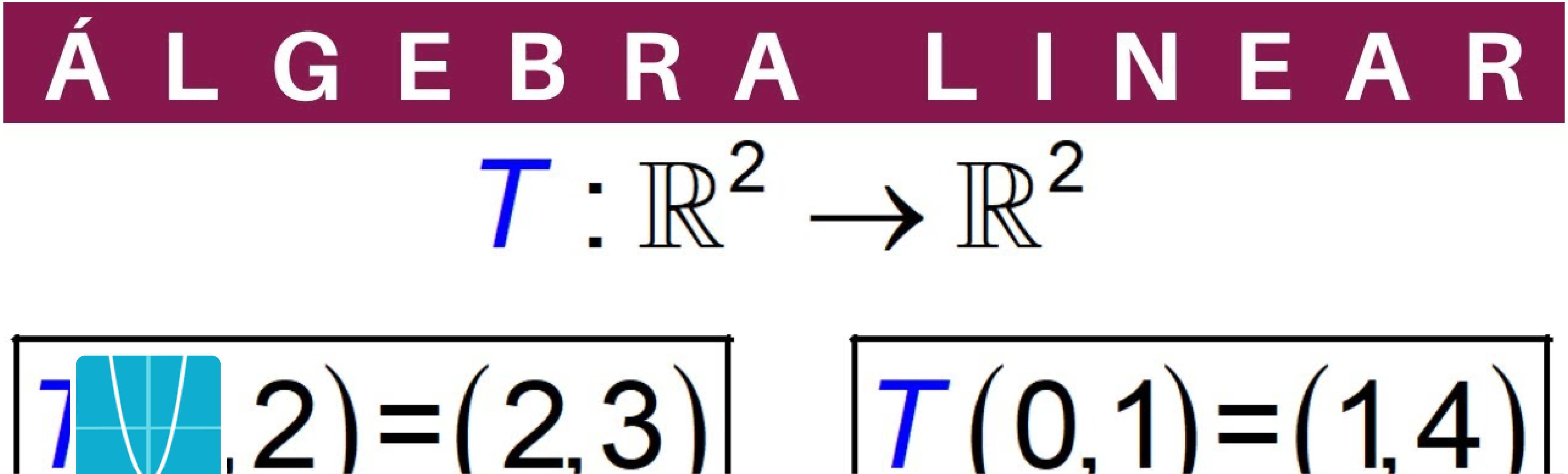


Transformações Lineares

Apontamentos sobre as transformações lineares, as suas propriedades, homomorfismo, endomorfismo, isomorfismo e automorfismo, caracterísitica e nulidade

Page

Definição

- Sejam V e W espaços vetoriais
- Uma função T : V → W é chamada **transformação linear** ou homomorfismo de V em W se para todos o v, u ∈ $\mathbb{R}$ se verifica:

$$i) \quad \boxed{T(u+v) = T(u) + T(v)}$$

$$ii) \quad \boxed{T(au) = aT(u)}$$

As propriedades i) e ii) são equivalente à seguinte propriedade:

$$\boxed{T(u + av) = t(u) + aT(v)}$$

Propriedades

- Para uma transformação linear T : E → F verifica-se:

$$a) \quad T(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

$$b) \quad T(-\vec{v}) = -T(\vec{v}), \forall x \in E$$

$$c) \quad T(c\vec{v} + \vec{u}) = cT(\vec{v}) + T(\vec{u})$$

$$d) \quad T(\vec{v} - \vec{u}) = T(\vec{v}) - T(\vec{u})$$

$$e) \quad T(c\vec{v}) = cT(\vec{v})$$

Sendo V e W 2 espaços vetoriais, representa-se por L (V, W) o conjunto das aplicações lineares de V em W

Homomorfismo, endomorfismo, isomorfismo e automorfismo

- A transformação linear ou homomorfismo T é um:
  - **Endomorfismo** se V = W
  - **Isomorfismo** se for bijetiva, isto é, se for injetiva e sobrejetiva
  - **Automorfismo** se for um endomorfismo e um isomorfismo

Imagem direta e imagem recíproca

- Seja T : E → F uma transformação linear
  - Dado A ⊂ E, chama-se **imagem direta** de A, segundo T, ao conjunto:

$$\boxed{T(A) = \{T(x) \in F : x \in A\}}$$

  - Dado B ⊂ F, chama-se **imagem recíproca** de B, segundo T, ao conjunto:

$$\boxed{T^{-1}(B) = \{x \in E : T(x) \in B\}}$$

Imagem e núcleo

- Seja T a transformação linear T : V → W
  - Chama-se **imagem** de T, e representa-se por Im(T), ao conjunto de vetores de W que são imagens dos vetores de V:

$$\boxed{T(V) = Im(T) = \{w \in W : \forall v \in V, T(v) = w\}}$$

- Chama-se **núcleo** de T, e representa-se por N(T), ao conjunto de vetores de V cuja imagem é o vetor nulo:

$$\boxed{N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}}$$

> **Nota:** O núcleo pode também ser representado por Ker(T)

<u>Exemplo</u> – Determine a imagem e o núcleo da transformação linear $T : \Re^3 \to \Re^2$ definida por: $T(1,0,0) = (2,3)$, $T(0,1,0) = (-1,4)$, $T(0,0,1) = (-5,2)$.

Seja (x, y, z) o vector genérico de $\Re^3$. A imagem de T será, então, igual a $T(x, y, z)$.
$T(x, y, z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) = x(2,3) + y(-1,4) + z(-5,2) = (2x - y - 5z, 3x + 4y + 2z)$, ou seja, tem-se assim que $\mathrm{Im}(T) = \{(2x - y - 5z, 3x + 4y + 2z)\}$.

