Operações com Matrizes

Apontamentos sobre a adição, subtração e produto de matrizes

Page

Adição

- Somam-se os elementos homólogos de cada uma das matrizes
- Só se podem somar matrizes da mesma ordem

$$\underset{3x2}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}} + \underset{3x2}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}} = \underset{3x2}{\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}} = \underset{3x2}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}}$$

Exemplos:

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}} + \underset{2x3}{\begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}}$$

Subtração

- Igual à adição, só que em vez da operação entre elas ser a soma é a subtração.
- Também só se podem subtrair matrizes da mesma ordem

Propriedades da soma (subtração) de matrizes

- Uma subtração pode ser vista como uma soma, considerando:
    - A - B = A + (-B)

- Propriedade Comutativa
    - A + B = B + A

- Propriedade Associativa
    - (A + B) + C = A + (B + C)

- Existência de Elemento Neutro (Matriz Nula)
    - A + 0 = 0 + A = A

- Existência de Oposta
    - A + (-A) = 0

Produto

Produto de um escalar por uma matriz

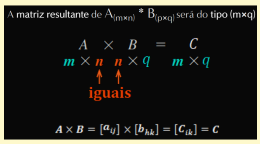
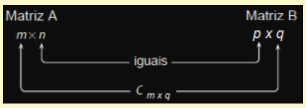
- Multiplica-se o número real por cada elemento da matriz
- A matriz obtida é do mesmo tipo que a inicial

$$\boldsymbol{k \times A = k \times [a_{ij}] = [k \times a_{ij}]}$$

$$2 \times \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}} = \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 2 \times 8 & 2 \times 2 \\ 2 \times 5 & 2 \times 1 \\ 2 \times 3 & 2 \times 5 \end{bmatrix}} = \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 10 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}}$$

Produto de matrizes

- Obtém-se fazendo o produto interno das linhas da primeira matriz pelas colunas da segunda matriz

> ⚠️ O número de colunas da primeira tem de ser igual ao número de linhas da segunda:
>
> 
>
>
> 
>
>
> $A_{(m \times n)}$ * $B_{(p \times q)}$ só é possível se n = p

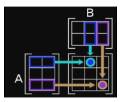
O produto de matrizes pode ser escrito como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$$

$$\underset{(3 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}} \times \underset{(2 \times 4)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 4)}{\begin{bmatrix} 1 \times 1 + 6 \times 3 & 1 \times 2 + 6 \times 1 & 1 \times 8 + 6 \times 3 & 1 \times 2 + 6 \times 5 \\ 2 \times 1 + 1 \times 3 & 2 \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 8 + 1 \times 3 & 2 \times 2 + 1 \times 5 \\ 4 \times 1 + 3 \times 3 & 4 \times 2 + 3 \times 1 & 4 \times 8 + 3 \times 3 & 4 \times 2 + 3 \times 5 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 8 & 26 & 32 \\ 5 & 5 & 19 & 9 \\ 13 & 11 & 41 & 23 \end{bmatrix}_{(3 \times 4)}$$

23



Exemplo:

Propriedades do produto de matrizes

- Na maioria dos casos, a multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa
    - A x B ≠ B x A
    - Exceto em matrizes permutáveis. Se C e D são permutáveis então:
        - C x D = D x C

- Propriedade Associativa
    - (A x B) x C = A x (B x C)

- Propriedade Distributiva do produto em relação à adição
    - A x (B + C) = A x B + A x C

- Propriedade Homogénea
    - k x (A x B) = (k x A) x B = A x (k x B)

- Existência de Elemento Neutro (Matriz Identidade)
    - A x I = A (I → Matriz Identidade)
    - I x A = A

- Existência de Elemento Absorvente
    - A x [0] = [0] ([0] → Matriz Nula)

- Matriz Inversa

  $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

Combinação Linear