

Digitale Regelungen

Kapitel 4: Diskrete Parameter- und Zustandsschätzung stochastischer Prozesse

Kapitel 4.3: Kalman-Filter und erweitertes Kalman-Filter
(Stand 09.01.2019)

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Maas

Fachgebiet Elektromechanische Konstruktionen

juergen.maas@tu-berlin.de

+49 (0) 30 314 21177

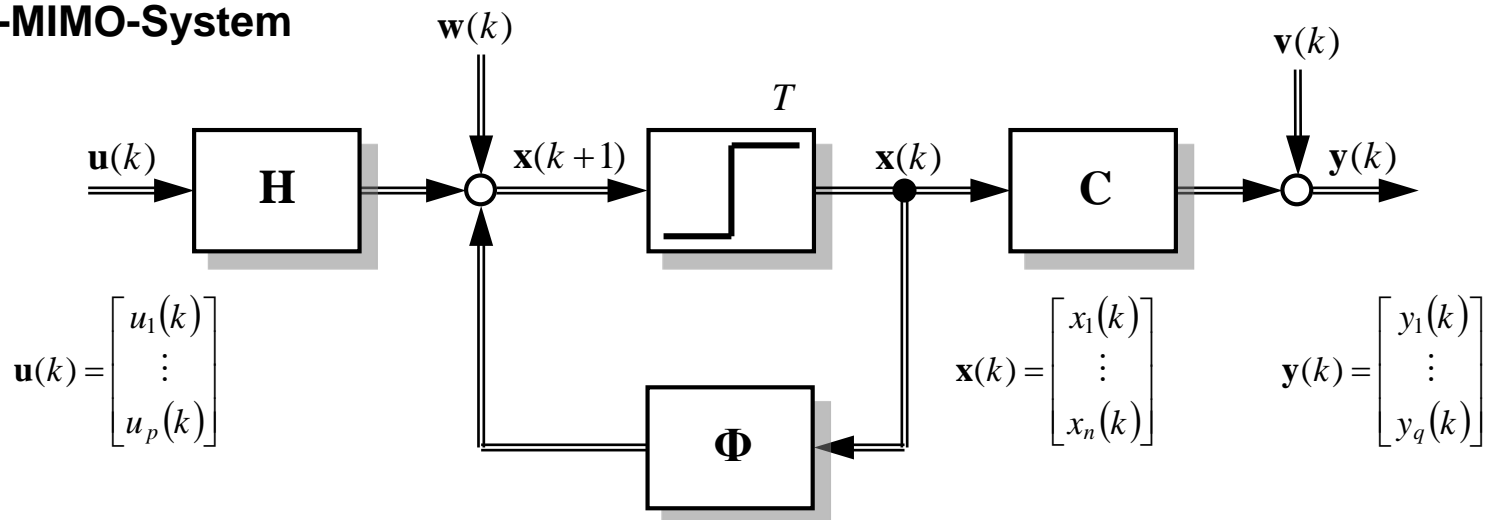


4.3 Kalman-Filter – Einführung (diskreter Fall)

Mit dem Zustandsbeobachter nach Luenberg (siehe Kapitel 1.2) können beliebige Anfangswerte des Zustandsvektors nach einer endlichen Zeit geschätzt werden. Auch deterministisch auftretende Störungen können ebenfalls berücksichtigt werden (siehe Kapitel 1.3, Regelung mechatronischer Systeme).

Treten hingegen fortlaufend Störungen stochastischer Natur auf, ist eine Erweiterung des Systemmodells notwendig. Hierzu werden die wahren Ausgangsgrößen $y(k)$, die über die Ausgangsmatrix C aus dem Zustandsvektor $x(k)$ gebildet werden, zusätzlich mit dem Rauschvektor $v(k)$ überlagert. Außerdem wird zur Berücksichtigung von Modell-ungenauigkeiten dem Zustandsvektor $x(k+1)$ das Systemrauschen $w(k)$ überlagert.

LTI-MIMO-System



4.3 Kalman-Filter – Voraussetzungen

Damit ergeben sich für das lineare zeitinvariante, diskrete mathematische Modell:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (\text{Zustandsdifferenzen-Gleichung})$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (\text{Messgleichung unter Berücksichtigung des Rauschens})$$

Die beiden stochastischen Störgrößen $\mathbf{v}(k)$ und $\mathbf{w}(k)$ beschreiben stationäre, mittelwertfreie und zeitlich unkorrelierte Rauschprozesse, für die gilt:

$$\left. \begin{aligned} F\{\mathbf{v}(k)\} &= F\{\mathbf{v}(k+i)\} \\ F\{\mathbf{w}(k)\} &= F\{\mathbf{w}(k+i)\} \end{aligned} \right\} \quad i \geq -k \text{ und ganzzahlig}$$

Die Verteilungsfunktion F stationärer Prozesse hängt nicht von der Verschiebung i ab.

$$\left. \begin{aligned} E\{\mathbf{v}(k)\} &= \mu_v = 0 \\ E\{\mathbf{w}(k)\} &= \mu_w = 0 \end{aligned} \right\}$$

Die Erwartungswerte mittelwertfreier Prozesse sind Null.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{vv} &= \text{Cov}\{\mathbf{v}(k)\} = E\{(\mathbf{v}(k) - \mu_v) \cdot (\mathbf{v}(k) - \mu_v)^T\} = E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{v}(k)^T\} \\ \mathbf{Q}_{ww} &= \text{Cov}\{\mathbf{w}(k)\} = E\{(\mathbf{w}(k) - \mu_w) \cdot (\mathbf{w}(k) - \mu_w)^T\} = E\{\mathbf{w}(k) \cdot \mathbf{w}(k)^T\} \end{aligned} \right\}$$

Kovarianzmatrizen des Mess- und Systemrauschens

$$\left. \begin{aligned} E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{w}(k)^T\} &= E\{(\mathbf{v}(k) - \mu_v) \cdot (\mathbf{w}(k) - \mu_w)^T\} + \mu_v \mu_w = 0 \\ E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{x}(k)^T\} &= E\{(\mathbf{v}(k) - \mu_v) \cdot (\mathbf{x}(k) - \mu_x)^T\} + \mu_v \mu_x = 0 \\ E\{\mathbf{w}(k) \cdot \mathbf{x}(k)^T\} &= E\{(\mathbf{w}(k) - \mu_w) \cdot (\mathbf{x}(k) - \mu_x)^T\} + \mu_w \mu_x = 0 \end{aligned} \right\}$$

Die Abtastwerte zweier zeitdiskreter Signale (siehe links) sind zeitlich unkorreliert, wenn ihre Kovarianz verschwindet. Sie sind zudem orthogonal (\perp) zueinander, da mind. einer der Mittelwerte Null und damit die Korrelation Null ist, wie dies für die Rauschprozesse angenommen wird.

