Espaços Vetoriais

Page

Propriedades

- V é um espaço vetorial se se verificarem as seguintes condições:

$\forall u, v \in V, u + v = v + u$ Propriedade Comutativa

$\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$ Propriedade Associativa

$\forall v \in V, u + 0v = v$ Existência de elemento neutro

$v + (-v) = 0v$ Existência de simétricos

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V, \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$ Distribuitividade

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V, (\alpha + \beta).v = (\alpha.v) + (\beta.v)$ Distributividade

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V, (\alpha\beta).v = \alpha.(\beta.v)$ Associatividade

$\forall v \in V, 1.v = v$ Elemento Neutro

Observações

- Os elementos de V designam-se por **vetores**
- Os elementos de $\mathbb{R}$ designam-se por **escalares**
- Ao vetor 0v chama-se **vetor nulo**
- Ao vetor -v chama-se **simétrico** de v
- Há uma definição análoga de **espaço vetorial complexo**, em que os escalares são números complexos
- A definição de espaço vetorial pode ser ainda mais geral, sendo os escalares elementos de uma estrutura também mais geral chamada **corpo**

Exemplos de espaços vetoriais reais

- O conjunto dos vetores no espaço, com a soma e o produto de um número real por um vetor
- O conjunto das matrizes de tipo m x n, com a soma e o produto de um escalar
- O conjunto R com as seguintes operações de soma e produto escalar

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

- O conjunto $\mathbb{R}[x]$ dos polinónios reais na indeterminada x, com a soma e produto de um número real por um polinómio
- O conjunto $\mathbb{R}$n$[x]$ dos polinómios reais na indeterminada x com grau menor ou igual a n
- O conjunto F($\mathbb{R}$) das funções reais de variável real, com as operações:

$$\forall f, g \in F(\mathbb{R}), (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall f \in F(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}, (kf)(x) = kf(x)$$

Subespaços vetoriais

- Um subespaço vetorial de um espaço vetorial é um subconjunto que por sua vez ainda é espaço vetorial
- Para ser um **subespaço vetorial** tem de ser **fechado** para a **soma** e para o **produto escalar**

> ℹ️ O vetor nulo 0v de um espaço vetorial pertence a todos os seus subespaços vetoriais. De facto, se F é subespaço de V e v ∈ F. Somando v com -v, obtém-se 0v e conclui-se que 0v ∈ F

Exemplos:

- Para qualquer espaço vetorial real V, os subconjuntos V e {0v} são subespaços vetoriais. De notar que o **subespaço nulo é o único subespaço vetorial de um espaço vetorial que contenha um número finito de elementos**. Qualquer subespaço vetorial que contenha um elemento v diferente de 0v tem de conter todos os múltiplos desse elemento, ou seja todos os produtos αv, com α ∈ $\mathbb{R}$
- Seja A uma matriz real de tipo m x n formado pelas soluções do sistema homogéneo, AX = 0 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$^n. A este subespaço chama-se **núcleo** da matriz A e é designado por NucA
- Se λ é um valor próprio de uma matriz quadrada de ordem n. O subespaço próprio (AX = λX) é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$
- O conjunto F = {A ∈ M nxn ($\mathbb{R}$): A é triangular inferior} é subespaço vetorial de $\mathbb{R}$
- O conjunto (f é contínua) é subespaço vetorial de F($\mathbb{R}$)
- O conjunto $\mathbb{R}$n $[x]$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ $[x]$

Combinação linear de vetores

- Um vetor u ∈ V é combinação linear dos vetores se:

$$\boxed{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + a_k u_k = u}$$

- Os escalares α são os **coeficientes** da combinação linear

Exemplos

- A soma de vetores é um caso particular, em que os coeficientes são 1
- O produto escalar também é um caso particular, apenas com uma parcela

$$2(1,0,0) + 3(0,1,0) + (-5)(0,0,1) = (2,3,-5),$$

o vector $(2,3,-5)$ é combinação linear de $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ com coeficientes $2, 3$ e -5, respectivamente.

