 66: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$, có đồ thị như hình vẽ đồng thời thỏa mãn $f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{5}{18}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right),\forall x>0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)-(x-1)^2}{x}$ và $y=0$ bằng



A. $\dfrac{37}{24}-\dfrac{17}{9}\ln 2$. **B.** $\dfrac{37}{24}-\dfrac{11}{9}\ln 2$. **C.** $\dfrac{37}{24}-\dfrac{13}{9}\ln 2$. **D.** $\dfrac{31}{24}-\dfrac{13}{9}\ln 2$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=\dfrac{2x}{e^{x^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(-2)$.

A. $f(-2)=\dfrac{-2}{e^4}$. **B.** $f(-2)=\dfrac{2}{e^4}$. **C.** $f(-2)=2$. **D.** $f(-2)=e^2$.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3F(3)+G(3)=23$ và $3F(1)+G(1)=-1$. Khi đó $\int\limits_0^1 x\left[3-f\left(2x^2+1\right)\right]dx$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** -1.

Dạng 11: Tính tích phân bằng phương pháp vi phân

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Nếu $\int\limits_3^5 2f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

....

....

....

Câu 2: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{45}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}+\frac{9}{20}$. **D.** $I=\frac{15}{4}$.

Lời giải

....

....

....

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thõa mãn $f\left(0\right)=4$ và $f'\left(x\right)=x+\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6\mathrm{e}+13}{6}$. **B.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{6}$. **C.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{3}$. **D.** $\frac{6\mathrm{e}+19}{6}$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 4: Tích phân $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

....

....

....

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)-f\left(x\right)=e^{-x}$ và $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Giá trị của $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2e}+e-2$. **B.** $\frac{1}{2e}+e-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{e}+e-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2e}+e-1$.

✍ **Lời giải**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(0\right)=1,\ f'\left(x\right)-x.f\left(x\right)=x.e^{x^2},\forall x.$ Tích phân $\int_0^1 xf\left(\sqrt{x+1}\right)dx$ bằng

A. e^2-e. **B.** $4\sqrt{e}-2e$. **C.** 1. **D.** e.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'\left(x\right)+xf\left(x\right)=2xe^{-x^2}$ và $f\left(0\right)=-2.$ Tính $f\left(1\right).$

A. $f\left(1\right)=-e.$ **B.** $f\left(1\right)=\dfrac{1}{e}.$ **C.** $f\left(1\right)=-\dfrac{2}{e}.$ **D.** $f\left(1\right)=\dfrac{2}{e}.$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\left[0;2\right]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1)\neq\dfrac{1}{2}, f(x)\neq 0$ với $\forall x\neq 1$, $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 4: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2+\sin^2x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=a\pi^2+b\ln\dfrac{\pi}{2}+c$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Tính giá trị biểu thức $T=8a+b+c$?

A. 8. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ thoả mãn $f\left(1\right)=0$, $f\left(x\right)\neq\dfrac{1}{x}$ và $x^2f^2\left(x\right)-\left(2x+1\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$. Tính $I=\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=-\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=-\ln 2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=e^{2020x}$ và $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2021}$. Tính $f\left(1\right)$.

A. $\dfrac{e^{2021}}{2020}$. **B.** $\dfrac{1}{2}.\dfrac{e^{2020}}{2020}$. **C.** $\dfrac{1}{2}.\dfrac{e^{2020}}{2021}$. **D.** $\dfrac{e^{2020}}{2021}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn: $x^2.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=2x^3+x^2$, $\forall x>0$. Biết rằng $f\left(1\right)=0$. Tính giá trị của $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

A. $I=\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}+\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{4}$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}-\mathrm{e}$.

Câu 8: Cho hàm số $F(x)=f(x)\sin x+2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x).\cos x$ với $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}[f(x)]^2(\cos x-\sin x)dx$

A. $\sqrt{e}-1$. **B.** $2e+1$. **C.** $\dfrac{e^2-2}{4}$. **D.** $\dfrac{3e-4}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2=\left[(f(x))^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ (a,b\in\mathbb{Z})$. Tính tổng $S=a+b^2$

A. $S=4$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-1$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;6]$ sao cho $\int\limits_1^3 f(x)dx=3$, $\int\limits_3^6 f(x)dx=-4$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=7$. **B.** $I=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0)=-2$ và $(x^2+1)f'(x)+x(f(x)+1)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=-\dfrac{5}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=-\dfrac{2}{e}$. **B.** $f(1)=\dfrac{2}{e}$. **C.** $f(1)=-e$. **D.** $f(1)=-\dfrac{1}{e}$.

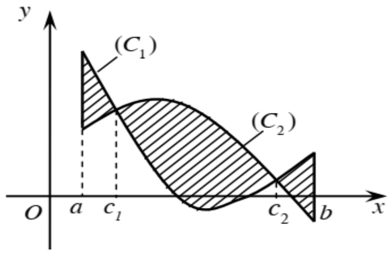
Câu 13: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ và $g(x)=mx^2+nx+p\ (a,b,c,d,e,m,n,p\in\mathbb{R})$. Các hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$ giao nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $\dfrac{-5}{2},-1$ và 1. Có $f(0)=g(0)$. Tính giá trị tích phân sau $\int\limits_1^2\left(\dfrac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}\right)dx$?

A. $12\ln 2$.. **B.** $\ln 2$.. **C.** $12\ln 3$.. **D.** $6\ln 3$.

Dạng 12: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng

- **Định lý:** Cho hàm số $y = f\left(x \right)$ liên tục, không âm trên $\left[a;b \right]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x \right)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a; x = b$ là: $S = \int\limits_a^b f\left(x \right)\mathrm{d}x$.

- Diện tích hình phẳng $\left(H \right)$ $\begin{cases} y = f\left(x \right),\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ $\boxed{S = \int\limits_a^b \left| f\ \ x \right| dx}$



- Diện tích hình phẳng $\left(H \right)$ $\begin{cases} \left(C_1 \right): y = f_1\left(x \right) \\ \left(C_2 \right): y = f_2\left(x \right) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ $\boxed{S = \int\limits_a^b \left| f\ \ x\ - g\ \ x \right| dx}$

- **Chú ý:** Nếu trên đoạn $\ a;b\ $, hàm số $f\ \ x$ không đổi dấu thì: $\int\limits_a^b \left| f\ \ x \right| dx = \left| \int\limits_a^b f\ \ x\ dx \right|$

A VÍ DỤ MINH HỌA

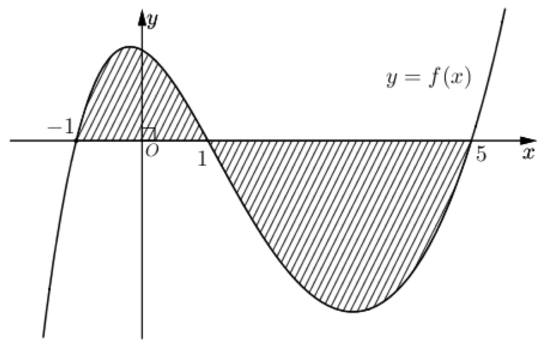
Câu 1: Tính diện tích S hình phẳng $\left(H \right)$ giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$

A. $S = \dfrac{937}{12}$ **B.** $S = \dfrac{343}{12}$ **C.** $S = \dfrac{397}{4}$ **D.** $S = \dfrac{793}{4}$

Lời giải

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các diện tích S_1, S_2 thỏa mãn $S_2 = 2S_1 = 3$.

Tính tích phân $\int_{-1}^{5} f(x)dx$

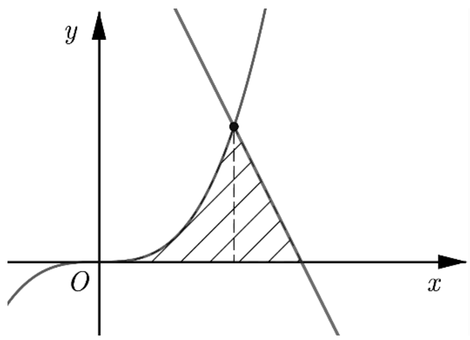


Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{-3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** 3.

✍ Lời giải

Câu 3: Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3$, đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) là



A. $S = \frac{1}{4}$. **B.** $S = \frac{1}{2}$. **C.** $S = \frac{5}{4}$. **D.** $S = 2$.

✍ Lời giải

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ $A\left(\dfrac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

A. $S = \dfrac{9}{8}$. **B.** $S = \dfrac{9}{4}$. **C.** $S = 9$. **D.** $S = \dfrac{9}{2}$.

Lời giải

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

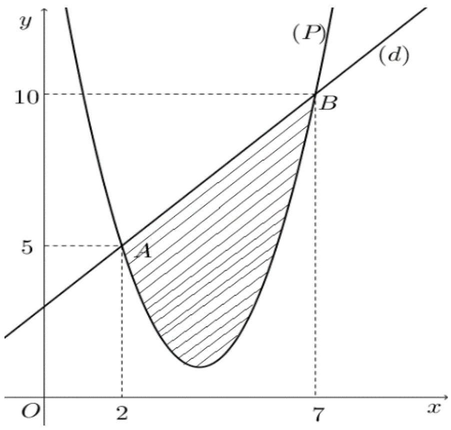
………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

Câu 5: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \dfrac{125}{6}$. Tích phân $\int_2^7 (2x-3)\, f'(x)dx$ bằng



A. $\dfrac{215}{3}$. **B.** $\dfrac{265}{3}$. **C.** $\dfrac{245}{3}$. **D.** $\dfrac{415}{3}$.

Lời giải

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

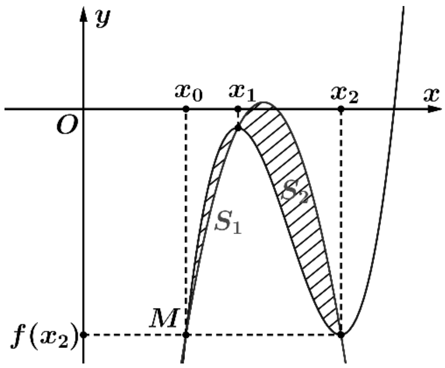
Câu 1: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=e^{f(x)}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	e^2	↗	e^3	↘	$\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(26;27)$. **B.** $(27;28)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(29;30)$.

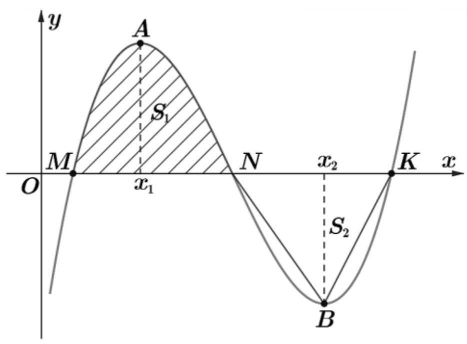
Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới.



Gọi x_1,x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)-3f(x_2)=0$ và đồ thị luôn đi qua $M(x_0;f(x_0))$ trong đó $x_0=x_1-1$; $g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và điểm M. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tạo bởi đồ thị hai hàm $f(x),g(x)$ như hình vẽ).

A. $\frac{4}{29}$. **B.** $\frac{5}{32}$. **C.** $\frac{7}{33}$. **D.** $\frac{6}{35}$.

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình vẽ.



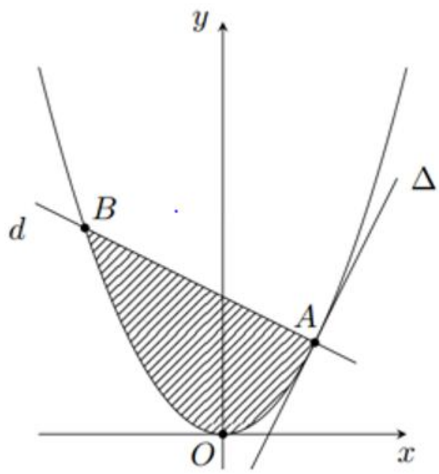
Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C); M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S_1 là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK. Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, gọi (H) là tập hợp điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2=k(|x|+|y|)$ với k là số nguyên dương, S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H). Giá trị lớn nhất của k để $S<250$ bằng

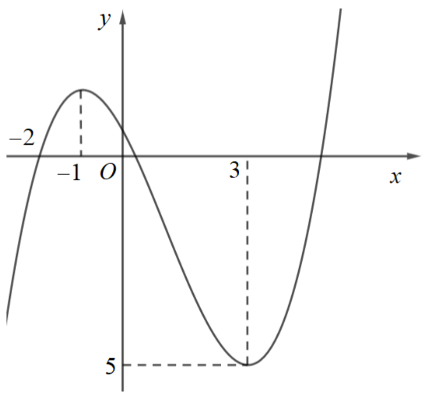
A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và một điểm $A(a;a^2)$ (với $a>0$) nằm trên parabol (P). Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A, gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với Δ. Biết diện tích hình phẳng gới giạn bởi (P) và d (phần gạch sọc) đạt giá trị nhỏ nhất, khẳng định nào sau đây là đúng?



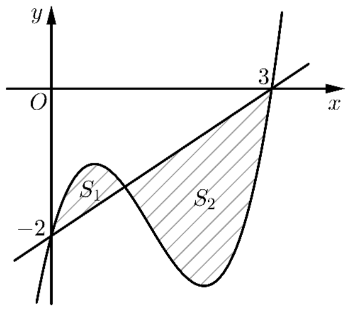
A. $a\in\left(1;\frac{3}{2}\right]$. **B.** $a\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$. **C.** $a\in\left(\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right]$. **D.** $a\in\left(\frac{2}{3};1\right]$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $g(x)=f''(x)+bx-c$ bằng



A. $\frac{145}{2}$. **B.** $\frac{125}{2}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{29}{2}$.

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$. Đường thẳng $y=ax+b$ tạo với đường $y=f(x)$ hai miền phẳng có diện tích là S_1,S_2 (hình vẽ bên).



Biết $S_1=\dfrac{5}{12}$ và $\int\limits_0^1(1-2x)f'(3x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}$, giá trị của S_2 bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{19}{4}$. **C.** $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{13}{6}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f\left(0\right)=0$ và $f'\left(0\right)\neq 0$ thỏa mãn biểu thức $3f\left(x\right)-f'\left(x\right)\left(2f\left(x\right)-2x^2-3x\right)=18x^2-4xf\left(x\right)$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)=x^2.f'\left(x\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-8x-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f^{'}(x)$ bằng

A. $\dfrac{125}{2}$. **B.** $\dfrac{40}{3}$. **C.** $\dfrac{131}{4}$. **D.** $\dfrac{10}{4}$.

Câu 10: Biết hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên nửa khoảng $\left(0;1\right]$, thỏa mãn $f\left(1\right)=1$ và $2f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{f\left(x\right)}{x}}$ với mọi $x\in\left(0;1\right]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$ và $y=5-4x$ gần giá trị nào nhất sau đây?

A. $0,58$. **B.** $0,49$. **C.** $1,22$. **D.** $0,97$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $\sqrt{x}.f'\left(x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x}}f\left(x\right)=x\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $f\left(1\right)=-1,$ tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm liên tục có tích phân trên $\left[0;2\right]$ thỏa điều kiện $f\left(x^2\right)=6x^4+\int\limits_0^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=6x-12$

A. 30. **B.** 27. **C.** 24. **D.** 22.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2 + y''.y = -4$ và $f(0) = 1$; $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. $0,98$. **B.** $0,88$. **C.** $0,78$. **D.** $0,68$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1) \neq \frac{1}{2}, f(x) \neq 0$ với $\forall x \neq 1$, $(x-1).f'(x) + f(x) = 2f(x).f'(x)$ với $\forall x \in [0;2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = x^2 - 1$ bằng

A. $S = \frac{5}{6}$. **B.** $S = \frac{1}{6}$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 1$.

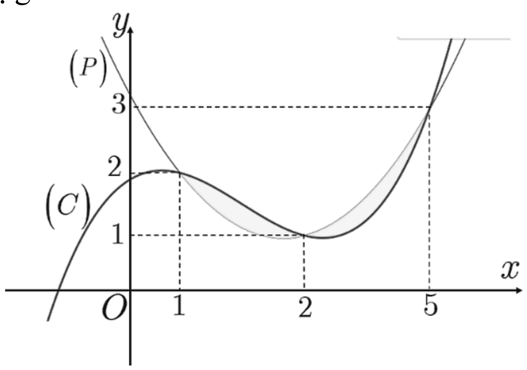
Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x) + x^2 f'(x) = \frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = x^4 + bx^2 + c\,(b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $(d): y = g(x)$ tiếp xúc với (C) tại điểm $x_0 = 1$. Biết (d) và (C) còn hai điểm chung khác có hoành độ là $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$ và $\int_{x_1}^{x_2} \frac{g(x) - f(x)}{(x-1)^2} dx = \frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d).

A. $\frac{29}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** $\frac{143}{5}$. **D.** $\frac{43}{5}$.

Câu 17: Cho đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $(P): y = mx^2 + nx + p$ có đồ thị như hình vẽ (*Đồ thị (C) là nét có đường cong đậm hơn*). Biết phần hình phẳng được giới hạn bởi (C) và (P) (phần tô đậm) có diện tích bằng 2. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng quanh trục hoành có giá trị gần với số nào nhất?



A. 12.53. **B.** 9.34. **C.** 10.23. **D.** 11.74.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x)+x^2f'(x)=5x^4+6x^2+4x,\forall x\in\mathbb{R}$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2+[8-f'(x)]x+[f(x)-2f'(x)+8]=0$, $\forall x\in[0;+\infty)$ và $f(1)=0$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f(x)$ và $y=x^2+8x-4$ bằng:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x),\forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0,\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\frac{1}{e^2}$. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x),y=0,x=e,x=e^2$.

A. $S=\frac{3}{2}$. **B.** $S=\frac{5}{2}$. **C.** $S=\frac{7}{3}$. **D.** $S=\frac{5}{4}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x)<0\,\forall x\in(-1,+\infty)$, $f'(0)=-1$ và $[f'(x)]^2=f''(x)$, $f(3)=-\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C):y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2,x=3$ bằng bao nhiêu?

A. $8\ln 2-\ln 3-1$. **B.** $8\ln 2-3\ln 3-1$.
C. $4\ln 2-3\ln 3-1$. **D.** $8\ln 2+3\ln 3-1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $f(x)+f'(x)=\frac{2x^3-5x^2+5x}{(x^2-x+1)^2}$; $f(1)-f(0)=2$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục tung và trục hoành có dạng $S=\ln a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=14$. **B.** $T=25$. **C.** $T=36$. **D.** $T=43$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai, liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x)-2f(x).f'(x)+2xf'(x)+(x+1)^2f''(x)=0,\forall x\in[0;1], f'\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$ Biết tích phân $\int\limits_0^1[f^2(x)]dx=\frac{a}{b}$ (a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân só tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng

A. 181. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 26.

Câu 24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'\left(x\right)-f\left(x\right)=-8+16x-4x^2$ và $f\left(0\right)=0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục Ox quay quanh Ox.

A. $\dfrac{256}{15}$. **B.** $\dfrac{256}{15}\pi$. **C.** $\dfrac{16}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $x.f'\left(x\right)-2f\left(x\right)=4x-8$ và $f\left(2\right)=0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục Ox và trục Oy.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$

Câu 26: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=4x^3-6x^2-2x+4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=f'\left(x\right)$.

A. $S=8$. **B.** $S=4$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=4\pi$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)=4x^3+3x^2-xf'\left(x\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$ có kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai bằng

A. $7,31$. **B.** $7,32$. **C.** $7,33$. **D.** $7,34$

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=0$; $\left[f'\left(x\right)\right]^2+8xf\left(x\right)=x^4-2x, \forall x\in\left[0;1\right]$. Hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục Ox, Oy. Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng $\left(H\right)$ quanh trục Ox có thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi}{7}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{7}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{7}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{7}$

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^4+6x+3, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ thuộc khoảng

A. $\left(27;28\right)$. **B.** $\left(26;27\right)$. **C.** $\left(28;29\right)$. **D.** $\left(29;30\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\cos xf'(x)-\sin xf(x)=2\cos 2x+2\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ bằng

A. $2-\pi$. **B.** $2+\pi$. **C.** $4-\pi$. **D.** $4+\pi$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f\left(1\right)=4$ và $f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-2x^3-3x^2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 27.

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thoả mãn $f'\left(x\right)+\dfrac{f\left(x\right)}{x}=4x^2+3x$ và $f\left(1\right)=2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$ và phương trình tiếp tuyến của tại điểm $y=f\left(x\right)$ có hoành độ $x=2$.

A. $\dfrac{2400}{12}$. **B.** $\dfrac{2401}{12}$. **C.** $\dfrac{333}{4}$. **D.** $\dfrac{335}{4}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thoả mãn $f\left(1\right)=3$ và $x\left(4-f'\left(x\right)\right)=f\left(x\right)-1$ với mọi $x>0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$ và trục Ox, trục Oy và $x=1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thoả mãn $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R};f\left(2\right)=\dfrac{1}{5}$ và $f'\left(x\right)=-2x\left[f\left(x\right)\right]^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right),x=0$ và $x=1$.

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $-xf'\left(x\right)\ln x+f\left(x\right)=2x^2f^2\left(x\right)$, $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$, $f\left(x\right)>0$, $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$ và $f\left(e\right)=\dfrac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf\left(x\right)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f\left(x\right)+x^2.f'\left(x\right)=4x^3-12x^2+8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{5}$. **D.** $\dfrac{32\pi}{5}$.

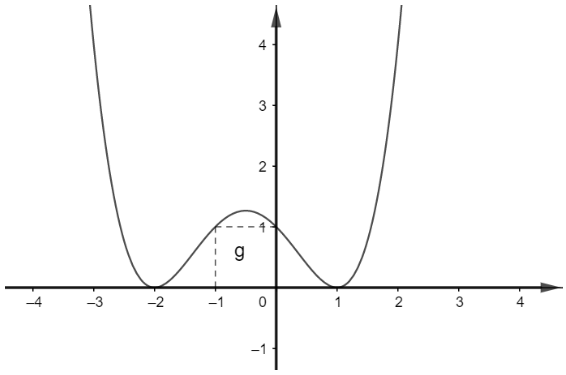
Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $\left[-2;1\right]$, thỏa mãn hệ thức $f\left(x\right)=f'\left(x\right).\sqrt{x+3}$ và $f\left(1\right)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-2,x=1$.

A. $\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $\dfrac{3e^2+1}{2e^2}$. **C.** $\dfrac{3e^2+1}{e^2}$. **D.** $\dfrac{3e^2-1}{e^2}$.

Câu 38: Cho hàm số $f\left(x\right)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln3$. **B.** $\ln3$. **C.** $\ln18$. **D.** $\ln2$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{127}{10}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoã mãn $f(1)=3$ và $f^2(x)-8xf(x)-f'(x)=-16x^2-4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=2$.

A. $\ln 2-6$. **B.** $8-\ln 2$. **C.** $6-\ln 2$. **D.** $10-\ln 2$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=x^3+\int_0^1(10u-4x)f(u)du$ có đồ thị (C). Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $S=108$ **B.** $S=12$. **C.** $S=180$. **D.** $S=112$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm xác định trên $[0;+\infty)$ và thoả mãn $x^2-x(f'(x)-2)+(f(x)-f'(x)+1)=0$, $\forall x\in[0;+\infty)$ và có $f(0)=0$. Diện tích hình phẳng gới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1$ và $f(2)=-6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)+2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 22.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=6$ và $xf'(x)=f(x)+3x^4-3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{162}{5}$. **B.** $\frac{324}{5}$. **C.** $\frac{104}{5}$. **D.** $\frac{229}{10}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi-1}{4}$. **C.** $\sqrt{2}-\pi$. **D.** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-6x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^4+6x^2-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=\frac{1}{4}xf'(x)$ bằng

A. $\frac{112}{15}$. **B.** $\frac{272}{15}$. **C.** $\frac{1088}{15}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 48: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f\left(x\right)=2x^3-9+\int\limits_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)dx$. Đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-9$ cắt đồ thị $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $1;2;4$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có diện tích bằng:

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{37}{12}$. **D.** $I=1$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, có đạo hàm $f\left(1\right)=1$ và $\begin{cases} f\left(x\right)>0 \\ f'\left(x\right)>0 \end{cases}$ trên $\left(1;+\infty\right)$ thỏa mãn điều kiện $2\left[f'(x)\right]^2=\left(x-1\right)^2.\left(4f\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2+4\right)$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với các đường $x=1;x=2$ và Ox ?

A. $S=\frac{4}{3}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{-4}{3}$. **D.** $S=\frac{-8}{3}$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(1\right)=2$ và $x\left(f'(x)-x\right)=f\left(x\right)-1,\forall x>0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$; $x=1;x=3$ và trục hoành bằng

A. $\frac{32}{2}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 12. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $2xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=4x\sqrt{x}$. Biết $f\left(1\right)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2xf'\left(x\right)$, trục hoành, đường thẳng $x=1;x=4$.

A. $\frac{14}{3}$. **B.** $\frac{124}{5}$. **C.** $\frac{62}{5}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Câu 52: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=0$, đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-2;+\infty\right)$ và thỏa mãn $\left(x+2\right)f'\left(x\right)-2f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x+2\right)^3$ với mọi $x\in\left[-2;+\infty\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục hoành bằng

A. $\frac{432}{5}$. **B.** $\frac{448}{5}$. **C.** $\frac{464}{5}$. **D.** $\frac{446}{5}$.

Dạng 13: Ứng dụng tích phân vào bài toán chuyển động

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\,(\text{m/s})$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(\text{m/s})$. **B.** $16(\text{m/s})$. **C.** $13(\text{m/s})$. **D.** $15(\text{m/s})$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16m$. **B.** $55m$. **C.** $25m$. **D.** $50m$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 3: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \left(m/s^2\right)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17\,m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200\,m$. **B.** $1014\,m$. **C.** $966\,m$. **D.** $36\,m$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 4: Một xe máy đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $30m$. **B.** $20m$. **C.** $50m$. **D.** $25m$.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 5: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \text{m/s}^2$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ giây là $17t\ \text{m/s}$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là.

A. $966\ \text{m}$. **B.** $36\ \text{m}$. **C.** $1200\ \text{m}$. **D.** $1014\ \text{m}$.

Lời giải

....

....

....

....

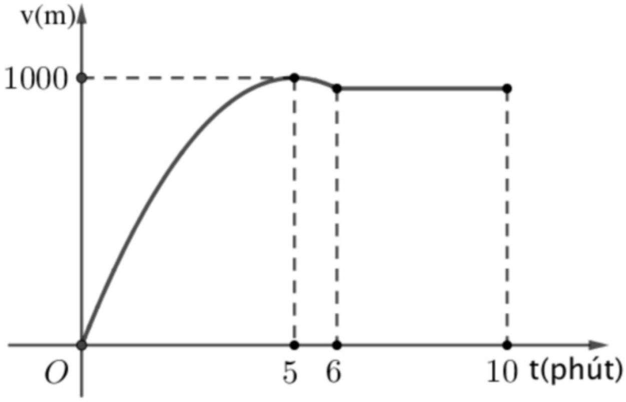
....

....

....

....

Câu 6: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều **(tham khảo hình vẽ)**.



Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ là bao nhiêu mét?

A. 8160 m. **B.** 8610 m. **C.** 10000 m. **D.** 8320 m.

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 7: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 12t - t^2$ trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận tốc v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v = x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?

A. 15 mét/phút. **B.** 18 mét/phút. **C.** 27 mét/phút. **D.** 48 mét/phút.

✍ Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc $15\left(m/s\right)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a=3t-8\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng vận tố **C.** Hỏi sau 10 giây tăng vận tốc ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. 150. **B.** 180. **C.** 246. **D.** 250.

✍ Lời giải

Câu 9: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V\left(t\right)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t\left(\text{m/s}\right)$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20\left(\text{m/s}\right)$. **B.** $16\left(\text{m/s}\right)$. **C.** $13\left(\text{m/s}\right)$. **D.** $15\left(\text{m/s}\right)$.

✍ Lời giải

Câu 10: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=-2t+10\left(m/s\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16m$. **B.** $55m$. **C.** $25m$. **D.** $50m$.

✍ Lời giải

Câu 11: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \left(m/s^2\right)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17\,m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200\,m$. **B.** $1014\,m$. **C.** $966\,m$. **D.** $36\,m$.

✍ Lời giải

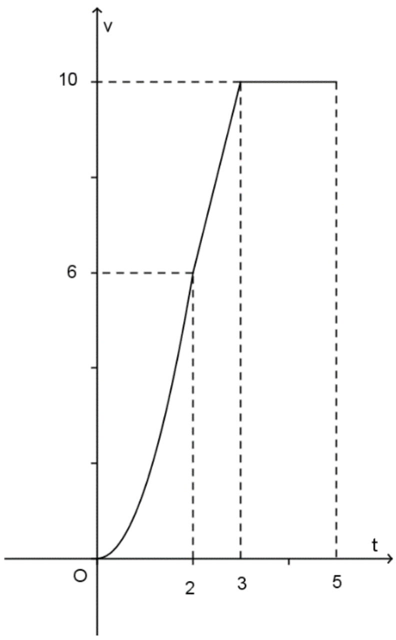
………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

Câu 12: Một chiếc xe đua F_1 đạt tới vận tốc lớn nhất là $360\,km/h$. Đồ thị bên biểu thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu tiên là một phần của parabol đỉnh tại gốc tọa độ O, giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng 3 giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị $10\,m/s$ và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu?



A. 340 (mét). **B.** 420 (mét). **C.** 400 (mét). **D.** 320 (mét).

✍ Lời giải

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

………………………………………………………… …………………………………………………………

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S(t) = t^3 + t^2 - 3t + 2$, trong đó t tính bằng giây (s) và S được tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2s$ bằng

A. $16\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$ **B.** $14\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$ **C.** $12\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$ **D.** $6\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$

Câu 2: Một ô tô đang chạy thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -12t + 24\ (m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $15m\cdot$ **B.** $24m.$ **C.** $20m.$ **D.** $18m.$

Câu 3: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,m/s$ bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu mét?

A. $12m$. **B.** $31m$. **C.** $32m$. **D.** $33m$.

Câu 4: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\ t\ = 180 - 20t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. 810 m. **B.** 9 m. **C.** 160 m. **D.** 180 m.

Câu 5: Một xe ô tô đang đi với vận tốc $10\,\mathrm{m/s}$ thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t(\mathrm{m/s})$, ở đó t tính bằng giây. Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng

A. $5\,\mathrm{m}$. **B.** $10\,\mathrm{m}$. **C.** $6\,\mathrm{m}$. **D.** $12\,\mathrm{m}$.

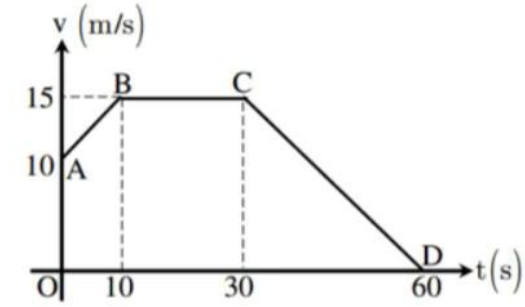
Câu 6: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t\,(m/s)$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0\,(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. $810\,m$. **B.** $9\,m$. **C.** $180\,m$. **D.** $160\,m$.

Câu 7: Một xe ô tô đang đi với vận tốc $10\,m/s$ thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t\,(m/s)$, ở đó t tính bằng giây. Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng

A. $5m$. **B.** $10m$. **C.** $6m$. **D.** $12m$.

Câu 8: Một vật chuyển động thẳng có đồ thị vận tốc-thời gian như hình vẽ sau:



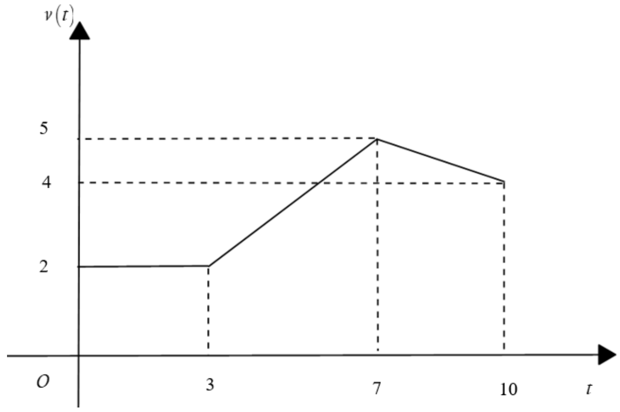
Tính quãng đường vật chuyển động trong 60.

A. $620(m)$. **B.** $630(m)$. **C.** $250(m)$. **D.** $650(m)$.

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn thì ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. $10m$. **B.** $40m$. **C.** $20m$. **D.** $30m$.

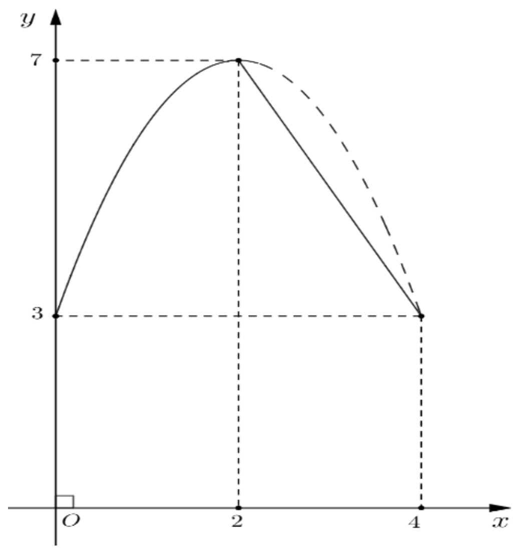
Câu 10: Một vật chuyển động trong 10 giây với vận tốc $v(m/s)$ phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ có đồ thị như hình vẽ



Quãng đường vật chuyển động được trong 10 giây bằng

A. $\frac{63}{2}m$. **B.** $\frac{67}{2}m$. **C.** $\frac{61}{2}m$. **D.** $\frac{65}{2}m$.

Câu 11: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là mổ phần của đường parabol có đỉnh $I(2;7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng IA. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=15,81(km)$. **B.** $s=17,33(km)$. **C.** $s=23,33(km)$. **D.** $s=21,33(km)$.

Câu 12: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh đần đều với vận tốc $v_t=8t(m/s)$. Đi được $5(s)$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-75\left(m/s^2\right)$. Quãng đường $S(m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $S=94,00(m)$. **B.** $S=166,7(m)$. **C.** $110,7(m)$. **D.** $S=95,70(m)$.

Câu 13: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_t = 8t\ (m/s)$. Đi được $5\ (s)$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -75\ (m/s^2)$. Quãng đường $S\ (m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $S = 94,0\ (m)$. **B.** $S = 166,7\ (m)$. **C.** $S = 110,7\ (m)$. **D.** $S = 95,7\ (m)$.

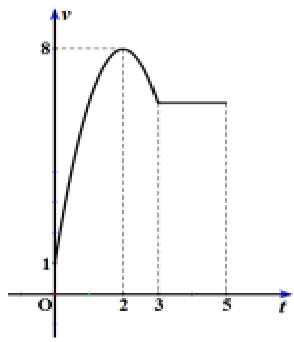
Câu 14: Hàng ngày anh An đi làm bằng xe máy trên cùng một cung đường từ nhà đến cơ quan mất 15 phút. Hôm nay khi đang di chuyển trên đường với vận tốc v_o thì bất chợt anh gặp một chướng ngại vật nên anh đã hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -6m/s^2$. Biết rằng tổng quãng đường từ lúc anh nhìn thấy chướng ngại vật và quãng đường anh đã đi được trong $3s$ đầu tiên kể từ lúc hãm phanh là $35,5m$. Tính v_o.

A. $v_o = 45km/h$. **B.** $v_o = 40km/h$. **C.** $v_o = 60km/h$. **D.** $v_o = 50km/h$.

Câu 15: Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

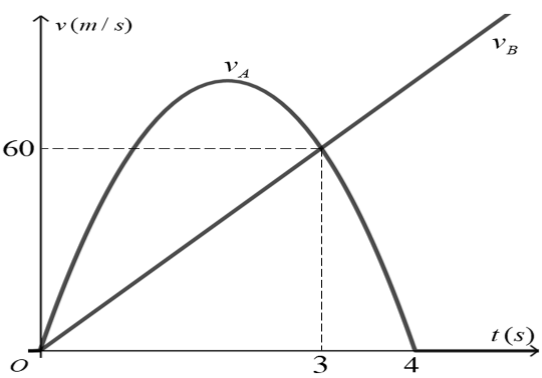
A. 20 m. **B.** 10 m. **C.** 16 m. **D.** 18 m.

Câu 16: Một vật chuyển động trong 5 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;8)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 5 giờ đó.



A. $s = 18,75km$. **B.** $s = 31,5km$. **C.** $s = 12,5km$. **D.** $s = 31,25km$.

Câu 17: Cho đồ thị biểu thị vận tốc của hai chất điểm A và B xuất phát cùng lúc, bên cạnh nhau và cùng trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm A là một parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ sau:



Hỏi sau khi đi được 3 giây, khoảng cách của hai chất điểm là bao nhiêu mét?

A. $90\,m$. **B.** $125m$. **C.** $270\,m$. **D.** $190\,m$.

Câu 18: Một vật chuyển động với gia tốc $a\left(t\right)=\dfrac{1}{t^2+3t+2}\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của vật là $v\left(t\right)$. Hỏi vào thời điểm $t=10\left(s\right)$ thì vận tốc của vật là bao nhiêu, biết $v'\left(t\right)=a\left(t\right)$ và vận tốc ban đầu của vật là $v_0=3\ln 2\left(m/s\right)$?

A. $2,69\left(m/s\right)$. **B.** $2,31\left(m/s\right)$. **C.** $2,86\left(m/s\right)$. **D.** $1,23\left(m/s\right)$.

CHƯƠNG 5

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ 11 NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ CƠ BẢN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x)=F(x)+C$.

Chú ý: Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2. Tính chất

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ (với $k\neq 0$) $\Rightarrow \int [k.f(x)+l.g(x)]\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x+l\int g(x)\mathrm{d}x$

$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)+C$

3. Công thức đổi biến số: $\boxed{\int f[u(x)]u'(x)\mathrm{d}x=F[u(x)]+C}$

4. Công thức nguyên hàm từng phần: $\boxed{\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u}$

5. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u=u(x)$	Thường gặp
$\int \mathrm{d}x=x+C$	$\int \mathrm{d}u=u+C$	Vi phân $\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)=\mathrm{d}x$
$\int x^\alpha \mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$	$\int u^\alpha \mathrm{d}u=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\|x\|+C\ (x\neq 0)$	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln\|u\|+C\ (u(x)\neq 0)$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\|ax+b\|+C\ (a\neq 0)$
$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$	$\int \cos u\mathrm{d}u=\sin u+C$	$\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$	$\int \sin u\mathrm{d}u=-\cos u+C$	$\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=\tan u+C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$	$\int e^u\mathrm{d}u = e^u + C$	$\int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1)$	$\int a^u\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q}\mathrm{d}x = \frac{1}{p.\ln a}a^{px+q} + C\ (0 < a \neq 1)$

6. Một số nguyên tắc tính nguyên hàm cơ bản

Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.

Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.

Bậc chẵn của sin hoặc $cos \xrightarrow{PP}$ hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2a$; $cos^2a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2a$

Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

- **Phương pháp đổi biến số**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C$

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích hàm số đã cho $f(x) = g[u(x)].u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó, ta thấy $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$.

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

- **Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ** $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

Nếu bậc của tử số $P(x) \leq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp chia để đưa về công thức nguyên hàm số.

Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

- **Nguyên hàm từng phần**

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó ta có được $\int udv = uv - \int vdu \quad (*)$

Để tính nguyên hàm $\int udv = uv - \int vdu$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x)dx = udv$ (Chú ý: $dv = v'(x)dx$ và), tính $v = \int dv$ và $du = u'dx$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$.

Mẹo nhớ: "**Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**"

Dạng 1: Nguyên hàm của hàm số cơ bản

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x^3 + 3x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng:

A. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + Cx$.

B. $f(x) = 6x^2 + 6x + C$.

C. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3$.

D. $f(x) = 6x^2 + 6x$.

Lời giải

Chọn D

$f(x) = \left(2x^3 + 3x^2 + C\right)' = 6x^2 + 6x$.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int a^x \mathrm{d}x = a^x \ln a + C \ (0 < a \neq 1)$.

B. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

C. $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \neq -1$.

D. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f(3) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(0) + 2f(4)$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. $7 + 3\ln 2$.

D. $-5 + 7\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2x-3}{x-2}\mathrm{d}x = \int \left(2 + \frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = 2x + \ln|x-2| + C$.

$f(1) = 1 \Rightarrow 2 + \ln 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -1$.

$f(3) = 2 \Rightarrow 6 + \ln 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = -4$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} 2x + \ln(x-2) - 4 & \text{khi } x > 2 \\ 2x + \ln(2-x) - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Do đó $f(0) + 2f(4) = \ln 2 - 1 + 2(4 + \ln 2) = 7 + 3\ln 2$.

Câu 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2

B. 6.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Theo giả thiết $F(0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{0}+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Khi đó $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2} \Rightarrow F(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-\frac{1}{2}=4$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=12x^2+2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=\int(12x^2+2)dx=4x^3+2x+C$

Vì $f(1)=3 \Leftrightarrow 4.1^3+2.1+C=3 \Leftrightarrow C=-3$

Khi đó $f(x)=4x^3+2x-3$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x)=\int(4x^3+2x-3)dx=x^4+x^2-3x+C$

Lại có $F(0)=2 \Leftrightarrow C=2$ suy ra $F(x)=x^4+x^2-3x+2$

Khi đó $F(1)=1^4+1^2-3.1+2=1$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F'(x)=\frac{-1}{\ln x}$ **B.** $F'(x)=\frac{-1}{\ln x}+C$.

C. $F'(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. **D.** $F'(x)=-\frac{1}{\ln^2 x}$

Lời giải

Chọn C

Vì $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$. Nên $F'(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$

Câu 2: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu:

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K$. **B.** $F'(x)=f(x),\forall x\in K$.

C. $f'(x)=F(x),\forall x\in K$. **D.** $f'(x)=-F(x),\forall x\in K$.

Lời giải

Chọn B

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu: $F'(x)=f(x),\forall x\in K$.

Câu 3: Cho $\int \frac{1}{x^2}dx = F(x)+C.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x)=-\frac{1}{x}.$ **B.** $F(x)=\frac{1}{x}.$ **C.** $F(x)=\ln x.$ **D.** $F(x)=\ln x^2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$ mà $\int \frac{1}{x^2}dx=F(x)+C$, suy ra $F(x)=-\frac{1}{x}.$

Vậy $F(x)=-\frac{1}{x}.$

Câu 4: Cho hàm số $y=x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $F(2)-F(0)=16\cdot$ **B.** $F(2)-F(0)=1\cdot$ **C.** $F(2)-F(0)=8\cdot$ **D.** $F(2)-F(0)=4\cdot$

Lời giải

Chọn D

$F(x)=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$

$F(2)-F(0)=\left(\frac{2^4}{4}+C\right)-\left(\frac{0^4}{4}+C\right)=4\cdot$

Câu 5: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$?

A. $F(x)=3x^2$. **B.** $F(x)=3x^4$. **C.** $F(x)=4x^4$. **D.** $F(x)=\frac{1}{4}x^4$.

Lời giải

Chọn D

$F\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4\Rightarrow F'\left(x\right)=x^3\Rightarrow f\left(x\right)=x^3.$

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2x^2+x+1+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$,C là hằng số. Tính $f\left(2023\right)$.

A. 4047. **B.** 4046. **C.** 8093. **D.** 8092.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=4x+1$. Suy ra $f\left(2023\right)=8093$.

Câu 7: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^2$. Biểu thức $F'\left(25\right)$ bằng

A. 5. **B.** 625. **C.** 25. **D.** 125.

Lời giải

Chọn B

Vì $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^2$ nên

$F'\left(x\right)=f\left(x\right)=x^2\Rightarrow F'\left(25\right)=25^2=625.$

Câu 8: Tìm nguyên hàm $F(t)=\int txdt$.

A. $F(t)=x+t+C$. **B.** $F(t)=\frac{x^2t}{2}+C$.

C. $F(t)=\frac{xt^2}{2}+C$. **D.** $F(t)=\frac{(tx)^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(t)=xt$, với x là tham số, ta có nguyên hàm của hàm $f(t)$ là

$F(t)=\int f(t)dt=\int txdt=\frac{xt^2}{2}+C.$

Câu 9: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F\left(5\right)=2$ và $F\left(0\right)=1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $F\left(-1\right)=2-\ln 2$. **B.** $F\left(2\right)=2-2\ln 2$. **C.** $F\left(3\right)=1+\ln 2$. **D.** $F\left(-3\right)=2$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

Ta có: $F\left(x\right)=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|x-1\right|+C=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+C_1 & \text{khi} \quad x>1\\ \ln\left(1-x\right)+C_2 & \text{khi} \quad x<1\end{cases}.$

$F\left(5\right)=2\Leftrightarrow\ln 4+C_1=2\Leftrightarrow C_1=2-\ln 4=2-2\ln 2.$

$F\left(0\right)=1\Leftrightarrow\ln 1+C_2=1\Leftrightarrow C_2=1.$

Do đó: $F\left(x\right)=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+2-2\ln 2 & \text{khi} \quad x>1\\ \ln\left(1-x\right)+1 & \text{khi} \quad x<1\end{cases}.$

$F(-1)=\ln 2+1$; $F(2)=2-2\ln 2$; $F(3)=2-\ln 2$; $F(-3)=2\ln 2+1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=2\cos\left[2(x+\pi)\right]-3x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=2\sin\left[2(x+\pi)\right]-x^3+C$. **B.** $\int f(x)dx=\sin 2x-x^3+C$.

C. $\int f(x)dx=-\sin\left[2(x+\pi)\right]-x^3+C$. **D.** $\int f(x)dx=-4\sin\left[2(x+\pi)\right]-6x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)dx=\int\left[2\cos(2x+2\pi)-3x^2\right]dx=\int\left[2\cos 2x-3x^2\right]dx=\sin 2x-x^3+C$

Câu 11: Tính $\int \sin^2 2x\mathrm{d}x$

A. $\frac{\sin 4x}{8}+C$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}+C$. **C.** $-\frac{\cos^3 2x}{3}+C$. **D.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \sin^2 2x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{8}\int\cos 4x\mathrm{d}(4x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+C$

Câu 12: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x+1}-2x^2$ là

A. $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}-2x^3}{3}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-x^3$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3}-2x^3$. **D.** $\frac{\mathrm{e}^{3x+1}-x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)dx=\int(e^{3x+1}-2x^2)dx=\frac{1}{3}\int e^{3x+1}d(3x+1)-\frac{2}{3}x^3$

$=\frac{e^{3x+1}-2x^3}{3}$.

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x+\frac{1}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $-3\sin x+\frac{1}{x}+C$. **B.** $3\cos x+\frac{1}{x}+C$. **C.** $3\cos x+\ln x+C$. **D.** $3\sin x-\frac{1}{x}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3\cos x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int 3\cos x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=3\sin x-\frac{1}{x}+C$.

Câu 14: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2$ là

A. $H(x)=6x$. **B.** $G(x)=x^3+1$. **C.** $F(x)=x^3+x$. **D.** $K(x)=3x^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$

Do đó một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2$ là $G(x)=x^3+1$

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^3-3x^2-1$ là

A. $2x^4-3x^3-x+C$. **B.** $2x^2-3x+C$. **C.** $\frac{1}{2}x^4-x^3-x+C$. **D.** $6x^2-6x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x^3-3x^2-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-x^3-x+C$.

Câu 16: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$ và $F(1)=1$. Tính $F(3)$?

A. $F(3)=\ln 3$. **B.** $F(3)=\ln 3+C$. **C.** $F(3)=\ln 3+1$. **D.** $F(3)=\ln 3+3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$ là:

$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$.

$F(1)=1 \Rightarrow \ln 1+C=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow F(3)=\ln 3+1$.

Câu 17: Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{-\frac{4}{5}}$ là

A. $-\frac{5}{9}x^{-\frac{9}{5}}+C$. **B.** $\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}}+C$. **C.** $5x^{\frac{1}{5}}+C$. **D.** $-\frac{9}{5}x^{-\frac{9}{5}}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{4}{5}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{5}}+C=5x^{\frac{1}{5}}+C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4^x+\cos 2x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{\sin 2x}{2}+C$. **B.** $4^x\ln 4+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

C. $4^x\ln 4-\frac{\sin 2x}{2}+C$. **D.** $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(4^x+\cos 2x\right)dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Câu 19: Trên khoảng $(0;+\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$ là

A. $\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+C$. **B.** $\int f(x)dx=3x^{\frac{1}{3}}+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$.

Lời giải

Chọn D

Trên khoảng $x\in(0;+\infty)$, ta có $\int\sqrt[3]{x}dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+C.$

Câu 20: Cho hàm số $y=F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Tính $F'(25)$.

A. 5. **B.** 25. **C.** 625. **D.** 125.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x)=f(x)\Rightarrow F'(25)=f(25)=25^2=625$.

Câu 21: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=F(-\pi)+2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $S=\frac{3}{4}-\frac{\pi}{4}$. **B.** $S=\frac{3}{2}-\frac{3\pi}{8}$. **C.** $S=\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{8}$. **D.** $S=\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Vì Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x$ nên ta có

$\int\sin^2 x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C=F(x)$.

Ta có $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$.

Suy ra $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$.

Khi đó $S=F(-\pi)+2F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{5\pi}{8}\right)+2\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{8}$.

Câu 22: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=1-2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ là

A. $1-x^2+\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$ **B.** $x-x^2-\sqrt{x}+C$. **C.** $x-x^2-\sqrt{x}+C$. **D.** $1-x^2+\sqrt{x}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=x-x^2+\sqrt{x}+C.$

Câu 23: Tìm nguyên hàm L của hàm số $f(x)=(x+1)^2$.

A. $L=2(x+1)+C$, C là hằng số. **B.** $L=2x+C$, C là hằng số.

C. $L=\frac{(x+1)^3}{3}+C$, C là hằng số. **D.** $L=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$, C là hằng số.

Lời giải

Chọn C

$L=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)^2\mathrm{d}x=\frac{(x+1)^3}{3}+C$.

Câu 24: Họ các nguyên hàm $\int \sin(2x+1)\mathrm{d}x$ là

A. $-\frac{\cos(2x+1)}{2}+C$. **B.** $\frac{\cos(2x+1)}{2}+C$. **C.** $\frac{\sin(2x+1)}{2}+C$. **D.** $-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

Câu 25: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=5x^4+4x^3+\mathrm{e}^x$ là

A. $x^5+x^4+\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$. **B.** $20x^3+12x^2+\mathrm{e}^x+C$.

C. $x^5+x^4+\mathrm{e}^x+C$. **D.** $x^5+x^4+\mathrm{e}^{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int(5x^4+4x^3+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int 5x^4\mathrm{d}x+\int 4x^3\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^5+x^4+\mathrm{e}^x+C$.

Câu 26: Nguyên hàm $I=\int\frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **C.** $-\ln|2x+3|+C$. **D.** $\ln|2x+3|+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int\frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Câu 27: Kết quả $\int(x+e^{2020x})dx$ bằng

A. $x^2+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **B.** $x^3+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$. **D.** $x+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int(x+e^{2020x})dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2020x}}{2020}+C$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=(2x+1)^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right)=4$. Hãy tính $P=F\left(\frac{3}{2}\right)$.

A. $P=32$. **B.** $P=34$. **C.** $P=18$. **D.** $P=30$.

Lời giải

Chọn B

$\int(2x+1)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^4}{4}+C=\frac{(2x+1)^4}{8}+C$.

$F\left(\frac{1}{2}\right)=4\Rightarrow 2+C=4\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=\frac{(2x+1)^4}{8}+2$.

Do đó $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=34$.

Câu 29: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{-x}\left(2+\dfrac{e^x}{\cos^2 x}\right)$.

A. $F(x)=-\dfrac{2}{e^x}+\tan x+C$.

B. $F(x)=2e^x-\tan x+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{2}{e^x}-\tan x+C$.

D. $F(x)=2e^{-x}+\tan x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int e^{-x}\left(2+\dfrac{e^x}{\cos^2 x}\right)dx=\int\left(2e^{-x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx=-2e^{-x}+\tan x+C=-\dfrac{2}{e^x}+\tan x+C$.

Câu 30: $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{\mathrm{d}x}{5x+9}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{3}{2}$.

B. $\dfrac{2}{5}\ln\dfrac{3}{2}$.

C. $\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{3}{2}$.

D. $10\ln\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{\mathrm{d}x}{5x+9}=\dfrac{1}{5}\ln|5x+9|\Big|_{-1}^{0}=\dfrac{1}{5}(\ln 9-\ln 4)=\dfrac{2}{5}\ln\dfrac{3}{2}$.

Câu 31: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=6x+\sin 3x$ và $F(0)=\dfrac{2}{3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x)=3x^2+\dfrac{\cos 3x}{3}+1$.

B. $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+\dfrac{2}{3}$.

C. $F(x)=3x^2+\dfrac{\cos 3x}{3}-1$.

D. $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+1$.

Lời giải

Chọn D

Họ nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(6x+\sin 3x)\mathrm{d}x=3x^2-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

Vì $F(0)=\dfrac{2}{3}$ nên $-\dfrac{1}{3}+C=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=3x^2-\dfrac{1}{3}\cos 3x+1$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=2x^4+3x^3+2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=8x^3+9x^2+2+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^4+8x^3+9x^2+2+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^5+3x^4+2x^2+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^5}{5}+\dfrac{3x^4}{4}+x^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^4+3x^3+2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^5}{5}+\dfrac{3x^4}{4}+x^2+C$.

Câu 33: Cho hàm số $f\left(x\right)=\cos x-2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\sin x-x^2+C$.
B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\sin x-x^2$.
C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\sin x-x^2$.
D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\sin x-x^2+C$.

Lời giải

Chọn A

Khẳng định đúng là $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\sin x-x^2+C$.

Câu 34: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sin^2 x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.
B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.
C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.
D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\sin^2 x\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

Câu 35: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\left(3x-1\right)^4$ là

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\left(3x-1\right)^5}{15}+C$.
B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=12\left(3x-1\right)^3+C$.
C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\left(3x-1\right)^4}{5}+C$.
D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\left(3x-1\right)^5}{12}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x-1\right)^4\mathrm{d}x=\dfrac{\left(3x-1\right)^5}{15}+C$.

Câu 36: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\tan x+\cot x+x+C$.
B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\tan x-\cot x-x+C$.
C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\tan x+\cot x-x+C$.
D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\tan x+\cot x-x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\tan x+\cot x-x+C$.

Câu 37: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-11$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x+C$.
B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}-11x+C$.
C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+11x+C$.
D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=x^4-11x+C$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^3-11\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}-11x+C$.

Câu 38: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$

A. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}-\ln|x|+C$.
B. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.
C. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}-\ln x+C$.
D. $\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int x^2-3x-\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}-\ln|x|+C$

Câu 39: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $2\sqrt{x^2+1}+C$.
B. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.
C. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$.
D. $\sqrt{x^2+1}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+C$.

Câu 40: Cho $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2+\sin x+C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(x\right)=x^3+\cos x$.
B. $f\left(x\right)=x^3-\cos x$.
C. $f\left(x\right)=6x-\cos x$.
D. $f\left(x\right)=6x+\cos x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2+\sin x+C\Rightarrow f\left(x\right)=6x+\cos x$.

Câu 41: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\ \ x\ =x^2-3x+\dfrac{2}{x}$ là

A. $F\ \ x\ =\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2\ln x+C$.
B. $F\ \ x\ =\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2\ln x+C$.
C. $F\ \ x\ =2x-3-\dfrac{2}{x^2}+C$.
D. $F\ \ x\ =\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2\ln|x|+C$.

Lời giải

Chọn D.

$\int\left(x^2-3x+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2\ln|x|+C$.

Câu 42: Cho $F\ \ x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\ \ x\ =\mathrm{e}^{x^2}\ \ x^3-4x$. Hàm số $F\ \ x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.
B. 4.
C. 2.
D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $F'\ x\ = f\ x\ = \mathrm{e}^{x^2}\ x^3-4x\ $, $F'\ x\ = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}\ x^3-4x\ = 0 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Suy ra hàm số $F\ x$ có 3 điểm cực trị.

Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=4x^3-m+1$, $f\left(2\right)=1$ và có đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm được $f\left(x\right)=ax^4+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. -11. **B.** -5. **C.** -13. **D.** -7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f\left(x\right)=x^4-\left(m-1\right)x+C$

Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} C=3 \\ 16-\left(m-1\right).2+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ m-1=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ m=10 \end{cases}$

Do đó: $f\left(x\right)=x^4-9x+3 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-9 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=-5.$

Câu 44: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} e^{2x}+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 4x+2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Giả sử $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F\left(-2\right)=5$. Biết rằng $F\left(1\right)+3F\left(-1\right)=ae^2+b$ (trong đó a,b là các số hữu tỉ). Khi đó $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F\left(x\right)=\begin{cases} \int\left(e^{2x}+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2x}}{2}+x+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ \int\left(4x+2\right)\mathrm{d}x=2x^2+2x+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Do $F\left(-2\right)=5 \Leftrightarrow C_2=1$.

Do $F\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0^+}F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}F\left(x\right)=F\left(0\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+0+C_1=C_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+C_1=1 \Leftrightarrow C_1=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $F\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{2}+x+\dfrac{1}{2} & khi\ \ x\ge 0 \\ 2x^2+2x+1 & khi\ \ x<0 \end{cases}$.

Suy ra $F\left(1\right)+3F\left(-1\right)=\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{9}{2}$. Khi đó $a=\dfrac{1}{2}$; $b=\dfrac{9}{2}$.

Vậy $a+b=5$.

Câu 45: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(\sin x-\cos x\right)^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=-x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx=-x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

C. $\int f(x)dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Lời giải

Ta có $f(x) = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x$

Suy ra $\int f(x)dx = \int(1-\sin 2x)dx = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = e$. Tính $F(0)$.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = e^x + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int(e^x + 2x + 1)dx = e^x + x^2 + x + C$

Vì $f(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 + 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$

Khi đó $f(x) = e^x + +x^2 + x$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x) = \int(e^x + x^2 + x)dx = e^x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

Lại có $F(1) = e \Leftrightarrow C = -\frac{5}{6}$ suy ra $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$

Khi đó $F(0) = e^0 - \frac{5}{6} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 \;\; khi \; x \ge 1 \\ 3x^2 + 2 \; khi \, x < 1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $F(-2) + 2F(3)$.

A. 60. **B.** 28. **C.** -1. **D.** -48.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 \; khi \; x \ge 1 \\ x^3 + 2x + C_2 \; khi \; x < 1 \end{cases}$

Theo bài ra ta có $F(0) = 2 \Rightarrow 0^3 + 2.0 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ là hàm số liên tục tại $x = 1$

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} F(x) \Rightarrow 1^2 + 3.1 + C_1 = 1^3 + 2.1 + 2 \Rightarrow C_1 = 1$

Vậy: $F(-2) + 2F(3) = 28$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2021$, $f(2) = 2022$. Tính $S = f(5) - f(-1)$.

A. $S = \ln 4043$. **B.** $S = 1 + \ln 2$. **C.** $S = \ln 2$. **D.** $S = 1$.

Lời giải

Chọn B

Trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có $\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln(x-1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + C_1$.

Mà $f(2) = 2022 \Rightarrow C_1 = 2022$.

Trên khoảng $(-\infty;1)$ ta có $\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln(1-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x) + C_2$.

Mà $f(0) = 2021 \Rightarrow C_2 = 2021$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2022 & \text{khi} \quad x > 1 \\ \ln(1-x) + 2021 & \text{khi} \quad x < 1 \end{cases}$.

Suy ra $f(5) - f(-1) = \ln 4 + 2022 - (\ln 2 + 2021) = 2\ln 2 + 2022 - \ln 2 - 2021 = 1 + \ln 2$.

Dạng 2: Nguyên hàm của hàm số phân thức hữu tỷ

Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

- Nếu bậc của tử số $P(x)\geq$ bậc của mẫu số $Q(x)\xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x)\leq$ bậc của mẫu số $Q(x)\xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp chia để đưa về công thức nguyên hàm số.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X=a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng X^2+a^2.

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$.

A. $x+\frac{1}{x-2}+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-2|+C$. **C.** $x^2+\ln|x-2|+C$. **D.** $1+\frac{1}{(x-2)^2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}=x+\frac{1}{x-2}$.

Do đó họ các nguyên hàm của $f(x)$ là $\frac{x^2}{2}+\ln|x-2|+C$.

Câu 2: Cho $F(x)=\int \frac{1}{x(x+3)}\mathrm{dx}$. Kết quả nào sau đây đúng ?

A. $F(x)=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right|+C$. **B.** $F(x)=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\int \frac{1}{x(x+3)}\mathrm{dx}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{dx}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$.

Câu 3: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$?

A. $F(x)=\ln|x|+\ln|x-1|$. **B.** $F(x)=-\ln|x|+\ln|x-1|$.

C. $F(x)=\ln|x|-\ln|x-1|$. **D.** $F(x)=-\ln|x|-\ln|x-1|$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}$$

$$Thay: x=2\Rightarrow\frac{1}{2}=A+\frac{1}{2}B.$$

$$Thay: x=3\Rightarrow\frac{1}{6}=\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}\Rightarrow\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\ln|x-1|-\ln|x|+C.$$

Câu 4: Cho biết $\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=5\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-3\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=5\ln|x+1|-3\ln|x-2|+C.$$

Vậy $\begin{cases}a=5\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=8$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{2}{1-2x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\ln|1-2x|+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\ln|1-2x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=-4\ln|1-2x|+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{1-2x}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=\frac{2}{-2}\ln|1-2x|+C=-\ln|1-2x|+C$.

Câu 6: Họ các nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$ là

A. $F(x)=x+\ln(x+1)+C$.

B. $F(x)=x+\ln|x+1|+C$.

C. $F(x)=x+2\ln(x+1)+C$.

D. $F(x)=x+2\ln|x+1|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+3}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x+1|+C$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trên khoảng $-5;+\infty$, họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+5}$ là

A. $\ln\left|x+5\right|+C$. **B.** $\dfrac{1}{x+5}+C$. **C.** $\dfrac{1}{5}\ln\left|x+5\right|+C$. **D.** $\dfrac{-1}{\left(x+5\right)^2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\dfrac{1}{a}\ln\left|ax+b\right|+C\ \left(a\neq 0\right)$ ta được $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x+5}=\ln\left|x+5\right|+C$.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+\dfrac{1}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2+\dfrac{1}{x^2}+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2-\dfrac{1}{x^2}+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\ln\left|x\right|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\ln\left|x\right|+C$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sin x+5x^4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=-\cos x+20x^3+C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx=\cos x+20x^3+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=-\cos x+x^5+C$. **D.** $\int f\left(x\right)dx=\cos x+x^5+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f\left(x\right)dx=-\cos x+x^5+C$.

Câu 4: Họ các nguyên hàm $\int\dfrac{1}{2x+1}dx$ là

A. $\ln\left(2x+1\right)+C$. **B.** $\ln\left|2x+1\right|+C$. **C.** $\dfrac{\ln\left|2x+1\right|}{2}+C$. **D.** $\dfrac{\ln\left|x\right|}{2}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\dfrac{1}{2x+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+1\right|+C$.

Câu 5: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$ là

A. $2x+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+C$. **B.** $2x+\ln\left(x+1\right)+C$. **C.** $2x+3\ln\left(x+1\right)+C$. **D.** $2x-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \frac{2x+3}{x+1}\mathrm{d}x = \int\left(2+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 2x+\ln(x+1)+C$

Câu 6: Biết $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $a+b=-2$. **C.** $a+2b=2$. **D.** $a+b=2$.

Lời giải

Chọn A

Lí thuyết.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_0^1 = \ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2} = 2\ln 2-\ln 3.$$

Suy ra $a=2, b=-1 \Rightarrow a+2b=0$.

Câu 7: Họ nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2-x}dx$ là

A. $-\ln|x(x-1)|+C$. **B.** $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$. **C.** $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. **D.** $\ln|x(x-1)|+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \frac{1}{x^2-x}dx = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.

Câu 8: Cho biết $\int \frac{2x+7}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = a\ln|x+2|+b\ln|x+3|+C\,(a,b\in\mathbb{R})$. Tính $P=a^2+ab+b^2$.

A. $P=3$. **B.** $P=12$. **C.** $P=7$. **D.** $P=13$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int \frac{2x+7}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = \int \frac{2x+7}{(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x+2|-\ln|x+3|+C$.

Nên $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow P=a^2+ab+b^2=7$.

Câu 9: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ là:

A. $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. **B.** $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$.

C. $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. **D.** $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{x-(x-1)}{x(x-1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln|x-1|-\ln|x|+C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$$

Câu 10: Họ các nguyên hàm $\int \frac{1}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x$ là

A. $\frac{-1}{4x-2}+C$. **B.** $\frac{1}{2x-1}+C$. **C.** $\frac{-1}{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{4x-2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \frac{1}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2(2x-1)}+C = \frac{-1}{4x-2}+C$.

Câu 11: Cho biết $\int_1^3 \frac{x+4}{x}\mathrm{d}x = a+b\ln c,\ a,b,c\in\mathbb{Z}, c<9$. Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. $S=5$. **B.** $S=7$. **C.** $S=3$. **D.** $S=9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^3 \frac{x+4}{x}dx = \int_1^3\left(1+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \mathrm{d}x + \int_1^3 \frac{4}{x}\mathrm{d}x = 2+4\ln|x|\Big|_1^3 = 2+4\ln 3.$

Do đó $a=2, b=4, c=3 \Rightarrow S=9.$

Câu 12: Họ các nguyên hàm $\int \frac{x^2-x+1}{x-1}dx$ bằng

A. $x+\frac{1}{x-1}+C$. **B.** $x^2+\ln|x-1|+C$. **C.** $1-\frac{1}{(x-1)^2}+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \frac{x^2-x+1}{x-1}dx = \int\left(x+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x+4}$ là:

A. $\frac{1}{5}\ln(5x+4)+C$. **B.** $\ln|5x+4|+C$. **C.** $\frac{1}{\ln 5}\ln|5x+4|+C$. **D.** $\frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

Ta có $\int \frac{1}{5x+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$.

Câu 14: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}+C$. **B.** $3\ln(x-2)-\frac{2}{x-2}+C$.

C. $3\ln(x-2)-\frac{4}{x-2}+C$. **D.** $3\ln(x-2)+\frac{4}{x-2}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)=\dfrac{3x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}$, do vậy

$$\int\frac{3x-2}{(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx=3\ln(x-2)-\frac{4}{(x-2)}+C$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}, f(0)=2022, f(2)=2023$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=\ln 2$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C=\begin{cases}\ln(x-1)+C_1 \text{ khi } x>1\\ \ln(1-x)+C_2 \text{ khi } x<1\end{cases}$.