4.3 Kalman-Filter – Einführung (diskreter Fall)

Zur Herleitung und Struktur des Kalman-Filters sowie der notwendigen Filtergleichungen werden folgende Schritte durchgeführt:

- Definition der Anforderungen an die Messgrößen (siehe Folie 3)
- Minimierung des quadratischen Schätzfehlers
- Aufspaltung der Messdaten in aktuelle und vergangenen Größen zur Bildung einer Rekursionsvorschrift
- Herleitung der Zustandsgleichung des Kalman-Filters
- Herleitung der Filtergleichungen
- Berücksichtigung von deterministischen Eingangsgrößen

Beim Kalman-Filter wird der Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}(k)$ durch Minimierung des Ausdrucks $E\{(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k))^T \cdot (\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k))\}$ (Erwartungswert des quadratischen Fehlers) dem wahren Zustandsvektor $\mathbf{x}(k)$ angepasst, wofür nachfolgend das häufig in der Literatur (siehe [1]) vorgeschlagene rekursive Schema hergeleitet wird.

4.3.1 Kalman-Filter – Ansatz

Mit Hilfe des Kalman-Filters soll der unbekannte Zustandsvektor $\mathbf{x}(k)$ eines linearen diskreten Modells mit stochastischen Eingangsgrößen durch den Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}(k)$ ermittelt werden. Hierfür stehen die gemessenen Daten zum Abtastzeitpunkt sowie alle vergangenen Messdaten zur Verfügung. Diese werden in einer Matrix zusammengefasst:

所有过去采集到的测量数据都存到矩阵里

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{q(k+1) \times 1}.$$

Der Schätzvektor wird als Produkt aus der Parametermatrix mit dem Messvektor gebildet:

估计向量由参数向量和测量向量的乘积构成

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \boldsymbol{\theta}(k) \cdot \mathbf{z}(k),$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\theta}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1^T \\ \boldsymbol{\theta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_n^T \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times q(k+1)}.$$

$$\hat{x}_i(k) = \boldsymbol{\theta}_i^T \cdot \mathbf{z}(k) = \mathbf{z}^T(k) \cdot \boldsymbol{\theta}_i \quad i = 1 \dots n$$

4.3.1 Kalman-Filter – Optimierungsansatz

Zur Bestimmung des unbekannten Parametervektors wird der Erwartungswert der Summe der quadrierten Komponenten des Schätzfehlervektors minimiert:

$$\min \left(E \left\{ \sum_{i=1}^n (e_i(k))^2 \right\} \right) = \min \left(E \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2 \right\} \right)$$

Unter Berücksichtigung der Definition des Schätzvektors ergibt sich:

$$\begin{aligned} \min \left(E \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2 \right\} \right) &= \min \left(\sum_{i=1}^n E \left\{ (x_i(k) - \boldsymbol{\theta}_i^T \cdot \mathbf{z}(k))^2 \right\} \right) \\ &= \min \left(\sum_{i=1}^n \left[E \{ x_i(k)^2 \} - 2 \cdot E \{ x_i(k) \cdot \boldsymbol{\theta}_i^T \cdot \mathbf{z}(k) \} + E \{ (\boldsymbol{\theta}_i^T \cdot \mathbf{z}(k))^2 \} \right] \right) \\ &= \min \left(\sum_{i=1}^n \left[E \{ x_i(k)^2 \} - 2 \cdot E \{ x_i(k) \cdot \mathbf{z}(k) \} \cdot \boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_i^T \cdot E \{ \mathbf{z}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} \cdot \boldsymbol{\theta}_i \right] \right) \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung eines Minimums ergibt sich mit:

$$\frac{\partial E \left\{ \sum_{i=1}^n (e_i(k))^2 \right\}}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} = \mathbf{0}^T$$

4.3.1 Kalman-Filter – Optimierungsansatz

$$\frac{\partial E \left\{ \sum_{i=1}^n (e_i(k))^2 \right\}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}^T = \sum_{i=1}^n \left[-2 \cdot E \{ x_i(k) \cdot \mathbf{z}(k) \} + 2 \cdot E \{ \mathbf{z}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} \cdot \boldsymbol{\theta}_i \right] = -2 \cdot E \{ \mathbf{z}(k) \cdot \mathbf{x}(k)^T \} + 2 \cdot E \{ \mathbf{z}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} \cdot \boldsymbol{\theta}^T$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{0} = E \{ \mathbf{x}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} - \boldsymbol{\theta} \cdot E \{ \mathbf{z}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} = E \{ \mathbf{x}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} - E \{ \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{z}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{0} = E \{ \mathbf{x}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{z}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} = E \{ (\mathbf{x}(k) - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{z}(k)) \cdot \mathbf{z}(k)^T \}$$

$$\text{Mit } \hat{\mathbf{x}}(k) = \boldsymbol{\theta}(k) \cdot \mathbf{z}(k) \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}(k)^T = \mathbf{z}(k)^T \cdot \boldsymbol{\theta}(k)^T$$

$$\text{und } \mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\Rightarrow \mathbf{0} = E \{ (\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} = E \{ \mathbf{e}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \} \quad | \cdot \boldsymbol{\theta}(k)^T$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{0} = E \{ \mathbf{e}(k) \cdot \mathbf{z}(k)^T \cdot \boldsymbol{\theta}(k)^T \} = \underbrace{E \{ \mathbf{e}(k) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k)^T \}}_{=0} \quad (1)$$

