最小作用量原理

汤姆孙原理及其应用

龚思秋

Updated: 2018 年 4 月 6 日
DiscussClass

Made in *USTC*

中国科学技术大学

变分学的一个问题

问题

对于空间每一条我们有一个数值，作用量，如何找出使得该数值极小的空间路径？

变分学的一个问题

问题

对于空间每一条我们有一个数值，作用量，如何找出使得该数值极小的空间路径？

算出千千万万条路径上的作用量，再找出那一条是最小的。

NO!

极小值的一个特点

若变量偏离极小值位置为一级小量，则函数与极小值的偏差仅为二级小量。

极小值的一个特点

若变量偏离极小值位置为一级小量，则函数与极小值的偏差仅为二级小量。

所以我们可以这样做：称 $\tilde{x}(t)$ 为目标路径。取某条尝试路径 $x(t)$，与该路径有一微小差别，这差别我们称之为 $\eta(t)$，然后我们对路径 $x(t)$ 计算作用量 S，而 S 与 $\tilde{S}$ 之差，在小 η 的一级近似下应等于零。同时各路径彼此都应有相同的起点和终点，即 $\eta(t_1)=0$ 和 $\eta(t_2)=0$

汤姆孙定理的证明

如果电荷密度处处已知，如何求出空间中每一处的电势？

汤姆孙定理的证明

如果电荷密度处处已知，如何求出空间中每一处的电势？

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

如果电荷密度处处已知，如何求出空间中每一处的电势？

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

但也可以计算积分 U^*:

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2}\int(\nabla\phi)^2\,\mathrm{d}\,V - \int\rho\phi\,\mathrm{d}\,V \tag{2}$$

汤姆孙定理的证明

如果电荷密度处处已知，如何求出空间中每一处的电势？

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

但也可以计算积分 U^*:

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla\phi)^2 \,\mathrm{d}\,V - \int \rho\phi \,\mathrm{d}\,V \tag{2}$$

这是一个对全空间的体积分。对于正确的势分布 $\phi(x, y, z)$, U^* 是极小值。

可以证明，这两种关于静电学的表述是等效的。

假定选取任意函数 ϕ。要求证明：当我们认为 ϕ 是正确的势 $\tilde{\phi}$ 加上一个小的偏离 f 时，则在一级近似下 U^* 的变化为零。因此我们记作

$$\phi = \tilde{\phi} + f \tag{3}$$

假定选取任意函数 ϕ。要求证明：当我们认为 ϕ 是正确的势 $\tilde{\phi}$ 加上一个小的偏离 f 时，则在一级近似下 U^* 的变化为零。因此我们记作

$$\phi = \tilde{\phi} + f \tag{3}$$

对于 U^* 中的第一部分，我们有必要写成

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\tilde{\phi})^2 + 2\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f + (\nabla f)^2 \tag{4}$$

假定选取任意函数 ϕ。要求证明：当我们认为 ϕ 是正确的势 $\tilde{\phi}$ 加上一个小的偏离 f 时，则在一级近似下 U^* 的变化为零。因此我们记作

$$\phi = \tilde{\phi} + f \tag{3}$$

对于 U^* 中的第一部分，我们有必要写成

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\tilde{\phi})^2 + 2\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f + (\nabla f)^2 \tag{4}$$

式中唯一一个会变化的一级项为

$$\Delta_1 = 2\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f \tag{5}$$

假定选取任意函数 ϕ。要求证明：当我们认为 ϕ 是正确的势 $\tilde{\phi}$ 加上一个小的偏离 f 时，则在一级近似下 U^* 的变化为零。因此我们记作

$$\phi = \tilde{\phi} + f \tag{3}$$

对于 U^* 中的第一部分，我们有必要写成

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\tilde{\phi})^2 + 2\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f + (\nabla f)^2 \tag{4}$$

式中唯一一个会变化的一级项为

$$\Delta_1 = 2\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f \tag{5}$$

在 U^* 的第二项中，被积函数为

$$\rho\phi = \rho\tilde{\phi} + \rho f \tag{6}$$

现有条件

$$\begin{cases} U^* = \dfrac{\epsilon_0}{2}\displaystyle\int (\nabla\phi)^2 \,\mathrm{d}\,V - \int \rho\phi \,\mathrm{d}\,V \\ \Delta_1 = 2\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f \\ \rho\phi = \rho\tilde{\phi} + \rho f \end{cases}$$