Do $f(2)=2023\Rightarrow\ln(2-1)+C_1=2023\Rightarrow C_1=2023\Rightarrow f(3)=\ln 2+2023$.

Mặt khác $f(0)=2022\Rightarrow\ln(1-0)+C_2=2022\Rightarrow C_2=2022\Rightarrow f(-1)=\ln 2+2022$.

Từ đó ta có: $S=f(3)-f(-1)=1$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$, $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}\ln 20+\dfrac{1}{3}$.

C. $\ln 80+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$.

Do đó, $f(x)=\int\dfrac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\left(\ln(1-x)-\ln(-x-2)\right)+C_1;\ x<-2\\ \dfrac{1}{3}\left(\ln(1-x)-\ln(x+2)\right)+C_2;\ -2<x<1\\ \dfrac{1}{3}\left(\ln(x-1)-\ln(x+2)\right)+C_3;\ x>1\end{cases}$.

Khi đó

$f(0)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left(\ln(1-0)-\ln(0+2)\right)+C_2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow C_2=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.

$f(-3)-f(3)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left(\ln(1+3)-\ln(3-2)\right)+C_1-\left[\dfrac{1}{3}\left(\ln(3-1)-\ln(3+2)\right)+C_3\right]=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\ln 2+C_1-\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}\ln 5-C_3=0\Leftrightarrow C_1-C_3=-\dfrac{1}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}\ln 5=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

$f(-4)=\dfrac{1}{3}\left(\ln(1+4)-\ln(4-2)\right)+C_1=\dfrac{1}{3}\ln 5-\dfrac{1}{3}\ln 2+C_1$

$f(-1)=\frac{1}{3}\left(\ln(1+1)-\ln(-1+2)\right)+C_2=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$

$f(4)=\frac{1}{3}\left(\ln(4-1)-\ln(4+2)\right)+C_3=\frac{1}{3}\ln 3-\frac{1}{3}\ln 6+C_3=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_3$

Vì vậy:

$f(-4)+f(-1)-f(4)=\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 2+C_1+\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-C_3$

$=\frac{1}{3}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+C_1-C_3=\frac{1}{3}\ln 5+\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}$

$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}.$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{0;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-2x}$. Biết rằng $f(-2)+f(4)=0$ và $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=2018$. Tính $T=f(-1)+f(1)+f(5)$

A. $T=\frac{1}{2}\ln 5+1009$. **B.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}+1009$ **C.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}+2018$. **D.** $T=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2-2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x(x-2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)+C_1,\ \text{khi } x<0\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-x}{x}\right)+C_2,\ \text{khi } 0<x<2\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)+C_3,\ \text{khi } x>2\end{cases}$$

Ta có: $f(-2)+f(4)=\frac{1}{2}\ln 2+C_1+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_3=0\Rightarrow C_1+C_3=0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_2=2018\Rightarrow C_2=1009$

$T=f(-1)+f(1)+f(5)=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}+C_1+C_2+C_3=\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}+1009$

Câu 18: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+2x^3-10x^2-2x+1}$ có dạng $F(x)=\frac{a}{b}\ln\left|\frac{x^2-cx-1}{x^2+dx-1}\right|$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b+c+d$.

A. 24. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+2x^3-10x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+2x-10-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-8}$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{\left(x-\frac{1}{x}+4\right)-\left(x-\frac{1}{x}-2\right)}{\left(x-\frac{1}{x}-2\right)\left(x-\frac{1}{x}+4\right)}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{6}\int \left[\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x-\frac{1}{x}-2}-\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x-\frac{1}{x}+4}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|x-\frac{1}{x}-2\right|-\frac{1}{6}\ln\left|x-\frac{1}{x}+4\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{x}-2}{x-\frac{1}{x}+4}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-2x-1}{x^2+4x-1}\right|+C\,.$$

Dạng 3: Tìm nguyên hàm thỏa mãn điều kiện cho trước

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\frac{1}{2}$. **C.** $F(3)=\ln 2+1$. **D.** $F(3)=\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+C=\begin{cases}\ln(x-1)+C_1 & (x>1)\\ \ln(1-x)+C_2 & (x<1)\end{cases}$.

Theo giả thiết $F(2)=1\Rightarrow \ln 1+C_1=1\Leftrightarrow C_1=1$. Do đó $F(3)=\ln 2+1$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$; $f(0)=1$ và $f(1)=2$ Tính $P=f(-1)+f(3)$

A. $P=3+\ln 3$. **B.** $P=3+\ln 5$. **C.** $P=3+\ln 15$. **D.** $P=3-\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Có $f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=\begin{cases}\ln(2x-1)+C_1 \text{ khi } x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+C_2 \text{ khi } x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Để $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1\\ C_1=2\end{cases}$. Suy ra: $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2 \text{ khi } x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1 \text{ khi } x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Do đó $P=f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15.$

Câu 3: Biết $F(x)$ là môt nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$. Do $F(0)=0\Rightarrow \frac{1}{2}e^0+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$. Nên $F(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{2.\ln 3}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=e^{2x}+1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{3}{2}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=\frac{5}{4}$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $\frac{e^2+2}{4}$. **B.** $\frac{e^2+10}{4}$. **C.** $\frac{e+1}{2}$. **D.** $\frac{e+5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int\left(e^{2x}+1\right)dx=\frac{e^{2x}}{2}+x+C$ mà $f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow C=1$ nên $f(x)=\frac{e^{2x}}{2}+x+1$.

$F(x)=\int\left(\frac{e^{2x}}{2}+x+1\right)dx=\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C_1$ mà $F(0)=\frac{5}{4}$ nên $F(0)=\frac{1}{4}+C_1=\frac{5}{4}\Rightarrow C_1=1$.

Khi đó $F(x)=\frac{e^{2x}}{4}+\frac{x^2}{2}+x+1$. Vậy $F(1)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}+1+1=\frac{e^2+10}{4}$.

Câu 5: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$ thì $F(2022)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\ln 2020$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\ln 2021+1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x)=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$.

$F(2)=1\Rightarrow \ln|2-1|+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Từ đó ta được $F(2022)=\ln|2022-1|+1=\ln 2021+1$.

Câu 6: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right)=2$, $F(e)=\ln 2$.

Biết: $F\left(\frac{1}{e^2}\right)-F\left(e^2\right)=a+\ln b$. Giá trị của $a.b$ bằng

A 1. **B.** 4. **C.** -4. **D**2.

Lời giải

Chọn A

Với $\forall x>0; x\neq 1$. Ta có: $F(x)=\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln|\ln x|+C$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+C_1; x>1\\ \ln(-\ln x)+C_2; 0<x<1\end{cases}$$

Mà $F\left(\frac{1}{e}\right)=2\Leftrightarrow \ln(-\ln\frac{1}{e})+C_2=2\Rightarrow C_2=2$; $F(e)=\ln 2\Leftrightarrow \ln(-\ln\frac{1}{e})+C_2=\ln 2\Rightarrow C_2=\ln 2$.

Do đó $F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+\ln 2; x>1\\ \ln(-\ln x)+2; 0<x<1\end{cases}$

Vậy: $F\left(\frac{1}{e^2}\right)-F\left(e^2\right)=\ln\left(-\ln\frac{1}{e^2}\right)+2-\ln\left(\ln e^2\right)-\ln 2=2-\ln 2=2+\ln\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a=2; b=\frac{1}{2}\Rightarrow a.b=1$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x-\sin x$ là:

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}-\cos x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+\cos x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3x^2+\cos x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=3-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(3x-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+\cos x+C$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=2x+e^{-x}$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2023$

A. $F(x)=x^2-e^{-x}+2023.$

B. $F(x)=x^2-e^{x}+2024.$

C. $F(x)=x^2+e^{-x}+2022.$

D. $F(x)=x^2-e^{-x}+2024.$

Lời giải

Chọn D

$F(x)=\int\left(2x+e^{-x}\right)dx=\frac{2.x^2}{2}-e^{-x}+C=x^2-e^{-x}+C$

$F(0)=2023\Leftrightarrow 0^2-e^{-0}+C=2023\Leftrightarrow C=2024$

$F(x)=x^2-e^{-x}+2024.$

Câu 3: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $2<f(5)<3$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên

$$f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\ln\left(f(x)\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C.$$

Vì $f(1)=1$ nên $C=-\frac{4}{3}$. Suy ra $\ln\left(f(x)\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}$.

Vậy $f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\approx 3,794\in(3;4)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x)=\cos^2 x.\sin x$ và $f(0)=1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x)=\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{11}{3}$.

B. $f(x)=\cos^3 x+4$.

C. $f\left(x\right)=-\dfrac{\cos^3 x}{3}+\dfrac{13}{3}$. **D.** $f\left(x\right)=-\cos^3 x+5$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x=-\int \cos^2 x\mathrm{d}\left(\cos x\right)=-\dfrac{\cos^3 x}{3}+C.$

$f\left(0\right)=4\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}+C=4\Leftrightarrow C=\dfrac{13}{3}$.

Vậy $f\left(x\right)=-\dfrac{\cos^3 x}{3}+\dfrac{13}{3}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ thoả mãn $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$, $f\left(0\right)=2022$, $f\left(2\right)=2023$. Tính $S=f\left(3\right)-f\left(-1\right)$.

A. $S=0$. **B.** $S=\ln 4045$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\ln 2$.

Lời giải

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow f\left(x\right)=\int \dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|x-1\right|+C=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+C_1 & \text{khi } x>1\\ \ln\left(1-x\right)+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Mặt khác $\begin{cases}f\left(0\right)=2022\\ f\left(2\right)=2023\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=2022\\ C_1=2023\end{cases}$.

Vậy $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(x-1\right)+2023 & \text{khi } x>1\\ \ln\left(1-x\right)+2022 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Do đó $S=f\left(3\right)-f\left(-1\right)=\ln 2+2023-\ln 2-2022=1$.

Câu 6: Cho hàm số $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^2+6x$. Biết $F\left(3\right)=27$. Tính $F\left(-3\right)$.

A. $F\left(-3\right)=18.$ **B.** $F\left(-3\right)=0.$ **C.** $F\left(-3\right)=9.$ **D.** $F\left(-3\right)=-9.$

Lời giải

Chọn C

Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ là $F\left(x\right)=\dfrac{x^3}{3}+3x^2+C$. Vì $F\left(3\right)=27$ nên $C=-9$. Khi đó

$F\left(x\right)=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-9\Rightarrow F\left(-3\right)=9.$

Câu 7: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-1}$. Biết $F\left(1\right)=1$, giá trị của $F\left(5\right)$ bằng

A. $1+\ln 2$. **B.** $1+\ln 3$. **C.** $\ln 3$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+C$

Với $x>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó: $F(x)=\frac{1}{2}\ln(2x-1)+C$. Ta có: $F(1)=1\Leftrightarrow C=1$ suy ra $F(x)=\frac{1}{2}\ln(2x-1)+1$.

Vậy $F(5)=\frac{1}{2}\ln(2.5-1)+1=1+\ln 3$

Cách 2.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;5]$

Khi đó: $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-F(1)\Leftrightarrow F(5)=F(1)+\int_1^5 \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=1+\ln 3$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2x+1-\frac{2}{x-2}$ biết $F(1)=3$.

A. $F(x)=x^2+x-2\ln(2-x)+1$.
B. $F(x)=x^2+x+2\ln|x-2|+1$.
C. $F(x)=x^2+x-\ln|x-2|+1$.
D. $F(x)=x^2+x-2\ln|x-2|+1$.

Lời giải

Chọn D

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+1-\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x=x^2+x-2\ln|x-2|+C$.

Mà $F(1)=3$ nên $C=1\Rightarrow F(x)=x^2+x-2\ln|x-2|+1$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=x^2+\sin x+1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=1$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=x^3-\cos x+x+2$.
B. $F(x)=\frac{x^3}{3}+\cos x+x$.
C. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.
D. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+2$.

Lời giải

Chọn C

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có:

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\sin x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+C$.

Mà $F(0)=1\Rightarrow C-1=1\Leftrightarrow C=2$.

Vậy $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x+x+2$.

Câu 10: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x+2}$ và $F(-1)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 5-1$.
B. $F(3)=\ln 5+2$.
C. $F(3)=\ln 5+1$.
D. $F(3)=\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x=\ln|x+2|+C$.

$F(-1)=1\Rightarrow C=1$. Vậy $F(3)=\ln 5+1$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=24x^2+5x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. -2. **B.** $\frac{-8}{3}$. **C.** $\frac{-13}{2}$. **D.** $\frac{-15}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=8x^3+\frac{5}{2}x^2+C$ mà $f(1)=3\Leftrightarrow 8+\frac{5}{2}+C=3\Rightarrow C=\frac{-15}{2}$.

Khi đó: $f(x)=8x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{15}{2}$.

Lại có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=2x^4+\frac{5}{6}x^3-\frac{15}{2}x+C_1$ mà $F(0)=2\Leftrightarrow 0+C_1=2\Rightarrow C=2$.

Suy ra: $F(x)=2x^4+\frac{5}{6}x^3-\frac{15}{2}x+2\Rightarrow F(1)=\frac{-8}{3}$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $F(x)=x^3+2x^2+(m^2-1)x+C$ (C là hằng số) là nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+4x+3$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m=2$. **B.** $m=\pm4$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\pm2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x)=x^3+2x^2+(m^2-1)x+C$

$\Rightarrow F'(x)=3x^2+4x+(m^2-1)$.

Để $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $m^2-1=3\Leftrightarrow m=\pm2$.

Câu 13: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(1)$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e+2$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$.

Theo giả thiết $F(0)=2$ nên ta có $e^0+C=2\Leftrightarrow C=1$

Vậy $F(x)=e^x+1$. Suy ra $F(1)=e^1+1=e+1$.

Câu 14: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{-x^2-2x}{(x+1)^4}$ thoả $F(0)=-\frac{2}{3}$. Tính $F(1)$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{-7}{6}$. **C.** $\frac{-7}{24}$. **D.** $\frac{11}{24}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{-x^2-2x}{(x+1)^4}\mathrm{d}x=\int\frac{-(x+1)^2+1}{(x+1)^4}\mathrm{d}x$

$=\int\left[-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^4}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3(x+1)^3}+c$

Mà $F(-2)=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{-2+1}-\frac{1}{3(-2+1)^3}+c=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow-\frac{2}{3}+c=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow c=0$

Suy ra $F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3(x+1)^3}$. Vậy $F(1)=\frac{1}{1+1}-\frac{1}{3(1+1)^3}=\frac{11}{24}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=(2x-3)^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa mãn $F(2)=\frac{9}{8}$. Tính $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{1}{2}\right)=-1$. **B.** $F\left(\frac{1}{2}\right)=5$. **C.** $F\left(\frac{1}{2}\right)=3$. **D.** $F\left(\frac{1}{2}\right)=-2$.

Lời giải

Chọn C

$F(x)=\int(2x-3)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{(2x-3)^4}{4}+C=\frac{(2x-3)^4}{8}+C$.

$F(2)=\frac{9}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{8}+C=\frac{9}{8}\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=\frac{(2x-3)^4}{8}+1$.

Vậy $F\left(\frac{1}{2}\right)=3$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=4-3\sin x$ và $f(\pi)=5$. Tìm hàm số $f(x)$.

A. $f(x)=4x-3\cos x+8$. **B.** $f(x)=4x+3\cos x+1$.

C. $f(x)=4x+3\cos x+8$. **D.** $f(x)=4x-3\cos x+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(4-3\sin x)\mathrm{d}x=4x+3\cos x+C$.

Mà $f(\pi)=5\Leftrightarrow 4.0+3\cos\pi+C=5\Leftrightarrow C=8$.

Vậy $f(x)=4x+3\cos x+8$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-5}$, $f(4)=2021$, $f(6)=2022$. Đặt $P=21f(10)-20f(0)$. Hỏi giá trị của P xấp xỉ bằng?

A. 2022. **B.** $2043,6$. **C.** $2042,6$. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-5}\mathrm{d}x=\ln|x-5|+C$

Vì $f(4)=2021$, $f(6)=2022$ nên $\begin{cases}f(x)=\ln(5-x)+2021 & \text{khi } x<5\\ f(x)=\ln(x-5)+2022 & \text{khi } x>5\end{cases}$

$P=21f(10)-20f(0)=21(\ln 5+2022)-20(\ln 5+2021)=\ln 5+2042\approx 2043,6$.

Câu 18: Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\cdot\sqrt{\ln^2 x+1}$ và thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{3}\cdot$ Giá trị của $\left[F(e)\right]^2$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\cdot$ **B.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot$. **C.** $\dfrac{1}{9}\cdot$. **D.** $\dfrac{8}{9}\cdot$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\dfrac{\ln x}{x}\cdot\sqrt{\ln^2 x+1}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{\ln^2 x+1}\Rightarrow t^2=\left(\ln^2 x+1\right)\longrightarrow t\mathrm{d}t=\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.$

Khi đó $\int\dfrac{\ln x}{x}\cdot\sqrt{\ln^2 x+1}\mathrm{d}x=\int t^2\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{\left(\sqrt{\ln^2 x+1}\right)^3}{3}+C.$

Theo giả thiết $F(1)=\dfrac{1}{3}\longrightarrow\dfrac{1}{3}+C=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow C=0.$

Suy ra $F(x)=\dfrac{\left(\sqrt{\ln^2 x+1}\right)^3}{3}\longrightarrow\left[F(e)\right]^2=\dfrac{8}{9}\cdot.$

Câu 19: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0)=\dfrac{21}{2}\cdot$ Giá trị $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là

A. $\dfrac{e}{2}+10$. **B.** $2e+10$. **C.** $\dfrac{e}{2}+50$. **D.** $\dfrac{e}{2}+11$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int e^{2x}dx=\dfrac{e^{2x}}{2}+C$

Mà $F(0)=\dfrac{21}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{21}{2}\Rightarrow C=10$

Khi đó $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{e}{2}+10.$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=\sin x+x\cos x$ và $f(0)=0$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $\dfrac{\pi}{2}-1$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}-2$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}+2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+x\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x.$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left(\sin x\right) = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

Suy ra, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(0\right) = \frac{\pi}{2}$. Mà $f\left(0\right) = 0$ nên $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Câu 21: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $R\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right) = \frac{1}{x-1}$, $f\left(0\right) = 2017$ và $f\left(2\right) = 2018$. Tính $S = f\left(3\right) - f\left(-1\right)$.

A. $S = \ln 4035$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = \ln 2$. **D.** $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

Trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ ta có $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \ln\left(x-1\right) + C_1 \Rightarrow f\left(x\right) = \ln\left(x-1\right) + C_1$.

Mà $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ ta có $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \ln\left(1-x\right) + C_2 \Rightarrow f\left(x\right) = \ln\left(1-x\right) + C_2$.

Mà $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

Vậy $f\left(x\right) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 \text{ khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 \text{ khi } x < 1 \end{cases}$. Suy ra $f\left(3\right) - f\left(-1\right) = 1$.

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f''\left(x\right) = \sin 2x + e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(0\right) = f'\left(0\right) = 2$. Khi đó $f\left(\pi\right)$ có giá trị thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(22;25\right)$. **B.** $\left(28;30\right)$. **C.** $\left(5;8\right)$. **D.** $\left(19;22\right)$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $f''\left(x\right) = 2\sin x\cos x + e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

Nguyên hàm hai vế ta được: $f'\left(x\right) = \sin^2 x + e^x + C_1$

Với $f'\left(0\right) = 2 \Rightarrow C_1 = 1$

Suy ra $f'\left(x\right) = \sin^2 x + e^x + 1 = \frac{1-\cos 2x}{2} + e^x + 1 = \frac{3}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + e^x$

Nguyên hàm hai vế ta được: $f\left(x\right) = \frac{3}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + e^x + C_2$

Với $f\left(0\right) = 2 \Rightarrow C_2 = 1$

Suy ra $f\left(\pi\right) = \frac{3}{2}\pi + e^{\pi} + 1 \approx 28{,}85 \in \left(28;30\right)$.

Câu 23: Biết hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = \cos 2x$ và thoả mãn $F\left(\pi\right) = 1$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{2} + C$.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ nên $F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + C$.

Mà $F(\pi) = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Suy ra $F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 1$.

Khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = 2$, $f(-e) = 4$. Giá trị của $f(-2) - 2f(e^2)$ bằng

A. $-8 + \ln 2$. **B.** $-5 + \ln 2$. **C.** $-2 + \ln 2$. **D.** $-1 + \ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

$f(1) = 2 \Rightarrow \ln 1 + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2$

$f(-e) = 4 \Rightarrow \ln \mathrm{e} + C_2 = 4 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Khi đó $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2, & x > 0 \\ \ln(-x) + 3, & x < 0 \end{cases}$

$f(-2) - 2f(e^2) = \ln 2 + 3 - 2(2 + 2) = -5 + \ln 2$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -20x^3 + 6x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(-1) = 2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(1) = 3$, khi đó $F(2)$ bằng

A. -17. **B.** -1. **C.** -15. **D.** -74.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = -5x^4 + 3x^2 + C$

Với $f(-1) = 2 \Leftrightarrow -5 + 3 + C = 2 \Leftrightarrow C = 4$

$\Rightarrow f(x) = -5x^4 + 3x^2 + 4$

Mặt khác $F(x) = -x^5 + x^3 + 4x + C_1$

Với $F(1) = 3 \Leftrightarrow -1 + 1 + 4 + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 = -1$

$\Rightarrow F(x) = -x^5 + x^3 + 4x - 1$

Vậy $F(2) = -17$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=24x^2-18x+8,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(1\right)=2$. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(1\right)=4$, khi đó $F\left(-1\right)$ bằng

A. -30. **B.** 20. **C.** -5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(24x^2-18x+8\right)\mathrm{d}x=8x^3-9x^2+8x+C$

Mà $f\left(1\right)=2 \Rightarrow 7+C=2 \Rightarrow C=-5 \Rightarrow f\left(x\right)=8x^3-9x^2+8x-5$

Ta có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(8x^3-9x^2+8x-5\right)\mathrm{d}x=2x^4-3x^3+4x^2-5x+C$

Mà $F\left(1\right)=4 \Rightarrow -2+C=4\Leftrightarrow C=6 \Rightarrow F\left(x\right)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$

Vậy $F\left(-1\right)=20$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x},\forall x>0$ và $f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thoả mãn $F\left(1\right)=\dfrac{1}{6}$, khi đó $F\left(2\right)$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}+2\ln 2$. **B.** $\dfrac{2}{3}+\ln 4$. **C.** $\dfrac{1}{3}+\ln 2$. **D.** $\dfrac{1}{3}+\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Với $x>0$ ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+C$.

Lại có $f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1^2}{2}+\ln 1+C=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow C=0$. Tức là $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}+\ln x$.

Ta có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{6}+x\ln x-x+C'$.

Lại có $F\left(1\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{6}-1+C'=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow C'=1$. Tức là $F\left(x\right)=\dfrac{x^3}{6}+x\ln x-x+1$.

Vậy $F\left(2\right)=\dfrac{1}{3}+2\ln 2=\dfrac{1}{3}+\ln 4$.

Câu 28: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{2x-1}$ và $f\left(0\right)=1,\ f\left(1\right)=-2$. Giá trị $f\left(-1\right)+f\left(3\right)$ bằng

A. $2+\ln 15$. **B.** $\ln 15-1$. **C.** $3-\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{2x-1}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\int\dfrac{2}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln\left|2x-1\right|+C=\begin{cases}\ln\left(2x-1\right)+C_1,\ x>\dfrac{1}{2}\\ \ln\left(1-2x\right)+C_2,\ x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Do $f(0)=1\Rightarrow C_2=1$; $f(1)=-2\Rightarrow C_1=-2$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)-2,\ x>\dfrac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1,\ x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Do đó $f(-1)+f(3)=\ln 3+1+\ln 5-2=\ln 15-1$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$. Biết $3x^2$ là một nguyên hàm của $x^2f'(x)$ trên $(0;+\infty)$ và $f(1)=2$. Tính giá trị $f(\mathrm{e})$.

A. $f(\mathrm{e})=8$. **B.** $f(\mathrm{e})=6\mathrm{e}-2$. **C.** $f(\mathrm{e})=4$. **D.** $f(\mathrm{e})=3\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn A

Theo đề ta có $3x^2$ là một nguyên hàm của $x^2f'(x)$ trên $(0;+\infty)$

Do đó $\forall x\in(0;+\infty)$ thì $(3x^2)'=\left(\int x^2.f'(x)dx\right)'\Leftrightarrow 6x=x^2.f'(x)\Leftrightarrow\int\frac{6}{x}dx=\int f'(x)dx$

$\Rightarrow 6.\ln x+C=f(x)$ (Vì $x\in(0;+\infty)$ nên $\ln|x|=\ln x$)

Ta lại có: $f(1)=2\Leftrightarrow 6.\ln 1+C=2\Leftrightarrow C=2\Rightarrow f(x)=6.\ln x+2\Rightarrow f(e)=6.\ln e+2=8$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Giá trị của $f(\pi)$ bằng

A. $1+\frac{\pi}{2}$. **B.** $-1+\frac{\pi}{2}$. **C.** $1+\pi$. **D.** $-1+\pi$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ nên

$$f(x)=x\left[\sin x+f'(x)\right]+\cos x\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=-x\sin x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{\cos x}{x}+C.$$

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ nên $C=1$. Suy ra $f(x)=\cos x+x$.

Vậy $f(\pi)=\pi-1$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $R\setminus\{0\}$ thoả mãn $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $f(-2)=\frac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$ .Tính giá trị biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng.

A. $\frac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\frac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\frac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\frac{8\ln 2-3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{x+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln(x)-\frac{1}{x}+C_1 \text{ khi } x>0\\ \ln(-x)-\frac{1}{x}+C_2 \text{ khi } x<0\end{cases}$$

Do $f(-2)=\frac{3}{2}\Rightarrow \ln(-(-2))-\frac{1}{-2}+C_2=\frac{3}{2}\Rightarrow \ln 2+\frac{1}{2}+C_2=\frac{3}{2}\Rightarrow C_2=1-\ln 2$

Do $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}\Rightarrow \ln(2)-\frac{1}{2}+C_1=2\ln 2-\frac{3}{2}\Rightarrow \ln 2-\frac{1}{2}+C_1=2\ln 2-\frac{3}{2}\Rightarrow C_1=\ln 2-1$

Như vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(x)-\frac{1}{x}+\ln 2-1 \text{ khi } x>0\\ \ln(-x)-\frac{1}{x}+1-\ln 2 \text{ khi } x<0\end{cases}$

Vậy ta có

$$f(-1)+f(4)=\left[\ln(-(-1))-\frac{1}{-1}+1-\ln 2\right]+\left[\ln(4)-\frac{1}{4}+\ln 2-1\right]$$

$$=0+1+1-\ln 2+2\ln 2-\frac{1}{4}+\ln 2-1=2\ln 2+\frac{3}{4}=\frac{8\ln 2+3}{4}$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn $f'(x)=\mathrm{e}^x\cdot\left[f(x)\right]^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=-1$, khi đó $f(-1)$ bằng

A. e. **B.** -1. **C.** $-\mathrm{e}$. **D.** $-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\mathrm{e}^x\cdot\left[f(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=\mathrm{e}^x+C$.

Mặt khác $f(0)=-1$ suy ra $C=0$.

Do đó $f(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ nên $f(-1)=-\mathrm{e}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+2$ và $f(2)=\frac{9}{2}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(2)=4+\ln 2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $3+\ln 2$. **B.** $-3-\ln 2$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}+2x+C.$

Theo bài ra $f(2)=\frac{9}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}+4+C=\frac{9}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}+2x\Rightarrow F(x)=\ln|x|+x^2+M.$

Theo bài ra

$F(2)=4+\ln 2 \Rightarrow \ln 2+4+M=4+\ln 2 \Rightarrow M=0 \Rightarrow F(x)=\ln|x|+x^2 \Rightarrow F(1)=1$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x-4}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(2)=0$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+2f(-1)-f(3)$ bằng

A. $3\ln\dfrac{5}{2}+2$. **B.** $3\ln\dfrac{2}{5}+2$. **C.** $2\ln\dfrac{2}{5}+2$. **D.** $3\ln\dfrac{2}{5}+3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x-4}{x^2+x-2}=\dfrac{x-4}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{2(x+1)-1(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{-1}{x-1}$

Suy ra: $f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases}2\ln|x+2|-\ln|x-1|+C_1 & x<-2\\ 2\ln|x+2|-\ln|x-1|+C_2 & -2<x<1\\ 2\ln|x+2|-\ln|x-1|+C_3 & x>1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{(x+2)^2}{1-x}+C_1, & x<-2\\ \ln\dfrac{(x+2)^2}{1-x}+C_2, & -2<x<1.\\ \ln\dfrac{(x+2)^2}{x-1}+C_3, & x>1\end{cases}$$

Lại có: $\begin{cases}f(-3)-f(2)=0\\ f(0)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln\dfrac{1}{4}+C_1-C_3-\ln 16=0\\ \ln 4+C_2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_1-C_3=6\ln 2\\ C_2=1-2\ln 2\end{cases}$

Suy ra: $f(-4)+2f(-1)-f(3)=\ln\dfrac{4}{5}+C_1+2\left(\ln\dfrac{1}{2}+C_2\right)-\left(\ln\dfrac{25}{2}+C_3\right)$

$=\left[\ln\dfrac{4}{5}+2\ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{25}{2}\right]+\left[C_1+2C_2-C_3\right]=\ln\dfrac{2}{125}+6\ln 2+2(1-2\ln 2)=\ln\dfrac{8}{125}+2=3\ln\dfrac{2}{5}+2$

.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x+x.\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=F(\pi)=1$, khi đó giá trị của $F(2\pi)$ bằng.

A. $1+2\pi$. **B.** $1-4\pi$. **C.** $1-2\pi$. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=\sin x+x.\cos x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=\int(\sin x+x.\cos x)dx=-\cos x+\int x.\cos x dx$

$f(x)=-\cos x+x.\sin x-\int \sin x dx=-\cos x+x\sin x+\cos x+C_1=x\sin x+C_1$.

$F(x)=\int f(x)dx=\int(x\sin x+C_1)dx=-x\cos x+\int\cos x dx+C_1x=-x\cos x+\sin x+C_1x+C_2$.

Vì $F(0)=F(\pi)=1$ nên $\begin{cases} C_2=1 \\ \pi+C_1\pi+C_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=1 \\ C_1=-1 \end{cases}$.

Do đó $F(x)=-x\cos x+\sin x-x+1$.

Vậy $F(2\pi)=-2\pi-2\pi+1=1-4\pi$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=3$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng

A. $5+\ln 21$. **B.** $5+\ln 12$. **C.** $4+\ln 12$. **D.** $4+\ln 21$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=\frac{2}{2x-1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\begin{cases} \ln(2x-1)+C_1,\ khi\, x>\frac{1}{2} \\ \ln(1-2x)+C_2,\ khi\, x<\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$f(0)=\ln 1+C_2=1\Rightarrow C_2=1$

$f(1)=\ln 1+C_1=3\Rightarrow C_1=3$

Suy ra $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\begin{cases} \ln(2x-1)+3,\ khi\, x>\frac{1}{2} \\ \ln(1-2x)+1,\ khi\, x<\frac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó $f(-1)+f(4)=\ln 3+1+\ln 7+3=4+\ln 21$.

Câu 37: Biết rằng $x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $2f'(x)\text{cosx}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{4}$, giá trị của $F(\pi)$ bằng:

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $-\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $-\frac{5\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(-x)=(x\sin x)'=\text{sinx}+\text{x}\cos x$.

Do đó: $f(x)=\sin(-x)+(-x)\cos(-x)=-\text{sinx}-x\cos x$.

$f'(x)=(-\text{sinx}-x\cos x)'=-\cos x-(\cos x-x\sin x)=-2\cos x+x\text{sinx}$.

$2f'(x)\text{cosx}=2(-2\cos x+x\text{sinx})\text{cosx}=-4\cos^2 x+x\sin 2\text{x}$.

$\int 2f'(x)\cos xdx=\int\left(-4\cos^2 x+x\sin 2\text{x}\right)dx=\int\left[-2(1+\cos 2x)+x\sin 2\text{x}\right]dx$

$=-2x-\frac{1}{2}x\text{cos2x}-\frac{3}{4}\sin 2x+C$.

Suy ra: $F(x)=-2x-\frac{1}{2}x\text{cos2x}-\frac{3}{4}\sin 2x+C$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow -2.\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{2}-\frac{3}{4}\sin\frac{2\pi}{2}+C=-\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4}+C=-\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow C=0$.

$F(\pi)=-2\pi-\frac{1}{2}\pi\cos 2\pi-\frac{3}{4}\sin 2\pi+0=-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=12x^2-2,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ và $F(1)=-1$, khi đó $f(2)$ bằng

A. 30. **B.** 36. **C.** -3. **D.** 26.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=12x^2-2,\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $f(x)=4x^3-2x+C$.

Ta lại $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x)=x^4-x^2+Cx+D$.

Mà $F(0)=1$ và $F(1)=-1$ do đó, ta có $\begin{cases}D=1\\C+D=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=-2\\D=1\end{cases}$.

Vậy $F(x)=x^4-x^2-2x+1$ và $f(x)=4x^3-2x-2$.

Do đó $f(2)=4.2^3-2.2-2=26$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=e$ và $f'(x)+f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{e}$. **B.** $1-\frac{1}{e}$. **C.** $1+\frac{1}{e}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$f'(x)+f(x)=x\Leftrightarrow f'(x).e^x+f(x).e^x=xe^x\Leftrightarrow\left(e^x.f(x)\right)'=xe^x$.

Nên $\int\left(e^x.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int xe^x\mathrm{d}x\Leftrightarrow e^x.f(x)=xe^x-e^x+C\Rightarrow f(x)=\frac{xe^x-e^x+C}{e^x}$.

Do $f(1)=e\Rightarrow f(1)=\frac{e^1-e^1+C}{e^1}\Rightarrow C=e^2$.

Suy ra $f(x)=\frac{xe^x-e^x+e^2}{e^x}$

$f(2)=\frac{2.e^2-e^2+e^2}{e^2}=2$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(12x^2+2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)=4x^3+2x+C$.

Mà $f(1)=3 \Rightarrow 6+C=3 \Rightarrow C=-3 \Rightarrow f(x)=4x^3+2x-3$.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3+2x-3\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow F(x)=x^4+x^2-3x+C$.

Mà $F(0)=2 \Rightarrow C=2 \Rightarrow F(x)=x^4+x^2-3x+2$.

Vậy $F(1)=1$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ và $f'(x)=\cos x\left(6\sin^2 x-1\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0)=\frac{2}{3}$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\left(6\sin^2 x-1\right)\mathrm{d}x=\int\left(6\sin^2 x\cos x-\cos x\right)\mathrm{d}x$

$=6\int\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x-\sin x+C$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$

Suy ra $f(x)=6\int t^2\mathrm{d}t-\sin x+C=2t^3-\sin x+C=2\sin^3 x-\sin x+C$

Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow 2\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+C=1\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=2\sin^3 x-\sin x$

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\sin^3 x-\sin x\right)\mathrm{d}x=2\int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\mathrm{d}x+\cos x+C'$

Đặt $u=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$

Suy ra $F(x)=-2\int\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u+\cos x+C'=-2\left(u-\frac{u^3}{3}\right)+\cos x+C'$

$=-2\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C'=\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C'$

Mà $F(0)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{2}{3}\cos^3 0-\cos 0+C'=\frac{2}{3}\Leftrightarrow C'=1\Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+1$

Vậy $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1=1$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}, \forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=-\frac{1}{3}$, khi đó $F(9)$ bằng

A. $\frac{8}{3}+8\ln 3$. **B.** $9+18\ln 3$. **C.** $9+27\ln 3$. **D.** $-\frac{8}{3}+8\ln 3$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}, \forall x>0\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}+\ln x+C$

$f(1)=1\Rightarrow C=0$ hay $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$

Ta có $\int\limits_1^9 f(x)dx=F(9)-F(1)\Leftrightarrow F(9)=-\frac{1}{3}+\int\limits_1^9\sqrt{x}dx+\int\limits_1^9\ln xdx$

$=-\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^9+(x\ln x-x)\Big|_1^9=9+18\ln 3$

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x+x\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(\pi)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(\pi)=2\pi$, khi đó $F(0)$ bằng

A. π. **B.** -3π. **C.** $-\pi$. **D.** 3π.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x$

$=\int(\sin x+x\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\int x\cos x\,\mathrm{d}x=x\sin x+C$

Với $f(\pi)\Rightarrow\pi\sin\pi+C=0\Leftrightarrow C=0$. Suy ra $f(x)=x\sin x$.

Lại có:

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int x\sin x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C$

Với $F(\pi)=2\pi\Rightarrow-\pi\cos\pi+\sin\pi+C=2\pi\Leftrightarrow\pi+0+C=2\pi\Leftrightarrow C=\pi$.

Suy ra: $F(0)=-0\cos 0+\sin 0+\pi=\pi$

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thoả mãn $f(1)=2$; $f'(x)=\frac{x^2}{(f(x))^2}$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. $\sqrt[3]{34}$. **B.** 34. **C.** 3. **D.** $\sqrt[3]{20}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\frac{x^2}{(f(x))^2}\Rightarrow f'(x).(f(x))^2=x^2$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên lấy nguyên hàm hai vế

ta được $\int f'(x).(f(x))^2\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x\Rightarrow\int(f(x))^2\mathrm{d}(f(x))=\frac{1}{3}x^3+C\Rightarrow\frac{1}{3}(f(x))^3=\frac{1}{3}x^3+C$.

Với $x=1\Rightarrow\frac{1}{3}(f(1))^3=\frac{1}{3}+C\Rightarrow C=\frac{7}{3}$.

Do đó $\frac{1}{3}(f(x))^3=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{3}\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^3+7}$. Vậy $f(3)=\sqrt[3]{34}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x-1}+6x,\ \forall x\in(1;+\infty)$ và $f(2)=12$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa $F(x)=6$, khi đó giá trị biểu thức $P=F(5)-4F(3)$ bằng

A. 20. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\frac{1}{x-1}+6x,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow f(x)=\int\left(\frac{1}{x-1}+6x\right)dx=\ln(x-1)+3x^2+C,\forall x\in(1;+\infty)$

Vì $f(2)=12\Leftrightarrow \ln(2-1)+3.2^2+C=12\Leftrightarrow C=0$

Khi đó $f(x)=\ln(x-1)+3x^2,\forall x\in(1;+\infty)$

Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên

$F(x)=\int\left[\ln(x-1)+3x^2\right]dx=\ x\ln(x-1)-\int\frac{x}{x-1}dx+\int 3x^2dx+C$

$=x\ln(x-1)-\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx+\int 3x^2dx+C=x\ln(x-1)-x-\ln(x-1)+x^3+C$

Lại có $F(2)=6\Leftrightarrow -2+8+C=6\Leftrightarrow C=0$ suy ra $F(x)=x\ln(x-1)-x-\ln(x-1)+x^3$

Khi đó $F(5)=5\ln 4-5-\ln 4+5^3=8\ln 2+120$.

$F(3)=3\ln 2-3-\ln 2+3^3=-\ln 2+24$.

Suy ra: $P=F(5)-4F(3)=24$.

Câu 46: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+...+F(2021)+F(2022)$ bằng

A. $\frac{2022}{2023}$. **B.** $\frac{2022.2024}{2023}$. **C.** $2021\frac{1}{2023}$. **D.** $-\frac{2022}{2023}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}=\frac{2x+1}{x^2(x^2+2x+1)}=\frac{2x+1}{\left[x(x+1)\right]^2}$

$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{2x+1}{\left[x(x+1)\right]^2}dx$

Đặt $t=x(x+1)\Rightarrow dt=(2x+1)dx$

Khi đó $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C=\frac{-1}{x(x+1)}+C$

Với $F(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=1$

Vậy $F(x)=\frac{-1}{x(x+1)}+1$

Suy ra:

$S = F(1) + F(2) + F(3) + ... + F(2021) + F(2022)$

$= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right) + 2022$.

$= -\left(1 - \frac{1}{2023}\right) + 2022 = 2021 + \frac{1}{2023} = 2021\frac{1}{2023}$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = \left|-x^2 - 4x - 3\right|$ thỏa mãn $f(-4) + f(0) = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = f(2) + f\left(-\frac{5}{2}\right)$.

A. 21. **B.** -12. **C.** $\frac{301}{24}$. **D.** $\frac{-301}{24}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3; x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty) \\ x^2 + 4x + 3; x \in [-3; -1] \end{cases}$

Suy ra $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + C_1; x \in (-\infty; -3) \\ \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + C_2; x \in [-3; -1] \\ -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + C_3; x \in (-1; +\infty) \end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = f(-3)$ nên $C_1 = C_2$.

Vì $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ nên $-\frac{4}{3} + C_2 = \frac{4}{3} + C_3$.

Mà $f(-4) + f(0) = 3 \Rightarrow \frac{4}{3} + C_1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{5}{6} \Rightarrow C_3 = \frac{7}{2}$

Vậy $P = f(2) + f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{50}{3} + C_3 - \frac{5}{24} + C_2 = -\frac{301}{24}$..

Câu 48: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

Xét hàm số $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3}+C$	$\searrow$	

$\max\limits_{(0;\pi)}F(x)=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}+C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+2\sqrt{3}$.

Khi đó, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$.

Câu 49: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ và $F(1)=1$. Hệ số tự do của $F(x)$ thuộc khoảng

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\int\frac{(x+1)e^x-e^x}{(x+1)^2}dx=\int\left[\frac{e^x}{x+1}-\frac{e^x}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$=\int\left[\left(e^x\right)'.\frac{1}{x+1}+e^x.\left(\frac{1}{x+1}\right)'\right]dx=\int\left(e^x.\frac{1}{x+1}\right)'dx=\frac{e^x}{x+1}+C.$$

Do $F(1)=1\Rightarrow\dfrac{e}{2}+C=1\Leftrightarrow C=1-\dfrac{e}{2}\Rightarrow C\approx-0,36$.

Vậy hệ số tự do của $F(x)$ thuộc khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x & \text{khi } x\ge 1\\ 4x^3-2x+3 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=\dfrac{88}{9}$. Biết $2F(0)+F(4)=-\dfrac{a}{b}$,$(a,b)=1$ và a,b là các số nguyên dương. Khi đó, giá trị biểu thức $T=3a+b$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 2021. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=2\int\limits_3^0 f(x)dx+\int\limits_3^4 f(x)dx=2\left[F(0)-F(3)\right]+F(4)-F(3)=2F(0)+F(4)-3F(3)$.

Mặt khác $I=2\int\limits_3^0 f(x)dx+\int\limits_3^4 f(x)dx=2\left[\int\limits_3^1 f(x)dx+\int\limits_1^0 f(x)dx\right]+\int\limits_3^4 f(x)dx$

$=2\left[\int\limits_3^1\left(3x^2+2x\right)dx+\int\limits_1^0\left(4x^3-2x+3\right)dx\right]+\int\limits_3^4\left(3x^2+2x\right)dx=-30$.

$\Rightarrow 2F(0)+F(4)-3F(3)=-30 \Leftrightarrow 2F(0)+F(4)=-30+3F(3)=-\dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow a=2;b=3\Rightarrow T=9$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2+3 & \text{khi } x\ge 1\\ 5-x & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=20$. Giá trị của $F(-1)$ là

A. $-\dfrac{11}{3}$. **B.** $-\dfrac{14}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+3x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{C}_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Ta có $F(3)=20\Leftrightarrow \dfrac{3^3}{3}+3.3+C_1=20\Leftrightarrow C_1=2$.

Lại có hàm số $y=F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)$

$\Rightarrow \dfrac{1^3}{3}+3.1+2=5.1-\dfrac{1^2}{2}+\mathrm{C}_2\Rightarrow \mathrm{C}_2=\dfrac{5}{6}$

Vậy $F(-1)=5.(-1)-\dfrac{(-1)^2}{2}+\dfrac{5}{6}=-\dfrac{14}{3}$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2021 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2020 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Tính $4F(-2)+5F(2)$.

A. 4051. **B.** -2020. **C.** 2021. **D.** 4036.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x)=\begin{cases}x^2+2021x+C_1 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+2020x+C_2 \text{ khi } x<1\end{cases}$

$F(0)=2\Leftrightarrow C_2=2$. Do đó $F(x)=\begin{cases}x^2+2021x+C_1 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+2020x+2 \text{ khi } x<1\end{cases}$

Vì $F(x)=\begin{cases}x^2+2021x+C_1 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+2020x+2 \text{ khi } x<1\end{cases}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x)$ liên tục tại $x=1$, suy ra $2022+C_1=2023\Leftrightarrow C_1=1$.

Vậy $F(x)=\begin{cases}x^2+2021x+1 \text{ khi } x\ge 1\\ x^3+2020x+2 \text{ khi } x<1\end{cases}$

Do đó, $4F\left(-2\right)+5F\left(2\right)=4.\left(-4046\right)+5.4047=4051$.

Câu 53: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và $f\left(1\right)=2$, $f\left(-e\right)=4$. Giá trị của $f\left(-2\right)-2f\left(e^2\right)$ bằng

A. $-8+\ln 2$. **B.** $-5+\ln 2$. **C.** $-2+\ln 2$. **D.** $-1+\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln x+C_1, & x>0\\ \ln\left(-x\right)+C_2, & x<0\end{cases}$

$f\left(1\right)=2\Rightarrow \ln 1+C_1=2\Leftrightarrow C_1=2$

$f\left(-e\right)=4\Rightarrow \ln\mathrm{e}+C_2=4\Leftrightarrow C_2=3$

Khi đó $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x+2, & x>0\\ \ln\left(-x\right)+3, & x<0\end{cases}$

$f\left(-2\right)-2f\left(e^2\right)=\ln 2+3-2\left(2+2\right)=-5+\ln 2$.

Câu 54: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=6x+\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=3$, khi đó $F\left(\pi\right)$ bằng

A. $3\pi^3+\pi$. **B.** $\dfrac{\pi^3}{3}+\pi+3$. **C.** $\pi^3+\dfrac{\pi}{2}+3$. **D.** $\pi^3+\pi+3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(6x+\sin x\right)\mathrm{d}x=3x^2-\cos x+C_1$.

Mà $f\left(0\right)=0$ nên $C_1=1$. Suy ra $f\left(x\right)=3x^2-\cos x+1$.

Lại có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-\cos x+1\right)\mathrm{d}x=x^3-\sin x+x+C_2$.

Hơn nữa, $F\left(0\right)=3\Leftrightarrow C_2=3$.

$\Rightarrow F(x)=x^3-\sin x+x+3$.

Suy ra $F(\pi)=\pi^3-\sin\pi+\pi+3=\pi^3+\pi+3$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}+6x$, $\forall x\in(1;+\infty)$ và $f(2)=12$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa $F(2)=6$, khi đó giá trị biểu thức $P=F(5)-4F(3)$ bằng

A. 20. **B.** 24. **C.** 10. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

Trên $(1;+\infty)$ ta có $f(x)=\int\left(\dfrac{1}{x-1}+6x\right)dx=\ln(x-1)+3x^2+C$. Vì $f(2)=12$ nên $C=0$.

$F(x)=\int\left(\ln(x-1)+3x^2\right)dx=(x-1)\ln(x-1)-(x-1)+x^3+C_1.$

Vì $F(2)=6$ nên $C_1=-1$.

$F(x)=(x-1)\ln(x-1)+x^3-x.$ Vậy $P=F(5)-4F(3)=24.$

Câu 56: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x-\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=3$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\pi^3+12\pi}{6}+2$. **B.** $\dfrac{\pi^3-12\pi}{8}+2$. **C.** $\dfrac{\pi^3+12\pi}{8}+2$. **D.** $\dfrac{\pi^3-12\pi}{6}+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-\cos x)dx=3x^2-\sin x+C_1$.

Mà $f(0)=3$ nên $C_1=3$. Suy ra $f(x)=3x^2-\sin x+3$.

Lại có $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(3x^2-\sin x+3\right)dx=x^3+\cos x+3x+C_2$.

Hơn nữa, $F(0)=3\Leftrightarrow C_2=2$.

$\Rightarrow F(x)=x^3+\cos x+3x+2$.

Suy ra $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^3}{8}+\cos\dfrac{\pi}{2}+3.\dfrac{\pi}{2}+2=\dfrac{\pi^3+12\pi}{8}+2$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=2$, $f(-e)=4$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F\left(e^2\right)=2e$, khi đó $F(e)$ bằng

A. $3e-4e^2$. **B.** $4e-3e^2$. **C.** $4e-5e^2$. **D.** $5e^2-4e$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{1}{x}dx=\begin{cases}\ln x+C_1, & khi\ x>0\\ \ln(-x)+C_2, & khi\ x<0\end{cases}$.

Mà $f(1)=2\Rightarrow\ln 1+C_1=2\Leftrightarrow C_1=2$.

$f\left(-e\right)=4\Rightarrow \ln \mathrm{e}+C_2=4\Leftrightarrow C_2=3$.

Khi đó $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x+2 & khi\ \ x>0\\ \ln\left(-x\right)+3 & khi\ x<0\end{cases}$.

Ta có $F\left(e^2\right)-F\left(e\right)=\int_e^{e^2} f\left(x\right)dx=\int_e^{e^2}\left(\ln x+2\right)dx$

$=x\left(2+\ln x\right)\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2} dx=4e^2-3e-x\Big|_e^{e^2}=3e^2-2e$

Vậy $F\left(e\right)=4e-3e^2$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=2x^2-x-3,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ và tiếp tuyến của $F\left(x\right)$ tại điểm $M\left(0;2\right)$ có hệ số góc bằng 0. Khi đó $F\left(1\right)$ bằng

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{-7}{2}$. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Vì tiếp tuyến của $F\left(x\right)$ tại điểm $M\left(0;2\right)$ có hệ số góc bằng 0 $\Rightarrow\begin{cases}F'\left(0\right)=f\left(0\right)=0\\ F\left(0\right)=2\end{cases}$

Ta có: $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^2-x-3\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+C$.

Do $f\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$.

Vậy $f\left(x\right)=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x$.

Mà $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(1\right)-F\left(0\right)$

Suy ra $F\left(1\right)=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+F\left(0\right)=\int\limits_0^1\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x\right)\mathrm{d}x+2=\frac{1}{2}$.

Câu 59: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=6x-e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=-2$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=-1$, khi đó $F\left(1\right)$ bằng

A. $1-e$. **B.** $2e$. **C.** $\frac{1}{e}$. **D.** e.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(6x-e^x\right)\mathrm{d}x=3x^2-e^x+C_1$.

Mà $f\left(0\right)=-2$ nên $C_1=-1$. Suy ra $f\left(x\right)=3x^2-e^x-1$.

Lại có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-e^x-1\right)\mathrm{d}x=x^3-e^x-x+C_2$.

Hơn nữa, $F\left(0\right)=-1\Leftrightarrow -1+C_2=-1\Leftrightarrow C_2=0$.

$\Rightarrow F\left(x\right)=x^3-e^x-x$.

Suy ra $F\left(1\right)=1^3-e^1-1=e$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-4x^3+2x-1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=1,$ khi đó $F(2)$ bằng

A. $-\dfrac{131}{30}$. **B.** $\dfrac{131}{30}$. **C.** $\dfrac{41}{30}$. **D.** $-\dfrac{41}{30}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=-4x^3+2x-1\Rightarrow f(x)=\int(-4x^3+2x-1)\mathrm{d}x=-x^4+x^2-x+C_1$.

Do $f(0)=0\Rightarrow C_1=0$.

Nên $f(x)=-x^4+x^2-x$

Suy ra $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+C$

Mà $F(1)=1\Rightarrow C=\dfrac{41}{30}$.

Hay $F(x)=-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{41}{30}\Rightarrow F(2)=-\dfrac{131}{30}$.

Câu 61: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\cos x-e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-3$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $2\pi-e^{-\pi}$. **B.** $2\pi+e^{\pi}$. **C.** $2+\pi-e^{-\pi}$. **D.** $2\pi-e^{\pi}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(\cos x-e^{-x})\mathrm{d}x=\sin x+e^{-x}+C_1$.

Mà $f(0)=3$ nên $1+C_1=3\Leftrightarrow C_1=2$. Suy ra $f(x)=\sin x+e^{-x}+2$.

Lại có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+e^{-x}+2)\mathrm{d}x=-\cos x-e^{-x}+2x+C_2$.

Hơn nữa, $F(0)=-3\Leftrightarrow -1-1+C_2=-3\Leftrightarrow C_2=-1$.

$\Rightarrow F(x)=-\cos x-e^{-x}+2x-1$.

Suy ra $F(\pi)=2\pi-e^{-\pi}$.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x^2-2x+3,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(-2)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F(0)=2$. Tính $F(1)+2F(-2)$.

A. 26. **B.** $-\dfrac{314}{3}$. **C.** $-\dfrac{334}{3}$. **D.** -46.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=\int(6x^2-2x+3)\mathrm{d}x=2x^3-x^2+3x+C_1$

Do $f(-2)=3$ nên $C_1=29$. Khi đó: $f(x)=2x^3-x^2+3x+29$.

Mặt khác: $F(x)=\int(2x^3-x^2+3x+29)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+29x+C_2$

Do $F(0)=2$ nên $C_2=2$, khi đó $F(x)=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+29x+2$.

Vậy $F(1)+2F(-2)=\dfrac{98}{3}+2.\left(-\dfrac{118}{3}\right)=-46$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+3 \text{ khi } x\ge 1\\ 5-x \quad \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=20$. Giá trị của $F(-1)$ là

A. $-\dfrac{11}{3}$. **B.** $-\dfrac{14}{3}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+3x+C_1 \text{ khi } x\ge 1\\ 5x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 \text{ khi } x<1\end{cases}.$$

Ta có $F(3)=20\Leftrightarrow \dfrac{3^3}{3}+3.3+C_1=20\Leftrightarrow C_1=2$.

Lại có hàm số $y=F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)\Rightarrow \dfrac{1^3}{3}+3.1+2=5.1-\dfrac{1^2}{2}+C_2\Rightarrow C_2=\dfrac{5}{6}$

Vậy $F(-1)=5.(-1)-\dfrac{(-1)^2}{2}+\dfrac{5}{6}=-\dfrac{14}{3}$.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=2\sin^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=f(0)=1$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+4\pi+3}{16}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+4\pi+12}{16}$.

C. $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+\pi+3}{16}$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+\pi+12}{16}$.

Lời giải

Chọn B

\+ Ta có $f(x)=\int\left(2\sin^2 x+1\right)dx=\int\left(2-\cos 2x\right)dx=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $C=1\Rightarrow f(x)=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+1$

\+ Ta có $F(x)=\int\left(2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+1\right)dx=x^2+\dfrac{1}{4}\cos 2x+x+T$ (trong đó T là hằng số)

Vì $F(0)=1\Rightarrow \dfrac{1}{4}+T=1\Leftrightarrow T=\dfrac{3}{4}$, nên $F(x)=x^2+\dfrac{1}{4}\cos 2x+x+\dfrac{3}{4}$.

$\Rightarrow F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2+4\pi+12}{16}$

Câu 65: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=4x^3+4x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Khi đó $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{4}{15}$. **B.** $\dfrac{26}{15}$. **C.** $\dfrac{-4}{15}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)=\int\left(4x^3+4x\right)dx=x^4+2x^2+C\ (*)$.

Thay $x=0$ vào $(*)$ ta có: $f(0)=C=-1$. Vậy $f(x)=x^4+2x^2-1$.

Khi đó: $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^4+2x^2-1\right)dx=\dfrac{-4}{15}$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $f(0)=0, f(2)=2$. Khi đó $f(-1)+f(3)$ bằng:

A. $2-\ln 2$. **B.** $2+\ln 2$. **C.** 2. **D.** $2+2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=f(0)-f(-1)$ nên suy ra $f(-1)=f(0)-\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx=-\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx$.

Tương tự ta cũng có: $f(3)=f(2)+\int\limits_{2}^{3}f'(x)dx\ =2+\int\limits_{2}^{3}f'(x)dx$.

$\Rightarrow f(-1)+f(3)=2-\int\limits_{-1}^{0}f'(x)dx+\int\limits_{2}^{3}f'(x)dx=2-\ln|x-1|\Big|_{-1}^{0}+\ln|x-1|\Big|_{2}^{3}=2+2\ln 2$.

Vậy $f(-1)+f(3)=2+2\ln 2$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x-9\cos 3x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. -2π. **B.** $2-2\pi$. **C.** 2π. **D.** $2+2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x-9\cos 3x)\mathrm{d}x=-\cos x-3\sin 3x+C$.

Do $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow -\cos\dfrac{\pi}{2}-3\sin\left(3.\dfrac{\pi}{2}\right)+C=1\Rightarrow C=-2$.

Nên $f(x)=-\cos x-3\sin 3x-2$.

Ta có $F(x)=\int(-\cos x-3\sin 3x-2)\mathrm{d}x=-\sin x+\cos 3x-2x+C_1$.

Do $F\left(0\right)=2\Rightarrow -\sin 0+\cos \left(3.0\right)-2.0+C_1=2\Rightarrow C_1=1$.

Vậy $F\left(x\right)=-\sin x+\cos 3x-2x+1\Rightarrow F\left(\pi\right)=-2\pi$.

Câu 68: Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'\left(x\right)=2\mathrm{e}^{2x}+1,\ \forall x,\ f\left(0\right)=2$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(1\right)=\dfrac{3}{2}$, khi đó $F\left(2\right)$ bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}^4}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+4$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^4}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+4$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^4}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-4$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^4}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2\mathrm{e}^{2x}+1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+x+C$.

Theo bài ra ta có: $f\left(0\right)=2\Rightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}+x+1$.

Mà $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ nên $F\left(x\right)=\int\left(\mathrm{e}^{2x}+x+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{2}x^2+x+C_1$

$F\left(1\right)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\dfrac{3}{2}+C_1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C_1=-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$.

Suy ra $F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{e^2}{2}$.

Vậy $F\left(2\right)=\dfrac{\mathrm{e}^4}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+4$.

Câu 69: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ thoả mãn $f'\left(x\right)=\dfrac{2x-5}{x-1}$, $f\left(3\right)=2$ và $f\left(0\right)=4$. Giá trị của biểu thức $f\left(-3\right)-2f\left(5\right)$ bằng

A. -14. **B.** $6-3\ln 2$. **C.** $-2-6\ln 2$. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{2x-5}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(2-\dfrac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x=2x-3\ln\left|x-1\right|+C$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

+ Xét trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ ta có: $f\left(3\right)=2\Leftrightarrow 6-3\ln 2+C=2\Rightarrow C=-4+3\ln 2$.

Do đó, $f\left(x\right)=2x-3\ln\left|x-1\right|-4+3\ln 2$, với mọi $x\in\left(1;+\infty\right)$.

Suy ra $f\left(5\right)=10-6\ln 2-4+3\ln 2=6-3\ln 2$.

+ Xét trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ ta có: $f\left(0\right)=4\Leftrightarrow C=4$.

Do đó $f\left(x\right)=2x-3\ln\left|x-1\right|+4$, với mọi $x\in\left(-\infty;1\right)$.

Suy ra $f\left(-3\right)=-6-6\ln 2+4=-2-6\ln 2$.

Vậy $f\left(-3\right)-2f\left(5\right)=-14$.

Câu 70: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=e^{2x}$ và $F\left(0\right)=0$. Giá trị của $F\left(\ln 3\right)$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F\left(x\right)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}.e^{2x}+C$

$F\left(0\right)=0\Rightarrow\frac{1}{2}.e^{0}+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\Rightarrow F\left(x\right)=\frac{1}{2}.e^{2x}-\frac{1}{2}$

Khi đó: $F\left(\ln 3\right)=\frac{1}{2}.e^{2\ln 3}-\frac{1}{2}=4$.

Câu 71: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=6x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=3$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(1\right)=2$, khi đó $F\left(2\right)$ bằng

A. $\frac{37}{2}$. **B.** $-\frac{37}{2}$. **C.** $\frac{2}{37}$. **D.** $-\frac{2}{37}$.

Lời giải

Chọn A

$f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(6x^2+4\right)\mathrm{d}x=2x^3+4x+C$.

$f\left(0\right)=3\Leftrightarrow C=3\Rightarrow f\left(x\right)=2x^3+4x+3$

$F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^3+4x+3\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{2}+2x^2+3x+C'$

$F\left(1\right)=2\Rightarrow C'=-\frac{7}{2}\Rightarrow F\left(x\right)=\frac{x^4}{2}+2x^2+3x-\frac{7}{2}\Rightarrow F\left(2\right)=\frac{37}{2}.$

Câu 72: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=24e^{2x}+e^{x}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(1\right)=12e^2+e$. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(1\right)=6e^2+e+3$, khi đó $F\left(0\right)$ bằng

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\int\left(24e^{2x}+e^{x}\right)dx=12e^{2x}+e^{x}+C$.

$f\left(1\right)=12e^2+e\Rightarrow 12e^2+e+C=12e^2+e\Rightarrow C=0$.

Suy ra $f\left(x\right)=12e^{2x}+e^{x}$.

Lại có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx=\int\left(12e^{2x}+e^{x}\right)dx=6e^{2x}+e^{x}+C'$.

$F\left(1\right)=6e^2+e+3\Rightarrow 6e^2+e+C'=6e^2+e+3\Rightarrow C'=3$.

Vậy $F\left(x\right)=6e^{2x}+e^{x}+3$.

Khi đó, $F\left(0\right)=10$.

Câu 73: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=12x^2+6x+6$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(-1\right)=-5$. Biết hàm số $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(1\right)=-8$. Tính $F\left(-1\right)$.

A. -10. **B.** 10. **C.** -14. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\int\left(12x^2+6x+6\right)dx=4x^3+3x^2+6x+C$.

$f\left(-1\right)=-5\Rightarrow C=2\Rightarrow f\left(x\right)=4x^3+3x^2+6x+2$

$F\left(1\right)-F\left(-1\right)=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)dx\Rightarrow F\left(-1\right)=F\left(1\right)-\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)dx$

$=-8-\int\limits_{-1}^{1}\left(4x^3+3x^2+6x+2\right)dx=-14$

Câu 74: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=4x^3-2x-1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$. Gọi $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ và $F\left(1\right)=-1,$ khi đó $F\left(2\right)$ bằng

A. $\frac{41}{30}$. **B.** $-\frac{41}{30}$. **C.** $\frac{21}{10}$. **D.** $\frac{26}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3-2x-1\Rightarrow f\left(x\right)=x^4-x^2-x+C$. Do $f\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$.

Nên $f\left(x\right)=x^4-x^2-x$, suy ra $F\left(x\right)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$, mà $F\left(1\right)=-1\Rightarrow C=\frac{-11}{30}$.

Hay $F\left(x\right)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{11}{30}\Rightarrow F\left(2\right)=\frac{41}{30}$.

Câu 75: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=12x^2+18x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ và thỏa mãn $f\left(0\right)=F\left(0\right)=0.$ Khi đó $F\left(1\right)$ bằng

A. 5. **B.** –5. **C.** 2. **D.** –2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)=\int(12x^2+18x+2)\mathrm{d}x=4x^3+9x^2+2x+C_1.$

Do $f\left(0\right)=0\Rightarrow C_1=0.$ Khi đó $f\left(x\right)=4x^3+9x^2+2x.$

Lại có $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm $f\left(x\right)$ nên ta có $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int(4x^3+9x^2+2x)\mathrm{d}x=x^4+3x^3+x^2+C_2.$

Mà $F\left(x\right)=0\Rightarrow C_2=0.$

Khi đó, $F\left(x\right)=x^4+3x^3+x^2.$

Vậy $F\left(1\right)=1^4+3.1^3+1^2=5.$

Câu 76: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\sin 3x+e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(0\right)=3$, khi đó $F\left(\pi\right)$ bằng

A. $-e^{-\pi}+2$. **B.** $e^{-\pi}+2$. **C.** $e^{-\pi}-2$. **D.** $-e^{-\pi}-2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\int\left(\sin 3x+e^{-x}\right)dx=-\frac{1}{3}\cos 3x-e^{-x}+C$

Với $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow -\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}-e^{-\frac{\pi}{2}}+C=-e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow C=0$

Vậy $f(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x-e^{-x}$

Ta có $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x-e^{-x}\right)dx=-\frac{1}{9}\sin 3x+e^{-x}+C_1$

Với $F(0)=3 \Leftrightarrow -\frac{1}{9}\sin 0+e^{-0}+C_1=3 \Leftrightarrow C_1=2$

Vậy $F(x)=-\frac{1}{9}\sin 3x+e^{-x}+2$

Khi đó $F(\pi)=-\frac{1}{9}\sin 3\pi+e^{-\pi}+2=e^{-\pi}+2$.

Câu 77: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{13}{4}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

A. $\frac{\pi+2\sqrt{2}+48}{16}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi-\sqrt{2}-8}{16}$. **D.** $\frac{\pi-2\sqrt{2}+48}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$f(x)=\int\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}.\int\left[1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx$

$=\frac{1}{2}.\int(1-\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$.

Vì $f(0)=\frac{13}{4} \Leftrightarrow C+\frac{1}{4}=\frac{13}{4} \Leftrightarrow C=3$.

Khi đó $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+3$, suy ra $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)+3=\frac{\pi+2\sqrt{2}+48}{16}$

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^*$ có đạo hàm đến cấp hai thỏa mãn $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f(-1)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(-3)=\ln 3$. Giá trị $f(-2)$ bằng

A. $4\ln 2$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $1+2\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^* \Rightarrow f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^*$

Ta có: $f''(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\int -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{x}+C_1 & (x>0)\\ \frac{1}{x}+C_2 & (x<0)\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln x+C_1x+D_1 & (x>0)\\ \ln(-x)+C_2x+D_2 & (x<0)\end{cases}$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(1)=0 \\ f(2)=0 \\ f(-3)=\ln 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=D_2=0 \\ C_1=-\ln 2 \\ D_1=\ln 2 \end{cases}$

$\Rightarrow f(-2)=\ln 2-2C_2+D_2=\ln 2$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin x+\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(\pi)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(2\pi)=3$, khi đó $F(3\pi)$ bằng

A. $\pi-1$. **B.** $\pi+5$. **C.** $3\pi-1$. **D.** $3\pi+5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=\cos x-\sin x+C_1$.

Từ $f(\pi)=0\Leftrightarrow \cos\pi-\sin\pi+C_1=0\Leftrightarrow C_1=1$.

Do đó $f(x)=\cos x-\sin x+1$.

Lại có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\cos x-\sin x+1)\mathrm{d}x=-\sin x-\cos x+x+C_2$.

Từ $F(2\pi)=3\Leftrightarrow -\sin 2\pi-\cos 2\pi+2\pi+C_2=3\Leftrightarrow C_2=4-2\pi$.