Damit müssen der geschätzte Zustandsvektor und der Schätzfehler zueinander orthogonal sein (Orthogonalitätsprinzip): $\hat{\mathbf{x}}(k) \perp \mathbf{e}(k)$

4.3.1 Kalman-Filter – Aufspaltung der Daten

Der Messvektor und die Parametermatrix können in aktuelle und vergangenen Komponenten aufgespalten werden (**K**: Kalman-Matrix):

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_q(0) \end{matrix} \\ y_1(k-1) \\ \vdots \\ y_q(k-1) \\ \hline y_1(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(k-1) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1^T \\ \boldsymbol{\theta}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{10}^T & \boldsymbol{\theta}_{11}^T & \cdots & \boldsymbol{\theta}_{1k}^T \\ \boldsymbol{\theta}_{20}^T & \boldsymbol{\theta}_{21}^T & \cdots & \boldsymbol{\theta}_{2k}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{n0}^T & \boldsymbol{\theta}_{n1}^T & \cdots & \boldsymbol{\theta}_{nk}^T \end{bmatrix} = [\mathbf{J}(k) \quad \mathbf{K}(k)]$$

$$\boldsymbol{\theta}_{ij}^T = [\theta_{ij,1} \quad \theta_{ij,2} \quad \cdots \quad \theta_{ij,q}]$$

für $i = 1 \dots n, \quad j = 0 \dots k$

Der Schätzwert ergibt sich dann zu:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \boldsymbol{\theta}(k) \cdot \mathbf{z}(k) = [\mathbf{J}(k) \quad \mathbf{K}(k)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}(k-1) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k), \text{ mit } \mathbf{K} \in \Re^{n \times q}. \quad (2)$$

4.3.1 Kalman-Filter – Einsetzen in notwendige Bed.

Mit der Orthogonalitätseigenschaft (1) können Schätzfehler und Parametermatrix dann mit (2) beschrieben werden durch:

$$\mathbf{0} = E\left\{\left(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)\right) \cdot \mathbf{z}(k)^T\right\} = E\left\{\left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k)\right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}(k-1)^T & \mathbf{y}(k)^T \end{bmatrix}\right\}.$$

Wird die Messgleichung $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$ eingesetzt ergibt sich:

$$\mathbf{0} = E\left\{\left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k))\right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}(k-1)^T & \mathbf{y}(k)^T \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{0} = E\left\{\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{x}(k) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k)\right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}(k-1)^T & \mathbf{y}(k)^T \end{bmatrix}\right\}$$

Durch Aufspaltung in die Erwartungswerte für die vergangenen Messwerte und den aktuellen Messwert ergeben sich die Gleichungen:

$$\mathbf{0} = E\left\{\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{x}(k) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k)\right) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\right\} \quad (3a)$$

$$\mathbf{0} = E\left\{\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{x}(k) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k)\right) \cdot \mathbf{y}(k)^T\right\} \quad (3b)$$

Werden die Eingangswerte zunächst vernachlässigt, kann die um einen Abtastschritt verschobene Zustandsgleichung eingesetzt werden:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \Rightarrow \mathbf{x}(k) = \Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1)$$

4.3.1 Kalman-Filter – Aufspaltung der Daten

$$(3a) \Rightarrow \mathbf{0} = E \left\{ \left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot (\Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1)) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) \right] \cdot \mathbf{z}(k-1)^T \right\}$$

$$(3b) \Rightarrow \mathbf{0} = E \left\{ \left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot (\Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1)) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) \right] \cdot \mathbf{y}(k)^T \right\}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\mathbf{0} = E \left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{w}(k-1) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) \right\} \cdot \mathbf{z}(k-1)^T$$

$$\mathbf{0} = E \left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{w}(k-1) - \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) \right\} \cdot \mathbf{y}(k)^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot E \left\{ \mathbf{x}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T \right\} + \\ & (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot E \left\{ \mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T \right\} - \\ & \mathbf{J}(k) \cdot E \left\{ \mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T \right\} - \\ & \mathbf{K}(k) \cdot E \left\{ \mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T \right\} \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot E \left\{ \mathbf{x}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T \right\} + \\ & (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot E \left\{ \mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T \right\} - \\ & \mathbf{J}(k) \cdot E \left\{ \mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T \right\} - \\ & \mathbf{K}(k) \cdot E \left\{ \mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{y}(k)^T \right\} \end{aligned} \quad (4b)$$

Die Erwartungswerte in (4) werden im folgenden einzeln brachtet.

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Zustandsgleichung

Aus den Anforderungen an die stochastischen Größen nach Folie 3 und mit

$$E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} = \mathbf{0} \quad \mathbf{w} \perp \mathbf{z},$$

$$E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} = \mathbf{0} \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{z},$$

folgt unter Berücksichtigung von $\mathbf{y}^T(k) = \mathbf{x}^T(k) \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{v}^T(k)$ und $\mathbf{x}^T(k) = \mathbf{x}^T(k-1) \cdot \Phi^T + \mathbf{w}^T(k-1)$:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} &= E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k)^T\} \cdot \mathbf{C}^T + \underbrace{E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{v}(k)^T\}}_{=\mathbf{0}, \mathbf{w} \perp \mathbf{v}} \\ &= E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k)^T\} \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \underbrace{E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k-1)^T\}}_{=\mathbf{0}, \mathbf{w} \perp \mathbf{x}} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{C}^T + E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{w}(k-1)^T\} \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \underbrace{E\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{w}(k-1)^T\}}_{\text{red box}} \cdot \mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T, \end{aligned}$$

mit der Kovarianzmatrix \mathbf{Q}_{ww} des Systemrauschens.

