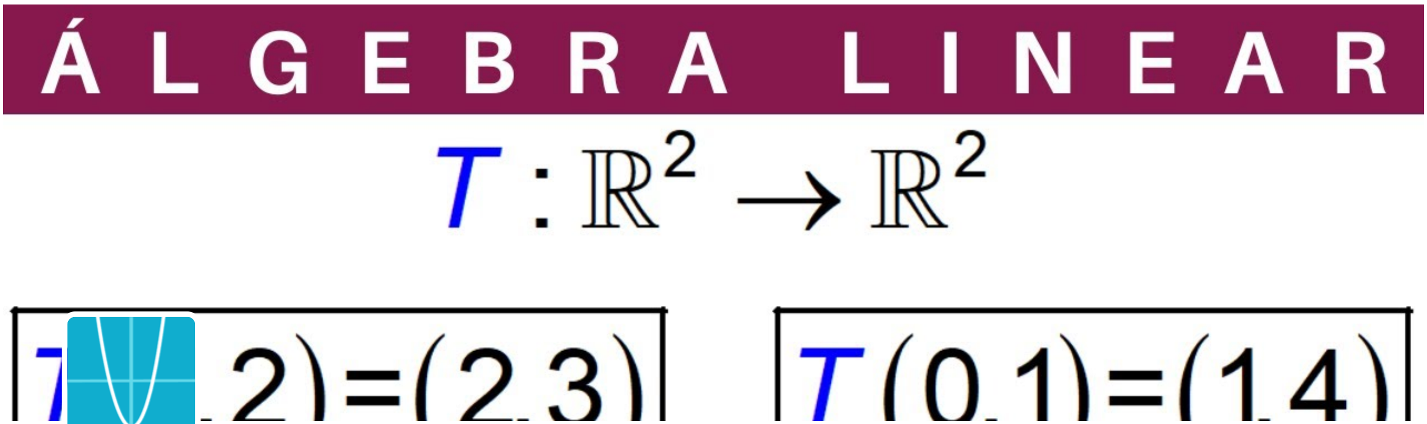

Transformações Lineares

Page

Definição

- Sejam V e W espaços vetoriais
- Uma função T : V → W é chamada **transformação linear** ou homomorfismo de V em W se para todos o v, u ∈ ℝ se verifica:

$$i)\ \boxed{T(u+v)=T(u)+T(v)}$$

$$ii)\ \boxed{T(au)=aT(u)}$$

> ℹ️ As propriedades i) e ii) são equivalente à seguinte propriedade:
>
> $$\boxed{T(u+av)=t(u)+aT(v)}$$

Propriedades

- Para uma transformação linear T : E → F verifica-se:

$$a)\ T(\vec{0}_E)=\vec{0_F}$$

$$b)\ T(-\vec{v})=-T(\vec{v}),\forall x\in E$$

$$c)\ T(c\vec{v}+\vec{u})=cT(\vec{v})+T(\vec{u})$$

$$d)\ T(\vec{v}-\vec{u})=T(\vec{v})-T(\vec{u})$$

$$e)\ T(c\vec{v})=cT(\vec{v})$$

> ℹ️ Sendo V e W 2 espaços vetoriais, representa-se por L (V, W) o conjunto das aplicações lineares de V em W

Homomorfismo, endomorfismo, isomorfismo e automorfismo

- A transformação linear ou homomorfismo T é um:
  - **Endomorfismo** se V = W

- **Isomorfismo** se for bijetiva, isto é, se for injetiva e sobrejetiva
- **Automorfismo** se for um endomorfismo e um isomorfismo

Imagem direta e imagem recíproca

- Seja T : E → F uma transformação linear
  - Dado A ⊂ E, chama-se **imagem direta** de A, segundo T, ao conjunto:

$$\boxed{T(A) = \{T(x) \in F : x \in A\}}$$

  - Dado B ⊂ F, chama-se **imagem recíproca** de B, segundo T, ao conjunto:

$$\boxed{T^{-1}(B) = \{x \in E : T(x) \in B\}}$$

Imagem e núcleo

- Seja T a transformação linear T : V → W
  - Chama-se **imagem** de T, e representa-se por Im(T), ao conjunto de vetores de W que são imagens dos vetores de V:

$$\boxed{T(V) = Im(T) = \{w \in W : \forall v \in V, T(v) = w\}}$$

  - Chama-se **núcleo** de T, e representa-se por N(T), ao conjunto de vetores de V cuja imagem é o vetor nulo:

$$\boxed{N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}}$$

Nota: O núcleo pode também ser representado por Ker(T)

Exemplo – Determine a imagem e o núcleo da transformação linear $T : \Re^3 \to \Re^2$ definida por: $T(1,0,0) = (2,3)$, $T(0,1,0) = (-1,4)$, $T(0,0,1) = (-5,2)$.

Seja (x, y, z) o vector genérico de $\Re^3$. A imagem de T será, então, igual a $T(x,y,z)$. $T(x,y,z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) = x(2,3) + y(-1,4) + z(-5,2) = (2x - y - 5z, 3x + 4y + 2z)$, ou seja, tem-se assim que $\mathrm{Im}(T) = \{(2x - y - 5z, 3x + 4y + 2z)\}$.

Para determinar o núcleo de T: sendo $T(x,y,z) = (2x - y - 5z, 3x + 4y + 2z)$ para calcularmos $N(T)$ teremos de procurar os valores de x, y, z que anulam $2x - y - 5z$ e $3x + 4y + 2z$, ou seja, teremos de resolver o sistema que se segue $\begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 11/2 & 19/2 & 0 \end{array}\right) \to$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 19/11 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -18/11 & 0 \\ 0 & 1 & 19/11 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - 18/11\, z = 0 \\ y + 19/11\, z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18/11\, z \\ y = -19/11\, z \\ z = \forall \end{cases}.$$

O sistema é indeterminado e a sua solução geral é $S = (18/11\, z, -19/11\, z, z) = z(18/11, -19/11, 1)$.

Quando $x = 18/11\, z$ e $x = -19/11\, z$ tem-se $2 - y - 5z = 0$ e $3x + 4y + 2z = 0$, logo $T(18/11\, z, -19/11\, z, z) = (0,0)$ e $N(T) = \{(18/11\, z, -19/11\, z, z)\}$.

O vector $(18, -19, 11)$, por exemplo, pertence ao $N(T)$.

Característica e nulidade

- Seja T ∈ L (V, W)
  - Chama-se característica de T, que se representa por r(T), à dimensão do subespaço Im(T)

$$\boxed{r(T) = dim(Im(T))}$$

  - Chama-se nulidade de T, que se representa por n(T), à dimensão do subespaço N(T)

$$\boxed{n(T) = dim(N(T))}$$

Teorema: dim(V) = dim N(T) + dim Im(T)