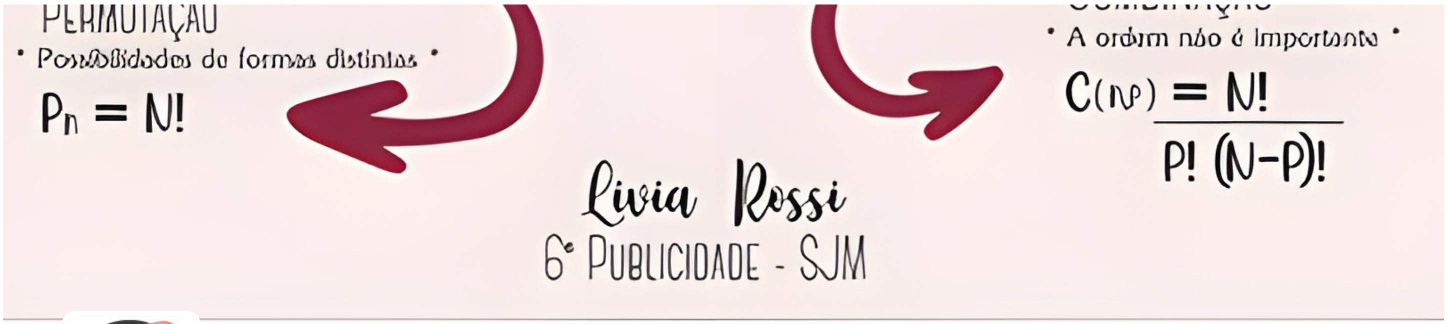

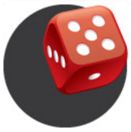

Métodos de contagem e análise combinatória

Apontamentos sobre métodos de contagem, arranjos com repetição, permutações e combinações

Page

Métodos de contagem

Princípio geral da adição

- Dados 2 conjuntos A e B tais que $A \cap B = \varnothing$, tem-se que: $\#(A \cup B) = \#A + \#B$

Princípio geral da multiplicação

- Dados 2 conjuntos A e B de cardianais respetivamente iguais a $n \in \mathbb{N}$ e a $m \in \mathbb{N}$, tem-se que o cardinal do produto cartesiano $A \times B$ é igual a $n \times m$

Exemplo 1:

Num determinado restaurante o menu do dia tem quatro pratos principais diferentes, duas escolhas para a sopa e três sobremesas.
Se o João comer um dos pratos principais, uma das sopas disponíveis e uma sobremesa, quantas refeições diferentes pode fazer?

O restaurante dispõe de **quatro** pratos principais.
Para cada uma dessas opções, há **duas** alternativas para a sopa.

Por fim, o João dispõe de **três** opções para a sobremesa.

Logo, existem $4\times2\times3 = \mathbf{24}$ refeições diferentes.

Prato		Sopa		Sobremesa	
4	×	2	×	3	= 24

Exemplo 2:

Uma sequência de algarismos cuja leitura da esquerda para a direita e da direita para a esquerda resulta no mesmo número designa-se por CAPICUA.
Quantas capicuas de quatro algarismos existem?

Os números 3223 e 8008 são exemplos de capicuas de quatro algarismos.

Já 0550 não é um número de quatro algarismos, porque o 0 da esquerda não é significativo.

Há **nove** escolhas para o 1.º algarismo, porque o 0 não pode ser utilizado.

Há **dez** escolhas para o 2.º algarismo.

Para o 3.º e 4.º algarismos não há escolha porque vão repetir o 2.º e o 1.º algarismo, respetivamente.

Logo, existem $9\times10\times1\times1 = \mathbf{90}$ capicuas.

1.º algarismo		2.º algarismo		3.º algarismo		4.º algarismo	
9	×	10	×	1	×	1	= 90

Arranjos com repetição

- Ao número de sequências de $p \in \mathbb{N}$ elementos, não necessariamente distintos, escolhidos num conjunto de cardinal $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{A'^{n}_{p} = n^p}$$

Exemplo 1:

Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5, indistinguíveis ao tato.
De quantas maneiras distintas podemos extrair sucessivamente e com reposição quatro dessas bolas?

Utilizando o **princípio geral da multiplicação**, tem-se que:

1.ª extração		2.ª extração		3.ª extração		4.ª extração	
5	×	5	×	5	×	5	$= 5^4$

Assim:
5^4 é o número de formas distintas de dadas cinco bolas efetuar quatro extrações sucessivas de uma dessas bolas, repondo a bola escolhida após cada uma das extrações.

A situação apresentada corresponde a **arranjos com repetição de 5 elementos 4 a 4**.

Permutações

- A uma maneira de ordenar n elementos distintos dá-se o nome de **permutação** dos n elementos
- O número de permutações de n elementos de um conjunto de cardinal $n \geq 1$ é igual a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ e representa-se por $n!$ (n fatorial)

Exemplo 1:

De quantas maneiras distintas é que a Ana, a Bárbara, a Catarina e a Diana, se podem sentar num automóvel, indo duas à frente e duas atrás e supondo que qualquer uma pode conduzir?

Existem 4 lugares no automóvel: o do condutor (1), o lugar ao lado (2), o lugar atrás do condutor (3) e o lugar ao lado (4). Qualquer rapariga se pode sentar em qualquer lugar.