Analog führt folgender Term auf die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{vv} des Messrauschens:

$$E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} = \underbrace{E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{x}(k)^T\}}_{=\mathbf{0}, \mathbf{v} \perp \mathbf{x}} \cdot \mathbf{C}^T + \underbrace{E\{\mathbf{v}(k) \cdot \mathbf{v}(k)^T\}}_{\text{red line}} = \mathbf{R}_{vv}.$$

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Zustandsgleichung

Einsetzen der Zusammenhänge in das Gleichungssystem (4) liefert:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot E\{\mathbf{x}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} + \mathbf{J}(k) \cdot E\{\mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} \quad (5a)$$

$$(\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot E\{\mathbf{x}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} + \mathbf{J}(k) \cdot E\{\mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \quad (5b)$$

Unter Verwendung des Schätzfehlers $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \Rightarrow \mathbf{x}(k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{e}(k-1)$ für die Gleichung (5a) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot E\{(\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{e}(k-1)) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} + \mathbf{J}(k) \cdot E\{\mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} \\ \Leftrightarrow \mathbf{0} &= (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \left[E\{\hat{\mathbf{x}}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} + E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} \right] + \mathbf{J}(k) \cdot E\{\mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} \end{aligned}$$

Wird nun die notwendige Bedingung $E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} = \mathbf{0}$ nach Gl. (1) eingesetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot E\{\hat{\mathbf{x}}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} + \mathbf{J}(k) \cdot E\{\mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{z}(k-1)^T\} \\ \Leftrightarrow \mathbf{0} &= E\left\{ \left[(\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) \right] \cdot \mathbf{z}(k-1)^T \right\}, \end{aligned}$$

ist mit der nachfolgenden (hinreichenden) Wahl die obige Gleichung erfüllt:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1). \quad (6)$$

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Zustandsgleichung

Mit der durch Aufspaltung der Daten vorgenommenen Definition in vergangene und aktuelle Messwerte und Parameter für den geschätzten Zustandsvektor (F. 8)

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k) \Rightarrow \mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k),$$

und Einsetzen in (6) kann die Schätzgleichung des Kalman-Filters bestimmt werden:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}(k) &= \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k) \\ &= \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) - \mathbf{y}(k)] \end{aligned}$$

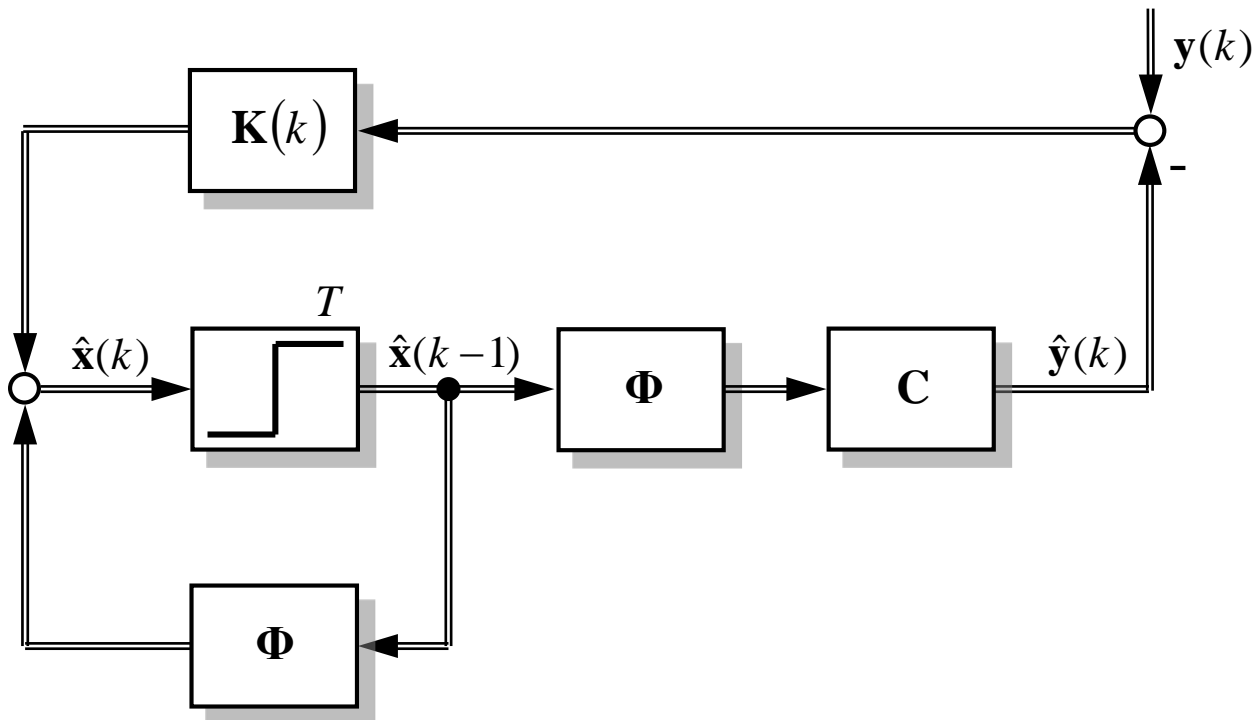
Zur Schätzung des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}(k)$ aus dem vergangenen Schätzvektor $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ und dem aktuellen Messvektor $\mathbf{y}(k)$ erhält man schließlich

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1)], \quad (7)$$

mit der Kalman-Matrix $\mathbf{K}(k)$.

4.3.2 Kalman-Filter – Struktur

Für die Struktur des Kalman-Filters folgt damit unter der bisherigen Vernachlässigung der Eingangsgrößen mit $\mathbf{u}(k) = 0$:



$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [y(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1)]$$

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Filtergleichungen

Die zweite, bisher nicht genutzte Gleichung (5b) von Folie 12 kann nun verwendet werden, um die Kalman-Matrix $\mathbf{K}(k)$ zu bestimmen.

$$(\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot E\{\mathbf{x}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} + \mathbf{J}(k) \cdot E\{\mathbf{z}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv}$$

$$\mathbf{J}(k) \cdot \mathbf{z}(k-1) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) \quad \begin{array}{l} \text{(aus hinreichender} \\ \text{Bedingung (6) auf Folie 12)} \end{array}$$

$$\Rightarrow E\left\{(\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T + ((\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1)) \cdot \mathbf{y}(k)^T\right\} \\ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv}$$

$$\Leftrightarrow E\left\{(\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \underbrace{[\mathbf{x}(k-1) - \hat{\mathbf{x}}(k-1)]}_{\mathbf{e}(k-1)} \cdot \mathbf{y}(k)^T\right\} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv}$$

$$\Leftrightarrow E\left\{(\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\right\} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \quad (8)$$

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Filtergleichungen

Für den Erwartungswert aus dem Produkt von Schätzfehler und Messvektor gilt:

