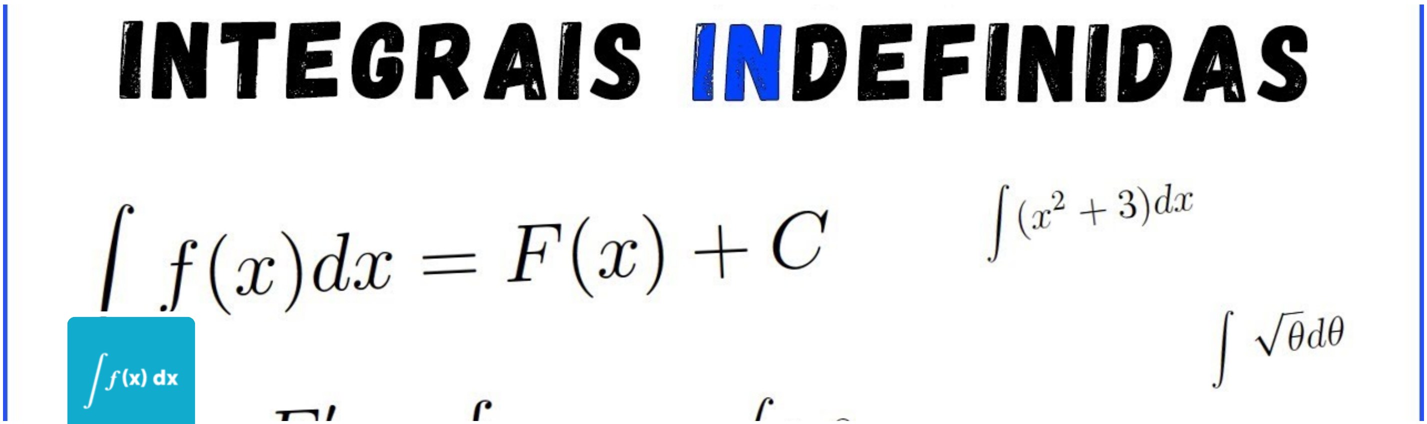


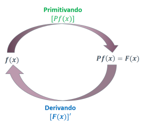
Primitivação

Apontamentos sobre a primitivação, as suas propriedades e os diferentes processos de primitivação

Page

Noção de primitiva

- Seja f uma função definida no intervalo I ∈ $\mathbb{R}$. Diz-se que $F(x)$ é uma primitiva de f se:
  - $F(x)$ está definida em I
  - $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in$ I
- $F(x)$ pode representar-se por $\boldsymbol{Pf(x)}$ ou $\boldsymbol{\int f\ x\ dx}$



> A primitiva de uma função, vai ser outra função, que depois de derivada, vai dar a função inicial (que queríamos primitivar). **A operação da primitivação é a operação inversa da derivação**

As funções x^3, x^3+2, $x^3-\sqrt{5}$ são primitivas da função $f(x) = 3x^2$ visto que:

$$(x^3)' = (x^3+2)' = \left(x^3-\sqrt{5}\right)' = 3x^2$$

Temos então $\int 3x^2dx = x^3$, $\int 3x^2dx = x^3+2$, $\int 3x^2dx = x^3-\sqrt{5}$

- Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então o mesmo sucede com $F(x) + c$, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$, ou seja, todas as primitivas de uma dada função f diferem entre si por uma constante arbitrária c. De facto tem-se:

$$\boxed{(F(x)+c)' = F'(x) + 0 = f(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}}$$

Pode-se assim dizer que $F(x) + c$ é a expressão geral das primitivas de $f(x)$.

