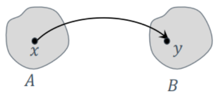
Funções reais de variável real

Apontamentos sobre domínio, contradomínio e tipos de funções

Page

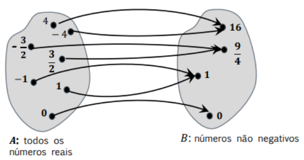
- Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto $\boldsymbol{A}$ de números reais x a um conjunto $\boldsymbol{B}$ de números reais y, onde o número y é único para um valor específico de x.



- Estabelecendo o conceito de uma função de outra forma, consideramos intuitivamente o número real y no conjunto B como uma função do número real x no conjunto A se houver uma regra pela qual seja obtido um valor específico de y quando atribuído um determinado valor de x. Essa regra é dada, muitas vezes, por uma equação

- Usamos símbolos tais como f, g e h para denotar uma função.
- O conjunto A de números reais é o domínio da função e o conjunto B de números reais, atribuídos os valores de x em A, é a imagem ou contradomínio da função.

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-4	16



Definição formal da função

- Uma função é um conjunto de pares ordenados de números (x, y), sendo que dados 2 pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número.
- A restrição de 2 pares ordenados não podem ter o mesmo número assegura que y seja único para valores específicos de x. Os números x e y são variáveis
- Dados os valores atribuídos a x e como o valor de y, é independente da escolha de x, x será a variável independente e y a variável dependente

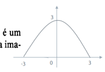
Definição de gráfico da função

- Se f for uma função, então o gráfico de f será o conjunto dos pontos (x, y) em R^2 para os quais (x, y) é um par ordenado de f

Domínio de uma função

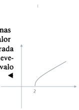
Se $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$

isto implica que x está no intervalo fechado $[-3, 3]$, pois $\sqrt{9 - x^2}$ não é um número real para $x > 3$ ou $x < -3$. Assim, o domínio de h é $[-3, 3]$ e a imagem é $[0, 3]$.



Se f for definida pela equação: $y = \sqrt{x - 2}$

Como os números são restritos a números reais, y é uma função de x apenas para $x - 2 \geqslant 0$, pois para qualquer x que satisfaça essa desigualdade, um valor único de y é determinado. No entanto, se $x < 2$, obtemos uma raiz quadrada de um número negativo, e então, não existe número real y algum. Logo, devemos restringir x de modo que $x \geqslant 2$. Assim, o domínio de f é o intervalo $[2, +\infty)$, e a imagem é $[0, +\infty)$. ◄



Analogamente, se g for definida pela equação: $g(x) = \dfrac{5x - 2}{x + 4}$

Isto implica que $x \neq -4$, pois o quociente não está definido para $x = -4$;

Logo, o domínio de g é o conjunto de todos os números reais exceto -4.

Função real de variável real

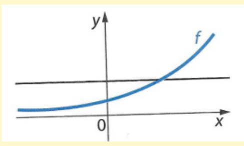
- Uma função real de variável real é uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$
- Uma função real de variável real f é normalmente caracterizada pela indicação do domínio, do conjunto de chegada e por uma expressão $f(x)$ que permite determinar a imagem de cada x do domínio
- Neste caso, a caracterização de f pode tomar a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f:\ & A \longrightarrow B \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{onde } A \subset \mathbb{R} \text{ e } B \subset \mathbb{R}.$$

Função Injetiva

- Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetiva se e só se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{ou} \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

> ⚠️ Uma reta paralela ao eixo Ox não pode intersetar o gráfico de uma função injetiva em mais do que um ponto.
>
> 
>

Função Sobrejetiva

- Dados os conjuntos A e B, uma função f de A em B é sobrejetiva se para todo o $y \in$ B existir um elemento x $\in$ A tal que $y = f(x)$, ou seja, se o contradomínio de f coincide com o conjunto de chegada.

Função Bijetiva

- Dados os conjuntos A e B, uma função de A em B é bijetiva se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva
- Resulta diretamente da definição que uma função f de A em B é bijetiva se e só se para todo o elemento y de B existir um e apenas um elemento x de A tal que $y = f(x)$

Operações com Funções

- Novas funções são formadas a partir das funções dadas, através da soma, subtração, multiplicação e divisão de valores funcionais.
- Essas novas funções são conhecidas como a SOMA, a DIFERENÇA, o PRODUTO e o QUOCIENTE das funções originais.

Dadas as duas funções f e g:

(i) a sua **soma**, denotada por $f + g$, é a função definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) a sua **diferença**, denotada por $f - g$, é a função definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) o seu **produto**, denotado por $f \cdot g$, é a função definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) o seu **quociente**, denotado por f/g, é a função definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Em cada caso, o *domínio* da função resultante consiste naqueles valores de x comuns aos domínios de f e g, com a exigência adicional, no caso (iv), de que os valores de x para os quais $g(x) = 0$ sejam excluídos.

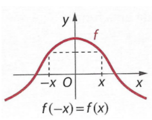
Função Composta

- Dadas as funções g: Dg → A e f: Df → B, a função composta de f com g é a função $f \circ g$: D $f \circ g$ → B, tal que:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f \right\} \quad \text{e} \quad \forall x \in D_{f \circ g},\ (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

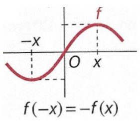
Função Par

- Uma função é par, se para todo o valor de x no domínio de f, $f(-x) = f(x)$
- O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y



Função Ímpar

- Uma função é ímpar, se para todo o valor de x no domínio de f, $f(x)$ = - $f(x)$
- O gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem

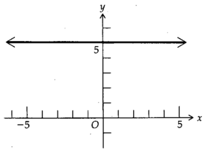


Tipos de funções

- Existem diferentes tipos de funções matemáticas

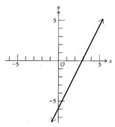
Função Constante

- Uma função cuja imagem consiste em um único número, é chamada de função constante. Assim, se $f(x)$ = c e se c for um número real qualquer, então f será uma função constante e o seu gráfico será uma reta paralela ao eixo x, a uma distância de c unidades desse eixo

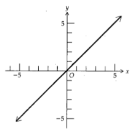


Função Linear

- Uma função linear é definida por $f(x)$ = mx + b, onde m e b são constantes e m ≠ 0. O seu gráfico é uma reta tendo inclinação m e y interceta b.



- Se a função linear for $f(x) = x$, a função denomina-se função identidade. O seu gráfico é a reta que divide ao meio o 1º e o 3º quadrantes



Função Polinomial

- Se a função f for definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

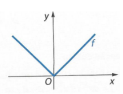
- A função f é chamada de função polinomial de grau n
- Uma função polinomial de grau 1 será uma função linear, de grau 2 uma função quadrática e de grau 3 uma função cúbica

Função módulo

- Chama-se função módulo à função real de variável real definida por:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico de f consiste em duas semi-retas que passam pela origem e acima do eixo x; uma delas tem inclinação igual a 1 e a outra -1. O domínio é $]-\infty, +\infty[$ e a imagem (contradomínio) $[0, +\infty[$.



Função racional

- Uma função racional é uma função que pode ser expressa como o quociente de 2 funções polinomiais:

  $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$

- O domínio Df, é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador, ou seja:

  $$D_f = \{x \in \mathbb{R}: d(x) \neq 0\}$$

Limites