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} &= E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k)^T\} \cdot \mathbf{C}^T + \underbrace{E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{v}(k)^T\}}_{=0, \mathbf{e} \perp \mathbf{v}} \\
&= E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k)^T\} \cdot \mathbf{C}^T \\
&= E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k-1)^T\} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{C}^T + \underbrace{E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{w}(k-1)^T\}}_{=0, \mathbf{e} \perp \mathbf{w}} \cdot \mathbf{C}^T \\
&= E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k-1)^T\} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{C}^T \quad (9)
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Definition des Schätzfehlers sowie der Orthogonalität von Zustandsvektor \mathbf{x} zu Schätzfehlervektor \mathbf{e} (Folie 7, Gl. (1)) mit

$$\mathbf{x}(k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{e}(k-1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{x}(k-1)^T\} &= E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot [\hat{\mathbf{x}}(k-1)^T + \mathbf{e}(k-1)^T]\} \\
&= \underbrace{E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1)^T\}}_{=0, \mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{x}}} + E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{e}(k-1)^T\} = E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{e}(k-1)^T\}
\end{aligned}$$

$$\text{Für (9)} \Rightarrow E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{y}(k)^T\} = E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{e}(k-1)^T\} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{C}^T$$

$$\text{und für (8): } (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot E\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{e}(k-1)^T\} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{C}^T = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}.$$

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Filtergleichungen

Die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers wird gewöhnlich bezeichnet mit

$$E\{\mathbf{e}(k) \cdot \mathbf{e}(k)^T\} = \mathbf{P}(k).$$

Zur Bestimmung der Kalman-Matrix $\mathbf{K}(k)$ folgt dann für Gl. (10):

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot \Phi \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{C}^T = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot \mathbf{C}^T - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R} \\
 \Leftrightarrow & \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{C} \cdot (\Phi \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T + \mathbf{Q}_{ww}) \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R}] = (\Phi \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T + \mathbf{Q}_{ww}) \cdot \mathbf{C}^T
 \end{aligned}$$

Werden die Klammerausdrücke (...) durch die bezogenen Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}'(k) = \Phi \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T + \mathbf{Q}_{ww}$$

abgekürzt, ergibt sich für die Kalman-Matrix $\mathbf{K}(k)$:

$$\mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{C} \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R}] = \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}(k) = \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T [\mathbf{C} \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1}$$

Zur Bestimmung von $\mathbf{K}(k)$ ist nun noch die Kovarianzmatrix $\mathbf{P}(k)$ des Schätzfehlers zu bestimmen.

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Filtergleichungen

Für den Schätzfehler $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ gilt unter Verwendung der F. 3, 9, 13 mit

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1)] \text{ nach Gl.(7)}$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{y}(k)$$

und mit $\mathbf{x}(k) = \Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1)$ sowie $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k) &= \Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) - (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) - \\ &\quad \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \mathbf{x}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}(k-1) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{w}(k-1) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{v}(k). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Definition der Schätzfehler-Kovarianzmatrix ergibt sich mit

$$\mathbf{E}\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{w}(k-1)^T\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{v}(k-1)^T\} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{v}(k-1)^T\} = \mathbf{0}:$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) = \mathbf{E}\{\mathbf{e}(k) \cdot \mathbf{e}(k)^T\} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \underbrace{\mathbf{E}\{\mathbf{e}(k-1) \cdot \mathbf{e}(k-1)^T\}}_{\mathbf{P}(k-1)} \cdot \Phi^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \\ &\quad (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \underbrace{\mathbf{E}\{\mathbf{w}(k-1) \cdot \mathbf{w}(k-1)^T\}}_{\mathbf{Q}_{ww}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \underbrace{\mathbf{E}\{\mathbf{v}(k-1) \cdot \mathbf{v}(k-1)^T\}}_{\mathbf{R}_{vv}} \cdot \mathbf{K}(k)^T \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \Phi \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{Q}_{ww} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \cdot \mathbf{K}(k)^T$$

4.3.2 Kalman-Filter – Herleitung der Filtergleichungen

Die rekursive Vorschrift zur Berechnung der Schätzfehler-Kovarianzmatrix lautet damit:

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \underbrace{(\Phi \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T + \mathbf{Q}_{ww})}_{\mathbf{P}'(k)} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \cdot \mathbf{K}(k)^T$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \cdot \mathbf{K}(k)^T$$

Die Filtergleichungen zur Berechnung der Kalman-Matrix \mathbf{K} ergeben sich dann wie folgt:

$$\mathbf{P}'(k) = \Phi \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T + \mathbf{Q}_{ww}$$

