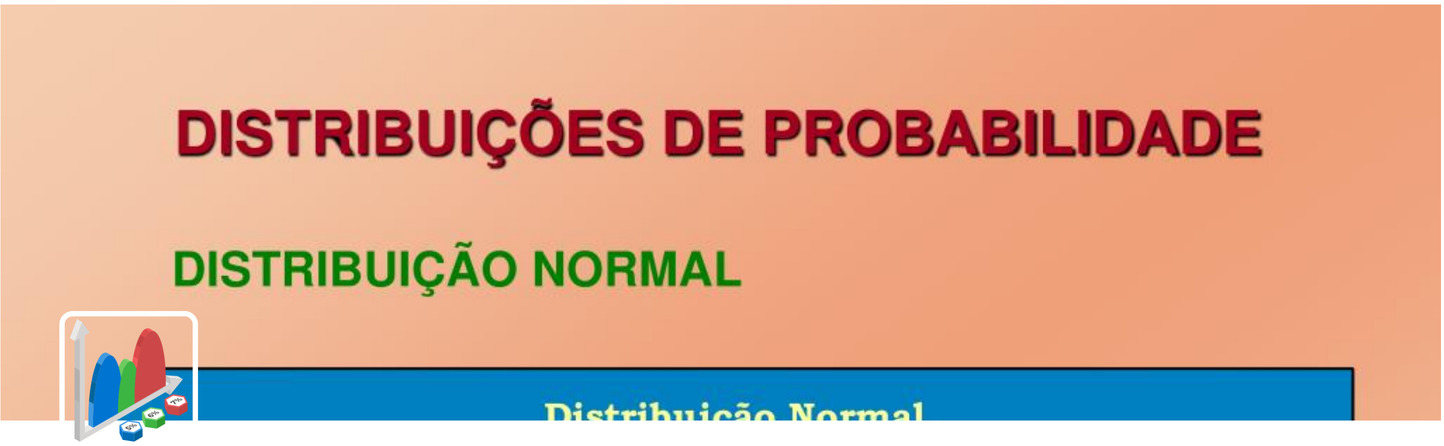


Distribuição Binomial (ou de Bernoulli), Distribuição Normal (ou de Gauss) e Distribuição de Poisson

Apontamentos sobre a distribuição binomial, a sua fórmula e propriedades

Page

Distribuição Binomial

- **Uma prova de Bernoulli (X~Bernoulli(p))** é uma experiência aleatória com 2 resultados possíveis:
    - realização de A, que corresponde ao **sucesso**
    - não realização de A, que corresponde ao **insucesso**
- Nestas distribuições, os parâmetros caracterizadores da distribuição são:
    - n = "número de provas a efetuar"
    - p = " probabilidade de ocorrer o acontecimento A (probabilidade associada ao sucesso)($0 \leq p \leq 1$)"
    - q = "probabilidade de não ocorrer o acontecimento A (em que $A = 1 - p$)"
- Diz-se que X é uma variável binomial e representa-se por: $\boldsymbol{X \sim B(n, p)}$

$$\boxed{P(X=x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-k}}$$

- A distribuição binomial tem as seguintes propriedades:

$$\boxed{\mu = np}$$

$$\boxed{\sigma^2 = np(1-p)}$$

Exemplo 1:

Consideremos o lançamento de uma moeda 5 vezes, qual a probabilidade de saírem no máximo 3 caras:

Consideremos C="sair cara" e ¬C="não sair cara"

E se o nº de lançamentos fosse 15?

Assim, para o problema inicial tem-se:

A variável aleatória $\boldsymbol{X = \text{“nº de vezes que sai cara”}}$

$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$ e $X \sim B(5, \frac{1}{2})$

Aplicando a formula da distribuição Binomial tem-se:

$$P(X \leq 3) = C_0^5 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} + C_1^5 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} + C_2^5 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} + C_3^5 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 0.8125$$

Exemplo 2:

Um técnico dos serviços de prevenção e segurança rodoviária sabe que 1 em 10 acidentes rodoviários é devido a cansaço. Determine a probabilidade de, em 5 acidentes, ocorrerem 0,1,2,3,4 devidos a cansaço.

