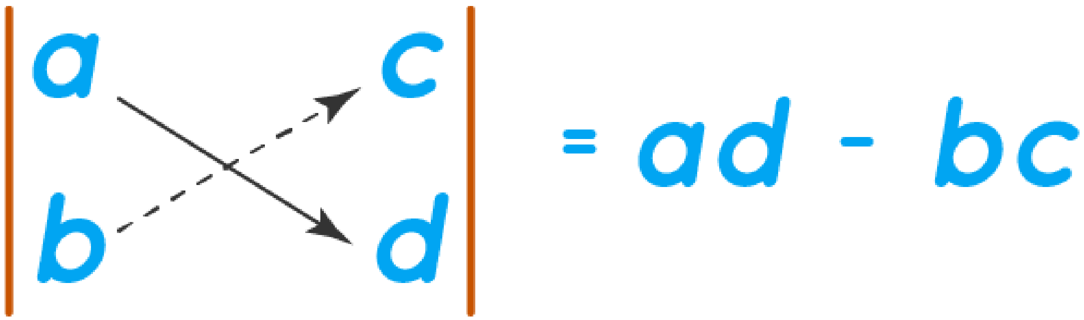

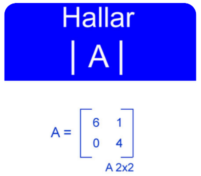

Determinantes

Apontamentos sobre os determinantes nas matrizes 2x2, 3x3 e acima

Page • Classificação de... Apontamentos ALG...

- **Determinante** de uma matriz quadrada A de ordem *n* é um escalar denotado por: |A| ou det(A)
- Vai determinar se as linhas/colunas da matriz A são linearmente independentes
- A regra de cálculo do determinante varia com a ordem da matriz A:
    - Ordem 1x1:

      $$|A| = a_{11}$$

    - Ordem 2x2:

      $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$a_{21} \quad a_{22}$

- Corresponde à subtração do produto dos elementos da diagonal principal pelo produto da diagonal secundária

Exemplos:

se A = [-3], então |A| = -3

determinante de $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

é:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - (1)(3) = 2 - 3 = -1$$

Propriedades dos determinantes:

- Se uma matriz A tiver 2 linhas iguais, tem-se que det(A) = 0
- Se uma matriz A tiver uma linha ou coluna nula, tem-se que det(A) = 0
- O determinante da matriz identidade é igual a 1: det(I) = 1
- Se uma linha da matriz A for múltipla de outra linha de A, tem-se que det(A) = 0
- O determinante muda de sinal cada vez que se efetua uma troca de linhas da matriz
- O determinante não se altera se a uma linha da matriz A adicionarmos um múltiplo de outra linha de A
- O determinante de uma matriz A triangular, superior ou inferior, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal
- Uma matriz A quadrada é invertível se det(A) ≠ 0

- Sejam A e B matrizes n x n. Então det(AB) = det(A).det(B)
- Seja A uma matriz quadrada e invertível. Então:

  $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

- Seja A uma matriz quadrada. Então:

  $$\det(A^T) = \det(A)$$

Determinante de uma matriz 3x3

- Para uma matriz A, 3x3, o determinante de A é mais complexo do que para uma matriz A, 2x2 e define-se como:

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

  $$\Downarrow$$

  $$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

- Uma regra prática para calcular determinantes de matrizes quadrada 3x3 é a Regra de Sarrus
- O cálculo do determinante 3x3 é constutuído pela soma destas 6 parcelas, mostradas no exemplo acima, mas em que estas são definids através de diagonais e de triângulos "fictícios" na matriz.
- 3 parcelas são afetadas pelo sinal (+), o produto da diagonal principal e ainda o produto dos 2 triângulos, cuja base é paralela à diagonal principal e com vértices nos cantos superior direito e inferior esquerdo.
- 3 parcelas são afetadas pelo sinal (-), o produto da diagonal secundária e ainda o produto dos 2 triângulos cuja base é paralela à diagonal secundária e com vértices nos cantos superior esquerdo e inferior direito

Regra do triângulo "fictício"

$$sinal +: \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & & a_{13} \\ a_{21} & \bullet & \\ & a_{32} & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & a_{12} & \\ & \bullet & a_{23} \\ a_{31} & & \bullet \end{bmatrix}$$

$$sinal -: \begin{bmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & \bullet \\ & \bullet & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & a_{12} & \bullet \\ a_{21} & \bullet & \\ \bullet & & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Regra de Sarrus

1. Repetir as 2 primeiras colunas
2. Somar o produto das diagonais principais
3. Subtrair o produto das diagonais secundárias

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada A, com dimensão ≥ 2, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma coluna, ou linha, pelos respetivos complementos algébricos.

$$\text{para colunas:} \quad \Rightarrow \quad det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

$$\text{para linhas:} \quad \Rightarrow \quad det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

Matriz Adjunta

Seja A uma matriz n × n. Define-se como a matriz dos complementos algébricos de A a matriz Ã.

A matriz Ã^T designa-se por **matriz adjunta de A**.

$$A\tilde{A}^T = det(A) I_n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \tilde{A}^T$$

Regra de Cramer

Dado o sistema de equações lineares AX = B, com A inverível, a solução do sistema tem por elemento os quocientes:

$$xi = \frac{det(A_{xi})}{det(A)}$$

A_{xi} é a matriz que se obtém de A substituindo a coluna i por b.

Exemplo: Para um sistema de 2 equações a solução é dada por:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{det(A)} \\ \\ x_2 = \dfrac{det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{det(A)} \end{cases}$$