Never confuse movement with action.
ERNEST HEMINGWAY (1899–1961)

2

作用量方法

描述一个系统的物理性质最行之有效的途径就是基于**作用量** $\mathcal{A}$的方法。$\mathcal{A}$的极值给出系统的运动方程，而对相因子$e^{i\mathcal{A}/\hbar}$ 的全部历史进行求和就给出了量子力学的时间演化振幅[1, 2]。对所有历史进行求和是通过**路径积分**来加以实现的。历史上，作用量方法的引入是为了在经典力学中更有效地利用牛顿的方法去建立体系的运动方程，并将它的应用范围扩大到具有广义坐标的多变量物理问题中。在量子力学中，对所有路径的包含作用量的因子$e^{i\mathcal{A}/\hbar}$进行求和则可以替换并推广薛定谔理论。路径积分遍历每一时刻所有的位置和动量变量，并且可确定出所谓的**量子涨落**。它们的尺度由普朗克常数$\hbar$来控制，这与热涨落有着极大的相似之处，热涨落的尺度则由温度T 来控制。在$\hbar \to 0$的极限下，使作用量取极值的路径将具有最大的振幅，这就解释了如何由量子力学而呈现出经典力学。

让人感到高兴的是作用量方法可直接推广到场论中。为了描述电磁学现象，麦克斯韦创立了经典场论这一十分有用的概念。特别是他的方程使得我们可以去研究自由电磁波的传播而不需要去考虑它的源。上个世纪，通过假定时空度规是一个以引力波的形式在空间传播的依赖于时空的场，爱因斯坦创立了他的引力理论。在凝聚态物理中，可引入场的概念来描述许多系统中的激发态，并且朗道将之发展成一个研究相变的普适的工具[3]。这种场被称作是**序参数场**。

最近发现的一个可以应用场论的领域是线状激发的巨正则系综的统计力学，其中包括超流和超导中的涡旋[4]，晶体中的线状缺陷[5]，等等。这种激发扰乱了系统的秩序，相关场量我们称之为**无序场** [4]。

2.1 广义质点动力学

任意给定一个经典系统，它的广义坐标和速度分别为$q_n(t)$ 和$\dot{q}_n(t)$，其典型的作用量形式为

$$\mathcal{A}[q_k] = \int_{t_a}^{t_b} dt\, L\left(q_k(t), \dot{q}_k(t), t\right), \tag{2.1}$$

其中$L\left(q_k(t), \dot{q}_k(t), t\right)$ 被称为该系统的**拉格朗日量**，它通常最多是速度$\dot{q}_k(t)$的平方。具有如此特性的拉格朗日量被称为是时间**局域**的。如果一个理论由一个局域拉格朗日量支配，则此作用量以及整个理论也被称为是局域的。对于$\dot{q}(t)$的平方依赖性有时候只有经过在作用量中进行分部积分后才能显现出来。例

如，$-\int dt\, q(t)\ddot{q}(t)$ 在朗格朗日量里是一个局域项，因为在作用量(2.1)中通过分部积分，它可化成为$\int dt\, \dot{q}^2(t)$。

系统的物理轨迹可由**极值原理**得到。比较如下两个作用量：一个对应于连接两个端点

$$q_k(t_a) = q_{k,a}, \qquad q_k(t_b) = q_{k,b}, \tag{2.2}$$

的轨道$q_k(t)$；另一个对应于连接同样两个端点而相对于前一条有无穷小偏离的轨道$q'_k(t) \equiv q_k(t) + \delta q_k(t)$，其中$\delta q_k(t)$ 称为轨道的**变分**。由于$q_k(t) + \delta q_k(t)$ 和$q_k(t)$具有相同的端点，因此轨道端点处的变分为零：

$$\delta q(t_a) = 0, \quad \delta q(t_b) = 0. \tag{2.3}$$

相应的作用量的变分为

$$\delta\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}[q_k + \delta q_k] - \mathcal{A}[q_k] = \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k(t)} \delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k(t)} \delta \dot{q}_k(t) \right). \tag{2.4}$$

经过分部积分后，上式变为

$$\delta\mathcal{A} \;=\; \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k(t) + \sum_k \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k(t) \right|_{t_a}^{t_b}. \tag{2.5}$$

在由(2.4)到(2.5)的推导过程中，我们用到了如下事实：由$\delta q_k(t)$ 的定义可知，时间导数的变分等于变分的时间导数，即

$$\delta \dot{q}_k(t) = \dot{q}'_k(t) - \dot{q}_k(t) = \frac{d}{dt}[q_k(t) + \delta q_k(t)] - q_k(t) = \frac{d}{dt}\delta q_k(t). \tag{2.6}$$

用更形式的语言来描述，就是时间导数与轨道的变分相对易：

$$\delta \frac{d}{dt} q_k(t) \equiv \frac{d}{dt} \delta q_k(t). \tag{2.7}$$

利用(2.3)中的性质，可知(2.5) 式右边的边界项为零。对于经典轨道，作用量取极值，即对于所有的变分$\delta q_k(t)$，$\delta\mathcal{A}$都必须为零，这就意味着$q_k(t)$满足如下**欧拉– 拉格朗日方程**

$$\frac{\partial L}{\partial q_k(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k(t)} = 0, \tag{2.8}$$

这就是系统的**运动方程**。对于一个局域拉格朗日量$L(q_k(t), \dot{q}_k(t))$，它最多只包含到$\dot{q}_k$ 的平方项，其相应的欧拉– 拉格朗日方程则是轨道$q_k(t)$ 的二阶微分方程。

一组带质量万有引力粒子的局域拉格朗日量为

$$L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \sum_k \frac{m_k}{2}\, \dot{\mathbf{x}}_k^2(t) + G_{\mathrm{N}} \sum_{k \neq k'} \frac{m_k m_{k'}}{|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k'}(t)|}. \tag{2.9}$$

如果我们将$3N$ 个坐标x_n^i $(n = 1, \ldots, N)$ 等同于$3N$ 个广义坐标q_k $(k = 1, \ldots, 3N)$，则欧拉– 拉格朗日方程(2.8) 刚好就约化为(1.2) 式中的牛顿方程。

对于一个一般的拉格朗日系统，它的能量可以通过由其拉格朗日量构造所谓的**哈密顿量** 来得到。哈密顿量可由如下**勒让德变换**定义：

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L, \tag{2.10}$$

其中

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{2.11}$$

称为**正则动量**。(2.10) 式中的能量构成了哈密顿形式的基础。如果用p_k 和q_k 来表示，则运动方程变为

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{2.12}$$

对于(2.9) 式中的拉格朗日量，其广义动量就等于其物理动量$p_n = m_n \dot{x}_n$，于是，其哈密顿量就由如下牛顿表达式给出

$$H = T + V \equiv \sum_k \frac{m_k}{2} \dot{\mathbf{x}}_k^2 - G_{\rm N} \sum_{k \neq k'} \frac{m_k m_{k'}}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k'}|}. \tag{2.13}$$

第一项为动能，第二项为系统的势能。

2.2 相对论性单粒子

对于一个带质量的相对论性粒子，它的力学作用量为

$$\overset{\rm m}{\mathcal{A}} = \int_{t_a}^{t_b} dt \ \overset{\rm m}{L} \ = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}. \tag{2.14}$$

(2.11)式中的正则动量直接给出粒子的空间动量：

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial \overset{\rm m}{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}. \tag{2.15}$$

在相对论表示中，逆变矢量的导数$\partial \overset{\rm m}{L} / \partial \dot{x}^i$ 是一个具有下指标i 的协变矢量。为了保证(2.15) 式中非相对论性的约定，并能使其保持相对论表示，我们必须作如下定义

$$p_i \equiv -\frac{\partial \overset{\rm m}{L}}{\partial \dot{x}^i} = m\gamma \, \dot{x}_i. \tag{2.16}$$

