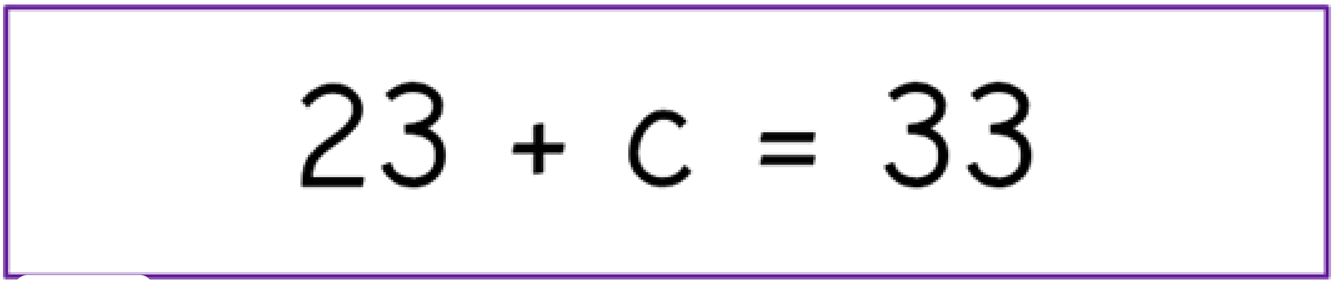

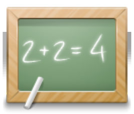

Classificação de Sistemas

Apontamentos sobre os sistemas impossíveis, possível indeterminado e possível determinado

Page

- A classificação dos sistemas quanto à hipótese da sua resolução pode ser feita após condensação vertical da matriz completa (ampliada).

Sistema Possível Determinado

- Quando todos os elementos da diagonal principal são diferentes de zero

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Ou seja, se e só se $\quad car A = car\,[A|B]$ e $car A = n$

Sistema Impossível

- Quando pelo menos uma linha da matriz dos coeficientes é nula, mas o termo independente correspondente é diferente de zero

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ou seja, se e só se $\quad car A \neq car\,[A|B]$

Sistema Possível Indeterminado

- Quando uma linha inteira da matriz completa é nula, desde que nenhuma das outras linhas torne o sistema impossível

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ou seja, se e só se $\quad car A = car\,[A|B]$ e $car A < n$

Variáveis básicas e não básicas (livres) e pivots

Pivot

- Primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz em escada de linhas

Variáveis básicas

- As variáveis básicas são **c**orrespondestes às colunas que têm pivot na matriz em escada de linhas

Variáveis não básicas (livres)

- As variáveis não básicas (livres) são correspondestes às colunas que não têm pivot na matriz em escada de linhas
- Se houver incógnitas livres, o sistema de equações lineares é sempre possível porque pode ter uma infinidade de soluções

- Se só houver incógnitas básicas, o sistema é possível determinado

  Exemplo 1:

  $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} - 2x_3 \\ x_2 = \frac{2}{5} + x_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

  Os pivots são a_{11} =1 e a_{22} =1, 1ª e 2ª colunas

  As **variáveis básicas** são x_1 e x_2;

  A variável **não básica** ou **livre** é x_3;

  Assim, o sistema é possível indeterminado (S.P.I)

  Exemplo 2:

  $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{2}{5} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

  Os pivots são a_{11} =1, a_{22} =1 e a_{33}, 1ª, 2ª e 3ª colunas

  As **variáveis básicas** são, assim, x_1, x_2 e x_3;

  Não existem variáveis **não básica** s ou **livres**;

  Assim, o sistema é possível determinado (S.P.D)

Resolução usando a matriz inversa

- É possível resolver sistemas de equações utilizando a matriz inversa:
  - Se AX = B:
    - Multiplicando ambos os lados pela inversa de A vem:
      $A^{-1}AX = A^{-1}B$
    - Como a matriz inversa de A multiplicada por A = matriz identidade então:
      $X = A^{-1}B$
  - Deste modo a solução do sistema pode ser obtida multiplicando a matriz inversa de A pela matriz dos termos independentes

Exemplo:

Uma indústria produz peças do tipo A, B e C dispondo de 3 máquinas para o efeito.

Para produzir cada tipo de peça são necessários os seguintes tempos em cada máquina:

Máquina I - 2 minutos

Tipo A: Máquina II - 1 minuto

Máquina III - 1 minuto

Máquina I - 1 minuto

Tipo B: Máquina II - 3 minutos

Máquina III - 1 minuto

Máquina I - 1 minuto

Tipo C: Máquina II - 2 minutos

Máquina III - 2 minutos

Os tempos disponíveis de trabalho em cada máquina são: Máquina I - 3 horas ; Máquina II - 5 horas ; Máquina III - 4 horas

Quantas peças de cada tipo devem ser produzidas de modo a otimizar os tempos utilizados por máquina?

- Utilize a condensação de Gauss
- Utilize a matriz inversa

Resolução:

- **Condensação de Gauss**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 180 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 300 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 240 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & 300 \\ 0 & -5 & -3 & \vdots & -420 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 60 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} Tipo\ A = 36 \\ Tipo\ B = 48 \\ Tipo\ C = 60 \end{cases}$$

- **Matriz inversa**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} \times B = X = \begin{bmatrix} 36 \\ 48 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Determinantes