Modelowanie temperatury w pomieszczeniu

Małgorzata Gancarz

II 2026

Spis treści

W niniejszym raporcie odpowiem na pytanie:

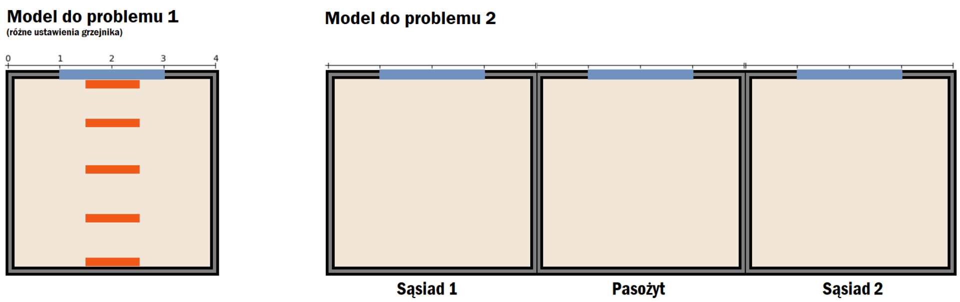
1. jak odległość dzieląca grzejnik i okno wpływa na temperaturę pomieszczenia?

Model

Eksperyment

Do poszukiwań odpowiedzi posłuży model pomieszczenia wielkości 4×4m, który na północnej ścianie ma okno (wyśrodkowane i zajmujące pół ściany). W pomieszczeniu w symetrii z oknem umieszczony jest grzejnik rozmiarów 10×100cm (i wysokości 60, czego nie widać w symulacji). Testujemy, jak temperatura w pokoju zachowuje się w zależności od jego odległości od okna. Jest to mierzone za pomocą średniej oraz odchylenia standardowego z temperatury panującej we wnętrzu pomieszczenia. Dodatkowo mierzymy zużycie energii przez pracujący grzejnik.

Dla zachowania poprawności eksperymentów, każda symulacja zaczyna się w takich samych warunkach początkowych: na zewnątrz panuje temperatura 0°C, a wewnątrz 20°C. Symulacje są prowadzone przez tyle samo czasu - 3600 sekund, czyli godzinę (taka długość jest wystarczająca, aby zauważyć zachodzące zależności).



Rysunek 1: Pomieszczenia w problemach.

Opis matematyczno-fizyczny

Do modelowania zmian temperatury pomieszczenia służy układ równań:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + u \cdot \dfrac{P \cdot r}{p \cdot A \cdot c}\,\Theta(x,u), & x \in R_i,\ t \in [0,T],\ i \in \{1,\dots,N_{\text{rooms}}\}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\dfrac{\lambda_{\text{window}}}{\lambda_{\text{air}}}\left(u - u_{\text{z}}\right), & x \in W_i,\ t \in [0,T],\ i \in \{1,\dots,N_{\text{windows}}\}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\dfrac{\lambda_{\text{wall}}}{\lambda_{\text{air}}}\left(u - u_{\text{z}}\right), & x \in W_i,\ t \in [0,T],\ i \in \{1,\dots,N_{\text{walls}}\}, \\[2ex]
u(x,0) = u_w, & x \in \Omega,
\end{cases}
\tag{1}
$$

gdzie

$$u_w = 20^\circ C = 293.15K$$

$$u_z = 0^\circ C = 273.15K$$

$$
\Theta(x,u) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \dfrac{1}{|R_i|} \displaystyle\int_{R_i} u(x,t)\,\mathrm{d}x \le S_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}
\tag{2}
$$

$\Theta(x,u)$ to funkcja odpowiadająca dostarczaniu energii do układu przez grzejnik. Warunek porównania z S_i oddaje działanie termostatu, który jest połączony z pokrętłem na grzejniku. Energia dostarczana jest tylko wtedy, gdy średnia temperatura w pomieszczeniu spadnie poniżej ustawionego na grzałce S i-tego trybu.

Tryb pokrętła	Temperatura graniczna [°C]
0	7
1	16
2	20
3	24
4	28

Ω to cały obszar symulacji, który rozkłada się na rozłączne zbiory:

- R_i – pokoje,

- W_i – okna,
- $\mathcal{W}_i$ – ściany.

W szczególności

$$\Omega = \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,N_{\text{rooms}}\}} R_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,N_{\text{windows}}\}} W_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,N_{\text{walls}}\}} \mathcal{W}_i \right).$$

Dane fizyczne używane powyżej przyjmują wartości jak w tabeli poniżej, zgodne ze źródłami w linkach. Jedynie λ ścian i okien są podzielone przez kolejno 0.35 i 0.01 metra.