X é o "número de acidentes, em 5, devidos a cansaço",

$X \sim B\,(n=5, p=0{,}1)$, $\quad p = P\,(sucesso) = \frac{1}{10} = 0{,}1,$ $\quad q = P(insucesso) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

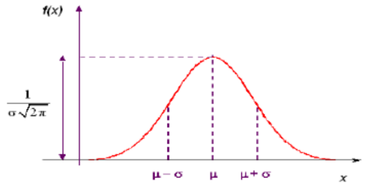
$$P(X=0) = C_0^5 \times 0{,}1^0 \times (0{,}9)^5 = 0{,}5905$$
$$P(X=1) = C_1^5 \times 0{,}1^1 \times (0{,}9)^{5-1} = 0{,}328$$
$$P(X=2) = C_2^5 \times 0{,}1^2 \times (0{,}9)^{5-2} = 0{,}0729$$
$$P(X=3) = C_3^5 \times 0{,}1^3 \times (0{,}9)^{5-3} = 0{,}0081$$
$$P(X=4) = C_4^5 \times 0{,}1^4 \times (0{,}9)^{5-4} = 0{,}0004.$$

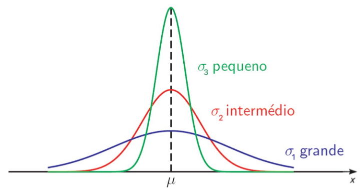
Distribuição Normal

- Esta distribuição utiliza-se, por exemplo, como modelo para representar quantidades ou características de populações que resultem de medições ou dos respetivos erros. Existem casos em que as v.a. não seguem uma distribuição normal, mas aproximam muito dela.
- Esta é a distribuição contínua mais importante

Caracterísiticas

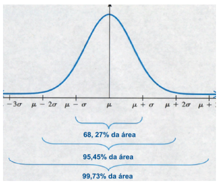
- É simétrica relativamente ao valor médio
- Tem um máximo para $X = \mu$
- F $(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$
- Tem pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$ com lim $x \to \infty$ $f(x) = 0$
- É tanto mais achatada, quanto maior for o σ, de modo que 3 curvas correspondentes a 3 distribuições com o mesmo valor médio, são simétricas, relativamente ao mesmo ponto, diferindo no grau de achatamento $(\sigma 1 > \sigma 2 > \sigma 3)$





- Seja qual for o valor médio e o desvio padrão há uma área constante entre a média e um valor que se encontre a certa distância da média.

$]\mu - \sigma, \mu + \sigma[$,
$]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[$,
$]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[$
e a área que lhes está associada.

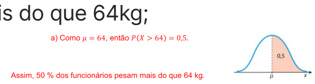


Exemplo 1:

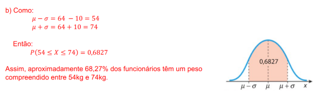
A distribuição do peso dos 265 funcionários de uma empresa segue uma distribuição normal com valor médio 64kg e desvio-padrão 10kg.

1.1 Determine a percentagem de funcionários que pesam:

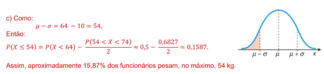
a) mais do que 64kg;



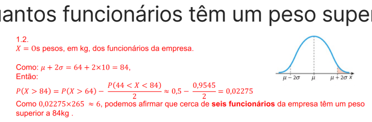
b) entre 54kg e 74kg



c) no máximo 54kg



1.2 Quantos funcionários têm um peso superior a 84Kg



Distribuição normal padrão ou reduzida

- Uma v.a. tem distribuição normal de valor médio ($\mu = 0$) e desvio padrão ($\sigma = 1$), diz-se uma v.a. com **distribuição normal padrão ou reduzida** e representa-se por $Z \sim N(0,1)$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \qquad N(\mu = 0, \sigma = 1)}$$

- Assim para determinar $P(X \leq a)$:

$$\boxed{P(X \leq a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)}$$

- A função de distribuição $F(z)$ da variável aleatória $Z \sim N(0,1)$, é representada por $\Phi(z)$

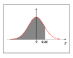
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$\Phi(z) = \alpha \implies z = \Phi^{-1}(\alpha)$$

Exemplo 1:

Seja $Z \sim N(0,1)$, calcule:

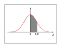
a) $P(Z \leq 0{,}32)$



z	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
	⋮	⋮	⋮

a) Então: $P(Z \leq 0{,}32) = 0{,}6255$

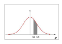
b) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$



z	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
⋮	⋮	⋮	⋮
1.7	0.9554	0.9564	0.9573

b) Então: $P(0 < Z \leq 1{,}71) = P(Z \leq 1{,}71) - P(Z < 0) = 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564$

c) $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79)$



z	0.00	0.01	0.02	⋯	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	⋯	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	⋯	0,5753
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	⋯	0.9177
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	⋯	0.9633

c) Então: $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79) = P(Z \leq 1{,}79) - P(Z \leq 1{,}32) = 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567$

d) $P(Z \leq -1{,}3)$

z	0.00	0.01	0.02	⋯	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	⋯	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	⋯	0,5753
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	⋯	0.9177
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	⋯	0.9633

d) $P(Z \leq -1{,}3) \Rightarrow P(Z \geq 1{,}3) = 1 - P(Z \leq 1{,}3) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$
pela simetria: $P(Z \leq -1{,}3) = P(Z \geq 1{,}3)$