如此，由勒让德变换而得到的能量为

$$\overset{\mathrm{m}}{H} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - \overset{\mathrm{m}}{L} = -p_i\dot{x}^i - \overset{\mathrm{m}}{L} = m\gamma\,\mathbf{v}^2 + mc^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = m\gamma\,\mathbf{v}^2 + mc^2\frac{1}{\gamma}$$
$$= m\gamma c^2, \tag{2.17}$$

这与(1.157) 式中的能量相一致[请参看(1.152)式]。

我们看到

$$\int_{t_a}^{t_b} dt\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\int_{t_a}^{t_b} dt\sqrt{\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2}. \tag{2.18}$$

这可使(2.14) 式中的作用量写为更加协变的形式。在此表示中，无穷小时间元dt可以由任意类时参量代替，即$t \to \sigma = f(t)$，这样，作用量将取更加一般的形式

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d\sigma\ \overset{\mathrm{m}}{L} = -mc\int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d\sigma\sqrt{g_{ab}\dot{x}^q(\sigma)\dot{x}^b(\sigma)}. \tag{2.19}$$

对于该作用量，我们可以通过构造如下导数来定义对应于参量σ 的广义4-动量：

$$p_a(\sigma) \equiv -\frac{\partial \overset{\mathrm{m}}{L}}{\partial\,\dot{x}^a(\sigma)} = \frac{mc}{\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a(\sigma)\dot{x}^b(\sigma)}}g_{ab}\dot{x}^b(\sigma), \tag{2.20}$$

其中圆点表示对自变量求导。注意，正则动量的定义式中的负号对应于非相对论情形，这是为了使该正则形式与(1.29) 式中闵可夫斯基度规空间部分的负号相协调。关于$\dot{x}^a$ 的导数就如一个具有下指标a 的协变矢量般变换，而物理动量则由逆变矢量p^a 给出。

如果σ 取为固有时τ的话，则(2.20) 式中的平方根与τ 无关

$$\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a(\tau)\dot{x}^b(\tau)} = c, \tag{2.21}$$

于是

$$p_a(\tau) = m\,g_{ab}\dot{x}^b(\tau) = m\,\dot{x}_a(\tau) = mu_a(\tau), \tag{2.22}$$

与之前在(1.152) 式中定义的4-动量相一致。

用固有时表示时，欧拉– 拉格朗日方程为

$$\frac{d}{d\tau}p_a(\tau) = m\frac{d}{d\tau}g_{ab}\dot{x}^{\,b}(\tau) = m\,\ddot{x}_{\,a}(\tau) = 0, \tag{2.23}$$

这意味着自由粒子在闵可夫斯基空间中沿直线运动。

注意，关于$p_a(\sigma)$ 的勒让德变换与物理能量毫无关系。事实上，这一变换恒等于零：

$$\overset{\mathrm{m}}{H}_\sigma = -p_a(\sigma)\,\dot{x}^a(\sigma) - \overset{\mathrm{m}}{L} = -\frac{mc}{\sqrt{\dot{x}_a(\sigma)\dot{x}^a(\sigma)}}\dot{x}_a(\sigma)\dot{x}^a(\sigma) + mc\sqrt{\dot{x}_a(\sigma)\dot{x}^a(\sigma)} \equiv 0. \tag{2.24}$$

原因就在于，在时间的任意参数化$\sigma \to \sigma' = f(\sigma)$下(2.19) 式中的作用量的不变性。对此，我们将从第3章一般性讨论连续对称变换生成元中获得更好的理解（特别参见3.5.3节）。

物理能量则由c 乘以(2.22) 式中4-动量的第零分量$p_0(\tau) = mc\gamma$ 给出，这与(2.17) 中的能量H一致。

2.3 标量场

上节提到的自由经典粒子就是相对论性局域标量自由场论中的量子。

2.3.1 局域性

将(2.1) 式后的那一段中所描述的时间局域性进行推广，场论中的局域性表明作用量为**拉格朗日密度** 的时空积分：

$$\mathcal{A}=\int_{t_a}^{t_b}dt\int d^3x\,\mathcal{L}(x)=\frac{1}{c}\int d^4x\,\mathcal{L}(x). \tag{2.25}$$

根据第2.1节所阐述的时间局域性概念，它应该只平方依赖于场对时间的导数。由于在相对论理论中时间和空间的等价性，对于空间导数将有同样的限制。一个局域拉格朗日密度最多为同一点上场的时空一阶导数的平方。物理上来讲，这意味着位于点x 上的场最多与其无限近邻点$x+dx$ 上的场相互作用，就像具有最近邻弹簧作用的一维链上的带质量粒子。如果其中的导数项不取如此形式，则它们必须至少可以通过对(2.25) 式进行分部积分取得该形式。如果拉格朗日密度是局域的，我们也称此作用量以及整个理论是局域的。

由于一个自由场拉格朗日密度在同一时空点上对于场及其导数都是二次的，因此，对于标量场，它为：

$$\mathcal{L}(x)=\frac{1}{2}\left[\hbar^2\partial_a\phi(x)\partial^a\phi(x)-m^2c^2\phi(x)\phi(x)\right]. \tag{2.26}$$

如果粒子是带电的，则场为复场，相应的拉格朗日密度变为

$$\mathcal{L}(x)=\hbar^2\partial_a\varphi^*(x)\partial^a\varphi(x)-m^2c^2\varphi^*(x)\varphi(x). \tag{2.27}$$

2.3.2 洛仑兹不变性

任何相对论性的拉格朗日密度$\mathcal{L}(x)$ 不仅仅是局域的，同时也必须是标量，即它在洛仑兹变换下同(1.168) 式中的标量场$\phi(x)$ 一样变换：

$$\mathcal{L}(x)\xrightarrow{\Lambda}\mathcal{L}'(x)=\mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \tag{2.28}$$

我们将通过展示$\mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}(x)$ 来验证拉格朗日密度(2.26) 满足这一点。根据定义，$\mathcal{L}'(x')$ 等于

$$\mathcal{L}'(x')=\hbar^2\partial'_a\phi'(x')\partial'^a\phi(x')-m^2c^2\phi'(x')\phi'(x'). \tag{2.29}$$

利用标量场的变换规则(1.168)，我们得到

$$\mathcal{L}'(x')=\hbar^2\partial'_a\phi(x)\partial'^a\phi(x)-m^2c^2\phi(x)\phi(x). \tag{2.30}$$

在此处插入

$$\partial'_a=\Lambda_a{}^b\partial_b,\quad \partial'^a=\Lambda^a{}_b\partial^b. \tag{2.31}$$

利用

$$\Lambda_a{}^b \equiv g_{ac} g^{bd} \Lambda^c{}_d, \tag{2.32}$$

我们看到∂^2 是洛仑兹不变的，

$$\partial'^2 \;=\; \partial^2, \tag{2.33}$$

因此变换后的拉格朗日密度(2.29) 确实与原来的拉氏密度(2.27)是相一致的。

作为标量拉格朗日密度的时空积分，作用量(2.25) 同样是洛仑兹不变的。这可由在(1.240) 式中证明过的时空体元的洛仑兹不变性

$$dx'^0 d^3x' = d^4x' = d^4x \tag{2.34}$$

直接得到。我们可通过下述运算直接进行验证：

$$\mathcal{A}' = \int d^4x\, \mathcal{L}'(x) = \int d^4x'\, \mathcal{L}'(x') = \int d^4x'\, \mathcal{L}(x) = \int d^4x\, \mathcal{L}(x) = \mathcal{A}. \tag{2.35}$$

