

Hallar
|A|

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Determinantes

Apontamentos sobre os determinantes nas matrizes 2x2, 3x3 e acima

Page

Determinantes

- **Determinante** de uma matriz quadrada A de ordem n é um escalar denotado por: $|A|$ ou $\det(A)$
- Vai determinar se as linhas/colunas da matriz A são linearmente independentes
- A regra de cálculo do determinante varia com a ordem da matriz A:

- Ordem 1x1:

$$|A| = a_{11}$$

- Ordem 2x2:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Corresponde à subtração do produto dos elementos da diagonal principal pelo produto da diagonal secundária

Exemplos:

se $A = [-3]$, então $|A| = -3$

determinante de $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

é:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - (1)(3) = 2 - 3 = -1$$

Propriedades dos determinantes:

- Se uma matriz A tiver 2 linhas iguais, tem-se que $\det(A) = 0$
- Se uma matriz A tiver uma linha ou coluna nula, tem-se que $\det(A) = 0$
- O determinante da matriz identidade é igual a 1: $\det(I) = 1$
- Se uma linha da matriz A for múltipla de outra linha de A, tem-se que $\det(A) = 0$
- O determinante muda de sinal cada vez que se efetua uma troca de linhas da matriz
- O determinante não se altera se a uma linha da matriz A adicionarmos um múltiplo de outra linha de A
- O determinante de uma matriz A triangular, superior ou inferior, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal
- Uma matriz A quadrada é invertível se $\det(A) \neq 0$
- Sejam A e B matrizes $n \times n$. Então $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Seja A uma matriz quadrada e invertível. Então:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- Seja A uma matriz quadrada. Então:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Determinante de uma matriz 3x3

- Para uma matriz A, 3x3, o determinante de A é mais complexo do que para uma matriz A, 2x2 e define-se como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

- Uma regra prática para calcular determinantes de matrizes quadrada 3x3 é a **Regra de Sarrus**
- O cálculo do determinante 3x3 é constituído pela soma destas 6 parcelas, mostradas no exemplo acima, mas em que estas são definidas através de diagonais e de triângulos "fictícios" na matriz.
- 3 parcelas são afetadas pelo sinal (+), o produto da diagonal principal e ainda o produto dos 2 triângulos, cuja base é paralela à diagonal principal e com vértices nos cantos superior direito e inferior esquerdo.
- 3 parcelas são afetadas pelo sinal (-), o produto da diagonal secundária e ainda o produto dos 2 triângulos cuja base é paralela à diagonal secundária e com vértices nos cantos superior esquerdo e inferior direito

Regra do triângulo "fictício"

$$\begin{array}{l} \text{ sinal + : } \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & & a_{13} \\ a_{21} & \bullet & \\ & a_{32} & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & a_{12} & \\ & \bullet & a_{23} \\ a_{31} & & \bullet \end{bmatrix} \\ \\ \text{ sinal - : } \begin{bmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & \bullet \\ & \bullet & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & a_{12} & \bullet \\ a_{21} & \bullet & \\ \bullet & & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Regra de Sarrus

1. Repetir as 2 primeiras colunas
2. Somar o produto das diagonais principais
3. Subtrair o produto das diagonais secundárias

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$