Início Probabilidades

Page

- Quando estudamos um fenómeno, estamos interessados em prever o seu comportamento
- Há 2 tipos de fenómeno:
    - **Fenómenos determinísticos**
        - São caracterizados pela existência de uma relação funcional bem definida entre as variáveis independentes e dependentes, e em que é possível determinar com exatidão o seu comportamento
        - **Exemplo:** O sistema de faturação de eletricidade
    - **Fenómenos probabílisticos**
        - São caracterizados por não se conseguir definir completamente uma relação funcional entre as variáveis dependentes e independentes, por isso atribuímos importância decisiva ao fator sorte
        - **Exemplo:** O resultado de um jogo de futebol

- `PROBABILIDADE` - proporciona as ferramentas para desenvolver **modelos matemáticos** que nos ajudam a **prever o comportamento** deste tipo de fenómenos, estimando o fator sorte

- `EXPERIÊNCIA DETERMINISTA` - Resultado pode ser conhecido antes da sua realização. É uma experiência com um único caso possível
- `EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA` - Processo que gera um resultado que pode ser diferente de cada vez que o processo é executado em iguais condições. É uma experiência com mais do que um resultado possível, não sendo possível prever com exatidão o seu resultado, mesmo quando realizada nas mesmas condições

> ℹ️ As experiências aleatórias são o objeto de estudo da **teoria das probabilidades**

Experiência aleatória e espaço amostral

- Uma experiência é um processo que conduz a um resultado a um conjunto previamente fixado, designado por **universo dos resultados** ou **espaço amostral**
- `ESPAÇO AMOSTRAL` - Conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Este conjunto representa-se por S, Ω ou E e os seus elementos designam-se por **casos possíveis**

Exemplo 1:

"Lançar um dado equilibrado, numerado de 1 a 6, e verificar a face que fica voltada para cima"

- Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- #Ω = 6 → O conjunto Ω tem 6 elementos

Exemplo 2:

"Extrair ao acaso uma carta de um baralho completo de 52 cartas e anotar a carta saída"

Um baralho completo tem 52 cartas, repartidas por 4 naipes:

espadas (♠), copas (♥), ouros (♦) e paus (♣)

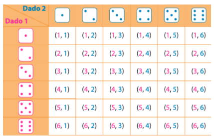
Em cada naipe há 13 cartas:

1 ás (A), 3 figuras (K(rei), Q (dama) e J (valete)) e mais 9 cartas (de 2 a 10)

- **Ω**= {A♠, A♥, A♦, A♣, K♠, K♥, K♦, K♣, Q♠, Q♥, Q♦, Q♣, ... , 2♠, 2♥, 2♦, 2♣}
- #**Ω** = 52

Exemplo 3:

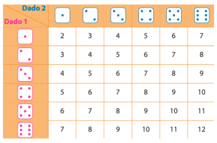
"Lançar 2 dados cúbicos equilibrados e verificar as faces que ficam voltadas para cima"



- **Ω** = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

Exemplo 4:

"Lançar 2 dados cúbicos equilibrados e verificar a soma das faces que ficam voltadas para cima"

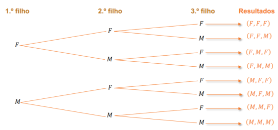


- **Ω** = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Exemplo 5:

"Escolher ao acaso uma família com 3 filhos e anotar o sexo destes, considerando a ordem pela qual nasceram"

Seja: F: "o filho é do sexo feminino" e M: "o filho é do sexo masculino".

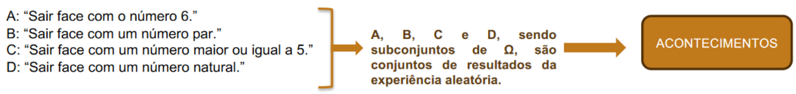


- E = {(F, F, F) , (F, F, M) , (F, M, F) , (F, M, M) , (M, F, F) , (M, F, M) , (M, M, F) , (M, M, M)}
- #E = 2x2x2 = 8

Exemplo 6:

"Lançar um dado cúbico equilibrado e verificar a face que fica voltada para cima"

