Combinação Linear

Apontamentos sobre a combinação linear de uma matriz, os casos, coluna ou linha e as suas propriedades

Page

Combinação linear das linhas de uma matriz

- Considere-se a matriz A do tipo (m x n):

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Representando as m linhas da matriz por:

  $$L_1 = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \ldots \; a_{1n}]_{(1xn)} \;,\; L_2 = [a_{21} \;\; a_{22} \;\; \ldots \; a_{2n}]_{(1xn)} \;,\; \ldots,\; L_m = [a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \ldots \; a_{mn}]_{(1xn)}$$

- Chama-se combinação das m linhas a qualquer expressão do tipo:

  $$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_m L_m \text{ (matriz linha)}$$

- Considere-se, agora, a matriz linha nula L0 = [0 0 … 0]. É então, possível construir a equação:

  $$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots\ldots + \lambda_m L_m = L_0$$

- Há 2 casos a considerar, para as soluções da equação anterior:
  - **1º caso:**
    - A única maneira de obter a linha nula é igualar todos os escalares a 0

      $$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$$

    - Neste caso, as linhas dizem-se linearmente independentes (L.I.)
  - **2º caso:**
    - A linha nula pode ser obtida da combinação linear anterior, sem ser necessário considerar zero todos os escalares λ.
    - Neste caso, as linhas dizem-se linearmente dependentes (L.D.)

> ℹ️ Se:

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_m L_m = L_0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

- As linhas de uma matriz dizem-se lineamente independentes, caso contrário (caso se possa obter a linha nula sem ser necessário considerar zeros todos os escalares λ, as linhas dizem-se linearmente dependentes.

- O mesmo raciocínio pode aplicar-se às colunas da matriz A. Assim, se a combinação linear das colunas de A coincide com a coluna nula, apenas quando todos os escalares forem nulos (λ = 0), então as colunas de A são L.I. Por outro lado, se for possível obter a coluna nula sem ser necessário utilizar apenas escalares nulos, as colunas serão L.D.

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n = C_0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Combinação linear das colunas de uma matriz

Exemplo: Estude a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ quanto à dependência linear das suas colunas.

Repare-se que a equação $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = C_0$, do exercício anterior, é equivalente à equação

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(3\times3)} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}_{(3\times1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(3\times1)}.$$

Analogamente para matrizes do tipo $(n \times m)$.

De um modo geral, as filas de uma matriz (linha e/ou coluna) dizem-se linearmente independentes quando nenhuma delas se pode escrever como combinação linear das restantes e linearmente dependentes quando alguma delas se pode escrever como combinação linear das demais.

Combinação linear das filas de uma matriz

Propriedades:

1. Se uma das linhas é formada apenas por zeros, então as linhas são linearmente dependentes (idem para as colunas)
2. Se algumas das linhas são linearmente dependentes, então todas o serão (idem para as colunas)
3. A dependência ou independência linear das linhas/colunas de uma matriz, não se altera se trocarmos a ordem dessas linhas/colunas
4. Se as linhas são linearmente dependentes/independentes, então também o serão as linhas/colunas
5. Se as linhas são linearmente dependentes, então algumas delas podem-se escrever como combinação linear das restantes (idem para as colunas)
6. As linhas/colunas de uma matriz triangular (superior ou inferior), com os elementos da diagonal principal diferentes de zero, são linearmente independentes

> ℹ️ Numa matriz, o número máximo de linhas linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.

Operações elementares