

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

$$x = 2$$

$$y = -1$$

# Operações elementares

Apontamentos sobre as operações elementares sobre matrizes

Page

- Chamam-se operações elementares, efetuadas sobre uma matriz, ao conjunto de operações que não alterem a dependência ou independência das linhas ou colunas.

- Algumas operações elementares são:

- Troca entre si de 2 linhas de uma matriz

Exemplo:  $L_2 \rightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação ou divisão de qualquer linha por uma constante diferente de zero

Exemplo:  $L_2 \rightarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Soma dos elementos homólogos de filas paralelas depois de multiplicados por fatores constantes diferentes de zero

Exemplo:  $L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se A e B são matrizes m x n, diz-se que B é equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A, e escreve-se  $A \rightarrow B$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pois}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -1L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Condensação de matrizes

- Se for estuada uma condensação vertical seguida de uma horizontal obtém-se uma matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Adição de uma linha a uma coluna chama-se **diagonalização**

- Método de condensação vertical para uma matriz quadrada**

1- Garantir que o elemento  $a_{11}$  assume o valor '1'  
 2- Utilizar o elemento  $a_{11}$  como pivô para anular os elementos  $a_{21}$  e  $a_{31}$   
*A eliminação de cada elemento é feita através da soma da sua própria linha com a linha do pivô multiplicada por um escalar*  
 3- Garantir que o elemento  $a_{22}$  assume o valor '1'  
 4- Utilizar o elemento  $a_{22}$  como pivô para anular o elemento  $a_{32}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

**Condensação de matrizes**

Fazer a condensação vertical da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

**Pivô**

↓

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_2 = L_2 - 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ccc|c} L_2 & 5 & 6 & 7 \\ -5L_1 & -5 & -10 & -15 \\ \hline & 0 & -4 & -8 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ccc|c} L_3 & 1 & 3 & 2 \\ -L_1 & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{L'_2 \leftrightarrow L'_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L'_3 - L'_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Pivô