Distribuição de Poisson

- O **modelo de Poisson** é muito útil para as v.a. que representam o nº de ocorrências verificadas num certo período/intervalo de tempo
- Neste caso é necessário apenas um valor para determinar a probabilidade, que é a média de sucessos representado por λ
- Uma variável X segue uma **distribuição de Poisson** de parâmetro λ, então a função de probabilidade é dada por:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}$$

- A média e a variância desta distribuição são iguais ao parâmetro λ
  - Valor médio - número esperado de sucessos

    $$\boxed{E(X) = \mu_x = \lambda}$$

  - Variância - do número esperado de sucessos

    $$\boxed{Var(X) = \sigma_x^2 = \lambda}$$

  - Propriedade:

    $$\boxed{P(X \geq a) = 1 - P(X < a)}$$

Exemplo 1:

Uma linha de informação recebe uma média de 5 chamadas por hora. Qual a probabilidade de, numa hora escolhida ao acaso receber exatamente 3 chamadas?

Sendo X ="*o número de chamadas numa hora*",

X é uma variável de Poisson com $\lambda = 5$, ou seja, $X \sim P(5)$

Pretende-se calcular: $\boldsymbol{P(X = 3)}$**=?**

$$P(X = 3) = \frac{5^3 \times e^{-5}}{3!} = 0{,}1404.$$

R: A probabilidade de numa hora escolhida ao acaso receber exatamente 3 chamadas é 0,1404 ou 14,04%.

Exemplo 2:

Qual a probabilidade de na linha de informações do exemplo anterior, se receberem mais do que 2 chamadas?

Pretende-se calcular:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$

$$= 1 - \left(\frac{5^0 \times e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 \times e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 \times e^{-5}}{2!}\right) = 1 - 0{,}0067 - 0{,}0337 - 0{,}0842 = 0{,}8754$$

Exemplo 3:

Uma biblioteca virtual é consultada 120 vezes por hora.
Supondo que o número de consultas efetuadas é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, determine a probabilidade de :

a) ser efetuada uma consulta entre as 20h20m e as 20h21m

a) Pretende calcular-se o número de consultas num minuto.
X ="*o número de consultas efetuadas num minuto*", a média de consultas é de 120 por hora, ou seja, 120 em 60 minutos.

Então, $\lambda = \frac{120}{60} = 2$, assim a média é de 2 consultas por minuto.

$$P(X = 1) = \frac{2^1 \times e^{-2}}{1!} = 0{,}2707.$$

b) sejam efetuadas pelo menos 2 consultas durante o período anterior

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left(\frac{2^0 \times e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \times e^{-2}}{1!}\right) = 0{,}594.$$

c) não seja efetuada nenhuma consulta durante 3 minutos

c)

$$X = \{\textit{número de consultas em três minutos}\}$$

Se a média de consultas num minuto é 2 em 3 minutos = 2×3 =6

$$P(X = 0) = \left(\frac{6^0 \times e^{-6}}{0!}\right) = 0{,}0025$$

Aproximação da distribuição Binomial pela distribuição Poisson

- Em casos em que n é muito elevado e p muito pequeno, pode aproximar-se a distribuição Binomial à distribuição de Poisson
- No caso da distribuição Binomial, a média é dada por: $\boldsymbol{\mu = n \times p}$
  - Na distribuição de Poisson, a média é representada por λ, logo: $\boldsymbol{\lambda = n \times p}$
- Assim, as condições para a aproximação são:
  - $\boldsymbol{p \leq 0, 1}$
  - $\boldsymbol{n \times p \leq 18}$

Exemplo 1:

É editado um livro com tiragem de 100 000 exemplares. A probabilidade de um livro ser mal encadernado é de 0,0001.

Calcule a probabilidade de que a tiragem contenha exatamente 5 livros defeituosos

X= {nº de livros defeituosos} e X~$B(100000; 0{,}0001)$
X pode ser aproximado por Poisson porque $n.p$=100000*0,0001=10≤ 18 e $p = 0{,}0001 \leq 0{,}1$
$logo$ λ= $n.p$=10 e X~P(λ=10) .