2.3.3 场方程

通过对作用量(2.25)作关于场的变分，我们可以得到相应标量场的运动方程。考虑复标量场的情况，$\varphi(x)$和$\varphi^*(x)$必须分别独立进行变分。场变量的独立性可由泛函微分法则表示出来：

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(x')} &= \delta^{(4)}(x-x'), \quad \frac{\delta\varphi^*(x)}{\delta\varphi^*(x')} = \delta^{(4)}(x-x'),\\
\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi^*(x')} &= 0, \qquad\qquad\qquad \frac{\delta\varphi^*(x)}{\delta\varphi(x')} = 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

利用此法则以及(1.118) 中的莱布尼兹链式法则，我们计算出作用量(2.25) 的泛函导数如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi^*(x)} &= \int d^4x' \left[\hbar^2 \partial'_a \delta^{(4)}(x'-x)\partial'^a\varphi(x') - m^2c^2\delta^{(4)}(x'-x)\varphi(x')\right]\\
&= (-\hbar^2\partial^2 - m^2c^2)\varphi(x) = 0.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)} &= \int d^4x' \left[\hbar^2 \partial'_a \varphi^*(x')\partial'^a\delta^{(4)}(x'-x) - m^2c^2\varphi^*(x')\delta^{(4)}(x'-x)\right]\\
&= \varphi^*(x)(-\hbar^2 \overleftarrow{\partial}^2 + m^2c^2) = 0,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

其中最后一个微分算符上的指向左边的箭头表示该算符作用于其左边的场变量上。第二个方程就是前一个方程的复共轭。

场方程也可以通过(2.27) 中拉格朗日密度$\mathcal{L}$ 对所有场以及他们的导数作常规偏导直接得到。其实，局域作用量的泛函导数可通过通常的法则用拉格朗日密度的各级导数来展开

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi(x)} - \partial_a \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\varphi(x)\right]} + \partial_a\partial_b \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\partial_b\varphi(x)\right]} + \dots\,, \tag{2.39}$$

对于复共轭场$\varphi^*(x)$ 我们有同样的展开。这些展开都直接来源于(2.36) 的定义关系。在作用量的极值点，场满足欧拉– 拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi(x)} - \partial_a\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\partial_a\varphi(x)} + \partial_a\partial_b\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\partial_a\partial_b\varphi(x)} + \ldots = 0. \tag{2.40}$$

将拉格朗日密度(2.27) 代入，我们得到$\varphi(x)$ 的场方程：

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi^*(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi^*(x)} - \partial_a\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\varphi^*(x)\right]} = (-\hbar^2\partial^2 + m^2c^2)\varphi(x) = 0, \tag{2.41}$$

以及其复共轭$\varphi^*(x)$的场方程。

在(2.25) 中作用量积分的分部积分下，欧拉– 拉格朗日方程是不变的。例如，一个拉格朗日密度在分部积分下等价于(2.27)：

$$\mathcal{L} = -\hbar^2\varphi^*(x)\partial^2\varphi(x) - m^2c^2\varphi^*(x)\varphi(x). \tag{2.42}$$

将之代入(2.40)，$\varphi(x)$ 的场方程的获得就变得异常简单：

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi^*(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi^*(x)} = (-\hbar^2\partial^2 + m^2c^2)\varphi(x) = 0. \tag{2.43}$$

然而，另一方面，$\varphi^*(x)$ 的场方程的推导则会变得相对繁琐。通过计算(2.39) 中所有不为零的导数，我们就得到了(2.43) 式的复共轭：

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi(x)} - \partial_a\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\varphi(x)\right]} + \partial_a\partial_b\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\partial_b\varphi(x)\right]} = (-\hbar^2\partial^2 + m^2c^2)\varphi^*(x) = 0. \tag{2.44}$$

2.3.4 平面波

场方程(2.43) 和(2.44) 的解为量子力学平面波

$$f_{\mathbf{p}}(x) = \mathcal{N}_{p_0}\, e^{-ipx/\hbar} \quad \text{和} \quad f^*_{\mathbf{p}}(x) = \mathcal{N}_{p_0}\, e^{ipx/\hbar}, \tag{2.45}$$

其中$\mathcal{N}_{p_0}$ 取决定能量的归一化因子，且4-动量满足所说的**质壳条件**

$$p^a p_a - m^2c^2 = 0. \tag{2.46}$$

(2.45) 中的两个解相互独立，这一点很重要。物理上，两者最主要的不同是能量的正负号

$$i\partial_0 f_{\mathbf{p}}(x) = p^0 f_{\mathbf{p}}(x), \qquad i\partial_0 f^*_{\mathbf{p}}(x) = -p^0 f^*_{\mathbf{p}}(x). \tag{2.47}$$

由于这个原因，他们将分别被称为正能波函数和负能波函数。后一个的物理意义只有在这个场被量子化后才能够认识清楚。那个时候，他们与反粒子相联系。 然而，场的量子化超出了本书的范围，只是在本书最后的第22.2节中，才略为论述一下它对引力的影响。

2.3.5 作为非相对论极限的薛定谔量子力学

具有拉格朗日密度(2.26) 的标量场作用量(2.25) 的非相对论性极限可由如下方法得到：从$\phi(x)$ 的正频部分去掉对应于静止能量mc^2 的快速震荡因子，并作替换

$$\phi(x) \to e^{-imc^2 t/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2M}}\psi(\mathbf{x},t). \tag{2.48}$$

对于(2.45) 中的平面波$f_p(x)$，$\psi(x)$ 场变为$\mathcal{N}\sqrt{2M}e^{-i(p^0c-mc^2)t/\hbar}e^{i\mathbf{px}/\hbar}$。在大$c$极限下，第一个指数变为$e^{-ip^2t/2M}$ [回顾(1.159)]。该结果正是薛定谔方程

$$\left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M}\partial_{\mathbf{x}}{}^2\right]\psi(\mathbf{x},t) = 0 \tag{2.49}$$

的平面波解。此方程正是非相对论性作用量

$$\mathcal{A} = \int dtd^3x\,\psi^*(\mathbf{x},t)\left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M}\partial_{\mathbf{x}}{}^2\right]\psi(\mathbf{x},t) \tag{2.50}$$

取极值而得到的欧拉– 拉格朗日方程。

请注意，(2.45)中具有负频率的平面波$f_p^*(x)$ 并不具有非相对论性极限，因为它在此极限下会变$\mathcal{N}\sqrt{2M}e^{i(p^0c+mc^2)t/\hbar}e^{i\mathbf{px}/\hbar}$ ，它具有时间系数$e^{2imc^2t/\hbar}$，这在$c\to\infty$的极限下将以无穷快的频率震荡，因此，根据*Riemann-Lebesgue*引理，它为零。这在统计学的意义上是成立的，因为在统计学上零分布意味着所有光滑探测函数与之相乘后的积分都为零。根据Riemann-Lebesgue 引理，在大c 极限下，所有包含$e^{2imc^2t/\hbar}$ 的光滑函数的积分正是此种情况。

2.3.6 自然单位

利用不同于通常物理SMI 或cgs 单位的基本单位l_0, m_0, t_0, E_0 ，我们可以在后面的式子中避免出现$\hbar$ 和c 等常数。这些单位的选取使得$\hbar$ 和c 的取值为1。如果表示为传统的长度、时间、质量和能量，这些**自然单位**为

$$l_0 = \frac{\hbar}{m_0 c}, \qquad t_0 = \frac{\hbar}{m_0 c^2}, \qquad m_0 = M, \qquad E_0 = m_0 c^2, \tag{2.51}$$