> Funções que admitem a mesma derivada, diferem por uma constante

Propriedades

- Se f e g são 2 funções primitiváveis, então:

1. $P[k.f(x)] = k.Pf(x)$
2. $P[f(x)+g(x)] = Pf(x) + Pg(x)$

Processos de Primitivação

- Existem 3 processos para primitivar:

- **Primitivação imediata**
- **Primitivação por partes**
- **Primitivação por substituição**

Primitação Imediata

- Este consiste consiste na interpretação, da **tabela de primitivação**
- Na maior parte das situações a tabela não é, no entanto, suficiente. Pode ser necessária alguma manipulação algébrica, para se reconhecer uma expressão familiar

Primitivação por partes

- O método da **primitivação por partes** baseia-se na expressão da derivada do produto de 2 funções

$$\boxed{Puv' = uv - Pu'v}$$

- Quando se deve usar?
  - Quando a função dada se pode decompor num produto de 2 funções
  - Quando uma das funções é a função (u) de que se sabe determinar a sua derivada (u')
  - A outra função é a função ($\boldsymbol{v}$') tal que se saiba determinar $\boldsymbol{v}$ = P$\boldsymbol{v}'$
- Para poder adequadamente segere-se simplesmente o seguinte: Quando existe alternativa na sescolha da função a primitivar, deve-se optar por primitivar aquela que menos se simplifica quando derivada.
- Na presença de um produto de duas funções, o processo de primitivação por partes acaba por surgir como uma boa ideia para poder calcular a primitiva da função produto.

Exemplo: Calcular a primitiva de $f(x) = e^x.x$

$$\begin{cases} v' = e^x & \Rightarrow \quad v = Pe^x = e^x + C \\ u = x & \Rightarrow \quad u' = 1 \end{cases}$$

Aplicando a fórmula da primitivação por partes, vem:

$$Px.\ e^x = x.e^x - P1.e^x = x\,.e^x - \ e^x + C = \ e^x(x-1) + C$$

Primitivação por substituição

- A **primitivação por substituição** usa-se quando a expressão a primitivar é complicada (exemplo: funções racionais que não sejam imediatas)
- Substitui-se a variável x, por outra expressão (faz-se uma mudança de variável)

$$\boxed{Pf(x) = P[f(\varphi(t)).\varphi'(t)], \quad t = \varphi^{-1}(x)}$$

- **1º Passo:** Identificar a mudança de variável adequada x = $\boldsymbol{\varphi(t)}$
- **2º Passo:** Usar a fórmula
- **3º Passo:** Repor a variável original, isto é, substituir a variável $\boldsymbol{t}$ pela expressão de $\boldsymbol{\varphi}$^−1

Exemplo: Calcular a primitiva de $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$ $\quad (x = e^t)$

$$\begin{cases} \varphi(t) = x = e^t \\ \varphi'(t) = \ e^t \end{cases}$$

$$P\frac{ln(x)}{x} = P\left[\frac{ln(e^t}{e^t}.e^t\right] = P(t) = \frac{t^2}{2} + C$$

Voltando à variável inicial: $x = \ e^t \Rightarrow \ ln(x) = t$

$$P\frac{ln(x)}{x} = \frac{ln^2(x)}{2} + C$$

Primitivação de funções racionais

Função racional própria

- Toda a fração racional própria pode-se decompor na soma de certas frações racionais designadas como frações simples. A esta decomposição muito particular chama-se **decomposição em elementos simples**.

- 3 etapas para obter a decomposição em elementos simples:

- **1º Passo:** Determinam-se os zeros do polinómio $d(x)$ no denominador, isto é, determinam-se as raízes da equação $d(x) = 0$.
- **2º Passo:** Efetua-se a seguinte correspondência:
    - Cada raiz real simples α origina a fração simples $A/x-\alpha$ onde A é uma constante real a determinar
    - Cada raiz real α de multiplicidade k origina as k frações simples
- **3º Passo:** Por fim, a fração racional própria reescreve-se como a soma de todas as frações simples

$$\boxed{\frac{B_1}{x-\alpha}, \frac{B_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{B_k}{(x-\alpha)^k}}$$

Função racional imprópria

- Uma função diz-se **impropria** se o grau do polinómio no numerador for superior ou igual ao grau do polinómio do denominador
- Quando a função é imprópria, deve efetuar-se a divisão dos polinómios até que o polinómio resto, indicado por r, tenha grau inferior ao grau de d. Obtém-se assim a decomposição:

$$\boxed{\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}}$$