Probabilidade condicionada

Apontamentos sobre a probabilidade condicionada, a independência dos eventos, o teorema da probabilidade total e o teorema de Bayes

Page

- Dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e 2 acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, com $P(B) \neq 0$, designa-se por probabilidade de A se B ou probabilidade de A, sabendo que ocorreu B, ou **probabilidade condicionada de A se B**, e representa-se por $\boldsymbol{P(A|B)}$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, se\ P(B) \neq 0}$$

Exemplo 1:

Suponha que quer extrair 2 peças de um lote de 10 peças ao acaso.
Sabe-se que 2 das peças são defeituosas e 8 não são defeituosas.
Sejam A e B os eventos:

$\boldsymbol{A}$: "A 1.ª peça é defeituosa";

$\boldsymbol{B}$: " A 2.ª peça é defeituosa".

Determine $P(B|A)$ e $P(B|\neg A)$ se:

a) As peças forem escolhidas com reposição

Neste caso, em qualquer das extrações temos um lote de 10 peças em que 2 das quais são defeituosas. Logo,

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = \frac{2}{10}$$

b) As peças forem escolhidas sem reposição

No caso de se saber que a 1ª peça é defeituosa, a segunda extração é feita de um lote de 9 em que 1 delas é defeituosa. Assim, $P(B|A) = \frac{1}{9}$.

No caso de se saber que a 1º peças não é defeituosa, a segunda extração é feita de um lote de 9 em que 2 peças são defeituosas. Assim, $P(B|\bar{A}) = \frac{2}{9}$.

Exemplo 2:

O quadro seguinte refere-se à situação de emprego dos habitantes (adultos) de uma comunidade e está organizado em função do sexo.

Sejam os eventos:
M: "ser mulher"
H: "ser homem"
D: "Estar desempregado"

	Nº Empregados	Nº Desempregados	
Homens	940	110	1050
Mulheres	860	90	950
	1800	200	2000

a) Seleciona-se, ao acaso, um dos habitantes:

i) Qual a probabilidade de ser mulher?

$$P(M) = \frac{C.favoráveis}{C.possíveis} = \frac{950}{2000} = 0{,}475 \rightarrow \mathbf{47,5\%}$$

ii) Qual a probabilidade de estar desempregado?

$$P(D) = \frac{C.favoráveis}{C.possíveis} = \frac{200}{2000} = 0{,}10 \rightarrow \mathbf{10\%}$$

iii) Qual a probabildade de ser mulher desempregada?

$$P\,(M \cap D) = \frac{C.favoráveis}{C.possíveis} = \frac{90}{2000} = 0{,}045 \rightarrow \mathbf{4,5\%}$$

b) Seleciona-se, ao acaso, um dos habitantes e verifica-se que é mulher. Qual a probabilidade de estar desempregada?

$$P\,(D|\,M) = \frac{P\,(D \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}045}{0{,}475} \approx 0{,}095 \rightarrow \mathbf{9,5\%}$$

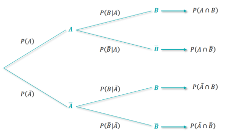
c) Seleciona-se, ao acaso, um dos habitantes e verifica-se que é desempregado. Qual a probabilidade de ser mulher?

$$P\,(M|\,D) = \frac{P\,(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}045}{0{,}10} = 0{,}45 \rightarrow \mathbf{45\%}$$

- Na resolução de problemas, envolvendo o cálculo de probabilidade condicionada é de grande utilidade utilizar tabelas de dupla entrada, diagramas em Venn, ou diagramas em árvore, de acordo com os dados fornecidos no enunciado
- **Tabelas de dupla entrada**

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(A)$	$P(\bar{B})$	

- **Diagrama em árvore**



Independência de eventos

- Seja B um evento com probabildade de ocorrência positiva. Se $A \cap B = \varnothing$, então A e B são mutuamente exclusivos, não podem ocorrer simultaneamente
- Neste caso:
  - P($A|B$) = 0, porque a ocorrência de B impede a ocorrência de A
  - Logo A e B são **independentes**
- A e B são eventos independentes se **P ($A \cap B$) = P(A) x P(B)**
- Se A e B são eventos independentes, então **P($A|B$) = P(A)** e **P($B|A$) = P(B)**

Teorema da probabilidade total

- Dado r ∈ $\mathbb{N}$, dizemos que $\{B1, B2, \ldots, Br\}$ é uma partição de S se $B1, B2, \ldots, Br$ são disjuntos 2 a 2 e a sua união for S

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{r} P(A|B_i).P(B_i)}$$

Teorema de Bayes

$$\boxed{P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k).P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{r} P(A|B_i).P(B_i)}}$$

Variável Aleatória