其中M 是某个特定的质量。例如，如果我们研究质子，我们会选取$M = m_p$，这样，基本单位为

$$l_0 = 2.103138\times10^{-11}\text{cm} = \text{质子的康普敦波长}, \tag{2.52}$$

$$t_0 = l_0/c = 7.0153141\times10^{-22}\text{sec} = \text{光走过康普敦波长所需的时间}, \tag{2.53}$$

$$m_0 = m_p = 1.6726141\times10^{-24}\text{g}, \tag{2.54}$$

$$E_0 = 938.2592\,\text{MeV}. \tag{2.55}$$

对于其他质量，我们很容易按此单位重新标定。

利用自然单位，就可在所有的公式里消掉c 和$\hbar$ 并且将作用量简单地写为

$$\mathcal{A} = \int d^4x\, \varphi^*(x)(-\partial^2 - m^2)\varphi(x). \tag{2.56}$$

其实，由于我们在处理相对论性粒子，并没有什么原则性的原因要求我们必须假定$\varphi(x)$ 为复场。在非相对论性场论中，为了在作用量(2.50)中得到时间导数项

$$\int dt d^3x\, \psi^*(\mathbf{x},t) i\hbar\partial_t \psi(\mathbf{x},t), \tag{2.57}$$

这是必须的。而对于实场，此项将只不过是个纯粹的边界项，对系统的动力学并无影响。然而，在(2.56) 中，相对论性的场的二阶时间导数确实有着实质性的影响并将导致正确的实场的场方程。在下一章中，我们将更加清楚地看到，复标量场描述无自旋带电粒子，而实场描述中性粒子。

于是，我们也需要考虑具有如下作用量的实场

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int d^4x\, \phi(x)(-\partial^2 - m^2)\phi(x). \tag{2.58}$$

在此种情况下，按惯例我们在前面添加一个因子1/2 以对场进行归一化。

无论是对于(2.56) 或是(2.58) 中的拉格朗日量，欧拉– 拉格朗日方程都将给出*Klein-Gordon*方程

$$(-\partial^2 - m^2)\phi(x) = 0, \quad (-\partial^2 - m^2)\varphi(x) = 0, \quad (-\partial^2 - m^2)\varphi^*(x) = 0. \tag{2.59}$$

2.3.7 哈密顿形式

我们可以为标量场构造哈密顿形式。为此，我们将对正则动量(2.11)作一个适当的推广，方程中的指标k 现在将被替换为连续的空间指标$\mathbf{x}$，于是我们定义如下**场动量**的密度:

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial^0\phi(x)} = \partial_0\phi^*(x), \qquad \pi^*(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial^0\phi^*(x)} = \partial_0\phi(x), \tag{2.60}$$

以及**哈密顿密度**:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \pi(x)\,\partial^0\phi(x) + \partial^0\phi(x)\,\pi^*(x) - \mathcal{L}(x)\\ &= \pi^*(x)\,\pi(x) + \boldsymbol{\nabla}\phi^*(x)\,\boldsymbol{\nabla}\phi(x) + m^2\phi^*(x)\,\phi(x).\end{aligned} \tag{2.61}$$

对于一个实场，我们只不过简单地将复共轭符号去掉即可。对于$\mathcal{H}(x)$ 的空间积分即给出场的哈密顿量

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}(x). \tag{2.62}$$

2.3.8 守恒流

对于薛定谔方程(2.49) 的解$\psi(\mathbf{x},t)$ ，其几率密度为

$$\rho(\mathbf{x},t) \equiv \psi^*(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t), \tag{2.63}$$

相应的粒子流密度为

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) \equiv \frac{\hbar}{2m\,i}\psi^*(\mathbf{x},t)(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}})\psi(\mathbf{x},t) \equiv \frac{\hbar}{2m\,i}\psi^*(\mathbf{x},t)\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\psi(\mathbf{x},t), \tag{2.64}$$

他们满足守恒律

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = -\partial_t\rho(\mathbf{x},t). \tag{2.65}$$

这点可借助于薛定谔方程(2.49) 加以证明。正是由于此项特性，我们可将薛定谔场$\psi(\mathbf{x},t)$在任何时间上进行归一化，因为

$$\partial_t \int d^3x\,\psi^*(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t) = \int d^3x\,\partial_t\rho(\mathbf{x},t) = -\int d^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = 0. \tag{2.66}$$

对于一个相对论性复场$\varphi(x)$，存在相似的局域守恒定律。我们定义**几率流密度**4-矢量(现在我们采用自然单位制，$\hbar = c = 1$)

$$j_a(x) = -i\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_a}\varphi, \tag{2.67}$$

它描述带电标量粒子的几率流。导数算符上的双向箭头就如(2.64) 中一样定义为$\overleftrightarrow{\partial_a} \equiv \overrightarrow{\partial_a} - \overleftarrow{\partial_a}$，即

$$\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_a}\varphi \equiv \varphi^*\partial_a\varphi - (\partial_a\varphi^*)\varphi. \tag{2.68}$$

利用(2.59) 中的Klein-Gordon方程，很容易可以验证此流密度没有4-散度：

$$\partial_a j^a(x) = 0. \tag{2.69}$$

这个四维**流守恒律** 使得我们可以将所讨论的场与电磁理论相联系起来，并且将$ej^a(x)$ 与带电标量粒子的电流等同起来。

守恒流存在的深层原因我们将在第3章中阐述，在那里我们将看到它与作用量(2.56) 在场的相位的任意变换

$$\phi(x) \to e^{-i\alpha}\phi(x) \tag{2.70}$$

下的不变性紧密相连。

$j^a(x)$ 的第零分量

$$\rho(x) = j^0(x), \tag{2.71}$$

描述荷密度。$\rho(x)$ 的空间积分量度总的几率。在自然单位制下，它给出系统的总荷：

$$Q(t) = \int d^3x\,j^0(x). \tag{2.72}$$

根据局域守恒律(2.69)，总的荷与时间无关。这点可以通过如下改写看出来：

$$\dot{Q}(t) = \int d^3x\,\partial_0 j^0(x) = \int d^3x\,\partial_a j^a(x) - \int d^3x\,\partial_i j^i(x) = -\int d^3x\,\partial_i j^i(x). \tag{2.73}$$

假定在无穷远处电流为零[与(1.204)比较]，由**高斯散度定理**，我们可知上式右边为零。

2.4 由作用量的极值导出麦克斯韦方程

前述作用量方法可以很容易地进行推广，并被用于电磁场。通过构造合适的作用量，麦克斯韦场方程可由求极值的方法得到。相关的场为库伦势$\phi\,(\mathbf{x},t)$ 和矢势$\mathbf{A}\,(\mathbf{x},t)$。电场$\mathbf{E}(x)$ 和磁场$\mathbf{B}(x)$ 可以写为库伦势$A^0(\mathbf{x},t)$ 和矢势$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ 的导数形式：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(x) &= -\boldsymbol{\nabla}\phi(x)-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}(x), && (2.74)\\
\mathbf{B}(x) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(x), && (2.75)
\end{aligned}
$$

它们的分量为

$$
\begin{aligned}
E^i(x) &= -\partial_i\phi(x)-\frac{1}{c}\partial_t A^i(x), && (2.76)\\
B^i(x) &= \epsilon^{ijk}\partial_j A^k(x). && (2.77)
\end{aligned}
$$

进一步回想(1.172) 中电场和磁场分别等于协变场张量F^{ab} 的F^{i0} 和$-F^{jk}$ 分量，我们也可将之写为

$$
\begin{aligned}
F^{i0}(x) &= \partial^i\phi(x)-\frac{1}{c}\partial_t A^i(x), && (2.78)\\
F^{jk}(x) &= \partial^j A^k(x)-\partial^k A^j(x), && (2.79)
\end{aligned}
$$