- **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Sendo o espaço de resultados um conjunto, é possível formar subconjuntos com os seus elementos, como, por exemplo:
  - A = 6
  - B = 2, 4, 6
  - C = {5, 6}
  - D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}



Acontecimentos (Eventos)

- Cada um dos subconjuntos do espaço amostral de uma experiência aleatória designa-se por **acontecimento** ou
    - O conjunto vazio designa-se por **acontecimento impossível**
    - O espaço amostral designa-se por **acontecimento certo**
    - Se existir apenas um caso que lhe seja favorável, o acontecimento designa-se por **elementar**
    - Se existir mais do que um caso que lhe seja favorável, o acontecimento designa-se por **composto**

Exemplo 1:

"Lançar um dado dodecaédrico equilibrado, numerado de 1 a 12, e verificar a face que fica voltada para cima"

- **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
- #**Ω** = 12

Em relação a esta experiência, podem ser definidos vários acontecimentos, tais como:

- A: "sair um número negativo" → Acontecimento impossível
- $A = \varnothing$
- $\#A = 0$

Exemplo 2:

"Lançar um dado dodecaédrico equilibrado, numerado de 1 a 12, e verificar a face que fica voltada para cima"

- B: "sair um número múltiplo de 1" → Acontecimento certo
- **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
- #**Ω** = 12

- D: "sair um número quadrado perfeito" → Acontecimento composto
- **Ω** = {1, 4, 9}
- #**Ω** = 3 > 1

Operações com acontecimentos (eventos)

- O facto de existir paralelismo entre conjuntos e acontecimentos permite-nos efetuar operações com acontecimentos:
    - Designa-se por **acontecimento reunião** (**ou união**) de A com B ao acontecimento que se realiza quando se verifica A **ou** B e representa-se por $A \cup B$
        - $A \cup B$: "sair um número primo **ou** um número ímpar"
        - $A \cup B$ = {2, 3, 5, 7, 11} ∪ {1, 3, 5, 7, 9, 11} = {1, 2, 3, 5, 7, 9, 11}
    - Designa-se por **acontecimento interseção** de A com B ao acontecimento que se verifica quando se realiza A **e** B em simultâneo e representa-se por $A \cap B$
        - $A \cup B$: "sair um número primo **e** um número ímpar"
        - $A \cap B$ = {2, 3, 5, 7, 11} ∩ {1, 3, 5, 7, 9, 11} = {3, 5, 7, 11}
    - Designa-se por **acontecimento disjunto**, **incompatíveis** ou **mutuamente exclusivos** aos acontecimentos que nunca ocorrem em simultâneo, isto é, a realização de um deles implica a não realização do outro
    - Os acontecimentos A e B são disjuntos se $A \cap B = \varnothing$
        - $B \cap D$: "sair um número ímpar e um número múltiplo de 6"
        - $B \cap D$: {1, 3, 5, 7, 9, 11} ∩ {6, 12}
    - Os acontecimentos A e B dizem-se **contrários** se $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = E$
        - $B \cap C$: "sair um número ímpar e um número par"
        - $B \cap C$ = {1, 3, 5, 7, 9, 11} ∩ {2, 4, 6, 8, 10, 12} = ∅
        - $B \cup C$: "sair um número ímpar ou um número par"

Os acontecimentos B e C são **contrários**.

  - $B \cup C$ = {1, 3, 5, 7, 9, 11}
    $\cup$ {2, 4, 6, 8, 10, 12}
- Designa-se por diferença entre acontecimentos aos eventos que contém todos os elementos de A que não pertencem a B e representa-se por $\boldsymbol{A\text{-}B}$ ou $\boldsymbol{A \setminus B}$ ou $\boldsymbol{A \cap \neg B}$
- Designa-se por **complemento de um acontecimento** ao acontecimento $\neg A$ constituído por todos os elementos de $\boldsymbol{\Omega}$ que não pertencem a A

Propriedades

$A \cap \bar{A} = \varnothing$
$A \cup \bar{A} = S$

Leis Comutativas
$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

Leis Associativas
$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Elemento neutro
$A \cup \varnothing = A$
$A \cap S = A$

Elemento absorvente
$A \cup S = S$
$A \cap \varnothing = \varnothing$

Leis Distributivas
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Leis de De Morgan
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$