变化量

$$\Delta\,U^* = \int (\epsilon_0\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f - \rho f)\,\mathrm{d}\,V$$

$$\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla f=\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{7}$$

$$\int\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=f\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}-\int f\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2} \tag{8}$$

$$f\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}=0 \tag{9}$$

$$\Delta U^*=\int(-\epsilon_0\nabla^2\tilde{\phi}-\rho)f\mathrm{d}V \tag{10}$$

$$\nabla^2\phi=-\rho/\epsilon_0$$

回到(1)泊松方程

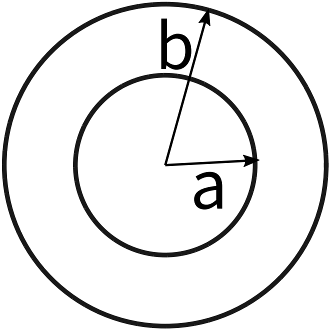
对于导体

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2}\int (\nabla\phi)^2 \,\mathrm{d}\,V$$

U^* 为极小值。而 U^* 就是静电能，所以汤姆孙定理成立。 $\square$

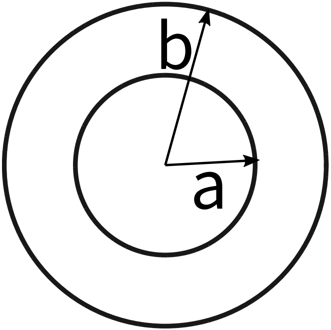
汤姆孙效应应用的一个例子

计算电容器的电容



由于 U^* 就是静电能，我们只要不断对势函数 ϕ 进行猜测，直到获得最低的 C 为止。以下讨论单位长度柱形电容器的电容。

计算电容器的电容



由于 U^* 就是静电能，我们只要不断对势函数 ϕ 进行猜测，直到获得最低的 C 为止。以下讨论单位长度柱形电容器的电容。

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \tag{11}$$

一级近似

假设电场为恒定电场，即电势与距离成正比。

$$\phi = V(1 - \frac{r-a}{b-a}) \tag{12}$$

一级近似

假设电场为恒定电场，即电势与距离成正比。

$$\phi = V(1 - \frac{r-a}{b-a}) \tag{12}$$

$$\frac{1}{2} C {V^2}_{try1} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} 2\pi r \, \mathrm{d} r \tag{13}$$

一级近似

假设电场为恒定电场，即电势与距离成正比。

$$\phi = V(1 - \frac{r-a}{b-a}) \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}C{V^2}_{try1} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} 2\pi r \mathrm{d}r \tag{13}$$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)} = \frac{b/a+1}{2(b/a-1)} \tag{14}$$