其中$\partial^i=-\partial_i$。这暗示着可以将库伦势和矢势统一在一个4-分量矢势中：

$$
A^a(x)=\begin{pmatrix}\phi\,(\mathbf{x},t)\\ A^i\,(\mathbf{x},t)\end{pmatrix}, \tag{2.80}
$$

利用该矢势，场张量则只是它的4维旋度：

$$
F^{ab}(x)=\partial^a A^b(x)-\partial^b A^a(x). \tag{2.81}
$$

而场$A^a(x)$ 则如(1.209) 中矢量场$j^a(x)$ 般变换：

$$
A^a(x)\xrightarrow{\Lambda}A'^a(x)=\Lambda^a{}_b\,A^b(\Lambda^{-1}x). \tag{2.82}
$$

2.4.1 电磁场作用量

麦克斯韦方程可由如下电磁场作用量得到

$$
\overset{\rm em}{\mathcal{A}}=\frac{1}{c}\int d^4x\,\overset{\rm em}{\mathcal{L}}(x), \tag{2.83}
$$

其中对时间的积分由t_a 积到t_b，就如(2.1) 和(2.25)中那样，相应的拉格朗日密度为

$$
\overset{\rm em}{\mathcal{L}}(x)\equiv\overset{\rm em}{\mathcal{L}}\left(A^a(x),\partial^bA^a(x)\right)=-\frac{1}{4}F^{ab}(x)F_{ab}(x)-\frac{1}{c}j^a(x)A_a(x). \tag{2.84}
$$

它平方依赖于场$A^a(x)$ 和它的导数，这样就定义了局域场论[请回顾第2.3.1节]。并且其中的洛仑兹指标已完全缩并掉了。

如果利用(2.74) 和(2.75) 式，将(2.84) 分解为电场和磁场部分，则它变为

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}^2(x) - \mathbf{B}^2(x)\right] - \rho(x)A^0(x) + \frac{1}{c}\mathbf{j}(x)\mathbf{A}(x). \tag{2.85}$$

由变换律(1.175)、(1.209) 和(2.82) 我们可以得出，在洛仑兹变换下(2.84) 的行为如同一个标量场，就像(2.28) 中那样。结合(2.34) 式，这表明该作用量是洛仑兹不变的。

将$A^0(x)$ 场用4-矢量势$A^a(x)$ 替换后，由欧拉– 拉格朗日方程(2.40) 我们可以得到场方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^a} - \partial_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_b\partial A^a} + \partial_b\partial_c\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_b\partial_c A^a(x)\right]} = 0. \tag{2.86}$$

将拉格朗日密度(2.84)代入，我们就得到

$$\partial_b F^{ab} = -\frac{1}{c}j^a, \tag{2.87}$$

这正是非齐次麦克斯韦方程(1.196)。注意，由于4-**旋度** (2.81) 中的导数的反对称组合，齐次麦克斯韦方程(1.200)

$$\partial_b\tilde{F}^{ab} = 0, \tag{2.88}$$

自动满足。只要4-分量矢势是光滑的并且是单值的，即它满足可积条件

$$(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)A^c(x) = 0 \tag{2.89}$$

上式就是正确的。本书中，对于所有由场的单值性和相应施瓦兹可积条件而导致的恒等式，我们都将称之为**比安基恒等式**。通过这一命名，我们意在强调它们极其相似于黎曼几何中由比安基发现的恒等式，而该式正是黎曼几何中克里斯托夫符号单值性的结果。对它的推导请参阅第 12.5节，在那里我们会看到正是施瓦兹可积条件(12.106) 导致了比安基恒等式(12.115)。

在这个意义上，可以说齐次麦克斯韦方程(2.88) 就是一个比安基恒等式，因为它直接由(2.89)式中A^c 的交换求导计算而得。

2.4.2 电磁场的另一种作用量

对于(2.84) 中的电磁场的拉格朗日密度，还有另外一种表示形式，按照施温格的做法，它直接将场张量作为独立变量包含进来，而仅仅将矢势用作拉格朗日乘子以确保(2.87) 中的非齐次麦克斯韦方程：

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(A^a(x), F_{ab}(x)) = -\frac{1}{4}F^{ab}(x)F_{ab}(x) - \frac{1}{c}\left[j^a(x) + \partial_b F^{ab}(x)\right]A_a(x). \tag{2.90}$$

对此式关于F_{ab} 取极值后可看到，正如(2.81) 式中所示，F_{ab} 即为矢势的4-旋度。它的一个结果就是F_{ab} 满足(1.201) 中的比安基恒等式。

如果将(2.90)分解成电场部分和磁场部分，则它可表达为

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}\left(A^0(x), \mathbf{A}(x), \mathbf{E}(x), \mathbf{B}(x)\right) = \frac{1}{4}\left[\mathbf{E}^2(x) - \mathbf{B}^2(x)\right]$$
$$+ \left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(x) - \rho(x)\right] A^0(x) - \left[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(x) - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E}(x) - \frac{1}{c}\mathbf{j}(x)\right]\cdot\mathbf{A}(x), \quad (2.91)$$

其中，拉格朗日乘子$A^0(x)$ 和$\mathbf{A}(x)$ 直接保证了(1.187) 中的库仑定律和(1.188) 中的安培定律。

上述方程式只在真空中成立。在具有非零介电常数ε 和磁导率μ 的均匀介质中，电位移场为$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ，而磁场为$H = \mathbf{B}/\mu$，相应的拉格朗日密度(2.90) 则为

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \frac{1}{4}\left[\mathbf{E}(x)\cdot\mathbf{D}(x) - \mathbf{B}(x)\cdot\mathbf{H}(x)\right]$$
$$+ \left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}(x) - \rho(x)\right] A^0(x) - \left[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}(x) - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{D}(x) - \frac{1}{c}\mathbf{j}(x)\right]\cdot\mathbf{A}(x). \quad (2.92)$$

现在做关于拉格朗日乘子$A^0(x)$ 和$\mathbf{A}(x)$ 的变分将分别得到(1.192) 和(1.193) 中所示的介质中的库仑和安培定律：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}(x) = \rho(x), \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}(x) - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{D}(x) = \frac{1}{c}\mathbf{j}(x). \quad (2.93)$$

而作关于$\mathbf{D}(x)$ 和$\mathbf{H}(x)$ 的变分则得到和真空中一样的旋度方程(2.74) 和(2.75)，因此齐次麦克斯韦方程(1.189) 和(1.190)，也即比安基恒等式(1.201) 并不受介质的影响。

2.4.3 电磁场的哈密顿量

如同在(2.60)–(2.62) 中那样，通过定义场动量密度

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}}{\partial \partial^0 A^a(x)} = -F_{0a}(x) \quad (2.94)$$

和**哈密顿密度**

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{H}}(x) = \pi_a(x)\,\partial^0 A^a(x) - \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) \quad (2.95)$$

我们可以得到电磁场的哈密顿量。值得注意的是，由于$\partial \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}/\partial\dot{A}^0$ 等于零，所以A^0 不具有共轭场动量。因此A^0 并不是一个合适的动力学变量。事实上，将(2.84) 和(2.94) 代入(2.95)，我们得到

$$\begin{aligned}\overset{\text{em}}{\mathcal{H}} &= -F_{0a}\partial^0 A^a - \overset{\text{em}}{\mathcal{L}} = -\frac{1}{c}F_{0a}F^{0a} - \overset{\text{em}}{\mathcal{L}} - F_{0a}\partial^a A^0 \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right) + \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}A^0 + \frac{1}{c}j^a A_a. \end{aligned} \quad (2.96)$$

