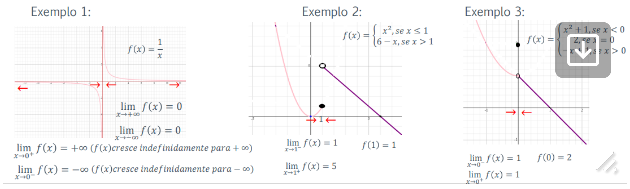
Limites

Apontamentos sobre a definição de limite, o teorema da unicidade, alguns teoremas, limites infinitos, limites laterais, indeterminações, limites notáveis e regra de cauchy

Page

Conceito intuitivo

- Seja uma função $f\colon A \subset R \to R$ e um ponto $a \in$ A
- Qual o comportamento da função $f(x)$ quando x se aproxima do ponto a?
- Ou seja, qual o LIMITE da função $f(x)$ quando o x TENDE para a , o que formalmente se escreve lim $x \to a$ $f(x)$ =?



Definição

- Seja uma função num intervalo aberto contendo a, podendo não estar definida em a. O limite de f(x) quando x tende para a será L (lim $x \to a$ $f(x) = L$), se para todo o ε > 0, existir um ε > 0, tal que:

$$\underbrace{0 < |x-a| < \delta}_{\substack{x \in \mathcal{V}(a) \\ \mathcal{V}(a) = (a-\delta, a+\delta)}} \text{ então } \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{\substack{f(x) \in \mathcal{V}(L) \\ \mathcal{V}(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)}}$$

> ⚠️ É importante perceber que na definição nada é mencionado sobre o valor da função quando $x = a$. Isto é, não é necessário que a função esteja definida em $x = a$ para que lim $x \to a$ $f(x)$ exista. Além disso, mesmo que a função seja definida para $x = a$, é possível que lim $x \to a$ $f(x)$ exista sem ter o mesmo valor que $f(a)$

Teorema da Unicidade

- Uma função não pode tender para 2 limites diferentes ao mesmo tempo. Se o limite existir, ele é único

Teoremas

1. Se m e b forem constantes quaisquer, lim $x \to a$ (mx + b) = ma + b
2. Se c for uma constante, então para qualquer a, lim $x \to a$ c = c
3. lim $x \to a$ (x) = a
4. Se lim $x \to a$ $f(x)$ = L e lim $x \to a$ $g(x)$ = M, então: lim $x \to a$ $[f(x) \pm g(x)]$ = L ± M
5. lim $x \to a$ $[f1(x) \pm f2(x) \pm \ldots \pm fn(x)]$ = L1 ± L2 ± … ± Ln
6. Se lim $x \to a$ $f(x)$ = L e lim $x \to a$ $g(x)$ = M, então: lim $x \to a$ $[f(x) \,.\, g(x)]$ = L . M
7. lim $x \to a$ $[f1(x)f2(x)\ldots fn(x)]$ = L1L2 … Ln
8. Se lim $x \to a$ $f(x)$ = L e n for um inteiro positivo, então: lim $x \to a$ $[f(x)]$^n = L^n

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Limites Laterais

- Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (a, c). Então o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

- Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (d, a). Então o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

ℹ️ **Teorema:** lim $x \to a$ $f(x)$ existe e será igual a L se lim $x \to a$- $f(x)$ e lim $x \to a$+ $f(x)$ existirem e forem iguais a L, ou seja, lim $x \to a$- $f(x)$ = lim $x \to a$+ $f(x)$ = L

Limites infinitos

- Estudam-se funções cujos valores (y) aumentam ou diminuem sem limitação, quando a variável independente (x) se aproxima cada vez mais de um número fixo

Consideremos, por exemplo, a equação: $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ O $D_F = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ e o $D_f' = \mathbb{R}^+$

Vamos calcular os valores da função quando x está próximo de 2, fazendo x aproximar-se de 2 pela direita:

x	$f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
3	3
2,5	12
2,25	48
2,1	300
2,01	30.000
2,001	3.000.000

À medida que x se aproxima de 2 por valores maiores que 2, f(x) cresce indefinidamente. Então podemos escrever: $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$

Façamos agora x aproximar-se de 2 pela esquerda

x	$f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
1	3
1,5	12
1,75	48
1,9	300
1,99	30.000
1,999	3.000.000

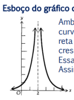
À medida que x se aproxima de 2 por valores menores que 2, f(x) cresce sem limites. Então podemos escrever:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Assim sendo, quando x tende para 2 pela direita ou pela esquerda, f(x) cresce sem limites, podendo escrever:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Esboço do gráfico de f(x):



Ambos os ramos da curva se aproximam da reta x=2, quando x cresce indefinidamente. Essa reta é chamada de Assintota vertical.

Teorema

- Se a for um número real qualquer e se lim $x \to a+$ $f(x)$ = 0 e lim $x \to a+$ $g(x)$ = c, onde c é uma constante não nula, então:

(i) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(iv) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

O teorema também será válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Teorema

(i) se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer, então $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer, então $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

(ii) se $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

(ii) se $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

O teorema permanecerá válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Teorema

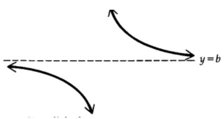
Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

Assíntota horizontal

- A reta y = b é denominada uma assíntota horizontal do gráfico da função f, se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida:



(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ e para um número N, se $x > N$, então $f(x) \neq b$;

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ e para um número N, se $x < N$, então $f(x) \neq b$.

Indeterminações

$(\infty - \infty)$; $(\mathbf{0} \times \infty)$; $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(\mathbf{1}^{\infty})$; $(\infty^{\mathbf{0}})$

Limites Notáveis

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1; \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^P}=+\infty, P\in\mathbb{R};$$

$$\lim_{x\to \mp\infty}\frac{1}{x^R}=0, R, \text{n.º positivo e inteiro}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

Regra de Cauchy ou Teorema de L'Hôpital

- A regra de Cauchy utiliza derivadas para o levantamento de indeterminações
- Pode ser aplicada em caso de indeterminações 0/0 e ∞/∞

Continuidade