Bestimmung der bezogenen
Kovarianzmatrix

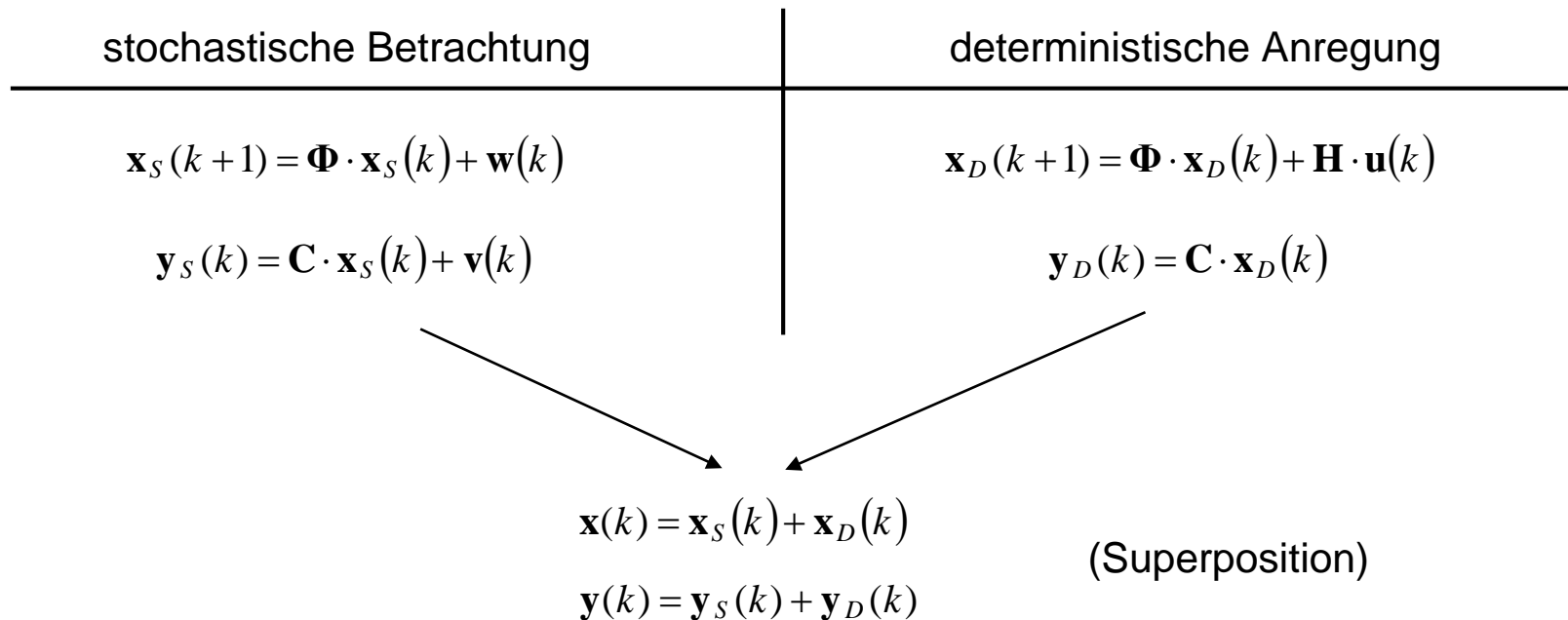
$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T [\mathbf{C} \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{vv}]^{-1}$$

Berechnung der Kalman-
Matrix

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \cdot \mathbf{K}(k)^T$$

Berechnung der Kovarianz-
matrix des Schätzfehlers für
den nächsten Abtastschritt

Bisher wurden die deterministischen Eingangsgrößen nicht berücksichtigt. Damit die hergeleiteten Gleichungen weiterhin verwendet werden können, wird das Zustandsraummodell, das zunächst in einen deterministischen und einen stochastischen Teil unterteilt wurde, abschließend superpositioniert.



Für die optimalen Schätzgrößen gilt:

$$\hat{\mathbf{x}}_S(k) = \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_S(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}_S(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_S(k-1)] \quad (\text{entsprechend Gl. (7), Folie 13})$$

$$\mathbf{x}_D(k) = \Phi \cdot \mathbf{x}_D(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) \quad (\text{siehe Folie zuvor})$$

Die Superposition $\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}_S(k) + \mathbf{x}_D(k)$ ergibt:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_S(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}_S(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_S(k-1)] + \Phi \cdot \mathbf{x}_D(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot [\hat{\mathbf{x}}_S(k-1) + \mathbf{x}_D(k-1)] + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}_S(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_S(k-1)]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot [\hat{\mathbf{x}}_S(k-1) + \mathbf{x}_D(k-1)] + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}_S(k) + \mathbf{y}_D(k) - \mathbf{y}_D(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_S(k-1)]$$

$$\mathbf{y}_D(k) = \mathbf{C} \cdot [\Phi \cdot \mathbf{x}_D(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1)]$$

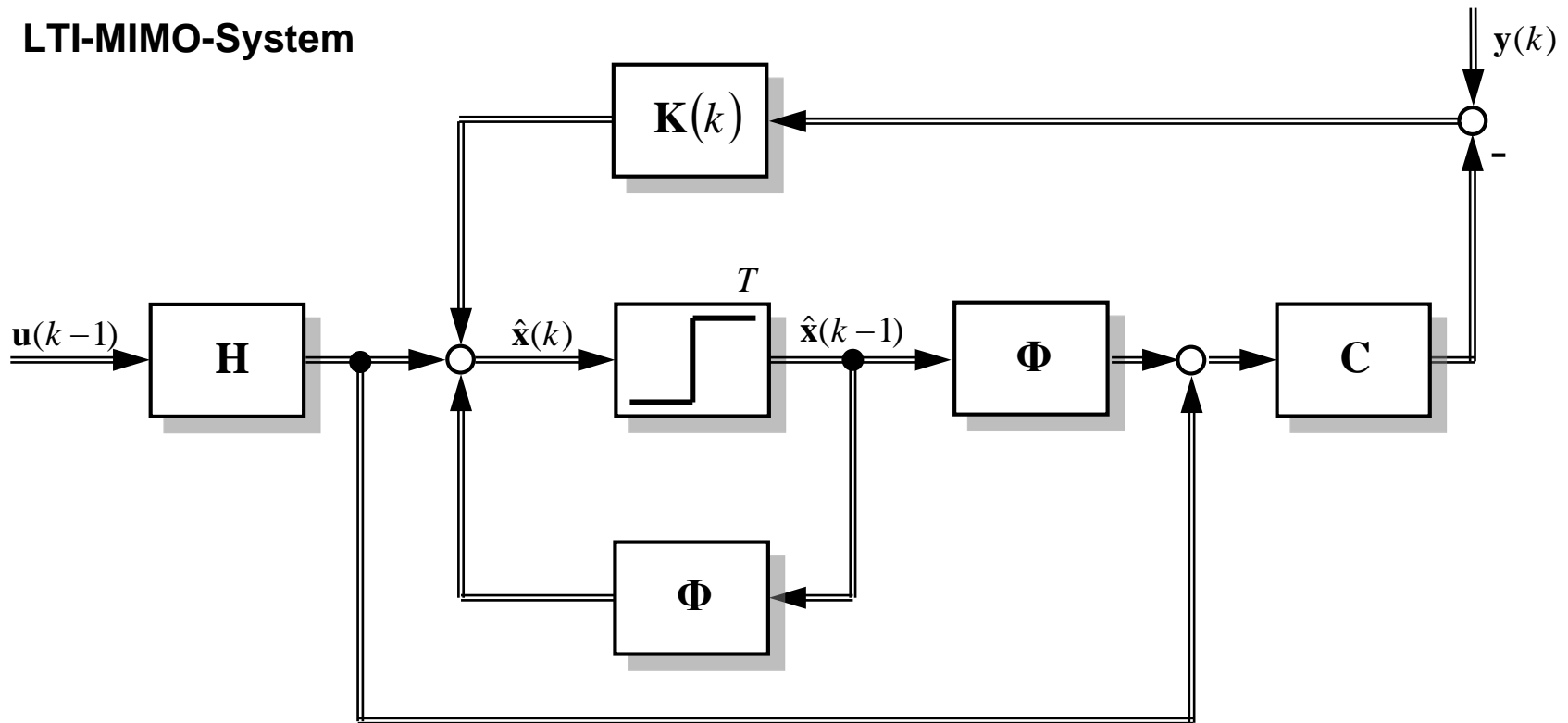
$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot [\hat{\mathbf{x}}_S(k-1) + \mathbf{x}_D(k-1)] + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}_S(k) + \mathbf{y}_D(k) - \mathbf{C} \cdot [\Phi \cdot \mathbf{x}_D(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1)] - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}_S(k-1)]$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot [\hat{\mathbf{x}}_S(k-1) + \mathbf{x}_D(k-1)] + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot \left[\underbrace{\mathbf{y}_S(k) + \mathbf{y}_D(k)}_{\mathbf{y}(k)} - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot [\mathbf{x}_D(k-1) + \hat{\mathbf{x}}_S(k-1)] - \mathbf{C} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) \right]$$