Do đó $F(x)=-\sin x-\cos x+x+4-2\pi$.

Vậy $F(3\pi)=-\sin 3\pi-\cos 3\pi+3\pi+4-2\pi=\pi+5$.

Câu 80: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=6x^2-2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$, khi đó $F(2)$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(6x^2-2\right)dx=2x^3-2x+C$

Với $f(1)=2\Rightarrow 2.1^3-2.1+C=2\Rightarrow C=2$

Vậy $f(x)=2x^3-2x+2$

Ta có $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(2x^3-2x+2\right)dx=\frac{1}{2}x^4-x^2+2x+C$

Mà $F(0)=0\Rightarrow C=0$

Vậy $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+2x$, suy ra $F(2)=4$.

Câu 81: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^3+2x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(-1)=3$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-1$, khi đó $F(-1)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $-\frac{14}{15}$. **C.** $\frac{1}{15}$. **D.** $\frac{-3}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(12x^3+2x\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)=3x^4+x^2+C$.

Mà $f(-1)=3 \Rightarrow 4+C=3 \Rightarrow C=-1 \Rightarrow f(x)=3x^4+x^2-1$.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^4+x^2-1\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow F(x)=3\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-x+C$.

Mà $F(0)=-1 \Rightarrow C=-1 \Rightarrow F(x)=3\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-x-1.$

Vậy $F(-1)=-\frac{14}{15}$.

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)>0,\ \forall x\in(1;3)$. Biết rằng $e^{2x}.f^3(x)+1=3e^x.f'(x).\sqrt{f(x)}$, $\forall x\in(1;3)$ và $f(2)=e^{-\frac{4}{3}}$, khi đó giá trị của $f\left(\frac{3}{2}\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $e^{2x}.f^3(x)+1=3e^x.f'(x).\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow e^{2x}.f^3(x)+1=2e^x.\left(\sqrt{f^3(x)}\right)'$

$\Leftrightarrow e^{2x}.f^3(x)+1=2\left[\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}\right)'-e^x.\sqrt{f^3(x)}\right] \quad \Leftrightarrow \left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)^2=2\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}\right)'$

$\Leftrightarrow \frac{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)'}{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \int\frac{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)'}{\left(e^x.\sqrt{f^3(x)}+1\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{e^x.\sqrt{f^3(x)}+1}=\frac{1}{2}x+C$ (*).

Vì $f(2)=e^{\frac{-4}{3}}$ nên (*) $\Leftrightarrow \frac{-1}{2}=1+C \Leftrightarrow C=\frac{-3}{2}$

Do đó: $\frac{-1}{e^x.\sqrt{f^3(x)}+1}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{(x-3).e^x}\right)^2}$. Suy ra: $f\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0{,}18\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$

Dạng 4: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin 2x$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.\cos 2x+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\cos 2x+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int \sin 2x.\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \sin 2x.\mathrm{d}\left(2x\right)=-\frac{1}{2}.\cos 2x+C$.

Cách 2:

Ta có: $I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int \sin 2x.\mathrm{d}x$.

Đặt $2x=t\Rightarrow 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Khi đó: $\frac{1}{2}\int \sin t.\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}.\cos t+C=-\frac{1}{2}.\cos 2x+C$.

Câu 2: Tính nguyên hàm $\int x\sqrt{x+2}dx$ bằng cách đặt $t=\sqrt{x+2}$ ta thu được nguyên hàm nào dưới đây?

A. $\int 2(t^2-2)t^2dt$. **B.** $\int 2t^2dt$. **C.** $\int (t^2-2)tdt$. **D.** $\int 2(t^2-2)tdt$

Lời giải

Ta có $I=\int x\sqrt{x+2}dx$

Đặt $t=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow t^2=x+2\Rightarrow 2tdt=dx$

$I=\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\int t(t^2-2)2t\mathrm{d}t=\int 2(t^2-2)t^2\mathrm{d}t$.

Câu 3: Nếu đặt $t=1+\ln x$ thì $I=\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x$ trở thành

A. $I=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)e^t\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int\left(1-\frac{1}{t}\right)e^t\mathrm{d}t$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1+\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x;\ln x=t-1$.

Khi đó ta có: $I=\int \frac{t-1}{t}\mathrm{d}t=\int\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Câu 4: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\left(x^2+1\right)^{2022}$ thỏa mãn $F\left(0\right)=\frac{1}{4046}$. Giá trị của $F\left(1\right)$ bằng:

A. 2^{2023} **B.** $\frac{2^{2023}}{2023}$ **C.** 2^{2022} **D.** $\frac{2^{2022}}{2023}$

Lời giải

Chọn D

$F(x)=\int f(x)dx=\int x\left(x^2+1\right)^{2022}dx$

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx\Leftrightarrow \frac{dt}{2}=xdx$

Khi đó $F(x)=\int t^{2022}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}.\frac{t^{2023}}{2023}+C=\frac{\left(x^2+1\right)^{2023}}{4046}+C$.

$F(0)=\frac{1}{4046}\Leftrightarrow \frac{1}{4046}+C=\frac{1}{4046}\Leftrightarrow C=0$.

Vậy $F(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^{2023}}{4046}\Rightarrow F(1)=\frac{2^{2023}}{4046}=\frac{2^{2022}}{2023}$.

Câu 5: Biết $\int x(1-2x)^{2022}\,\mathrm{d}x=\frac{(1-2x)^{2024}}{a}-\frac{(1-2x)^{2023}}{b}+C$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}t=-2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

$t=1-2x\Rightarrow x=\frac{1-t}{2}$

Ta có: $\int x(1-2x)^{2022}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1-t}{2}t^{2022}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{4}\int\left(t^{2023}-t^{2022}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{t^{2024}}{2024}-\frac{t^{2023}}{2023}\right)+C$

$=\frac{(1-2x)^{2024}}{4.2024}-\frac{(1-2x)^{2023}}{4.2023}+C$

Vậy $a-b=4.2024-4.2023=4$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính $\int x^2\left(2x^3-1\right)^3 dx$

A. $\frac{\left(2x^3-1\right)^4}{24}+C$. **B.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^4}{4}+C$. **C.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{4}$. **D.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^4}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int x^2\left(2x^3-1\right)^3 dx=\frac{1}{6}\int\left(2x^3-1\right)^3 d\left(2x^3-1\right)=\frac{\left(2x^3-1\right)^4}{24}+C$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

A. $\int f(x)dx=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{6}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+C$

Câu 3: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=2\cos 2x+C$. **B.** $\int\sin 2x\mathrm{d}x=-2\cos 2x+C$.

C. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 4: Tìm nguyên hàm $\int\frac{\sin x}{2021\cos x+2022}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $t=2021\cos x+2022$. Khi đó nguyên hàm đã cho trở thành nguyên hàm nào sau đây?

A. $2021\int t\mathrm{d}t$. **B.** $-\frac{1}{2021}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **C.** $\frac{1}{2021}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **D.** $-2021\int t\mathrm{d}t$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2021\cos x+2022\Rightarrow-\frac{1}{2021}\mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x$.

Nên $\int\frac{\sin x}{2021\cos x+2022}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2021}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Câu 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\mathrm{e}^{3x}$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|3x|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\mathrm{e}^{3x}+C$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{3x}.\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{3x}.\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}.\mathrm{e}^{3x}+C$.

Cách 2:

Ta có: $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{3x}.\mathrm{d}x$.

Đặt $3x=t\Rightarrow 3\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{3}$.

Khi đó: $\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{t}.\mathrm{d}t=\frac{1}{3}.\mathrm{e}^{t}+C=\frac{1}{3}.\mathrm{e}^{3x}+C$.

Câu 6: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 21x$ là

A. $\int f(x)\,dx=\frac{1}{21}\cos 21x+C$. **B.** $\int f(x)dx=21\cos 21x+C$.

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{21}\cos 21x+C$. **D.** $\int f(x)dx=-21\cos 21x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x)dx=\int \sin 21\mathrm{x}dx=-\frac{1}{21}\cos 21x+C$.

Câu 7: Hàm số $F(x)=2x+\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $x^2+\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $2+2\cos 2x$. **C.** $x^2-\frac{1}{2}\cos 2x$. **D.** $2-2\cos 2x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)=2x+\sin 2x\Rightarrow F'(x)=2+2\cos 2x$.

Vậy hàm số $F(x)=2x+\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $2+2\cos 2x$.

Câu 8: Xét nguyên hàm $I=\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sqrt{x+2}$ thì ta được

A. $I=\int\left(2t^4-4t^2\right)dt$. **B.** $I=\int\left(2t^4-t^2\right)dt$.

C. $I=\int\left(t^4-2t^2\right)dt$. **D.** $I=\int\left(4t^4-2t^2\right)dt$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2=x+2\Rightarrow 2tdt=dx$.

Ta có $I=\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(t^2-2\right).\mathrm{t}.2\mathrm{tdt}=\int\left(2t^4-4t^2\right)\mathrm{dt}$.

Câu 9: Xét nguyên hàm $I=\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sqrt{x+2}$ thì ta được

A. $I=\int\left(2t^4-4t^2\right)dt$. **B.** $I=\int\left(2t^4-t^2\right)dt$.

C. $I=\int\left(t^4-2t^2\right)dt$. **D.** $I=\int\left(4t^4-2t^2\right)dt$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2=x+2\Rightarrow 2tdt=dx$.

Ta có $I=\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(t^2-2\right).\mathrm{t}.2\mathrm{tdt}=\int\left(2t^4-4t^2\right)\mathrm{dt}$.

Câu 10: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$.

C. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\int\sin 2x\mathrm{d}x=2\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}2x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Câu 11: Cho $\int x(2x-3)^5dx=A(2x-3)^7+B(2x-3)^6+C,$ với $A,B,C\in\mathbb{R}$ .Tính giá trị biểu thức $7A-2B$

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int x\left(2x-3\right)^5dx=\frac{1}{2}\int\left[\left(2x-3\right)^6+3\left(2x-3\right)^5\right]dx$

$=\frac{1}{2}\int\left(2x-3\right)^6dx+\frac{3}{2}\int\left(2x-3\right)^5dx=\frac{1}{28}\left(2x-3\right)^7+\frac{1}{8}\left(2x-3\right)^6+C$

$\Rightarrow A=\frac{1}{28};B=\frac{1}{8}\Rightarrow 7A-2B=\frac{7}{28}-\frac{2}{8}=0$

Câu 12: Tìm nguyên hàm $\int x\left(x^2+7\right)^9\mathrm{d}x$?

A. $\frac{1}{20}(x^2+7)^{10}+C$. **B.** $9(x^2+7)^8+C$. **C.** $\frac{1}{16}(x^2+7)^8+C$. **D.** $\frac{1}{10}\left(x^2+7\right)^{10}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int x\left(x^2+7\right)^9\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(x^2+7\right)^9\mathrm{d}(x^2+7)=\frac{1}{20}\left(x^2+7\right)^{10}+C$

Câu 13: Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+2}$.

A. $F(x)=e^{2x}-4\ln(e^x+2)+C.$ **B.** $F(x)=e^x+2\ln(e^x+2)+C.$

C. $F(x)=e^x-2\ln(e^x+2)+C.$ **D.** $F(x)=\ln(e^x+2)+C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{e^{2x}}{e^x+2}dx=\int\left(1-\frac{2}{e^x+2}\right)e^xdx=e^x-2\ln(e^x+2)+C.$

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$. Tìm kết luận đúng.

A. $\int f\left(2x+3\right)dx=2.F\left(2x+3\right)+C$.
B. $\int f\left(2x+3\right)dx=\frac{1}{3}.F\left(2x+3\right)+C$.

C. $\int f\left(2x+3\right)dx=\frac{1}{2}.F\left(2x+3\right)+C$.
D. $\int f\left(2x+3\right)dx=F\left(2x+3\right)+C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2x+3\Rightarrow dt=2dx\Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$\int f\left(2x+3\right)dx=\int f\left(t\right)\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int f\left(t\right)dt=\frac{1}{2}F\left(t\right)+C=\frac{1}{2}F\left(2x+3\right)+C$

Câu 15: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $2\sqrt{x^2+1}+C$.
B. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.
C. $\sqrt{x^2+1}+C$.
D. $\sqrt{x^2+1}+C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow u^2=x^2+1\Rightarrow 2udu=2xdx\Leftrightarrow udu=xdx$

Khi đó $\int f\left(x\right)dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{udu}{u}=u+C$

Do đó $\int f\left(x\right)dx=\sqrt{x^2+1}+C$.

Câu 16: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\left(x^2+2\right)^5$ là

A. $\frac{1}{12}\left(x^2+2\right)^6+C$.
B. $\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^6+C$.
C. $\frac{1}{6}\left(x^2+2\right)^6+C$.
D. $\left(x^2+2\right)^6+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\left(x^2+2\right)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(x^2+2\right)^5\mathrm{d}\left(x^2+2\right)=\frac{1}{12}\left(x^2+2\right)^6+C.$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln x+C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln^2 x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln^2 x+C$.

Lời giải

Chọn C

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln x\,\mathrm{d}\left(\ln x\right)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{5x+4}$ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{5}\ln\left|5x+4\right|+C.$ **B.** $\int f\left(x\right)dx=\ln\left|5x+4\right|+C.$

C. $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{\ln 5}\ln\left|5x+4\right|+C.$ **D.** $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{5}\ln\left(5x+4\right)+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{5}\ln\left|5x+4\right|+C.$

Câu 19: Họ nguyên hàm của hàm $\int\frac{1+2\ln x}{x}dx$ là

A. $\ln x+2\ln^2 x+C$. **B.** $\ln x+\ln^2 x+C$. **C.** $x+\ln^2 x+C$. **D.** $x+\ln^2 x+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=1+2\ln x\Rightarrow dt=\frac{2}{x}dx$.

$\Rightarrow\int\frac{1+2\ln x}{x}dx=\int\frac{t}{2}dt=\frac{1}{4}t^2+c=\frac{1}{4}\left(1+2\ln x\right)^2+c=\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{4}+c=\ln^2 x+\ln x+C$.

Câu 20: Họ nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}$ là:

A. $F\left(x\right)=-\frac{\cos x}{\sin x}+C$. **B.** $F\left(x\right)=\frac{1}{\sin x}+C$. **C.** $F\left(x\right)=-\frac{1}{\sin x}+C$. **D.** $F\left(x\right)=\frac{1}{\sin^2 x}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F\left(x\right)=\int\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}d\left(\sin x\right)=-\frac{1}{\sin x}+C$.

Câu 21: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $2\sqrt{x^2+1}+C$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C$. **D.** $\sqrt{x^2+1}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f\left(x\right)dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int d\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}+C.$

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)=x.\left(x^2+1\right)^{2016}$. Khi đó:

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{dx}=\frac{\left(x^2+1\right)^{2017}}{2017}+C.$ **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{dx}=\frac{\left(x^2+1\right)^{2016}}{2016}+C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\left(x^2+1\right)^{2017}}{4034} + C.$ **D.** $\int f(x)dx = \frac{\left(x^2+1\right)^{2016}}{4032} + C.$

Lời giải

Chọn C

$$\int f(x)dx = \int x.\left(x^2+1\right)^{2016}dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{2016}.d\left(x^2+1\right) = \frac{\left(x^2+1\right)^{2017}}{4034} + C.$$

Câu 23: Họ các nguyên hàm $\int xe^{x^2+1}dx$ là:

A. $x.e^{x^2+1} + C$ **B.** $e^{x^2+1} + C$ **C.** $\frac{e^{x^2+1}}{2} + C$ **D.** $\frac{x.e^{x^2+1}}{2} + C$

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx \Leftrightarrow \frac{dt}{2} = xdx$

Khi đó $\int xe^{x^2+1}dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$.

Câu 24: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3+1} + \text{C}.$ **B.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + \text{C}.$ **C.** $\sqrt{x^3+1} + \text{C}.$ **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{x^3+1} + \text{C}.$

Lời giải

Chọn B

Tính $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$

Đặt $u = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow u^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2udu = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{2}{3}udu$

Lúc đó: $I = \int \frac{2}{3}du = \frac{2}{3}u + C$

Câu 25: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 2x}$ là:

A. $\frac{-\cot 2x}{2} + C$. **B.** $\cot 2x + C$. **C.** $\tan 2x + C$. **D.** $\frac{\tan 2x}{2} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Câu 26: Gọi $F(x)$ là một họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$. Tìm $F(x)$.

A. $\frac{3}{2}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}} + C.$ **B.** $\frac{2}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{2}{3}} + C.$ **C.** $\frac{3}{2}\left(x^2+4\right)^{\frac{2}{3}} + C.$ **D.** $\frac{2}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}} + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\mathrm{d}x=\int (x^2+4)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(x^2+4)=\frac{(x^2+4)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}(x^2+4)^{\frac{2}{3}}+C.$

Câu 27: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=e^{kx}\ (k\neq 0)$ sao cho $F(0)=\frac{1}{k}$. Giá trị k thuộc khoảng nào sau đây để $F(x)=f(x)$?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn D

$F(x)=\int e^{kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{k}e^{kx}+C.$ Với $F(0)=\frac{1}{k}\Rightarrow \frac{1}{k}e^{0}+C=\frac{1}{k}\Rightarrow C=0$. Suy ra $F(x)=\frac{1}{k}e^{kx}$.

$F(x)=f(x)\Leftrightarrow \frac{1}{k}e^{kx}=e^{kx}\Leftrightarrow k=1\in(0;2).$

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}$. Tìm khẳng định đúng.

A. $\ln|f(x)|=\ln|x|+C.$ **B.** $\ln|f(x)|=-\frac{1}{x^2}+C.$

C. $-\frac{1}{f^2(x)}=-\frac{1}{x^2}+C.$ **D.** $-\frac{1}{f^2(x)}=\ln|x|+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow \left(\ln|f(x)|\right)'=\frac{1}{x}\Rightarrow \ln|f(x)|=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$

Câu 29: Tìm $\int\frac{\ln x}{x}dx$ có kết quả là:

A. $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$. **B.** $\ln|\ln x|+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}(\ln x-1)+C$. **D.** $\ln\frac{x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$.

Khi đó $\int\frac{\ln x}{x}dx=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Câu 30: Cho tích phân $I=\int_1^e\frac{3\ln x+1}{x}dx$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\int_1^e\frac{3t+1}{t}dt$. **B.** $I=\int_0^1\frac{3t+1}{e^t}dt$. **C.** $I=\int_0^1(3t+1)dt$. **D.** $I=\int_1^e(3t+1)dt$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0$ và $x = e \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $I = \int_0^1 (3t+1)dt$.

Câu 31: Tìm nguyên hàm $\int 2x(x^2+7)^{15}dx$:

A. $\frac{1}{2}(x^2+7)^{16} + C$. **B.** $\frac{1}{16}x(x^2+7)^{16} + C$.

C. $-\frac{1}{16}(x^2+7)^{16} + C$. **D.** $\frac{1}{16}(x^2+7)^{16} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $d(x^2+7) = 2x.dx$

$\int 2x(x^2+7)^{15}dx = \int (x^2+7)^{15}d(x^2+7) = \frac{1}{16}(x^2+7)^{16} + C$.

Câu 32: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int (u^2-3)\mathrm{d}u$. **B.** $\int (u^2-4)\mathrm{d}u$. **C.** $\int 2(u^2-4)\mathrm{d}u$. **D.** $\int 2u(u^2-4)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow 2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.

Khi đó $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{u^2-4}{u}2u\mathrm{d}u = \int 2(u^2-4)\mathrm{d}u$.

Câu 33: Nguyên hàm $\int x(x^2+3)^5\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}(x^2+3)^6 + C$. **B.** $\frac{1}{10}(x^2+3)^6 + C$. **C.** $\frac{1}{6}(x^2+3)^6 + C$. **D.** $\frac{1}{12}(x^2+3)^6 + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \int x(x^2+3)^5\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t^5\mathrm{d}t = \frac{1}{12}t^6 + C = \frac{1}{12}(x^2+3)^6 + C$.

Câu 34: Tính nguyên hàm $\int \frac{(\ln x+2)}{x\ln x}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $t = \ln x$ ta được nguyên hàm nào sau đây?

A. $\int \left(1+\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$. **B.** $\int \frac{t}{t-2}\mathrm{d}t$. **C.** $\int \frac{(t+2)}{t^2}\mathrm{d}t$. **D.** $\int (t+2)\mathrm{d}t$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Khi đó $\int\frac{(\ln x+2)}{x\ln x}dx=\int\frac{(t+2)}{t}dt=\int\left(1+\frac{2}{t}\right)dt$.

Câu 35: Cho hàm số $\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=\sqrt{x}+1+C$.

B. $\int\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{x}+1}+C$.

C. $\int\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=\frac{-2}{\sqrt{x}+1}+C$.

D. $\int\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{x}+1}{2}+C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\sqrt{x}+1=t\Rightarrow\sqrt{x}=t-1\Rightarrow dx=2(t-1)dt$

Ta có: $\int\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx=\int\frac{2(t-1)}{(t-1)t^2}dt=\int\frac{2}{t^2}dt=\frac{-2}{t}+C=\frac{-2}{\sqrt{x}+1}+C$.

Câu 36: Tính nguyên hàm $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{x+4}$ ta thu được nguyên hàm nào?

A. $\int\frac{2dt}{t^2-4}$.

B. $\int\frac{2tdt}{\left(t^2-4\right)}$.

C. $\int\frac{2dt}{\left(t^2-4\right)t}$.

D. $\int\frac{dt}{t^2-4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow t^2=x+4\Rightarrow 2tdt=dx$ và $x=t^2-4$. Ta có:

$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=\int\frac{2tdt}{\left(t^2-4\right)t}=\int\frac{2dt}{t^2-4}$..

Câu 37: Xét nguyên hàm $\int x(2x+1)^3dx$. Nếu đặt $t=2x+1$ thì nguyên hàm cần tính trở thành

A. $\int\left(t^4-t^3\right)dt$.

B. $\frac{1}{4}\int\left(t^4-t^3\right)dt$.

C. $\frac{1}{2}\int\left(t^4-t^3\right)dt$.

D. $2\int\left(t^4-t^3\right)dt$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2x+1\Rightarrow dt=2dx$.

Lúc đó, nguyên hàm cần tính trở thành: $\int\frac{t-1}{2}.t^3\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\int\left(t^4-t^3\right)dt$.

Câu 38: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2+x+1\right)(2x+1)$ là

A. $\left(x^2+x+1\right)^2+C$.

B. $-\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)^2+C$.

C. $\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)^2+C$.

D. $(2x+1)^2+2\left(x^2+x+1\right)+C$.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^2+x+1)(2x+1)\mathrm{d}x$

Đặt $t = x^2+x+1 \Rightarrow \mathrm{dt} = (2x+1)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int t\mathrm{dt} = \dfrac{1}{2}t^2 + C = \dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^2 + C$.

Vậy họ nguyên hàm của hàm số đã cho là $\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^2 + C$.

Câu 39: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+9}$ là

A. $\ln|x^2-3x+9| + C$.
B. $\dfrac{1}{x^2-3x+9} + C$.
C. $-\ln(x^2-2x+9) + C$.
D. $\ln(x^2-2x+9)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{2x-3}{x^2-3x+9}\mathrm{d}x$

Đặt $t = x^2-3x+9 \Rightarrow \mathrm{dt} = (2x-3)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int \dfrac{\mathrm{dt}}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-3x+9| + C$.

Vậy hàm số đã cho có họ nguyên hàm là: $\ln|x^2-3x+9| + C$.

Câu 40: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-3}$ là

A. $\dfrac{2}{3}\sqrt{x-3} + C$.
B. $\dfrac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3} + C$.
C. $\dfrac{3}{2}(x-3)\sqrt{x-3} + C$.
D. $\dfrac{3}{2}\sqrt{x-3} + C$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sqrt{x-3}\mathrm{d}x$

Đặt $t = \sqrt{x-3} \Rightarrow t^2 = x-3 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$.

Suy ra $\int 2t^2\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}t^3 + C = \dfrac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3} + C$.

Vậy hàm số đã cho có họ nguyên hàm là: $\dfrac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3} + C$.

Câu 41: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)}.\ln(x^2+1)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\ln(x^2+1)}{4} + C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\ln^2(x^2+1)}{4} + C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\ln(x^2+1)}{2} + C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\ln^2(x^2+1)}{2} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)}.\ln\left(x^2+1\right).\mathrm{d}x$.

Đặt $\ln\left(x^2+1\right)=t\Rightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow \frac{x}{\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Khi đó: $I=\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\frac{t^2}{2}+C=\frac{t^2}{4}+C=\frac{\ln^2\left(x^2+1\right)}{4}+C$.

Câu 42: Tính nguyên hàm $\int x^2\left(2x^3-1\right)^2\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{18}+C$. **B.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{3}+C$. **C.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{6}+C$. **D.** $\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{9}+C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2x^3-1\Rightarrow \mathrm{d}t=6x^2\mathrm{d}x\Rightarrow x^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{6}$.

Khi đó $\int x^2\left(2x^3-1\right)^2\mathrm{d}x=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{6}=\frac{t^3}{18}+C=\frac{\left(2x^3-1\right)^3}{18}+C$.

Câu 43: Tính nguyên hàm $\int\frac{x-1}{\left(x^2-2x+3\right)^{2021}}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{-1}{2020\left(x^2-2x+3\right)^{2020}}+C$. **B.** $\frac{-1}{4044\left(x^2-2x+3\right)^{2022}}+C$.

C. $\frac{-1}{4040\left(x^2-2x+3\right)^{2020}}+C$. **D.** $\frac{1}{4040\left(x^2-2x+3\right)^{2020}}+C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2-2x+3\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(2x-2\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\left(x-1\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Khi đó $\int\frac{\mathrm{d}t}{2t^{2021}}=\int\frac{t^{-2021}\mathrm{d}t}{2}=-\frac{t^{-2020}}{4040}+C=\frac{-1}{4040\left(x^2-2x+3\right)^{2020}}+C$.

Câu 44: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F\left(x\right)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+\sqrt{x^2+1}$. **B.** $F\left(x\right)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-\sqrt{x^2+1}$.

C. $F\left(x\right)=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}+\sqrt{x^2+1}$. **D.** $F\left(x\right)=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}-\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow u^2=x^2+1\Leftrightarrow x^2=u^2-1$ và $x\mathrm{d}x=u\mathrm{d}u$.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{u^2-1}{u}\right)u\mathrm{d}u\ =\int\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$

$=\frac{u^3}{3}-u+C=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}-\sqrt{x^2+1}+C$.

Vậy một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ là $\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}-\sqrt{x^2+1}$.

Câu 45: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2\mathrm{e}^{2x}$ thỏa mãn $F(\ln 2)=\frac{1}{4}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4-\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3+11.$

B. $F(x)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4+\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3-11.$

C. $F(x)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4+\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3+11.$

D. $F(x)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4-\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3-11.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\mathrm{e}^x+1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\ =\int\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$=\int u^2(u-1)\mathrm{d}u=\int\left(u^3-u^2\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{4}u^4-\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4-\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3+C$.

Lại có $F(\ln 2)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\ln 2}+1\right)^4-\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{\ln 2}+1\right)^3+C=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{81}{4}-9+C=\frac{1}{4}\Leftrightarrow C=-11$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4-\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3-11$.

Câu 46: Tính $\int \frac{\ln^2 x}{x\log x}\mathrm{d}x$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

B. $\frac{\ln^2 x}{\ln 10}+C$.

C. $\ln 10.\ln^2 x+C$.

D. $\ln 10.\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \frac{\ln^2 x}{x.\log x}\mathrm{d}x=\int \frac{\ln^2 x}{x.\frac{\ln x}{\ln 10}}\mathrm{d}x=\ln 10.\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\ln 10.\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 10.\int u\mathrm{d}u=\ln 10.\frac{u^2}{2}+C=\ln 10.\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

Câu 47: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là

A. $\dfrac{1}{3\sqrt{x^3+1}}+C$. **B.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$. **C.** $\dfrac{2}{3\sqrt{x^3+1}}+C$. **D.** $\dfrac{1}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow t^2=x^3+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\Rightarrow x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2t\mathrm{d}t}{3}$.

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2t}{3t}\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\int\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}t+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$.

Chọn B

Câu 48: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt[3]{x^2+1}$ là

A. $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$. **B.** $\dfrac{1}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$.

C. $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$. **D.** $\dfrac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow t^3=x^2+1\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{3t^2\mathrm{d}t}{2}$.

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x\sqrt[3]{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{3t^3\mathrm{d}t}{2}=\dfrac{3}{8}t^4+C=\dfrac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$.

Câu 49: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x+1}$?

A. $F(x)=\dfrac{1-2\sin x-3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x+1}}$. **B.** $F(x)=\dfrac{2}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin x\sqrt{\sin x+1}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{\sin x+1}\Rightarrow t^2=\sin x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\sqrt{\sin x+1}\mathrm{d}x=\int 2t^2\mathrm{d}t=\dfrac{2t^3}{3}+C=\dfrac{2}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}+C$.

Vậy $F(x)=\dfrac{2}{3}(\sin x+1)\sqrt{\sin x+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x+1}$.

Câu 50: Với cách đặt $t=2\sin x+3$ thì $I=\int\dfrac{\cos x}{2\sin x+3}\mathrm{d}x$ trở thành:

A. $I=-2\int\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. **C.** $I=2\int\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. **D.** $I=-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2\sin x + 3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\cos x\mathrm{d}x \Rightarrow \cos x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Khi đó $I = \int \frac{\cos x}{2\sin x + 3}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x) = \sin x.\cos^3 x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{\cos^4 x}{4} + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos^4 x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(\sin x.\cos^3 x)\mathrm{d}x = -\int \cos^3 x\mathrm{d}(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

Câu 52: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-2021}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào dưới đây?

A. $2\int u(u^2 - 2022)\mathrm{d}u$. **B.** $\int (u^2 - 2022)\mathrm{d}u$. **C.** $2\int (u^2 - 2022)\mathrm{d}u$. **D.** $2\int (u^2 - 2021)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $u \geq 0$ nên $u^2 = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u \\ x = u^2 - 1 \end{cases}$.

Khi đó $\int \frac{x-2021}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{u^2 - 1 - 2021}{u}.2u\mathrm{d}u = 2\int (u^2 - 2022)\mathrm{d}u$.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (1 + 3\cos^2 x)\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -4$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2]dx$.

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int (1 + 3\cos^2 x)\sin x dx$

$= -\int (1 + 3\cos^2 x)d(\cos x) = -\cos x - \cos^3 x + C$

Với $f(0) = -4 \Rightarrow -\cos 0 - \cos^3 0 + C = -4 \Rightarrow C = -2$

Vậy $f(x) = -\cos x - \cos^3 x - 2$

Ta có : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos x - \cos^3 x]dx = -\frac{5}{3}$.

Câu 54: Biết $\int \frac{(x-1)^{2020}}{(x+1)^{2022}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b + C,\ x \neq 1; a,b \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{a}{b}$.

A. 2021. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\int \frac{(x-1)^{2020}}{(x+1)^{2022}}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2.\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2020}\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{4022}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2021} + C.$$

Suy ra $\begin{cases} a = 4022 \\ b = 2021 \end{cases}$.

Vậy $A = \frac{a}{b} = 2$.

Câu 55: Nếu $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = 2f(x) - x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $\mathrm{e}^x + 1$. **B.** e^x. **C.** $\mathrm{e}^x - 1$. **D.** $\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = \int\left(1 - \frac{2}{e^x + 1}\right)dx = \int 1dx - 2\int \frac{1}{e^x + 1}dx$

Đặt: $e^x + 1 = u \Rightarrow e^x dx = du \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u-1}du$

Nên:

$$\int \frac{1}{e^x + 1}dx = \int \frac{1}{u(u-1)}du = \int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + C_1 = \ln\frac{e^x}{e^x + 1} + C_1 = x - \ln\left(e^x + 1\right) + C_1$$

Vậy: $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = x - 2\left(x - \ln\left(e^x + 1\right) + C_1\right) = 2\ln\left(e^x + 1\right) - x + C$.

Câu 56: Cho $f\left(\frac{3x-4}{3x+4}\right) = x + 2$. Khi đó $I = \int f(x)dx$ bằng

A. $I = e^{x+2}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C$. **B.** $I = -\frac{8}{3}\ln|1-x| + \frac{2}{3}x + C$.

C. $I = \frac{8}{3}\ln|x-1| + \frac{x}{3} + C$. **D.** $I = \frac{8}{3}\ln|x-1| + x + C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $\frac{3x-4}{3x+4} = t \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{3x+4} = t \Leftrightarrow \frac{1}{3x+4} = \frac{1-t}{8} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.\frac{1+t}{1-t}$

Theo giả thiết: $f(t) = \frac{4}{3}.\frac{1+t}{1-t} + 2 = \frac{10-2t}{3(1-t)} = \frac{2}{3} + \frac{8}{3(1-t)}$

Nên: $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{8}{3}.\frac{1}{1-x} \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}\ln|1-x| + C$

Câu 57: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.\left(x^2+1\right)^{2022}$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{4046}$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 2^{2023}. **B.** $\dfrac{2^{2023}}{2023}$. **C.** 2^{2023}. **D.** $\dfrac{2^{2022}}{2023}$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)=x.\left(x^2+1\right)^{2022}$

$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=\int x.\left(x^2+1\right)^{2022}\mathrm{d}x=\int\left(x^2+1\right)^{2022}\dfrac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{2}=\dfrac{1}{2.2023}\left(x^2+1\right)^{2023}+C=F(x)$

$F(0)=\dfrac{1}{4046}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2.2023}\left(0^2+1\right)^{2023}+C=\dfrac{1}{4046}\Rightarrow C=0$.

$F(x)=\dfrac{1}{2.2023}\left(x^2+1\right)^{2023}\Rightarrow F(1)=\dfrac{2^{2022}}{2023}$.

Câu 58: Khi tính $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}$, người ta đặt $t=g(x)$ thì $I=\int 2\mathrm{d}t$. Biết $g(4)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0)+g(1)$ là

A. $\dfrac{2+3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}}$.

Đặt $z=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}\Rightarrow \mathrm{d}z=\dfrac{\mathrm{d}x}{2(x+1)^2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}}\Rightarrow 2\mathrm{d}z=\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}}$.

Khi đó $I=\int 2\mathrm{d}z=2z+C=2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}+C$.

Mà $I=\int 2\mathrm{d}t=2t+C'\Rightarrow 2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}+C=2t+C'\Rightarrow\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}+C_0=t$.

$t=g(x)\Rightarrow g(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}+C_0\Rightarrow g(4)=\sqrt{\dfrac{9}{5}}+C_0\Rightarrow\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{9}{5}}+C_0\Rightarrow C_0=0$.

Do đó $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}\Rightarrow g(0)+g(1)=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$.

Câu 59: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left[x(x+1)(x+2)(x+3)\right]^2(2x+3)$ là

A. $\dfrac{\left(x^2+3x\right)^5}{5}+\left(x^2+3x\right)^4+\dfrac{4}{3}\left(x^2+3x\right)^3+C$. **B.** $\left(x^2+3x\right)^4+\left(x^2+3x\right)^2+C$.

C. $5\left(x^2+3x\right)^5+\left(x^2+3x\right)^4+12.\left(x^2+3x\right)^3+C$. **D.** $\frac{\left(x^2-3x\right)^5}{4}+\left(x^2-3x\right)^4+\frac{4}{5}\left(x^2-3x\right)^3+C$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left[x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\right]^2\left(2x+3\right)\mathrm{d}x=\int\left[\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)\right]^2\left(2x+3\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2+3x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(2x+3\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $I=\int\left[t\left(t+2\right)\right]^2\mathrm{d}t=\int\left(t^2+2t\right)^2\mathrm{d}t=\int\left(t^4+4t^3+4t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{t^5}{5}+t^4+\frac{4}{3}t^3+C$

$\Rightarrow I=\frac{\left(x^2+3x\right)^5}{5}+\left(x^2+3x\right)^4+\frac{4}{3}\left(x^2+3x\right)^3+C$.

Câu 60: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\left(x-2021\right)^{2020}}{\left(x+2022\right)^{2022}}$ là

A. $\frac{1}{2022}\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2020}+C$.

B. $\frac{2021}{4043}\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2021}+C$.

C. $\frac{1}{4043.2021}\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2021}+C$.

D. $\frac{1}{2021}.\frac{4043}{\left(x+2022\right)^{2021}}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\left(x-2021\right)^{2020}}{\left(x+2022\right)^{2022}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2020}\frac{1}{\left(x+2022\right)^2}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\frac{x-2021}{x+2022}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{4043}{\left(x+2022\right)^2}\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{4043}\mathrm{d}t=\frac{1}{\left(x+2022\right)^2}\mathrm{d}x$.

Suy ra: $I=\frac{1}{4043}\int t^{2020}\mathrm{d}t=\frac{1}{4043.2021}t^{2021}+C$.

$\Rightarrow\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4043.2021}\left(\frac{x-2021}{x+2022}\right)^{2021}+C$.

Câu 61: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}$ là

A. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2}+C$.

B. $-\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+C$.

C. $-6.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+C$.

D. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+C$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}}{x^3}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}\Rightarrow t^3=\frac{1}{x^2}-1\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=-\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$.

Suy ra: $I=-\frac{3}{2}\int t.t^2\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}\int t^3\mathrm{d}t=-\frac{3}{8}t^4+C\Rightarrow I=-\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^4}+C$.

Câu 62: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}$ là

A. $x+\ln\left|2\sin x\right|+C$.

B. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}.\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$.

C. $\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}.\ln\left|2\cos x-\sin x\right|+C$.

D. $\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}.\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{2}{5}\left(2\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{5}\left(2\cos x-\sin x\right)}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{5}.\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{2}{5}\mathrm{d}x-\frac{1}{5}\int\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Xét $I_1=\int\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2\sin x+\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(2\cos x-\sin x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $I_1=\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln\left|t\right|+C\Rightarrow I_1=\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$

Vậy: $I=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}.\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$.

Câu 63: $\int\left(\left(x+1\right)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x$ có dạng $\frac{a}{6}e^{\left(x+1\right)^2}+\frac{b}{2}\sin 2x+C$, trong đó a,b là hai số hữu tỉ. Tính $a+b$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\left(\left(x+1\right)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\left(x+1\right)e^{\left(x^2-5x+4\right)+\left(7x-3\right)}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x$

$=\int\left(x+1\right)e^{\left(x+1\right)^2}\mathrm{d}x+\int\cos 2x\mathrm{d}x$

Để tìm $\int\left(\left(x+1\right)e^{\left(x^2-5x+4\right)}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x$ ta đặt $I_1=\int\left(x+1\right)e^{\left(x+1\right)^2}\mathrm{d}x$ và $I_2=\int\cos 2x\mathrm{d}x$ và tìm I_1,I_2.

Tìm $I_1=\int\left(x+1\right)e^{\left(x+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\left(x+1\right)^2;\mathrm{d}t=2\left(x+1\right)\left(x+1\right)'\mathrm{d}x=2\left(x+1\right)\mathrm{d}x$.

$I_1=\int\left(x+1\right)e^{\left(x+1\right)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}e^t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^t+C_1=\frac{1}{2}e^{\left(x+1\right)^2}+C_1$, trong đó C_1 là 1 hằng số.

Tìm $I_2=\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$.

$I_2=\int \cos 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_2$.

Ta có $\int\left(\left(x+1\right)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2=\dfrac{1}{2}e^{(x+1)^2}+C_1+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_2$

$=\dfrac{1}{2}e^{(x+1)^2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

Suy ra để $\int\left(\left(x+1\right)e^{x^2-5x+4}\cdot e^{7x-3}+\cos 2x\right)\mathrm{d}x$ có dạng $\dfrac{a}{6}e^{(x+1)^2}+\dfrac{b}{2}\sin 2x+C$

thì $a=3\in\mathbb{Q}$, $b=1\in\mathbb{Q}$

Vậy $a+b=4$.

Câu 64: Tính $G=\int\dfrac{2x^2+\left(1+2\ln x\right).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$.

A. $G=\dfrac{-1}{x}-\dfrac{1}{x+\ln x}+C$. **B.** $G=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+\ln x}+C$.

C. $G=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+\ln x}+C$. **D.** $G=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+\ln x}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$G=\int\dfrac{2x^2+\left(1+2\ln x\right).x+\ln^2 x}{\left(x^2+x\ln x\right)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\left[x^2+2x\ln x+\ln^2 x\right]+x+x^2}{x^2\left(x+\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$

$=\int\dfrac{\left(x+\ln x\right)^2+x\left(x+1\right)}{x^2\left(x+\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$

$=\int\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int\dfrac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$, đặt $J=\int\dfrac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$

Xét nguyên hàm: $J=\int\dfrac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$

Đặt: $t=x+\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x+1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow J=\int\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{-1}{t}+C=\dfrac{-1}{x+\ln x}+C$

Do đó: $G=\dfrac{-1}{x}-\dfrac{1}{x+\ln x}+C$

Câu 65: Giả sử $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(x+3\right)}{x^2}$ sao cho $F\left(-2\right)+F\left(1\right)=0$. Giá trị của $F\left(-1\right)+F\left(2\right)$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}\ln 2-\dfrac{5}{6}\ln 5$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{7}{3}\ln 2$. **D.** $\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{3}{6}\ln 5$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-3;0)$ và $(0;+\infty)$.

Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+3) \\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=-\frac{x+3}{3x} \end{cases}$

Suy ra: $F(x)=\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{x+3}{3x}\ln(x+3)+\int \frac{1}{3x}\mathrm{d}x=-\frac{x+3}{3x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln|x|+C$.

Xét trên khoảng $(-3;0)$, ta có: $F(-2)=\frac{1}{3}\ln 2+C_1$; $F(-1)=\frac{2}{3}\ln 2+C_1$

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có:

$F(1)=-\frac{4}{3}\ln 4+C_2=-\frac{8}{3}\ln 2+C_2$; $F(2)=-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+C_2$

Suy ra: $F(-2)+F(1)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\ln 2+C_1\right)+\left(-\frac{8}{3}\ln 2+C_2\right)=0 \Leftrightarrow C_1+C_2=\frac{7}{3}\ln 2$.

Do đó: $F(-1)+F(2)=\left(\frac{2}{3}\ln 2+C_1\right)+\left(-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+C_2\right)$

$=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{7}{3}\ln 2=\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5$.

Cách 2: (Tận dụng máy tính)

Xét trên khoảng $(-3;0)$, ta có:

$F(-1)-F(-2)=\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}\frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x\approx 0,231\to A$ (lưu vào A)(1)

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có:

$F(2)-F(1)=\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x\approx 0,738\to B$ (lưu vào A)(2)

Lấy (1) cộng (2) theo vế ta được:

$F(-1)+F(2)-F(-2)-F(1)=A+B \Leftrightarrow F(-1)+F(2)=A+B\approx 0,969$.

Câu 66: Hàm số $f(x)=x(1-x)^4$ có họ các nguyên hàm là

A. $F(x)=\frac{(x-1)^6}{6}-\frac{(x-1)^5}{5}+C$.

B. $F(x)=\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^5}{5}+C$.

C. $F(x)=\frac{(x-1)^6}{5}-\frac{(x-1)^5}{4}+C$.

D. $F(x)=\frac{(x-1)^6}{5}+\frac{(x-1)^5}{4}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$

Khi đó $\int x(1-x)^4.dx=-\int(1-t)t^4.dt=\int\left(t^5-t^4\right).dt=\frac{1}{6}t^6-\frac{1}{5}t^5+C$

Vậy $\int x(1-x)^4.dx = \frac{(1-x)^6}{6} - \frac{(1-x)^5}{5} + C = \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} + C$

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f^2(x).f'(x)=1+2x+3x^2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là:

A. $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{40}$.
B. $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{-2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{40}$.

C. $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{-2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{43}$.
D. $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=\sqrt[3]{43}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int f^2(x).f'(x)\mathrm{d}x = \int\left(1+2x+3x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x + x^2 + x^3 + C$ (C là hằng số)

Do $f(0)=1$ nên $C=\frac{1}{3}$. Vậy $f(x)=\sqrt[3]{3x^3+3x^2+3x+1}$ với $x\in[-1;2]$.

Ta có: $f'(x)=\frac{9x^2+6x+3}{3\sqrt[3]{(3x^3+3x^2+3x+1)^2}}>0, \forall x\in(-1;2)$ nên $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;2]$.

Vậy $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=f(-1)=\sqrt[3]{-2},\ \max\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=f(2)=\sqrt[3]{43}$.

Câu 68: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}}$ và $F(0)=1$. $F(1)$ có giá trị thuộc khoảng

A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$.
B. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.
C. $\left(\frac{1}{2};1\right)$.
D. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+3\right)}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x}+\sqrt{\mathrm{e}^x+3} \Rightarrow \mathrm{d}t=\left(\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}+\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x\left(\sqrt{\mathrm{e}^x+3}+\sqrt{\mathrm{e}^x}\right)}{2\sqrt{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+3\right)}}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+3\right)}}\mathrm{d}x$.

$\int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+3\right)}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=2\ln|t|+C=2\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}\right)+C$.

$F(0)=1\Rightarrow 2\ln3+C=1\Rightarrow C=1-2\ln3\Rightarrow F(x)=2\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}\right)+1-2\ln3$.

$F(1)=2\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}+\sqrt{\mathrm{e}+3}\right)+1-2\ln3\approx1,6$.

Dạng 5: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tìm khẳng định đúng.

A. $\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x + \int \sin x\mathrm{d}x.$

B. $\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x.$

C. $\int x\cos x\mathrm{d}x = -x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x.$

D. $\int x\cos x\mathrm{d}x = -x\sin x + \int \sin x\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x\mathrm{d}x \end{cases}.$

Suy ra $\int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x.$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.

B. $4x^3 + (x+1)e^x + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$.

D. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int \left(x^4 + xe^x\right)dx = \int x^4dx + \int xe^xdx = \frac{1}{5}x^5 + \int xe^xdx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{5}x^5 + xe^x - \int e^xdx = \frac{1}{5}x^5 + xe^x - e^x + C = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C.$$

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\ln x$ là

A. $x^2\ln x + \frac{x^2}{2} + C$.

B. $x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + 1$.

C. $x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C$.

D. $x^2\ln x - x + C$.

Lời giải

Chọn C

Xét $I = \int 2x\ln x\mathrm{d}x$:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x^2 \end{cases}.$$

$$I = x^2\ln x - \int x\mathrm{d}x = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Câu 4: Biết $\int x\ln x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{a}\ln x - \int \frac{x}{b}\mathrm{d}x$ với a, b là các số nguyên. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét $I = \int x\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{a}\ln x - \int \frac{x}{b}dx \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow a+b = 4.$

Câu 5: Cho $F(x) = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$, $\forall x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Tìm $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x$.

A. $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x = \cot x - \sin x + C$. **B.** $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x = \cot x + \sin x + C$.

C. $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x = \cos x\cot x - \sin x + C$. **D.** $\int f'(x)\cos x\mathrm{d}x = \cos x\cot x + \sin x + C$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề, ta có

$F'(x) = f(x)\sin x \Rightarrow \cos x = f(x)\sin x \Rightarrow f(x) = \cot x$

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \int f'(x)\cos x\mathrm{d}x = f(x)\cos x + \int f(x)\sin x\mathrm{d}x = \cos x\cot x + \sin x + C$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho 2 hàm số $u=u(x)$ và $v=v(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng K. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

B. $\int u(x)v'(x)dx = u'(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

C. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v(x)dx$.

D. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v'(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d\left(v(x)\right) = u(x)v(x) - \int v(x)d\left(u(x)\right) = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = xe^x$ là

A. $\left(x-1\right)e^x$. **B.** $\left(x+1\right)e^x$. **C.** $\left(x-1\right)e^x + C$. **D.** $\left(x+1\right)e^x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int xe^x \mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}e^x = x.e^x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x.e^x - e^x + C = \left(x-1\right)e^x + C$.

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = x^4 + x.e^x$

A. $\frac{1}{5}x^5 + \left(x-1\right)e^x + C$. **B.** $4x^3 + \left(x+1\right)e^x + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. **D.** $\frac{1}{5}x^5 + \left(x+1\right)e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A = \int \left(x^4 + x.e^x\right)dx = \frac{1}{5}x^5 + \int x.e^x dx = \frac{1}{5}x^5 + I$

Giải I : đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

Suy ra $I = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$

Suy ra $A = \frac{1}{5}x^5 + xe^x - e^x + C$

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = x^4 + x.e^x$ là: $\frac{1}{5}x^5 + \left(x-1\right)e^x + C$

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right) = xe^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = e^x\left(x-1\right) + C.$ **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = e^x + C.$

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = e^x\left(x+1\right) + C.$ **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = xe^x + C.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \mathrm{d}x \\ v = e^x \end{cases}$

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$

Câu 5: Cho $\int x\cos 2x\mathrm{d}x = a\cos 2x + bx\sin 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a+b$ bằng.

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn D

$$\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}x\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 6: Biết $\int xe^{2x}\mathrm{d}x = axe^{2x} + be^{2x} + C$ $(a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R})$. Tính tích $a.b$.

A. $ab = -\frac{1}{8}\cdot$ **B.** $ab = -\frac{1}{4}\cdot$ **C.** $ab = \frac{1}{8}\cdot$ **D.** $ab = \frac{1}{4}\cdot$

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Khi đó $\int xe^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$

Vậy $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4} \Rightarrow a.b = -\frac{1}{8}.$

Câu 7: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $\int F(x)\mathrm{d}x = x^{2022} + C$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\int xf(x)\mathrm{d}x = xF(x) + x^{2022} + C.$ **B.** $\int xf(x)\mathrm{d}x = xF(x) - x^{2022} - C.$

C. $\int xf(x)\mathrm{d}x = xf(x) - x^{2022} - C.$ **D.** $\int xf(x)\mathrm{d}x = xf(x) + 2022x^{2021} + C.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = F(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \int xf(x)dx = xF(x) - \int F(x)\mathrm{d}x = xF(x) - x^{2022} - C$.

Câu 8: Họ nguyên hàm $\int x\cos x\mathrm{d}x$ là

A. $-\cos x + x\sin x + C$. **B.** $-\cos x - x\sin x + C$.

C. $\cos x - x\sin x + C$. **D.** $\cos x + x\sin x + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Ta có $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

Câu 9: Để tính $I = \int x\cos x\,\mathrm{d}x$ theo phương pháp nguyên hàm từng phần, ta đặt $u = x, dv = \cos x dx.$ Lúc đó, hãy chọn khẳng định đúng

A. $I = x\cos x + \int \sin x dx.$ **B.** $I = x\cos x - \int \sin x dx.$

C. $I = x\sin x - \int \sin x dx.$ **D.** $I = x\sin x + \int \sin x dx.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$ suy ra $I = x\sin x - \int \sin x dx.$

Câu 10: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C,$ C là hằng số.

B. $4x^3 + (x-1)e^x + C,$ C là hằng số.

C. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C,$ C là hằng số.

D. $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C,$ C là hằng số.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(x^4 + xe^x\right)dx = \int x^4 dx + \int xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\int f(x)dx = \frac{1}{5}x^5 + \left(xe^x - \int e^x dx\right) = \frac{1}{5}x^5 + xe^x - e^x + C = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.

Câu 11: Mệnh đề nào dưới đây đúng:

A. $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x + \int e^x dx$. **B.** $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x + 5\int e^x dx$.

C. $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x - 5\int e^x dx$. **D.** $\int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x - \int e^x dx$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = 5x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x - \int e^x.5dx$

$\Rightarrow \int (5x+3)e^x dx = (5x+3)e^x - 5\int e^x dx$.

Câu 12: Phát biểu nào sau đây là **đúng**

A. $\int e^x \sin x\mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \cos x\mathrm{d}x$. **B.** $\int e^x \sin x\mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\mathrm{d}x$.

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$. **D.** $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int e^x \sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$.

Câu 13: Nguyên hàm $\int 2x.e^x dx$ bằng

A. $2(x-1)e^x + C$. **B.** $(2x+1)e^x + C$. **C.** $(2x-1)e^x + C$. **D.** $(2x-1)e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int 2x.e^x dx = 2x.e^x - \int 2.e^x dx = 2x.e^x - 2.e^x + C = 2(x-1)e^x + C$.

Câu 14: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Hãy tính $F(\ln 2)$.

A. $F(1) = 5e - 3$. **B.** $F(\ln 2) = 10e - 1$. **C.** $F(\ln 2) = 10\ln 2 - 1$ **D.** $F(\ln 2) = 5\ln 2 - 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x) = \int (5x+1)e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 5x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Suy ra $F(x) = (5x+1)e^x - \int 5e^x dx = (5x+1)e^x - 5e^x + C = (5x-4)e^x + C$.

Mặt khác $F(0) = 3 \Leftrightarrow -4 + C = 3 \Leftrightarrow C = 7$.

$\Rightarrow F(x) = (5x-4)e^x + 7$.

Vậy $F(\ln 2) = (5.\ln 2 - 4).2 + 7 = 10\ln 2 - 1$.

Câu 15: Biết $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$. Tích ab bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = \int_0^1 (2x+1)d(e^x) = (2x+1)e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 3e - 1 - 2e + 2 = e + 1$.

Từ đó: $a = 1, b = 1$ hay $a.b = 1$.

Câu 16: Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2+1).\ln x$.

A. $\int f(x)dx = x\left(x^2+1\right)\ln x - \frac{x^3}{3} + C$.

B. $\int f(x)dx = x^3\ln x - \frac{x^3}{3} + C$.

C. $\int f(x)dx = x\left(x^2+1\right)\ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

D. $\int f(x)dx = x^3\ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int\left(3x^2+1\right)\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \left(3x^2+1\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int\left(3x^2+1\right)dx = x^3 + x \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \left(x^3+x\right)\ln x - \int\left(x^3+x\right)\frac{1}{x}dx = x\left(x^2+1\right)\ln x - \int\left(x^2+1\right)dx = x\left(x^2+1\right)\ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$.

Câu 17: Nguyên hàm của $\int xe^{3x-1}\mathrm{d}x$ là

A. $\frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$.

B. $\frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{9}e^{3x-1} + C$.

C. $\frac{1}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{9}e^{3x-1} + C$.

D. $\frac{1}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{3}e^{3x-1} + C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^{3x-1}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{3}e^{3x-1} \end{cases}$

$\int xe^{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{3}\int e^{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{x}{3}e^{3x-1} - \frac{1}{9}e^{3x-1} + C$.

Câu 18: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x\ln x + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \ln x.\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$; $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ chọn $v = x$.

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$I = x.\ln x - \int \mathrm{d}x = x.\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$.

Câu 19: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.2^x$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2^x\ln x + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2^x(1 + x.\ln 2) + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \left(x - \frac{1}{\ln 2}\right).\frac{2^x}{\ln 2} + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln^2 2} + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int f\left(x\right)dx=\int x.2^{x}.dx$.

Đặt $u=x\Rightarrow du=dx$; $dv=2^{x}.dx$ chọn $v=\dfrac{2^{x}}{\ln 2}$.

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$I=x.\dfrac{2^{x}}{\ln 2}-\int\dfrac{2^{x}}{\ln 2}dx=x.\dfrac{2^{x}}{\ln 2}-\dfrac{2^{x}}{\ln^{2}2}+C=\left(x-\dfrac{1}{\ln 2}\right).\dfrac{2^{x}}{\ln 2}+C$.

Câu 20: Tính $I=\int\left(x+1\right).\ln x\,dx$. Bằng cách dùng nguyên hàm từng phần, ta sẽ đặt

A. $\begin{cases}x+1=u\\ \ln x\,dx=dv\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}\left(x+1\right)\ln x=u\\ dx=dv\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}\ln x dx=u\\ x+1=dv\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}\ln x=u\\ \left(x+1\right)dx=dv\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Bằng cách dùng nguyên hàm từng phần, ta sẽ đặt $\begin{cases}\ln x=u\\ \left(x+1\right)dx=dv\end{cases}$.

Câu 21: Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\ln\left(x+1\right)$ là

A. $\dfrac{1}{2}\left(x^{2}-1\right)\ln\left(x+1\right)-\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)^{2}+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\left(x^{2}-1\right)\ln\left(x+1\right)+\dfrac{1}{4}\left(x-1\right)^{2}+C$.

C. $\dfrac{1}{2}\left(x^{2}-1\right)\ln\left(x+1\right)-\dfrac{1}{4}\left(x-1\right)^{2}+C$. **D.** $\left(x^{2}-1\right)\ln\left(x+1\right)-\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)^{2}+C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+1\right)\\ dv=xdx\end{cases}$. Ta có $\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ v=\dfrac{x^{2}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^{2}-1}{2}\end{cases}$.

Khi đó $\int x\ln\left(x+1\right)dx=\dfrac{1}{2}\left(x^{2}-1\right)\ln\left(x+1\right)-\dfrac{1}{2}\int\left(x-1\right)dx=\dfrac{1}{2}\left(x^{2}-1\right)\ln\left(x+1\right)-\dfrac{1}{4}\left(x-1\right)^{2}+C$.

Câu 22: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\ln x$ là

A. $x\ln x+C$. **B.** $\ln x+C$. **C.** $x\ln x-x+C$. **D.** $\ln x-x+C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=x\end{cases}\Leftrightarrow\int\ln x dx=x\ln x-\int dx+C=x\ln x-x+C$.

Câu 23: Cho $F\left(x\right)=x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right).2022^{x}$. Khi đó $\int f'\left(x\right).2022^{x}dx$ bằng

A. $\sin x+x\cos x-x\sin x.\ln 2022+C$. **B.** $\sin x-x\cos x-x\sin x.\ln 2022+C$.

C. $x\cos x+\sin x-x\sin x.\ln 2022+C$. **D.** $\cos x-x\sin x.\ln 2022+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f'(x).2022^x\mathrm{d}x = \int 2022^x\mathrm{d}\left[f(x)\right]$.

Đặt $\begin{cases} u = 2022^x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}\left[f(x)\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2022^x \ln 2022\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int 2022^x\mathrm{d}\left[f(x)\right] = f(x).2022^x - \ln 2022.\int f(x).2022^x\mathrm{d}x = F'(x) - \ln 2022.F(x) + C$

$\Rightarrow \int 2022^x\mathrm{d}\left[f(x)\right] = (x\sin x)' - \ln 2022.(x\sin x) + C = \sin x + x\cos x - x\sin x.\ln 2022 + C$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tính $\int_0^2 \left[f(x) - 2\right]dx$.

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(xe^x\right)dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$. Ta có : $f(x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Với $f(0) = 1 \Rightarrow 0.e^0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

Vậy $f(x) = xe^x - e^x + 2$

Ta có : $\int_0^2 \left[f(x) - 2\right]dx = \int_0^2 (x-1)e^x\, dx = 2$.

Câu 25: Cho $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x.\cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{4}$. Hàm số $f(x)$ là

A. $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$. **B.** $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$.

C. $-\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$. **D.** $-\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int x.\cos 2x.\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x.\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$f(x) = x.\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x.\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

$f(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$.

Câu 26: Cho nguyên hàm của $\int x^2 \ln x\mathrm{d}x = ax^3 \ln x - bx^3 + C$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính giá trị $T = a + b$

A. $T=\dfrac{4}{9}$. **B.** $T=\dfrac{5}{9}$. **C.** $T=\dfrac{2}{9}$. **D.** $T=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

$\int x^2\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} x^2\mathrm{d}x=\mathrm{d}v \\ \ln x=u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\dfrac{1}{3}x^3 \\ \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \end{cases}$.

Suy ra $\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\int\dfrac{1}{3}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C.$

$T=a+b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{4}{9}$.

Câu 27: Họ các nguyên hàm của hàm số $y=xe^x$ là?

A. x^2e^x+C. **B.** $(x-1)e^x+C$. **C.** $(x+1)e^x+C$. **D.** xe^x+C.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$

$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$

Câu 28: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x.$ Biết $F(0)=1,$ giá trị $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** $1+\dfrac{\pi}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=-\cos x \end{cases}$.

$F\left(x\right)=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

Mà $F\left(0\right)=1\Rightarrow C=1$, suy ra $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

Câu 29: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\ln x\mathrm{d}x=x\left(\ln x+1\right)$. **B.** $\int\ln x\mathrm{d}x=x\left(\ln x+1\right)+C$.

C. $\int\ln x\mathrm{d}x=x\left(\ln x-1\right)+C$. **D.** $\int\ln x\mathrm{d}x=x\left(\ln x-1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow \int \ln x\mathrm{d}x = x.\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x\left(\ln x - 1\right) + C$.

Câu 30: Chọn khẳng định sai.

A. $\int x^2\ln\left(x-2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\ln\left(x-2\right) + \dfrac{1}{3}\int \dfrac{x^3}{2-x}\mathrm{d}x, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$.

B. $\int x^2\ln\left(x-2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\ln\left(x-2\right) - \dfrac{1}{3}\int \dfrac{x^2}{x-2}\mathrm{d}x, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$.

C. $\int x^2\ln\left(x-2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3-8}{3}\ln\left(x-2\right) - \int \dfrac{x^2+2x+4}{3}\mathrm{d}x, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$.

D. $\int x^2\ln\left(x-2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\ln\left(x-2\right) - \dfrac{1}{3}\int \dfrac{x^3}{x-2}\mathrm{d}x, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x-2\right) \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x-2}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Suy ra $\int x^2\ln\left(x-2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\ln\left(x-2\right) - \dfrac{1}{3}\int \dfrac{x^3}{x-2}\mathrm{d}x, \forall x \in \left(2;+\infty\right)$.

Câu 31: Cho $F\left(x\right) = -x.e^x$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right).e^{2x}$. Tìm họ nguyên hàm của $f'\left(x\right).e^{2x}$

A. $\left(x-2\right)e^x + C$. **B.** $2\left(1-x\right)e^x + C$. **C.** $\left(x-1\right)e^x + C$. **D.** $\dfrac{1-x}{2}e^x + C$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết suy ra $F'\left(x\right) = f\left(x\right).e^{2x} = \left(-xe^x\right)' = -\left(1+x\right)e^x$.

Tính $I = \int f'\left(x\right)e^{2x}dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'\left(x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f\left(x\right) \end{cases}$

$\Rightarrow I = e^{2x}f\left(x\right) - 2\int f\left(x\right)e^{2x}dx = -\left(1+x\right)e^x + 2xe^x + C = \left(x-1\right)e^x + C$.

Câu 32: Tính $\int x\ln^2 x\mathrm{d}x$. Chọn kết quả đúng?

A. $\dfrac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x + 2\ln x + 1\right) + C$. **B.** $\dfrac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x - 2\ln x + 1\right) + C$.

C. $\dfrac{1}{2}x^2\left(2\ln^2 x - 2\ln x + 1\right) + C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x^2\left(2\ln^2 x + 2\ln x + 1\right) + C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\ln x.\dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó: $\int x\ln^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}.\ln^2 x - \underbrace{\int x.\ln xdx}_{I_1}$.

Xét I_1 có: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó: $I_1 = \dfrac{x^2}{2}.\ln x - \dfrac{1}{2}\int xdx = \dfrac{x^2}{2}.\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$.

Suy ra:

$$\int x\ln^2 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.\ln^2 x - \frac{x^2}{2}.\ln x + \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$$

Câu 33: Cho $F(x) = x^2$ là nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Tìm nguyên hàm I của hàm số $f'(x).e^{2x}$

A. $I = -x^2 - 2x + C$.

B. $I = -2x^2 + 2x + C$.

C. $I = -x^2 + x + C$.

D. $I = -2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $F(x) = x^2$ là nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$; suy ra :

$F'(x) = f(x).e^{2x} \Leftrightarrow 2x = f(x).e^{2x}$

Ta có: $I = \int f'(x).e^{2x}dx$

Đặt: $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Suy ra: $I = f(x).e^{2x} - 2\int f(x).e^{2x}dx = 2x - 2x^2 + C$.

Câu 34: Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x.$

B. $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x.$

C. $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x.$

D. $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\ \sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$. Lúc đó, ta có: $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x.$

Câu 35: Biết $\int (x+3)e^{-2x}dx = -\dfrac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$ với $m, n \in \mathbb{Q}$. Khi đó, tổng $m^2 + n^2$ có giá trị bằng

A. 10.

B. 65.

C. 41.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} x + 3 = u \\ e^{-2x}dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$\int(x+3)e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}(x+3)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}(x+3)e^{-2x}-\frac{1}{4}\int e^{-2x}d(-2x)$

$=-\frac{1}{2}(x+3)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x+3+\frac{1}{2}\right)+C=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x+\frac{7}{2}\right)+C$

$=-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+7)+C$

Suy ra, $m=4;n=7$. Vậy $m^2+n^2=4^2+7^2=65$.

Câu 36: Biết $F(x)=\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f'(x).(x^3+1)\mathrm{d}x=4x+\frac{2}{x^2}+C$.

B. $\int f'(x).(x^3+1)\mathrm{d}x=4x-\frac{2}{x^2}+C$.

C. $\int f'(x).(x^3+1)\mathrm{d}x=-4x-\frac{2}{x^2}+C$.

D. $\int f'(x).(x^3+1)\mathrm{d}x=x+\frac{2}{x^2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{f(x)}{x}=F'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=-\frac{2}{x^3}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{2}{x^2}$.

Đặt $\begin{cases}u=x^3+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}$. Ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó $\int f'(x).(x^3+1)\mathrm{d}x=(x^3+1)f(x)-\int f(x).3x^2\mathrm{d}x$

$=-2x-\frac{2}{x^2}-\int(-6)\mathrm{d}x=4x-\frac{2}{x^2}+C$.

Câu 37: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{\ln(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Hệ số tự do của $F(x)$ thuộc khoảng

A. $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta tìm họ các nguyên hàm của hàm số $y=\frac{\ln(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x-\cos x)\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x\\ v=-\cot x+1\end{cases}$

$\int\frac{\ln(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=(1-\cot x)\ln(\sin x-\cos x)-\int(1-\cot x)\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$

$=(1-\cot x)\ln(\sin x-\cos x)-\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=(1-\cot x)\ln(\sin x-\cos x)+\ln(\sin x)-x+C$.

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow-\frac{\pi}{2}+C=1\Leftrightarrow C=1+\frac{\pi}{2}\Rightarrow C\approx 2,57$.

Vậy hệ số tự do của $F\left(x\right)$ thuộc khoảng $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}$, $f\left(0\right)=0$ và $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(ax+b\right)\mathrm{e}^{x}+c$ với a,b,c là các hằng số. Khi đó:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề: $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}$. Nguyên hàm 2 vế ta được

$\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow f\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}-\int\mathrm{e}^{x}dx$

$\Rightarrow f\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+C=x\mathrm{e}^{x}+C$

Mà $f\left(0\right)=0\Rightarrow 0.\mathrm{e}^{0}+C=0\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}$.

$\Rightarrow\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x}-\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+C=\left(x-1\right)\mathrm{e}^{x}+C$.

Suy ra $a=1;b=-1\Rightarrow a+b=0$.