Para determinar o núcleo de T: sendo $T(x, y, z) = (2x - y - 5z, 3x + 4y + 2z)$ para calcularmos $N(T)$ teremos de procurar os valores de x, y, z que anulam $2x - y - 5z$ e $3x + 4y + 2z$, ou seja, teremos de resolver o sistema que se segue $\begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 11/2 & 19/2 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 19/11 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -18/11 & 0 \\ 0 & 1 & 19/11 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - 18/11\, z = 0 \\ y + 19/11\, z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18/11\, z \\ y = -19/11\, z \\ z = \forall \end{cases}.$

O sistema é indeterminado e a sua solução geral é $\mathbf{S} = \left(18/11\, z, -19/11\, z, z\right) = z\left(18/11, -19/11, 1\right)$.

Quando $x = 18/11\, z$ e $x = -19/11\, z$ tem-se

$2 - y - 5z = 0$ e $3x + 4y + 2z = 0$, logo $T\left(18/11\, z, -19/11\, z, z\right) = (0,0)$ e

$N(T) = \left\{\left(18/11\, z, -19/11\, z, z\right)\right\}$.

O vector $(18, -19, 11)$, por exemplo, pertence ao $N(T)$.

Característica e nulidade

- Seja T ∈ L (V, W)
  - Chama-se característica de T, que se representa por r(T), à dimensão do subespaço Im(T)

$$\boxed{r(T) = dim(Im(T))}$$

  - Chama-se nulidade de T, que se representa por n(T), à dimensão do subespaço N(T)

$$\boxed{n(T) = dim(N(T))}$$

> Teorema: dim(V) = dim N(T) + dim Im(T)

Representação matricial de uma transformação linear

$$\boxed{T(v) = A_T.v}$$

Exemplo: Determine a matriz da transformação linear T, T(x,y,z) = (x+2z, 3x-y) relativamente às bases canónicas.

Como:

$$T(1,0,0) = (1,3)$$

$$T(0,1,0) = (0,-1)$$

$$T(0,0,1) = (2,0)$$

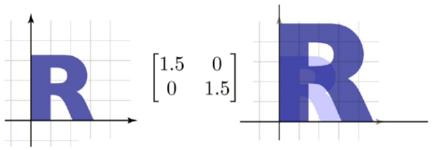
tem-se que:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos de utilização de transformações lineares

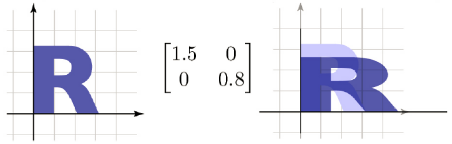
Escala uniforme

$$\boxed{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx \\ sy \end{bmatrix}}$$



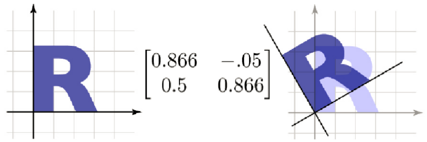
Escala não uniforme

$$\begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \end{bmatrix}$$



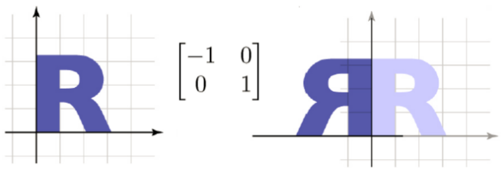
Rotação

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos\theta - ysin\theta \\ xsin\theta + ycos\theta \end{bmatrix}$$



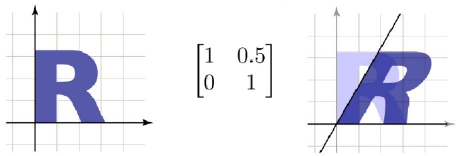
Reflexão

- É considerado como um caso especial da escala não uniforme



Distorção

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay \\ y \end{bmatrix}$$



Valores e vetores próprios

`VALOR PRÓPRIO` - Número real (ou complexo) que, ao ser multiplicado por pelo menos um objeto não nulo de uma transformação linear gera a sua imagem

λ^T é valor próprio de T $\Leftrightarrow \exists x \neq \bar{0}: T(x) = \lambda^T \times x$

Ex.: $T(x, y) = (x + y, 4x + y)$

$\lambda^T = -1 \; porque \; T(1, -2) = (-1,2) = -1 \times (1, -2)$

$\lambda^T = 3 \; porque \; T(1,2) = (3,6) = 3 \times (1,2)$

Determinação de valores próprios

- Seja a transformação linear representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

  - Para que este sistema homogéneo admita soluções não nulas:

$$\boxed{det(A - \lambda I) = 0}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 2 \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \ \vee \ \lambda = 3$$

R: Os valores próprios são -1 e 3

Valores próprios de uma matriz diagonal

- A matriz característica é também diagonal pelo que o polinómio característico é (a11-x) (a22-x)...(ann-x) e os valores próprios são a11; a22; ... ; ann

Valores próprios de uma matriz identidade

- O polinómio característico de I é (1-x)n e o único valor próprio de I é λ = 1, com multiplicidade algébrica n

Valores próprios de uma matriz triangular

- A matriz característica é também triangular pelo que o polinómio característico é (a11- x) (a22-x)⋯(ann-x) e os valores próprios são a11; a22; ... ;ann

Valores próprios de uma matriz transposta

Como:

$$det(A^T - xI_n) = det(A^T - xI_n^T) = det((A - xI_n)^T) = det(A - xI_n)$$

Conclui-se

- A matriz A e A transposta têm o mesmo polinómio característico e, portanto, os mesmos valores próprios