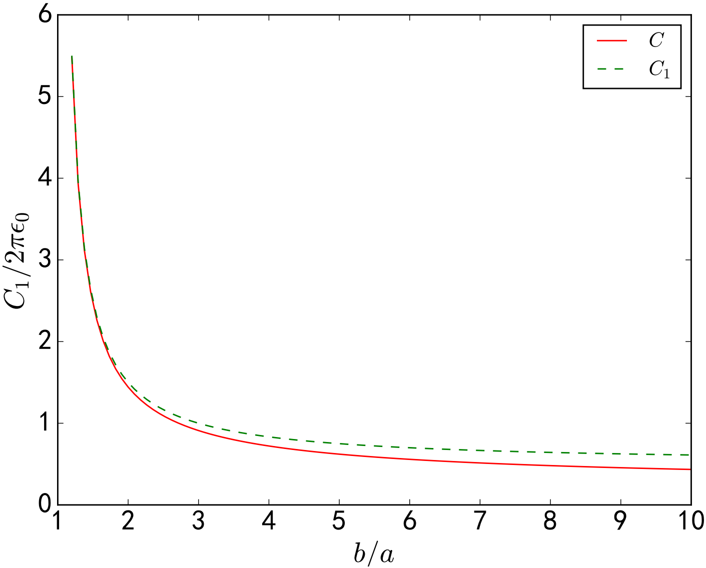


图: 一级近似 C_1 与真实值 C

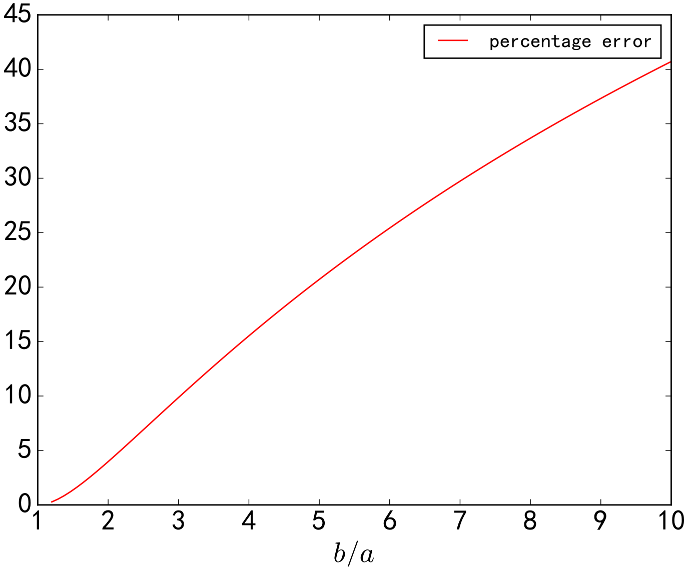


图: 一级近似 C_1 与真实值 C 百分误差

二级近似

假设电势是 r 的二次函数

$$\phi = V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)-(1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right] \tag{15}$$

二级近似

假设电势是 r 的二次函数

$$\phi = V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)-(1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right] \tag{15}$$

$$E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1+\alpha)\frac{(r-a)V}{(b-a)^2} \tag{16}$$

二级近似

假设电势是 r 的二次函数

$$\phi = V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)-(1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right] \tag{15}$$

$$E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{\alpha V}{b-a}+2(1+\alpha)\frac{(r-a)V}{(b-a)^2} \tag{16}$$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a}\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha^2}{6}+\frac{2\alpha}{3}+\frac{1}{3}\right)\right] \tag{17}$$

二级近似

假设电势是 r 的二次函数

$$\phi = V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)-(1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right] \tag{15}$$

$$E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{\alpha V}{b-a}+2(1+\alpha)\frac{(r-a)V}{(b-a)^2} \tag{16}$$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a}\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha^2}{6}+\frac{2\alpha}{3}+\frac{1}{3}\right)\right] \tag{17}$$

C 的极小值出现在 $\alpha=-2b(b+a)$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2+4ab+a^2}{3(b^2-a^2)} \tag{18}$$

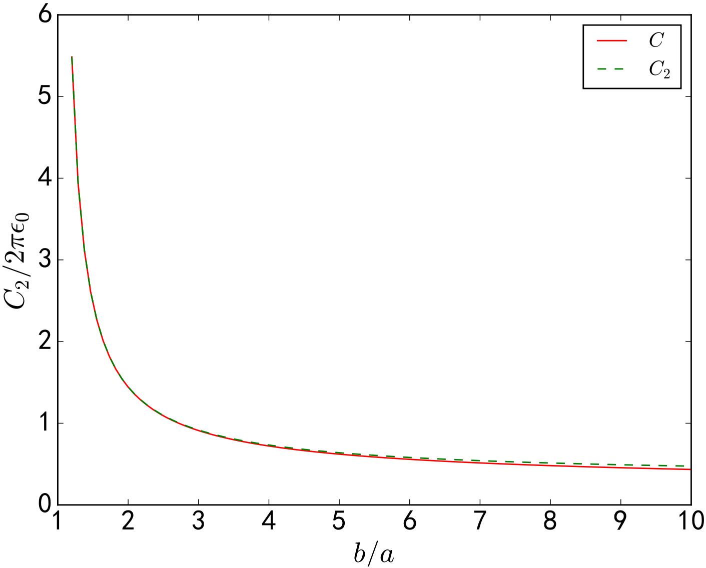


图: 二级近似 C_2 与真实值 C

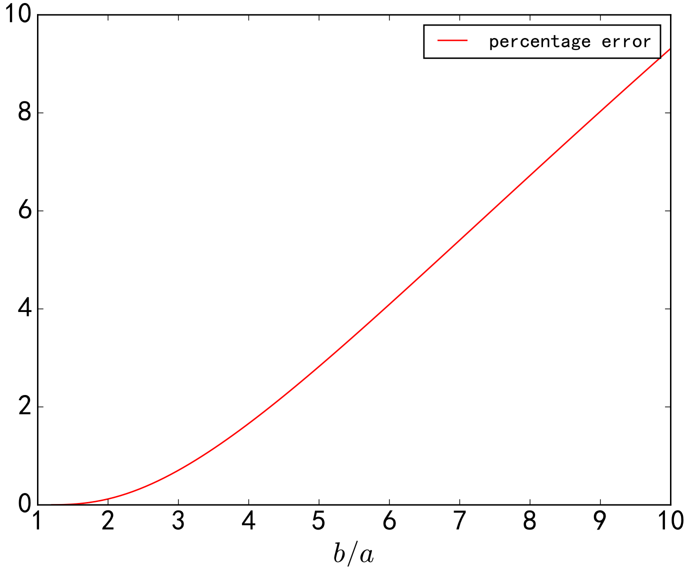


图: 二级近似 C_2 与真实值 C 百分误差

三级近似

假设电势是 r 的三次函数

$$\phi = V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)+\beta\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2-(1+\alpha+\beta)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^3\right]$$

