Diferenciabilidade

Apontamentos sobre

Page

Declive de uma função

- A derivada dá-nos a variação da função num determinado momento
- A derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente à função nesse ponto

$$\boxed{f'(a) = m}$$

- Se soubermos 2 pontos de uma reta, sabemos os seu declive

$$\boxed{m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

- De 2 retas são paralelas, então o declive é o mesmo
- Se 2 retas são perpendiculares, então se soubermos o declive de uma, sabemos também o declive da 2ª reta:

$$\boxed{r \perp s \implies m_r = -\frac{1}{m_s}}$$

- m = tg(a), a é a inclinação (ângulo que a reta faz com o eixo das abcissas)

Derivada de uma função

- Seja f uma função real de variável real e a um ponto do seu domínio
    - O limite lim $x \to a$ [($f(x)$ - $f(a)$ / x - a)] quando existe representa a derivada da função no ponto a
    - Por definição tem-se:

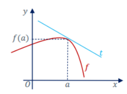
$$\boxed{f'(a) = lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

- Uma expressão alternativa para o cálculo da derivada de f em a é:

$$\boxed{f'(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

> A existência de derivada no ponto a, pressupõe a existência e igualdade das derivadas laterais:
>
> $f'(a^-)= \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $f'(a^+)= \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- A derivada f '(a), quando finita, representa o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x = a

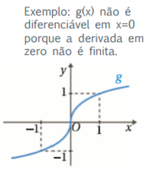


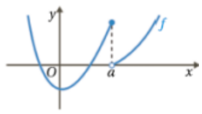
- Uma equação desta reta:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Definição

- f é uma função diferenciável no ponto $a \in D$ se f '(a) existe e é finita



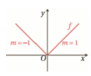


- f é descontínua em a.
- f não é diferenciável em a.

Teorema

- Se f é diferenciável no ponto a, então f é contínua em a

> A diferenciabilidade num ponto implica continuidade nesse ponto. O oposto não é, no entanto, verdade, isto é, continuidade não implica diferenciabilidade. A função $|x|$ é um exemplo clássico. A função módulo é contínua no ponto de abcissa x = 0 mas não tem derivada nesse ponto (dado que as derivadas laterais são distintas).



Regras de Derivação

$(cf(x))' = cf'(x), c \in \mathbb{R}$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

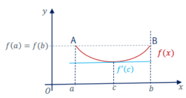
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

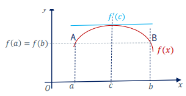
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\ , \qquad g(x) \neq 0$

Teoremas de Rolle e Lagrange

Teorema de Rolle

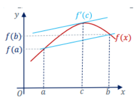
- Se f é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[: f\ '(c) = 0$





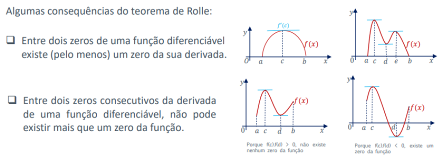
Teorema de Lagrange

- Se f é um função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$, então $c \in]a, b[: f$ '(c) - $(f(b)$ - $f(a)$ / $(b$ - $a)$



Corolário:

- O teorema de Rolle pode considerar-se um caso particular do teorema de Lagrange
- Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e f possui derivada nula em todos os pontos $x \in]a, b[$, então f é uma função constante em $[a, b]$



Derivada de ordem n

- A função diz-se n vezes diferenciável no ponto $x = a$, se existir e for finita a derivada de ordem n

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = D^n f(x)$$

Teorema

- Seja f uma função n vezes diferenciável no ponto $a \in int.Df$, com n ≥ 2

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \wedge \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

  - Se n é ímpar ⇒ f não tem qualquer extremo local no ponto a
  - Se n é par

    $f^{(n)}(a) < 0$ então f tem um **máximo local em** a
    $f^{(n)}(a) > 0$ então f tem um **mínimo local em** a

Teorema

- Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $a \in int.I$. Então:
  - Se $f''(a) > 0$, ∪ (concavidade voltada para cima, convexa)
  - Se $f''(a) < 0$, ∩ (concavidade voltada para baixo, côncava)
  - Se f tem ponto de inflexão no ponto a, então f^(n)(a) = 0

Polinómios de Taylor e de Mac-Laurin

Polinómio de Taylor

- Estabelece que (sob determinadas condições) uma função pode ser aproximada (na proximidade de algum dado ponto dado) por um polinómio, de modo que o erro que se comete ao substituir a função pelo polinómio seja pequeno
- O Teorema de Taylor estabelece que se uma função f for diferenciável n vezes num ponto a, então é válida (numa vizinhança de a) a aproximação $f(x) = pn(x)$, ou, em rigor, $f(x) = pn(x) + Rn(x)$, onde $pn(x)$ é o polinómio de Taylor (de ordem n) da função f relativo ao ponto a, e a função $Rn(x)$ é o resto de Taylor de ordem n da função f relativo ao ponto a

$$P(a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-

Polinómio de Mac-Laurin

- Quando a = 0, o polinómio designa-se por Polinómio de Mac-Laurin de f, de grau n

$$\boxed{P(0) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x-0}{3!}}$$

ℹ️ Quanto maior for o número n, mais semelhantes são os gráficos de f e p na vizinhança de a.

Fórmula de Taylor

$$\boxed{f(x) = p_n(x) + R_n(x)}$$

Resto de Lagrange - Erro de aproximação

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}, \quad \forall x \in V(a)}$$

onde c é um ponto desconhecido do intervalo de extremos x e a