Dạng 6: Nguyên hàm hàm ẩn

A. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=e; f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $10<f\left(5\right)<11$. **B.** $3<f\left(5\right)<4$. **C.** $11<f\left(5\right)<12$. **D.** $4<f\left(5\right)<5$.

Lời giải

Ta có : $f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}\Rightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$

$\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx=\int\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}dx\Rightarrow\ln f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$

Vì $f\left(1\right)=e$ nên $1=\dfrac{4}{3}+C\Rightarrow C=\dfrac{-1}{3}$. Vậy $f\left(5\right)=e^{\frac{7}{3}}$.

Câu 2: Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và luôn nhận giá trị dương, đồng thời thỏa mãn $f\left(x\right).f'\left(x\right)-f^2\left(x\right)=2e^{6x}$ với mọi x. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(1\right)=a.e^b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có: $f\left(x\right).f'\left(x\right)-f^2\left(x\right)=2e^{6x}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2f\left(x\right).f'\left(x\right).e^{2x}-2e^{2x}.f^2\left(x\right)}{e^{4x}}=4e^{4x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{f^2\left(x\right)}{e^{2x}}\right)'=4e^{4x}\Leftrightarrow\dfrac{f^2\left(x\right)}{e^{2x}}=\displaystyle\int 4e^{4x}dx=e^{4x}+C.$

Suy ra $\dfrac{f^2\left(0\right)}{1}=1+C\Rightarrow C=0.$

Do đó $f^2\left(x\right)=e^{6x}\Rightarrow f\left(x\right)=e^{3x},\forall x$.

Vậy $f\left(1\right)=e^3\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=4..$

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)\neq 0$; $f'\left(x\right)=\left(2x+1\right).f^2\left(x\right)$ và $f\left(1\right)=-0,5$. Tính tổng $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(2017\right)=\dfrac{a}{b}$; $\left(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}\right)$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Chọn khẳng định đúng

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $b-a=4035$. **C.** $a\in\left(-2017;2017\right)$. **D.** $a+b=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'\left(x\right)=\left(2x+1\right).f^2\left(x\right)\Leftrightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=2x+1\Leftrightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + x + C \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = -x^2 - x - C$.

Lại có: $f(1) = -0,5 \Rightarrow -2 = -1^2 - 1 - C \Rightarrow C = 0$.

Vậy $\dfrac{1}{f(x)} = -\left(x^2 + x\right) = -x(x+1)$ hay $-f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Ta có: $-f(1) - f(2) - f(3) - ... - f(2017) = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{2017.2018}$

$= 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2017} - \dfrac{1}{2018} = 1 - \dfrac{1}{2018} = \dfrac{2017}{2018}$.

Vậy $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2017) = \dfrac{-2017}{2018}$ hay $a = -2017$, $b = 2018$ $\Rightarrow b - a = 4035$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$

A. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$ **B.** $\dfrac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$ **C.** $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$ **D.** $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int g(x)dx = \int (x+1)f'(x)dx = \int (x+1)d\left(f(x)\right) = (x+1).f(x) - \int f(x).dx$

$= (x+1).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.dx = (x+1).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} + C = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)<0$, $\forall x>0$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\left(2x+3\right)f^2\left(x\right)$, $\forall x>0$ và $f\left(1\right)=-\frac{1}{6}$. Giá trị của biểu thức $f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2023\right)$ bằng

A. $-\frac{2021}{4046}$ **B.** $-\frac{2022}{2023}$ **C.** $-\frac{2023}{4050}$ **D.** $-\frac{2021}{2023}$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $f'\left(x\right)=\left(2x+3\right)f^2\left(x\right)\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=2x+3$ (vì $f\left(x\right)<0$, $\forall x>0$)

$$\Leftrightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}\text{d}x=\int\left(2x+3\right)\text{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f\left(x\right)}=x^2+3x+C\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2+3x+C}$$

Theo đề $f\left(1\right)=-\frac{1}{6}\Leftrightarrow-\frac{1}{1+3+C}=-\frac{1}{6}\Leftrightarrow C=2$

Suy ra $f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{\left(x+2\right)\left(x+1\right)}=-\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$

Từ đó suy ra

$$f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2023\right)=\frac{1}{1+2}-\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+2}-\frac{1}{2+1}+...+\frac{1}{2023+2}-\frac{1}{2023-1}$$

$$=-\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2023+2}=-\frac{2023}{4050}.$$

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-2;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)+2\left(x+2\right)f'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ và $f\left(2\right)=\frac{1}{4}\ln4$. Giá trị của $f\left(7\right)$ bằng

A. $f\left(7\right)=\frac{1}{2}\ln3+3$. **B.** $f\left(7\right)=\frac{1}{3}\ln3+\frac{1}{2}$. **C.** $f\left(7\right)=\frac{1}{3}\ln3+1$. **D.** $f\left(7\right)=\frac{1}{3}\ln3$.

Lời giải

Chọn D

Nhân cả 2 vế của phương trình với $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ta được:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}}f\left(x\right)+\sqrt{x+2}.f'\left(x\right)=\frac{1}{2\left(x+2\right)}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}.f\left(x\right)\right)'=\frac{1}{2\left(x+2\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}.f\left(x\right)=\int\frac{1}{2\left(x+2\right)}dx\Leftrightarrow\sqrt{x+2}.f\left(x\right)=\frac{1}{2}.\ln\left(x+2\right)+C$$

Với $x=2$ ta được: $2.f\left(2\right)=\frac{1}{2}.\ln4+C\Leftrightarrow2.\frac{1}{4}\ln4=\frac{1}{2}\ln4+C\Leftrightarrow C=0$

Ta có: $\sqrt{x+2}.f\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x+2\right)$

Thay $x=7$ ta được: $3.f\left(7\right)=\dfrac{1}{2}\ln 9\Leftrightarrow f\left(7\right)=\dfrac{1}{3}\ln 3$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $\left(x+2\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-x^3,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(1\right)=e$. Giá trị của $f\left(2\right)$ là

A. $4e^2+4e-2$. **B.** $4e^2+4e-4$. **C.** $4e^2+2e-2$. **D.** $4e^2+2e-4$.

Lời giải

Chọn B

$\left(x+2\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-x^3,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)\quad\Leftrightarrow x^2f'\left(x\right)-2xf\left(x\right)-x^2f\left(x\right)=x^4,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2f'\left(x\right)-2xf\left(x\right)}{x^4}-\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}=1,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\right)'-\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}=1,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\right)'e^{-x}-\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}e^{-x}=e^{-x},\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}e^{-x}\right)'=e^{-x},\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)\Rightarrow\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}e^{-x}=-e^{-x}+C,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Do $f\left(1\right)=e$, suy ra $C=1+e^{-1}$.

Vậy $f\left(x\right)=x^2\left(-1+e^x+e^{x-1}\right),\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$. Suy ra: $f\left(2\right)=4e^2+4e-4$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn $f\left(x\right).f'\left(x\right)-\left[f\left(x\right)\right]^2=2e^{6x},\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(1\right)=a.e^b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right).f'\left(x\right)-\left[f\left(x\right)\right]^2=2e^{6x}\Leftrightarrow 2e^{-2x}\left[f\left(x\right).f'\left(x\right)-f^2\left(x\right)\right]=4e^{4x}$

$\Leftrightarrow\left[e^{-2x}.f^2\left(x\right)\right]'=4e^{4x}\Rightarrow e^{-2x}.f^2\left(x\right)=e^{4x}+C$.

Với $f\left(0\right)=1\Rightarrow e^0.f^2\left(0\right)=e^0+C\Rightarrow C=0$.

Với $f\left(1\right)=a.e^b\Rightarrow e^{-2}.f^2\left(1\right)=e^4\Rightarrow f^2\left(1\right)=e^6\Rightarrow f\left(1\right)=e^3$.

Vậy $a=1,b=3\Rightarrow a+b=4$.

Câu 5: Cho hàm số thỏa mãn $f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$ và $f'\left(x\right)-\dfrac{f\left(x\right)}{x^2+x}=\dfrac{x}{x+1},\ \forall x\left(0;+\infty\right)$. Giá trị của $f\left(2\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;2\right)$.. **B.** $\left(2;3\right)$.. **C.** $\left(3;4\right)$.. **D.** $\left(0;1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x)-\frac{f(x)}{x^2+x}=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}f'(x)-\frac{f(x)}{x^2}=1\Leftrightarrow\left[\frac{x+1}{x}f(x)\right]'=1\Rightarrow\frac{x+1}{x}f(x)=x+C$$

Cho $x=1\Rightarrow C+1=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}\Rightarrow f(2)=\dfrac{4}{3}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\big(2f(x)-f'(x)\big)$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(4)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(54;56)$. **B.** $(74;76)$. **C.** $(10;12)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f(x)\ln f(x)=x\big(2f(x)-f'(x)\big)\Rightarrow\ln f(x)=2x-x\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow\ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=2x\Rightarrow\big(x\ln f(x)\big)'=2x\Rightarrow x\ln f(x)=x^2+C$$

Từ $f(1)=f(4)$ ta có $\begin{cases}\ln f(1)=1+C\\4\ln f(4)=16+C\end{cases}\Rightarrow4(1+C)=16+C\Rightarrow C=4$.

Do đó $x\ln f(x)=x^2+4\Rightarrow f(x)=e^{x+\frac{4}{x}}\Rightarrow f(2)=e^4\approx54,598\in(54;56)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)\neq0,\forall x\in\mathbb{R}$; $f(2)=-\dfrac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)-f(0)$ bằng

A. $\dfrac{1}{90}$. **B.** $-\dfrac{1}{90}$. **C.** $-\dfrac{1}{72}$. **D.** $\dfrac{1}{72}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)\neq0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên

$$f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Leftrightarrow-\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3\Leftrightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3.$$

Nguyên hàm hai vế ta được $\dfrac{1}{f(x)}=-\int4x^3dx=-x^4+C$.

Mà $f(2)=-\dfrac{1}{25}$ nên suy ra: $-25=-16+C\Rightarrow C=-9$.

$$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=-x^4-9\Rightarrow f(x)=\frac{1}{-x^4-9}\Rightarrow f(1)-f(0)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}=\frac{1}{90}.$$

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và khác không với mọi x thỏa mãn $f(0)=-1$ và $f'(x)=e^x.f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(-1)$ bằng

A. -1. **B.** $-e$. **C.** e. **D.** $-\dfrac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=e^x.f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=e^x$ (vì $f(x)=0$ không thỏa mãn đẳng thức này)

$\Leftrightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int e^x dx \Leftrightarrow \int \dfrac{1}{f^2(x)}d\left(f(x)\right)=\int e^x dx \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=e^x+C \quad (*)$

Thay $x=0$ vào $(*)$ ta được $-\dfrac{1}{f(0)}=e^0+C \Leftrightarrow -\dfrac{1}{-1}=1+C \Leftrightarrow C=0$.

Do vậy $-\dfrac{1}{f(x)}=e^x \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{e^x} \Rightarrow f(1)=-\dfrac{1}{e}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ là

A. xe^x+x+C. **B.** $(x+1)e^x+C$. **C.** $xe^{-x}+x+C$. **D.** $(x-1)e^x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)+f'(x)=e^{-x} \Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)=1 \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=1 \Leftrightarrow \int\left(e^x f(x)\right)'dx=\int dx$

$\Leftrightarrow e^x f(x)=x+C_1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+C_1}{e^x}$.

Theo giả thiết $f(0)=2$, ta có $f(0)=\dfrac{0+C_1}{e^0}=2 \Leftrightarrow C_1=2$.

Vậy $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$.

Khi đó $\int f(x)e^{2x}dx=\int \dfrac{x+2}{e^x}e^{2x}dx=\int (x+2)e^x dx=(x+2)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x+C$.

Câu 10: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=e$, $f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $11<f(5)<12$. **C.** $10<f(5)<11$. **D.** $4<f(5)<5$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$

$\Rightarrow \ln|f(x)|=\int (3x+1)^{\frac{-1}{2}}dx \Rightarrow \ln|f(x)|=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C.$

Do $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=e$, ta có

$\ln f(1)=\dfrac{4}{3}+C \Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow \ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\dfrac{1}{3} \Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{1}{3}}$.

$\Rightarrow f(5)=e^{\frac{7}{3}}\approx 10,3123 \Rightarrow 10<f(5)<11.$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ thỏa mãn $x.(x+2).f'(x)+2f(x)=x^2+2x$ và $f(1)=-6\ln 3$. Biết $f(3)=a+b.\ln 5$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x.(x+2).f'(x)+2f(x)=x^2+2x$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{2f(x)}{x(x+2)}=1\Leftrightarrow \frac{x.f'(x)}{x+2}+\frac{2f(x)}{(x+2)^2}=\frac{x}{x+2}\Leftrightarrow\left[f(x).\frac{x}{x+2}\right]'=\frac{x}{x+2}$$

Nguyên hàm hai vế ta có:

$$\int\left[f(x).\frac{x}{x+2}\right]'dx=\int\left(\frac{x}{x+2}\right)dx=\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx=x-2\ln|x+2|+C$$

$$\Leftrightarrow f(x).\frac{x}{x+2}=x-2\ln|x+2|+C$$

Vì $f(1)=-6\ln 3$

Nên $\frac{1}{3}f(1)=1-2\ln 3+C\Leftrightarrow\frac{1}{3}.(-6\ln 3)=1-2\ln 3+C\Rightarrow C=-1$

Khi đó: $\frac{3}{5}f(3)=3-2\ln 5-1\Rightarrow f(3)=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}\ln 5$

Suy ra $a=\frac{10}{3};b=\frac{-10}{3}$

Vậy: $a-b=\frac{10}{3}+\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $f'(x)-(2x+3)f^2(x)=0$ và $f(x)<0$ với mọi $x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{6}$. Giá trị của biểu thức: $T=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2022)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)-(2x+3)f^2(x)=0$ mà $f(x)<0$,$\forall x>0$ nên $\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$.

Lấy nguyên hàm 2 vế, ta được: $\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$, suy ra: $\frac{-1}{f(x)}=x^2+3x+c$.

Mà $f(1)=-\frac{1}{6}$ suy ra $c=2$. Vậy $f(x)=\frac{-1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$.

Ta có: $\begin{cases} f\left(1\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2} \\ f\left(2\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3} \\ f\left(3\right)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{4} \\ ... \\ f\left(2022\right)=\dfrac{1}{2024}-\dfrac{1}{2023} \end{cases}$

Suy ra: $T=f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(2022\right)=\dfrac{1}{2024}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1011}{2024}\in\left(-1;0\right)$.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thoả mãn $f\left(x\right)>-1$ và $f'\left(x\right)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f\left(x\right)+1},\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f\left(0\right)=0$, khi đó $f\left(2\right)$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f\left(x\right)+1}\Leftrightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Nên $\displaystyle\int\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)}{\sqrt{f\left(x\right)+1}}=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{f\left(x\right)+1}=2\sqrt{x^2+1}+C$.

Mà $f\left(0\right)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow\sqrt{f\left(x\right)+1}=\sqrt{x^2+1}$ nên $f\left(x\right)=x^2\Rightarrow f\left(2\right)=4$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $\left(x^2+1\right)^2f'(x)=[f(x)]^2\left(x^2-1\right)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Tính giá trị $f(3)$.

A. $\dfrac{8}{3}$ **B.** 4 **C.** $\dfrac{10}{3}$ **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(x^2+1\right)^2f'\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2\left(x^2-1\right)\Rightarrow\dfrac{f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2}=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$ hay $\dfrac{f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2}=-\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'$.

Lấy nguyên hàm hai vế: $-\dfrac{1}{f\left(x\right)}=-\dfrac{x}{x^2+1}+C$.

Thay $x=1:-\dfrac{1}{f\left(1\right)}=-\dfrac{1}{1^2+1}+C\Rightarrow C=0$ suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x}\Rightarrow f\left(3\right)=\dfrac{10}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right)>0,\forall x>\dfrac{1}{2}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên khoảng

$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ thỏa mãn $f'(x)+8x.f^2(x)=0,\forall x>\frac{1}{2}$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Tính tổng: $f(1)+f(2)+...+f(1011)$.

A. $\frac{1}{2}.\frac{2022}{2023}$. **B.** $\frac{2021}{2043}$. **C.** $\frac{2022}{4045}$. **D.** $\frac{1}{2}.\frac{2021}{2022}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $f'(x)+8x.f^2(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=-8x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=-\int 8xdx$

$\Leftrightarrow\int\frac{d(f(x))}{f^2(x)}=-\int 8xdx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=4x^2+c \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{4x^2+c}$

Có $f(1)=\frac{1}{3}$ nên $\frac{1}{4.1^2+c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow c=-1$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{4x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$

$f(1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$f(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$f(3)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

……………………

$f(2011)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}\right)$

Cộng vế với vế ta được: $f(1)+f(2)+...f(1011)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2022}{2023}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x,\ \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính $f^2(1)$.

A. $f^2(1)=\frac{43}{15}$. **B.** $f^2(1)=\frac{26}{15}$. **C.** $f^2(1)=\frac{47}{30}$. **D.** $f^2(1)=\frac{73}{30}$.

Lời giải

Ta có: $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x\Leftrightarrow[f'(x).f(x)]'=x^3-2x$

$\Leftrightarrow f'(x).f(x)=\int(x^3-2x)dx=\frac{x^4}{4}-x^2+C_1$.

Theo giả thiết $f(0)=f'(0)=1$ nên $C_1=1$.

Suy ra: $f'(x).f(x)=\frac{x^4}{4}-x^2+1\Leftrightarrow 2f'(x).f(x)=\frac{x^4}{2}-2x^2+2$

$$\Leftrightarrow \left[f^2(x) \right]' = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2 \right) dx = \frac{x^5}{10} - \frac{2x^3}{3} + 2x + C_2$$

Do $f(0) = 1$ nên $C_2 = 1$. Suy ra $f^2(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{2x^3}{3} + 2x + 1$.

Vậy $f^2(1) = \frac{1}{10} - \frac{2}{3} + 2 + 1 = \frac{73}{30}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x) + (2x+1)f(x) = \frac{1}{x} - 1$ và $f(1) = 1$. Biết $f(2) = a + b\ln 2$. Khi đó $a + b$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết: $x(x+1)f'(x) + (2x+1)f(x) = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \left(\left(x^2 + x \right) f(x) \right)' = \frac{1}{x} - 1$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\left(x^2 + x \right) f(x) = \int \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \mathrm{d}x = \ln|x| - x + C$.

Vì $f(1) = 1$ nên $2.f(1) = \ln 1 - 1 + C \Leftrightarrow C = 3$.

Do đó $f(x) = \frac{\ln|x| - x + 3}{x^2 + x}$.

Vậy: $f(2) = \frac{\ln 2 + 1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2 \Rightarrow a = b = \frac{1}{6} \Rightarrow a + b = \frac{1}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = \ln x.f^2(x), \forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;+\infty)$ và $f(e) = 2$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$.

A. $y = -\frac{2}{3}x + 2$. **B.** $y = -\frac{2}{3}$. **C.** $y = \frac{2}{3}x + 1$. **D.** $y = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = \ln x.f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \ln x \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{f(x)} \right)^2 = \ln x$

$$\Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = \int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

Với $x = e$ ta có $\frac{-1}{f(e)} = e\ln e - e + C$ mà $f(e) = 2. \Rightarrow \frac{-1}{2} = C$

Suy ra $f(x) = \frac{-1}{x\ln x - x - \frac{1}{2}}$

Khi đó $\begin{cases} f(1)=\dfrac{2}{3} \\ f'(1)=\ln 1.f^2(1)=0 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$y=f'(x)(x-1)+f(1)=\dfrac{2}{3}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)>0$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=e^3$. Biết $f'(x)=(2x-3)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Hỏi phương trình $f(x)=e^{2x^4-3x+4}$ có bao nhiêu nghiệm

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Sử dụng giả thiết $f(x)>0$ và liên tục $\forall x\in\mathbb{R}$, ta biến đổi:

$f'(x)=(2x-3)f(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x-3\Rightarrow \ln f(x)=x^2-3x+C$

$\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2-3x+C}$

Từ giả thiết $f(1)=e^3\Leftrightarrow e^{-2+C}=e^3\Leftrightarrow C=5$. Suy ra $f(x)=e^{x^2-3x+5}$

Xét phương trình $f(x)=e^{2x^4-3x+4}\Leftrightarrow e^{x^2-3x+5}=e^{2x^4-3x+4}\Leftrightarrow 2x^4-x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+\dfrac{1}{2}f'(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}$, biết $f(0)=1$. Tìm hàm số $f(x)$.

Lời giải

Ta có:

$f(x)+\dfrac{1}{2}f'(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}\Leftrightarrow 2e^{2x}f(x)+e^{2x}f'(x)=2$

$\Leftrightarrow\left[e^{2x}f(x)\right]'=2\Leftrightarrow\int\left[e^{2x}f(x)\right]'dx=\int 2dx\Leftrightarrow e^{2x}f(x)=2x+C$

Mà $f(0)=1$ nên $e^{2.0}.f(0)=2.0+C\Leftrightarrow C=1$

Do đó: $e^{2x}f(x)=2x+1\Rightarrow f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2021.f(x)=2021.x^{2020}.e^{2021x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2021$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2021.e^{2021}$. **B.** $f(1)=2022.e^{2021}$. **C.** $f(1)=2021.e^{-2021}$. **D.** $f(1)=2020.e^{2021}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)-2021.f(x)=2021.x^{2020}.e^{2021x}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)-2021.f(x)}{e^{2021x}}=2021.x^{2020}$

$\Leftrightarrow f'(x).e^{-2021x}-2021.f(x).e^{-2021x}=2021.x^{2020}\Leftrightarrow\left(f(x).e^{-2021x}\right)'=2021.x^{2020}$

Nên $\int\left(f(x).e^{-2021x}\right)'\mathrm{d}x=\int 2021.x^{2020}\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x).e^{-2021x}=x^{2021}+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^{2021}+C}{e^{-2021x}} \Leftrightarrow f(x)=\left(x^{2021}+C\right)e^{2021x}$ (1)

Từ đó $f(0).e^{-2021.0}=0^{2021}+C \Leftrightarrow C=f(0)$

Theo đề ra ta có: $f(0)=2021$ nên $C=2021$.

Từ (1) suy ra $f(1)=\left(1^{2021}+2021\right)e^{2021.1}=2022.e^{2021}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=1$. Tính $f(4)$?

A. $\dfrac{33}{2}$. **B.** $\dfrac{65}{2}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** $\dfrac{65}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có: $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(x)=\dfrac{3}{2}x^2$.

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=\dfrac{3}{2}x^2 \Rightarrow \int\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\dfrac{3}{2}x^2\mathrm{d}x \Rightarrow \sqrt{x}.f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+C$. $(*)$

Mà $f(1)=1$ nên từ $(*)$ ta có: $\sqrt{1}.f(1)=\dfrac{1}{2}.1^3+C \Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{2}+C \Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Vậy $f(4)=\dfrac{4^2\sqrt{4}}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=16+\dfrac{1}{4}=\dfrac{65}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=x.f'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 15. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)=x.f'(x)-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow x.f'(x)-f(x)=2x^3+3x^2 \Leftrightarrow \dfrac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=2x+3$.

Suy ra: $\int\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x+C$.

Do $f(1)=4$ nên $\dfrac{f(1)}{1}=1^2+3.1+C \Rightarrow C=0$.

Khi đó: $\dfrac{f(2)}{2}=2^2+3.2 \Rightarrow f(2)=20$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x)=x\ln x.f'(x)+2\left[xf(x)\right]^2, \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(e)=\dfrac{1}{e^2}$. Tính $f(2)$

A. $\frac{\ln 2}{4}$. **B.** $\frac{\ln 2}{2}$. **C.** $-\frac{\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{\ln 2}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Lời giải

Ta có

$f(x)=x\ln x.f'(x)+2\left[xf(x)\right]^2 \Leftrightarrow f(x)-x\ln x.f'(x)=2\left[xf(x)\right]^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}f(x)-\ln x.f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}f(x)-\ln x.f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x}{f(x)}\right)'=2x$

Suy ra $\frac{\ln x}{f(x)}=x^2+c \Rightarrow f(x)=\frac{\ln x}{x^2+c}$

Từ có $f(e)=\frac{1}{e^2} \Rightarrow c=0$. Suy ra hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. Khi đó $f(2)=\frac{\ln 2}{4}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3).f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1)+f(2)+...+f(2017)+f(2021)+f(2022)=\frac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=3035$. **D.** $b-a=3035$.

Lời giải

Chọn D

Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3 \Leftrightarrow \int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\frac{-1}{2}$ nên $=2$.

Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+2}=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Khi đó

$\frac{a}{b}=f(1)+f(2)+...+f(2021)+f(2022) \quad =-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{2022.2023}+\frac{1}{2023.2024}\right)$

$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2024}\right)=\frac{-1011}{2024}$.

Với điều kiện a,b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases}a=-1011\\b=2024\end{cases} \Rightarrow b-a=3035.$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=2x^2-x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left[f(x)f'(x)\right]'=\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $\left[f(x)f'(x)\right]'=2x^2-x+1$.

Suy ra $f(x)f'(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+C$. Hơn nữa $f(0)=f'(0)=3$ suy ra $C=9$.

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]'=2\left(\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+9\right)$.

Suy ra $f^2(x)=\int 2\left(\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+9\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{x^3}{3}+x^2+18x+C_1$, cũng vì $f(0)=3$

suy ra $f^2(x)=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{x^3}{3}+x^2+18x+9$. Do đó $\left[f(1)\right]^2=28$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $(0;+\infty)$, có $f(0)=\sqrt{3}$ và thỏa mãn $f^2(x)+(x+1)f'(x)f(x)=(x+1)\sqrt{f^2(x)+1}-1$. Khi đó giá trị của $f(0)+f(2)$ bằng

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $3+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f^2(x)+(x+1)f'(x)f(x)=(x+1)\sqrt{f^2(x)+1}-1$

$\Leftrightarrow f^2(x)+1+(x+1)f'(x)f(x)=(x+1)\sqrt{f^2(x)+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)+1+(x+1)f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=x+1 \Leftrightarrow \left((x+1)\sqrt{f^2(x)+1}\right)'=x+1$

$\Rightarrow \int\limits_0^2\left((x+1)\sqrt{f^2(x)+1}\right)'dx=\int\limits_0^2(x+1)dx \Leftrightarrow \left((x+1)\sqrt{f^2(x)+1}\right)\Big|_0^2=4$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{f^2(2)+1}-\sqrt{f^2(0)+1}=4 \Leftrightarrow 3\sqrt{f^2(2)+1}-2=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{f^2(2)+1}=2 \Leftrightarrow f(2)=\sqrt{3}$

Vậy $f(0)+f(2)=2\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\dfrac{21}{16}$. **B.** $T=\dfrac{3}{2}$. **C.** $T=\dfrac{-3}{16}$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$

$\Leftrightarrow f'(x)+\dfrac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}f'(x)+\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]' = \frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \int \frac{x^2}{x+1}dx \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c\right).$

Mặt khác: $f(1) = 2\ln 2 + 1 \Leftrightarrow c = 1.$

Từ đó $f(x) = \frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1\right)$, $f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln 3.$ Nên $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}.$

Vậy $T = a^2 - b = -\frac{3}{16}$..

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $x^2 f'(x) - xf(x) = 2x^4 - 2$, với mọi $x \in (0;+\infty)$ và $f(1) = 3$. Tính $f(2)$.

A. $\frac{19}{2}$. **B.** $-\frac{21}{2}$. **C.** $-\frac{23}{2}$. **D.** $\frac{21}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2 f'(x) - xf(x) = 2x^4 - 2 \Rightarrow \frac{x^3 f'(x) - xf(x)}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3}$

$\Rightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x - \frac{2}{x^3} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 2x - \frac{2}{x^3}$

$\Rightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x}\right)' \mathrm{d}x = \int \left(2x - \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + C$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + Cx$.

Do $f(1) = 3 \Leftrightarrow 3 = 1^3 + \frac{1}{1} + C.1 \Leftrightarrow C = 1$, nên $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + x$.

Khi đó $f(2) = 2^3 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{21}{2}$..

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên khoảng $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{f^3(x) + f(x)}$, $f(0) = 1$ và $\int f^2(x)dx = \frac{1}{6}\left(\sqrt{4x+a}\right)^3 + bx + c$. Tính $a + b$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{f^3(x) + f(x)} \Leftrightarrow \left[f^2(x) + 1\right].f(x).f'(x) = 1$

Nguyên hàm hai vế ta được: $\dfrac{\left[f^2(x)+1\right]^2}{4}=x+C$

Với $f(0)=1\Rightarrow C=1$

Suy ra $\left[f^2(x)+1\right]^2=4x+4\Leftrightarrow f^2(x)=\sqrt{4x+4}-1$

$\int f^2(x)dx=\int\left(\sqrt{4x+4}-1\right)dx=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{4x+4}\right)^3-x+c$.

Vậy $a=4,b=-1\Rightarrow a+b=3$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=2x^2-x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng

A. 28.. **B.** 22.. **C.** $\dfrac{19}{2}$.. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left[f(x)f'(x)\right]'=\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $\left[f(x)f'(x)\right]'=2x^2-x+1$.

Suy ra $f(x)f'(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+C$. Hơn nữa $f(0)=f'(0)=3$ suy ra $C=9$.

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]'=2\left(\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+9\right)$.

Suy ra $f^2(x)=\int 2\left(\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+9\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{x^3}{3}+x^2+18x+C_1$, cũng vì $f(0)=3$

suy ra $f^2(x)=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{x^3}{3}+x^2+18x+9$. Do đó $\left[f(1)\right]^2=28$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $(0;+\infty)$, có $f(0)=\sqrt{3}$ và thỏa mãn $f^2(x)+(x+1)f'(x)f(x)=(x+1)\sqrt{f^2(x)+1}-1$. Khi đó giá trị của $f(0)+f(2)$ bằng

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $3+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f^2(x)+(x+1)f'(x)f(x)=(x+1)\sqrt{f^2(x)+1}-1$

$\Leftrightarrow f^2(x)+1+(x+1)f'(x)f(x)=(x+1)\sqrt{f^2(x)+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)+1+(x+1)f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=x+1\Leftrightarrow\left((x+1)\sqrt{f^2(x)+1}\right)'=x+1$

$\Rightarrow\int\limits_0^2\left((x+1)\sqrt{f^2(x)+1}\right)'dx=\int\limits_0^2(x+1)dx$

$\Leftrightarrow \left(\left(x+1\right)\sqrt{f^2\left(x\right)+1}\right)\Big|_0^2 = 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{f^2\left(2\right)+1}-\sqrt{f^2\left(0\right)+1} = 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{f^2\left(2\right)+1}-2 = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{f^2\left(2\right)+1} = 2 \Leftrightarrow f\left(2\right) = \sqrt{3}$

Vậy $f\left(0\right)+f\left(2\right) = 2\sqrt{3}$.

Câu 33: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai dương trên $\left(0;+\infty\right)$ đồng thời thỏa mãn $\left[f''\left(x\right)\right]^2-2\sqrt{x}\left[f''\left(x\right)+1\right]-1=0$ với mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$. Biết $f'\left(1\right)=\frac{7}{3}$ và $f\left(1\right)=\frac{31}{30}$. Tính $f\left(4\right)$.

A. $\frac{376}{15}$. **B.** $\frac{202}{3}$. **C.** $\frac{221}{15}$. **D.** $\frac{179}{3}$.

Lời giải

Chọn A

.

Ta viết lại

$\left[f''\left(x\right)\right]^2-2\sqrt{x}\left[f''\left(x\right)+1\right]-1=0 \Leftrightarrow \left[f''\left(x\right)-\sqrt{x}\right]^2=\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''\left(x\right)=2\sqrt{x}+1 \\ f''\left(x\right)=-1 \end{array}\right.$

Vì hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai dương trên $\left(0;+\infty\right)$ nên $f''\left(x\right)=2\sqrt{x}+1,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$. Vì $f'\left(1\right)=\frac{7}{3}\Rightarrow C=0$. Vậy $f'\left(x\right)=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f\left(x\right)=\frac{8}{15}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2+C$. Vì $f\left(1\right)=\frac{31}{30}\Rightarrow C=0$.

Do đó $f\left(x\right)=\frac{8}{15}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\Rightarrow f\left(4\right)=\frac{376}{15}$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(f'\left(x\right)\right)^2=f\left(x\right).e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=2$. Khi đó $f\left(2\right)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(12;13\right)$. **B.** $\left(9;10\right)$. **C.** $\left(11;12\right)$. **D.** $\left(13;14\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f\left(0\right)=2$ nên $f'\left(x\right)\geq 0$ và $f\left(x\right)>0$ với mọi $x\in\left[0;+\infty\right)$.

Từ giả thiết $\left(f'\left(x\right)\right)^2=f\left(x\right).e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $f'\left(x\right)=\sqrt{f\left(x\right)}.e^{\frac{x}{2}},\ \forall x\in\left[0;+\infty\right)$.

Do đó, $\frac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\ \forall x\in\left[0;+\infty\right)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f\left(x\right)}=e^{\frac{x}{2}}+C,\ \forall x\in\left[0;+\infty\right)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f\left(0\right)=2$, ta được $C=\sqrt{2}-1$.

Từ đó, tính được $f\left(2\right)=\left(e+\sqrt{2}-1\right)^2\approx 9{,}81$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 3x + 12, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(2) = 12$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. -9. **B.** 4. **C.** -7. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int (3x+12)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + 12x + C_1$.

Mà $f(2) = 12$ nên $\frac{3}{2}.2^2 + 12.2 + C_1 = 12 \Leftrightarrow C_1 = -18$.

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 12x - 18$.

Lại có $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^3 + 6x^2 - 18x + C_2$.

Hơn nữa, $F(0) = -1 \Leftrightarrow C_2 = -1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^3 + 6x^2 - 18x - 1$.

Suy ra $F(2) = \frac{1}{2}.2^3 + 6.2^2 - 18.2 - 1 = -9$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Do $x \in [1;2]$ nên $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 2x + 3$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C$.

Do $f(1) = 4$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 20$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $(x^2+1).f'(x) + 2x.f(x) - x^2 - 2x - 1 = 0$ và $f(1) = \frac{43}{24}$. Khi đó $f(2)$ bằng

A. $\frac{119}{60}$. **B.** $\frac{26}{15}$. **C.** $-\frac{119}{60}$. **D.** $\frac{119}{36}$.

Lời giải

Chọn A

$(x^2+1).f'(x) + 2x.f(x) - x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[(x^2+1).f(x)\right]' = x^2 + 2x + 1$.

$\int\left[(x^2+1).f(x)\right]'\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C \Leftrightarrow (x^2+1).f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$

Theo giả thiết $2f(1) = \frac{7}{3} + C \Rightarrow C = \frac{5}{4}$

Vậy $f(x)=\dfrac{\dfrac{x^3}{3}+x^2+x+\dfrac{5}{4}}{x^2+1}\Rightarrow f(2)=\dfrac{119}{60}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2022$, khi đó $F(1)$ bằng?

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}+\dfrac{4035}{2}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}+\dfrac{4037}{2}$. **C.** $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+\dfrac{4037}{2}$. **D.** $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+2020$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+C$.

Vì $f(0)=0$ nên $\mathrm{e}^{2.0}+\mathrm{e}^0+C=0\Rightarrow C=-2$.

Suy ra $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2$.

Do đó $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2x+D$.

Vì $F(0)=2022$ nên $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2.0}+\mathrm{e}^0-2.0+D=2022\Rightarrow D=\dfrac{4041}{2}$.

Suy ra $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2x+\dfrac{4041}{2}$.

Vậy $F(1)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2.1}+\mathrm{e}^1-2.1+\dfrac{4041}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}+\dfrac{4037}{2}$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(-1)=\dfrac{1}{4}$. Khi đó $F(1)$ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét $x\in[1;2]$, ta có

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3\Rightarrow\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=2x+3\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\int(2x+3)\mathrm{d}x\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2+Cx$$

Vì $f(1)=4$ nên $C=0$ hay là $f(x)=x^3+3x^2$.

$F(x)=\int\left(x^3+3x^2\right)dx=\dfrac{x^4}{4}+x^3+C$.

$F(-1)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}+x^3+1\Rightarrow F(1)=\dfrac{9}{4}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)-f(x)=(x+1)e^{3x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=\dfrac{5}{4}$, giá trị $f(1)$ bằng

A. $\frac{5}{4}e^3+e$. **B.** $\frac{3}{4}e^3+e$. **C.** $\frac{3}{4}e^3-e$. **D.** $\frac{5}{4}e^3-e$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f'(x)-f(x)=(x+1)e^{3x}\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=(x+1)e^{2x}\Leftrightarrow\left[e^{-x}f(x)\right]'=(x+1)e^{2x}$$

Khi đó: $e^{-x}f(x)=\int(x+1)e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$.

Do $f(0)=\frac{5}{4}$ nên $C=1$

Vậy nên

$$e^{-x}f(x)=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+1\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x+1)e^{3x}-\frac{1}{4}e^{3x}+e^x\Rightarrow f(1)=\frac{3}{4}e^3+e.$$

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x>\frac{1}{2}$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ thỏa mãn $f'(x)+8xf^2(x)=0,\forall x>\frac{1}{2}$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Tính $f(1)+f(2)+...+f(1011)$.

A. $\frac{1}{2}.\frac{2022}{2023}$. **B.** $\frac{2021}{2043}$. **C.** $\frac{2022}{4045}$. **D.** $\frac{1}{2}.\frac{2021}{2022}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)+8xf^2(x)=0\Leftrightarrow\frac{-f'(x)}{f^2(x)}=8x\Leftrightarrow\int\frac{-f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int 8x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=4x^2+C$.

Mà $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow C=-1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\\ f(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\ ....\\ f(1011)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow T=f(1)+f(2)+...+f(1011)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2022}{2023}.$$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(1;3)$, thỏa man $f(2)=\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}$ và $\mathrm{e}^x f^3(x)+\mathrm{e}^{-x}=3\sqrt{f(x)}.f'(x),\forall x\in(1;3)$. Khi đó $f\left(\frac{3}{2}\right)$ thuộc khoảng

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $e^x f^3(x)+e^{-x}=3\sqrt{f(x)}.f'(x),\forall x\in(1;3)$.

$\Leftrightarrow\left[e^x\sqrt{f^3(x)}\right]^2+1=2e^x\left[\sqrt{f^3(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow\left[e^x\sqrt{f^3(x)}\right]^2+2e^x\sqrt{f^3(x)}+1=2e^x\sqrt{f^3(x)}+2e^x\left[\sqrt{f^3(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow\left[e^x\sqrt{f^3(x)}+1\right]^2=2\left[e^x\sqrt{f^3(x)}\right]'\Leftrightarrow\dfrac{\left[e^x\sqrt{f^3(x)}\right]'}{\left[e^x\sqrt{f^3(x)}+1\right]^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left[\dfrac{1}{e^x\sqrt{f^3(x)}+1}\right]'=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{e^x\sqrt{f^3(x)}+1}=-\dfrac{1}{2}x+C$

Mà $f(2)=e^{-\frac{4}{3}}$ nên $C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{e^x\sqrt{f^3(x)}+1}=\dfrac{3-x}{2}\Leftrightarrow e^x\sqrt{f^3(x)}+1=\dfrac{2}{3-x}$

$\Leftrightarrow e^x\sqrt{f^3(x)}=\dfrac{x-1}{3-x}\Leftrightarrow\sqrt{f^3(x)}=\dfrac{x-1}{(3-x)e^x}\Leftrightarrow f^3(x)=\left[\dfrac{x-1}{(3-x)e^x}\right]^2$

Khi đó $f\left(\dfrac{3}{2}\right)\approx 0,18$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}$.

Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\dfrac{14}{9}$. **B.** $-\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{7}{9}$. **D.** $-\dfrac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)+\tan x.f'(x)=\dfrac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow\cos x.f(x)+\sin x.f'(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

$\Leftrightarrow\left[\sin x.f(x)\right]'=\dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\int\left[\sin x.f(x)\right]'dx=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}dx\Rightarrow\sin x.f(x)=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}dx$

Tính $I=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}dx$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\tan x\end{cases}$. Khi đó

$I=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}dx=x\tan x-\int\tan x dx=x\tan x+\int\dfrac{d(\cos x)}{\cos x}dx=x\tan x+\ln|\cos x|$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x.\tan x+\ln|\cos x|}{\sin x}=\dfrac{x}{\cos x}+\dfrac{\ln|\cos x|}{\sin x}$.

$$a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$=\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3$. Suy ra $\begin{cases} a=\dfrac{5}{9} \\ b=-1 \end{cases}$. Vậy $P=a+b=-\dfrac{4}{9}$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ (a, $b\in\mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2+b^2)$ là

A. $\dfrac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chia cả hai vế của biểu thức $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}.$$

Vậy $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=\displaystyle\int\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$.

Do $f(1)=-2\ln 2$ nên ta có $\dfrac{1}{2}.f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow-\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x}\left(x-\ln|x+1|-1\right)$.

Vậy ta có $f(2)=\dfrac{3}{2}(2-\ln 3-1)=\dfrac{3}{2}(1-\ln 3)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}, b=-\dfrac{3}{2}$.

Suy ra $2(a^2+b^2)=2\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\right]=9$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\dfrac{-3}{16}$. **B.** $T=\dfrac{21}{16}$. **C.** $T=\dfrac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+1}f'(x)+\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x^2}{x+1}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+1}f(x)=\int\frac{x^2}{x+1}dx\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+1}f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c$$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c\right).$

Ta có $f(1)=2\ln 2+1 \Leftrightarrow c=1.$

Từ đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1\right),\ f(2)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\ln 3.$ Nên $\begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{3}{4} \end{cases}.$

Vậy $T=a^2-b=-\dfrac{3}{16}.$

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\dfrac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1)f(x)$. Tính $f(8)$

A. $f(8)=49$. **B.** $f(8)=\dfrac{49}{64}$. **C.** $f(8)=256$. **D.** $f(8)=\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left[f'(x)\right]^2=(x+1)f(x) \quad (1)$

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

Và $f(x)>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$(1)\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{x+1} \Rightarrow \int\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{\sqrt{f(x)}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2C \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}=\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2C \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C \quad (2)$

Mà: $f(3)=\dfrac{4}{9}$. Thay vào (2) ta được: $\left(\dfrac{8}{3}+C\right)^2=\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}+C=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow C=-2$

Với $C=-2 \Rightarrow f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\right)^2 \Rightarrow f(8)=49$

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $f(0)=-\dfrac{5}{4}$ và $f'(x)=x^4f^2(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{3}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{36}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=x^4f^2(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^4$.

Lấy nguyên hàm 2 vế: $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int x^4 dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^5}{5} + C$.

Theo giả thiết $f(0) = -\frac{5}{4}$ suy ra $C = \frac{4}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{-5}{x^5+4} \Rightarrow f(2) = \frac{-5}{36}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp hai trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ và $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2+x^2=1+2xf'(x)$. Tính $f(2)$.

A. $1+\ln 3$. **B.** $2+\ln 3$. **C.** $2-\ln 3$. **D.** $1-\ln 3$.

Lời giải

Chọn B

Do $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1 \Leftrightarrow f'(0)=1$.

Ta có: $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2+x^2=1+2xf'(x) \Leftrightarrow \left[f'(x)-x\right]^2=-\left(f''(x)-1\right)$, (1)

Đặt $g(x)=f'(x)-x \Rightarrow g'(x)=f''(x)-1$, nên (1) trở thành $g^2(x)=-g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)}=-1.$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $-\frac{1}{g(x)}=-x+C \Rightarrow g(x)=\frac{1}{x-C} \Rightarrow f'(x)=x+\frac{1}{x-C}$

Cho $x=0 \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{-C} \Rightarrow C=-1$. Do đó $f'(x)=x+\frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C_1$

Mặt khác $f(0)=0 \Rightarrow C_1=0$. Suy ra $f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|$. Vậy $f(2)=2+\ln 3$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right), \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(40;42)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(32;34)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\forall x\in(0;+\infty)$

$f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right) \Rightarrow f(x)\ln f(x)=2xf(x)-xf'(x)$

$\Rightarrow f(x)\ln f(x)+xf'(x)=2xf(x) \Rightarrow \ln f(x)+\frac{xf'(x)}{f(x)}=2x \Rightarrow \left(x\ln f(x)\right)'=2x$

$\Rightarrow x\ln f(x)=x^2+C$.

Có: $\begin{cases}1\ln f(1)=1+C\\3\ln f(3)=9+C\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3\ln f(1)=3+3C\\3\ln f(3)=9+C\end{cases} \Rightarrow 0=-6+2C \Rightarrow C=3$.

Vậy: $x\ln f(x)=x^2+3 \Rightarrow \ln f(x)=x+\frac{3}{x} \Rightarrow f(x)=e^{x+\frac{3}{x}}$ nên $f(2)=e^{2+\frac{3}{2}}\approx 33{,}12$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right),\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(4)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(8;10)$. **C.** $(6;8)$. **D.** $(13;15)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right)\Leftrightarrow \ln f(x)=x\left(1-\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)\Leftrightarrow \ln f(x)=x\left(1-(\ln f(x))'\right)$

$\Leftrightarrow (x)'\ln f(x)+x\left[\ln f(x)\right]'=x\Leftrightarrow \left[x\ln f(x)\right]'=x\Rightarrow\ x\ln f(x)=\int xdx=\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Cho $x=1$ ta được $\ln f(1)=\dfrac{1}{2}+C$.

Cho $x=4$ ta được $4\ln f(4)=8+C$.

Theo đề $f(1)=f(4)$ nên suy ra $2+4C=8+C\Rightarrow C=2$ nên $f(x)=e^{\frac{x}{2}+\frac{2}{x}}$.

Vậy $f(2)=e^2\approx 7,39$.

CHƯƠNG 5

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ 11 TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ CƠ BẢN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- **Định nghĩa:** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = ...$

2. Tính chất

$\oplus \int_a^a f(x)dx = 0$

$\oplus \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\oplus \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \, (a < b < c)$

$\oplus \int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx \; (k \in \mathbb{R})$

$\oplus \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u = u(x)$	Thường gặp
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	Vi phân $\frac{1}{a}d(ax+b) = dx$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \; (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C \; (u(x) \neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C \; (a \neq 0)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p.\ln a}a^{px+q} + C \ (0 < a \neq 1)$

4. Phương pháp đổi biến số

- **Dạng 1:** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có :

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.}$$

- **Dạng 2:** Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha;\beta]$ Khi đó:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

$\oplus$ $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a|\sin t;\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\oplus$ $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t};\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

$\oplus$ $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a|\tan t;\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$\oplus$ $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a.\cos 2t$

5. Phương pháp từng phần

- Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì :

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

- **Các dạng cơ bản:** Giả sử cần tính $I = \int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\sin kx$ hoặc $\cos kx$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là e^{kx}	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\ln(ax+b)$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\frac{1}{\sin^2 x}$
Cách đặt	$u = P(x)$ dv là phần còn lại	$u = P(x)$ dv là phần còn lại	$u = \ln(ax+b)$ $dv = P(x)dx$	$u = P(x)$ dv là phần còn lại

Dạng 7: Tích phân của hàm số cơ bản

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_2^1 g(x)dx = 1$ thì $\int_1^2 [f(x) + 2g(x)]dx$ bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_2^1 g(x)dx = 1$ thì $\int_1^2 g(x)dx = -1$ nên

$\int_1^2 [f(x) + 2g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx + 2\int_1^2 g(x)dx = 3 + 2.(-1) = 1$.

Câu 2: Cho $\int_{-2}^5 f(x)dx = 8$ và $\int_{-2}^5 g(x)dx = -3$. Tính $\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]dx$

A. $I = -11$. **B.** $I = 13$. **C.** $I = 27$. **D.** $I = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$\int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1]dx = \int_{-2}^5 f(x)dx - 4\int_{-2}^5 g(x)dx - \int_{-2}^5 dx = 8 + 12 - 7 = 13$.

Câu 3: Cho $\int_0^3 [f(x) - 2x]dx = 1$. Khi đó $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 1. **D.** 10

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\int_0^3 [f(x) - 2x]dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 2xdx = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x)dx - 9 = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x)dx = 10$.

Câu 4: Biết $\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) \mathrm{d}x = a + \ln b$ với a, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Tính $S = b^2 - a$.

A. 1. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} \mathrm{d}x + 3\int_0^1 \sqrt{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln |2x+1| \Big|_0^1 + 3.\frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2 = 2 + \ln \sqrt{3}$.

Do đó $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Vậy $S = b^2 - a = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ và các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^3 \left[af(x)+b+1\right]\mathrm{d}x = 10$. Tính $a+b$.

A. $a+b=4$. **B.** $a+b=8$. **C.** $a+b=12$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ nên

$$\int_1^3 \left[af(x)+b+1\right]\mathrm{d}x = a.\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 (b+1)\mathrm{d}x = 2a+(b+1)x\Big|_1^3 = 2a+2(b+1) = 2(a+b)+2$$

Vì $\int_1^3 \left[af(x)+b+1\right]\mathrm{d}x = 10$ nên $2(a+b)+2=10 \Leftrightarrow a+b=4$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nếu $\int\limits_5^2 f(x)dx = 2$ thì $\int\limits_2^5 3f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** -6. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\limits_2^5 3f(x)dx = 3\int\limits_2^5 f(x)dx = -3\int\limits_5^2 f(x)dx = -3.2 = -6$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(-1) = 3$, $f(2) = -1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-1}^2 f'(x)dx$ bằng

A. 4. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_{-1}^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -1 - 3 = -4$.

Câu 3: Cho $\int\limits_{-2}^2 f(x)dx = 1, \int\limits_{-2}^4 f(t)dt = -4$. Tính $I = \int\limits_2^4 f(y)dy$.

A. $I = 5$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = -3$. **D.** $I = -5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_2^4 f(y)dy = \int\limits_2^{-2} f(y)dy + \int\limits_{-2}^4 f(y)dy \Leftrightarrow \int\limits_2^4 f(y)dy = -\int\limits_{-2}^2 f(y)dy + \int\limits_{-2}^4 f(y)dy = -1 + (-4) = -5.$

Câu 4: Cho hàm số $\int\limits_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int\limits_1^4 f(x)dx = 5$, khi đó $\int\limits_0^4 f(x)dx$ bằng

A. 10. **B.** -3. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^4 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^4 f(x)dx = 2 + 5 = 7$.

Câu 5: Nếu $\int\limits_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2$ thì $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\limits_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_0^1 2xdx = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx + x^2\Big|_0^1 = 2$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + (1-0) = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1.$

Câu 6: Nếu $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -3, \int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = -7$ thì $\int\limits_3^5 \left[2 + f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_3^5 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_3^5 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -7 - (-3) = -4$.

Do đó $\int\limits_3^5 \left[2 + f(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_3^5 2\mathrm{d}x + \int\limits_3^5 f(x)\mathrm{d}x = 2x\Big|_3^5 + (-4) = 4 + (-4) = 0$.

Câu 7: Nếu $\int\limits_0^1 \left[3f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\int\limits_0^1 \left[3f(x) + 2g(x)\right]\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow 3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow 3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 10 - 2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 12.$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4.$

Câu 8: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 3$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 3\sin x\right]dx$.

A. $I = 5 + \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 3\sin x\right]dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 3 - 3(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 - 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 6$.

Câu 9: Nếu $\int\limits_0^2 \left(2x - 3f(x)\right)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^2 \left(2x - 3f(x)\right)\mathrm{d}x = 3 \Leftrightarrow x^2\Big|_0^2 - 3\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3-4}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 10: Cho $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=10$, $\int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x=5$. Giá trị của $\int\limits_0^3 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$ bằng:

A. -5. **B.** 15. **C.** 5. **D.** -20.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^3 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x-3\int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x=20-15=5$.

Câu 11: Biết $F(x)=x^4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_{-1}^2 (6x+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{78}{5}$. **B.** 24. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** 33.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{-1}^2 (6x+f(x))\mathrm{d}x=\left(3x^2+x^4\right)\Big|_{-1}^2=12+16-3-1=24$.

Câu 12: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $P=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3f(x)-2\sin x\right]\mathrm{d}x$.

A. $P=13$. **B.** $P=17$. **C.** $P=7$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3f(x)-2\sin x\right]\mathrm{d}x=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x=3.5+2.\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=15-2=13$

Câu 13: Nếu $\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_0^{\pi} \left[f(x)+\sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 10. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_0^{\pi} \left[f(x)+\sin\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=3-2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=3-2(0-1)=5.$

Câu 14: Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^3+\frac{1}{2}$. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$. **D.** e^3-1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$.

Câu 15: Tích phân $\int\limits_1^2 (x+3)^2\,dx$ bằng

A. 61. **B.** $\frac{61}{3}$. **C.** $\frac{61}{9}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{(x+3)^3}{3}\right|_1^2 = \frac{61}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ và $f'(x)=\frac{2}{\sin^2 x}+1$, $\forall x\in(0;\pi)$. Khi đó $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\ln 2+\frac{\pi^2}{32}+\pi$. **B.** $\ln 2-\frac{\pi^2}{32}+\pi$. **C.** $-\ln 2+\frac{\pi^2}{32}-\pi$. **D.** $\ln 2+\frac{\pi^2}{32}-\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\frac{2}{\sin^2 x}+1$ suy ra $f(x)=\int\left[\frac{2}{\sin^2 x}+1\right]dx=-2\cot x+x+C.$

Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ suy ra $C=4-\frac{\pi}{2}$.

Khi đó

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[-2\cot x+x+4-\frac{\pi}{2}\right]dx=\left.\left[-2\ln|\sin x|+\frac{x^2}{2}+\left(4-\frac{\pi}{2}\right)x\right]\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\ln 2+\frac{\pi^2}{32}+\pi.$$

Câu 17: . Nếu $\int\limits_0^{\ln 3}\left[f(x)+e^x\right]dx=6$ thì $\int\limits_0^{\ln 3} f(x)\,dx$ bằng

A. $6+\ln 3$. **B.** $6-\ln 3$. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^{\ln 3}\left[f(x)+e^x\right]dx=\int\limits_0^{\ln 3} f(x)\,dx+\int\limits_0^{\ln 3} e^x dx=\int\limits_0^{\ln 3} f(x)\,dx+2$

Suy ra $\int\limits_0^{\ln 3} f(x)\,dx=6-2=4$.

Câu 18: Nếu $\int\limits_0^3\left[4f(x)-3x^2\right]dx=5$ thì $\int\limits_0^3 f(x)dx$ bằng :

A. 18. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^3\left[4f(x)-3x^2\right]dx=\int\limits_0^3 4f(x)dx-\int\limits_0^3 3x^2dx\ =4\int\limits_0^3 f(x)dx-\left.x^3\right|_0^3=4\int\limits_0^3 f(x)dx-27$

Do đó $5=4\int\limits_0^3 f(x)dx-27\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f(x)dx=8$.

Câu 19: Tích phân $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\log\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{15}$. **C.** $\frac{16}{225}$. **D.** $\ln\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$.

Câu 20: Nếu $\int\limits_0^2 f(x)dx = 5$ thì $\int\limits_0^2 \left[2f(t)+1\right]dt$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^2 \left[2f(t)+1\right]dt = 2\int\limits_0^2 f(t)dt + \int\limits_0^2 dt = 2.5+2 = 12.$

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\pi}\left[f(x)+\sin x\right]dx = 10$. Tính $I=\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$.

A. $I=4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^{\pi}\left[f(x)+\sin x\right]dx = \int\limits_0^{\pi} f(x)dx + \int\limits_0^{\pi}\sin x dx = \int\limits_0^{\pi} f(x)dx - \cos x\Big|_0^{\pi} = 10$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} f(x)dx = 10 + (\cos\pi - \cos 0) = 8$.

Câu 22: Nếu $\int\limits_{-2}^1 f(x)dx = 5$ thì $\int\limits_{-2}^1\left[f(x)+3\right]dx$ bằng

A. 14. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_{-2}^1\left[f(x)+3\right]dx = \int\limits_{-2}^1 f(x)dx + \int\limits_{-2}^1 3dx = 5+(3x)\Big|_{-2}^{1}. = 5+3(1+2) = 14$

Câu 23: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số $m>1$ để tích phân $\int\limits_1^m (2x-1)dx = 6$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^m (2x-1)dx = 6 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\Big|_1^m = 6 \Leftrightarrow m^2 - m = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-2(l) \end{array}\right.$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x) = 2-\cos 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$ **B.** $\dfrac{\pi^2-4}{16}$ **C.** $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$ **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f'(x)dx = \int (2-\cos 2x)dx = 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$. Do $f(0)=4$ nên: $C_1 = 4$

$\Rightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4\right)dx = \left(x^2 + \frac{1}{4}\cos 2x + 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$

Câu 25: Gọi a,b là các số nguyên sao cho $\int\limits_0^2 \sqrt{e^{x+2}}\mathrm{d}x = 2ae^2 + be$. Giá trị của a^2+b^2 bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^2 \sqrt{e^{x+2}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(e^{x+2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 e^{\frac{1}{2}x+1}\mathrm{d}x = 2e^{\frac{1}{2}x+1}\Big|_0^2 = 2e^2 - 2e \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Vậy $a^2+b^2=5$.

Câu 26: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int\limits_\pi^b 4\cos 2x\mathrm{d}x = 1$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\limits_\pi^b 4\cos 2xdx = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_\pi^b = 1$

$\Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2b = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2b = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

Với $b = \frac{\pi}{12} + k\pi$:

Mà $b \in (\pi;3\pi) \Rightarrow 1 < \frac{1}{12} + k < 3, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1;2 \Rightarrow b = \frac{13\pi}{12}; \frac{25\pi}{12}$.

Với $b = \frac{5\pi}{12} + k\pi$:

Mà $b \in (\pi;3\pi) \Rightarrow 1 < \frac{5}{12} + k < 3, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1;2 \Rightarrow b = \frac{17\pi}{12}; \frac{29\pi}{12}$.

Vậy có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Biết $\int_0^1 \left[f(x)+2x \right]\mathrm{d}x=5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 \left[f(x)+2x \right]\mathrm{d}x=5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 2x\mathrm{d}x=5$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+x^2\Big|_0^1=5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+1=5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Câu 28: Tích phân $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{17}{4}$. **B.** $\frac{15}{3}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có. $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{15}{4}\cdot$

Câu 29: Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-\sin x)\,dx=a\pi+b$, với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-\sin x)\,dx=(4x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi-1 \Rightarrow a=2, b=-1.$

Vậy $a+b=1.$

Câu 30: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

A. $I=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $I=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $I=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $I=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 31: Cho $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\cos x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $c<0$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -77. **B.** 103. **C.** -17. **D.** 43.

Lời giải

Chọn C

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 5x + \cos 3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{30} - \frac{13}{60}.$$

Suy ra $\begin{cases} a = 30 \\ b = 13 \\ c = -60 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 30 + 13 - 60 = -17$.

Câu 32: Biết $\int_1^{13} \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \ln a$ với $a \in \mathbb{Q}$. Giá trị của a là

A. 5. **B.** 25. **C.** 1. **D.** 125.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_1^{13} \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^{13} = \frac{1}{2}\ln 25 = \ln 5$. Vậy $a = 5$.

Câu 33: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x = a - \frac{\pi}{b}\left(a, b \in \mathbb{Z}\right)$. Tính $S = a + b^2$.

A. $S = 5$. **B.** $S = 17$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 26$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$ nên $S = 1 + 4^2 = 17$.

Câu 34: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{3}}{b}\left(a, b \in \mathbb{Z}\right)$. Tính $P = \frac{a - 2b}{b}$

A. $P = \frac{4}{3}$. **B.** $P = -\frac{4}{3}$. **C.** $P = -\frac{2}{3}$. **D.** $P = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$= (\tan x - \cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ nên $P = \frac{2 - 2.3}{3} = -\frac{4}{3}$.

Câu 35: Cho $\int_0^m \left(3x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 2)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(0; 4)$. **D.** $(-3; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^m (3x^2-2x+1)dx = (x^3-x^2+x)\Big|_0^m = m^3-m^2+m$

Mà $\int_0^m (3x^2-2x+1)dx = 6 \Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=2$

Vậy $m=2\in(0;4)$.

Câu 36: Biết $\int_1^2 \left(2x+\frac{1}{x}\right)dx = a+\ln b$. Giá trị của biểu thức $T=a-b$ là

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_1^2 \left(2x+\frac{1}{x}\right)dx = \left(x^2+\ln|x|\right)\Big|_1^2 = 3+\ln 2.$

Suy ra $a=3;\ b=2.$ Vậy $T=a-b=1.$.

Câu 37: Nếu $\int_0^2 f(x)dx=3$ thì $\int_0^2 \left[2f(x)-3x^2\right]dx$ bằng

A. -2. **B.** -6. **C.** -5. **D.** -9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^2 \left[2f(x)-3x^2\right]dx = 2\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 3x^2dx = 2.3-8=-2$.

Câu 38: Nếu $\int_2^3 f(x)dx=5$ và $\int_2^3 g(x)dx=-1$ thì $\int_2^3 \left[f(x)-g(x)-2x\right]dx$ bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 11. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_2^3 \left[f(x)-g(x)-2x\right]dx = \int_2^3 f(x)dx - \int_2^3 g(x)dx - \int_2^3 2xdx = 5+1-x^2\Big|_2^3 = 6-5=1.$

Câu 39: Cho $\int_2^3 f(x)dx=4$ và $\int_3^2 g(x)dx=5$, khi đó $\int_2^3 \left[\frac{f(x)}{2}+3g(x)\right]dx$ bằng

A. 7. **B.** 9. **C.** -13. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_3^2 g(x)dx=5 \Rightarrow \int_2^3 g(x)dx=-5$

$\int_2^3 \left[\frac{f(x)}{2}+3g(x)\right]dx = \frac{1}{2}\int_2^3 f(x)dx + 3\int_2^3 g(x)dx = \frac{1}{2}.4+3(-5)=-13.$

Câu 40: Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 \left[2+f(x)\right]dx$ bằng

A. 14. **B.** 12. **C.** $\frac{38}{3}$. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^3 \left[2+f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_1^3 2\mathrm{d}x+\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2x\Big|_1^3+F\left(x\right)\Big|_1^3=2x\Big|_1^3+x^2\Big|_1^3=12$.

Câu 41: Cho $\int_0^{\ln 2}\left(2f\left(x\right)+e^x\right)dx=5$. Khi đó $\int_0^{\ln 2} f\left(x\right)dx$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\int_0^{\ln 2}\left(2f\left(x\right)+e^x\right)dx=2\int_0^{\ln 2} f\left(x\right)dx+\int_0^{\ln 2} e^x dx=2\int_0^{\ln 2} f\left(x\right)dx+e^x\Big|_0^{\ln 2}=2\int_0^{\ln 2} f\left(x\right)dx+1.$$

$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} f\left(x\right)dx=2$

Câu 42: Cho $\int_1^2 f\left(x\right)dx=3$ và $\int_1^2\left[3f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx=10$. Khi đó $\int_1^2 g\left(x\right)dx$ bằng:

A. 1. **B.** -4. **C.** 17. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có, $\int_1^2\left[3f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx=3\int_1^2 f\left(x\right)dx-\int_1^2 g\left(x\right)dx=10 \Leftrightarrow \int_1^2 g\left(x\right)dx=10-3.3=1$.

Câu 43: Nếu $\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$ thì giá trị của $I=\int_1^4\left[\frac{3}{2}f\left(x\right)+1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** -6 **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

$$I=\int_1^4\left[\frac{3}{2}f\left(x\right)+1\right]\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x+x\Big|_1^4=\frac{3}{2}.(-2)+4-1=0.$$

Câu 44: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2f\left(x\right)+\sin x\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $8+\frac{\pi}{2}$. **B.** $4+\pi$. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2f\left(x\right)+\sin x\right]\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=2\cdot 4+1=9$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$ thì $\int\limits_1^2 f'(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_1^2 f'(x)dx = f(2)-f(1)=1$.

Câu 46: Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$ thì $\int\limits_0^2\left[\frac{1}{2}f(x)-2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 8. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

$\int\limits_0^2\left[\frac{1}{2}f(x)-2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.4-4=-2$.

Câu 47: Tính $I=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $2+\ln\sqrt{3}$. **B.** $4+\ln 3$. **C.** $2+\ln 3$. **D.** $1+\ln\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\ln|2x+1|+2x\sqrt{x}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 3+2\ =2+\ln\sqrt{3}$.

Câu 48: Nếu $\int\limits_1^3 f(x)dx=3$ thì $\int\limits_1^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]dx$ bằng

A. 5. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_1^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^3 f(x)dx+\int\limits_1^3 2dx=\frac{1}{3}.3+2x\Big|_1^3=5$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\cos x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi^2}{8}+1$, khi đó $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$ **C.** $\frac{\pi}{2}-1$ **D.** 1

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=\cos x+1 \Rightarrow f(x)=\int(\cos x+1)dx=\sin x+x+C_1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi^2}{8} + 1 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x + C_1)dx = \frac{\pi^2}{8} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(-\cos x + \frac{x^2}{2} + C_1 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 1 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x + x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}$$

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx.$

A. $\frac{7}{4}$ **B.** $\frac{7}{12}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn D

Xét $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ (1)

Thay $x = \frac{1}{x}$ ta có: $(1) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}.f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\left[2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}.f(x)\right] = x.\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow 2xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 1$ (2)

Mặt khác: $(1) \Leftrightarrow 2\left[2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 2x \Leftrightarrow 4f(x) + 2xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2x$ (3)

Lấy (3) trừ (2) ta được: $f(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)$

Do đó: $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2x-1)dx = \frac{1}{3}(x^2 - x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{3}{4}$.

Câu 51: Biết $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \ln a$, giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x + \sqrt{x^2+9} \Rightarrow dt = (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}})dx = \frac{x + \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+9}}dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 4 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$

Suy ra $I = \int_3^5 \frac{1}{t}dt = \ln|t|\Big|_3^5 = \ln\frac{5}{3} \Rightarrow a = \frac{5}{3}$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1)=1$ và $f'(x)=4x^3+3x^2-1.\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, với $P=a,b$ là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là số tối giản. Tính $P=a-b$

A. 37. **B.** 39. **C.** 42. **D.** 47.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int\left(4x^3+3x^2-1\right)dx=x^4+x^3-x+C$

Vì $f(1)=1\Rightarrow C=0$. Hay $f(x)=x^4+x^3-x$.