将它对全空间进行积分给出

$$\overset{\text{em}}{H} = c\int d^3x\, \overset{\text{em}}{\mathcal{H}} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{E^2}+\mathbf{B}^2\right) - \frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\right]. \tag{2.97}$$

这个结果就是熟知的具有外在电流的电磁场的能量[6]。为了从(2.96) 得到这个结果，分部积分是必不可少的，其中一个无穷远空间表面项被忽略掉，因为那里的荷密度$\rho(x)$ 总是假定为零。这样一来，库仑定律(1.187) 直接就导致了(2.97)。

乍一看，可能会奇怪为什么静电能没有明确地包含在(2.97) 式中。其实，它已包含在$\mathbf{E}^2$ 项中。利用库仑定律(1.187)，我们有

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}^2 A^0 - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \rho\,. \tag{2.98}$$

将$\mathbf{E}$ 分解成横场和纵场两部分

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_l, \tag{2.99}$$

它们分别满足$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_t = 0$ 和$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}_l = 0$，于是，我们看到(2.98) 意味着

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_l = \rho\,. \tag{2.100}$$

因此，纵场部分可以写为某个标量势ϕ' 的导数形式

$$\mathbf{E}_l = \boldsymbol{\nabla}\phi', \tag{2.101}$$

依据(2.100)，这个标量势可由下式计算得到

$$\phi'(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\rho(x) = -\int d^3x' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\rho(\mathbf{x}',t). \tag{2.102}$$

利用此式，我们看到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int d^3x\,\mathbf{E}^2 &= \frac{1}{2}\int d^3x\left({\mathbf{E}_t}^2+{\mathbf{E}_l}^2\right) = \frac{1}{2}\int d^3x\left[\mathbf{E}_t^2 + \left(\partial_i\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\phi'\right)\left(\partial_i\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\phi'\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\,{\mathbf{E}_t}^2 + \frac{1}{2}\int d^3x d^3x' \rho(\mathbf{x},t)\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\rho(\mathbf{x}',t).\end{aligned} \tag{2.103}$$

最后一项正是与电荷密度$\rho(\mathbf{x},t)$ 相关的库伦能。

2.4.4 麦克斯韦理论的规范不变性

(2.81) 式中的4维旋度很明显在如下的规范变换下是不变的

$$A_a(x) \longrightarrow A'_a(x) = A_a(x) + \partial_a\Lambda(x), \tag{2.104}$$

其中$\Lambda(x)$ 是任意一个光滑场，它满足可积条件

$$(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)\Lambda(x) = 0. \tag{2.105}$$

规范不变性意味着包含在$A^a(x)$ 内的标量场自由度并不对物理可观测电磁场$\mathbf{E}(x)$ 和$\mathbf{B}(x)$ 有所贡献。这个自由度可以通过**规范固定** 移除掉。一种做法是要求矢势满足**洛仑兹规范条件**

$$\partial_a A^a(x) = 0. \tag{2.106}$$

对于这样的矢量场，场方程(2.87) 将退耦合，并且矢势$A^a(x)$ 的四个分量都满足无质量Klein-Gordon 方程:

$$-\partial^2 A_b(x) = 0. \tag{2.107}$$

如果一个矢势$A^a(x)$ 不满足洛仑兹规范条件(2.106)，我们总可以对其进行(2.104) 中的规范变换，使其变到一个新的没有4-散度的场$A'^a(x)$。为此，我们只需在(2.104) 中选择一个满足非齐次方程

$$-\partial^2 \Lambda(x) = \partial_a A^a(x) \tag{2.108}$$

的规范函数$\Lambda(x)$。这样，所得$A'^a(x)$ 将满足$\partial_a A'^a(x) = 0$。

方程(2.108) 有无穷多个解。给定一个可导致洛仑兹规范的解$\Lambda(x)$，我们可以将任何一个齐次Klein-Gordon 方程的解加到它上面而不会改变$A^a(x)$ 的4-散度。相关的规范变换

$$A_a(x) \longrightarrow A_a(x) + \partial_a \Lambda'(x), \qquad \partial^2 \Lambda'(x) = 0, \tag{2.109}$$

称作**受限规范变换** 或**第二类规范变换**。如果一个洛仑兹规范中的矢势$A^a(x)$ 为方程(2.87) 的解，则第二类规范变换可用去掉它的空间散度$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$。在(2.109)中的变换下，分量$A^0(\mathbf{x}, t)$ 和$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 变为

$$\begin{aligned} A^0(x) &\rightarrow A'^0(\mathbf{x}, t) = A^0(\mathbf{x}, t) + \partial_0 \Lambda'(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{A}(x) &\rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\nabla} \Lambda'(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{2.110}$$

这样，如果我们取规范函数为

$$\Lambda'(\mathbf{x}, t) = -\int d^3x' \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}', t), \tag{2.111}$$

则

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \Lambda'(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{2.112}$$

这使得规范变换后的场$\mathbf{A}'(\mathbf{x}, t)$ 无散度：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\nabla} \Lambda(\mathbf{x}, t)] = 0. \tag{2.113}$$

此规范条件

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{2.114}$$

就是**库仑规范** 或**辐射规范**.

微分方程(2.112) 的解(2.111) 其实还没有完全确定下来，还可以相差任意一个满足如下齐次泊松方程

$$\nabla^2\Lambda''(\mathbf{x},t)=0 \tag{2.115}$$

的函数$\Lambda''(x)$。不过，结合(2.109) 式中所蕴含的特性$\partial^2\Lambda''(\mathbf{x},t)=0$ ，我们有

$$\partial_t^2\Lambda''(\mathbf{x},t)=0. \tag{2.116}$$

这使得$\Lambda''(\mathbf{x},t)$ 只能为$\mathbf{x}$ 和t 的平凡的线性函数，从而对(2.110) 只贡献一个常数。而这又可进一步确定为零，因为我们总是假定无穷远处的场$A^a(x)$ 在规范变换前和变换后都为零。

从场方程(2.87) 中移除矢势$A^a(x)$ 的第零分量，我们得到另一个可能的规范。为此，我们利用下列规范函数

$$\Lambda(\mathbf{x},t)=-\int^t dt'\,A_0(\mathbf{x},t'), \tag{2.117}$$

而不是(2.111) 中的规范函数，进行(2.104) 中的规范变换。新得到的场$A'^a(x)$ 不具有第零分量

$$A'^0(x)=0. \tag{2.118}$$

这被称为**轴规范**. 如此，除去一个平凡的常数外，方程(2.117) 的解就被确定了，不再有多余的规范自由度。

对于自由场，库仑规范和轴规范是相一致的。这正是(2.98) 式中无荷库仑定律$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ 的结果。将$\mathbf{E}(x)$ 显式地用矢势的空间和时间分量表达为

$$\mathbf{E}(x)=-\partial_0\mathbf{A}(x)-\nabla A^0(x), \tag{2.119}$$

则库仑定律可写为

$$\nabla^2A^0(\mathbf{x},t)=-\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x},t). \tag{2.120}$$

这表明如果$\nabla\cdot\mathbf{A}(x)=0$，则我们也有$A^0(x)=0$ (假定无穷远零边界条件), 反过来也一样。

微分方程(2.120) 可以作如下积分

$$A^0(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}\,\nabla\cdot\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}',t). \tag{2.121}$$

在一个具有无穷远渐近消失的场的空间里，我们无法自由地在上式左边加进一个齐次泊松方程

$$\nabla^2A^0(\mathbf{x},t)=0 \tag{2.122}$$

的非平凡解。

当存在电荷时，库仑定律将具有表示源的项：

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\rho(\mathbf{x},t), \tag{2.123}$$