三级近似

假设电势是 r 的三次函数

$$\phi = V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)+\beta\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2-(1+\alpha+\beta)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^3\right]$$

$$E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = V\left[\frac{3\left(1+\alpha+\beta\right)\left(r-a\right)^2}{\left(b-a\right)^3}-\frac{2\beta\left(r-a\right)}{\left(b-a\right)^2}-\frac{\alpha}{b-a}\right]$$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{3b\beta^2}{30b-30a} + \frac{a\beta^2}{30b-30a} + \frac{13\alpha b\beta}{30b-30a} + \frac{18b\beta}{30b-30a} + \frac{5a\alpha\beta}{30b-30a} + \frac{15\alpha^2 b}{30b-30a} + \frac{45\alpha b}{30b-30a} + \frac{45b}{30b-30a} + \frac{9a\alpha^2}{30b-30a} + \frac{3a\alpha}{30b-30a} + \frac{9a}{30b-30a}$$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{3b\beta^2}{30b-30a} + \frac{a\beta^2}{30b-30a} + \frac{13\alpha b\beta}{30b-30a} + \frac{18b\beta}{30b-30a} + \frac{5a\alpha\beta}{30b-30a} + \frac{15\alpha^2 b}{30b-30a} + \frac{45\alpha b}{30b-30a} + \frac{45b}{30b-30a} + \frac{9a\alpha^2}{30b-30a} + \frac{3a\alpha}{30b-30a} + \frac{9a}{30b-30a}$$

C 的极小值出现在

$$\alpha = -\frac{6a^2+18ab+36b^2}{11b^2+38ab+11a^2}, \beta = \frac{15a^2-60ab+45b^2}{11b^2+38ab+11a^2}$$

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{3a^3+27a^2b+27ab^2+3b^3}{11b^3+27ab^2-27a^2b-11a^3}$$

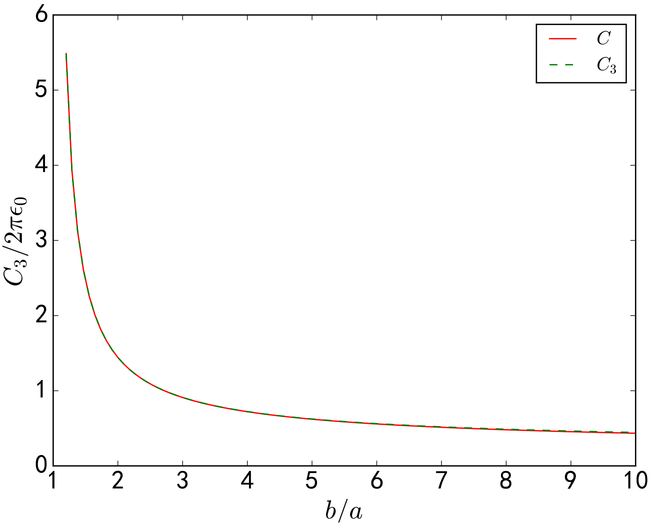


图: 三级近似 C_3 与真实值 C

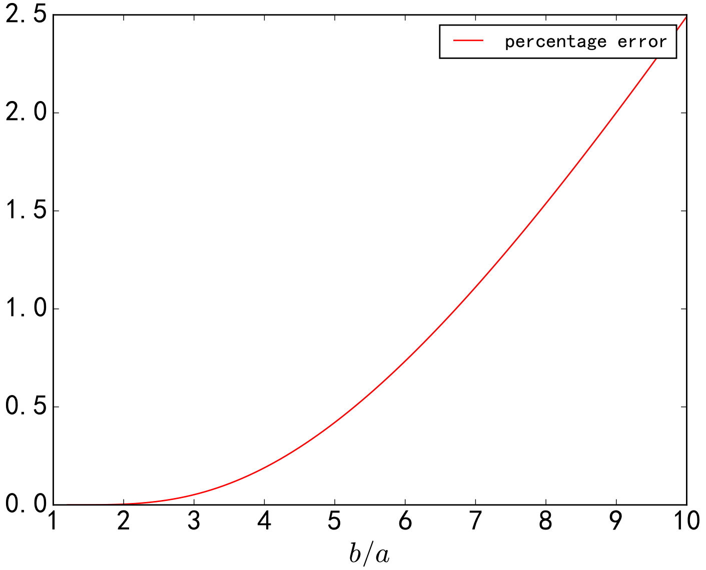


图: 三级近似 C_3 与真实值 C 百分误差