Suy ra $\int\limits_0^2\left(x^4+x^3-x\right)dx=\left.\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2=\frac{42}{5}$. Vậy $P=42-5=37$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2-3}{32}$. **B.** $\frac{\pi^2-6}{18}$. **C.** $\frac{3\pi^2-6}{112}$. **D.** $\frac{\pi^2-4}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=0$. Hay $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{4}+\frac{\cos 2x}{8}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{\pi^2-4}{16}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $f(-1)=1$ và $f(1)=-1$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

A. $3\ln 2+\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\frac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $3\ln 2-\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln(-x)-\frac{1}{x}+C_1 & \text{khi } x<0\\ \ln x-\frac{1}{x}+C_2 & \text{khi } x>0\end{cases}$$

Do $f(-1)=1\Rightarrow \ln 1+1+C_1=1\Rightarrow C_1=0$

Do $f(1)=-1\Rightarrow \ln 1-1+C_2=-1\Rightarrow C_2=0$

Như vậy, $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(-x\right)-\dfrac{1}{x} & \text{khi } x<0\\ \ln x-\dfrac{1}{x} & \text{khi } x>0\end{cases}$

Vậy $f\left(-2\right)+f\left(4\right)=\left(\dfrac{1}{2}+\ln 2\right)+\left(\ln 4-\dfrac{1}{4}\right)=3\ln 2+\dfrac{1}{4}$.

Câu 55: Tích phân $I=\int\limits_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}dx$ bằng

A. $3\sqrt{3}-1$. **B.** $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$. **C.** $2\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}$. **D.** $3\sqrt{3}+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int\limits_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^2 \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x}dx=\int\limits_1^2 \sqrt{x+1}\,dx+\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx$

$I=\int\limits_1^2 \sqrt{x+1}\,dx+\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx=\dfrac{2}{3}\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$

Câu 56: Tích phân $I=\int\limits_0^1 \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}dx$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}\left(4-3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$. **B.** $\dfrac{4}{3}\left(4-3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$. **C.** $\dfrac{8}{3}\left(4+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$. **D.** $\dfrac{4}{3}\left(4+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_0^1 \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}dx=\int\limits_0^1 \dfrac{2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right)}{-1}dx=-2\int\limits_0^1\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right)dx$

$I=2\int\limits_0^1 \sqrt{x+3}dx-2\int\limits_0^1 \sqrt{x+2}dx=2.\dfrac{2}{3}\left(x+3\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-2.\dfrac{2}{3}\left(x+2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\dfrac{4}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-2.3^{\frac{3}{2}}+2^{\frac{3}{2}}\right)$

$=\dfrac{4}{3}\left(8-6\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)=\dfrac{8}{3}\left(4-3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

Câu 57: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2e^{2x}+4x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 3x^2+2x+3 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F\left(-1\right)=1$. Biết rằng $2F\left(2\right)-F\left(-3\right)=ae^4+b$ (trong đó a,b là các số hữu tỉ). Khi đó $a+b$ bằng

A. 18 **B.** 51. **C.** 50. **D.** 17 .

Lời giải

Chọn B

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)=\begin{cases}e^{2x}+2x^2+x+C_1 & \text{khi } x\ge 0\\ x^3+x^2+3x+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Ta có: $F(-1)=1\Leftrightarrow -3+C_2=1\Leftrightarrow C_2=4$.

Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên mỗi khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=3$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $F(x)$ liên tục tại $x=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=F(0)\Leftrightarrow 1+C_1=C_2$, mà $C_2=4$ nên $C_1=3$.

Vậy $F(x)=\begin{cases} e^{2x}+2x^2+x+3 & \text{khi } x\ge 0\\ x^3+x^2+3x+4 & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Ta có: $2F(2)-F(-3)=\left(2e^4+26\right)-(-23)=2e^4+49$. Suy ra $a=2;b=49$. Vậy $a+b=51$.

Câu 58: Biết $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{a}-\frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=50$. **B.** $T=59$. **C.** $T=16$. **D.** $T=69$.

Lời giải

Chọn D

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+x\cos x-\sin^3 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \frac{\pi^2}{a}-\frac{b}{c}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} a=8\\ b=1\\ c=2\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=69$.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{(\sin x+2\cos x)^2}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0)=0$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3\pi+2\ln 2}{10}$. **B.** $\frac{\pi-\ln 2}{5}$. **C.** $\frac{-\pi+\ln 2}{5}$. **D.** $\frac{\pi+4\ln 2}{20}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+2\cos x)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x+\alpha)}$, với $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow \cot\alpha=\frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra: $f(x)=-\frac{1}{5}\cot(x+\alpha)+C$, mà $f(0)=0\Rightarrow C=\frac{1}{10}$.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{5}\ln\left|\sin(x+\alpha)\right|+\frac{x}{10}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{5}\ln(\cot\alpha)+\frac{\pi}{20}=\frac{4\ln 2+\pi}{20}$.

Câu 60: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$. Biết x^2 là một nguyên hàm của $x^2f'(x)$ trên

$(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Tính $f(e)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $2e+1$. **D.** e.

Lời giải

Chọn B

Vì x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0;+\infty)$ nên ta có

$x^2 f'(x)=(x^2)'=2x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}$.

Ta có $\int\limits_1^e f'(x)dx=\int\limits_1^e \dfrac{2}{x}dx=2\ln x\Big|_1^e=2\ln e-2\ln 1=2=f(e)-f(1)$.

$\Rightarrow 2=f(e)-1 \Rightarrow f(e)=2+1=3$.

Dạng 8: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx$ bằng

A. $e-1$. **B.** $e+1$. **C.** $1-e$. **D.** e.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx=\int_0^1 e^t dt=e^t\Big|_0^1=e-1.$$

Câu 2: Cho $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2$, giá trị của $\int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân $\int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x$

Đặt $t=2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=3$

Khi đó $\int_0^1 f(2x+1)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(t).\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.2=1$.

Câu 3: Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$ mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int_1^2\sqrt{u}\mathrm{d}u$. **C.** $I=2\int_0^3\sqrt{u}\mathrm{d}u$. **D.** $I=\int_0^3\sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Lời giải

Đặt $u=x^2-1 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0$

$x=2 \Rightarrow u=3$

Khi đó ta có $I=\int_0^1\sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Câu 4: Cho $I=\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3\mathrm{d}x$. Nếu đặt $u=x^2+1$ thì I bằng

A. $\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$. **B.** $\frac{1}{2}\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$. **C.** $\frac{1}{2}\int_1^2 u^3\mathrm{d}u$. **D.** $\int_1^2 u^3\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $u=x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$

Đổi cận: $\begin{matrix} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=2 \end{matrix}$

Khi đó: $I=\int\limits_1^2 \frac{1}{2}u^3\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 u^3\mathrm{d}u$.

Câu 5: Tích phân $\int\limits_0^1 e^{2x}.\mathrm{d}x$ bằng

A. $e^2+\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{e^2-1}{2}$. **C.** $\frac{e^3-1}{2}$. **D.** e^2-1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^1 e^{2x}.\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{e^2-1}{2}$.

Câu 6: Tích phân $\int\limits_0^2 4048(2x-1)^{2023}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2.3^{2024}-2$ **B.** $3^{2024}-1$ **C.** $3^{2024}+1$ **D.** $2.3^{2024}+2$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=-1 \\ x=2 \Rightarrow t=3 \end{cases} \Rightarrow \int\limits_{-1}^3 2024t^{2023}\mathrm{d}t=t^{2024}\Big|_{-1}^3=3^{2024}-1$.

Câu 7: Giá trị $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{n-1}$. **B.** $\frac{1}{2n}$. **C.** $-\frac{1}{n+1}$. **D.** $\frac{1}{n+1}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n d(1-\cos x)=\frac{1}{n+1}(1-\cos x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n+1}$.

Câu 8: Thực hiện phép biến đổi $t=\sqrt[3]{3x+1}$ thì tích phân $\int\limits_0^{\frac{7}{3}}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}.\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 g(t).\mathrm{d}t$. Khi đó:

A. $g(3)=31$. **B.** $g(3)=29$. **C.** $g(3)=33$. **D.** $g(3)=25$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[3]{3x+1}\Rightarrow t^3=3x+1\Rightarrow x=\dfrac{t^3-1}{3}$ và $dx=t^2dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\dfrac{7}{3}\Rightarrow t=2$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{7}{3}}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}.dx=\int\limits_1^2\dfrac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t}.t^2dt=\int\limits_1^2\dfrac{t^3+2}{3t}.t^2dt=\int\limits_1^2\dfrac{t^4+2t}{3}dt=\int\limits_1^2 g(t).dt$.

Suy ra $g(t)=\dfrac{t^4+2t}{3}\Rightarrow g(3)=29$.

Câu 9: Biết rằng $\int\limits_0^1 xe^{x^2+2}dx=\dfrac{a}{2}\left(e^b-e^c\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $a-b+c$ bằng

A. 6. **B.** 0. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^1 xe^{x^2+2}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2+2}d\left(x^2+2\right)=\left.\dfrac{e^{x^2+2}}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}\left(e^3-e^2\right)$.

Suy ra $a=1,b=3,c=2$.

Vậy $a-b+c=1-3+2=0$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)dx=4$ thì $\int\limits_0^1 f(2x)dx$ bằng.

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_0^1 f(2x)dx$, đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{2}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=2$.

$I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)dt=2$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int\limits_1^3 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 1 **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2x-1 \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=1;\ x=3 \Rightarrow t=5$.

Ta có $\int\limits_1^3 f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^5 f\left(t\right)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{dx}=3 \Rightarrow \int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{dx}=6$.

Câu 2: Biết $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x=9$. Khi đó giá trị tích phân $I=\int\limits_2^5 f\left(3x-6\right)\mathrm{d}x$ là

A. $I=9$. **B.** $I=27$. **C.** $I=6$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\mathrm{t}=3x-6 \Rightarrow \mathrm{dt}=3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{dt}}{3}$. Đổi cận: $x=2 \Rightarrow \mathrm{t}=0$; $x=5 \Rightarrow \mathrm{t}=9$.

Khi đó $I=\frac{1}{3}\int\limits_0^9 f\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}=3$.

Câu 3: Cho $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[3\cos x f\left(\sin x\right)-2\right]\mathrm{d}x$

A. $I=9-\pi$. **B.** $I=3-2\pi$. **C.** $I=9-2\pi$. **D.** $I=3+2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[3\cos x f\left(\sin x\right)-2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos x f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\mathrm{d}x=I_1-I_2$.

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x, x=0 \Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$ suy ra $\mathrm{I}_1=3\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=9$;

$I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\mathrm{d}x=2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$. Vậy $I=9-\pi$.

Câu 4: Cho $I=\int\limits_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx$. Đặt $u=\sqrt{x^2+5}$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^3 \frac{2du}{u}$. **B.** $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^3 2udu$. **C.** $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^3 2du$. **D.** $I=\int\limits_0^2 2du$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow u^2=x^2+5\Rightarrow udu=xdx$, đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow u=\sqrt{5} \\ x=2\Rightarrow u=3 \end{cases}$

Nên: $I=\int\limits_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx=\int\limits_{\sqrt{5}}^3 \frac{2udu}{u}=\int\limits_{\sqrt{5}}^3 2du$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(3)=4$ và $\int\limits_0^1 f'(2x+1)\mathrm{d}x=6$ Tính giá trị của $f(1)$.

A. $f(1)=-8$. **B.** $f(1)=-2$. **C.** $f(1)=16$. **D.** $f(1)=10$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int\limits_0^1 f'(2x+1)\mathrm{d}x$, đặt $t=2x+1\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$.

Với $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=3$.

Do đó $I=\int\limits_1^3 f'(t)\frac{dt}{2}=\frac{f(3)-f(1)}{2}\Rightarrow f(1)=f(3)-2I=-8$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)dx=4$ thì $\int\limits_0^1 f(2x)dx$ bằng.

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_0^1 f(2x)dx$, đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=2$.

$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)dt=2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = \dfrac{3}{2}$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_0^1 f(x) f'(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}\left(f(x)\right) = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 = \frac{3.1+1}{2} - \frac{3.0+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 8: Cho $\displaystyle\int_5^{12} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \frac{1}{a}\ln\frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $c = a - b.$ **B.** $b = 2c.$. **C.** $a = b - c$. **D.** $b = c - a.$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow t^2 = x + 4 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 5 \Rightarrow t = 3;\ \ x = 12 \Rightarrow t = 4$.

$$\int_5^{12} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}} = \int_3^4 \frac{2t\mathrm{d}t}{t\left(t^2-4\right)} = 2\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4} = \frac{1}{2}\int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}.$$

$\Rightarrow a = 2;\ b = 5;\ c = 3.$ Vậy $a = b - c.$

Câu 9: Xét $I = \displaystyle\int_0^1 2x\left(x^2+2\right)^{2022} dx$, nếu đặt $u = x^2 + 2$ thì I bằng

A. $\displaystyle\int_2^3 u^{2022} du$. **B.** $\displaystyle\int_0^1 u^{2022} du$. **C.** $2\displaystyle\int_2^3 u^{2022} du$. **D.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^3 u^{2022} du$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \displaystyle\int_0^1 2x\left(x^2+2\right)^{20202} dx = \int_0^1 \left(x^2+2\right)^{2022} d\left(x^2+2\right)$

Đặt $u = x^2 + 2$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 2$; $x = 1 \Rightarrow u = 3$. Khi đó $I = \displaystyle\int_2^3 u^{2022} du$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\displaystyle\int_3^7 f(x) dx = 10$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 xf\left(x^2+3\right) dx$.

A. $I = 20$. **B.** $I = \dfrac{5}{2}$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 5$.

Lời giải

Đặt $t = x^2 + 3 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{dt}{2}$.

Đổi cận:

x	0	2
t	3	7

$$\Rightarrow I = \int_0^2 xf\left(x^2+3\right)dx = \frac{1}{2}\int_3^7 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_3^7 f(x)dx = 5.$$

Câu 11: Cho $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $I = 12$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = \frac{1}{2}$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x+1$ suy ra $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$ và $\begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 5 \\ x = -1 \Rightarrow t = -1. \end{cases}$

Ta có $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.6 = 3$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(2;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$ và $f\left(e^2\right) = 0$. Tính $f\left(e^4\right)$.

A. $f\left(e^4\right) = \ln 2$. **B.** $f\left(e^4\right) = 3\ln 2$. **C.** $f\left(e^4\right) = 2$. **D.** $f\left(e^4\right) = -\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_{e^2}^{e^4} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = f\left(e^4\right) - f\left(e^2\right)$.

Mà $f\left(e^2\right) = 0$ nên suy ra: $f\left(e^4\right) = \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int_{2}^{4} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ (với $t = \ln x$) $= \ln|t|\Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$.

Câu 13: Cho tích phân $I = \int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$. Đổi biến $t = \sqrt{1+\ln x}$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $I = 2\int_{1}^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{d}t$. **B.** $I = 2\int_{1}^{\sqrt{2}} t\mathrm{d}t$. **C.** $I = \int_{1}^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{d}t$. **D.** $I = 2\int_{1}^{2} t^2\mathrm{d}t$.

Lời giải

Chọn A

Thực hiện đổi biến $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+\ln x \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Như vậy: $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x = \int_{1}^{\sqrt{2}} 2t^2\mathrm{d}t = 2\int_{1}^{\sqrt{2}} t^2\mathrm{d}t.$

Câu 14: Tính tích phân $I = \int_{1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2}\int_{1}^{2} \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **B.** $I = 2\int_{0}^{3} \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **C.** $I = \int_{0}^{3} \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **D.** $I = \int_{1}^{2} \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Với $x=1$ thì $u=0$; với $x=2$ thì $u=3$.

Khi đó $I=\int\limits_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(3)$ bằng

A. $\ln 10-2$. **B.** 10. **C.** $\ln 10+2$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln 10+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \dfrac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}=\ln(x^2+1)\Big|_0^3=\ln 10$

Mặt khác $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$

Nên $F(3)-F(0)=\ln 10 \Leftrightarrow F(3)=\ln 10+F(0)=\ln 10+2$

Câu 16: Có bao nhiêu số thực a thoả mãn $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+a}dx=\dfrac{1}{2}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$\mathrm{I}=\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+a}dx=\dfrac{1}{2},\ a\in\mathbb{R}$.

Đặt $u=x^2+a \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow xdx=\dfrac{1}{2}du$.

Đổi cận:

$x=0 \Rightarrow u=a$

$x=1 \Rightarrow u=a+1$

Khi đó,

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_a^{a+1}\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|\Big|_a^{a+1}=\frac{1}{2}\left(\ln|a+1|-\ln|a|\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln|a+1|-\ln|a|=1\Leftrightarrow \ln\frac{|a+1|}{|a|}=\ln e$$

$$\Rightarrow \frac{|a+1|}{|a|}=e \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{e-1} \\ a=\dfrac{-1}{e+1} \end{array}\right..$$

Câu 17: Cho $\int\limits_0^1 f(x)dx=6.$ Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f(2\sin x)\cos xdx.$

A. 3. **B.** 6. **C.** -3. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\sin x\Rightarrow dt=2\cos xdx\Rightarrow \cos xdx=\dfrac{dt}{2}.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\ x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=1.$

Suy ra: $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f\left(2\sin x\right)\cos xdx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f\left(t\right)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{2}.6=3.$

Câu 18: Cho tích phân $I=\int_0^{2021}\left(1+x\right)^{12}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=x+1$ ta được

A. $I=\int_0^{2021}u^{12}\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int_1^{2022}u^{12}\mathrm{d}u$.

C. $I=\int_1^{2022}\left(u-1\right)^{12}\mathrm{d}u$. **D.** $I=\int_0^{2021}\left(u-1\right)^{12}\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=x+1$; $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow u=1$ và $x=2021\Rightarrow u=2022$.

Khi đó $I=\int_1^{2022}u^{12}\mathrm{d}u$.

Câu 19: Cho $\int_{-3}^{7} f\left(x\right)\mathrm{d}x=12$. Tích phân $\int_0^5 f\left(2x-3\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 21. **C.** 12. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2x-3\Rightarrow dt=2dx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-3;\ x=5\Rightarrow t=7$.

Suy ra $\int_0^5 f\left(2x-3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-3}^{7} f\left(t\right)\mathrm{dt}=\dfrac{1}{2}\int_{-3}^{7} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.12=6$.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-4}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int_0^2 f\left(2-3x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2-3x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t.$ Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=-4$.

Ta có $I=-\int_2^{-4} f\left(t\right)\dfrac{\mathrm{d}t}{3}=\dfrac{1}{3}\int_{-4}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}.2=\dfrac{2}{3}.$

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{1}^{11} f\left(x\right)\mathrm{d}x=45$. Giá trị của $\int\limits_{0}^{2} f\left(5x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 10. **C.** 90. **D.** 91.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int\limits_{0}^{2} f\left(5x+1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5x+1$, ta có $\mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$ nên $\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1;\ x=2\Rightarrow t=11$.

$I=\int\limits_{1}^{11} f\left(t\right)\frac{1}{5}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}.\int\limits_{1}^{11} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}.\int\limits_{1}^{11} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{45}{5}=9$.

Câu 22: Tính tích phân $\int\limits_{0}^{1} x\left(x^2+3\right)dx$ bằng cách đặt ẩn phụ $t=x^2+3$ thì tích phân trở thành:

A. $\int\limits_{0}^{1}\frac{t}{2}dt$. **B.** $\int\limits_{3}^{4}\frac{t}{2}dt$. **C.** $\int\limits_{3}^{4} tdt$ **D.** $-\int\limits_{0}^{1} tdt$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^2+3\Rightarrow\frac{1}{2}dt=xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=3;\ x=1\Rightarrow t=4$

Khi đó tích phân trở thành $\int\limits_{3}^{4}\frac{t}{2}dt$

Câu 23: Cho a la số thực dương, a là hằng số. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{a}\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\frac{\left(4a+1\right)\sqrt{4a+1}-1}{3}$. **B.** $I=\frac{\left(4a+1\right)\sqrt{4a+1}-1}{6}$.

C. $I=\frac{\left(4a+1\right)-1}{3}$. **D.** $I=\frac{2\left(4a+1\right)\sqrt{4a+1}-2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int\limits_{0}^{a}\sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow 2t.\mathrm{d}t=4.\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{2}t.\mathrm{d}t$

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow t=1$

$x=a\Rightarrow t=\sqrt{4a+1}$

$$I=\int_{1}^{\sqrt{4a+1}} t.\frac{1}{2}t.\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{4a+1}} t^2.\mathrm{d}t=\left.\frac{t^3}{6}\right|_{1}^{\sqrt{4a+1}}=\frac{(4a+1)\sqrt{4a+1}-1}{6}.$$

Câu 24: Cho $A=\int_{1}^{3}(x-1)\left(x^2-2x\right)^4\mathrm{d}x=\frac{a}{b};\ (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị $a-b^2$ bằng

A. 122. **B.** 117. **C.** 97. **D.** 127.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2-2x\Rightarrow \mathrm{d}t=(2x-2)\mathrm{d}x$

$x=1\Rightarrow t=-1; x=3\Rightarrow t=3$

$$A=\int_{1}^{3}(x-1)\left(x^2-2x\right)^4\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}t^4\mathrm{d}t=\left.\frac{1}{10}t^5\right|_{-1}^{3}=\frac{122}{5}$$

Câu 25: $\int_{1}^{2}x(x-1)^{2021}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}$. **B.** $\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}$. **C.** $\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}$. **D.** $\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x-1\ \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=1$.

$$\int_{1}^{2}x(x-1)^{2021}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(t+1)t^{2021}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\left(t^{2022}+t^{2021}\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^{2023}}{2023}+\frac{t^{2022}}{2022}\right)\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2023}+\frac{1}{2022}.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=1$ và đạo hàm $f'(x)=x\left(x^2+1\right)^5$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó, $f(1)$ bằng.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{36}{5}$. **C.** $\frac{21}{10}$. **D.** $\frac{26}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{0}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=\left.f(x)\right|_{0}^{1}=f(1)-f(0)$. Suy ra $f(1)=f(0)+\int_{0}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=1+K$

Với $K=\int_{0}^{1}x\left(x^2+1\right)^5\mathrm{d}x$

Đặt $t=x^2+1\ \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=2$.

$$\int_{0}^{1}x\left(x^2+1\right)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}t^5\mathrm{d}t=\left.\frac{t^6}{12}\right|_{1}^{2}=\frac{63}{12}=\frac{21}{4}.$$ Suy ra $f(1)=1+\frac{21}{4}=\frac{25}{4}$.

Câu 27: Tích phân $\int_{0}^{2}\frac{x}{x^2+3}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log\frac{7}{3}$. **B.** $\ln\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{7}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=x^2+3\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow u=3$; $x=2\Rightarrow u=7$, ta có:

$$I=\frac{1}{2}\int_3^7\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln|u|\Big|_3^7=\frac{1}{2}\ln 7-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}.$$

Câu 28: Biết $\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$

A. $S=73$. **B.** $S=71$. **C.** $S=65$. **D.** $S=68$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đối cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=3\Rightarrow t=2$

Khi đó: $I=\int_1^2\frac{t^2-1}{t}.2t\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2=\frac{8}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}\Rightarrow S=73.$

Câu 29: Khi tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$ ta được tích phân nào bên dưới

A. $I=\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{u}.\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int_1^2\sqrt{u}.\mathrm{d}u$. **C.** $I=\int_0^3\sqrt{u}.\mathrm{d}u$. **D.** $I=2\int_0^3\sqrt{u}.\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=3$.

Khi đó $I=\int_0^3\sqrt{u}.\mathrm{d}u$.

Câu 30: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $t=\cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^1 t^7\mathrm{d}t$. **B.** $I=-\int_0^1 t^7\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^7\mathrm{d}t$. **D.** $I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^7\mathrm{d}t$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\int_1^0 t^7\left(-\mathrm{d}t\right)=\int_0^1 t^7\,\mathrm{d}t$.

Câu 31: Tính tích phân $I=\int_1^{e}\frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx$ bằng cách đổi biến số, đặt $\sqrt{\ln x+1}=u$ thì I bằng

A. $\int_1^{e}u\,du$. **B.** $2\int_1^{e}u\,du$. **C.** $\int_1^{\sqrt{2}}u\,du$. **D.** $2\int_1^{\sqrt{2}}u^2\,du$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{\ln x+1}=u\Rightarrow \ln x+1=u^2\Rightarrow \frac{dx}{x}=2u\,du$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=1$; $x=e\Rightarrow u=\sqrt{2}$.

Khi đó $I=2\int_1^{\sqrt{2}}u^2\,du$.

Câu 32: Biết $\int_0^4 f(x)dx=37$ và $\int_0^4\left[2f(x)-3g(x)\right]dx=26$. Khi đó $\int_0^2 g(2x)dx$ có giá trị là

A. -8. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^4\left[2f(x)-3g(x)\right]dx=26\Leftrightarrow 2\int_0^4 f(x)dx-3\int_0^4 g(x)dx=26\Leftrightarrow\int_0^4 g(x)dx=16$.

Tính $\int_0^2 g(2x)dx$.

Đặt $t=2x\Rightarrow dt=2dx$, hay $dx=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=4$.

Khi đó $\int_0^2 g(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 g(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^4 g(x)dx=8$.

Câu 33: Cho tích phân $I=\int_0^1\frac{x^7}{\left(1+x^2\right)^5}dx$, đặt $t=1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$. **B.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **C.** $I=\int_1^3\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$. **D.** $I=\frac{3}{2}\int_1^3\frac{(t-1)^3}{t^4}dt$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=1+x^2\Rightarrow dt=2xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=2$

Vậy $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^6}{\left(1+x^2\right)^5}2xdx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}dt$.

Câu 34: Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{e^x}{x}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Tích phân $I=\int\limits_1^2 \dfrac{e^{3x}}{x}\mathrm{d}x$ bằng giá trị nào sau đây?

A. $\dfrac{F\left(6\right)-F\left(3\right)}{3}$.
B. $F\left(6\right)-F\left(3\right)$.
C. $3\left[F\left(2\right)-F\left(1\right)\right]$.
D. $3\left[F\left(6\right)-F\left(3\right)\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int\limits_1^2 \dfrac{e^{3x}}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=3x\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3; x=2\Rightarrow t=6$.

Vậy $I=\int\limits_1^2 \dfrac{e^{3x}}{3x}.3\mathrm{d}x=\int\limits_3^6 \dfrac{e^t}{t}\mathrm{d}t=F\left(t\right)\Big|_3^6=F\left(6\right)-F\left(3\right)$.

Câu 35: Cho tích phân $I=\int\limits_{-4}^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{5-x}}=a-b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó $E=a.b$ bằng

A. $E=6$ **B.** $E=28$. **C.** $E=8$. **D.** $E=30$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{5-x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-4\Rightarrow t=3; x=4\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int\limits_3^1 \dfrac{-2t\mathrm{d}t}{t+1}=2\int\limits_1^3 \dfrac{t}{t+1}\mathrm{d}t$

$=2\int\limits_1^3\left(1-\dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2\left(t-\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_1^3=2\left[\left(3-\ln 4\right)-\left(1-\ln 2\right)\right]=4-2\ln 2$.

Suy ra $a=4,b=2$.

Vậy $E=a.b=8$.

Câu 36: Biết $\int\limits_1^e \dfrac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=40$. **B.** $S=10$. **C.** $S=4$. **D.** $S=9$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=0$; $x=e \Rightarrow u=1$

Do đó: $I=\int\limits_1^e \dfrac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 u^2\mathrm{d}u=\dfrac{u^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=1^2+3^2=10$.

Vậy $S=10$.

Câu 37: Biết $\int\limits_1^{2022} \frac{\log_{2022} x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\ln 2022}{a}$. Tìm a.

A. $a=3$. **B.** $a=2022$. **C.** $a=2$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\log_{2022} x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{x\ln 2022}\mathrm{d}x \Rightarrow \ln 2022\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=2022 \Rightarrow u=1$.

Do đó: $I = \int\limits_1^{2022} \frac{\log_{2022} x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 u\ln 2022\mathrm{d}u = \ln 2022 \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\ln 2022}{2}$.

Vậy $a=2$.

Câu 38: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{-1}^{5}\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=16$ và $\int\limits_{-1}^{5}\left[f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} \int\limits_{-1}^{5}\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=16 \\ \int\limits_{-1}^{5}\left[f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x=5 \\ \int\limits_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x=2 \end{cases}$.

Đặt $t=2x+1$, khi đó ta có $\int\limits_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$.

Vậy $I=\frac{5}{2}$.

Câu 39: Biết $\int\limits_1^{e} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x = a\sqrt{2}+b$ với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $\frac{b}{a}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2=1+\ln x \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Với $x=1 \Rightarrow t=1;\ x=e \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}.2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)dt=2.\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{4}{3}.$$

Vậy $a=-\frac{2}{3};b=\frac{4}{3}\Rightarrow \frac{b}{a}=-2.$

Câu 40: Biết tích phân $\int_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. $T=-1$. **B.** $T=1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $I=\int_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx$.

Đặt: $t=\sqrt{e^x+3}\Rightarrow t^2=e^x+3\Rightarrow 2tdt=e^xdx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=\ln 6\Rightarrow t=3\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int_2^3\frac{2tdt}{1+t}=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\left(t-\ln|1+t|\right)\Big|_2^3=2-4\ln 2+2\ln 3$.

Do đó: $a=2, b=-4, c=2$. Vậy $T=a+b+c=0$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x>2\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\cdot f\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx+2\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{2x}\cdot f\left(1+e^{2x}\right)dx.$$

A. 79. **B.** 78. **C.** 77. **D.** 76.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2$.

Đặt $u=1+e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}dx\Rightarrow \frac{1}{2}du=e^{2x}dx$.

Đổi cận $x=\ln 2\Rightarrow u=5$ và $x=\ln 3\Rightarrow u=10$.

Như vậy

$$I=\int_1^2 f(t)dt+\int_5^{10}f(u)du=\int_1^2(2t+1)dt+\int_5^{10}2udu=79.$$

Câu 42: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=8$ và

$\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right)+2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=11$. Giá trị của biểu thức $\int\limits_{2021}^{2022}f\left(2022-x\right)\mathrm{d}x+5\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}g\left(3x\right)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 10. **B.** $0\cdot$ **C.** $20\cdot$ **D.** $5\cdot$

Lời giải

Chọn A

Ta có hệ sau: $\begin{cases}\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=8\\\int\limits_{0}^{1}\left[f\left(x\right)+2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5\\\int\limits_{0}^{1}g\left(x\right)\mathrm{d}x=3\end{cases}$.

Xét $\int\limits_{2021}^{2022}f\left(2022-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f\left(2022-x\right)\mathrm{d}\left(2022-x\right)=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$.

Xét $5\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}g\left(3x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{3}\int\limits_{0}^{1}g\left(3x\right)\mathrm{d}\left(3x\right)=\frac{5}{3}\int\limits_{0}^{1}g\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{3}.3=5$.

Vậy $\int\limits_{2021}^{2022}f\left(2022-x\right)\mathrm{d}x+5\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}g\left(3x\right)\mathrm{d}x=5+5=10$.

Câu 43: Giá trị của tích phân $\int\limits_{0}^{3}\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}\mathrm{d}x=a\ln3-b\ln2+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b+c$ bằng:

A. 6. **B.** 9. **C.** -3. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. Với $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(t^2-4\right)2t}{t^2+3t+2}\mathrm{dt}=\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(t-2\right)2t}{t+1}\mathrm{dt}=\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(t-2\right)2t}{t+1}\mathrm{dt}$

$=\int\limits_{1}^{2}\left(2t-6+\frac{6}{t+1}\right)\mathrm{dt}=\left(t^2-6t+6\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_{1}^{2}=-3+6\ln3-6\ln2$

$\Rightarrow a=6,b=6,c=-3\Rightarrow a+b+c=-3$.

Câu 44: Biết $I=\int\limits_{2}^{4}\frac{2x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x=a\ln2+b\ln3+c\ln5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $P=2a+3b+4c$.

A. $P=9$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+x\Rightarrow\mathrm{d}t=\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=2 \Rightarrow t=6 \\ x=4 \Rightarrow t=20 \end{cases}$. Khi đó

$$I=\int_2^4 \frac{2x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\int_6^{20}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln t\Big|_6^{20}=\ln 20-\ln 6=\ln 2+\ln 5-\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}.$$

Suy ra $P=2a+3b+4c=3$.

Cách khác: Ta có $\int_2^4 \frac{2x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\int_2^4 \frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}\left(x^2+x\right)=\ln\left(x^2+x\right)\Big|_2^4=\ln 20-\ln 6=\ln 2-\ln 3+\ln 5$

Suy ra $a=1; b=-1; c=1 \Rightarrow P=2a+3b+4c=3$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=20$ và $\int_8^{10} f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_0^4 f(2x)\mathrm{d}x$

A. $I=7$. **B.** $I=14$. **C.** $I=3$. **D.** $I=12$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int_0^4 f(2x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	4
t	0	8

$$I=\int_0^4 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^8 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x+\int_{10}^8 f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}(20-6).$$

Vậy $I=7$.

Câu 46: Cho $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị $a+b+c+d$ bằng

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=0$; $x=\mathrm{e} \Rightarrow t=1$. Khi đó:

$$I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{2t+1}{(t+2)^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{-3}{(t+2)^2}+\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{3}{t+2}+2\ln|t+2|\right)\Bigg|_0^1=\ln\frac{9}{4}-\frac{1}{2}.$$

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

Câu 47: Biết $\int\limits_1^2 \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = a + b\sqrt{3}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $P = 3a - 5b$.

A. 12. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int\limits_1^2 \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \int\limits_1^2 x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{7}{3} - \int\limits_1^2 x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x.$$

Tính $\int\limits_1^2 x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{x^2-1} = t \Rightarrow x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$.

Khi $x = 1$ thì $t = 0$; khi $x = 2$ thì $t = \sqrt{3}$.

Khi đó $\int\limits_1^2 x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\sqrt{3}} t^2\mathrm{d}t = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Vậy $\int\limits_1^2 \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{7}{3} - \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{7}{3}$, $b = -1$.

Vậy $P = 3a - 5b = 12$.

Câu 48: Cho $\int\limits_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2tdt$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$, với $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó tích phân đã cho bằng $\int\limits_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2tdt = \int\limits_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}dt = \int\limits_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2}\right)dt$

$$= \left.\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6\ln\left|t+2\right|\right)\right|_1^2 = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3$$

Suy ra $a = 7, b = -12, c = 6 \Rightarrow a + b + c = 1$.

Câu 49: Biết $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3\ln a - \ln b$ với a, b là hai số nguyên dương. Tích $P = ab$ bằng

A. $P = 10$. **B.** $P = -10$. **C.** $P = 20$. **D.** $P = 15$.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân: $I=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+2e^{-x}-3}=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^{2x}-3e^x+2}$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=\ln 6\Rightarrow t=6\\ x=\ln 3\Rightarrow t=3\end{cases}$.

Suy ra: $I=\int\limits_3^6\frac{\mathrm{d}t}{t^2-3t+2}=\int\limits_3^6\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t=\left(-\ln|t-1|+\ln|t-2|\right)\Big|_3^6=3\ln 2-\ln 5$.

Do đó: $a=2, b=5$. Vậy $P=ab=10$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int\limits_0^{\ln 2}f\left(e^x+1\right)e^x dx=\frac{5}{2}$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}f\left(1+2\cos x\right)\sin x dx$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=e^x+1\Rightarrow dt=e^x dx$. $x=0\Rightarrow t=2;\ x=\ln 2\Rightarrow t=3$

Khi đó ta được $\int\limits_0^{\ln 2}f\left(e^x+1\right)e^x dx=\int\limits_2^3 f(t)dt=\frac{5}{2}$.

Đặt $u=1+2\cos x\Rightarrow du=-2\sin x dx$. $x=0\Rightarrow u=3;\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=2$

Khi đó ta được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}f\left(1+2\cos x\right)\sin x dx=\frac{1}{2}\int\limits_2^3 f(u)du=\frac{1}{2}\int\limits_2^3 f(t)dt=\frac{5}{4}$.

Câu 51: Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\frac{(x+2)^{2017}}{x^{2019}}\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{2018}$. **B.** $\frac{3^{2017}}{4037}-\frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{4036}$. **D.** $\frac{3^{2021}-2^{2021}}{4040}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int\limits_1^2\frac{(x+2)^{2017}}{x^{2019}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2017}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2017}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1+\frac{2}{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=-\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x\Rightarrow -\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=3; x=2\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int\limits_3^2 t^{2017}.\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\int\limits_2^3 t^{2017}dt=\frac{t^{2018}}{4036}\Bigg|_2^3=\frac{3^{2018}-2^{2018}}{4036}$.

Câu 52: Cho $\int\limits_0^1 x(x-1)^{10}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a(a+1)}$. Giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(11;13)$. **B.** $(9;11)$. **C.** $(12;14)$. **D.** $(10;12)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ và $x = t + 1$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = -1$.

$x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Ta có: $\int_0^1 x(x-1)^{10}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (t+1)t^{10}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \left(t^{10} + t^{11}\right)\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{12}}{12}\right)\right|_{-1}^0 = \frac{1}{11.12}$.

Vậy $a = 11$.

Câu 53: Cho $\int_2^3 \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}\mathrm{d}x = \frac{a\ln 2 + b\ln 3}{2}, (a,b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $S = 2a + 3b$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 19. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_2^3 \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{x}{x^2\left(x^2-1\right)}\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ và $x^2 = t + 1$.

Đổi cận: $x = 2 \Rightarrow t = 3$.

$x = 3 \Rightarrow t = 8$.

Ta có: $\int_2^3 \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{x}{x^2\left(x^2-1\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^8 \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_3^8 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln t - \ln(t+1)\right]\Big|_3^8$

$= \frac{1}{2}\left[(\ln 8 - \ln 9) - (\ln 3 - \ln 4)\right] = \frac{5\ln 2 - 3\ln 3}{2} \Rightarrow a = 5, b = -3$.

Vậy $S = 2a + 3b = 1$.

Câu 54: Cho $\int_0^1 x^3.\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{a\left(\sqrt{b}+1\right)}{c}, a,b,c \in \mathbb{Z}, \frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x \\ x^2 = t^2 - 1 \end{cases}$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$.

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Ta có: $I = \int_0^1 x^3.\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2.\sqrt{x^2+1}.x\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} t\left(t^2-1\right)t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} \left(t^4 - t^2\right)\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\right|_1^{\sqrt{2}}$

$= \frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{15} \Rightarrow a = 2, b = 2, c = 15 \Rightarrow S = a + b + c = 19$.

Câu 55: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos^3 x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = a\sqrt{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=ab$.

A. $T=1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=3$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\cos^2 x.\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4\left(1-t^2\right)}{t+1}\mathrm{d}t = 4\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-t\right)\mathrm{d}t = 4\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}-1 \Rightarrow a=2, b=2 \Rightarrow T=ab=4$.

Câu 56: Biết $I=\int\limits_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+4}=\frac{1}{a}\left(2\ln a-\ln b\right)$ với a,b là các số nguyên dương và a là số nguyên tố. Tính giá trị biểu thức $P=2a-b.$

A. $P=4.$ **B.** $P=-1$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+4}=\int\limits_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x+3}.$

Đặt $t=\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=\ln 3\Rightarrow t=3\end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_1^3\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+1\right)\left(t+3\right)}=\frac{1}{2}\int\limits_1^3\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|t+1\right|-\ln\left|t+3\right|\right)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left(\ln 4-\ln 6-\ln 2+\ln 4\right)=\frac{1}{2}\left(3\ln 2-\ln 6\right)\ =\frac{1}{2}\left(2\ln 2-\ln 3\right).$

Khi đó $a=2,b=3\Rightarrow P=2a-b=2.2-3=1.$

Câu 57: Biết rằng $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\cos x-2\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\frac{a\pi}{2}+b\ln 2-c\ln 3$, với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $P=abc$.

A. $P=\frac{3}{4}$. **B.** $P=\frac{3}{4}$. **C.** $P=0$. **D.** $P=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\cos x-2\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+3\cos x+\cos x-3\sin x}{\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\left(\sin x+3\cos x\right)'}{\sin x+3\cos x}\right)\mathrm{d}x$

$$= x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln\left(\sin x + 3\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(2\sqrt{2}\right) - \ln 3 = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\ln 2 - \ln 3$$

Từ đây ta có $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 1$ nên $P = \frac{3}{4}$.

Câu 58: Biết $\int\limits_0^2 \frac{\left(x^2+1\right)e^x + xe^{2x} + 2x + 2}{xe^x + 2}dx = a + be^2 - \ln\left(ce^2+1\right)$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 - c^2$.

A. . .. **B.** -11. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{\left(x^2+1\right)e^x + xe^{2x} + 2x + 2}{xe^x + 2} = \frac{\left(xe^x+2\right)\left(e^x+x+1\right) - \left(x+1\right)e^x}{xe^x+2} = e^x + x + 1 - \frac{\left(x+1\right)e^x}{e^x+2}$.

Khi đó

$$\int\limits_0^2 \frac{\left(x^2+1\right)e^x + xe^{2x} + 2x + 2}{xe^x+2}dx = \int\limits_0^2 \left(e^x + x + 1\right)dx - \int\limits_0^2 \frac{\left(x+1\right)e^x}{xe^x+2}dx$$

$$= \left(e^x + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{d\left(xe^x+2\right)}{xe^x+2} = 3 + e^2 - \ln\left(xe^x+2\right)\Bigg|_0^2 = 3 + e^2 - \ln\left(e^2+1\right).$$

Khi đó $a = 3$, $b = 1$, $c = 1 \Rightarrow a^2 + 2b^2 - c^2 = 10$.

Câu 59: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$ thỏa mãn $f\left(x\right) = \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính $\int\limits_3^4 f\left(x\right)dx$

.

A. $3 + 2\ln^2 2$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $2\ln^2 2$. **D.** $\ln^2 2$.

Lời giải

Chọn C

Từ đẳng thức đã cho, lấy tích phân cận từ 1 tới 4 cho hai vế, ta được

$$\int\limits_1^4 f\left(x\right)dx = \int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}dx + \int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}dx \ (*)$$

Xét tích phân $\int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_1^4 f\left(2\sqrt{x}-1\right)d\left(2\sqrt{x}-1\right) = \int\limits_1^3 f\left(x\right)dx$.

Xét tích phân $\int\limits_1^4 \frac{\ln x}{x}dx = \int\limits_1^4 \ln x\, d\left(\ln x\right) = \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^4 = 2\ln^2 2$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \int\limits_1^4 f\left(x\right)dx = \int\limits_1^3 f\left(x\right)dx + 2\ln^2 2 \Leftrightarrow \int\limits_3^4 f\left(x\right)dx = 2\ln^2 2$.

Câu 60: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f\left(\cos x + 1\right)dx = \int\limits_1^e \frac{\ln x}{x} f\left(\ln^2 x\right)dx = \frac{3}{2}$ và $\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx = \frac{a}{b}$ (trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính ab.

A. 18. **B.** -18. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f\left(\cos x+1\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x} f\left(\ln^2 x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$ và $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$ và ta có

$\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=\frac{a}{b}$.

Vậy $ab=18$.

Câu 61: Cho hàm số $f\ \ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F\ \ x$, $G\ \ x$ là hai nguyên hàm của $f\ \ x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\ \ 8\ +G\ \ 8\ =8$ và $F\ \ 0\ +G\ \ 0\ =-2$. Khi đó $\int\limits_{-2}^0 f\ \ -4x\ \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{4}$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $I=\int\limits_{-2}^0 f\ \ -4x\ \mathrm{d}x$. Đặt $-4x=t\Rightarrow dx=-\frac{1}{4}dt$. Đổi cận:

x	-2	0
t	8	0

Khi đó: $I=-\frac{1}{4}\int\limits_8^0 f\ \ t\ \mathrm{dt}=\frac{1}{4}\int\limits_0^8 f\ \ t\ \mathrm{dt}=\frac{1}{4}\int\limits_0^8 f\ \ x\ \mathrm{dx}$.

Do $F\ \ x$, $G\ \ x$ là hai nguyên hàm của $f\ \ x$ trên $\mathbb{R}$ nên có:

$I=\frac{1}{4}G\ \ x\ \Big|_0^8=\frac{1}{4}\left[G\ \ 8\ -G\ \ 0\ \right]\Rightarrow G\ \ 8\ -G\ \ 0\ =4I$. Tương tự cũng có:

$F\ \ 8\ -F\ \ 0\ =4I$.

Suy ra: $8I=F\ \ 8\ +G\ \ 8\ -F\ \ 0\ -G\ \ 0\ =8-\ \ -2\ =10\Rightarrow I=\frac{5}{4}$..

Câu 62: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=x+3$ .Tính $\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx$.

A. 192. **B.** $\frac{4}{57}$. **C.** $\frac{57}{4}$. **D.** 196.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $x=t^3+3t+1\ \Rightarrow dx=\left(3t^2+3\right)dt$.

Đổi cận: $x=1\to t=0; x=5\to t=1$.

$\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\left(3t^2+3\right)f\left(t^3+3t+1\right)dt=\int\limits_0^1\left(3t^2+3\right)\left(t+3\right)dt=\frac{57}{4}$.

Câu 63: Gọi a,b là các số hữu tỉ sao cho $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\pi$. Giá trị của tích ab bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=\tan t \Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$

$x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan t}{1+\tan^2 t}.\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan t\right)dt$

$=\left(t-\ln\left|\cos t\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}.$

Vậy $ab=\frac{1}{8}$.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

Đổi biến: $x=\frac{1}{3} \Rightarrow t=3$; $x=3 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}dx=-\int\limits_{3}^{\frac{1}{3}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}}.\frac{1}{t^2}dt=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t+1}dt=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}dx$.

Suy ra

$$2I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}dx+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}dx=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x(x+1)}dx=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x+1)}dx=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}(x-1)dx=\frac{16}{9}.$$

$\Rightarrow I=\frac{8}{9}$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(1;0)$ và nhận điểm $I(2;2)$ làm tâm đối xứng. Giá trị của $\int\limits_1^3 x(x-2)\left[f(x)+f'(x)\right]dx$ bằng

A. $-\frac{8}{3}$.   **B.** $-\frac{16}{3}$.   **C.** $\frac{16}{3}$.   **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=4-x\Rightarrow dt=-dx$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có $I\left(2;2\right)$ là tâm đối xứng nên $\frac{f\left(x\right)+f\left(4-x\right)}{2}=2$.

Như vậy $f\left(x\right)+f\left(4-x\right)=4\Rightarrow f'\left(x\right)-f'\left(4-x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=f'\left(4-x\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $I=\int\limits_1^3 x\left(x-2\right)\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx$

$=\int\limits_1^3\left(4-t\right)\left(2-t\right)\left[f\left(4-t\right)+f'\left(4-t\right)\right]dt$

$=\int\limits_1^3\left(t^2-6t+8\right)\left[4-f\left(t\right)+f'\left(t\right)\right]dt$

$=\int\limits_1^3 4\left(t^2-6t+8\right)dt-\int\limits_1^3\left[t^2-2t-4\left(t-2\right)\right].\left[f\left(t\right)+f'\left(t\right)\right]dt+\int\limits_1^3 2\left(t^2-6t+8\right)f'\left(t\right)dt$

$=2.\int\limits_1^3\left(t^2-6t+8\right)dt+\int\limits_1^3 2\left(t-2\right)\left[f\left(t\right)+f'\left(t\right)\right]dt+\int\limits_1^3\left(t^2-6t+8\right)f'\left(t\right)dt$

$=\int\limits_1^3\left(t^2-6t+8\right)dt+\int\limits_1^3\left(2t-4\right)f\left(t\right)dt+\int\limits_1^3\left(t^2-4t+4\right)f'\left(t\right)dt$

$=\left.\left(\frac{t^3}{3}-3t^2+8t\right)\right|_1^3+\left.\left(t^2-4t+4\right)f\left(t\right)\right|_1^3=\frac{16}{3}$.

Câu 66: Số thực dương m thỏa mãn $I=\int\limits_m^{4m}\frac{x^2-2m^2}{x^4+4m^4}dx=\frac{1}{4}$ có thể biểu diễn về dạng $a\ln 5-b\ln 13$ (trong đó a,b là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $a+2021b$ là

A. 2020.   **B.** 2021.   **C.** 2022.   **D.** 2023.

Lời giải

Chọn D

Ta có biến đổi sau

$$I=\int\limits_m^{4m}\frac{x^2-2m^2}{x^4+4m^4}dx=\int\limits_m^{4m}\frac{1-\frac{2m^2}{x^2}}{x^2+\frac{4m^4}{x^2}}dx=\int\limits_m^{4m}\frac{1-\frac{2m^2}{x^2}}{\left(x+\frac{2m^2}{x}\right)^2-4m^2}dx=\int\limits_{3m}^{4,5m}\frac{1}{t^2-4m^2}dt=$$

$$=\frac{1}{4m}\ln\left|\frac{t-2m}{t+2m}\right|\Bigg|_{3m}^{4,5m}=\frac{1}{4m}\left(\ln\left|\frac{5}{13}\right|-\ln\left|\frac{1}{5}\right|\right)=\frac{1}{4m}\ln\left|\frac{25}{13}\right|.$$

Như vậy $I=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4m}\ln\frac{25}{13}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=2\ln 5-\ln 13.$

Ta có $a\ln 5 - b\ln 13 = 2\ln 5 - \ln 13 \Leftrightarrow (a-2)\ln 5 = (b-1)\ln 13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} b \neq 1 \\ \dfrac{a-2}{b-1} = \dfrac{\ln 13}{\ln 5} \end{cases} & (2) \end{array}\right.$.

Trường hợp (2) loại vì VT (2) là số hữu tỉ, VP (2) là số vô tỉ.

Vậy $a = 2, b = 1$.Suy ra $a + 2021b = 2023$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa: $f(x) = x^2 - 3x + 2\int_0^1 f(x) f'(x)\mathrm{d}x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị thực dương của a để $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}a$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $m = \int_0^1 f(x) f'(x)\mathrm{d}x$. Khi đó $f(x) = x^2 - 3x + 2m,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f'(x) = 2x - 3$.

Vậy $m = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2m)(2x - 3)\mathrm{d}x$. Đặt $t = x^2 - 3x + 2m \Rightarrow \mathrm{d}t = (2x-3)\mathrm{d}x$.

Do đó $m = -\int_{2m-2}^{2m} t\mathrm{d}t \Leftrightarrow m = -\left.\dfrac{t^2}{2}\right|_{2m-2}^{2m} \Leftrightarrow m = -4m + 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{5}$.

Vậy $f(x) = x^2 - 3x + \dfrac{4}{5}$.

Ta có $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}a \Leftrightarrow \int_0^a \left(x^2 - 3x + \dfrac{4}{5}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}a \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}a^3 - \dfrac{3}{2}a^2 + \dfrac{4}{5}a = \dfrac{4}{5}a \Leftrightarrow a = \dfrac{9}{2}$.

Dạng 9: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Phát biểu nào sau đây **đúng?**

A. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x\Big|_1^2 + \int_1^2 1dx$.

B. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 1dx$.

C. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x - \int_1^2 1dx$.

D. $\int_1^2 \ln x\,dx = x.\ln x + \int_1^2 1dx$

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \int_1^2 \ln x dx = x.\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 1dx$.

Câu 2: Biết $I = \int_1^2 \left(3x^2 + 2x\right)\ln x\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a + 6b$

A. $\dfrac{49}{6}$ **B.** $-\dfrac{49}{6}$ **C.** 11 **D.** -11

Lời giải

Chọn D

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \left(3x^2 + 2x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x^3 + x^2 \end{cases}$

$$I = \int_1^2 \left(3x^2 + 2x\right)\ln x\mathrm{d}x = \left(x^3 + x^2\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x^2 + x\right)dx = 12\ln 2 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 = 12\ln 2 - \frac{23}{6}$$

Vậy $a = 12,\ b = \dfrac{-23}{6} \Rightarrow a + 6b = -11$

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int_0^1 \left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x = 10$ và $2f\left(1\right) - f\left(0\right) = 2$. Tính $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = -12$. **C.** $I = -8$. **D.** $I = 10$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^1 \left(x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \left(x+1\right)f\left(x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 10 = 2f\left(1\right) - f\left(0\right) - \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = -8.$$

Câu 4: Biết $\int_0^1 2x\ln(x+1)\,\mathrm{dx}=\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $a.b$.

A. $a.b=2$. **B.** $a.b=1$. **C.** $a.b=6$. **D.** $a.b=-2$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{dv}=2x.\mathrm{dx}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{du}=\frac{1}{x+1}\mathrm{dx}\\ v=x^2\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_0^1 2x\ln(x+1)\,\mathrm{dx}=x^2.\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1 x^2.\frac{1}{x+1}\mathrm{dx}=\ln 2-\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{dx}$$

$$=\ln 2-\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^1=\ln 2-\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)=\frac{1}{2}.$$

Vậy $a=1,b=2\Rightarrow a.b=2$.

Câu 5: Biết $I=\int_0^4 x\ln(2x+1)dx=\frac{a}{b}\ln 3-c$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=64$. **B.** $T=68$. **C.** $T=60$. **D.** $T=70$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$I=\left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]\Bigg|_0^4-\int_0^4\frac{x^2}{2}\frac{2}{2x+1}dx=8\ln 9-\int_0^4\frac{x^2}{2x+1}dx$$

$$\Rightarrow I=8\ln 9-\int_0^4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{2x+1}\right)dx=8\ln 9-\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln(2x+1)\right]\Bigg|_0^4$$

$$=8\ln 9-\left(3+\frac{1}{8}\ln 9\right)=\frac{63}{8}\ln 9-3=\frac{63}{4}\ln 3-3$$

Suy ra $a=63,\ b=4,\ c=3 \Rightarrow T=a+b+c=63+4+3=70.$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tích phân $I=\int\limits_1^5 x.\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. Tìm mệnh đề đúng

A. $I=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\big|_1^5-\frac{1}{2}\int\limits_1^5 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

B. $I=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\big|_1^5-\int\limits_1^5 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

C. $I=x\mathrm{e}^{2x}\big|_1^5-\int\limits_1^5 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

D. $I=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}\big|_1^5-\frac{1}{2}\int\limits_1^5 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\mathrm{d}x \\ v=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{cases} \Rightarrow I=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\big|_1^5-\frac{1}{2}\int\limits_1^5 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $2f(1)-f(0)=2$ và $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. $I=-8$. **B.** $I=-12$. **C.** $I=8$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ dv=f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases} \Rightarrow \int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=(x+1)f(x)\big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=10$.

$2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=10 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-8$.

Câu 3: Cho $\int\limits_0^1 (x-1)e^{2x}dx=a+be^2$, với $a;b\in\mathbb{Q}, a,b$ là các phân số tối giản. Tổng $a+b$ bằng

A. -3. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=e^{2x}\mathrm{d}x$, chọn $v=\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int\limits_0^1 (x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}\Big|_0^1-\int\limits_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^2.$$

$\Rightarrow a=\frac{3}{4}; b=-\frac{1}{4}$. Vậy $a+b=\frac{1}{2}$

Câu 4: Biết $\int\limits_0^2 (3x-1)e^{\frac{x}{2}}dx=a+be$, với a,b là số hữu tỉ. Tính a^2-b^2.

A. 192. **B.** -192. **C.** 200. **D.** -200.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int\limits_0^2 (3x-1)e^{\frac{x}{2}}dx$.

Đặt $u=(3x-1)\Rightarrow du=3dx$; $dv=e^{\frac{x}{2}}dx\Rightarrow v=2e^{\frac{x}{2}}$.

Vậy ta có: $\int\limits_0^2 (3x-1)e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}(3x-1)\Big|_0^2-6\int\limits_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}(3x-1)\Big|_0^2-12e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2$

$=2\left(e(3.2-1)-e^0(3.0-1)\right)-12\left(e-e^0\right)=10e+2-12e+12=14-2e$.

Vậy ta có $a=14;b=-2\Rightarrow a^2-b^2=192$.

Câu 5: Cho Tích phân $I=\int\limits_1^2 (2x-1)\ln x dx$ bằng

A. $I=2\ln 2+\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2\ln 2$. **D.** $I=2\ln 2-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=(2x-1)dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x} \\ v=x^2-x \end{cases}$

Do đó $I=\left(x^2-x\right)\ln x\Big|_1^2-\int\limits_1^2 (x-1)dx=2\ln 2-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{1}{2}$.

Câu 6: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos 2xdx=a+b\pi$, với a,b là các số hữu tỷ. Giá trị $S=a+2b$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases} u=x \\ dv=\cos 2xdx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x.\cos 2xdx=x.\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

Do đó $a=\frac{-1}{4};b=\frac{1}{8}\Rightarrow a+2b=\frac{-1}{4}+2.\frac{1}{8}=0$

Câu 7: Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)dx=a\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $T=a+b$.

A. $T=6$. **B.** $T=8$. **C.** $T=7$. **D.** $T=5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ \mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} \\ v=x^2 \end{cases}$

$$\int_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x = x^2\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2\mathrm{d}x}{x+1} = x^2\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x - \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

$$= 4\ln 3 - \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^2 - \ln(x+1)\Big|_0^2 = 3\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow T=a+b=6$$

Câu 8: Biết $\int_0^1 (1-x)f'(x)\mathrm{d}x=2$ và $f(0)=3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $\int_0^1 (1-x)f'(x)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=1-x \Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v=f(x)$.

Khi đó: $\int_0^1 (1-x)f'(x)\mathrm{d}x=2 \Leftrightarrow (1-x)f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2 \Leftrightarrow -f(0)+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2+f(0) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$.

Câu 9: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x\,\mathrm{d}x = a\pi+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=2x+1 \\ dv=\cos x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x \\ v=\sin x \end{cases}$ nên:

$$I=(2x+1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = (2x+1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi-1 \Rightarrow a=1; b=-1 \Rightarrow a^2+b^2=2.$$

Câu 10: Cho $\int_1^e (2+x\ln x)\mathrm{d}x = ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=c$. **B.** $a+b=-c$. **C.** $a+b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Lời giải

Xét $I=\int_1^e (2+x\ln x)\mathrm{d}x = \int_1^e 2\mathrm{d}x + \int_1^e x\ln x\mathrm{d}x = 2e-2+\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I=2e-2+\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_1^e-\frac{1}{2}\int\limits_1^e x\mathrm{d}x=2e-2+\frac{e^2}{2}-\left.\frac{1}{4}x^2\right|_1^e=\frac{1}{4}e^2+2e-\frac{7}{4}=ae^2+be+c$.

Suy ra $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=2 \\ c=-\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=c$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0,\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

Tính $\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. -3. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=x^3 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x=\left[x^3 f(x)\right]\Big|_0^1-3\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-3.\frac{1}{3}=-1$.

Câu 12: Cho $\int\limits_1^e x^2\ln x dx=\frac{a}{b}e^3+\frac{c}{d}$ với $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên, $\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P=a+2b+3c+4d$ bằng

A. 51 **B.** 59 **C.** 61 **D.** 53

Lời giải

Chọn D

Ta xét $I=\int\limits_1^e x^2\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_1^e x^2\ln x dx=\left.\frac{x^3\ln x}{3}\right|_1^e-\int\limits_1^e \frac{x^2}{3}dx=\left.\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\right|_1^e=\frac{2e^3-1}{9}\Rightarrow a=2,b=9,c=-1,d=9$.

Do đó $P=a+2b+3c+4d=53$.

Câu 13: Tích phân $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\ln 2$. **B.** $1-\frac{2}{e}$. **C.** $\frac{13}{50}$. **D.** $1+\frac{2}{e}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=-\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{e}\right)+\int\limits_1^e \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=1-\frac{2}{e}$

Câu 14: Cho $\int_1^2 (2x+1)e^x\mathrm{d}x = a.e^2 + b.e$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$$\int_1^2 (2x+1)e^x\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[(2x-1)+(2x-1)'\right]e^x\mathrm{d}x = (2x-1)e^x\Big|_1^2 = 3e^2 - e \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Câu 15: Biết tích phân $I = \int_0^m xe^x\mathrm{d}x = 1,$ hỏi số thực m thuộc khoảng nào?

A. $(0;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int_0^m xe^x\mathrm{d}x = xe^x\Big|_0^m - \int_0^m e^x\mathrm{d}x = me^m - e^x\Big|_0^m = me^m - e^m + 1.$

Theo giả thiết $I = 1 \Leftrightarrow me^m - e^m + 1 = 1 \Leftrightarrow (m-1)e^m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

Câu 16: Kết quả tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ được viết dưới dạng $I = ae + b$, với a,b là các số nguyên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^3 + b^3 = 28$. **B.** $a.b = 3$. **C.** $a + 2b = 1$. **D.** $a - b = 2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: a, $b \in \mathbb{Z}$. Đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}.$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2x+3)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 3\mathrm{e} - 1 = ae + b.$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$. Vậy $a + 2b = 1$.

Câu 17: Tính tích phân $I = \int_4^5 (x+1)\ln(x-3)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{19}{4} - 10\ln 2$. **B.** $10\ln 2 + \frac{19}{4}$. **C.** $10\ln 2$. **D.** $10\ln 2 - \frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-3) \\ \mathrm{d}v = (x+1)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x-3} \\ v = \dfrac{x^2}{2} + x = \dfrac{x^2+2x}{2} \end{cases}.$

Suy ra

$$I = \left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\ln(x-3)\Big|_4^5 - \int_4^5 \left(\frac{x^2+2x}{2}.\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x = \frac{35}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_4^5 \left(\frac{x^2+2x}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$

$= \frac{35}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_4^5 \frac{x^2}{x-3}\mathrm{d}x - \int_4^5 \frac{x}{x-3}\mathrm{d}x = \frac{35}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_4^5 \frac{x^2-9+9}{x-3}\mathrm{d}x - \int_4^5 \frac{x-3+3}{x-3}\mathrm{d}x$

$= \frac{35}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{2}+9\ln 2\right) - \left(1+3\ln 2\right) = 10\ln 2 - \frac{19}{4}$.

Câu 18: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = \frac{\pi}{a} - \frac{b}{c}$ (với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $ab+c$ bằng.

A. 12. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \cos 2x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin 2x}{2} \end{cases}$.

Do đó $I = x.\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{\cos 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

Vậy $a = 8; b = 1; c = 4 \Rightarrow ab + c = 12$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 3$, $f(e) = 6$. Khi đó $I = \int_1^e f'(x).\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 4$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = 0$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 3$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \ln x \end{cases}$.

Khi đó ta có $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = f(x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e f'(x).\ln x\mathrm{d}x \Leftrightarrow 3 = 6 - \int_1^e f'(x).\ln x\mathrm{d}x \Leftrightarrow I = 3$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f'(x)\mathrm{d}x = 3$ Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xf(x)\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos\mathrm{d}x \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$

$$I=\sin x.f\left(x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'\left(x\right)\mathrm{d}x=1-3=-2$$

Câu 21: Cho $\int_{0}^{1} xe^{2022x}\mathrm{d}x=ae^{2022}+b$, $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

A. $\dfrac{1}{2021}$. **B.** $\dfrac{1}{2022}$. **C.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=e^{2022x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2022}e^{2022x}\end{cases}$.

Suy ra $\int_{0}^{1} xe^{2022x}\mathrm{d}x=\dfrac{xe^{2022x}}{2022}\Big|_{0}^{1}-\dfrac{1}{2022}\int_{0}^{1} e^{2022x}\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2022}}{2022}-\dfrac{1}{2022^2}e^{2022x}\Big|_{0}^{1}=\dfrac{e^{2022}}{2022}-\dfrac{1}{2022^2}\left(e^{2022}-1\right)$

$=\dfrac{2021}{2022^2}e^{2022}+\dfrac{1}{2022^2}$. Vậy $a=\dfrac{2021}{2022^2}$, $b=\dfrac{1}{2022^2}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=2021$.

Câu 22: Giả sử $I=\int_{3}^{4}\left(x-2\right)\ln\left(x-1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a\ln 3-b}{c}$, trong đó a, b, c là các số nguyên và $\left(b,c\right)=1$. Tính $S=a+2b+c$.

A. $S=8$. **B.** $S=12$. **C.** $S=10$. **D.** $S=11$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x-1\right)\\ \mathrm{d}v=\left(x-2\right)\mathrm{d}x\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)=\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)\left(x-3\right)\end{cases}$.

$$I=\int_{3}^{4}\left(x-2\right)\ln\left(x-1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-3\right)\ln\left(x-1\right)}{2}\Big|_{3}^{4}-\dfrac{1}{2}\int_{3}^{4}\left(x-3\right)\mathrm{d}x$$

$$=\dfrac{3\ln 3}{2}-\dfrac{1}{4}\left(x-3\right)^2\Big|_{3}^{4}=\dfrac{3\ln 3}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{6\ln 3-1}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\ b=1\\ c=4\end{cases}.$$

Khi đó $S=a+2b+c=12$.

Câu 23: Biết $\int_{1}^{4}\dfrac{\ln x}{x^2}dx=\dfrac{b}{c}+a\ln 2$ (với a là số hữu tỉ, $b;c$ là số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $T=2a+3b+c$.

A. $T=-12$. **B.** $T=13$. **C.** $T=12$. **D.** $T=-13$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Khi đó, ta có:

$\int\limits_1^4 \dfrac{\ln x}{x^2}dx = -\dfrac{\ln x}{x}\Big|_1^4 + \int\limits_1^4 \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{x}\Big|_1^4 = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{3}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$. Vậy giá trị của $T = 12$.

Câu 24: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x dx = a\pi + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng

A. 10. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x dx = (2x+1)\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx = \pi + 1 + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 1$

Suy ra $a = 1, b = -1$. Vậy $a^2 + b^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = e^x + \int\limits_0^1 tf(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(\ln 2022)$.

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có: $f(x) = e^x + c$, với $c = \int\limits_0^1 tf(t)dt$ là hằng số. Khi đó:

$c = \int\limits_0^1 t(e^t + c)dt = \int\limits_0^1 te^t dt + \int\limits_0^1 ctdt = I_1 + I_2$, với $I_1 = \int\limits_0^1 te^t dt$, $I_2 = \int\limits_0^1 ctdt$.

Vì $I_1 = \int\limits_0^1 te^t dt = \int\limits_0^1 td(e^t) = (te^t)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^t dt = e - (e^t)\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1$, $I_2 = \int\limits_0^1 ctdt = (\dfrac{ct^2}{2})\Big|_0^1 = \dfrac{c}{2}$

nên $c = I_1 + I_2 \Leftrightarrow c = 1 + \dfrac{c}{2} \Leftrightarrow c = 2$.

Vậy $f(x) = e^x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(\ln 2022) = e^{\ln 2022} + 2 = 2022 + 2 = 2024$.

Câu 26: Cho $\int\limits_1^2 \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}dx = \dfrac{a}{2}\ln 5 + b\ln 3 + c\ln 2$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + 2(b+c)$ là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=\ln(1+2x) \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{2}{1+2x}\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{-(2x+1)}{x} \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_1^2 \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{-(2x+1)}{x}.\ln\left(1+2x\right)\Big|_1^2+\int\limits_1^2 \dfrac{2}{x}\mathrm{d}x=-\dfrac{5}{2}\ln 5+3\ln 3+2\ln 2$.

$\Rightarrow a=-5;\ b=3;\ c=2$. Vậy $a+2(b+c)=5$.