其中$\rho(\mathbf{x},t)$ 是电荷密度。在这种情况下，为零的$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ 将不再意味着$A^0(\mathbf{x},t)\equiv 0$。于是我们就有了选择规范的可能性，使$\Lambda(\mathbf{x},t)$ 满足库仑规范

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\equiv 0, \tag{2.124}$$

或轴规范

$$A^0(\mathbf{x},t)\equiv 0. \tag{2.125}$$

只有对于自由场的情况，这两种规范才是一致的。

当进行了规范固定后，矢势$A^a(x)$ 一般来讲在洛仑兹变换下并不按照4-矢量来变换。只有当规范固定是洛仑兹不变的，比如说取洛仑兹规范条件(2.106)的时候，根据(1.209) 和(1.216)，矢势在洛仑兹变换下才会如下式般变换

$$A^a(x)\xrightarrow{\Lambda}A'_\Lambda{}^a(x)=\Lambda^a{}_bA^b(\Lambda^{-1}x)=[e^{-i\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{J}^{ab}}A]^a(\Lambda^{-1}x). \tag{2.126}$$

在库仑规范下，为了保证变换后的矢势同样满足库仑规范，(2.126) 式右边需要通过额外增加一个依赖于Λ 的规范变换项来进行修正。

2.5 带电点粒子的麦克斯韦– 洛仑兹作用量

现在我们来考虑与电磁场相互作用的有质量带电相对论性粒子，并用作用量方法推导第1.10 节中的麦克斯韦– 洛仑兹方程。一个携带电荷e 的单个粒子的电流为

$$j^a(x)=ec\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\dot{q}^a(\tau)\delta^{(4)}(x-q(\tau)), \tag{2.127}$$

则在外场中的总的作用量由(2.83) 和(2.19)的和给出：

$$\mathcal{A}=\overset{\text{em}}{\mathcal{A}}+\overset{\text{m}}{\mathcal{A}}=-\frac{1}{4}\int d^4x\,F^{ab}(x)F_{ab}(x)-mc^2\int_{\tau_a}^{\tau_b}d\tau-\frac{1}{c}\int d^4x\,j^a(x)A_a(x). \tag{2.128}$$

用物理时间t 来表示的话，后面两项可以分解成如下类空和类时分量：

$$-mc^2\int_{t_a}^{t_b}dt\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{q}}^2}{c^2}}-e\int_{t_a}^{t_b}dt\,A^0(\mathbf{q}(t),t)+\frac{e}{c}\int_{t_a}^{t_b}dt\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q}(t),t). \tag{2.129}$$

通过将自由粒子的作用量写为(2.19) 式的形式，对(2.128) 作关于$\delta q^a(\tau)$ 的变分并取极值，我们就可以得到相应的运动方程。这就给出了(1.170) 中的**麦克斯韦– 洛仑兹方程**：

$$\begin{aligned} m\frac{d^2q^a}{d\tau^2} &= \frac{e}{c}\left[-\frac{\partial}{\partial\tau}A^a+\frac{dq^b}{d\tau}\partial^aA_b\right]=\frac{e}{c}\left[-\frac{dq^b}{d\tau}\partial_bA^a+\frac{dq^b}{d\tau}\partial^aA_b\right]\\ &= \frac{e}{c}F_{ab}\frac{dq^b}{d\tau}. \end{aligned} \tag{2.130}$$

方程右边正是(1.184) 中的洛仑兹力。

注意，当存在电磁场时，正则动量(2.11) 不再如(2.15) 中等于物理动量，矢势将对它有额外贡献：

$$P_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\left(m\gamma\dot{q}^i + \frac{e}{c}A^i\right) = p_i + \frac{e}{c}A_i. \tag{2.131}$$

将第零分量包含进来后，正则4-动量为

$$P_a = p_a + \frac{e}{c}A_a. \tag{2.132}$$

P_a 的第零分量正与由勒让德变换所定义的能量[参看(2.97) 式]和$1/c$ 的乘积是相一致的：

$$P_0 = \frac{1}{c}(H + eA^0) = -\frac{1}{c}(P_i\dot{q}^i - L). \tag{2.133}$$

2.6 具有电磁相互作用的标量场

如果一个粒子的几率振幅由(1.160) 中的平面波描述，则它的能量-动量可由对该平面波求时空导数得到：

$$i\hbar\partial_a\phi_p(x) = p_a\phi_p(x). \tag{2.134}$$

当存在电磁场时，该动量4-矢量所承担的角色将由(2.132) 中的动量来取代。在标量场的拉格朗日密度(2.27) 中，这可通过所谓的**最小替代** 来实现，即用**协变导数**代换掉普通导数：

$$\partial_a\phi(x) \to D_a\phi(x) \equiv \left[\partial_a + i\frac{e}{c\hbar}A_a(x)\right]\phi(x). \tag{2.135}$$

于是具有电磁相互作用的标量场拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}(x) = \hbar^2[D_a\phi(x)]^*D^a\phi(x) - m^2c^2\phi^*(x)\phi(x) - \frac{1}{4}F^{ab}(x)F_{ab}(x). \tag{2.136}$$

它通过**标量电动力学**定律支配着带电无自旋粒子系统的行为。

在进行(2.104) 中电磁场的局域规范变换的同时对标量场乘以一个依赖于x 的相因子：

$$\varphi(x) \to e^{ie\Lambda(x)/c}\varphi(x) \tag{2.137}$$

则上述拉格朗日密度表达式是不变的。

对自然单位下的作用量$\mathcal{A} = \int d^4x\,\mathcal{L}(x)$ 求极值，我们就得到了欧拉–拉格朗日方程及其共轭

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi^*(x)} = (-D^2 - m^2)\varphi(x), \qquad \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)} = (-D^{*2} - m^2)\varphi^*(x). \tag{2.138}$$

当存在电磁场时，(2.67) 中的粒子流密度就变成了电流密度

$$j_a(x) = e\,\frac{i}{2}\phi^*D_a\phi + \text{c.c.} = e\,\frac{i}{2}\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_a\phi - \frac{e^2}{c}A_a(x)\phi^*\phi. \tag{2.139}$$

它满足与自由场流密度相同的守恒律(2.69)，这可以通过以下简短计算加以验证：

$$
\begin{aligned}
\partial_a j^a = & \partial_a \left[\frac{i}{2}\phi^* D^a \phi\right] + \text{c.c.} = \frac{i}{2}\partial_a \phi^* D^a \phi + \frac{i}{2}\phi^* \partial_a D^a \phi + \text{c.c.} \\
= & \frac{i}{2}\partial_a \phi^* D^a \phi + \frac{i}{2}\phi^* D^2 \phi - \frac{i}{2}\frac{e}{c} A^a \phi^* D_a \phi + \text{c.c.} = \frac{i}{2} D_a^* \phi^* D^a \phi - m^2 \frac{i}{2}\phi^* \phi + \text{c.c.} = 0.
\end{aligned} \tag{2.140}
$$

2.7 狄拉克场

可以通过求极值而获得狄拉克方程(1.218) 的作用量在自然单位下可写为

$$
\overset{\text{D}}{\mathcal{A}} = \int d^4x \; \overset{\text{D}}{\mathcal{L}}(x) \equiv \int d^4x \, \bar{\psi}(x) \left(i\gamma^a \partial_a - m\right) \psi(x) \tag{2.141}
$$

其中

$$
\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0, \tag{2.142}
$$

并且矩阵γ^a 满足(1.224) 中的反对易法则。狄拉克方程及其共轭方程可通过极值原理得到

$$
\frac{\delta \overset{\text{D}}{\mathcal{A}}}{\delta \bar{\psi}(x)} = (i\gamma^a \partial_a - m)\psi(x) = 0, \qquad \frac{\delta \overset{\text{D}}{\mathcal{A}}}{\delta \psi(x)} = \bar{\psi}(x)(-i\gamma^a \overleftarrow{\partial}_a - m)\psi(x) = 0. \tag{2.143}
$$

