Matrizes

Apontamentos sobre as matrizes, os tipos e as suas propriedadades

Page

Chama-se matriz do tipo m x n ao quadro que se obtém dispondo *m* x *n* números, segundo *m* linhas e *n* colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- A matriz A também pode ser representada por:
  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ou por $A = [a_{ij}]$

- Os termos são os elementos da matriz A.
- Os índices i e j indicam a posição do elemento na matriz A.

- Uma matriz com m linhas e n colunas denomina-se matriz m por n (m x n).
  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3
- m e n correspondem à sua dimensão, tipo ou ordem
  $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

Exemplo

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

- As matrizes A e B são **2 x 2**
- A matriz C é **2 x 3**

- A matriz D é **1 x 3**
- A matriz E é **3 x 1**
- A matriz F é **1 x 1**

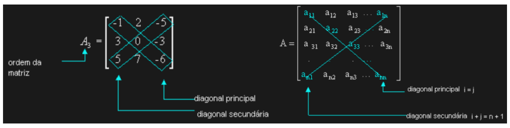
> De acordo com a notação introduzida, exemplos de elementos de algumas matrizes dadas acima são:
>
> $$a_{12} = 2, \quad c_{23} = -2, \quad e_{21} = 4, \quad [A]_{22} = 4, \quad [D]_{12} = 3$$

Tipos de Matrizes

2 tipos principais

Matriz quadrada - O número de linhas é igual ao número de colunas m = n

- Numa matriz quadrada podem definir-se:
  - **Diagonal principal** - corresponde aos elementos em que i = j
  - **Diagonal secundária** - corresponde aos elementos em que i+j = n+1



Matriz retangular - O número de linhas é diferente do número de colunas m ≠ n

Matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3×3

Matriz retangular

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

4×3

Matriz Linha e Matriz Coluna

- Também designados por vetores
- Estas matrizes são caracterizadas por possuírem apenas uma linha (1 x n) ou uma coluna (m x 1)

Matriz Linha

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1×3

Matriz Coluna

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4×1

Matriz Triangular

- Matriz quadrada com valores nulos acima ou abaixo da diagonal principal

- **Triangular superior** - Todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos
- **Triangular inferior** - Todos os elementos situados acima da diagonal principal são nulos

  Triangular Superior $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ Triangular Inferior $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Diagonal

- Matriz quadrada em que todos os valores que não pertençam à diagonal principal são nulos
- É ao mesmo tempo triangular superior e inferior

  Matriz Diagonal $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Escalar

- Matriz diagonal em que todos os valores da diagonal são iguais e diferentes de 1

  Matriz Escalar $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Identidade

- Matriz diagonal com os elementos diagonais iguais a um

  Matriz Identidade $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Nula

- Matriz com todos os elementos nulos

  Matriz Nula $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Matriz Transposta

- Matriz transposta de A é uma matriz que transforma as linhas de A em colunas e as suas colunas em linhas

  $$\underset{3\times 2}{A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}} \qquad \underset{2\times 3}{A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}}$$

- **Propriedades da Matriz Transposta**
  - A transposta da transposta da matriz A é a própria matriz A

    $(A^T)^T = A$
  - A transposta da soma é igual à soma das transpostas

    $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - A transposta do produto é igual ao produto das transpostas inversas

    $A^T \times B^T = (B \times A)^T$
  - A transposta do produto de uma constante por uma matriz é igual ao produto da constante pela transposta da matriz

    $(\lambda \times A)^T = \lambda \times A^T$

Matriz Simétrica

- Faz espelho segundo à diagonal principal
  - Se A é simétrica, então a matriz A é igual transposta de A

    $$\underset{3\times 3}{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}} \qquad \underset{3\times 3}{A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}}$$

Matriz Antissimétrica

- Matriz cujos números da sua transposta são idênticos em valor absoluto mas diferentes em sinal: a matriz A é igual ao simétrico da matriz transposta de A

  $$\underset{3\times 3}{A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \underset{3\times 3}{A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}}$$

Operações com Matrizes