Câu 27: Cho $\int\limits_1^e \left(2+x\ln x\right)dx=ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=c$. **B.** $a+b=-c$. **C.** $a+b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\limits_1^e \left(2+x\ln x\right)dx=\int\limits_1^e 2dx+\int\limits_1^e x\ln xdx=2x\Big|_1^e+I=2e-2+I$.

Tính I :

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}.dx \\ dv=xdx \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I=\dfrac{x^2}{2}.\ln x\Bigg|_1^e-\int\limits_1^e \dfrac{x^2}{2}.\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{e^2}{2}-\int\limits_1^e \dfrac{x}{2}dx=\dfrac{e^2}{2}-\left(\dfrac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}$

Vậy $\int\limits_1^e \left(2+x\ln x\right)dx=2e-2+\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2}{4}+2e-\dfrac{7}{4}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4};b=2;c=-\dfrac{7}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^3 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=10$ và $f\left(3\right)=6$. Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{8}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{8}{3}$. **C.** $I=\dfrac{10}{3}$. **D.** $I=24$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^3 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 x\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=xf\left(x\right)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3f\left(3\right)-\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$

Suy ra $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$.

Đặt $3x=t\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$. Ta có $I=\int\limits_0^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}.8=\dfrac{8}{3}$.

Câu 29: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và thỏa mãn $f\left(0\right)=2$ và $\int\limits_0^2 \left(2x-4\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=0$. Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=2x-4 \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_0^2 (2x-4)f'(x)\mathrm{d}x=(2x-4)f(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 2f(x)\mathrm{d}x=8-2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lại có $\int\limits_0^2 (2x-4)f'(x)\mathrm{d}x=0$. Suy ra $8-2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận:

x	0	1
t	0	2

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.4=2$.

Câu 30: Biết tích phân $I=\int\limits_1^{10}\frac{\log x}{(x+1)^2}dx=a+b\log 2+c\log 11$, trong đó a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $S=11a+2b+3c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** −9. **D.** −11.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=\log x \\ dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x\ln 10}dx \\ v=-\frac{1}{x+1} \end{cases}$

$$I=\int\limits_1^{10}\frac{\log x}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}\log x\Big|_1^{10}+\frac{1}{\ln 10}\int\limits_1^{10}\frac{dx}{x(x+1)}=-\frac{1}{11}+\frac{1}{\ln 10}\int\limits_1^{10}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{11}+\frac{1}{\ln 10}\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\Big|_1^{10}=-\frac{1}{11}+\frac{1}{\ln 10}\left(\ln 10-\ln 11+\ln 2\right)=\frac{10}{11}+\log 2-\log 11$$

Do đó suy ra $\begin{cases} a=\frac{10}{11} \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow S=11.\frac{10}{11}+2.1+3.(-1)=9$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;1]$. Biết $\int\limits_0^1 (x+2)f'(x)\mathrm{d}x=5$ và $f(0)=f(1)=7$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u = x+2$, $\mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x$, Suy ra $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ và $v = f(x)$

$$\int_0^1 (x+2) f'(x)\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow (x+2) f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$$

$$\Leftrightarrow 3f(1) - 2f(0) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 7-5 = 2$$

Câu 32: Biết $\int_2^{e+1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = a + b\mathrm{e}^{-1}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $2a^2 - 3b = 4$. **B.** $2a^2 - 3b = 8$. **C.** $2a^2 - 3b = -4$. **D.** $2a^2 - 3b = -8$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x-1} \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần, ta có

$$\int_2^{\mathrm{e}+1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x-1)}{x-1}\Bigg|_2^{\mathrm{e}+1} + \int_2^{\mathrm{e}+1} \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x-1)}{x-1}\Bigg|_2^{\mathrm{e}+1} - \frac{1}{x-1}\Bigg|_2^{\mathrm{e}+1} = -\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)$$

$$= -\frac{2}{\mathrm{e}} + 1 = 1 - 2.\mathrm{e}^{-1}.$$

Suy ra $a = 1; b = -2 \Rightarrow 2a^2 - 3b = 2.1^2 - 3.(-2) = 8$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;1]$. Biết $I = \int_0^1 (x+2) f'(x)\mathrm{d}x = 5$ và $f(0) = f(1) = 7$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

Khi đó

$$I = \left[(x+2) f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow 3f(1) - 2f(0) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5.$$

$$\Leftrightarrow 3.7 - 2.7 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$$

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x) = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = a$ và $f(1) = b$, $f(2) = c$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2c-b-a$. **B.** $2a-b-c$. **C.** $2c-b+a$. **D.** $2a-b+c$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}=f'(x)$ suy ra $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x.\mathrm{d}\left[f(x)\right]$

$=xf(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-f(1)-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2c-b-a$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=1$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3a$ và $f(1)=b+1$, $f(2)=c-1$. Tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2c-b-a-3$. **B.** $2a-b-c-3$. **C.** $2c-b-3a-3$. **D.** $2a-b+c+3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x).f'(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}=f'(x)$ suy ra $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x.\mathrm{d}\left[f(x)\right]$

$=xf(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-f(1)-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2c-b-3a-3$.

Câu 36: Biết $\int\limits_0^1 xf'(x)dx=5$ và $f(1)=-1$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)dx.$

A. $I=4$ **B.** $I=-4$ **C.** $I=6$ **D.** $I=-6$

Lời giải

Chọn B

$I=\int\limits_0^1 xf'(x)dx=5$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

$I=x.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)dx\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)dx=x.f(x)\Big|_0^1-5=-6.$

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1-f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=2$ và $f(1)=\dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2\mathrm{e}}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1-f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}} f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1-f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=2$ suy ra $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-1$.

Do đó $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}\left(f(x)\right)=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)+1=\frac{4}{3}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(4)=2023,\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tích phân $\int_0^2 xf'(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 4044.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^2 xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^4 tf'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^4 xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[xf(x)\Big|_0^4-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x\right]$

$=\frac{1}{4}\left[4.f(4)-\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{4}\left[4.2023-4\right]=2022$.

Câu 39: Biết $\int_2^5 (2x+1)\ln\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2-c$ với a,b,c là các số nguyên. Khi đó a^2+2b-c^2 bằng

A. 8. **B.** 19. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2-1\right)\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=(2x+1)\mathrm{d}x\Rightarrow v=x^2+x \end{cases}$

Khi đó $\int_2^5 (2x+1)\ln\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\left(x^2+x\right)\ln\left(x^2-1\right)\Big|_2^5-\int_2^5\left(x^2+x\right)\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$

$=30\ln 24-6\ln 3-2\int_2^5\frac{x^2}{x-1}\mathrm{d}x=90\ln 2+24\ln 3-2\int_2^5\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$

$=90\ln 2+24\ln 3-27-4\ln 2=24\ln 3+86\ln 2-27\Rightarrow a=24,\ b=86,\ c=27\Rightarrow a^2+2b-c^2=19.$

Câu 40: Cho hàm số $f\;x$ liên tục trên khoảng $0;+\infty$. Biết e^x là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ liên tục trên khoảng $0;+\infty$ và $f\;2=\frac{1}{\ln 2}$. Giá trị của $\int_1^2\frac{f\;x}{x}dx$ bằng

A. $1+e^2+e$. **B.** $1-e^2-e$. **C.** $1+e^2-e$.. **D.** $1-e^2+e$

Lời giải

Chọn D

Đặt: $\begin{cases} u=f\;x \\ dv=\dfrac{1}{x}dx \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} du=f'\;x\;dx \\ v=\ln x \end{cases}$

Ta có:

$\int_1^2\frac{f\;x}{x}dx=f\;x\;\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 f'\;x\;\ln x dx=f(2)\ln 2-e^x\Big|_1^2=\frac{1}{\ln 2}.\ln 2-\;e^2-e\;=1-e^2+e$.

Câu 41: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin xdx}{2\cos^3 x} = a.\pi + b.\sqrt{3}$ với a,b là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{2\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\tan x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = \frac{x}{2} \\ \mathrm{d}v = \frac{\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x\,\mathrm{d}(\tan x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ v = \frac{\tan^2 x}{2}. \end{cases}$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\tan x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{x}{4}.\tan^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Do đó $a = \frac{1}{3}$ và $b = -\frac{1}{4}$. Vậy giá trị của $a+b = \frac{1}{12}$.

Câu 42: Biết $\int_0^1 (2x+3)e^x\mathrm{d}x = a.e + b$ với a,b là các số nguyên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b=-1$. **B.** $ab=2$. **C.** $2a+b=5$. **D.** $a-b=-1$.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $\int_0^1 (2x+3)e^x\mathrm{d}x = a.e + b$; đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ v = e^x \end{cases}$. Khi đó:

$$\int_0^1 (2x+3)e^x\mathrm{d}x = (2x+3)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x\mathrm{d}x = 5e - 3 - 2e^x\Big|_0^1 = 3e - 1.$$

Do đó $a=3$, $b=-1$ nên $2a+b=5$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \pi$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin 3xdx = \frac{-3\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng.

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{-5}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin 3xdx$. Đặt $u = \sin 3x \Rightarrow du = 3cos3xdx$

Suy ra: $dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x)$

$I=\sin 3x.f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}3f\left(x\right)\cos 3x\mathrm{d}x=-\dfrac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}3f\left(x\right)\cos 3x\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\cos 3x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

Xét $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 4\cos 3x.f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos 3x\right)^2\mathrm{d}x=\pi-2\pi+\pi=0$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-2\cos 3x\right]^2dx=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=2\cos 3x$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 3xdx=2\dfrac{\sin 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 44: Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $\left[0;2\right]$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(x\right)f\left(2-x\right)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in\left[0;2\right]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\dfrac{\left(x^3-3x^2\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx$

A. $I=-\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{32}{5}$. **C.** $I=-\dfrac{16}{5}$. **D.** $I=-\dfrac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $\left[0;2\right]$ và $f\left(x\right)f\left(2-x\right)=e^{2x^2-4x}$ nên thay $x=0$, ta có: $f\left(0\right).f\left(2\right)=1$ mà $f\left(0\right)=1\Rightarrow f\left(2\right)=1$.

Đặt: $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\ \mathrm{d}v=\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x\\ v=\ln\left|f\left(x\right)\right|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x\\ v=\ln f\left(x\right)\end{cases}$

Suy ra: $I=\left(x^3-3x^2\right)\ln f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(x\right)\mathrm{d}x\ (1)$

Đặt $x=2-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Khi $x=0\to t=2$ và $x=2\to t=0$.

Khi đó, $J=-\int\limits_2^0\left(3t^2-6t\right)\ln f\left(2-t\right)(-\mathrm{d}t)=-\int\limits_0^2\left(3t^2-6t\right)\ln f\left(2-t\right)\mathrm{d}t$.

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(2-x\right)\mathrm{d}x\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$, ta cộng vế theo vế, ta được: $2I=-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\left[\ln f\left(x\right)+\ln f\left(2-x\right)\right]\mathrm{d}x$.

Hay $I=-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{16}{5}$

Dạng 10: Tích phân hàm ẩn và tích phân đặc biệt

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = 12$. Tính $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x$.

A. $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x = 6$. **B.** $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x = 4$. **C.** $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x = -4$. **D.** $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x = 36$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$.

$\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x = \int_0^6 f(t)\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)dx = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

Biết $f'(x).\cos x + f(x).\sin x = 1,\ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ và $f(0) = 1$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. **D.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x).\cos x + f(x).\sin x = 1, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow \frac{f'(x).\cos x + f(x).\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)' = (\tan x)' \Rightarrow \frac{f(x)}{\cos x} = \tan x + C$

mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ vậy $f(x) = \sin x + \cos x$

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Câu 3: Biết $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 5$, tích phân $\int_1^2 f(3-2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{-3}{2}$. **C.** -3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int_1^2 f(3-2x)\mathrm{d}x$

Đặt $t = 3 - 2x$, $\mathrm{d}t = -2\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_1^2 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{-1} f\left(t\right).\frac{-\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f\left(t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ta có: $\int\limits_{-1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2 - 5 = -3$

Vậy $\int\limits_1^2 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{-3}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;+\infty\right)$ và $\int\limits_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \int\limits_1^2 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

A. $I = 4.$ **B.** $I = -4.$ **C.** $I = \frac{1}{4}.$ **D.** $I = -\frac{1}{4}.$

Lời giải

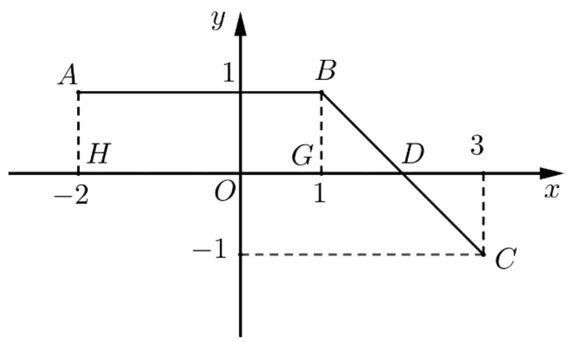
Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x + 1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

Khi đó, $\int\limits_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \int\limits_1^2 f\left(t\right).2t\mathrm{d}t = 8 \Rightarrow \int\limits_1^2 t.f\left(t\right)\mathrm{d}t = 4.$

Vậy $I = 4.$

Câu 5: Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;3\right]$.



Tích phân $\int\limits_{-2}^{3} f\left(x\right)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_{-2}^{3} f\left(x\right)dx = S_{ABGH} + S_{BGD} - S_{CDE}$

Suy ra $\int\limits_{-2}^{3} f\left(x\right)dx = 3.1 + \frac{1}{2}.1.1 - \frac{1}{2}.1.1 = 3$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^3+3x\right)=x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^4 x^2.f'\left(x\right)dx$

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{219}{8}$. **C.** $\frac{357}{4}$. **D.** $\frac{27}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x^3+3x\right)=x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f\left(4\right)=3$.

Mặt khác

$$\int_0^4 x^2.f'\left(x\right)dx=\int_0^4 x^2d\left(f\left(x\right)\right)=x^2f\left(x\right)\Big|_0^4-\int_0^4 f\left(x\right).2xdx=16f\left(4\right)-2\int_0^4 f\left(x\right).xdx=48-2\int_0^4 xf\left(x\right)dx$$

Ta tính $I=\int_0^4 xf\left(x\right)dx=\int_0^4 tf\left(t\right)dt$.

Chọn $t=x^3+3x\Rightarrow dt=\left(3x^2+3\right)dx$.

Mà $f\left(x^3+3x\right)=x^2+2$ nên $\left(3x^2+3\right)\left(x^3+3x\right)f\left(x^3+3x\right)=\left(3x^2+3\right)\left(x^3+3x\right)\left(x^2+2\right)$

Suy ra $\int_0^1\left(3x^2+3\right)\left(x^3+3x\right)f\left(x^3+3x\right)dx=\int_0^1\left(3x^2+3\right)\left(x^3+3x\right)\left(x^2+2\right)dx=\frac{165}{8}$

Hay $\int_0^4 tf\left(t\right)dt=\frac{165}{8}$ nên suy ra $\int_0^4 x^2.f'\left(x\right)dx=48-2\int_0^4 xf\left(x\right)dx=48-2I=\frac{27}{4}$.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, có đạo hàm $f'\left(x\right)$ thỏa mãn $\int_0^1\left(2x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=10$ và $f\left(0\right)=3f\left(1\right)$. Tính $I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-5$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=2$. **D.** $I=5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $u=2x+1\Leftrightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ chọn $v=f\left(x\right)$.

Ta có: $\int_0^1\left(2x+1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\left(2x+1\right)f\left(x\right)\Big|_0^1-2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$

$\Leftrightarrow 3f\left(1\right)-f\left(0\right)-2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow 0-2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-5$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn:

$2\cos x.f\left(1+4\sin x\right)-\sin 2x.f\left(3-2\cos 2x\right)=\sin 4x+4\sin 2x-4\cos x$, $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{5}f\left(x\right)dx$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\cos x.f\left(1+4\sin x\right)-\sin 2x.f\left(3-2\cos 2x\right)=\sin 4x+4\sin 2x-4\cos x$ (*)

Lấy tích phân từ 0 đến $\dfrac{\pi}{2}$ hai vế của (*) ta được:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x.f\left(1+4\sin x\right)dx-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f\left(3-2\cos 2x\right)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 4x+4\sin 2x-4\cos x\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(1+4\sin x\right)d(1+4\sin x)-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(3-2\cos 2x\right)d(3-2\cos 2x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{5}f\left(t\right)dt-\frac{1}{4}\int\limits_{1}^{5}f\left(t\right)dt=0\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{5}f\left(t\right)dt=0\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{5}f\left(x\right)dx=0$$

Vậy $I=\int\limits_{1}^{5}f\left(x\right)dx=0$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[3;7\right]$ thỏa mãn $f\left(x\right)=f\left(10-x\right)$ với mọi $x\in\left[3;7\right]$ và $\int\limits_{3}^{7}f\left(x\right)dx=4$. Tích phân $I=\int\limits_{3}^{7}xf\left(x\right)dx$ bằng

A. 80. **B.** 60. **C.** 20. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=10-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $\begin{cases}x=3\Rightarrow t=7\\x=7\Rightarrow t=3\end{cases}$

Khi đó

$$I=\int\limits_{3}^{7}xf\left(x\right)dx=\int\limits_{3}^{7}xf\left(10-x\right)dx=-\int\limits_{7}^{3}\left(10-t\right)f\left(t\right)dt=10\int\limits_{3}^{7}f\left(t\right)dt-\int\limits_{3}^{7}tf\left(t\right)dt$$

$$=10\int\limits_{3}^{7}f\left(x\right)dx-\int\limits_{3}^{7}xf\left(x\right)dx=10.4-I$$

$\Rightarrow 2I=40\Rightarrow I=20$

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f\left(-2\right)=2$; $f\left(0\right)=1$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{0}\dfrac{f'\left(x\right)-f\left(x\right)}{e^{x}}dx$.

A. $I=1-2e^{2}$. **B.** $I=1-2e^{-2}$. **C.** $I=1+2e^{2}$. **D.** $I=1+2e^{-2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I=\int_{-2}^{0}\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx=\int_{-2}^{0}\frac{f'(x).e^x-f(x).e^x}{e^{2x}}dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'dx=\left.\frac{f(x)}{e^x}\right|_{-2}^{0}=f(0)-\frac{f(-2)}{e^{-2}}$$

Do $f(-2)=2$; $f(0)=1$ nên $I=1-\frac{2}{e^{-2}}=1-2e^2$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=2, f(2)=1$ và $\int_1^2\left[xf'(x)\right]^2\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_1^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^2\frac{4}{x^2}\mathrm{d}x=-\left.\frac{4}{x}\right|_1^2=2$; $\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_1^2=-1$.

Vì $\int_1^2\left[\left(xf'(x)\right)^2+4f'(x)+\frac{4}{x^2}\right]\mathrm{d}x=0$ nên $\int_1^2\left[xf'(x)+\frac{2}{x}\right]^2\mathrm{d}x=0$.

$\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{2}{x^2}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}+C$.

Mà $f(1)=2\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}$.

Khi đó $\int_1^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 x^2.\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=2x\Big|_1^2=3.$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f(1)=1,\int_0^1 xf'(x)dx=\frac{2}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}$

Khi đó $\int_0^1 xf'(x)dx=\frac{2}{3}\Leftrightarrow xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$

Ta lại có đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$.

$$\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x^2+12\int\limits_0^1 x^2 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x$. Giá trị của $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $A=\int\limits_0^1 x^2 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x$

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$, $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=1\Rightarrow A=2\int\limits_0^1 t^5 f(t)\mathrm{d}t$

Theo giả thiết $f(x)=x^2+12\int\limits_0^1 x^2 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\Rightarrow f(x)=x^2+12A$

$\Rightarrow A=2\int\limits_0^1 t^5 f(t)\mathrm{d}t=2\int\limits_0^1 t^5(t^2+12A)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}+4A\Rightarrow A=-\frac{1}{12}$

Khi đó $f(x)=x^2-1\Rightarrow I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=I=\int\limits_0^1 (x^2-1)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\frac{2x-3}{x-2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f(3)=2$. Giá trị của biểu thức $f(0)+2f(4)$.

A. 3. **B.** 5. **C.** $-5+7\ln 2$. **D.** $7+3\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(0)+2f(4)=f(1)-\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+2\left(\int\limits_3^4 f'(x)\mathrm{d}x+f(3)\right)=7+3\ln 2$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{4}{3}$. **C.** $I=\frac{28}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$I=\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^2\left(\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^2\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^2 xf(3-x^2)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{-1}^2(x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x+2)+\int\limits_{-1}^2 xf(3-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2}+\int\limits_{-1}^2 xf(3-x^2)\mathrm{d}x=\frac{14}{3}+\int\limits_{-1}^2 xf(3-x^2)dx$

Tính $\int\limits_{-1}^{2} xf\left(3-x^2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=3-x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x$; Đổi cận: $x=-1 \Rightarrow t=2$; $x=2 \Rightarrow t=-1$

$\int\limits_{-1}^{2} xf\left(3-x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{-1} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I$

Vậy $I=\frac{14}{3}+\frac{1}{2}I \Leftrightarrow I=\frac{28}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thoã mãn $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx=2$ và $f(0)=1$. Khi đó $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx$

Đặt $u=f(x) \Rightarrow du=f'(x)dx;\ \sin 2x dx=dv \Rightarrow v=\int \sin 2x dx=-\frac{1}{2}cos2x$,

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x.\,f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos 2x dx$

$=-\frac{1}{2}\left(-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\left(2\cos^2 x-1\right)dx$

$=-\frac{1}{2}\left(-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx$

$=-\frac{1}{2}\left(-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x dx-\frac{1}{2}f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{1}{2}\left(-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)+2-\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)\right)=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3$

Câu 12: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=xe^{x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$.

A. $I=e^4-1$. **B.** $I=e^4-2$. **C.** $I=\frac{2e-1}{2}$. **D.** $I=\frac{e^4-1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)+f(2-x)=xe^{x^2}, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)dx+\int\limits_0^2 f(2-x)dx=\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx$.

Đặt $t=2-x \Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2 \\ x=2\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow \int\limits_0^2 f(2-x)dx=-\int\limits_2^0 f(t)dt=\int\limits_0^2 f(t)dt=\int\limits_0^2 f(x)dx$

$\Rightarrow 2I=2\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx \Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx \Rightarrow I=\frac{1}{4}\int\limits_0^2 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{4}e^{x^2}\Big|_0^2=\frac{e^4-1}{4}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

A. 16. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{2xf'(x)+f(x)}{2\sqrt{x}}=\frac{3x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)=\frac{3}{2}x^2$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x}.f(x)\right]'=\frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow \int\limits_1^4\left[\sqrt{x}.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left(\frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x}.f(x)\right]\Big|_1^4=\frac{63}{2} \Leftrightarrow 2f(4)-f(1)=\frac{63}{2} \Leftrightarrow f(4)=16$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{dx}=8$ và $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{dx}=4$. Tính $\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)\mathrm{dx}$

A. $\frac{11}{4}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** 6.

Chọn B

Ta có $\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)\mathrm{dx}=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\mathrm{dx}+\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\mathrm{dx}$.

Xét $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\mathrm{dx}$. Đặt $t=1-4x\Rightarrow dx=-\frac{dt}{4}$. Thế cận $\begin{array}{c|c|c} x & -1 & \frac{1}{4} \\ \hline t & 5 & 0 \end{array}$. Suy ra:

$I_1=\frac{-1}{4}\int\limits_5^0 f(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{4}\int\limits_0^5 f(t)\mathrm{dt}=1$.

Xét $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f\left(4x-1\right)\text{dx}$. Đặt $t = 4x - 1 \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{4}$. Thế cận $\begin{array}{c|c|c} x & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline t & 0 & 3 \end{array}$. Suy ra:

$I_1 = \dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{3} f\left(t\right)\text{dt} = 2$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|4x-1\right|\right)\text{dx} = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f\left(1-4x\right)\text{dx} + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f\left(4x-1\right)\text{dx} = 1 + 2 = 3$.

Câu 15: Xét hàm số $F\left(x\right) = \int\limits_{1}^{x} \dfrac{t+1}{\sqrt{1+t+t^2}}\text{d}t$. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là nhỏ nhất?

A. $F\left(1\right)$. **B.** $F\left(2021\right)$. **C.** $F\left(0\right)$. **D.** $F\left(-1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $G\left(t\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{t+1}{\sqrt{1+t+t^2}}$, ta có

$F\left(x\right) = G\left(t\right)\Big|_1^x = G\left(x\right) - G\left(1\right)$

$\Rightarrow F'\left(x\right) = G'\left(x\right) - G'\left(1\right) = G'\left(x\right) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}$;

$F'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên của hàm số $F\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$F(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $F\left(-1\right)$.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{0;-1\right\}$, thỏa mãn $x\left(x+1\right)f'\left(x\right) + f\left(x\right) = x^2 + x$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0;-1\right\}$ và $f\left(1\right) = -2\ln 2$. Biết $f\left(2\right) = a + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$, tính $P = a^2 + b^2$.

A. $P = \dfrac{3}{4}$. **B.** $P = \dfrac{9}{2}$. **C.** $P = \dfrac{13}{4}$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

Chọn B

Ta có: $x\left(x+1\right)f'\left(x\right) + f\left(x\right) = x^2 + x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}f'\left(x\right) + f\left(x\right).\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{x}{x+1}$.

$\Leftrightarrow \left[f(x).\dfrac{x}{x+1} \right]' = \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow f(x).\dfrac{x}{x+1} = \int \dfrac{x}{x+1} dx \Leftrightarrow f(x).\dfrac{x}{x+1} = \int \left(1 - \dfrac{1}{x+1}\right) dx.$

$\Leftrightarrow f(x).\dfrac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| + C.$

Mà $f(1) = -2\ln 2$ suy ra $-2\ln 2.\dfrac{1}{2} = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$

Ta có $f(2).\dfrac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 \Rightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 3.$

Vậy $P = a^2 + b^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2}.$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{3}{5};1\right]$ và thoả mãn $3f(x) + 5f\left(\dfrac{3}{5x}\right) = x^2 + 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{3}{5}}^{1} \dfrac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$

A. $I = \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{3}{5}$. **B.** $I = \dfrac{8}{25} - \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{3}{5}$. **C.** $I = \dfrac{2}{25} + \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{3}{5}$. **D.** $I = \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \dfrac{3}{5t} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{3}{5t^2}\mathrm{dt}$.

Đổi cận:

x	$\frac{3}{5}$	1
t	1	$\frac{3}{5}$

Khi đó $I = -\dfrac{3}{5}\displaystyle\int_{1}^{\frac{3}{5}} \dfrac{f\left(\dfrac{3}{5t}\right)}{\dfrac{3}{5t}} \dfrac{\mathrm{dt}}{t^2} = \int_{\frac{3}{5}}^{1} \dfrac{f\left(\dfrac{3}{5t}\right)}{t}\mathrm{dt} = \int_{\frac{3}{5}}^{1} \dfrac{f\left(\dfrac{3}{5x}\right)}{x}\mathrm{d}x$.

Suy ra $3I + 5I = 3\displaystyle\int_{\frac{3}{5}}^{1} \dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x + 5\int_{\frac{3}{5}}^{1} \dfrac{f\left(\dfrac{3}{5x}\right)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{5}}^{1} \dfrac{3f(x) + 5f\left(\dfrac{3}{5x}\right)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{5}}^{1} \dfrac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{5}}^{1} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$= \left(\dfrac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_{\frac{3}{5}}^{1} = \dfrac{8}{25} - \ln\dfrac{3}{5} \Rightarrow I = \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{3}{5}$.

Vậy $I = \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{3}{5}$.

Câu 18: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{4}{75}$. **B.** $I=-\frac{1}{15}$. **C.** $I=\frac{1}{25}$. **D.** $I=-\frac{4}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 của $2f\left(x\right)-3f\left(1-x\right)=x\sqrt{1-x}$ ta được:

$$\int_0^1\left[2f\left(x\right)-3f\left(1-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}$$

Xét $I_1=\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}\left(1-x\right)=-\int_1^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Thay vào (1) ta được $2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{4}{15}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm liên tục có tích phân trên $\left[0;2\right]$ thỏa điều kiện $f\left(x^2\right)=6x^4+\int_0^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$. Tính $I=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-32$. **B.** $I=-8$. **C.** $I=-6$. **D.** $I=-24$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x^2\right)=6x^4+\int_0^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\int_0^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=a$.

Khi đó $f\left(x^2\right)=6x^4+a\Rightarrow f\left(x\right)=6x^2+a$.

Do đó $a=\int_0^2 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\left(6x^2+a\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow a=\left.\left(\frac{3}{2}x^4+\frac{ax^2}{2}\right)\right|_0^2\Leftrightarrow a=24+2a\Leftrightarrow a=-24$.

Nên $f\left(x\right)=6x^2-24$.

Vậy $I=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(6x^2-24\right)\mathrm{d}x=\left.\left(2x^3-24x\right)\right|_0^2=-32$.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Biết $\int_0^1 f\left(x\right).x\mathrm{d}x=6$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^1\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x^2+4}-x}\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=9$. **C.** $I=3$. **D.** $I=18$.

Lời giải

Chọn C

$$I=\int_{-1}^1\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x^2+4}-x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{f\left(x\right)\left[\sqrt{x^2+4}+x\right]}{x^2+4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-1}^1\left[f\left(x\right).\sqrt{x^2+4}\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{-1}^1 f\left(x\right).x\mathrm{d}x$$

$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}\left[f(x).\sqrt{x^2+4}\right]dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}\left[f(x).\sqrt{x^2+4}\right]dx+\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}f(x).xdx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}f(x).xdx$.

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$, ta có:

$\int_{-1}^{0}\left[f(x).\sqrt{x^2+4}\right]dx=-\int_{1}^{0}\left[f(-t).\sqrt{t^2+4}\right]dt=-\int_{0}^{1}\left[f(x).\sqrt{x^2+4}\right]dx$;

$\int_{-1}^{0}f(x).xdx=-\int_{1}^{0}f(-t).(-t)dt=\int_{0}^{1}f(x).xdx$.

Suy ra: $I=-\frac{1}{4}\int_{0}^{1}\left[f(x).\sqrt{x^2+4}\right]dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}\left[f(x).\sqrt{x^2+4}\right]dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}f(x).xdx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}f(x).xdx$

$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(x).xdx=3$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[-1;1]$ và thỏa mãn $f\left(1-x^2\right)=\frac{x}{x-2}$. Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f'\left(\cos^2x\right)\sin 2xdx$.

A. $I=2$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $f\left(1-x^2\right)=\frac{x}{x-2}$ ta được

$-2xf'\left(1-x^2\right)=\frac{-2}{(x-2)^2}\Leftrightarrow f'\left(1-x^2\right)=\frac{1}{x(x-2)^2}$.

Đặt $x=\sin t$

Ta có $f'\left(1-\sin^2t\right)=\frac{1}{\sin t(\sin t-2)^2}\Leftrightarrow f'\left(\cos^2t\right)=\frac{1}{\sin t(\sin t-2)^2}$.

Khi đó: $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f'\left(\cos^2t\right)\sin 2tdt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t(\sin t-2)^2}\sin 2tdt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos t}{(\sin t-2)^2}dt$.

Đặt $u=\sin t\Rightarrow du=\cos tdt$

Đổi cận: $t=0\Rightarrow u=0$; $t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$;

$I=\int_{0}^{1}\frac{2}{(u-2)^2}du=\left.\frac{2}{2-u}\right|_{0}^{1}=1$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x)+xf\left(x^2+1\right)=x^5+2x^3+x^2+x$. Tính giá trị của $\int_{1}^{2}f(x)dx$ biết $\int_{0}^{2}f(x)dx=\frac{8}{3}$.

A. $-\dfrac{7}{3}$. **B.** $-\dfrac{7}{6}$. **C.** $\dfrac{7}{6}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế của đẳng thức đề bài cho ta được

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_0^1 xf\left(x^2+1\right)dx=\int_0^1\left(x^5+2x^3+x^2+x\right)dx$$

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$. $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=2$. Khi đó ta được

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx+\frac{1}{2}\int_1^2 f\left(t\right)dt=\left(\frac{x^6}{6}+2.\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)dx+\frac{1}{2}\int_1^2 f\left(x\right)dx=\frac{3}{2}\ (1)$$

Ta có $\displaystyle\int_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{8}{3}\Rightarrow\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_1^2 f\left(x\right)dx=\frac{8}{3}\ \left(2\right)$

Lấy $\left(2\right)$ trừ $\left(1\right)$ vế theo vế ta được $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^2 f\left(x\right)dx=\frac{7}{6}\Rightarrow\int_1^2 f\left(x\right)dx=\frac{7}{3}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;4\right]$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1$ và $\left(2x+1\right)f'\left(x\right)-f\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{2x+1}$. Tính $f\left(4\right)$.

A. 27. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Từ giải thiết: $\left(2x+1\right)f'\left(x\right)-f\left(x\right)=\left(2x+1\right)\sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2x+1}f'\left(x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}f\left(x\right)}{2x+1}=1\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{2x+1}}\right)'=1.$$

$$\Rightarrow\int_0^4\left(\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{2x+1}}\right)'\mathrm{d}x=\int_0^4 1\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{2x+1}}\Bigg|_0^4=4\Leftrightarrow\frac{f\left(4\right)}{3}-\frac{f\left(0\right)}{1}=4\Leftrightarrow f\left(4\right)=15.$$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2.f^2(x).f'(x)+1=4xf^3(x),\forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=2$. Tích phân $\displaystyle\frac{1}{2022}\int_0^{2022}f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 1011. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2.f^2(x).f'(x)+1=4xf^3(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^4.f^2(x).f'(x)-4x^3.f^3(x)=-x^2\Leftrightarrow\frac{x^4.f^2(x).f'(x)-4x^3.f^3(x)}{x^4}=-\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{f^3(x)}{x^4}\right]'=-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\frac{f^3(x)}{x^4}=\frac{1}{x}+C$$

Ta có: $\dfrac{f^3(2)}{2^4}=\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow\dfrac{2^3}{2^4}=\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra: $f^3(x)=x^3\Leftrightarrow f(x)=x$. Vậy $\dfrac{1}{2022}\int\limits_0^{2022}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2022}\int\limits_0^{2022}x\,\mathrm{d}x=1011$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ thoả $f(x)+2=\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}(x+t)f(t)\mathrm{d}t,\forall x\in[-1;1]$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\dfrac{3}{2}x\int\limits_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}t.f(t)\mathrm{d}t-2$,$(*)$. Đặt $A=\int\limits_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t$, $B=\int\limits_{-1}^{1}t.f(t)\mathrm{d}t$.

$(*)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}x.A+\dfrac{3}{2}B-2,(1)\Rightarrow xf(x)=\dfrac{3}{2}Ax^2+\dfrac{3}{2}Bx-2x,(2)$.

Lấy tích phân từ -1 đến 1 của (1) và (2) ta được

$$\begin{cases}\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(\dfrac{3}{2}x.A+\dfrac{3}{2}B-2\right)\mathrm{d}x\\ \int\limits_{-1}^{1}x.f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(\dfrac{3}{2}Ax^2+\dfrac{3}{2}Bx-2x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\left(\dfrac{3Ax^2}{4}+\dfrac{3Bx}{2}-2x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=3B-4\\ B=\left(\dfrac{Ax^3}{2}+\dfrac{3Bx^2}{4}-x^2\right)\Bigg|_{-1}^{1}=A\end{cases}\Leftrightarrow A=B=2$$

Vậy $I=A=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)=xe^x+2+\int\limits_0^1[3f(x)+f'(x)]dx$. Biết tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$). Tính $T=4a^2+2b^2-c^2$.

A. -10. **B.** -12. **C.** 15. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Đặt $m=\int\limits_0^1[f(x)+2f'(x)]\mathrm{d}x$ (với m là một hằng số chưa biết).

Ta có $f(x)=x\mathrm{e}^x+2+m$ và $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$.

Suy ra

$$m=\int\limits_0^1[3f(x)+f'(x)]dx=\int\limits_0^1\left[3\left(x\mathrm{e}^x+2+m\right)+(x+1)\mathrm{e}^x\right]dx=\int\limits_0^1\left[(4x+1)\mathrm{e}^x+6+3m\right]dx.$$

Xét tích phân $\int\limits_0^1 (4x+1)e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = 4x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 (4x+1)e^x dx = \left[(4x+1)e^x\right]\Big|_0^1 - 4\int\limits_0^1 e^x dx = 5e - 1 - 4e^x\Big|_0^1 = 5e - 2 - 4(e-1) = e+2.$$

Suy ra

$$m = \int\limits_0^1 (4x+1)e^x dx + \int\limits_0^1 (6+3m)dx = e + 2 + (6+3m)x\Big|_0^1 = e+2+6+3m = 3m+e+8 \Rightarrow m = -\frac{e}{2} - 4$$

Vậy $f(x) = xe^x + 2 - \frac{e}{2} - 4 = xe^x - \frac{e}{2} - 2$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 \left(xe^x - \frac{e}{2} - 2\right)dx = (x-1)e^x\Big|_0^2 - \left(\frac{e}{2}+2\right)x\Big|_0^2 = e^2 - e - 4.$

Do đó $a = 1;\ b = -1;\ c = -4 \Rightarrow T = 4a^2 + 2b^2 - c^2 = 4 + 2 - 16 = -10$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoã mãn $f\left(\frac{x}{2}\right) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^4 f(x)dx = 1$.

Tính tích phân $I = \int\limits_2^4 f(x)dx.$

A. $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = \frac{1}{2}$. **D.** $I = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $J = \int\limits_0^2 f(x)dx$. Đặt $x = \frac{t}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4$. Ta có

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f\left(\frac{t}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 3f(t)dt = \frac{3}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt = \frac{3}{2}.$$

Mặt khác $\int\limits_0^4 f(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dx + \int\limits_2^4 f(x)dx \Rightarrow \int\limits_2^4 f(x)dx = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Câu 28: Cho hàm đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(2-x) - xf'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 18x + 14, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)dx$ bằng

A. -4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $f(2-x) - xf'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 18x + 14, \forall x \in \mathbb{R}$:

Với $x = 0$ ta có $f(2) = 14$.

Ta có $\int\limits_0^2 \left[f(2-x) - xf'(x)\right]dx = \int\limits_0^2 \left(-4x^3 + 6x^2 - 18x + 14\right)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x - \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = -8$ (*).

Với $I = \int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t = 2-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Rightarrow -\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline t & 2 & 0 \end{array}$.

Khi đó $I = -\int_2^0 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Với $J = \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x\mathrm{d}\left(f(x)\right) = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(2) - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó (*) trở thành $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2f(2) + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -8$

$\Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -8 + 2f(2) = -8 + 2.14 = 20 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0) = -2$ và $\left(x^2+1\right)f'(x) + xf(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{4}{3}$. **B.** $I = -\frac{1}{2}$. **C.** $I = -\frac{3}{2}$. **D.** $I = -\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\left(x^2+1\right)f'(x) + xf(x) = -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2+1}.f(x)\right]' = \left(-\sqrt{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.f(x) = -\sqrt{x^2+1} + C \Leftrightarrow f(x) = -1 + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vì $f(0) = -2$ nên $-2 = -1 + \frac{C}{\sqrt{0^2+1}} \Rightarrow C = -1$. Do đó $f(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Khi đó

$I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \left[-x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{3}} = \left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3+1}\right) - (-0-1) = -\frac{5}{2}$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $x^2.f\left(x^5\right) + x.f\left(1-x^4\right) = -3x^4 + x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{28}$. **B.** $\frac{207}{560}$. **C.** $-\frac{115}{7}$. **D.** $\frac{115}{63}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2.f\left(x^5\right)+x.f\left(1-x^4\right)=-3x^4+x+3$.

Nhân cả hai vế cho x^2 ta được: $x^4.f\left(x^5\right)+x^3.f\left(1-x^4\right)=-3x^6+x^3+3x^2$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được $I_1+I_2=\dfrac{23}{28}$, với $I_1=\int\limits_0^1 x^4.f\left(x^5\right)\mathrm{d}x$ và $I_2=\int\limits_0^1 x^3.f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x$.

Tính $I_1=\int\limits_0^1 x^4.f\left(x^5\right)\mathrm{d}x$.

Đổi biến: Đặt $x^5=t\Rightarrow 5x^4\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow x^4\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{5}$.

Đổi cận: Với $x=0$ thì $t=0$; với $x=1$ thì $t=1$

Khi đó $I_1=\int\limits_0^1 x^4.f\left(x^5\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Tính $I_2=\int\limits_0^1 x^3.f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x$.

Đổi biến: Đặt $1-x^4=u\Rightarrow -4x^3\mathrm{d}x=du\Rightarrow x^3\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}u}{4}$.

Đổi cận: Với $x=0$ thì $u=1$; với $x=1$ thì $u=0$.

Khi đó $I_2=\int\limits_0^1 x^3.f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\int\limits_1^0 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $I_1+I_2=\dfrac{23}{28}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{23}{28}$

$\Leftrightarrow\dfrac{9}{20}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{23}{28}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{115}{63}$.

Câu 31: Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thoả mãn điều kiện $4xf\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2},\forall x\in\left[0;1\right]$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{16}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{20}$.

Lời giải

Chọn D

$4xf\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2},\forall x\in\left[0;1\right]$ nên

$$\int\limits_0^1 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 3f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

Mà

$$\int_0^1 4xf\left(x^2\right)dx = 2\int_0^1 f\left(x^2\right)d\left(x^2\right) = 2I$$

$$\int_0^1 3f\left(1-x\right)dx = -3\int_0^1 f\left(1-x\right)d\left(1-x\right) = 3\int_0^1 f\left(t\right)dt = 3I,\ \left(t=1-x\right)$$

Xét $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$

Khi đó, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\left(\sin t\right)^2}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

Do đó $5I = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi}{20}.$

Câu 32: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'\left(x\right) - 3f\left(x\right) = \left(2x^2+1\right)e^{x^2+3x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(2\right) = 2e^9$. Biết $f\left(1\right) = ae^b$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $a+b=5.$ **B.** $a-2b=-4.$ **C.** $a+3b=10.$ **D.** $a-b=-3.$

Lời giải

Ta có:

$$f'\left(x\right) - 3f\left(x\right) = \left(2x^2+1\right)e^{x^2+3x-1} \Leftrightarrow \frac{f'\left(x\right)-3f\left(x\right)}{e^{3x}} = \left(2x^2+1\right)e^{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f\left(x\right)}{e^{3x}}\right)' = \left(2x^2+1\right)e^{x^2-1} \Leftrightarrow \int_1^2 \left(\frac{f\left(x\right)}{e^{3x}}\right)' dx = \int_1^2 \left(2x^2+1\right)e^{x^2-1}dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f\left(x\right)}{e^{3x}}\right)\Bigg|_1^2 = \int_1^2 2x^2e^{x^2-1}dx + \int_1^2 e^{x^2-1}dx.$$

Đặt $I_1 = \int_1^2 e^{x^2-1}dx; I_2 = \int_1^2 2x^2e^{x^2-1}dx \Rightarrow \left(\frac{f\left(x\right)}{e^{3x}}\right)\Bigg|_1^2 = I_1 + I_2.$

Xét $I_1 = \int_1^2 e^{x^2-1}dx$ đặt $\begin{cases} u = e^{x^2-1} \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2xe^{x^2-1}dx \\ v = x \end{cases}.$

$$I_1 = \int_1^2 e^{x^2-1}dx = xe^{x^2-1}\Big|_1^2 - \int_1^2 2x^2e^{x^2-1}dx \Leftrightarrow I_1 = xe^{x^2-1}\Big|_1^2 - I_2 \Leftrightarrow I_1 + I_2 = xe^{x^2-1}\Big|_1^2 = 2e^3 - 1.$$

Do đó: $\left(\frac{f\left(x\right)}{e^{3x}}\right)\Bigg|_1^2 = \int_1^2 2x^2e^{x^2-1}dx + \int_1^2 e^{x^2-1}dx \Leftrightarrow \frac{f\left(2\right)}{e^6} - \frac{f\left(1\right)}{e^3} = 2e^3 - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2e^9}{e^6} - \frac{ae^b}{e^3} = 2e^3 - 1 \Leftrightarrow ae^b = e^3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}.$$ Vậy $a+3b=10.$

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn nhận giá trị dương và có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f\left(1\right)=f'\left(1\right)=2$ và $\left[f'(x)\right]^2+f\left(x\right)\left[f''(x)-\dfrac{f'(x)}{x}\right]=x\left(2x+1\right)$. Tính giá trị $f\left(2\right)$.

A. $f\left(2\right)=\dfrac{\sqrt{82}}{2}$. **B.** $f\left(2\right)=\dfrac{133}{6}$. **C.** $f\left(2\right)=\dfrac{\sqrt{123}}{4}$. **D.** $f\left(2\right)=\dfrac{\sqrt{798}}{6}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$\left[f'(x)\right]^2+f\left(x\right)\left[f''(x)-\frac{f'(x)}{x}\right]=x\left(2x+1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\left[f'(x)\right]^2+f\left(x\right).f''(x)\right).x-f\left(x\right).f'(x)}{x}=x\left(2x+1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\left[f\left(x\right).f'(x)\right]'x-f\left(x\right).f'(x)}{x^2}=2x+1\Rightarrow \frac{f\left(x\right)f'(x)}{x}=x^2+x+C.$$

Do $f\left(1\right)=f'\left(1\right)=2\Rightarrow C=2 \Rightarrow f\left(x\right).f'\left(x\right)=x^3+x^2+2x$.

Suy ra $\displaystyle\int_1^2 f\left(x\right).f'\left(x\right)dx=\int_1^2\left(x^3+x^2+2x\right)dx \Rightarrow \left.\frac{f^2\left(x\right)}{2}\right|_1^2=\frac{109}{12}$

$f^2\left(2\right)-f^2\left(1\right)=\dfrac{109}{6}\Rightarrow f^2\left(2\right)=\dfrac{133}{6}\Rightarrow f\left(2\right)=\dfrac{\sqrt{798}}{6}$ (Do $f\left(x\right)$ luôn nhận giá trị dương trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right), y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(3\right)=\dfrac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=\left(x+1\right).f\left(x\right)$. Tính $f\left(8\right)$.

A. $f\left(8\right)=\dfrac{1}{16}$. **B.** $f\left(8\right)=64$. **C.** $f\left(8\right)=49$. **D.** $f\left(8\right)=256$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left[f'(x)\right]^2=\left(x+1\right).f\left(x\right)\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f\left(x\right)}}=\sqrt{x+1}$.

Suy ra

$$\int_3^8\frac{f'(x)}{\sqrt{f\left(x\right)}}dx=\int_3^8\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{f\left(x\right)}\Big|_3^8=\frac{38}{3}\Leftrightarrow \sqrt{f\left(8\right)}-\sqrt{f\left(3\right)}=\frac{19}{3}\Leftrightarrow \sqrt{f\left(8\right)}=7\Leftrightarrow f\left(8\right)=49$$

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và thỏa mãn $f\left(x\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ với $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. Tính

$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x} dx.$

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $-\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$. Ta có: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}+2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=3$

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx+2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3xdx=\frac{9}{2}$.

Đặt $\frac{1}{x}=t \Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx=dt \Leftrightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2 \\ x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó: $2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx=2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(t)}{t}dt=2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx \Rightarrow 3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=2f(3x)$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(3)=9$ và $2F(1)-3F(9)=-9$. Khi đó $\int\limits_{1}^{9}f(x)dx$ bằng

A. 9 **B.** 1 **C.** 8 **D.** 0

Lời giải

Chọn D

Từ $f(x)=2f(3x)$ suy ra $\int f(x)dx=2\int f(3x)dx \Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}F(3x)+C$

Lần lượt thay $x=1$ và $x=3$ vào ta có $\begin{cases} F(1)=\frac{2}{3}F(3)+C \\ F(3)=\frac{2}{3}F(9)+C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(1)=\frac{2}{3}.9+C \\ 9=\frac{2}{3}F(9)+C \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta được $F(1)-9=6-\frac{2}{3}F(9)\Leftrightarrow 3F(1)+2F(9)=45$

Lại theo đề bài ta có $2F(1)-3F(9)=-9$ nên suy ra $F(1)=9$ và $F(9)=9$

Ta có $\int\limits_{1}^{9}f(x)dx=F(9)-F(1)=9-9=0$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(5)+G(5)=-2$ và $F(3)+G(3)=0$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f\left(2\sin^2 x+3\right)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $t = 2\sin^2 x + 3 \Rightarrow dt = 4\sin x.\cos x\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}dt = \sin 2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 3$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 5$.

Ta có: $I = \int_3^5 f(t).\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}F(t)\Big|_3^5 = \frac{1}{2}\left[F(5) - F(3)\right]$.

Do $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $F(x) = G(x) + C$.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} F(5) + G(5) = -2 \\ F(3) + G(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(5) + F(5) - C = -2 \\ F(3) + F(3) - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(5) = -1 + \frac{C}{2} \\ F(3) = \frac{C}{2} \end{cases}.$$

Vậy $I = \frac{1}{2}\left[F(5) - F(3)\right] = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{C}{2} - \frac{C}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $6x^2.f\left(x^3\right) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ là

A. $\frac{\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{20}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $6x^2.f\left(x^3\right) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 6x^2.f\left(x^3\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 4f(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\int_0^1 6x^2.f\left(x^3\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 4f(1-x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x^3 - 4\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)$

$= 6\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 6\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$

Vậy $\int_0^1 3\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t$

$= \frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}$.

Khi đó $6\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

Câu 39: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn hai điều kiện $\left[f\left(x\right)\right]^2+3x^2+2x-1\le 4x.f\left(x\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=12$. Giá trị $\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f^2\left(x\right)+3x^2+2x-1\le 4x.f\left(x\right)\Leftrightarrow\left[f\left(x\right)-\left(x+1\right)\right]\left[f\left(x\right)-\left(3x-1\right)\right]\le 0$.

Nếu $x\ge 1$ thì $x+1\le f\left(x\right)\le 3x-1$

$\Rightarrow\int\limits_{1}^{3}\left(x+1\right)\mathrm{d}x\le\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\int\limits_{1}^{3}\left(3x-1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 6\le\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x\le 10\ (*)$.

Nếu $x\le 1$ thì $3x-1\le f\left(x\right)\le x+1$

$\Rightarrow\int\limits_{-1}^{1}\left(3x-1\right)\mathrm{d}x\le\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\int\limits_{-1}^{1}\left(x+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow -2\le\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x\le 2\ (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $\Leftrightarrow 8\le\int\limits_{-1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x\le 12$ mà $\int\limits_{-1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=12$.

$\Rightarrow f\left(x\right)=\begin{cases}3x-1 khi\, x\ge 1\\ x+1 khi\, x\le 1\end{cases}$.

Vậy $\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$.

Câu 40: Biết $F\left(x\right)$, $G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{7}f(x)dx=F(7)-G(0)+3m\ (m>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x),y=G(x)$, $x=0$ và $x=7$. Khi $S=105$ thì m bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$.

Theo giả thiết: $\int\limits_{0}^{7}f(x)dx=F(7)-G(0)+3m\ (m>0)$

Nên $\begin{cases}F\left(7\right)-F\left(0\right)=F(7)-G(0)+3m\\ G\left(7\right)-G\left(0\right)=F(7)-G(0)+3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}G\left(0\right)-F(0)=3m\\ G\left(7\right)-F(7)=3m\end{cases}\Leftrightarrow G\left(x\right)-F\left(x\right)=3m$.

Khi đó $S=\int\limits_{0}^{7}\left|G(x)-F(x)\right|dx=\int\limits_{0}^{7}\left|3m\right|dx=\int\limits_{0}^{7}3m\,dx=21m$

Theo giả thiết : $21m=105\Leftrightarrow m=5$

Câu 41: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên R. Gọi $F\left(x\right),G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên R thỏa mãn $F\left(1\right)-3G\left(1\right)=4$ và $F\left(0\right)-3G\left(0\right)=6$. Nếu $f\left(1\right)=2$ thì $\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F\left(1\right)-3G\left(1\right)=4$ và $F\left(0\right)-3G\left(0\right)=6\Rightarrow F\left(0\right)-F\left(1\right)+3G\left(1\right)-3G\left(0\right)=2$

Tính $I=\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f\left(x\right)\end{cases}\Rightarrow I=x.f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=f\left(1\right)-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$

Vì $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)\Rightarrow I=2-F\left(x\right)\Big|_0^1=2+F\left(0\right)-F\left(1\right)$ (1)

$G\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)\Rightarrow I=2-G\left(x\right)\Big|_0^1=2+G\left(0\right)-G\left(1\right)$ (2)

Lấy $\left(1\right)-3.\left(2\right)$ ta được: $I-3I=2+F\left(0\right)-F\left(1\right)-6+3G\left(0\right)-3G\left(1\right)=-4+2=-2\Rightarrow I=1$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=5$ và $xf\left(1-x^3\right)+f'(x)=x^7-5x^4+7x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $-\dfrac{5}{6}$ **B.** $-\dfrac{13}{12}$ **C.** $\dfrac{5}{6}$ **D.** $\dfrac{17}{6}$

Lời giải

Chọn D

$xf\left(1-x^3\right)+f'(x)=x^7-5x^4+7x+3\Leftrightarrow -3x^2.f\left(1-x^3\right)-3xf'(x)=-3x^8+15x^5-21x^2-9x$.

$$\int\limits_0^1\left(-3x^2.f\left(1-x^3\right)-3xf'(x)\right)dx=\int\limits_0^1\left(-3x^8+15x^5-21x^2-9x\right)dx$$

$$\int\limits_0^1 -3x^2.f\left(1-x^3\right)dx-3\int\limits_0^1 xf'(x)dx=-\frac{28}{3}$$

Xét $A=\int\limits_0^1 -3x^2.f\left(1-x^3\right)dx=\int\limits_1^0 f\left(t\right)dt=-\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$

$B=\int\limits_0^1 xf'(x)dx=x.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)dx=5-\int\limits_0^1 f(x)dx$.

Vậy $\int\limits_0^1 -3x^2.f\left(1-x^3\right)dx-3\int\limits_0^1 xf'(x)dx=-\int\limits_0^1 f(x)dx-15+3\int\limits_0^1 f(x)dx=-\dfrac{28}{3}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{17}{6}$

Câu 43: Cho số phức $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)-x$, $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+x$ trên tập hợp $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=5$ và $F(1)+G(1)=-1$. Giá trị của $\int_0^1 f(3x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\begin{cases} F(4)+G(4)=5 \\ F(1)+G(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow F(4)-F(1)+G(4)-G(1)=6$

$\Leftrightarrow \int_1^4 [f(x)-x]\mathrm{d}x+\int_1^4 [f(x)+x]\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^4 x\mathrm{d}x+\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^4 x\mathrm{d}x=6$.

$\Leftrightarrow 2\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=6 \Rightarrow \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=3$

Xét $I=\int_0^1 f(3x+1)\mathrm{d}x$, đặt $t=3x+1 \Rightarrow dt=3dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{3}; x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=4$.

Suy ra $I=\frac{1}{3}\int_1^4 f(t)\mathrm{dt}=1$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6)+G(6)=6$ và $F(0)+G(0)=2$. Khi đó $\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = 3x$. Khi đó $I=\int_0^2 f(3x)\mathrm{d}x=\int_0^6 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{3}=\frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[F(6)-F(0)\right]$

Ta có: $G(x) = F(x) + C$.

Theo đề: $\begin{cases} F(6)+G(6)=6 \\ F(0)+G(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(6)+C=6 \\ 2F(0)+C=2 \end{cases} \Rightarrow F(6)-F(0)=2$.

Vậy, $I=\frac{2}{3}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2)+2023.G(0)=5$ và $F(0)+2023G(2)=2$. Khi đó $\int_3^5 f(5-x)dx$ bằng

A. 2023. **B.** $-\dfrac{3}{2022}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3}{2022}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$\int\limits_0^2 f(x)dx = F(x)\Big|_0^2 = F(2)-F(0)$ và $\int\limits_0^2 f(x)dx = G(x)\Big|_0^2 = G(2)-G(0)$

$\Rightarrow F(2)-F(0)=G(2)-G(0)$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} F(2)+2023.G(0)=5 \\ F(0)+2023G(2)=2 \end{cases}$

Lấy vế trừ vế ta được: $\left[F(2)-F(0)\right]-2023\left[G(2)-G(0)\right]=3 \Leftrightarrow F(2)-F(0)=-\dfrac{3}{2022}$

Xét $I=\int\limits_3^5 f(5-x)dx$. Đặt $t=5-x \Rightarrow dt=-dx$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^2 f(t)dt=\int\limits_0^2 f(x)dx=F(2)-F(0)=-\dfrac{3}{2022}$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=4$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

B. 3. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$\begin{cases} F(4)+G(4)=4 \\ F(0)+G(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(4)+C=4 \\ 2F(0)+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow F(4)-F(0)=\dfrac{3}{2}.$

Vậy $\int\limits_0^2 f(2x)dx=\int\limits_0^4 f(x)dx=F(4)-F(0)=\dfrac{3}{2}.$

Câu 47: Cho hàm số bậc nhất $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)dx=4;\ \int\limits_2^3 f(x)dx=2.$ Tính $I=\int\limits_0^1 f\left(f(2x-5)\right)dx$

A. 6. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** -4. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số bậc nhất $f(x)=ax+b$

$4=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1 (ax+b)dx=\left(\dfrac{ax^2}{2}+bx\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{a}{2}+b \Rightarrow \dfrac{a}{2}+b=4 \qquad (1)$

$$2=\int_2^3 (ax+b)dx=\left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)\Bigg|_2^3=\frac{9a}{2}+3b-\frac{4a}{2}-2b=\frac{5a}{2}+b\ \Rightarrow \frac{5a}{2}+b=2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases}\frac{a}{2}+b=4\\ \frac{5a}{2}+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=\frac{9}{2}\end{cases} \Rightarrow f(x)=-x+\frac{9}{2}.$

$f(2x-5)=-2x+5+\frac{9}{2}.$

$f(f(2x-5))=2x-5-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}=2x-5$

$I=\int_0^1 f(f(2x-5))dx=\int_0^1(2x-5)dx=-4..$

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;\pi)$ thỏa mãn $f'(x)=f(x).\cot x+2x.\sin x$.

Biết $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\frac{\pi^2}{36}$. **B.** $\frac{\pi^2}{72}$. **C.** $\frac{\pi^2}{54}$. **D.** $\frac{\pi^2}{80}$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=f(x).\cot x+2x.\sin x \Leftrightarrow \sin x.f'(x)-f(x).\cos x+2x.\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x.f'(x)-f(x).\cos x=2x.\sin^2 x \Leftrightarrow \frac{\sin x.f'(x)-f(x).\cos x}{\sin^2 x}=2x$

$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x.f'(x)-f(x).\cos x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2x.dx \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)'dx=x^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sin x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1}-\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{72}$

Câu 49: Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. $2(4\ln 2-\ln 5)^2$. **B.** $\frac{1}{2}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **C.** $4(4\ln 2-\ln 5)^2$. **D.** $\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2$.

Lời giải

Chọn D

Xét $x\in[0;3]$. Ta có

$$(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=\ln(x+1)-\ln(x+2)+C\Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=\ln\frac{x+1}{x+2}+C.$$

Thay

$$x=0:2\sqrt{f(0)}=\ln\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2}=-\ln 2+C\Leftrightarrow C=2\ln 2\Rightarrow 2\sqrt{f(x)}=\ln\frac{x+1}{x+2}+2\ln 2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{x+1}{x+2}+2\ln 2\right)^2\Rightarrow f(3)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{4}{5}+2\ln 2\right)^2=\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2.$$

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm xác định trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $x\left[f'(x)+x\right]=(x+1)f(x)$; $f(1)=\mathrm{e}+1$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$; trong đó a; b là những số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó giá trị của $(2a+b)$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chon B

$x\left[f'(x)+x\right]=(x+1)f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-xf(x)-f(x)=-x^2$.

Với $x=0$ ta có: $f(0)=0$.

Với $x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho x^2 ta được

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\frac{f(x)}{x}=-1\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'-\frac{f(x)}{x}=-1\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'.\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}.\frac{f(x)}{x}=-\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}.\mathrm{e}^{-x}\right)'=\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}.\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}+C.$$

Thay $x=1$ ta được $f(1).\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}+C\Leftrightarrow C=(\mathrm{e}+1)\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}\Leftrightarrow C=1$.

Suy ra $\frac{f(x)}{x}.\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}+1\Leftrightarrow f(x)=x+x\mathrm{e}^{x}$.

Ta có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x+x\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+(x-1)\mathrm{e}^x\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$.

Vậy $a=3$; $b=2$ và $2a+b=8$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(x)+xf'(x)=3x+10,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=6$ Biết $\int\limits_{-1}^{4}\frac{\ln\left(2+\sqrt{f(x)}\right)}{f^2(x)-6f(x)+9}dx=a\ln 5+b\ln 6+\sqrt{c}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

$2f(x)+xf'(x)=3x+10\Rightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=3x^2+10x$

$\Rightarrow \left(x^2f(x)\right)'=3x^2+10x\Rightarrow x^2f(x)=x^3+5x^2+C$

Vì $f(1)=6\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x+5$ (thỏa mãn giả thiết)$\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{4}\frac{\ln\left(2+\sqrt{x+5}\right)}{(x+2)^2}dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2+\sqrt{x+5}\right)\\ dv=\dfrac{1}{(x+2)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{2+\sqrt{x+5}}.\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}dx\\ v=\dfrac{-1}{x+2}+1=\dfrac{x+1}{x+2}\end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{x+1}{x+2}\ln\left(2+\sqrt{x+5}\right)\Bigg|_{-1}^{4}-\int\limits_{-1}^{4}\frac{x+1}{x+2}.\frac{1}{2\sqrt{x+5}\left(2+\sqrt{x+5}\right)}dx$

$=\frac{5}{6}\ln5-\int\limits_{-1}^{4}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+2}.\frac{1}{2\sqrt{x+5}}dx=\frac{5}{6}\ln5-\int\limits_{-1}^{4}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+2}.\left(\sqrt{x+5}\right)'dx=\frac{5}{6}\ln5-\int\limits_{2}^{3}\frac{t-2}{t^2-3}dt$

$=\frac{5}{6}\ln5-\frac{1}{2}\ln\left|t^2-3\right|\Big|_2^3+\frac{2}{2\sqrt3}\ln\left|\frac{t-\sqrt3}{t+\sqrt3}\right|\Bigg|_2^3=\frac{5}{6}\ln5-\frac{1}{2}\ln6+\frac{1}{\sqrt3}\ln\left(\sqrt3+2\right).$

$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{6}\\ b=-\dfrac{1}{2}\\ c=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=\frac{2}{3}.$

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $e^{3x}\left(4f(x)+f'(x)\right)=2\sqrt{f(x)}, f(x)>0\ \forall x\ge0$ và $f(0)=1$. Tính $\int\limits_0^{\ln2}f(x)dx$

A. $\frac{201}{640}$. **B.** $\frac{11}{24}$. **C.** $\frac{209}{640}$. **D.** $-\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $e^{3x}\left(4f(x)+f'(x)\right)=2\sqrt{f(x)}$ $e^{3x}\left(4f(x)+f'(x)\right)=2\sqrt{f(x)}$

$\Leftrightarrow e^{3x}\left(4\frac{f(x)}{2\sqrt{f(x)}}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\right)=1\Leftrightarrow e^{3x}\left(2\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\right)=1\Leftrightarrow 2e^{2x}\sqrt{f(x)}+\frac{e^{2x}.f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=e^{-x}$

$\Leftrightarrow\left(e^{2x}\sqrt{f(x)}\right)'=e^{-x}\Leftrightarrow e^{2x}\sqrt{f(x)}=\int e^{-x}dx\Leftrightarrow e^{2x}\sqrt{f(x)}=-e^{-x}+C$

Vì $f(0)=1$ nên $\Leftrightarrow e^0\sqrt{f(0)}=-e^0+C\Leftrightarrow C=2$

Suy ra $\sqrt{f(x)}=-e^{-3x}+2e^{-2x}\Leftrightarrow f(x)=\left(-e^{-3x}+2e^{-2x}\right)^2$

$\int\limits_0^{\ln2}f(x)dx=\int\limits_0^{\ln2}\left(-e^{-3x}+2e^{-2x}\right)^2dx=\frac{209}{640}.$

Câu 53: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\begin{cases} e^{3x}\left(4f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right)=2\sqrt{f\left(x\right)} \\ f\left(x\right)>0 \end{cases}$, $\forall x\ge 0$ và $f\left(0\right)=1$. Tính $I=\int\limits_{0}^{\ln 2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{11}{24}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{12}$. **C.** $I=\dfrac{209}{640}$. **D.** $I=\dfrac{201}{640}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $e^{3x}\left(4f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right)=2\sqrt{f\left(x\right)}\Leftrightarrow 2e^{2x}\sqrt{f\left(x\right)}+e^{2x}\dfrac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}=\dfrac{1}{e^{x}}\Leftrightarrow\left(e^{2x}\sqrt{f\left(x\right)}\right)'=\dfrac{1}{e^{x}}$

Do đó $e^{2x}\sqrt{f\left(x\right)}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{1}{e^{x}}$, tức $e^{2x}\sqrt{f\left(x\right)}=-\dfrac{1}{e^{x}}+C$

Thay $x=0$ vào ta được $C=2$. Tìm được $f\left(x\right)=\left(\dfrac{2}{e^{2x}}-\dfrac{1}{e^{3x}}\right)^{2}$

$$I=\int\limits_{0}^{\ln 2} f\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{\ln 2}\left(\dfrac{2}{e^{2x}}-\dfrac{1}{e^{3x}}\right)^{2}dx=\int\limits_{0}^{\ln 2}\left(\dfrac{4}{e^{4x}}-\dfrac{4}{e^{5x}}+\dfrac{1}{e^{6x}}\right)dx=\dfrac{209}{640}.$$

Câu 54: Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có các hệ số nguyên. Biết $5f\left(x\right)-\left(f'\left(x\right)\right)^{2}=x^{2}+x+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)dx$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c\Rightarrow f'\left(x\right)=2ax+b$

Thay vào $5f\left(x\right)-\left(f'\left(x\right)\right)^{2}=x^{2}+x+4,\forall x\in\mathbb{R}$ ta được

$$5\left(ax^{2}+bx+c\right)-\left(2ax+b\right)^{2}=x^{2}+x+4\Leftrightarrow\left(5a-4a^{2}\right)x^{2}+\left(5b-4ab\right)x+5c-b^{2}=x^{2}+x+4$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 5a-4a^{2}=1 \\ 5b-4ab=1 \\ 5c-b^{2}=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \\ \left(5-4a\right)b=1 \\ 5c=b^{2}+4 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=\dfrac{1}{4} \\ c=\dfrac{13}{16} \end{cases} \end{array}\right.$$

Giả thiết suy ra $a=b=c=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^{2}+x+1$ và $\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^{2}+x+1\right)dx=\dfrac{11}{6}$.