Lugar 1		Lugar 2		Lugar 3		Lugar 4	
4	x	3	x	2	x	1	= 4! = 24

é o número de maneiras diferentes de sentar quatro pessoas numa fila de quatro lugares.

(Ao sentar quatro pessoas em quatro lugares, pretende-se determinar o número de permutações de quatro elementos)

Exemplo 2:

De quantas maneiras distintas se podem colocar em fila um grupo de dois rapazes e quatro raparigas de modo a que um casal de namorados, o João e a Rita (que fazem parte do grupo), fique sempre junto?

O esquema seguinte sugere as várias formas do casal ocupar os lugares, ficando o **João** (J) sentado à esquerda e a Rita (R) à direita:

J R ___ ___ ___ ___

___ J R ___ ___ ___

___ ___ J R ___ ___

___ ___ ___ J R ___

___ ___ ___ ___ J R

São cinco possibilidades, mais outras cinco, pois o João e a Rita podem trocar entre si as posições.

Para cada posição que o casal ocupa, os outros amigos têm $4!$ maneiras de ocupar os quatro lugares que ficam livres.

___ J R ___ ___ ___

4 opções, 3 opções, 2 opções, 1 opção

Assim, conclui-se que há $5 \times 2 \times 4! = \mathbf{240}$ maneiras do grupo se colocar em fila, de modo que o casal fique junto.

Exemplo 4:

Quantos códigos diferentes de 4 dígitos se podem escolher para o cartão multibanco, se nenhum dos dígitos puder ser repetido?

ESQUEMATICAMENTE:

1º dígito		2º dígito		3º dígito		4º dígito	
10	×	9	×	8	×	7	= 5040

- Mas se o nº de permutações de n objetos diferentes, escolhendo r (r ≤ n) objetos de cada vez é:

$$\boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Permutação circular

- Em permutações circulares de n elementos, um dos elementos funciona como referência e os restantes n - 1 elementos é que distinguem as permutações
- O nº de permutações de n objetos diferentes arranjados em círculo é **(n - 1)!**

Exemplo 5:

Um grupo de 6 amigos reuniu-se para jogar às cartas.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar à mesa?

Aqui interessa claramente considerar a posição relativa entre eles.

→ Se todos se deslocarem o mesmo número de lugares no sentido horário (ou anti-horário) obtém-se o mesmo arranjo.

→ Logo temos que tomar um deles como referência.

$$(6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Exemplo 6:

De quantas formas diferentes se podem distribuir três *Pens*, uma de 1 Gb e duas de 512 Mb, por três alunos?

G (*Pen* de 1 Gb)
M (*Pen* de 512 Mb)

Se todas as *Pens* fossem diferentes teríamos:

3! = 6 permutações diferentes:

$G_1 - M_1 - M_2$	$M_1 - G_1 - M_2$
$G_1 - M_2 - M_1$	$M_2 - M_1 - G_1$
$M_1 - M_2 - G_1$	$M_2 - G_1 - M_1$

No entanto as *Pens* M1 e M2 são iguais, logo existem apenas 3 arranjos diferentes!

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$$

Combinações

- Chama-se nº de **combinações de n elementos** r a r ao nº de subconjuntos de p elementos $0 \leq r \leq n$ de um conjunto $n \in \mathbb{N}$ elementos.

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Exemplo 1:

Uma caixa contém 5 bolas numeradas de 1 a 5, indistinguíveis ao tato.
De quantas maneiras distintas podemos extrair simultaneamente 3 dessas bolas?

Por se tratar de uma extração simultânea, não interessa considerar a ordem das bolas, mas sim quais as três bolas escolhidas.

Assim, o número de formas distintas de dadas cinco bolas escolher três é igual ao número de subconjuntos de três elementos de um conjunto com cinco elementos.

A situação apresentada corresponde a **combinações de 5 elementos, 3 a 3**, que é igual a:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

Exemplo 2:

De quantas maneiras distintas se podem selecionar duas pessoas entre a Ana, a Bárbara, a Catarina, a Diana e a Eva (A, B, C, D e E)?

A – B	**A – D**	**B – C**	**B – E**	**C – E**
A – C	**A – E**	**B – D**	**C – D**	**D – E**

Observe-se que **escolher A – B** é equivalente a **escolher B – A**.
Ou seja, há **10 maneiras** distintas de escolher **3 em 5** pessoas.

A situação apresentada corresponde a **combinações de 5 elementos, 3 a 3**, que é igual a:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

Exemplo 3:

No concurso “Euromilhões” aposta-se em 5 números e 2 estrelas.
Quantas apostas diferentes se podem fazer?

Uma aposta no “Euromilhões” é um conjunto de 5 números escolhidos de entre 50, bem como um conjunto de 2 estrelas escolhidas de entre 12.

Assim, a situação apresentada corresponde a **combinações de 50 elementos, 5 a 5** e **combinações de 12 elementos, 2 a 2**, que é igual a:

$$C_5^{50} \times C_2^{12} = \frac{50!}{5!\,(50-5)!} \times \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = 2118760 \times 66 = 139\,838\,160$$