Continuidade

Apontamentos sobre a definição de continuidade, os seus teoremas, nomeadamente de Bolzano e Weierstrass e descontinuidades

Page

Definição

- f: D ⊂ R é contínua no ponto $a \in D$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Teoremas

Teorema

- Se f é contínua em a e $f(a) > 0$, então f é positiva numa vizinhança de a
- Se f é contínua em a e $f(a) < 0$, então f é negativa numa vizinhança de a

Teorema de Bolzano

- Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \neq f(b)$, então para todo o número k entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

  Corolário:

  - Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a)$ x $f(b) < 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Weierstrass

- Toda a função contínua num intervalo fechado atinge nesse intervalo um valor máximo e um valor mínimo
- $f(a)$ é máximo absoluto da função se $f(a)$ for a maior das imagens
- $f(a)$ é mínimo absoluto da função se $f(a)$ for a menor das imagens

💡 Os teoremas de Bolzano e Weierstrass permitem concluir que o contradomínio de uma função contínua em a, b é o intervalo m, M , onde m e M representam respetivamente o mínimo e máximo de f em a, b .

Descontinuidades

- $f : D \subset \mathbb{R}$ tem uma descontinuidade de 1ª espécie no ponto $a \in D$ se os limites laterais $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existem e são finitos, mas ocorre uma das seguintes situações:
    - $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$
    - $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- f tem uma descontinuidade de 2ª espécie no ponto $a \in D$ se algum dos limites laterais não existe ou não é finito

Diferenciabilidade