Câu 55: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^3 x+\cos^3 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\frac{\pi}{a}+\frac{b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $2a+b-c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$. Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(t\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(t\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx$.

Theo giả thiết,

$$f\left(x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^3 x+\cos^3 x+1\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x+1\right)dx$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x+1\right)dx\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x+1\right)dx\right] \text{(1)}$$

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\sin^2 xdx=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)=\left.\left(\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$. (2).

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\cos^2 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)=\left.\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3} \text{ (3).}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\left.x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}. \text{ (4).}$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}$.

Suy ra $a=4,b=2,c=3$. Khi đó $2a+b-c=7$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 5$ và $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{10}{9}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** $-\frac{10}{9}$. **D.** $-\frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết, ta có $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Ta có $\frac{1}{2} = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2} f(x)\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 0 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\int_0^1 \frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = -1.$

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 5$

$\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = 10(-1) \Leftrightarrow \int_0^1 2(5x^2).f'(x)\mathrm{d}x = -10.$

$\int_0^1 (-5x^2)^2 \mathrm{d}x = 5$

Từ đó, ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 2(5x^2).f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (5x^2)^2 \mathrm{d}x = 5 - 10 + 5.$

$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 5x^2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -5x^2 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + C$

Mà $f(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{5}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{5}{3}$

Khi đó: $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}$. Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(-\frac{5x^3}{9} + \frac{5x}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{10}{9}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{14}{3}$. **B.** $I = -\frac{32}{5}$. **C.** $I = -\frac{16}{3}$. **D.** $I = -\frac{16}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, cho $x=2$, ta có $f(2)=1$.

Ta có $I=\int\limits_0^2\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\dv=\frac{f'(x)}{f(x)}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(3x^2-6x)dx\\v=\ln f(x)\end{cases}$.

Khi đó, ta có

$$I=(x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\ln f(x)dx=-3\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln f(x)dx=-3J.$$

$$J=\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln f(x)dx\overset{x=2-t}{=}\int\limits_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln f(2-t)d(2-t)$$

Suy ra

$$2J=\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)dx+\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(2-x)dx=\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)f(2-x)dx$$

$$=\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln e^{2x^2-4x}dx=\int\limits_0^2(x^2-2x)(2x^2-4x)dx=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}.$$

Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f'(x)+f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giả sử $f(2)=a$, $f(-3)=b$. Tính $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=b-a$. **B.** $T=a+b$. **C.** $T=-a-b$. **D.** $T=a-b$.

Lời giải

Chọn A

Với $\forall x\in\mathbb{R}$, thay x bởi $-x$ vào biểu thức $2f'(x)+f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (1), ta được

$$2f'(-x)+f'(x)=\frac{2|-x|}{(-x)^6+(-x)^2+1}\text{ hay }2f'(-x)+f'(x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}\ (2).$$

Nhân hai vế của (1) với 2 sau đó trừ theo vế cho (2), ta được $f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Xét tích phân $I=\int\limits_{-3}^2 f'(x)dx=\int\limits_{-3}^2\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}dx$. Đặt $u=-x\Rightarrow du=-dx$.

Đổi cận: $x=-3\Rightarrow u=3$ và $x=2\Rightarrow u=-2$.

Khi đó

$$I=\int\limits_3^{-2}\frac{2}{3}.\frac{|-u|}{(-u)^6+(-u)^2+1}(-du)=\int\limits_{-2}^3\frac{2}{3}.\frac{|u|}{u^6+u^2+1}du=\int\limits_{-2}^3\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}dx=\int\limits_{-2}^3 f'(x)dx.$$

Vì $I=\int\limits_{-3}^2 f'(x)dx=f(2)-f(-3)$ và $I=\int\limits_{-2}^3 f'(x)dx=f(3)-f(-2)$.

Do đó: $f(2)-f(-3)=f(3)-f(-2)\Leftrightarrow f(-2)-f(3)=f(-3)-f(2)=b-a$.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thoả mãn đẳng thức sau $4xf\left(x^2\right)+2f(2x+1)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -1. **C.** 27. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4xf\left(x^2\right)+2f(2x+1)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.(*)$

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^0 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^0 2f(2x+1)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(4x^5+8x^3+10x^2+30x+12\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^0 xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^0 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)+\int\limits_{-1}^0 f(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=\frac{-7}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^0+\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_1^0 f(t)\mathrm{d}t+\int\limits_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u=\frac{-7}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^0+\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_1^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{-7}{3}-f(-1)+\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(-1)=-\frac{7}{3}+\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Ta có: $4xf\left(x^2\right)+2f(2x+1)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^1 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^1 2f(2x+1)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1\left(4x^5+8x^3+10x^2+30x+12\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^1 xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^1 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)+\int\limits_{-1}^1 f(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=\frac{92}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^1+\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_1^1 f(v)\mathrm{d}v+\int\limits_{-1}^3 f(h)\mathrm{d}h=\frac{92}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^1+\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{92}{3}-f(1)-f(-1)+\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{92}{3}-f(1)-f(-1) \qquad (2)$$

Từ $(1),(2)$ ta có được $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{92}{3}-f(1)+\frac{7}{3}-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=33-f(1)=27$.

Thay $x=0$ vào $(*)$ ta có được $f(1)=6\Rightarrow\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=27$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Đặt $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$, biết $g(0)=2,\ g(1)=6$, tính tích phân $\int\limits_0^1\frac{6x-f(x)}{e^x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b,\ f''(x)=6x+2a,\ f'''(x)=6$.

Do $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)\ (1) \Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $g(x)=f(x)+g'(x)-f'''(x)$

$\Rightarrow 6x-f(x)=g'(x)-6-g(x)+6x$.

$$\Rightarrow \frac{6x-f(x)}{e^x}=\frac{g'(x)-6-(g(x)-6x)}{e^x}$$

$$\Rightarrow \frac{6x-f(x)}{e^x}=\frac{(g'(x)-6)e^x-(g(x)-6x)e^x}{e^{2x}}=\left(\frac{g(x)-6x}{e^x}\right)'$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{6x-f(x)}{e^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{g(x)-6x}{e^x}\right)'\mathrm{d}x=\left.\frac{g(x)-6x}{e^x}\right|_0^1=\frac{g(1)-6}{e^1}-\frac{g(0)-0}{e^0}=-2$$

Câu 61: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int_1^2\left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{247}{15}.$$

Giả sử rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[1;8]$. Tích phân $\int_1^8 x\cdot F'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{257\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{257\ln 2}{4}$. **C.** 160. **D.** $\frac{639}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $I=\int_1^2\left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x=\int_1^2\left[f(x^3)+1\right]^2\mathrm{d}x-\int_1^2\mathrm{d}x=\int_1^2\left[f(x^3)+1\right]^2\mathrm{d}x-1$.

Đặt $t=x^3\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{3\sqrt[3]{t^2}}$.

Với $x=1\Rightarrow t=1$;

$x=2\Rightarrow t=8$.

Ta có $I=\frac{1}{3}\int_1^8\frac{\left[f(t)+1\right]^2}{\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t-1=\frac{1}{3}\int_1^8\left[\frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}}\right]^2\mathrm{d}x-1$.

Do đó $\int_1^2\left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{247}{15}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_1^8\left[\frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}}\right]^2\mathrm{d}x-1-\frac{4}{3}\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{-247}{15}\Leftrightarrow \int_1^8\left[\frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}}\right]^2\mathrm{d}x-3-4\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x=\frac{-247}{5}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^8\left[\left(\frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2-4f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{-232}{5}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^8 \left[\left(\frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 - 2 \cdot \frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}} \cdot 2\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x^2} \right] dx + \int_1^8 \left[-4\sqrt[3]{x^2} + 4 \right] dx = \frac{-232}{5}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^8 \left[\frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x} \right]^2 dx = 0 \text{, do } \int_1^8 \left[-4\sqrt[3]{x^2} + 4 \right] dx = \frac{-232}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 1 = F'(x).$$

Suy ra $\int_1^8 x \cdot F'(x) dx = \int_1^8 x\left[2\sqrt[3]{x^2} - 1 \right] dx = 2\int_1^8 x^{\frac{5}{3}} dx - \int_1^8 x dx = \frac{639}{4}$.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3 \right]$ thỏa mãn $f(x) + x.f\left(\frac{1}{x} \right) = x^3 - x$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx$ bằng

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x) + xf\left(\frac{1}{x} \right) = x^3 - x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2 + x} + \frac{f\left(\frac{1}{x} \right)}{x+1} = x - 1$ với $x \in \left[\frac{1}{3}; 3 \right]$.

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f\left(\frac{1}{x} \right)}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{3}}^{3} (x-1) dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{1}{x^2} \frac{f\left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx - \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f\left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} \right)^2} d\left(\frac{1}{x} \right) = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx - \int_{3}^{\frac{1}{3}} \frac{f(t)}{t + t^2} dt = \frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2 + x} dx = \frac{8}{9}.$$

Câu 63: Cho hàm số f xác định, đơn điệu giảm, có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3\left[f(x) \right]^2 = \int_0^x \left[8\left(f(t) \right)^3 + \left(f'(t) \right)^3 \right] dt + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^{12} \left(12 + f(x) \right) dx$ nhận giá trị trong khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(10;11)$. **B.** $(11;12)$. **C.** $(12;13)$. **D.** $(13;14)$.

Lời giải

Chọn B

Lấy đạo hàm 2 vế của phương trình giả thiết ta có:

$6f(x).f'(x)=8(f(x))^3+(f'(x))^3+1$

$\Leftrightarrow [f'(x)+2f(x)+1]\left[(f'(x))^2-(2f(x)+1).f'(x)+\left(4.(f(x))^2-2f(x)+1\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow [f'(x)+2f(x)+1]\left[(f'(x)-(f(x)))^2+(f(x)-1)^2+2(f(x))^2-f'(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow f'(x)+2f(x)+1=0,(do \quad f'(x)<0)\Leftrightarrow e^{2x}.f'(x)+2e^{2x}.f(x)=-e^{2x}$

$\Leftrightarrow \left[e^{2x}.f(x)\right]'=-e^{2x}\Rightarrow e^{2x}.f(x)=-\int e^{2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}e^{2x}+C$

Thay $x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2e^{2x}}-\frac{1}{2}$.

Suy ra $\int\limits_0^{12}(12+f(x))\mathrm{d}x=\int\limits_0^{12}\left(12+\frac{1}{2e^{2x}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=11.716\in(11;12)$.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1;\ f(3x)-x^2f\left(x^3\right)=4x^3+2x+1,\ (\forall x\in\mathbb{R})$. Khi đó $\int\limits_1^3 xf'(x)dx$ bằng:

A. 14 **B.** -1 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(1)=1;\ f(3)=8.$

Lấy tích phân hai về trên đoạn $[0;1]$ ta được

$\int\limits_0^1\left(f(3x)-x^2f\left(x^3\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(4x^3+2x+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=3$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}(3x)-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)=3\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=9\Leftrightarrow\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=9$

Do đó $\int\limits_1^3 xf'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 x\mathrm{d}(f(x))=(xf(x))\Big|_1^3-\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3f(3)-1f(1)-9=3.8-1-9=14$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $\left(x^2+1\right)f'(x)+xf(x)=-x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)=\frac{1}{1+f(x)}$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x=3$. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. 14π. **B.** 15π. **C.** 12π. **D.** 13π.

Lời giải

Chọn C.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$$\left(x^2+1\right)f'(x)+xf(x)=-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.f'(x)+\frac{2xf(x)}{2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

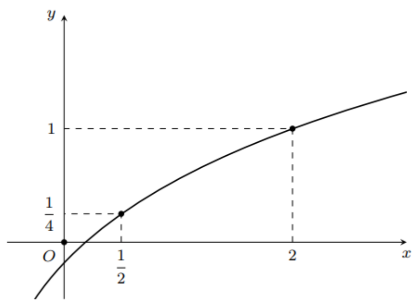
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}.f(x)\right)'=\left(-\sqrt{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.f(x)=-\sqrt{x^2+1}+C$$

Vì $f(0)=-2$ nên $-2=-1+C \Leftrightarrow C=-1$. Vậy $f(x)=-1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Khi đó: $g(x)=\dfrac{1}{1+f(x)}=-\sqrt{x^2+1}$

Thể tích $V=\pi\displaystyle\int_0^3\left(-\sqrt{x^2+1}\right)^2\mathrm{d}x=12\pi$.

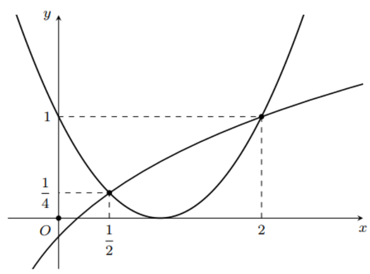
Câu 66: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$, có đồ thị như hình vẽ đồng thời thỏa mãn $f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{5}{18}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right),\forall x>0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)-(x-1)^2}{x}$ và $y=0$ bằng



A. $\dfrac{37}{24}-\dfrac{17}{9}\ln 2$.
B. $\dfrac{37}{24}-\dfrac{11}{9}\ln 2$.
C. $\dfrac{37}{24}-\dfrac{13}{9}\ln 2$.
D. $\dfrac{31}{24}-\dfrac{13}{9}\ln 2$.

Lời giải

Chọn C



Xét phương trình $y=\dfrac{f(x)-(x-1)^2}{x}=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2. \end{array}\right.$

Khi đó $S=\left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)-(x-1)^2}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|=|A-B|$.

Tính $B=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=-\frac{9}{8}+2\ln 2$.

Tính $A=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)\mathrm{d}(\ln x)=f(x)\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\ln 2-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f'(x)\ln x\mathrm{d}x$.

Xét phương trình

$f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{18}\left(1-\frac{1}{x^2}\right),\forall x>0\Leftrightarrow f'(x)\ln x-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\ln x=\frac{5}{18}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x$.

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f'(x)\ln x\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\ln x\mathrm{d}x=\frac{5}{18}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, ta có $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\ln x\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}f'(t)\ln\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f'(t)\ln t\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f'(x)\ln x\mathrm{d}x$.

Lại có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\ln x\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=5\ln 2-3$.

Suy ra $2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\frac{5}{18}(5\ln 2-3)\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\frac{25}{36}\ln 2-\frac{5}{12}$.

Do đó $A=\frac{5}{4}\ln 2-\left(\frac{25}{36}\ln 2-\frac{5}{12}\right)=\frac{5}{9}\ln 2+\frac{5}{12}$.

Vậy $S=|A-B|=\left|\frac{5}{9}\ln 2+\frac{5}{12}+\frac{9}{8}-2\ln 2\right|=\frac{37}{24}-\frac{13}{9}\ln 2$.

Câu 67: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=\frac{2x}{e^{x^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(-2)$.

A. $f(-2)=\frac{-2}{e^4}$. **B.** $f(-2)=\frac{2}{e^4}$. **C.** $f(-2)=2$. **D.** $f(-2)=e^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)+xf(x)=\frac{2x}{e^{x^2}}\Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)+e^{\frac{x^2}{2}}xf(x)=\frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\Leftrightarrow\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'=\frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{0}\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\Big|_{-2}^{0}=2\int_{-2}^{0}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)}{e^{\frac{x^2}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{-2}{e^{\frac{x^2}{2}}}\Bigg|_{-2}^{0}$$

$$\Leftrightarrow f(0)-e^2f(-2)=-2\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\Leftrightarrow -e^2f(-2)=\frac{2}{e^2}\Leftrightarrow f(-2)=\frac{-2}{e^4}.$$

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3F(3)+G(3)=23$ và $3F(1)+G(1)=-1$. Khi đó $\int_0^1 x\left[3-f\left(2x^2+1\right)\right]dx$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int_0^1 x\left[3-f\left(2x^2+1\right)\right]dx=\int_0^1 3xdx-\int_0^1 xf\left(2x^2+1\right)dx=\frac{3}{2}-\int_0^1 xf\left(2x^2+1\right)dx=\frac{3}{2}-I$

Đặt $t=2x^2+1\Rightarrow dt=4xdx$ nên $I=\int_1^3 f(t).\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int_1^3 f(t)dt$

Vì $F(x);G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$\int_1^3 f(x)dx=F(x)\Big|_1^3=F(3)-F(1)$ và $\int_1^3 f(x)dx=G(x)\Big|_1^3=G(3)-G(1)$

$\Rightarrow F(3)-F(1)=G(3)-G(1)$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}3F(3)+G(3)=23\\3F(1)+G(1)=-1\end{cases}$

Lấy vế trừ vế ta được:

$3\left[F(3)-F(1)\right]+\left[G(3)-G(1)\right]=24\Leftrightarrow 4\left(F(3)-F(1)\right)=24\Leftrightarrow F(3)-F(1)=6$

$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int_1^3 f(t)dt=\frac{1}{4}\int_1^3 f(x)dx=\frac{1}{4}\left(F(3)-F(1)\right)=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1 x\left[3-f\left(2x^2+1\right)\right]dx=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$

Dạng 11: Tính tích phân bằng phương pháp vi phân

A. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Nếu $\int\limits_3^5 2f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}\left(2x+1\right)=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$.

Câu 2: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{45}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}+\frac{9}{20}$. **D.** $I=\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos^5 x}=\left.\frac{1}{4\cos^4 x}\right|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\left(2^4-1\right)=\frac{15}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thõa mãn $f\left(0\right)=4$ và $f'\left(x\right)=x+\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6\mathrm{e}+13}{6}$. **B.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{6}$. **C.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{3}$. **D.** $\frac{6\mathrm{e}+19}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^x+x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$.

Nếu: $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$ và $f\left(0\right)=4$ thì: $1+C=4\Leftrightarrow C=3$.

Vậy: $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+3\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{6}x^3+3x\right)\right|_0^1=\mathrm{e}+\frac{13}{6}=\frac{6\mathrm{e}+13}{6}$.

Câu 4: Tích phân $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = \int\limits_{e}^{e^2} \ln x \, \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big|_{e}^{e^2} = \frac{3}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) - f(x) = e^{-x}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2e} + e - 2$. **B.** $\frac{1}{2e} + e - \frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{e} + e - \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2e} + e - 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) - f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow \left(e^{-x} f(x)\right)' = e^{-2x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\int \left(e^{-x} f(x)\right)' \mathrm{d}x = \int e^{-2x} \mathrm{d}x \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = \frac{-1}{2} e^{-2x} + C$.

Với $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow e^0 f(0) = \frac{-1}{2} e^0 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 1$ nên $f(x) = \frac{-1}{2} e^{-x} + \frac{1}{e^{-x}}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{-1}{2} e^{-x} + \frac{1}{e^{-x}}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} e^{-x} + e^x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{2e} + e\right) - \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2e} + e - \frac{3}{2}$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1,\ f'(x)-x.f(x)=x.e^{x^2},\forall x$. Tích phân $\int_0^1 xf\left(\sqrt{x+1}\right)dx$ bằng

A. e^2-e. **B.** $4\sqrt{e}-2e$. **C.** 1. **D.** e.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)-xf(x)=xe^{x^2},\forall x \Leftrightarrow f'(x)e^{-x^2/2}-f(x)xe^{-x^2/2}=xe^{x^2/2},\forall x$

$\Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x^2/2}\right)'=xe^{x^2/2},\forall x \Leftrightarrow f(x)e^{-x^2/2}=\int xe^{x^2/2}\mathrm{d}x,\forall x$

$\Leftrightarrow f(x)e^{-x^2/2}=e^{x^2/2}+C,\forall x \Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}+Ce^{x^2/2},\forall x$

Vì $f(0)=1$ nên ta có $C=0$. Do đó, $f(x)=e^{x^2},\forall x.$

Vì thế $\int_0^1 xf(\sqrt{x+1})\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}\left(e^{x+1}\right)=xe^{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{x+1}\mathrm{d}x=e.$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=-e.$ **B.** $f(1)=\frac{1}{e}.$ **C.** $f(1)=-\frac{2}{e}.$ **D.** $f(1)=\frac{2}{e}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)+x.f(x)=2x.e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x^2}.f'(x)+x.e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)=2x.e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (ta nhân hai vế cho $e^{\frac{1}{2}x^2}$)$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{2}x^2}.f(x)\right)'=2x.e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)=\int 2x.e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=-2\int e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}.\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2e^{-\frac{1}{2}x^2}+C.$

$f(0)=-2\Leftrightarrow e^0.f(0)=-2.e^0+C\Rightarrow C=0$.

Khi đó $f(x)=-2e^{-x^2}\Rightarrow f(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1)\neq\frac{1}{2},\ f(x)\neq 0$ với $\forall x\neq 1$, $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)$ với $\forall x\in[0;2]$, cho $x=1$, ta có

$f(1)=2f(1).f'(1)\Leftrightarrow f(1).\left[1-2f'(1)\right]=0\Rightarrow f(1)=0$.

Mặt khác, $\forall x\in[0;2]$, ta có

$(x-1).f'(x)+f(x)=2f(x).f'(x)\Leftrightarrow\left[(x-1).f(x)\right]'=\left[f^2(x)\right]'\Rightarrow(x-1).f(x)=f^2(x)+C$

Thay $x=1$, ta suy ra $f^2(1)+C=0\Leftrightarrow C=0$.

Do đó, ta được $(x-1).f(x)=f^2(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=x-1.\end{array}\right.$

Vì $f(x)\neq0,\forall x\neq1$ nên ta suy ra được $f(x)=x-1$.

Khi đó, $\int_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2(x-1)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

Câu 4: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2+\sin^2x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=a\pi^2+b\ln\dfrac{\pi}{2}+c$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Tính giá trị biểu thức $T=8a+b+c$?

A. 8. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2+\sin^2x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2+x\cos x-x\cos x+1-\cos^2x-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x(x+\cos x)-\cos x(x+\cos x)+1-\sin x}{x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\cos x+\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\cos x+\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\cos x+\dfrac{(x+\cos x)'}{x+\cos x}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}x^2-\sin x+\ln|x+\cos x|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{\pi^2}{8}-1+\ln\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{8}+\ln\dfrac{\pi}{2}+(-1)$.

Do đó $a=\dfrac{1}{8};b=1;c=-1$. Suy ra $T=8a+b+c=8.\left(\dfrac{1}{8}\right)+1+(-1)=1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thoả mãn $f(1)=0$, $f(x)\neq\dfrac{1}{x}$ và $x^2f^2(x)-(2x+1)f(x)=xf'(x)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln2-\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=-\ln2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=-\ln2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\ln2+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2f^2(x)-(2x+1)f(x)=xf'(x)-1$

$\Leftrightarrow\left[xf\left(x\right)\right]^2-2xf\left(x\right)+1=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)\Leftrightarrow\left[xf\left(x\right)-1\right]^2=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=\left[xf\left(x\right)-\right]'$

$\Rightarrow\dfrac{\left[xf\left(x\right)-1\right]'}{\left[xf\left(x\right)-1\right]^2}=1\Rightarrow\int\mathrm{d}x=\int\dfrac{d\left[xf\left(x\right)-1\right]}{\left[xf\left(x\right)-1\right]^2}=-\dfrac{1}{xf\left(x\right)-1}+C$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{1-xf\left(x\right)}+C$ với $f\left(1\right)=0$, $f\left(x\right)\neq\dfrac{1}{x}$, suy ra $C=0\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

Khi đó $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, biết $\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=e^{2020x}$ và $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2021}$. Tính $f\left(1\right)$.

A. $\dfrac{e^{2021}}{2020}$. **B.** $\dfrac{1}{2}.\dfrac{e^{2020}}{2020}$. **C.** $\dfrac{1}{2}.\dfrac{e^{2020}}{2021}$. **D.** $\dfrac{e^{2020}}{2021}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(x+2\right)f\left(x\right)+\left(x+1\right)f'\left(x\right)=e^{2020x}\Leftrightarrow\left(x+2\right)f\left(x\right)e^x+\left(x+1\right)f'\left(x\right).e^x=e^{2021x}$

$\Leftrightarrow\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)e^x\right]'=e^{2021x}\Leftrightarrow\left(x+1\right)f\left(x\right)e^x=\int e^{2021x}\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2021x}}{2021}+C$.

Với $x=0$ ta có $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2021}+C$ mà $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2021}\Rightarrow C=0$.

Khi đó $\left(x+1\right)f\left(x\right)e^x=\dfrac{e^{2021x}}{2021}\Rightarrow f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{e^{2020}}{2021}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn: $x^2.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=2x^3+x^2$, $\forall x>0$. Biết rằng $f\left(1\right)=0$. Tính giá trị của $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

A. $I=\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}+\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{4}$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}-\mathrm{e}$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $x^2.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=2x^3+x^2\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}.f'\left(x\right)+\dfrac{1}{x^2}.\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}.f\left(x\right)=\left(2x+1\right).\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$

$\Rightarrow\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}.f\left(x\right)\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x+1\right).\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}\left(\dfrac{-2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}\right).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=I$

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^x\Rightarrow\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\left(\dfrac{-2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x, v=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\end{cases}$, khi đó: $I=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}-\dfrac{3}{4\mathrm{e}^2}\right)+\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x}.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x^2}.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $I'=\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x^2}.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^x\Rightarrow\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x, v=\dfrac{-1}{x^2}\end{cases}$, khi đó: $I'=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}+\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x}.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Suy ra: $I=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{4\mathrm{e}^2}=\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}.f\left(x\right)\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{-1}{\mathrm{e}^2}.f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\mathrm{e}$

Câu 8: Cho hàm số $F(x)=f(x)\sin x+2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x).\cos x$ với $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $f(0)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)\right]^2\left(\cos x-\sin x\right)dx$

A. $\sqrt{e}-1$. **B.** $2e+1$. **C.** $\frac{e^2-2}{4}$. **D.** $\frac{3e-4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $F(x)=f(x)\sin x+2020$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x).\cos x$ nên ta có

$F'(x)=\left[f(x)\sin x+2020\right]'=f'(x)\cos x\Leftrightarrow f'(x)\sin x+f(x)\cos x=f'(x)\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(\cos x-\sin x\right)=f(x)\cos x\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}$

$\Leftrightarrow\ln\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)=\int\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x+\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}dx$

$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{\left(\cos x-\sin x\right)'}{\cos x-\sin x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(\left|\cos x-\sin x\right|\right)\right)+C$

Vì $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$ nên $\ln\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(\cos x-\sin x\right)\right)+C$.

Do $f(0)=1$ nên $C=0$.

Vậy $\ln\left(\left|f\left(x\right)\right|\right)=\frac{1}{2}\left[x-\ln\left(\cos x-\sin x\right)\right]\Leftrightarrow\ln\left[f\left(x\right)\right]^2=x-\ln\left(\cos x-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow\left[f\left(x\right)\right]^2\left(\cos x-\sin x\right)=e^x$.

$I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[f(x)\right]^2\left(\cos x-\sin x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}e^xdx=\sqrt{e}-1$.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$, $f\left(x\right)\neq0$ với mọi $x\in\left[1;3\right]$, đồng thời $f'\left(x\right)\left(1+f\left(x\right)\right)^2=\left[\left(f\left(x\right)\right)^2\left(x-1\right)\right]^2$ và $f\left(1\right)=-1$. Biết rằng $\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\ln3+b\ \left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$. Tính tổng $S=a+b^2$

A. $S=4$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-1$.

Lời giải

Chọn D

Xét trên đoạn $\left[1;3\right]$, ta có:

$f'\left(x\right)\left(1+f\left(x\right)\right)^2=\left[\left(f\left(x\right)\right)^2\left(x-1\right)\right]^2\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)\left(1+f\left(x\right)\right)^2}{f^4\left(x\right)}=\left(x-1\right)^2$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{f^4(x)}\mathrm{d}x = \int (x-1)^2\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \left[\frac{1}{f^4(x)}+\frac{2}{f^3(x)}+\frac{1}{f^2(x)}\right]\mathrm{d}f(x) = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)}-\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-1)^3}{3}+C$$

Theo giả thiết: $f(1)=-1$ nên ta có: $-\dfrac{1}{3f^3(1)}-\dfrac{1}{f^2(1)}-\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{(1-1)^3}{3}+C \Rightarrow C=\dfrac{1}{3}$

Khi đó:

$$\Rightarrow -\frac{1}{3f^3(x)}-\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-1)^3}{3}+\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)}-\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)} = \frac{x^3}{3}-x^2+x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{f(x)}\right]^3-\left[-\frac{1}{f(x)}\right]^2+\left[-\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{x^3}{3}-x^2+x$$

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^3}{3}-t^2+t, t\in\mathbb{R}$ có $g'(t)=t^2-2t+1=(t-1)^2\ge 0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $g(t)$ là hàm số đồng biến $\forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $(**) \Leftrightarrow g\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)=g(x) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x}$

$-\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\ln|x|\Big|_1^3 = -\ln 3 \Rightarrow a=-1, b=0 \Rightarrow S=-1.$

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;6]$ sao cho $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx=3$, $\displaystyle\int_3^6 f(x)dx=-4$. Tính $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{3} f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=7$. **B.** $I=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{3} f(2x)\mathrm{d}x$ ta có

Đặt $2x=t \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Khi $x=\dfrac{1}{2}$ thì $t=1$; khi $x=3$ thì $t=6$.

Do đó $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{3} f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^6 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_3^6 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.3-\frac{1}{2}.3=-\frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0)=-2$ và $(x^2+1)f'(x)+x(f(x)+1)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(x^2+1\right)f'(x)+xf(x)=-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.f'(x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+1}.f(x)\right]'=\left(-\sqrt{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}.f(x)=-\sqrt{x^2+1}+C$.

$f(0)=-2 \Rightarrow \sqrt{1}.f(0)=-\sqrt{1}+C\Rightarrow C=-1$.

$\sqrt{x^2+1}.f(x)=-\sqrt{x^2+1}-1 \quad\Rightarrow f(x)=-1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Khi đó:

$I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left[-x-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x^2+1}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\left(-\frac{3}{2}-\sqrt{3+1}\right)-(-0-1)=-\frac{5}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=-\frac{2}{e}$. **B.** $f(1)=\frac{2}{e}$. **C.** $f(1)=-e$. **D.** $f(1)=-\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)+2x.f(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x.\mathrm{e}^{x^2}.f(x)=2x\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'=2x$.

Suy ra $\int\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}.f(x)=x^2+C\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+C}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Vì $f(0)=-2\Rightarrow C=-2$.

Do đó $f(x)=\frac{x^2-2}{\mathrm{e}^{x^2}}$. Vậy $f(1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ và $g(x)=mx^2+nx+p$ $(a,b,c,d,e,m,n,p\in\mathbb{R})$. Các hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$ giao nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $\frac{-5}{2},-1$ và 1. Có $f(0)=g(0)$. Tính giá trị tích phân sau $\int\limits_1^2\left(\frac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}\right)dx$?

A. $12\ln 2$.. **B.** $\ln 2$.. **C.** $12\ln 3$.. **D.** $6\ln 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ và $g'(x)=2mx+n$

$f(0)=g(0)\Leftrightarrow e=p$

Có $f'(x)-g'(x)=4ax^3+3bx^2+2(c-m)x+d-n$

Dựa vào đề bài ta có $f'(x)-g'(x)=4a\left(x+\frac{5}{2}\right)(x+1)(x-1)=4a\left(x^3+\frac{5}{2}x^2-x-\frac{5}{2}\right)$

Đồng nhất hệ số ta có: $b=\frac{10}{3}a$, $c-m=-2a$, $d-n=-10a$

Vậy

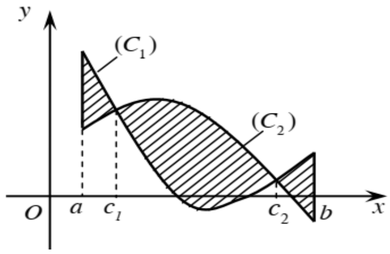
$$\int_1^2 \frac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}dx=\ln\left|f(x)-g(x)\right|\Big|_1^2=\ln\left|f(2)-g(2)\right|-\ln\left|f(1)-g(1)\right|$$

$$=\ln\left|\frac{44}{3}a\right|-\ln\left|\frac{22}{3}a\right|=\ln 2$$

Dạng 12: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng

- **Định lý:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x=a;x=b$ là: $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

- Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ $\begin{cases} y=f\left(x\right),\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ $\boxed{S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx}$



- Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ $\begin{cases} \left(C_1\right):y=f_1\left(x\right) \\ \left(C_2\right):y=f_2\left(x\right) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ $\boxed{S=\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx}$

- **Chú ý:** Nếu trên đoạn $\left[a;b\right]$, hàm số $f\left(x\right)$ không đổi dấu thì: $\int\limits_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\right|$

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tính diện tích S hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$

A. $S=\dfrac{937}{12}$ **B.** $S=\dfrac{343}{12}$ **C.** $S=\dfrac{397}{4}$ **D.** $S=\dfrac{793}{4}$

Lời giải

Chọn A

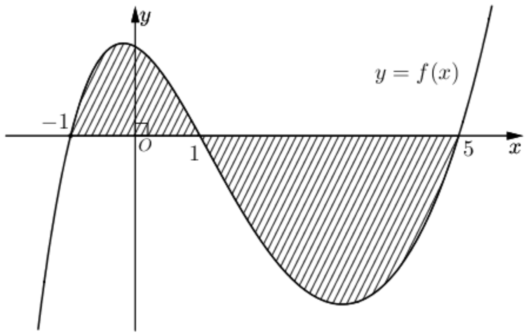
Xét phương trình $-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Diện tích S hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ bằng

$$S=\int\limits_{-3}^{4}\left|-x^3+12x+x^2\right|dx=\frac{937}{12}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các diện tích S_1,S_2 thỏa mãn $S_2=2S_1=3$.

Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{5}f(x)dx$



Mệnh đề nào sau đây đúng?

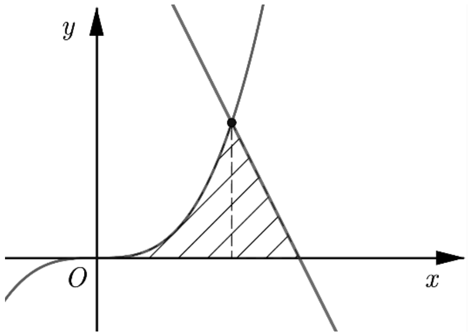
A. $\frac{-3}{2}$.　　**B.** $\frac{3}{2}$.　　**C.** $\frac{9}{2}$.　　**D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{5} f(x)dx = S_1 - S_2 = \frac{3}{2} - 3 = \frac{-3}{2}$

Câu 3: Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3$, đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) là



A. $S = \frac{1}{4}$.　　**B.** $S = \frac{1}{2}$.　　**C.** $S = \frac{5}{4}$.　　**D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^3 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; đường cong $y = x^3$ đi qua $O(0;0)$ và $y = -2x + 3$ cắt Ox tại điểm có hoành độ $x = \frac{3}{2}$.

Vậy $S = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x + \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x + 3)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \left(3x - x^2\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

A. $S = \frac{9}{8}$.　　**B.** $S = \frac{9}{4}$.　　**C.** $S = 9$.　　**D.** $S = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y = f(x) = x^2 - 4x + 3\ (P)$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và đạo hàm $y'=f'(x)=2x-4$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, với $y_0=x_0^2-4x_0+3$.

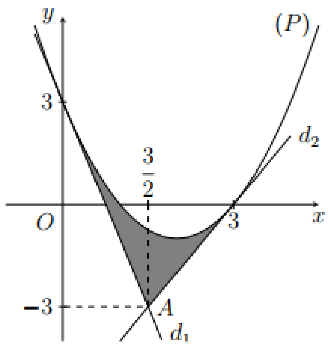
Suy ra, phương trình tiếp tuyến của (P) tại M có dạng: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=(2x_0-4)(x-x_0)+x_0^2-4x_0+3\ (d)$.

Vì $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)\in d$ nên ta có: $(2x_0-4)\left(\dfrac{3}{2}-x_0\right)+x_0^2-4x_0+3=-3\Leftrightarrow -x_0^2+3x_0=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=-4x+3\ (d_1)$.

Với $x_0=3$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=2x-6\,(d_2)$.



Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1): $x^2-4x+3=-4x+3\Leftrightarrow x=0$.

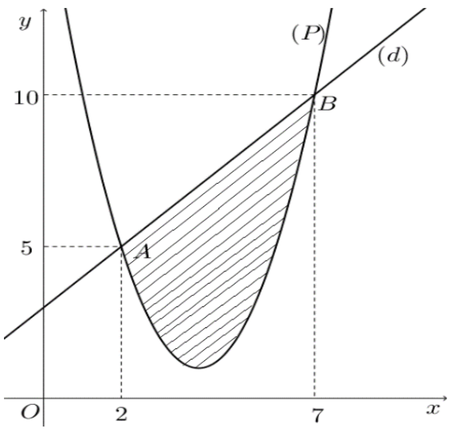
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2): $2x-6=-4x+3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_2): $x^2-4x+3=2x-6\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra, diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left|x^2-4x+3-(-4x+3)\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left|x^2-4x+3-(2x-6)\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{4}\text{(đvdt).}$$

Câu 5: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{125}{6}$. Tích phân $\int_2^7(2x-3)f'(x)dx$ bằng



A. $\frac{215}{3}$. **B.** $\frac{265}{3}$. **C.** $\frac{245}{3}$. **D.** $\frac{415}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Đặt $\begin{cases} u = 2x-3 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Ta có: $\int_2^7 (2x-3)f'(x)\mathrm{d}x = \left[(2x-3)f(x)\right]\Big|_2^7 - 2\int_2^7 f(x)\mathrm{d}x$

$= 11f(7) - f(2) - 2\left[\frac{(5+10).5}{2} - \frac{125}{6}\right] = \frac{215}{3}$.

Cách 2: Dựa vào đồ thị ta có điểm $A(2;5)$ và $B(7;10)$ thuộc đường thẳng d và Parabol (P)

Suy ra đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (5;5)$

Phương trình đường thẳng $d: y = x+3$

Gọi (P) có phương trình: $y = ax^2 + bx + c, (a>0)$

$A, B \in (P) \Rightarrow$ Hệ phương trình: $\begin{cases} 4a+2b+c=5 \\ 49a+7b+c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-4a-2b+5 \\ 49a+7b+5-4a-2b=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-4a-2b+5 \\ b=1-9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3+14a \\ b=1-9a \end{cases}$

Hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \frac{125}{6}$

$\Rightarrow \int_2^7 \left|x+3-\left(ax^2+bx+c\right)\right| dx = \frac{125}{6}$

$\Rightarrow \int_2^7 \left|x+3-\left[ax^2+(1-9a)x+(3+14a)\right]\right| dx = \frac{125}{6}$

$\Leftrightarrow \int_2^7 \left[-ax^2+9ax-14a\right] dx = \frac{125}{6} \Leftrightarrow \left(-\frac{ax^3}{3} + \frac{9ax^2}{2} - 14ax\right)\Bigg|_2^7 = \frac{125}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{125}{6}a = \frac{125}{6} \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -8; c = 17$

(P) có phương trình: $y = f(x) = x^2 - 8x + 17 \Rightarrow f'(x) = 2x - 8$

$\Rightarrow \int_2^7 (2x-3)f'(x)dx = \frac{215}{3}$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f\left(x\right)$. Biết rằng hàm số $g\left(x\right)=e^{f(x)}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	e^2	↗	e^3	↘	$\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(26;27\right)$. **B.** $\left(27;28\right)$. **C.** $\left(28;29\right)$. **D.** $\left(29;30\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g\left(x\right)=e^{f(x)}\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(x\right)e^{f(x)}$.

Ta có $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=0$, khi đó $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm $f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)=f'\left(x\right)e^{f(x)}$

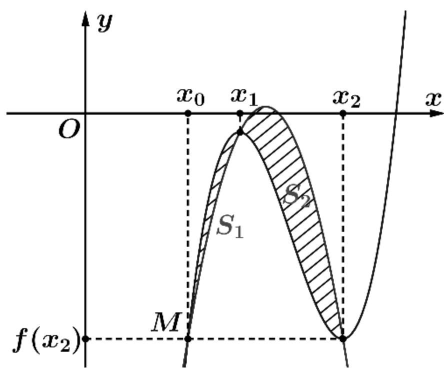
Do $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f'\left(x\right)=f'\left(x\right)e^{f(x)}\Leftrightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right.$.

Ta có $S=\int\limits_{x_1}^{x_3}\left|f'\left(x\right)-g'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left|f'\left(x\right)-g'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_2}^{x_3}\left|f'\left(x\right)-g'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[f'\left(x\right)\left(1-e^{f(x)}\right)\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3}\left[f'\left(x\right)\left(1-e^{f(x)}\right)\right]\mathrm{d}x\right|=\left|f\left(x\right)-e^{f(x)}\Big|_{x_1}^{x_2}\right|-\left|f\left(x\right)-e^{f(x)}\Big|_{x_2}^{x_3}\right|$$

$$=\left|f\left(x\right)-e^{f(x)}\Big|_{x_1}^{x_2}\right|+\left|f\left(x\right)-e^{f(x)}\Big|_{x_2}^{x_3}\right|=\left|3-e^3-2+e^2\right|+\left|\frac{1}{2}-\sqrt{e}-3+e^3\right|\approx 27,63.$$

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới.



Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$ và đồ thị luôn đi qua $M(x_0; f(x_0))$ trong đó $x_0 = x_1 - 1$; $g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tạo bởi đồ thị hai hàm $f(x), g(x)$ như hình vẽ).

A. $\dfrac{4}{29}$. **B.** $\dfrac{5}{32}$. **C.** $\dfrac{7}{33}$. **D.** $\dfrac{6}{35}$.

Lời giải

Khi ta tịnh tiến đồ thị sao cho $x_0 = 0$ khi đó diện tích hình phẳng không thay đổi.

$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$, đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $g(x) = mx^2 + nx + q \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Vì hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3$ và $f(1) - 3f(3) = 0$ nên ta có hệ phương trình.

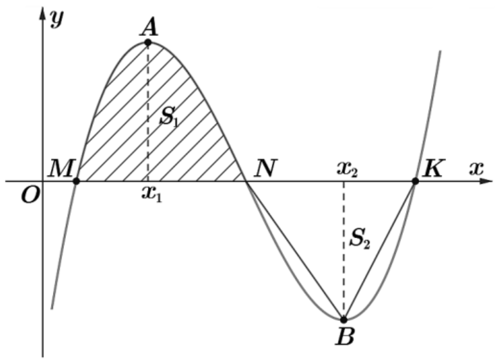
$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 80a + 26b + 8c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \\ d = 2a \end{cases} \Rightarrow f(x) = a\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 2\right)$$

Mà hai đồ thị giao nhau tại 3 điểm nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(1) = f(1) \\ g(2) = f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = d = 2a \\ m = -2a \\ n = 6a \end{cases} \Rightarrow g(x) = a\left(-2x^2 + 6x + 2\right)$$

$$S_1 = |a|.\int_0^1 \left|x^3 - 4x^2 + 3x\right|.dx = \frac{5|a|}{12};\quad S_2 = |a|.\int_1^3 \left|x^3 - 4x^2 + 3x\right|.dx = \frac{8|a|}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{32}$$

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình vẽ.



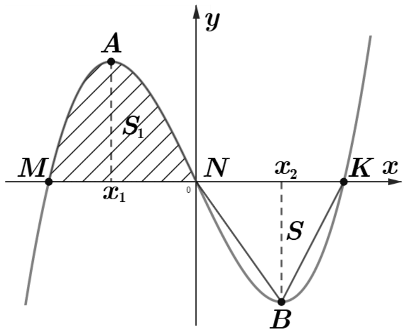
Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C); M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S_1 là diện tích của hình phẳng được gạch trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK. Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=0$ nên điểm uốn của đồ thị (C) thuộc trục hoành, khi đó N là điểm uốn của đồ thị (C). Ta tịnh tiến đồ thị để N trùng với gốc tọa độ O ta được hàm số $h(x)$.



Đặt $h(x)=ax(x-b)(x+b)=ax^3-ab^2x,(a>0,b>0)$.

Ta có $h'(x)=3ax^2-ab^2; h'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pm b}{\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-b}{\sqrt{3}}\\ x_2=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow d(A,Ox)=h\left(\dfrac{-b}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}ab^3}{9}$

Do tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn nên $MN^2=AN^2=x_1^2+d^2(A,Ox)$

$\Leftrightarrow b^2=\dfrac{b^2}{3}+\dfrac{4}{27}a^2b^6\Leftrightarrow 27=9+4a^2b^4\ \Leftrightarrow a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2b^2}$

$\Rightarrow h(x)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2b^2}\left(x^3-b^2x\right)$ và $d(B,Ox)=d(A,Ox)=\dfrac{2\sqrt{3}ab^3}{9}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}.\dfrac{3\sqrt{2}}{2b^2}.b^3=\dfrac{b\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{2}}{2b^2}\displaystyle\int_{-b}^{0}\left(x^3-b^2x\right)\mathrm{d}x}{\dfrac{1}{2}d(B,Ox).NK}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{2}}{2b^2}\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{b^2}{2}x^2\right)\Bigg|_{-b}^{0}}{\dfrac{1}{2}.\dfrac{b\sqrt{6}}{3}.b}=\dfrac{\dfrac{3b^2\sqrt{2}}{8}}{\dfrac{b^2\sqrt{6}}{6}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, gọi (H) là tập hợp điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2=k(|x|+|y|)$ với k là số nguyên dương, S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H). Giá trị lớn nhất của k để $S<250$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

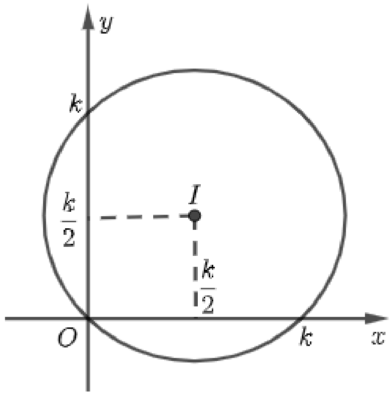
Lời giải

Chọn D

Do tính đối xứng qua Ox,Oy của (H) nên ta chỉ cần xét khi $x>0;y>0$. Khi đó

$x^2+y^2=k(|x|+|y|)$ thành $x^2+y^2=k(x+y)\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{k}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{k}{2}\right)^2=\dfrac{k^2}{2}\ (H_1)$.

Do k là số nguyên dương nên (H_1) là đường tròn tâm $I\left(\dfrac{k}{2};\dfrac{k}{2}\right)$, bán kính $R=\dfrac{k}{\sqrt{2}}$.



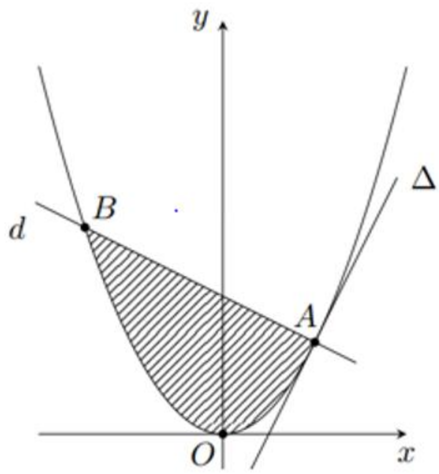
Diện tích của (H_1) ứng với $x > 0; y > 0$ là $S_1 = \pi\frac{k^2}{2} - 2\int_0^k\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{2} - \left(x - \frac{k}{2}\right)^2}\right)dx$.

Do tính đối xứng của (H) nên $S = 4S_1$.

$S < 250 \Leftrightarrow S_1 < \frac{125}{2} \Leftrightarrow \pi\frac{k^2}{2} - 2\int_0^k\left(\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{2} - \left(x - \frac{k}{2}\right)^2}\right)dx < \frac{125}{2}$.

Dùng máy tính cầm tay, có thể thay trực tiếp các giá trị của k, thấy $k = 6$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và một điểm $A(a; a^2)$ (với $a > 0$) nằm trên parabol (P). Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A, gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với Δ. Biết diện tích hình phẳng gới giạn bởi (P) và d (phần gạch sọc) đạt giá trị nhỏ nhất, khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$. **B.** $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. **C.** $a \in \left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right]$. **D.** $a \in \left(\frac{2}{3}; 1\right]$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$(P): y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$.

Tiếp tuyến Δ có hệ số góc $k_\Delta = y'(a) = 2a$. Đường thẳng d có hệ số góc k_d.

Theo đề ta có: $d \perp \Delta \Leftrightarrow k_\Delta . k_d = -1 \Leftrightarrow k_d = -\dfrac{1}{k_\Delta} = -\dfrac{1}{2a}$.

Phương trình đường thẳng $d: y = -\dfrac{1}{2a}(x-a) + a^2 \Leftrightarrow d: y = -\dfrac{1}{2a}x + a^2 + \dfrac{1}{2}$.

Phương tình hoành độ giao điểm của (P) & d.

$x^2 = -\dfrac{1}{2a}x + a^2 + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{2a}x - a^2 - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -a - \dfrac{1}{2a} \cup x_2 = a$.

Dựa vào hình vẽ, ta có diện tích cần tìm là

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-x^2 - \frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \right) dx$$

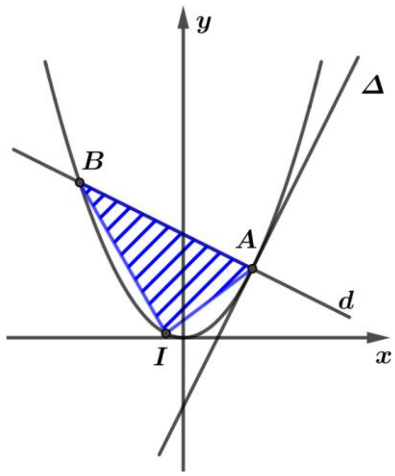
$$S = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4a}x^2 + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) x \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4a}x^2 + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) x \right) \Bigg|_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}$$

$$S = \frac{4}{3}a^3 + a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{48a^3} = \left(\frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{12a} + \frac{1}{12a} + \frac{1}{12a} \right) + \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{48a^3} \right)$$

$$S \overset{Cauchy}{\geq} 4.\sqrt[4]{\frac{4}{3}a^3 . \frac{1}{12a} . \frac{1}{12a} . \frac{1}{12a}} + 4.\sqrt[4]{\frac{a}{3} . \frac{a}{3} . \frac{a}{3} . \frac{1}{48a^3}} = \frac{4}{3}.$$

Vậy $MinS = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4a^3}{3} = \dfrac{1}{12a} \\ \dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{48a^3} \end{cases} \Leftrightarrow a^4 = \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2:



Làm tương tự cách trên, ta có d cắt (P) lần lượt tại $A(a; a^2); B\left(-a - \dfrac{1}{2a}; \left(a + \dfrac{1}{2a} \right)^2 \right)$.

Gọi I là điểm thuộc (P) sao cho $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{4a}; \dfrac{1}{16a^2} \right)$.

Ta có ngay: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(-2a - \dfrac{1}{2a}; 1 + \dfrac{1}{4a^2} \right) \\ \overrightarrow{AI} = \left(-\dfrac{1}{4a} - a; \dfrac{1}{16a^2} - a^2 \right) \end{cases}$.

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}\left|\left(-2a - \frac{1}{2a}\right)\left(\frac{1}{16a^2} - a^2\right) - \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)\left(-\frac{1}{4a} - a\right)\right| \Rightarrow S_{\Delta IAB} = a^3 + \frac{3}{4}a + \frac{3}{16a} + \frac{1}{64a^3}$$

.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) là

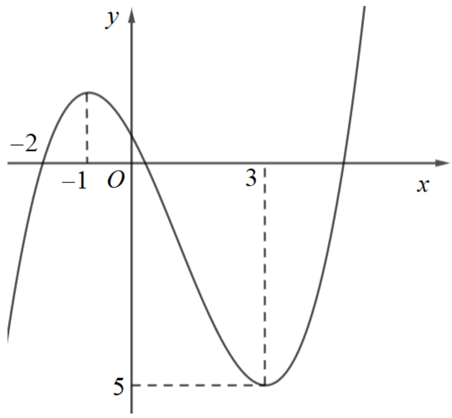
$$S = \frac{4}{3}S_{\Delta IAB} = \frac{4}{3}a^3 + a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{48a^3}.$$

$$S = \left(\frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{12a} + \frac{1}{12a} + \frac{1}{12a}\right) + \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{48a^3}\right)$$

$$S \overset{Cauchy}{\geq} 4.\sqrt[4]{\frac{4}{3}a^3.\frac{1}{12a}.\frac{1}{12a}.\frac{1}{12a}} + 4.\sqrt[4]{\frac{a}{3}.\frac{a}{3}.\frac{a}{3}.\frac{1}{48a^3}} = \frac{4}{3}.$$

Vậy $MinS = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4a^3}{3} = \frac{1}{12a} \\ \frac{a}{3} = \frac{1}{48a^3} \end{cases} \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $g(x) = f''(x) + bx - c$ bằng



A. $\frac{145}{2}$. **B.** $\frac{125}{2}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{29}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

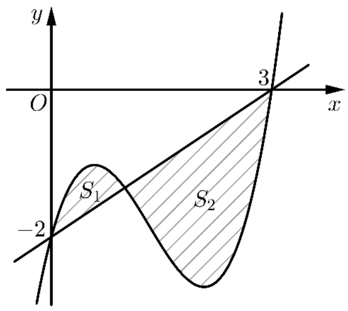
$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(3) = 5 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{3}{5} \\ c = \frac{9}{5} \\ d = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5}.$$

Ta có $f'(x)=\frac{-3}{5}x^2+\frac{6}{5}x+\frac{9}{5}\Rightarrow f''(x)=\frac{-6}{5}x+\frac{6}{5}\Rightarrow g(x)=-\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}$.

$f'(x)=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-1\end{array}\right.$. Diện tích hình phẳng là:

$S=\int\limits_{-1}^{4}\left|-\frac{3}{5}x^2+\frac{6}{5}x+\frac{9}{5}+\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}\right|=\frac{25}{2}$.

Câu 7: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$. Đường thẳng $y=ax+b$ tạo với đường $y=f(x)$ hai miền phẳng có diện tích là S_1,S_2 (hình vẽ bên).



Biết $S_1=\frac{5}{12}$ và $\int\limits_0^1(1-2x)f'(3x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$, giá trị của S_2 bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{19}{4}$. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{13}{6}$.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^1(1-2x)f'(3x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-2x)\mathrm{d}\left[\frac{1}{3}f(3x)\right]=\frac{1}{3}f(3x)(1-2x)\Big|_0^1+\frac{2}{3}\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x$

$=\frac{-1}{3}f(3)-\frac{1}{3}f(0)+\frac{2}{9}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}\Leftrightarrow\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{-21}{4}$.

Khi đó $S_2=\left|\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x\right|-(S_{OAB}-S_1)=\frac{8}{3}$ với $A(0;-2)$, $B(3;0)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và $f'(0)\neq 0$ thỏa mãn biểu thức $3f(x)-f'(x)\left(2f(x)-2x^2-3x\right)=18x^2-4xf(x)$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $g(x)=x^2.f'(x)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3f(x)-f'(x)\left(2f(x)-2x^2-3x\right)=18x^2-4xf(x)$

$\Leftrightarrow 4xf\left(x\right)+3f\left(x\right)=f'\left(x\right)\left(2f\left(x\right)-2x^2-3x\right)+18x^2$

$\Leftrightarrow \left(4x+3\right)f\left(x\right)+f'\left(x\right)\left(2x^2+3x\right)=2f\left(x\right).f'\left(x\right)+18x^2$

$\Leftrightarrow \left[f\left(x\right)\left(2x^2+3x\right)\right]'=\left[f^2\left(x\right)\right]'+18x^2$

$\Leftrightarrow \int\left[f\left(x\right)\left(2x^2+3x\right)\right]'dx=\int\left[f^2\left(x\right)\right]'dx+\int 18x^2dx$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)\left(2x^2+3x\right)=f^2\left(x\right)+6x^3+C\xrightarrow{f(0)=0}C=0$

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right)-2x^2f\left(x\right)+6x^3-3xf\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left(x\right)\left(f\left(x\right)-2x^2\right)-3x\left(f\left(x\right)-2x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(f\left(x\right)-2x^2\right)\left(f\left(x\right)-3x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=2x^2\\ f\left(x\right)=3x\end{array}\right.$. Do $f'\left(0\right)\neq 0\Rightarrow f\left(x\right)=3x$

Ta có: $f\left(x\right)=3x\Rightarrow f'\left(x\right)=3\Rightarrow g\left(x\right)=x^2f'\left(x\right)=x^2.3=3x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $3x=3x^2\Leftrightarrow 3x^2-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là: $S=\left|\int_0^1\left(3x-3x^2\right)dx\right|=\dfrac{1}{2}$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-8x-4,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\dfrac{125}{2}$. **B.** $\dfrac{40}{3}$. **C.** $\dfrac{131}{4}$. **D.** $\dfrac{10}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)+x.f'(x)=4x^3-8x-4\ ,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=4x^3-8x-4\ \ ,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]'=4x^3-8x-4\ \ ,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x.f(x)=x^4-4x^2-4x+C\ \ ,\forall x\in\mathbb{R}$.

Với $x=0\Rightarrow C=0$.

Suy ra $f(x)=x^3-4x-4\Rightarrow f'(x)=3x^2-4$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta có:

$x^3-4x-4=3x^2-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\\ x=4\end{array}\right.$. Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là: $S=\int_{-1}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{4}\left|x^3-3x^2-4x\right|\mathrm{d}x=\dfrac{131}{4}$.

Câu 10: Biết hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên nửa khoảng $\left(0;1\right]$, thỏa mãn $f\left(1\right)=1$ và $2f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{f\left(x\right)}{x}}$ với mọi $x\in\left(0;1\right]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$ và $y=5-4x$ gần giá trị nào nhất sau đây?

A. $0,58$. **B.** $0,49$. **C.** $1,22$. **D.** $0,97$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$2f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{f\left(x\right)}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2.\sqrt{f\left(x\right)}+\frac{x.f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)}}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \left(2x\right)'.\sqrt{f\left(x\right)}+2x.\frac{f'\left(x\right)}{2\sqrt{f\left(x\right)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow\left(2x.\sqrt{f\left(x\right)}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow 2x.\sqrt{f\left(x\right)}=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx\Leftrightarrow 2x.\sqrt{f\left(x\right)}=2\sqrt{x}+C$$

Vì $f\left(1\right)=1\Rightarrow 2.1.\sqrt{f\left(1\right)}=2\sqrt{1}+C\Rightarrow C=0$.

Do đó $2x.\sqrt{f\left(x\right)}=2\sqrt{x}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=5-x$ là

$$\frac{1}{x}=5-4x\Leftrightarrow -4x^2+5x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\ x=1\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$S=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left|\frac{1}{x}-5+4x\right|dx=0,488.$$

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $\sqrt{x}.f'\left(x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x}}f\left(x\right)=x\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $f\left(1\right)=-1,$ tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có: $xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=x^2-1\Leftrightarrow\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}=1-\dfrac{1}{x^2}$.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(x\right)}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\frac{f\left(x\right)}{x}=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\Rightarrow\frac{f\left(x\right)}{x}=x+\frac{1}{x}+C\quad(*)$$

Mà $f(1)=-1$ nên từ $(*)$ có: $\dfrac{f(1)}{1}=1+\dfrac{1}{1}+C\Leftrightarrow -1=2+C\Leftrightarrow C=-3$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}-3\Rightarrow f(x)=x^2-3x+1\Rightarrow f'(x)=2x-3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3x+1=2x-3\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng bằng: $S=\int\limits_1^4\left|x^2-5x+4\right|dx=\dfrac{9}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm liên tục có tích phân trên $[0;2]$ thỏa điều kiện $f(x^2)=6x^4+\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=6x-12$

A. 30. **B.** 27. **C.** 24. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x^2)=6x^4+\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=a$.

Khi đó $f(x^2)=6x^4+a\Rightarrow f(x)=6x^2+a$.

Do đó $a=\int\limits_0^2 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x(6x^2+a)\mathrm{d}x\Leftrightarrow a=\left.\left(\dfrac{3}{2}x^4+\dfrac{ax^2}{2}\right)\right|_0^2\Leftrightarrow a=24+2a\Leftrightarrow a=-24$.

Nên $f(x)=6x^2-24$.

Ta có $6x^2-24=6x-12\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Vậy diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^2\left|6x^2-6x-12\right|dx=\left|\int\limits_{-1}^2(6x^2-6x-12)dx\right|=27$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành. Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $(y')^2+y''.y=-4$ và $f(0)=1$; $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành gần nhất với số nào dưới đây?

A. $0{,}98$. **B.** $0{,}88$. **C.** $0{,}78$. **D.** $0{,}68$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(f'(x))^2+f''(x).f(x)=-4\Leftrightarrow (f'(x).f(x))'=-4$

$\Leftrightarrow \int (f'(x).f(x))'dx=\int -4dx\Leftrightarrow f'(x).f(x)=-4x+C$

$\Leftrightarrow \int f'(x).f(x)dx=\int(-4x+C)dx\Leftrightarrow \int f(x)d(f(x))=-4\dfrac{x^2}{2}+C.x+B$

$\Leftrightarrow \dfrac{f^2(x)}{2} = -2x^2 + C.x + B \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2C.x + B}$.

Theo giả thiết $f(0) = 1$ và $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ nên ta có

$$\begin{cases} \sqrt{B} = 1 \\ \sqrt{-\dfrac{1}{4} + \dfrac{C}{2} + B} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2x + 1} \quad (C)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành $\sqrt{-4x^2 + 2x + 1} = 0$.

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right..$$

Vì (C) luôn ở phía trên trục hoành nên $S = \displaystyle\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \sqrt{-4x^2 + 2x + 1}dx \approx 0,98$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $[0;2]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(1) \neq \dfrac{1}{2}, f(x) \neq 0$ với $\forall x \neq 1$, $(x-1).f'(x) + f(x) = 2f(x).f'(x)$ với $\forall x \in [0;2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = x^2 - 1$ bằng

A. $S = \dfrac{5}{6}$. **B.** $S = \dfrac{1}{6}$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 1$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $(x-1).f'(x) + f(x) = 2f(x).f'(x)$ với $\forall x \in [0;2]$, cho $x = 1$, ta có

$f(1) = 2f(1).f'(1) \Leftrightarrow f(1).\left[1 - 2f'(1)\right] = 0 \Rightarrow f(1) = 0$.

Mặt khác, $\forall x \in [0;2]$, ta có

$(x-1).f'(x) + f(x) = 2f(x).f'(x) \Leftrightarrow \left[(x-1).f(x)\right]' = \left[f^2(x)\right]' \Rightarrow (x-1).f(x) = f^2(x) + C$

Thay $x = 1$, ta suy ra $f^2(1) + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Do đó, ta được $(x-1).f(x) = f^2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = x - 1. \end{array}\right.$

Vì $f(x) \neq 0, \forall x \neq 1$ nên ta suy ra được $f(x) = x - 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = x^2 - 1$, ta có:

$$x - 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = x^2 - 1$ là: $S = \displaystyle\int_0^1 \left|x^2 - x\right| dx = \dfrac{1}{6}.$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x) + x^2 f'(x) = \dfrac{3}{2}x^5 + \dfrac{5}{2}x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{127}{40}$. **B.** $\dfrac{127}{10}$. **C.** $\dfrac{107}{5}$. **D.** $\dfrac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2xf(x) + x^2 f'(x) = \dfrac{3}{2}x^5 + \dfrac{5}{2}x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(x^2\right)' f(x) + x^2 f'(x) = \dfrac{3}{2}x^5 + \dfrac{5}{2}x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left[x^2 f(x)\right]' = \dfrac{3}{2}x^5 + \dfrac{5}{2}x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 f(x) = \dfrac{1}{4}x^6 + \dfrac{1}{2}x^5 - \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C$

$\Leftrightarrow f\left(x\right) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1 + \dfrac{C}{x^2}$

Vì do $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C = 0$.

Do đó $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1.$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = f'(x)$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ x & = & -1 \\ x & = & 1 \\ x & = & 4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ là $S = \displaystyle\int_{-2}^{4} \left| f(x) - f'(x) \right| dx = \dfrac{107}{5} (dvdt).$

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right) = x^4 + bx^2 + c\left(b, c \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị là đường cong $\left(C\right)$ và đường thẳng $\left(d\right): y = g\left(x\right)$ tiếp xúc với $\left(C\right)$ tại điểm $x_0 = 1$. Biết $\left(d\right)$ và $\left(C\right)$ còn hai điểm chung khác có hoành độ là $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$ và $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{g\left(x\right) - f\left(x\right)}{\left(x-1\right)^2} dx = \frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $\left(C\right)$ và đường thẳng $\left(d\right)$.

A. $\dfrac{29}{5}$. **B.** $\dfrac{28}{5}$. **C.** $\dfrac{143}{5}$. **D.** $\dfrac{43}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $f\left(x\right) - g\left(x\right) = \left(x-1\right)^2 \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = x^4 + bx^2 - mx + n \; (*)$

Ta có: $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^2}dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}(x-x_1)(x-x_1+x_1-x_2)dx$

$= \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[(x-x_1)^2+(x-x_1)(x_1-x_2)\right]dx = \left.\left(\frac{(x-x_1)^3}{3}+(x_1-x_2)\frac{(x-x_1)^2}{2}\right)\right|_{x_1}^{x_2}$

$= \frac{(x_2-x_1)^3}{3} - \frac{(x_2-x_1)^3}{2} = -\frac{(x_2-x_1)^3}{6} = \frac{-4}{3}$

Suy ra $(x_2-x_1)^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 2 \quad (1)$

Mặt khác theo định lí viet bậc 4 của phương trình (*) ta được:

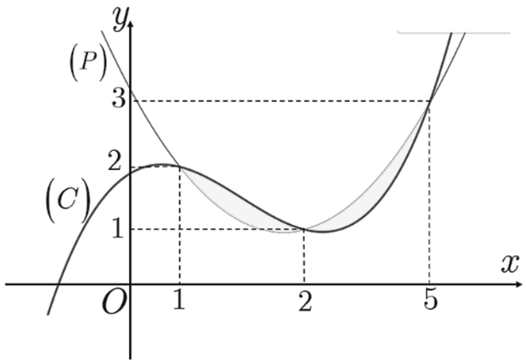
$1+1+x_2+x_1=0 \Leftrightarrow x_2+x_1=-2(2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -2 \end{cases}$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) là:

$S = \int\limits_{-2}^{1}\left|(x-1)^2(x+2)x\right|dx = \frac{29}{5}$.

Câu 17: Cho đồ thị hàm số $(C): y = ax^3+bx^2+cx+d$ và $(P): y = mx^2+nx+p$ có đồ thị như hình vẽ (*Đồ thị (C) là nét có đường cong đậm hơn).* Biết phần hình phẳng được giới hạn bởi (C) và (P) (phần tô đậm) có diện tích bằng 2. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng quanh trục hoành có giá trị gần với số nào nhất?