$\hat{\mathbf{x}}(k-1) = \hat{\mathbf{x}}_S(k-1) + \mathbf{x}_D(k-1)$

Für die Struktur des Kalman-Filters erhält man schließlich:

LTI-MIMO-System



$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) - \mathbf{C} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1)] \quad (10)$$

4.3.3 Kalman-Filter – Zusammenfassung

Die Zustandsgleichung des geschlossenen Systems lautet:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{K}(k) \cdot [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \hat{\mathbf{x}}(k-1) - \mathbf{C} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}(k-1)] \quad (10)$$

Die zu implementierenden Filtergleichungen sind:

$$\mathbf{P}'(k) = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \mathbf{\Phi}^T + \mathbf{Q}_{ww} \quad (11)$$

Bestimmung der bezogenen Kovarianzmatrix

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T [\mathbf{C} \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{vv}]^{-1} \quad (12)$$

Berechnung der Kalman-Matrix

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C})^T + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \cdot \mathbf{K}(k)^T \quad (13)$$

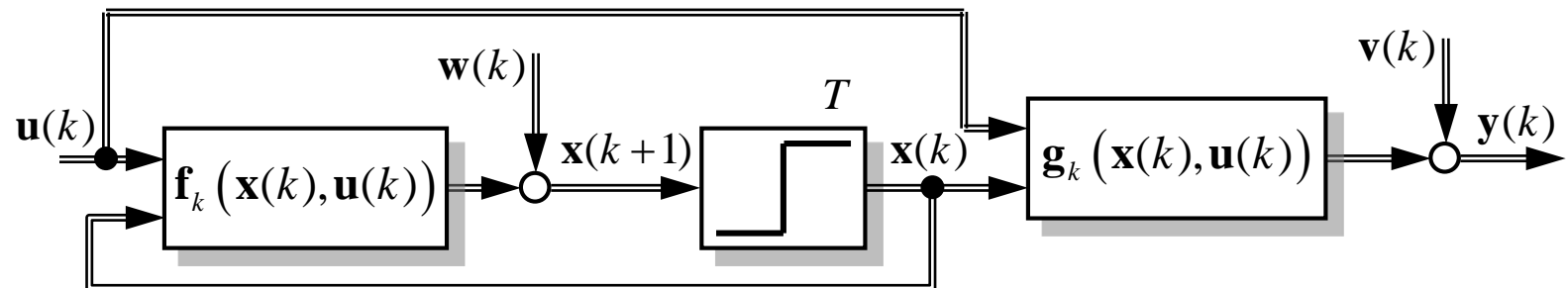
Berechnung der Kovarianzmatrix für nächsten Abtastschritt

Literatur:

- [1] M.S. Grewal und A.P. Andrews: *Kalman Filtering: Theory and Practice*. Wiley-Interscience Publication 2001.

4.3.4 Erweitertes Kalman-Filter für nichtlineare Systeme

- Das bisher behandelte Kalman-Filter eignet sich zur Zustandsschätzung von LTI-Systemen.
- Durch eine vergleichsweise einfache Erweiterung kann es aber auch für nichtlineare, zeitvariante Systeme angewendet werden, die sich im diskreten Fall folgendermaßen darstellen:



- Um auch hier stochastische Störungen zu berücksichtigen, beinhaltet die Ausgangsgröße $y(k)$ den überlagerten Rauschvektor $v(k)$. Außerdem wird zur Berücksichtigung von Modellungenauigkeiten dem Zustandsvektor $x(k+1)$ das Systemrauschen $w(k)$ überlagert.

Literatur:

- [2] R. E. Kalman, A new approach to linear Filtering and Prediction Problems, Journal of Basic Engineering 82 (1) (1960) 35. doi:10.1115/1.3662552.
- [3] G. Welch, G. Bishop, An introduction to the Kalman Filter, University of North Carolina at Chapel Hill.
- [4] R. Isermann, Identification of Dynamic Systems, Springer, ISBN 978-3-540-78878-2.

4.3.4 Erweitertes Kalman-Filter – Prädiktorschritt

Der Algorithmus des erweiterten Kalman-Filters (EKF) lässt sich in einen Prädiktor- und einen Korrekturschritt unterteilen.

