Característica e Inversão de matrizes

Apontamentos sobre a característica e inversão de matrizes

Page

Característica de uma matriz

- Chama-se característica da matriz A ao número de linhas não nulas de uma matriz depois de condensada verticalmente.

- A característica de uma matriz representa-se por r(A)

Exemplo:

Para os exemplos anteriores indique a característica das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Após condensação, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad r(A) = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A) = 3$$

Inversão de matrizes

- Chama-se matriz inversa de uma matriz A à matriz B tal que: A x B = B x A = I
- A matriz inversa de A, quando existir, representa-se por:

$$A^{-1} \text{ é a inversa de } A \Leftrightarrow A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I \text{ (matriz identidade)}$$

- Só podem ter inversa as matrizes quadradas, e dentro destas as que têm as filas linearmente independentes, ou seja, característica r igual à sua ordem n, ou seja:
    - Uma matriz quadrada A de ordem n admite inversa se r(A) = n

Propriedades da matriz inversa

- Admitindo que as matrizes admitem inversa e que a sua dimensão permite que as operações possam ser efetuadas, então são válidas as seguintes regras:

i) A^{-1} quando existe é única

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$, se existe $(A \times B)^{-1}$, então A e B admitem inversa

iv) $(A \times B \times \cdots\cdots \times X)^{-1} = X^{-1} \times \cdots\cdots \times B^{-1} \times A^{-1}$

v) $A^{-k} = \left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \ldots \times A^{-1}}_{k \text{ vezes}}$

vi) $A^r A^s = A^{r+s}, \; r, s \in \mathbb{Z}$

vii) $(A^r)^s = A^{rs}, \; r, s \in \mathbb{Z}$

viii) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}, \; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ix) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Cálculo da matriz inversa por definição

- A matriz inversa pode ser determinada por definição, o que só é funcional para matrizes de 2ª ou 3ª ordem.
- Por definição, a inversa de A multiplicada pela matriz A = Matriz Identidade. Então, multiplica-se a matriz que se pretende inverter por uma matriz genérica da mesma ordem que A e iguala-se à matriz Identidade, de seguida resolve-se se o sistema de equações lineares correspondente.

Exemplo: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; Determine A^{-1}

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+2c) & (b+2d) \\ (a+c) & (b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz inversa pelo método da matriz ampliada

- Caso exista, a inversa de uma matriz A pode ser calculada transformada a matriz ampliada [A | I] em [I | matriz inversa A], utilizando operações elementares sobre as linhas da matriz

Exemplo: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; Determine A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to (-1)L_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \; logo:\; A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ por definição e recorrendo à matriz ampliada [A | I].

Resolução de sistemas de equações lineares

- Um sistema de equações lineares nas incógnitas é um conjunto finito de equações lineares nessas incógnitas, que se pode representar na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Qualquer sistema de equações lineares pode ser representado na forma matricial, vindo para o sistema anterior:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

- A matriz A denomina-se a matriz dos coeficientes ou matriz simples, a matriz X denomina-se matriz das incógnitas e a matriz B denomina-se matriz do termos independentes.

- A matriz A denomina-se matriz ampliada do sistema, que se abrevia por [A | B].
- Se *s* é solução de um sistema de equações lineares com a forma matricial AX = B, então, matricialmente podemos representar a solução por uma matriz coluna *S* para a qual AS = B.

Método de eliminação de Gauss

- Utilizando a metodologia de condensação descrito para matrizes pode-se obter, a partir da matriz ampliada do sistema, uma matriz em forma condensada, denominada matriz escalonada (Método de Gauss).

- Esta matriz representa um sistema equivalente ao primeiro e permite obter a solução geral do sistema inicial.
- Cada pivô da matriz condensada corresponde a uma variável dependente na solução do sistema
- As colunas onde não figuram pivôs correspondem às variáveis independentes.

Exemplo: Resolva o sistema seguinte utilizando o método de eliminação Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

Método de eliminação de Gauss-Jordan

- Continuando a utilizar a metodologia de condensação descrito para matrizes, mas agora anulando em cada linha os elementos acima da diagonal principal, utilizando os mesmos pivôs (que já são 1), obtém-se uma matriz diagonal, ou escalonada reduzida.
- Esta metodologia denomina-se Método de Gauss-Jordan

Exemplo: Resolva o sistema seguinte utilizando o método de eliminação Gauss-Jordan

$$\begin{cases} \phantom{2x+{}} 2y + 3z - 4w = 1 \\ \phantom{2x+2y+{}} 2z + 3w = 4 \\ 2x + 2y - 5z + 2w = 4 \\ 2x \phantom{{}+2y} - 6z + 9w = 7 \end{cases}$$

Classificação de Sistemas