A. 12.53. **B.** 9.34. **C.** 10.23. **D.** 11.74.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có: $(P): y = g(x) = mx^2+nx+p$ và (P) qua $(3;1)$, $(5;3)$, $(1;2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 9m+3n+p=1 \\ 25m+5n+p=3 \\ m+n+p=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{8} \\ n=-2 \\ p=\frac{29}{8} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{3}{8}x^2-2x+\frac{29}{8}$

Đường cong $(C): y = ax^3+bx^2+cx+d$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=1$, $x=3$, $x=5$ suy ra

$f(x)-g(x) = k(x-1)(x-3)(x-5)(k>0)$

$$S=k\left[\int_1^3(x-1)(x-3)(x-5)\mathrm{d}x-\int_3^5(x-1)(x-3)(x-5)\mathrm{d}x\right]=k\left[4-(-4)\right]=8k$$

$$S=2\Rightarrow 2=8k\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-5)+\frac{3}{8}x^2-2x+\frac{29}{8}=\frac{x^3}{4}-\frac{15}{8}x^2+\frac{15}{4}x-\frac{1}{8}$$

Vậy $V=\pi\int_1^2\left(f^2-g^2\right)\mathrm{d}x+\pi\int_2^5\left(g^2-f^2\right)\mathrm{d}x=\frac{6533}{3360}\pi+\frac{2007}{1120}\pi\approx 11.74$

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2xf(x)+x^2f'(x)=5x^4+6x^2+4x,\forall x\in\mathbb{R}$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\int\left(2xf(x)+x^2f'(x)\right)dx=\int\left(\left(x^2\right)'f(x)+x^2f'(x)\right)dx=\int\left(5x^4+6x^2+4x\right)dx=x^5+2x^3+2x^2+C$$

$$\Rightarrow x^2f(x)=x^5+2x^3+2x^2+C$$

Cho $x=0$ ta được $C=0\Rightarrow f(x)=x^3+2x+2$; $f'(x)=3x^2+2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=f'(x)$:

$$x^3+2x+2=3x^2+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_0^2\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2+\left[8-f'(x)\right]x+\left[f(x)-2f'(x)+8\right]=0,\forall x\in[0;+\infty)$ và $f(1)=0$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f(x)$ và $y=x^2+8x-4$ bằng:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2x^2+\left(8-f'(x)\right)x+\left(f(x)-2f'(x)+8\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2x^2+8x-xf'(x)+f(x)-2f'(x)+8=0\Leftrightarrow 2x^2+8x+8=xf'(x)-f(x)+2f'(x)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+4x+4\right)=f'(x)(x+2)-f(x)\Leftrightarrow 2(x+2)^2=(x+2)f'(x)-f(x)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)f'(x)-f(x)}{(x+2)^2}=2 \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x+2}\right]'=2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x+2}=2x+C$.

Mặt khác $f(1)=0$ nên $C=-2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x+2}=2x-2 \Leftrightarrow f(x)=(x+2)(2x-2)=2x^2+2x-4$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $2x^2+2x-4=x^2+8x-4$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=x^2+8x-4 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số là:

$S=\int_2^4 \left|\left(2x^2+2x-4\right)-\left(x^2+8x-4\right)\right| dx = \left|\int_2^4 \left|x^2-6x+8\right| dx\right| = \dfrac{4}{3}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x), \forall x\in(1;+\infty)$, $f(x)>0, \forall x\in(1;+\infty)$ và $f(e)=\dfrac{1}{e^2}$. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf(x), y=0, x=e, x=e^2$.

A. $S=\dfrac{3}{2}$. **B.** $S=\dfrac{5}{2}$. **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-xf'(x)\ln x+f(x)=2x^2f^2(x) \Leftrightarrow -x\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\ln x+\dfrac{1}{f(x)}=2x^2, \forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow xg'(x)\ln x+g(x)=2x^2, \forall x\in(1;+\infty)$ với $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

$\Leftrightarrow g'(x)\ln x+\dfrac{g(x)}{x}=2x, \forall x\in(1;+\infty) \Rightarrow \int g'(x)\ln x\,dx+\int \dfrac{g(x)}{x}dx=\int 2x\,dx$.

$\Leftrightarrow g(x)\ln x-\int \dfrac{g(x)}{x}dx+\int \dfrac{g(x)}{x}dx=x^2+C \Leftrightarrow g(x)\ln x=x^2+C, \forall x\in(1;+\infty)$.

Do $f(e)=\dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow g(e)=e^2 \Rightarrow C=0$. Suy ra $g(x)\ln x=x^2, \forall x\in(1;+\infty)$.

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}>0, \forall x\in(1;+\infty) \Rightarrow y=xf(x)=\dfrac{x}{g(x)}=\dfrac{\ln x}{x}, \forall x\in(1;+\infty)$.

Ta có $S=\int_e^{e^2} xf(x)dx=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(x)<0\,\forall x\in(-1,+\infty)$, $f'(0)=-1$ và $\left[f'(x)\right]^2=f''(x)$, $f(3)=-\ln 4$. Khi đó diện tích giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2, x=3$ bằng bao nhiêu?

A. $8\ln 2-\ln 3-1$. **B.** $8\ln 2-3\ln 3-1$.

C. $4\ln 2-3\ln 3-1$. **D.** $8\ln 2+3\ln 3-1$.

Lời giải

Chọn B

Với $x \in (-1;+\infty)$, ta có: $\left[f'(x)\right]^2 = f''(x) \Leftrightarrow -1 = -\dfrac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \Leftrightarrow -1 = \left[\dfrac{1}{f'(x)}\right]'$

$\Leftrightarrow -x + C_1 = \dfrac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{-x + C_1}$ mà $f'(0) = -1$ nên $C_1 = -1$.

Vậy $f'(x) = \dfrac{1}{-x-1} \Rightarrow f(x) = \int \dfrac{1}{-x-1}dx = -\ln|x+1| + C_2$

Mặt khác, ta có: $f(3) = -\ln 4 \Rightarrow -\ln(4) + C = -\ln(4) \Rightarrow C_2 = 0$ nên $f(x) = -\ln(x+1)$.

Khi đó: $S = \int\limits_2^3 |-\ln(x+1)|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_2^3 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x\right| = 8\ln 2 - 3\ln 3 - 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $f(x) + f'(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 5x}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$; $f(1) - f(0) = 2$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = f(x)$, trục tung và trục hoành có dạng $S = \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 14$. **B.** $T = 25$. **C.** $T = 36$. **D.** $T = 43$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) + f'(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 5x}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} = \dfrac{(2x-1)\left(x^2 - x + 1\right) - 2x^2 + 2x + 1}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$.

$$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x + \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}\mathrm{d}x - \int \frac{2x^2 - 2x - 1}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x + \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x^2 - x + 1\right)}{x^2 - x + 1} - \int \frac{\dfrac{2x^2 - 2x - 1}{(2x-1)^2}}{\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{2x-1}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x + f(x) = \int \frac{\mathrm{d}\left(x^2 - x + 1\right)}{x^2 - x + 1} - \int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{2x-1}\right)}{\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{2x-1}\right)^2} = \ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} + C.$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left(\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} - f(x) + C\right)\Bigg|_0^1.$$

Vì $\begin{cases} \ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^1 = 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ \left(\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\Bigg|_0^1 = 1-(-1) = 2 = f(1)-f(0) \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} C = 0 \\ f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} \end{cases}$.

Do đó: $S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right| \mathrm{d}x = -\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln\dfrac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3$.

Suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy $T = a^2 + b^2 = 25$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai, liên tục và nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x) - 2f(x).f'(x) + 2xf'(x) + (x+1)^2 f''(x) = 0, \forall x \in [0;1], f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1.$ Biết tích phân $\int\limits_0^1 \left[f^2(x)\right]dx = \dfrac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân só tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng

A. 181. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 26.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) - 2f(x).f'(x) + 2xf'(x) + (x+1)^2 f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) + f'(x) + 2xf'(x) + (x+1)^2 f''(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x)$

$\Leftrightarrow (2x+2)f'(x) + (x+1)^2 f''(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x)$

$\Leftrightarrow \left[(x+1)^2 f'(x)\right]' = \left[2f(x)+1\right]f'(x) \Rightarrow (x+1)^2 f'(x) = f^2(x) + f(x) + C_1$.

Theo giả thiết: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \dfrac{9}{4} = 2 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow (x+1)^2 f'(x) = f^2(x) + f(x) + \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x) + f(x) + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{(x+1)^2}\ \left(f(x) > 0\right)$.

Do đó $\displaystyle\int \dfrac{f'(x)\mathrm{d}x}{\left(f(x)+\dfrac{1}{2}\right)^2} = \int \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{-1}{(x+1)} + C_2$

Theo giả thiết: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{(x+1)}$

$\Rightarrow f(x) = x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f(x)\right]^2 dx = \int\limits_0^1 \left[x+\dfrac{1}{2}\right]^2 dx = \dfrac{13}{12} \Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow a + b = 25$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - f(x) = -8 + 16x - 4x^2$ và $f(0) = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox.

A. $\frac{256}{15}$. **B.** $\frac{256}{15}\pi$. **C.** $\frac{16}{3}\pi$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có

$f'(x)-f(x)=-8+16x-4x^2 \Leftrightarrow f'(x).e^{-x}-f(x).e^{-x}=\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x}$

$\Leftrightarrow \left(f(x).e^{-x}\right)'=\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x} \Rightarrow f(x).e^{-x}=\int\left(-8+16x-4x^2\right).e^{-x}dx$

$\Leftrightarrow f(x).e^{-x}=\left(4x^2-8x\right).e^{-x}+C$

Vì $f(0)=0 \Rightarrow C=0$. Ta có $f(x)=4x^2-8x$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành thỏa mãn phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox quay quanh Ox là $V=\pi\int_0^2\left(4x^2-8x\right)^2dx=\frac{256}{15}\pi$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $x.f'(x)-2f(x)=4x-8$ và $f(2)=0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy.

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{3}{7}$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có

$x.f'(x)-2f(x)=4x-8 \Rightarrow \frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{4x-8}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\frac{4x-8}{x^3}$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2}=\int\frac{4x-8}{x^3}dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2}=-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}+C \Leftrightarrow f(x)=Cx^2-4x+4$

Vì $f(2)=0$ nên $C=1$

Vậy $f(x)=x^2-4x+4$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục hoành là nghiệm của phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và trục Oy là

$S=\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\frac{8}{3}$.

Câu 26: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + x.f'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$.

A. $S = 8$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 8\pi$. **D.** $S = 4\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) + x.f'(x) + f'(x) = f(x) + (x+1)f'(x) = \left[(x+1)f(x)\right]'$

Nên $f(x) + x.f'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = \left[(x+1)f(x)\right]'$

$\Rightarrow (x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C \; (1)$

Thay $x = -1$ vào (1) ta được $C - 2 = 0 \Leftrightarrow C = 2$. Suy ra $(x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

Khi đó $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow S = \int\limits_0^4 \left|x^3 - 6x^2 + 8x\right| \mathrm{d}x = 8$

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - xf'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ có kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai bằng

A. $7,31$. **B.** $7,32$. **C.** $7,33$. **D.** $7,34$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - xf'(x) \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 3x^2$

$\Leftrightarrow \left[x.f(x)\right]' = 4x^3 + 3x^2 \Rightarrow x.f(x) = x^4 + x^3 + C$

Cho $x = 0$ ta được $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + x^2$ và $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Xét phương trình: $f(x) = f'(x)$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là: $S = \int\limits_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} \left|x^3 - 2x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x \approx 7,33$ (đvdt).

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=0$; $\left[f^{'}(x)\right]^2+8xf(x)=x^4-2x, \forall x\in[0;1]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox , Oy . Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{7}$. **B.** $\frac{2\pi}{7}$. **C.** $\frac{3\pi}{7}$. **D.** $\frac{4\pi}{7}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=f(x).\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}.f^{'}(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f^{'}(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f^{'}(x)\mathrm{d}x$

$\left[f^{'}(x)\right]^2+8xf(x)=x^4-2x, \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow \int_0^1\left[f^{'}(x)\right]^2\mathrm{d}x+8\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^4-2x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left[f^{'}(x)\right]^2\mathrm{d}x-4\int_0^1 x^2f^{'}(x)\mathrm{d}x=\frac{-4}{5}\Leftrightarrow \int_0^1\left[f^{'}(x)\right]^2\mathrm{d}x-4\int_0^1 x^2f^{'}(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 4x^4=0$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left(f^{'}(x)-2x^2\right)^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f^{'}(x)=2x^2\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x^3+C$

Do $f(1)=0$ nên $C=\frac{-2}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}$

Xét phương trình: $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=5x^4+6x+3,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f^{'}(x)$ thuộc khoảng

A. $(27;28)$. **B.** $(26;27)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(29;30)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)+x.f'(x)=5x^4+6x+3\Leftrightarrow(x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=5x^4+6x+3$

$\Leftrightarrow[x.f(x)]'=5x^4+6x+3\Leftrightarrow x.f(x)=x^5+3x^2+3x+C\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^5+3x^2+3x+C}{x}$

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Suy ra $f(x)=x^4+3x+3\Rightarrow f'(x)=4x^3+3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$, ta có:

$x^4+3x+3=4x^3+3 \Leftrightarrow x\left(x^3-4x^2+3\right)=0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2-3x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ là:

$$S=\int_{\frac{3-\sqrt{21}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x \approx 28{,}87$$

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\cos x f'(x)-\sin x f(x)=2\cos 2x+2\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ bằng

A. $2-\pi$. **B.** $2+\pi$. **C.** $4-\pi$. **D.** $4+\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\cos x f'(x)-\sin x f(x)=2\cos 2x+2\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \cos x\cdot f'(x)+\left(\cos x\right)'.f(x)=2\cos 2x+2\sin x$

$\Leftrightarrow [\cos x.f(x)]'=2\cos 2x+2\sin x$ $\Leftrightarrow \cos x.f(x)=\sin 2x-2\cos x+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\sin 2x-2\cos x+C}{\cos x}=\dfrac{2\sin x.\cos x-2\cos x+C}{\cos x}$

Vì do $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C=0$. Do đó $f(x)=2\cos x-2 \Rightarrow f'(x)=-2\sin x$

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$ là:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|2\cos x+2\sin x-2\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos x+2\sin x-2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(2\sin x-2\cos x-2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\pi.$$

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f\left(1\right)=4$ và $f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-2x^3-3x^2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$ và $y=f'\left(x\right)$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 27.

Lời giải

Chọn C

$f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=2x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3; \forall x\neq 0$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=2x+3 \Leftrightarrow \int\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'dx=\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x+C$

Vì $f(1)=4$ nên $\Leftrightarrow 4=1^2+3.1+C \Leftrightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=x^3+3x^2; \forall x\neq 0$.

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow f(x)=x^3+3x^2; \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x); y=f'(x)$ là

$x^3+3x^2=3x^2+6x \Leftrightarrow x\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{6} \\ x=\sqrt{6} \end{array}\right.$

$S_{hp}=\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left|x^3-6x\right|dx=18$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$ và phương trình tiếp tuyến của tại điểm $y=f(x)$ có hoành độ $x=2$.

A. $\dfrac{2400}{12}$. **B.** $\dfrac{2401}{12}$. **C.** $\dfrac{333}{4}$. **D.** $\dfrac{335}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow xf'(x)+x'f(x)=4x^3+3x^2$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]'=4x^3+3x^2 \Leftrightarrow \int[x.f(x)]'dx=\int\left(4x^3+3x^2\right)dx \Leftrightarrow xf(x)=x^4+x^3+C$.

Vì $f(1)=2$ nên $1f(1)=1+1+C \Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=x^3+x^2$.

Lại có $f'(x)=3x^2+2x$.

$f'(2)=16, f(2)=12$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là $y=16x-20$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)=x^3+x^2$ và $y=16x-20$

$x^3+x^2=16x-20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=2 \end{array}\right.$

$S_{hp}=\int\limits_{-5}^{2}\left|x^3+x^2-16x+20\right|dx=\dfrac{2401}{12}$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thoả mãn $f\left(1\right)=3$ và $x\left(4-f'\left(x\right)\right)=f\left(x\right)-1$ với mọi $x>0$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$ và trục Ox, trục Oy và $x=1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$x\left(4-f'\left(x\right)\right)=f\left(x\right)-1\Leftrightarrow xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=4x+1\Leftrightarrow\left[xf\left(x\right)\right]'=4x+1$

$\Leftrightarrow\int\left[x.f\left(x\right)\right]'dx=\int\left(4x+1\right)dx\Leftrightarrow x.f\left(x\right)=2x^2+x+C$

Vì $f\left(1\right)=3$ nên $C=0$.

Do đó $f\left(x\right)=2x+1$

$S_{hp}=\int\limits_{0}^{1}\left|2x+1\right|dx=2$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thoả mãn $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R};f\left(2\right)=\dfrac{1}{5}$ và $f'\left(x\right)=-2x\left[f\left(x\right)\right]^2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right),x=0$ và $x=1$.

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$f'\left(x\right)=-2x\left[f\left(x\right)\right]^2\Leftrightarrow\dfrac{-f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2}=2x\Leftrightarrow\int\dfrac{-f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2}dx=\int2xdx\Leftrightarrow\dfrac{1}{f\left(x\right)}=x^2+C$

Vì $f\left(2\right)=\dfrac{1}{5}$ nên $C=1$.

Do đó $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$ suy ra $S_{hp}=\int\limits_{0}^{1}\left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|dx=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $-xf'\left(x\right)\ln x+f\left(x\right)=2x^2f^2\left(x\right)$, $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$, $f\left(x\right)>0$, $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$ và $f\left(e\right)=\dfrac{1}{e^2}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=xf\left(x\right)$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-xf'(x)\ln x + f(x) = 2x^2 f^2(x) \Leftrightarrow -x\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\ln x + \dfrac{1}{f(x)} = 2x^2, \forall x \in (1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow xg'(x)\ln x + g(x) = 2x^2, \forall x \in (1;+\infty)$ với $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

$\Leftrightarrow g'(x)\ln x + \dfrac{g(x)}{x} = 2x, \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow \int g'(x)\ln x\,\mathrm{d}x + \int \dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow g(x)\ln x - \int \dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x + \int \dfrac{g(x)}{x}\mathrm{d}x = x^2 + C \Leftrightarrow g(x)\ln x = x^2 + C, \forall x \in (1;+\infty)$

Do $f(e) = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow g(e) = e^2 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $g(x)\ln x = x^2, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{x^2}{\ln x} > 0, \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow xf(x) = \dfrac{x}{g(x)} = \dfrac{\ln x}{x} > 0, \forall x \in (1;+\infty)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = xf(x)$, $y = 0$, $x = e$, $x = e^2$ là:

$\int\limits_e^{e^2} xf(x)\mathrm{d}x = \int\limits_e^{e^2} \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_e^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2} = \dfrac{3}{2}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $2x.f(x) + x^2.f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$. Tính thể tích vật tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và trục tung quanh trục Ox.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{5}$. **D.** $\dfrac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2x.f(x) + x^2.f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x \Leftrightarrow \left[x^2.f(x)\right]' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int \left[x^2.f(x)\right]' dx = \int \left(4x^3 - 12x^2 + 8x\right)dx$

$\Leftrightarrow x^2.f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + C$

Chọn $x = 0 \Rightarrow C = 0$, nên $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Hoành độ giao điểm của đồ thị $y = x^2 - 4x + 4$ với trục hoành là $x = 2$.

Nên thể tích cần tìm là: $V = \pi\int\limits_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right)^2 dx = \pi\int\limits_0^2 (x-2)^4 dx = \dfrac{\pi}{5}(x-2)^5\Big|_0^2 = \dfrac{32\pi}{5}$

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ dương, có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$, thỏa mãn hệ thức $f(x) = f'(x).\sqrt{x+3}$ và $f(1) = 1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = -2, x = 1$.

A. $\dfrac{3e^2 - 1}{2e^2}$. **B.** $\dfrac{3e^2 + 1}{2e^2}$. **C.** $\dfrac{3e^2 + 1}{e^2}$. **D.** $\dfrac{3e^2 - 1}{e^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=f'(x).\sqrt{x+3}\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\ln f(x)=\int \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}dx \Leftrightarrow \ln f(x)=2\sqrt{x+3}+C$

Do $f(1)=1$ nên $C=-4$. Vậy $f(x)=e^{2\sqrt{x+3}-4}=\dfrac{e^{2\sqrt{x+3}}}{e^4}$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\dfrac{1}{e^4}\int\limits_{-2}^{1} e^{2\sqrt{x+3}}dx$

Đặt $I=\int\limits_{-2}^{1} e^{2\sqrt{x+3}}dx$.

Đặt $t=2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow t^2=4(x+3)\Leftrightarrow dx=\dfrac{tdt}{2}$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=4; x=-2\Rightarrow t=2$

Nên: $I=\int\limits_{-2}^{1} e^{2\sqrt{x+3}}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} e^t.tdt=\dfrac{1}{2}\left(e^t t\Big|_2^4-e^t\Big|_2^4\right)=\dfrac{3e^4-e^2}{2}\Rightarrow S=\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+12$

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x)=0$ có hai nghiệm m,n

Vì $g(x)$ là hàm bậc ba có hệ số $a>0$ nên nếu giả sử $m<n$ thì $\begin{cases} g(m)=g_{CD}=4\\ g(n)=g_{CT}=-4\end{cases}$

Xét phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)+12}=1\Rightarrow g(x)+12-f(x)=0$

$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+12=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m\\ x=n\end{array}\right.$

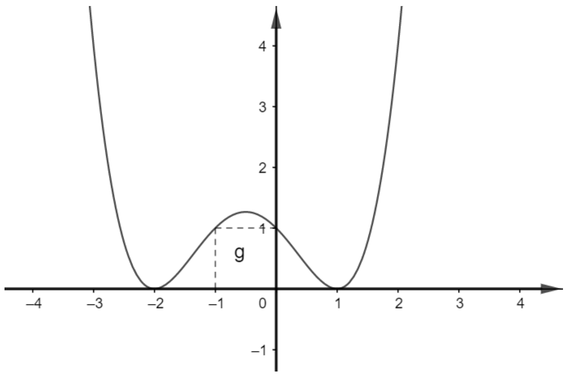
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\int\limits_m^n\left|1-\frac{f(x)}{g(x)+12}\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_m^n\left(1-\frac{f(x)}{g(x)+12}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_m^n\left(\frac{g(x)+12-f(x)}{g(x)+12}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\int_m^n \frac{f'(x)+f''(x)+12}{g(x)+12}dx\right| = \left|\int_m^n \frac{g'(x)}{g(x)+12}dx\right| = \left|\int_m^n \frac{d\left(g(x)+12\right)}{g(x)+12}\right| = \left|\ln\left|g(x)+12\right|\right|\Big|_m^n$$

$$= \left|\ln\left|g(n)+12\right| - \ln\left|g(m)+12\right|\right| = \left|\ln\left|-4+12\right| - \ln\left|4+12\right|\right| = \left|\ln\frac{8}{16}\right| = \ln 2\,.$$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{107}{5}$. **C.** $\frac{127}{10}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho có dạng $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$

$\Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Từ hình vẽ đã cho ta thấy đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại các điểm $(-2;0)$, $(1;0)$ và đi qua điểm $(0;1)$ nên:

$$\begin{cases} f(x) = k.(x+2)^2.(x-1)^2 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}.(x+2)^2.(x-1)^2$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ là

$$S = \int_{-2}^{4} \left|f(x) - f'(x)\right| \mathrm{d}x$$

Do $f(x)$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;4)$ nên ta có:

$$\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{4}\left[f(x)-f'(x)\right]\mathrm{d}x\right| = \frac{107}{5} \text{ (đvdt).}$$

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$ thoả mãn $f\left(1\right)=3$ và $f^2\left(x\right)-8xf\left(x\right)-f'\left(x\right)=-16x^2-4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=2$.

A. $\ln 2-6$. **B.** $8-\ln 2$. **C.** $6-\ln 2$. **D.** $10-\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f^2\left(x\right)-8xf\left(x\right)-f'\left(x\right)=-16x^2-4\Leftrightarrow f^2\left(x\right)-8xf\left(x\right)+16x^2=f'\left(x\right)-4$

$\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)-4x\right)^2=\left(f\left(x\right)-4x\right)'$ (1). Đặt $f\left(x\right)-4x=h\left(x\right)$. Ta có $(1)\Leftrightarrow h^2\left(x\right)=h'\left(x\right)$

$\Leftrightarrow\dfrac{h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}=1\quad\Rightarrow\quad\displaystyle\int\dfrac{h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}dx=\int 1dx\quad\Leftrightarrow-\dfrac{1}{h\left(x\right)}=x+C\quad\Rightarrow h\left(x\right)=-\dfrac{1}{x+C}$

$\Rightarrow f\left(x\right)-4x=-\dfrac{1}{x+C}$ Do $f\left(1\right)=3\Rightarrow C=0\Rightarrow f\left(x\right)-4x=-\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}+4x$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=2$

là $S=\displaystyle\int_1^2\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_1^2\left|-\dfrac{1}{x}+4x\right|dx=6-\ln 2$.

Câu 41: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+\displaystyle\int_0^1\left(10u-4x\right)f\left(u\right)du$ có đồ thị $\left(C\right)$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$, trục tung, tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $S=108$ **B.** $S=12$. **C.** $S=180$. **D.** $S=112$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=x^3+\displaystyle\int_0^1\left(10u-4x\right)f\left(u\right)du=x^3-4x\int_0^1 f\left(u\right)du+10\int_0^1 uf\left(u\right)du$

Đặt $a=\displaystyle\int_0^1 f(u)du$ và $b=\displaystyle\int_0^1 uf(u)du$. Khi đó hàm số $f\left(x\right)$ có dạng $f\left(x\right)=x^3-4ax+10b$.

Suy ra $f\left(u\right)=u^3-4au+10b$

$$a=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1\left(u^3-4au+10b\right)du=\left.\left(\frac{1}{4}u^4-2au^2+10bu\right)\right|_0^1=\frac{1}{4}-2a+10b.$$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}-2a+10b\Leftrightarrow 3a-10b=\dfrac{1}{4}$ (1).

$$b=\int_0^1 uf(u)du=\int_0^1 u\left(u^3-4au+10b\right)du$$

$$=\int_0^1\left(u^4-4au^2+10bu\right)du=\left.\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{4}{3}au^3+5bu^2\right)\right|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{4}{3}a+5b.$$

$\Rightarrow b = \frac{1}{5} - \frac{4}{3}a + 5b \Leftrightarrow \frac{4}{3}a - 4b = \frac{1}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x + 2;\ f'(x) = 3x^2 - 3.$ Ta có: $f(2) = 4;\ f'(2) = 9.$

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$:

$y = 9(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) với tiếp tuyến d là:

$x^3 - 3x + 2 = 9x - 14 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, tiếp tuyến d là

$S = \int_0^2 \left|x^3 - 3x + 2 - (9x - 14)\right| dx = \int_0^2 \left|x^3 - 12x + 16\right| dx = \left|\int_0^2 \left(x^3 - 12x + 16\right) dx\right| = 12.$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định trên $[0;+\infty)$ và thoả mãn $x^2 - x\left(f'(x) - 2\right) + \left(f(x) - f'(x) + 1\right) = 0$, $\forall x \in [0;+\infty)$ và có $f(0) = 0$. Diện tích hình phẳng gới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{5\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2 - x\left(f'(x) - 2\right) + \left(f(x) - f'(x) + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - xf'(x) + 2x + f(x) - f'(x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)f'(x) - f(x) = (x+1)^2 \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{(x+1)^2} = 1, \forall x \in [0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x+1}\right]' = 1, \forall x \in [0;+\infty) \Rightarrow \frac{f(x)}{x+1} = x + C$

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$

Xét $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^2 + x = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy $S = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left|x^2 - x - 1\right| dx = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1$ và $f(2)=-6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)+2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 15. **D.** 22.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1 \Leftrightarrow (x-1)f'(x)-f(x)=-2x^3+3x^2-1$ (*)

Nếu $x=1$ thì $f(1)=0$

Nếu $x\neq 1$ thì (*)$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}=-2x-1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)'=-2x-1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-1}=-x^2-x+C$

Mà $f(2)=-6 \Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=(x-1)\left(-x^2-x\right)=-x^3+x \Rightarrow f'(x)=-3x^2+1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)+2 \Leftrightarrow x^3-3x^2-x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)+2$ là:

$S=\int\limits_{-1}^{3}\left|x^3-3x^2-x+3\right|\mathrm{d}x=8$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=6$ và $xf'(x)=f(x)+3x^4-3x^2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\dfrac{162}{5}$. **B.** $\dfrac{324}{5}$. **C.** $\dfrac{104}{5}$. **D.** $\dfrac{229}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $xf'(x)=f(x)+3x^4-3x^2 \Rightarrow xf'(x)-f(x)=3x^4-3x^2$.

Có $f(0)=0$, với $x\neq 0$ thì $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=3x^2-3 \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=3x^2-3$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x^3-3x+C$, mà $f(1)=6$ nên $C=8$. Do đó $f(x)=x^4-3x^2+8x$ (thỏa mãn).

Xét phương trình $f(x)=f'(x) \Leftrightarrow x^4-4x^3-3x^2+14x-8=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2$ hoặc $x=4$.

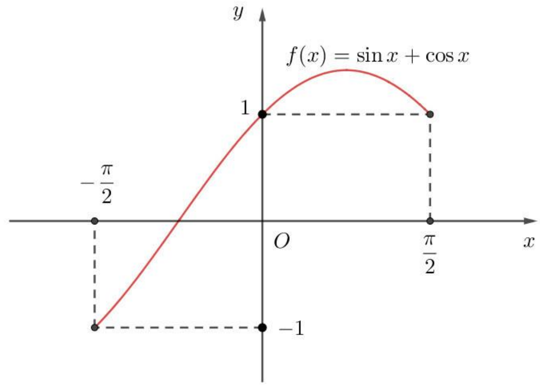
Vậy diện tích hình phẳng cần tính bằng $S=\int\limits_{-2}^{4}\left|x^4-4x^3-3x^2+14x-8\right|\mathrm{d}x=\dfrac{324}{5}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi-1}{4}$. **C.** $\sqrt{2}-\pi$. **D.** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ta có: $f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1$

$\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)\cos x-f\left(x\right)\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(x\right)}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{f\left(x\right)}{\cos x}=\tan x+C$.

Mà $f\left(0\right)=1$nên $C=1$. Suy ra: $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) là:

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=\sqrt{2}$ và trục Oy (trong miền $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) bằng: $S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\pi-4}{4}$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3-6x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)+x.f'(x)=4x^3-6x^2\Leftrightarrow(x)'\cdot f(x)+x.f'(x)=4x^3-6x^2$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]' = 4x^3 - 6x^2 \Leftrightarrow x.f(x) = x^4 - 2x^3 + C$

Với $x = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó: $f(x) = x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 2x^2 = 3x^2 - 4x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Suy ra, diện tích phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là:

$$S = \int_0^4 |f(x) - f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3 - 5x^2 + 4x\right)\mathrm{d}x - \int_1^4 \left(x^3 - 5x^2 + 4x\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}.$$

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = \frac{1}{4}xf'(x)$ bằng

A. $\frac{112}{15}$. **B.** $\frac{272}{15}$. **C.** $\frac{1088}{15}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) + x.f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 4 \Leftrightarrow (x)' \cdot f(x) + x.f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 4$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]' = 5x^4 + 6x^2 - 4 \Leftrightarrow x.f(x) = x^5 + 2x^3 - 4x + C$

Với $x = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $f(x) = x^4 + 2x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{1}{4}xf'(x)$ là:

$$x^4 + 2x^2 - 4 = \frac{1}{4}x\left(4x^3 + 4x\right) \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Suy ra, diện tích phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = f(x)$ và $y = \frac{1}{4}xf'(x)$ là:

$$S = \int_{-2}^2 \left| f(x) - \frac{1}{4}xf'(x) \right| \mathrm{d}x = \int_{-2}^2 \left|4 - x^2\right| \mathrm{d}x = \frac{32}{3}.$$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ liên trục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = 2x^3 - 9 + \int_0^1 xf\left(\sqrt{1 + 15x^2}\right)dx$. Đồ thị hàm số $y = g(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 9$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $1;2;4$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ có diện tích bằng:

A. $I = 2$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = \frac{37}{12}$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $k=\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)dx=\int_1^4 \frac{t}{15}f(t)dt=\frac{1}{15}\int_1^4 xf(x)dx \Leftrightarrow 15k=\int_1^4 xf(x)dx \quad (1)$.

Khi đó $f(x)=2x^2-9+k \Rightarrow x.f(x)=2x^3-9x+kx$ thay vào (1), ta được:

$(1)\Leftrightarrow 15k=\int_1^4\left(2x^3-9x+kx\right)dx \Leftrightarrow 15k=\left.\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^2+\frac{k}{2}x^2\right)\right|_1^4 \Rightarrow k=8 \Rightarrow f(x)=2x^2-1$.

Mặt khác: $g(x)-f(x)=a(x-1)(x-2)(x-4)=\left(ax^3+bx^2+cx-9\right)-\left(2x^2-1\right)$.

$\Leftrightarrow g(x)-f(x)=a(x-1)(x-2)(x-4)=ax^3+(b-2)x^2+cx-8$.

Cho $x=0 \Rightarrow -8a=-8 \Rightarrow a=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ bằng:

$$S=\int_1^4\left|(x-1)(x-2)(x-4)\right|dx=\frac{37}{12}.$$

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$, có đạo hàm $f(1)=1$ và $\begin{cases} f(x)>0 \\ f'(x)>0 \end{cases}$ trên $(1;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $2\left[f'(x)\right]^2=(x-1)^2.\left(4f(x)-\left[f'(x)\right]^2+4\right)$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ với các đường $x=1; x=2$ và Ox ?

A. $S=\frac{4}{3}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{-4}{3}$. **D.** $S=\frac{-8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2\left[f'(x)\right]^2=(x-1)^2.\left(4f(x)-\left[f'(x)\right]^2+4\right)$.

$\Leftrightarrow 2\left[f'(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2.(x-1)^2=4(x-1)^2.\left(f(x)+1\right)$.

$\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2.\left(x^2-2x+3\right)=4(x-1)^2.\left(f(x)+1\right)$.

$\Leftrightarrow f'(x).\sqrt{\left(x^2-2x+3\right)}=2(x-1).\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{f(x)+1}\right]'=\left[\sqrt{x^2-2x+3}+C\right]'$.

Mặt khác ta có $f(1)=1 \Rightarrow f(x)=x^2-2x+2 \Rightarrow S=\int_1^2 f(x)dx=\frac{4}{3}$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $x\left(f'(x)-x\right)=f(x)-1, \forall x>0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$; $x=1; x=3$ và trục hoành bằng

A. $\frac{32}{2}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 12. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x\left(f'(x)-x\right)=f(x)-1 \Rightarrow xf'(x)-f(x)=x^2-1$

$\Rightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow \dfrac{xf'(x)-x'f(x)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=1-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}+C.$

Mặt khác: $f(1)=2 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x)=x^2+1$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_1^3 \left|f(x)\right|dx=\dfrac{32}{3}$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=4x\sqrt{x}$. Biết $f(1)=1$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $g(x)=f(x)-2xf'(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=1;x=4$.

A. $\dfrac{14}{3}$. **B.** $\dfrac{124}{5}$. **C.** $\dfrac{62}{5}$. **D.** $\dfrac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$ ta có:

$2xf'(x)+f(x)=4x\sqrt{x} \Leftrightarrow \dfrac{2xf'(x)+f(x)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}.f'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(x)=2x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=2x \Rightarrow \sqrt{x}.f(x)=x^2+C$

Với $x=1$ ta có $\sqrt{1}.f(1)=1^2+C \Leftrightarrow 1=1+C \Leftrightarrow C=0 \Rightarrow \sqrt{x}.f(x)=x^2$, $\Rightarrow f(x)=x\sqrt{x}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. Suy ra $g(x)=-2x\sqrt{x}$.

Vậy diện tích $S=\int\limits_1^4 \left|-2x\sqrt{x}\right|=\dfrac{124}{5}$ (Đvtt)

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=0$, đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[-2;+\infty)$ và thỏa mãn $(x+2)f'(x)-2f(x)=(x-2)(x+2)^3$ với mọi $x\in[-2;+\infty)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành bằng

A. $\dfrac{432}{5}$. **B.** $\dfrac{448}{5}$. **C.** $\dfrac{464}{5}$. **D.** $\dfrac{446}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $x=-2$: từ điều kiện ta có $f(-2)=0$.

Xét $x>-2$: chia hai vế của điều kiện cho $(x+2)^3$ ta được

$\frac{1}{(x+2)^2} f'(x) - \frac{2}{(x+2)^3} f(x) = x - 2$.

Do $\left[\frac{1}{(x+2)^2}\right]' = -\frac{2}{(x+2)^3}$ nên $\left[\frac{f(x)}{(x+2)^2}\right]' = x+2$, suy ra $\frac{f(x)}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{2} - 2x + C$ hay

$f(x) = (x+2)^2\left(\frac{x^2}{2} - 2x + C\right)$

Vì $f(0) = 0$ nên $C = 0$, suy ra $f(x) = x\left(\frac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $f(x) = x\left(\frac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2$ với mọi $x \in [-2;+\infty)$.

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = -2$, $x = 0$ và $x = 4$. Bên cạnh đó $f(x) \le 0$ với mọi $x \in [0;4]$ và $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [-2;0]$.

Vậy diện tích cần tìm là: $S = \int_{-2}^{0} x\left(\frac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2\,dx - \int_{0}^{4} x\left(\frac{x}{2} - 2\right)(x+2)^2\,dx = \frac{464}{5}$.

Dạng 13: Ứng dụng tích phân vào bài toán chuyển động

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t(\text{m/s})$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(\text{m/s})$. **B.** $16(\text{m/s})$. **C.** $13(\text{m/s})$. **D.** $15(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường chất điểm A đi từ O đến lúc gặp B là: $S_1=\int\limits_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)\text{d}t=96(\text{m})$.

Vận tốc của chất điểm B là: $V_B(t)=\int a\text{d}t=at+C$.

Tại thời điểm $t=0\Rightarrow V_B=0\Rightarrow C=0\Rightarrow V_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm B đi từ O đến lúc gặp A là: $S_2=\int\limits_0^{12}(at)\text{d}t=\left.\left(\frac{at^2}{2}\right)\right|_0^{12}=72a(\text{m})$.

Khi A và B gặp nhau quãng đường đi được là như nhau, ta có: $S_1=S_2\Leftrightarrow 72a=96\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}\left(\text{m/s}^2\right)$.

Vận tốc của B khi đuổi kịp A là: $V_B(t)=\frac{4}{3}t$, với $t=12\Rightarrow V_B(12)=16(\text{m/s})$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16m$. **B.** $55m$. **C.** $25m$. **D.** $50m$.

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng bánh, ta có: $v=0\Leftrightarrow -2t+10=0\Leftrightarrow t=5$.

Do đó, ta có quãng đường xe đi được trong 8 giây cuối cùng (3 giây đi với vận tốc $10\ m/s$, 5 giây sau khi đạp phanh) là:

$$S=3.10+\int\limits_0^5(-2t+10)dt=30+\left.\left(-t^2+10t\right)\right|_0^5=30-5^2+10.5=55\ (m).$$

Câu 3: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \left(m/s^2\right)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17\,m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200m$. **B.** $1014m$. **C.** $966m$. **D.** $36m$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 6t\mathrm{d}t=3t^2+C$.

Theo giả thiết ta $v(2)=17\Rightarrow 3.2^2+C=17\Rightarrow C=5$. Suy ra $v(t)=3t^2+5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là: $s=\int\limits_4^{10} v(t)dt=\int\limits_4^{10}(3t^2+5)dt=(t^3+5t)\Big|_4^{10}=966m$.

Câu 4: Một xe máy đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $30m$. **B.** $20m$. **C.** $50m$. **D.** $25m$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $-2t+10=0\Leftrightarrow t=5$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau $5s$ ô tô dừng hẳn.

Quãng đường xe máy đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi xe máy dừng hẳn là

$$s=\int\limits_0^5(-2t+10)dt=(-t^2+10t)\Big|_0^5=25m.$$

Câu 5: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \mathrm{m/s^2}$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ giây là $17t\ \mathrm{m/s}$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là.

A. 966 m. **B.** 36 m. **C.** 1200 m. **D.** 1014 m.

Lời giải

Chọn A

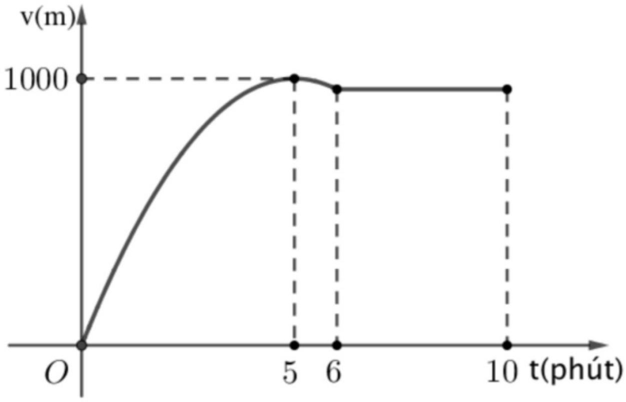
Từ giả thiết suy ra $v'(t)=a(t)\Rightarrow v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 6t\mathrm{d}t=3t^2+C$.

Mặt khác $v(2)=17$ nên $3.2^2+C=17\Rightarrow C=5$. Do đó $v(t)=3t^2+5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là

$$s=\int\limits_4^{10} v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_4^{10}(3t^2+5)\mathrm{d}t=(t^3+5t)\Big|_4^{10}=1050-84=966\,\mathrm{m}.$$

Câu 6: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều **(tham khảo hình vẽ)**.



Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ là bao nhiêu mét?

A. 8160 m. **B.** 8610 m. **C.** 10000 m. **D.** 8320 m.

Lời giải

Chọn A

Phương trình vận tốc của ô tô là: $v(t)=\begin{cases} at^2+bt+c & \text{khi } 0\le t\le 6 \\ v(6) & \text{khi } 6<t\le 10 \end{cases}$.

Trong khoảng thời gian 6 phút đầu đồ thị của vận tốc là một đường parabol đi qua điểm $(0;0)$, $(5;1000)$ và có hoành độ đỉnh bằng 5, do đó:

$$\begin{cases} c=0 \\ 25a+5b+c=1000 \\ -\dfrac{b}{2a}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 5a+b=200 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-40 \\ b=400 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v(t)=\begin{cases} -40t^2+400t & \text{khi } 0\le t\le 6 \\ 960 & \text{khi } 6<t\le 10 \end{cases}.$$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là:

$$S=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^6\left(-40t^2+400t\right)\mathrm{d}t+\int_6^{10} 960\,\mathrm{d}t=8160\text{ m}.$$

Câu 7: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=12t-t^2$ trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận tốc v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v=x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?

A. 15 mét/phút. **B.** 18 mét/phút. **C.** 27 mét/phút. **D.** 48 mét/phút.

Lời giải

Chọn C

Gọi thời điểm khinh khí cầu bắt đầu chuyển động là $t=0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1.

Quãng đường khinh khí cầu đã di chuyển được từ lúc chuyển động tới khi tiếp đất là

$$\int_0^{t_1}(12t-t^2)\mathrm{d}t=243 \Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3}+6t_1^2-243=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1\approx -5,56 \\ t_1\approx 14,56 \\ t_1=9 \end{array}\right.$$

Vì $v(t)\ge 0 \Leftrightarrow 0\le t\le 12$ nên $t_1=9$.

Vận tốc của khinh khí cầu lúc tiếp đất là: $v(9)=27$ mét/phút.

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc $15\left(m/s\right)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a=3t-8\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng vận tố **C.** Hỏi sau 10 giây tăng vận tốc ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. 150. **B.** 180. **C.** 246. **D.** 250.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(3t-8)\mathrm{d}t=\dfrac{3t^2}{2}-8t+C$.

Vận tốc khi ô tô bắt đầu tăng tốc là $15\ m/s$: $v(0)=15\Leftrightarrow C=15$.

Vận tốc của ô tô là $v(t)=\dfrac{3t^2}{2}-8t+15$.

Quãng đường ô tô đi được sau 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$\int\limits_0^{10}v(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{10}\left(\dfrac{3t^2}{2}-8t+15\right)\mathrm{d}t=250\,(\mathrm{m})$.

Câu 9: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $V(t)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t(\mathrm{m/s})$. Trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc $a\left(\mathrm{m/s^2}\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20(\mathrm{m/s})$. **B.** $16(\mathrm{m/s})$. **C.** $13(\mathrm{m/s})$. **D.** $15(\mathrm{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường chất điểm A đi từ O đến lúc gặp B là: $S_1=\int\limits_0^{15}\left(\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t\right)\mathrm{d}t=96(\mathrm{m})$.

Vận tốc của chất điểm B là: $V_B(t)=\int a\mathrm{d}t=at+C$.

Tại thời điểm $t=0\Rightarrow V_B=0\Rightarrow C=0\Rightarrow V_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm B đi từ O đến lúc gặp A là: $S_2=\int\limits_0^{12}(at)\mathrm{d}t=\left.\left(\dfrac{at^2}{2}\right)\right|_0^{12}=72a(\mathrm{m})$.

Khi A và B gặp nhau quãng đường đi được là như nhau, ta có: $S_1=S_2\Leftrightarrow 72a=96\Leftrightarrow a=\dfrac{4}{3}\left(\mathrm{m/s^2}\right)$.

Vận tốc của B khi đuổi kịp A là: $V_B(t)=\dfrac{4}{3}t$, với $t=12\Rightarrow V_B(12)=16(\mathrm{m/s})$.

Câu 10: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\ m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng tính đến thời điểm dừng bánh là

A. $16m$. **B.** $55m$. **C.** $25m$. **D.** $50m$.

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng bánh, ta có: $v=0 \Leftrightarrow -2t+10=0 \Leftrightarrow t=5$.

Do đó, ta có quãng đường xe đi được trong 8 giây cuối cùng (3 giây đi với vận tốc $10\ m/s$, 5 giây sau khi đạp phanh) là:

$$S=3.10+\int_0^5(-2t+10)dt=30+\left(-t^2+10t\right)\Big|_0^5=30-5^2+10.5=55\,(m).$$

Câu 11: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t\ \left(m/s^2\right)$. Vận tốc tại thời điểm $t=2$ giây là $17m/s$. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là:

A. $1200m$. **B.** $1014m$. **C.** $966m$. **D.** $36m$.

Lời giải

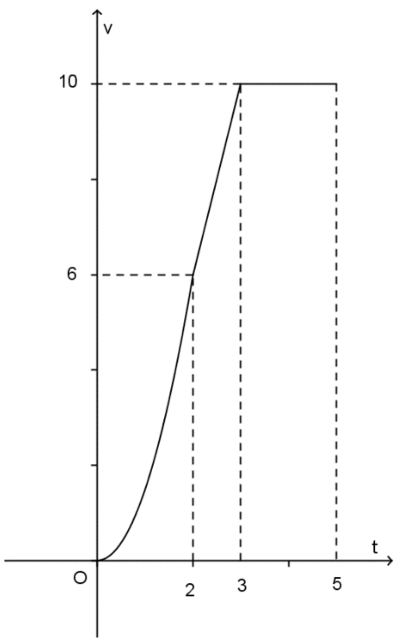
Chọn C

Ta có $v=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 6t\mathrm{d}t=3t^2+C$.

Theo giả thiết ta $v(2)=17 \Rightarrow 3.2^2+C=17 \Rightarrow C=5$. Suy ra $v(t)=3t^2+5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là: $s=\int_4^{10}v(t)dt=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)dt=\left(t^3+5t\right)\Big|_4^{10}=966m$.

Câu 12: Một chiếc xe đua F_1 đạt tới vận tốc lớn nhất là $360km/h$. Đồ thị bên biểu thị vận tốc v của xe trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc xuất phát. Đồ thị trong 2 giây đầu tiên là một phần của parabol đỉnh tại gốc tọa độ O, giây tiếp theo là đoạn thẳng và sau đúng 3 giây thì xe đạt vận tốc lớn nhất. Biết rằng mỗi đơn vị trục hoành biểu thị 1 giây, mỗi đơn vị trục tung biểu thị $10m/s$ và trong 5 giây đầu xe chuyển động theo đường thẳng. Hỏi trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là bao nhiêu?

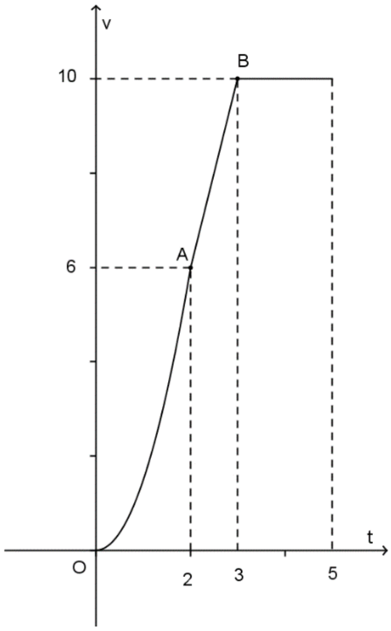


A. 340 (mét). **B.** 420 (mét). **C.** 400 (mét). **D.** 320 (mét).

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(2;6)$; $B(3;10)$



Theo gt thì phương trình của parabol là $y=\frac{3}{2}x^2$; phương trình đường thẳng AB là $y=4x-2$

Vậy trong 5 giây đó xe đã đi được quãng đường là:

$$S=10\left(\int_0^2 \frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_2^3 (4x-2)\mathrm{d}x+2.10\right)=320 \text{ (mét).}$$

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S(t)=t^3+t^2-3t+2$, trong đó t tính bằng giây (s) và S được tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2s$ bằng

A. $16\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ **B.** $14\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ **C.** $12\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ **D.** $6\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $S'(t)=3t^2+2t-3\Rightarrow S''(t)=6t+2$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm t là $a\ t\ =S''\ t\ =6t+2$.

Suy ra gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2s$ là $a\ 2\ =14m/s^2$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-12t+24\ (m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $15m\cdot$ **B.** $24m.$ **C.** $20m.$ **D.** $18m.$

Lời giải

Chọn B

Thời gian từ lúc xe đạp phanh đến lúc dừng hẳn là: $v(t)=0\Leftrightarrow -12t+24=0\Leftrightarrow t=2(s)$

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $S=\int_0^2(-12t+24)dt=24(m)$

Câu 3: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1m$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16m/s$ bỗng gặp ô tô B đang đứng chờ đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều bởi vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu mét?

A. $12m$. **B.** $31m$. **C.** $32m$. **D.** $33m$.

Lời giải

Chọn D

Khi ô tô dừng lại $v_A(t)=0\Leftrightarrow t=4$

Quãng đường đi được từ lúc ô tô A đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$\int_0^4(16-4t)dt=32(m)$

Vậy để đảm bảo an toàn thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng $33m$

Câu 4: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\ t\ =180-20t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t=0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. 810 m. **B.** 9 m. **C.** 160 m. **D.** 180 m.

Lời giải

Chọn A

Thời điểm vật dừng lại là $v=0\Leftrightarrow 180-20t=0\Leftrightarrow t=9\ s$

Quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t=0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại là:

$$s\ t=\int_0^9 180-20tdt=810\ m$$

Câu 5: Một xe ô tô đang đi với vận tốc $10\,\mathrm{m/s}$ thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=10-5t(\mathrm{m/s})$, ở đó t tính bằng giây. Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng

A. $5\,\mathrm{m}$. **B.** $10\,\mathrm{m}$. **C.** $6\,\mathrm{m}$. **D.** $12\,\mathrm{m}$.

Lời giải

Chọn B

Thời điểm xe dừng hẳn là: $v(t)=10-5t=0\Leftrightarrow t=2$ (s)

Vậy quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là:

$$S=\int_0^2|v(t)|\mathrm{d}t=\int_0^2|10-5t|\mathrm{d}t=10\ (\mathrm{m}).$$

Câu 6: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=180-20t\left(m/s\right)$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. $810\,m$. **B.** $9\,m$. **C.** $180\,m$. **D.** $160\,m$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $t_1\left(s\right)$ là thời điểm vật dừng lại.

Suy ra: $v\left(t_1\right)=0\Leftrightarrow 180-20t_1=0\Leftrightarrow t_1=9\left(s\right)$.

Quãng đường vật di chuyển là: $S=\int_0^9\left(180-20t\right)\mathrm{d}t=\left(180t-10t^2\right)\Big|_0^9=810$.

Câu 7: Một xe ô tô đang đi với vận tốc $10\,m/s$ thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=10-5t\left(m/s\right)$, ở đó t tính bằng giây. Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng

A. $5m$. **B.** $10m$. **C.** $6m$. **D.** $12m$.

Lời giải

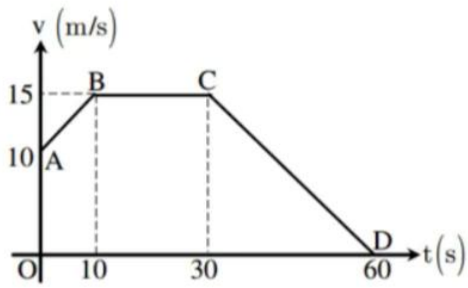
Chọn B

Xe ô tô dừng hẳn khi $v\left(t\right)=0\Leftrightarrow 10-5t=0\Leftrightarrow t=2$.

Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn:

$$S\left(t\right)=\int_0^2 v\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^2\left(10-5t\right)\mathrm{d}t=\left(10t-\frac{5t^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=10\left(m\right).$$

Câu 8: Một vật chuyển động thẳng có đồ thị vận tốc-thời gian như hình vẽ sau:



Tính quãng đường vật chuyển động trong 60.

A. $620(m)$. **B.** $630(m)$. **C.** $250(m)$. **D.** $650(m)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ot.

Ta có:

$$s=\int_0^{60} v(t)dt=\int_0^{10} v(t)dt+\int_{10}^{30} v(t)dt+\int_{30}^{60} v(t)dt$$

$$=S_{OABH}+S_{HBCK}+S_{KCD}$$

$$=\frac{1}{2}.(10+15).10+20.15+\frac{1}{2}.30.15$$

$$=650(m)$$

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn thì ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. $10m$. **B.** $40m$. **C.** $20m$. **D.** $30m$.

Lời giải

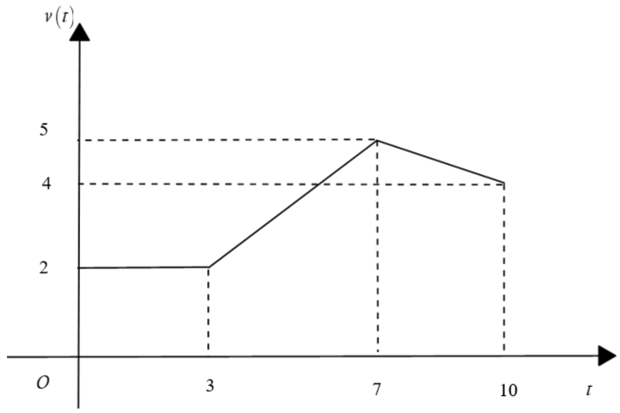
Chọn B

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow -5t+20=0\Leftrightarrow t=4(s)$.

Khi đó quãng đường xe đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S=\int_0^4(-5t+20)dt=\left(-\frac{5t^2}{2}+10t\right)\Bigg|_0^4=40(m).$$

Câu 10: Một vật chuyển động trong 10 giây với vận tốc $v(m/s)$ phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ có đồ thị như hình vẽ



Quãng đường vật chuyển động được trong 10 giây bằng

A. $\frac{63}{2}m$. **B.** $\frac{67}{2}m$. **C.** $\frac{61}{2}m$. **D.** $\frac{65}{2}m$.

Lời giải

Chọn B

Vận tốc chuyển động của vật trong 3 giây đầu là $v_1(t)=2$.

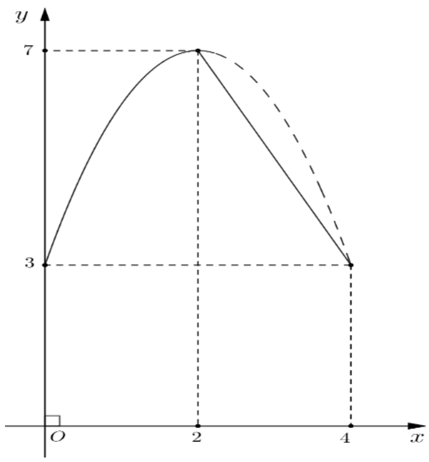
Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 3 đến giây thứ 7 là $v_2(t)=\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}$.

Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 7 đến giây thứ 10 là $v_3(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{22}{3}$.

Ta có $S'(t) = v(t)$, suy ra

$$S = \int_0^3 v_1(t)\,dt + \int_3^7 v_2(t)\,dt + \int_7^{10} v_3(t)\,dt = \int_0^3 2dt + \int_3^7 \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4}\right)dt + \int_7^{10}\left(-\frac{1}{3}t + \frac{22}{3}\right)dt = \frac{67}{2} \text{ (m).}$$

Câu 11: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là mổ phần của đường parabol có đỉnh $I(2;7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng IA. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 15,81(km)$. **B.** $s = 17,33(km)$. **C.** $s = 23,33(km)$. **D.** $s = 21,33(km)$.

Lời giải

Chọn D

Parabol $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ đi qua điểm $(0;3)$ và có đỉnh $I(2;7)$ nên có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x + 3$$

Đường thẳng IA đi qua $A(4;3)$ nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (2;-4)$ làm vectơ chỉ phương, suy ra có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4;2)$

Phương trình đường thẳng IA là $4(x-4) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 11$

Quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ là:

$$s = \int_0^2 \left(-t^2 + 4t + 3\right)\mathrm{d}t + \int_2^4 (-2t + 11)\,\mathrm{d}t = \frac{64}{3}(km).$$

Câu 12: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh đần đều với vận tốc $v_t = 8t(m/s)$. Đi được $5(s)$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -75\left(m/s^2\right)$. Quãng đường $S(m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $S = 94,00(m)$. **B.** $S = 166,7(m)$. **C.** $110,7(m)$. **D.** $S = 95,70(m)$.

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh:

$$S_1=\int_0^5 v_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^5 8t\mathrm{d}t=8\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^5=100(m).$$

Vận tốc $v_2(t)(m/s)$ của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thoả mãn $v_2(t)=\int(-75)\mathrm{d}t=-75t+C,\ v_2(5)=v_1(5)=40\Rightarrow C=415.$ Vậy $v_2(t)=-75\mathrm{t}+415$.

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thoả mãn $v_2(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{83}{15}(s)$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$$S_2=\int_5^{\frac{83}{15}} v_2(t)\mathrm{d}t=\int_5^{\frac{83}{15}}(-75t+415)\mathrm{d}t=\frac{32}{3}\ (m).$$

Quãng đường cần tìm: $S=S_1+S_2=100+\frac{32}{3}=\frac{332}{3}(m)$.

Câu 13: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_t=8t\ (m/s)$. Đi được $5\ (s)$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-75\ (m/s^2)$. Quãng đường $S\ (m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $S=94,0\ (m)$. **B.** $S=166,7\ (m)$. **C.** $S=110,7\ (m)$. **D.** $S=95,7\ (m)$.

Lời giải

Chọn C

Quãng đường đi được trong $5\ (s)$ giây đầu $\int_0^5 8t\,\mathrm{d}t=100\ (m)$.

Vận tốc tại thời điểm giây thứ 5 là $v_5=8.5=40\ (m/s)$.

Phương trình vận tốc ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-75\ (m/s^2)$ là $v(t)=40-75t$.

Xe dừng hẳn khi $v(t)=0\Leftrightarrow 40-75t=0\Leftrightarrow t=\frac{8}{15}$.

Quãng đường ô tô đi được khi bắt đầu hãm phanh $\int_0^{\frac{8}{15}}(80-75t)\mathrm{d}t=\frac{32}{3}\ (m)$.

Quãng đường đi được của ô tô $100+\frac{32}{3}\approx 110,7\ (m)$.

Câu 14: Hàng ngày anh An đi làm bằng xe máy trên cùng một cung đường từ nhà đến cơ quan mất 15 phút. Hôm nay khi đang di chuyển trên đường với vận tốc v_o thì bất chợt anh gặp một chướng ngại vật nên anh đã hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-\ 6m/s^2$. Biết rằng tổng quãng đường từ lúc anh nhìn thấy chướng ngại vật và quãng đường anh đã đi được trong $3s$ đầu tiên kể từ lúc hãm phanh là $35,5m$. Tính v_o.

A. $v_o=45km/h$. **B.** $v_o=40km/h$. **C.** $v_o=60km/h$. **D.** $v_o=50km/h$.

Lời giải

Chọn A

Khi chưa hãm phanh thì quãng đường đi được của anh An được tính theo công thức $S(t)=v_0.t$

Suy ra quãng đường anh An đã đi được trong $2s$ trước khi hãm phanh là $S_1=2v_0$

Sau khi hãm phanh thì xe chuyển động với vận tốc là $v(t)=-6t+v_0$.

Quãng đường anh An đi được trong $3s$ đầu tiên kể từ lúc hãm phanh là

$$S_2=\int_0^3(-6t+v_0)dt=\left(-3t^2+v_0t\right)\Big|_0^3=-27+3v_0$$

Khi đó ta có $S_1+S_2=35,5\Leftrightarrow 2v_0+(-27+3v_0)=35,5\Leftrightarrow v_0=12,5(m/s)=45km/h$.

Câu 15: Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-4t+12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 20 m. **B.** 10 m. **C.** 16 m. **D.** 18 m.

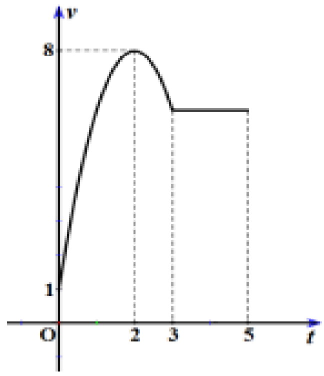
Lời giải

Chọn D

Thời gian ô tô chuyển động từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là $v(t)=0\Leftrightarrow -4t+12=0\Leftrightarrow t=3$.

Quãng đường ô tô còn di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là $s=\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3(-4t+12)\,dt=18$ m.

Câu 16: Một vật chuyển động trong 5 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;8)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 5 giờ đó.



A. $s=18,75km$. **B.** $s=31,5km$. **C.** $s=12,5km$. **D.** $s=31,25km$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $(P): v(t)=at^2+bt+c$.

Vì (P) qua $A(0;1)$ và có đỉnh $I(2;8)$ nên ta có

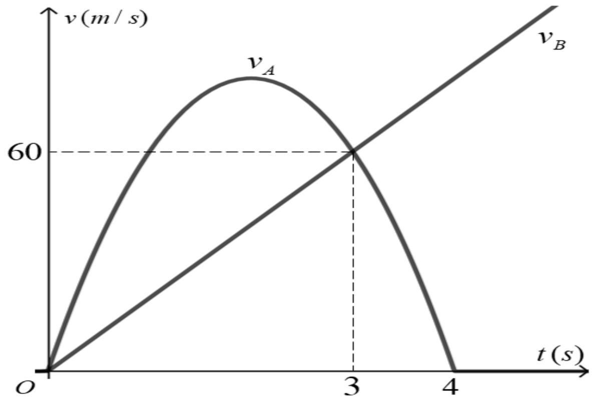
$$\begin{cases}1=c\\ -\dfrac{b}{2a}=2\\ 8=4a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=c\\ 4a+b=0\\ 4a+2b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\ b=7\\ a=\dfrac{-7}{4}\end{cases}$$

được phương trình là $v(t)=\dfrac{-7}{4}t^2+7t+1$.

Ngoài ra tại $t=3$ ta có $v=\dfrac{25}{4}$.

Vậy quãng đường cần tìm là: $s=\int\limits_0^3\left(\dfrac{-7}{4}t^2+7t+1\right)\mathrm{d}t+\int\limits_3^5\dfrac{25}{4}\mathrm{d}t=31,25\ (km)$.

Câu 17: Cho đồ thị biểu thị vận tốc của hai chất điểm A và B xuất phát cùng lúc, bên cạnh nhau và cùng trên một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm A là một parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của chất điểm B là một đường thẳng như hình vẽ sau:



Hỏi sau khi đi được 3 giây, khoảng cách của hai chất điểm là bao nhiêu mét?

A. $90\,m$. **B.** $125m$. **C.** $270\,m$. **D.** $190\,m$.

Lời giải

Chọn A

Gọi v_A là vận tốc của chất điểm A. Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số vận tốc của chất điểm A theo thời gian có đồ thị là một parabol có dạng $v_A(t)=at^2+bt+c\ \ (t\ge 0)(a,b,c\in\mathbb{R})$

Dựa vào đồ thị ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}v_A(0)=0\\ v_A(3)=60\\ v_A(4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a.0+b.0+c=0\\ a.3^2+b.3=60\\ a.4^2+b.4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ 9a+3b=60\\ 16a+4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-20\\ b=80\\ c=0\end{cases}$$

Suy ra $v_A(t)=-20t^2+80t\ \ (t\ge 0)$.

Vậy quãng đường chất điểm A đi được trong 3 giây đầu tiên là:

$$S_A=\int\limits_0^3 v_A(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^3\left(-20t^2+80t\right)\mathrm{d}t=180(m).$$

Gọi v_B là vận tốc của chất điểm B .Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số vận tốc của chất điểm B theo thời gian có đồ thị là một đường thẳng có dạng $v_B(t)=at+b\ \ (t\ge 0)(a,b\in\mathbb{R})$

Dựa vào đồ thị ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v_B(0)=0 \\ v_B(3)=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.0+b=0 \\ a.3=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=20 \\ b=0 \end{cases}$$

Suy ra $v_B(t)=20t\ (t\geq 0)$.

Vậy quãng đường chất điểm B đi được trong 3 giây đầu tiên là:

$$S_B=\int_0^3 v_B(t)\mathrm{d}t=\int_0^3 20t\mathrm{d}t=90(m).$$

Khi đó, khoảng cách của hai chất điểm bằng: $|180-90|=90(m)$.

Câu 18: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=\dfrac{1}{t^2+3t+2}(m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc chuyển động của vật là $v(t)$. Hỏi vào thời điểm $t=10(s)$ thì vận tốc của vật là bao nhiêu, biết $v'(t)=a(t)$ và vận tốc ban đầu của vật là $v_0=3\ln 2(m/s)$?

A. $2,69(m/s)$. **B.** $2,31(m/s)$. **C.** $2,86(m/s)$. **D.** $1,23(m/s)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int \dfrac{1}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t$

$$=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right|+C$$

$v(0)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+C=3\ln 2 \Rightarrow C=4\ln 2$

Tính $v(10)=\ln\left(\dfrac{11}{12}\right)+4\ln 2\approx 2,69$.