O vector $(2,3,-5)$ **não** é combinação linear de $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,1,0)$, pois qualquer combinação linear destes dois vectores tem a última coordenada nula:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0) = (\alpha_1, \alpha_2, 0).$$

Pode-se escrever o vector nulo como combinação linear dos mesmos vectores do exemplo anterior, mas com coeficientes diferentes de 0:

$$1(2,2,3) + (-2)(1,1,0) + (-3)(0,0,1) = (0,0,0).$$

Dependência e independência linear de vetores

Definição

- Um conjunto V não vazio de um espaço vetorial E, diz-se **linearmente independente (L.I)** se:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})}$$

- Um conjunto V não vazio de um espaço vetorial E, diz-se **linearmente dependente (L.D)** se:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \qquad (\lambda_i \neq 0)}$$

Exemplos:

- A = {(1,0),(1,1)} é um conjunto de vetores linearmente independentes porque é ímpossível obter o vetor (1,1) a partir de uma combinação linear do vetor (1,0), bem como o vetor (1,0) a partir de (1,1)
- A = {(1,1),(3,2),(1,0)} é linearmente dependente porque (3,2) = 2(1,1) + 1(1,0)

Sistema gerador

- Se w1, w2, ... , wn são vetores do espaço vetorial de V, então o conjunto de todas as combinações lineares desses vetores é um subespaço vetorial de V, chamado **subespaço gerado pelos vetores w1, w2, ... , wn** ou **subespaço gerado pelo conjunto {w1, w2, ... , wn}**.
- Denota-se esse subespaço por [w1, w2, ... , wn] ou por [{w1, w2, ... , wn}] e diz-se que w1, w2, ... , wn **são geradores** de [w1, w2, ... , wn]
- Assim:

$$\boxed{[w_1, w_2, \ldots, w_n] = \{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_n w_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}}$$

Exemplo

- Os vetores i = (1,0) e j = (0,1) geram o espaço vetorial ℝ^2, pois qualquer (x,y) ∈ ℝ^2 é combinação linear de i e j : (x,y) = xi + yi = x(0,1) + y(1,0) = (x,0) + (0,y) = (x,y). Então [i,j] = ℝ^2

Base e dimensão de base

Base

- Um conjunto de vetores V de um espaço vetorial E, é uma base se:
  - V gera o espaço E
  - V é linearmente independente

Exemplo : $B = \{(1,0) \text{ e } (1,1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$:

a) B é LI
$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$
$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

b) $[B] = \mathbb{R}^2$. Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Então:
$(x,y) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2)$
Logo, $\alpha_2 = y$ e $\alpha_1 = x - y$

Assim, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, têm-se:

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1)$$

De a) e b) conclui-se que B é uma base de IR^2.

> ℹ️ **Teorema:** Num espaço vetorial finitamente gerado **todas as bases têm o mesmo número de vetores**

Dimensão

- A dimensão de um espaço vetorial V não nulo é o número de vetores de uma base para V
- Denota-se por dimV
- Se V não possui base, dimV = 0

$\dim \mathbb{R} = 1$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim M_{2\times 2} = 4$

$\dim M_{m\times n} = m \times n$

$\dim P_n = n + 1$

Coordenadas de um vetor relativamente a uma base

- Se V é um espaço vetorial e B é uma base de V, cada vetor de V escreve-se de forma única como combinação linear dos vetores de B
- Aos coeficientes desta combinação linear chamam-se coordenadas do vetor v relativamente à base B

$$v \rightarrow (a_1, a_2, ..., a_n)B$$

Escrevendo na forma de matriz vem:

$$\boxed{v = B.v_B}$$

sendo B a matriz correspondente à base B

Observações:

1- Quando $B = \{(1,0),(0,1)\}$ então B é uma base de $\mathbb{R}^2$, denominada canônica. De fato:

a) B é LI, pois $\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

2- De forma análoga temos que: $B = \{(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$, denominada base canônica.

3- Para $B = \{1\}$ então temos a base canônica do $\mathbb{R}$.

Mudança de base

- Pretende-se relacionar o vetor das componentes numa base com as de outra base
- Conhecendo as base A e B, quer calcular-se vA quando conhecido vB ou vice-versa

$$\boxed{Av_A = Bv_B}$$

sendo esta a relação básica para a mudança de componentes. Desta igualdade de obtém-se:

$$\boxed{v_A = (A^{-1}.B)v_B}$$

sendo que a matriz **A^-1.B** denomina-se **matriz de mudança de base de B para A**

Sendo $A = \{(1,-1),(1,1)\}$ e $B = \{(2,-1),(0,1)\}$ bases do R^2 e $v_B = (3,5)$, calcular v_A

Como

$$v_A = (A^{-1}.B)v_B$$ tem-se

ou

$$v_A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ou

$$v_A = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ou

$$v_A = \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ou

$$v_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$ ou $v_A = (2,4)$

$$A.v_A = B.v_B$$

equivale a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} a+b \\ -a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} a+b=6 \\ -a+b=2 \end{cases}$$

Portanto, $a = 2$ e $b = 4$, ou seja, $v_A = (2,4)$.

Transformações Lineares