Prädiktion:

- Abschätzen der aktuellen Zustandsgrößen mithilfe der Schätzwerte des vergangenen Abtastschrittes und des Vorwärts-Eulers zur numerischen Integration:

$$\hat{\mathbf{x}}_p(k) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + T \cdot \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}(k-1), \mathbf{u}(k-1)).$$

- Transitionsmatrix durch Linearisierung im aktuellen Arbeitspunkt bestimmen:

$$\Phi_k(s) = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_k)^{-1}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{u}(k)}.$$

- Anmerkung: Da die exakte Bestimmung der Transitionsmatrix vor allem bei Systemen höherer Ordnung oftmals zu aufwändig ist, wird häufig die Näherungslösung durch Taylor-Reihenentwicklung und Abbruch nach linearem Glied angewendet:

$$\text{häufig: } \Phi_k(T) \approx \mathbf{I} + T \cdot \mathbf{A}_k = \mathbf{I} + T \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{u}(k)}$$

4.3.4 Erweitertes Kalman-Filter – Korrektorschritt

Während des Korrektorschritts wird die Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ mithilfe der Kalman-Matrix $\mathbf{K}(k)$ und dem Schätzfehler $\mathbf{y}(k) - \mathbf{g}_k(\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{u}(k))$ korrigiert.

Korrektur:

- Bezogene Kovarianzmatrix für aktuellen Arbeitspunkt berechnen:

$$\mathbf{P}'(k) = \Phi(k) \cdot \mathbf{P}(k-1) \cdot \Phi^T(k) + \mathbf{Q}_{ww}.$$

- Kalman-Matrix für aktuellen Arbeitspunkt bestimmen:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}_k^T \left[\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_{vv} \right]^{-1}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{u}(k)}.$$

- Kovarianzmatrix für Arbeitspunkt und nächsten Abtastschritt aktualisieren:

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}_k) \cdot \mathbf{P}'(k) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{R}_{vv} \cdot \mathbf{K}(k)^T.$$

- Bestimmen der Zustandsgrößen $\hat{\mathbf{x}}(k)$ durch Korrektur der zuvor abgeschätzten Zustandsgrößen $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (vgl. Gl. (10)):

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}_p(k) + \mathbf{K}(k) \cdot \left[\mathbf{y}(k) - \mathbf{g}_k(\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{u}(k)) \right].$$

4.3.5 Parametrierung der Kovarianzmatrizen \mathbf{R}_{vv} und \mathbf{Q}_{ww}

- Eine Hauptherausforderung bei der Inbetriebnahme des Kalman-Filters ist die Vorgabe der Kovarianzmatrizen für das Mess- und Systemrauschen.
- Während die Varianz des Messrauschens \mathbf{R}_{vv} vergleichsweise einfach experimentell ermittelt werden kann (z.B. durch Aufnahme des Sensorsignals in Ruhe/ohne Anregung), ist die Parametrierung des Systemrauschens schwieriger.
- Systematische Vorgehensweisen werden beispielsweise in [5] und [6] vorgestellt. Dabei wird angenommen, dass die Einträge $q_{i,j}$ in der \mathbf{Q}_{ww} -Matrix die Verkopplung/ Wechselwirkung zwischen den Zustandsgrößen x_i und x_j beschreiben.
 - \mathbf{Q}_{ww} ist eine symmetrische Matrix, oftmals wird lediglich die Hauptdiagonale besetzt.
 - Aus [5]: Betrag von q_{ii} bestimmt die Dynamik der Schätzung der Zustandsgröße x_i
 - maximal auftretende Änderung pro Abtastschritt: $q_{ii} = \frac{\Delta x_{i,\max}}{T}, \quad i = 1, \dots, n$
 - Aus [6]: Parametrierung aller oder ausgewählter Einträge q_{ij} durch (numerische) Minimierung eines Gütefunktional (z.B. quadratischer Fehler)

$$\min(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T) = \min\left(\left[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\right] \cdot \left[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\right]^T\right) = f(\mathbf{Q}_{ww})$$

„wahre“ Werte z.B. aus Simulation

Schätzwerte vom Kalman-Filter ($f(\mathbf{Q}_{ww})$)

[5]: S. Beineke: „Online-Schätzung von mechanischen Parametern, Kennlinien und Zustandsgrößen drehzahl geregelter elektrischer Antriebe“, Dissertation Universität Paderborn, 1999.

[6]: T. D. Powell: “Automated tuning of an extended kalman filter using the downhill simplex algorithm” Journal of Guidance, Control, and Dynamics 25 (5), 2002.

4.3.6 Störgrößen- und Parameterschätzung mit dem EKF

Mithilfe des (erweiterten) Kalman-Filters lassen sich nicht nur Zustandsgrößen sondern auch Störgrößen und Systemparameter schätzen [4]. Hierfür wird ein augmentiertes System aufgestellt, das neben den Zustandsgrößen $\mathbf{x}(k+1)$ auch die Störgrößen $\mathbf{d}(k+1)$ (Notation \mathbf{d} , da \mathbf{z} bereits auf F. 5 verwendet) sowie den Parametervektor $\boldsymbol{\theta}(k+1)$ enthält:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{d}(k+1) \\ \boldsymbol{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{d}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{f}_{d,k}(\mathbf{d}(k)) + \mathbf{w}_d(k) \\ \mathbf{f}_{\theta,k}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{d}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{w}_\theta(k) \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

➤ Kovarianzmatrix des Systemrauschens:

$$\mathbf{Q}_{ww} = \mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{w}_d(k) \\ \mathbf{w}_\theta(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{w}_d(k) \\ \mathbf{w}_\theta(k) \end{bmatrix}^T \right\}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{d}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{v}(k).$$

Für das augmentierte System kann nach dem zuvor vorgestellten Verfahren ein EKF entworfen werden, wofür geeignete Ansätze zur Beschreibung der Dynamik der Störung $\mathbf{f}_{d,k}(\dots)$ als auch der Parameteränderung $\mathbf{f}_{\theta,k}(\dots)$ erforderlich sind.

Sofern keine modellbasierten Zusammenhänge hierfür bekannt sind, bzw. innerhalb eines Abtastschrittes T von näherungsweise konstanten Größen ausgegangen werden kann, wird häufig von (kleinen) sprungförmigen Änderungen für \mathbf{d} und $\boldsymbol{\theta}$ ausgegangen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{d}(k+1) \\ \boldsymbol{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{d}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{d}(k) + \mathbf{w}_d(k) \\ \boldsymbol{\theta}(k) + \mathbf{w}_\theta(k) \end{bmatrix}.$$

Siehe z.B. auch Unterlagen zum Störgrößenbeobachter in Modul Regelung mechatronischer Systeme