在(1.236) 中旋量的洛仑兹变换下，作用量(2.141) 是不变的。质量项的不变性可由以下事实得来

$$
D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 D(\Lambda) = \gamma^0. \tag{2.144}
$$

通过将(1.219)和(1.233)中具体的矩阵表达式代入，此式可以很容易被验证。如我们定义

$$
\bar{D} \equiv \gamma^0 D^\dagger \gamma^0, \tag{2.145}
$$

则上式意味着

$$
\bar{D}(\Lambda) D(\Lambda) = 1, \tag{2.146}
$$

因此，拉格朗日密度中的质量项就像(1.168) 中的标量场一样作变换：

$$
\bar{\psi}(x)\psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}'_\Lambda(x)\psi'_\Lambda(x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{2.147}
$$

现在考虑作用量(2.141) 中的梯度项。它的不变性正是(1.235) 式中得到的洛仑群旋量表示下狄拉克矩阵矢量特性的结果。由(2.146) 我们推出$D^{-1}(\Lambda) = \bar{D}(\Lambda)$，这使得我们可以将(2.146) 的矢量变换律写为

$$
D(\Lambda)\gamma^a \bar{D}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^a{}_b \gamma^b, \qquad \bar{D}(\Lambda)\gamma^a D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\gamma^a D(\Lambda) = \Lambda^a{}_b \gamma^b. \tag{2.148}
$$

由此，我们立即可以得到

$$
\bar{\psi}(x)\gamma^a \psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}'(x)\gamma^a \psi'(x) = \Lambda^a{}_b \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^b \psi(\Lambda^{-1}x), \tag{2.149}
$$

以及

$$
\bar{\psi}(x)\gamma^a \partial_a \psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}'(x)\gamma^a \partial_a \psi'(x) = [\bar{\psi}\gamma^b \partial_a \psi](\Lambda^{-1}x). \tag{2.150}
$$

这样，狄拉克-拉格朗日密度中的梯度项也如标量场一样变换，因此整个拉格朗日密度就如同(2.28) 式中那样变换，根据(2.34)，可得作用量(2.141) 在洛仑兹变换下是不变的。

从第2.6节的讨论中我们知道如何将狄拉克场与电磁场相耦合。我们只须将拉格朗日密度中的导数用(2.135) 中的协变导数替换掉，这样就得到了规范不变的电动力学的拉格朗日密度

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)\,(i\gamma^a D_a - m)\,\psi(x) - \frac{1}{4}\int d^4x\, F^{ab}(x) F_{ab}(x). \tag{2.151}$$

如果我们在进行局域洛仑兹变换(2.104) 的同时对狄拉克场乘以一个依赖于x 的相因子

$$\psi(x) \to e^{ie\Lambda(x)/c}\psi(x), \tag{2.152}$$

则上述方程是不变的。

此拉格朗日密度中的相互作用项完全来自于协变导数，它可以更具体地写为

$$\mathcal{L}^{\mathrm{int}}(x) = -\frac{1}{c}\int d^4x\, A_a(x) j^a(x), \tag{2.153}$$

其中

$$j^a(x) \equiv e\,\bar{\psi}(x)\gamma^a\psi(x) \tag{2.154}$$

是电子的流密度。

通过对作用量$\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}}= \int d^4x \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}(x)$ 取极值，我们可以得到相应的欧拉– 拉格朗日方程及其共轭方程

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}}}{\delta\bar{\psi}(x)} = (i\gamma^a D_a - m)\psi(x) = 0, \qquad \frac{\delta \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}}}{\delta\psi(x)} = \bar{\psi}(x)(-i\gamma^a \overleftarrow{D}^*_a - m)\psi(x) = 0. \tag{2.155}$$

对于遵循这些方程的经典场，流密度(2.154) 满足与(2.140) 式中标量场相同的局域守恒定律：

$$\partial_a j^a(x) = 0. \tag{2.156}$$

这可由比(2.140) 中更为简便的计算加以验证：

$$\partial_a j^a = e\partial_a(\bar{\psi}\gamma^a\psi) = e\bar{\psi}\gamma^a\overleftarrow{\partial}_a\psi + e\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi = e\bar{\psi}\gamma^a\overleftarrow{D}{}^*_a\psi + e\bar{\psi}\gamma^a D_a\psi = 0. \tag{2.157}$$

2.8 量子化

给定一个场的作用量，有两种途径对该理论进行量子化。一种是基于传统的行之有效的算符的方法。这里我们将对此不做展开。我们所要做的是基于费因曼的路径积分理论。费因曼认识到一个事件发生的物理振幅可以通过对所有可能导致该事件的经典历史路径进行求和而得到。每条历史路径携带一个几率振幅$e^{i\mathcal{A}/\hbar}$，其中$\mathcal{A}$ 为该系统的作用量。

对于一个场论，对历史的求和将遍历所有可能的依赖于时间的场的构型

$$\text{振幅} = \sum_{\text{场构型}} e^{i\mathcal{A}/\hbar}. \tag{2.158}$$

量子理论这一形式的一个重要的优势是可以将时间t 解析延拓到$\tau = -it$ ，从而导致相应的统计理论。由量子力学中的时间演化算符$e^{it\hat{H}/\hbar}$ 和统计物理中的波尔兹曼因子$e^{-\beta\hat{H}}$ 间的相似性可以看出，这一点是十分明显的。β 通过波尔兹曼常数与温度的倒数相联系：

$$\beta \equiv 1/k^B T. \tag{2.159}$$

解析延拓可以直接应用在作用量$\mathcal{A}$ 上，于是我们得到

$$\mathcal{A} = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = i \int d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\mathbf{x}, -i\tau) \equiv i \int d\tau \int d^3x \mathcal{L}^E(\mathbf{x}, \tau) \equiv i\mathcal{A}^E. \tag{2.160}$$

所得$\mathcal{A}^E$ 被称作是**欧几里德作用量**，而$\mathcal{L}^E$ 则是相应的**欧几里德拉格朗日密度**。这种命名意味着，在$t = -i\tau$ 的延拓下，闵可夫斯基标量积$xx' = c^2tt' - \mathbf{x}\mathbf{x}'$ 化为欧几里德形式$xx' = -(\tau\tau' + \mathbf{x}\mathbf{x}') = -x^E x'^E$。这里我们引入欧几里德矢量$x^E \equiv (c\tau, \mathbf{x})$。将欧几里德时空体积元$d\tau d^3x$ 记作d^4x^E，我们可将欧几里德作用量写为

$$\mathcal{A}^E = \int d^4x^E \, \mathcal{L}^E(\tau, \mathbf{x}). \tag{2.161}$$

量子力学振幅因此化为

$$Z = \sum_{\text{场构型}} e^{-\mathcal{A}^E/\hbar}. \tag{2.162}$$

这正是该系统的量子统计配分函数。通过让所有的场在$(0, \hbar\beta)$ 区间上为周期函数，我们可以据此讨论有限温度T 的情形。对于费米场，由于其反对称统计特性它必须是反周期的。

文献与注记

[1] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[2] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Publishing Co., Singapore 2004, 4th extended edition, pp. 1–1547 (`kl/b5`)，其中`kl` 为以下网址的缩写：`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert`.

[3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford, 1975.

[4] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. I: *Superflow and Vortex Lines, Disorder Fields, Phase Transitions*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b1`).

[5] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II: *Stresses and Defects, Differential Geometry, Crystal Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`).

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1956, Sect. 15.2.