Tabela 2: Stałe fizyczne wykorzystane w modelu

Nazwa	Stała	Wartość	Jednostka	Źródło
współczynnik przewodnictwa cieplnego	α	0.000019	m^2/s	link
ciśnienie	p	101300	Pa	link
indywidualna stała gazowa	r	287.05	$J/(kg \cdot K)$	link
ciepło właściwe powietrza	c	1005	$J/(kg \cdot K)$	link
współczynnik przenikania ciepła przez ściany	λ_{wall}	0.1	$J/(s \cdot m \cdot K)$	link
współczynnik przenikania ciepła przez okna	λ_{window}	0.96	$J/(s \cdot m \cdot K)$	link
współczynnik przenikania ciepła przez powietrze	λ_{air}	0.0262	$J/(s \cdot m \cdot K)$	link
moc grzejnika	P	1267	W	link

Aby sprawdzić, które rozwiązanie ogrzewa optymalnie, pod koniec eksperymentu sprawdzać będziemy:

- średnią temperaturę w pomieszczeniu (wnętrze, czyli bez chłodzących ścian i okna),
- równomierność rozkładu ciepła (odchylenie standardowe),
- energię zużytą przez grzejnik do ogrzewania pomieszczenia (im mniejsza, tym mniejsze rachunki).

Dyskretyzacja do rozwiązania

Układ rozwiązuję numerycznie schematem niejawnym Eulera.

Do tego należy zdyskretyzować układ. Korzystając z macierzy dyskretyzujących pochodne (D_2, D_1^{backward}, D_1^{forward}) i dostosowując je w zależności od położenia brzegu, główne równanie przybiera postać:

$$(Id - \alpha\, h_t\, L) u^{n+1} = u^n + h_t\, f(x, u^n) \quad \Longrightarrow \quad A\, u^{n+1} = b^n$$

gdzie L to laplasjan z pochodnych: $L = (\frac{D_2 \otimes I_{N_y}}{h_{xx}} + \frac{I_{N_x} \otimes D_2}{h_{yy}})$

Warunki brzegowe przybierają formę (z odpowiednio dobraną do kierunku ustawienia ściany macierzą D_1, znakiem i krokiem przestrzennym):

$$\frac{\pm D_1 \otimes I_{N_{x/y}}}{h_{x/y}}\, u^{n+1} = \frac{\lambda_{w\ldots}}{\lambda_{\text{air}}} (u^{n+1} - u_z) \quad \Longrightarrow \quad B\, u^{n+1} = \frac{\lambda_{w\ldots}}{\lambda_{\text{air}}}\, u_z$$

Implementujemy je przepisując wartości macierzy B na odpowiadające brzegom indeksy macierzy A, która służy do rozwiązywania układu równań w pętli (niejawność).

Wektor rozwiązań b^n budujemy w pętli, dodając człon nieliniowy funkcji grzejnika $h_t\, f(x, u^n)$ do poprzedniego rozwiązania. Prawą stronę równania warunków brzegowych podstawiamy na indeksy brzegowe w b^n.

W dyskretyzacji przestrzeni korzystamy z siatki 41x41, a w dyskretyzacji czasu z kroku $h_t = 1$. Wartości wynikają z następnej sekcji.

Analiza błędu

Analiza błędu kroku czasowego h_t

Do analizy błędu symulacji korzystamy z testu podwajania kroku. Porównujemy wyniki symulacji dla danego h_t z wynikami dla $\frac{h_t}{2}$, a dokładniej liczymy średni błąd bezwzględny w przestrzeni, uśredniony w czasie:

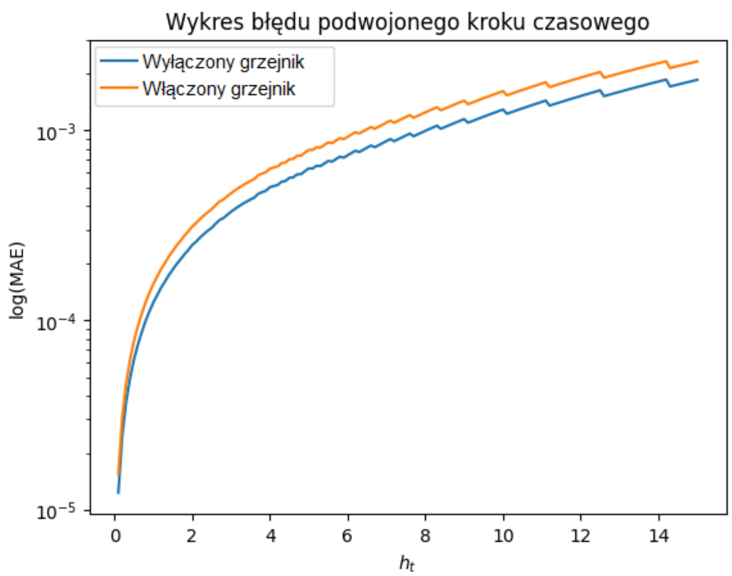
$$\text{Error}(h_t) = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|u_{1,i}^{(k)} - u_{2,i}^{(2k)}\right|\right)$$

t - ilość obrotów pętli symulującej dla h_t i danego czasu końcowego T,

$N = N_x N_y$ - ilość punktów w dyskretyzowanej przestrzeni,

$u_{1,i}^{(k)}$ - macierz rozwiązania w chwili k iterowana po każdym i, czyli punkcie przestrzeni.

Tak otrzymany MAE (*mean absolute error*) przedstawiamy na wykresie w skali logarytmicznej, aby można było z niego odczytać rząd błędu.



Rysunek 2: Wykres błędu kroku czasowego.

Jak widać błąd rośnie wraz ze wzrostem kroku. Aby rząd błędu był około 10^{-4}, wybierzemy $h_t = 1$.

Analiza błędu kroku przestrzennego $h_x = h_y$

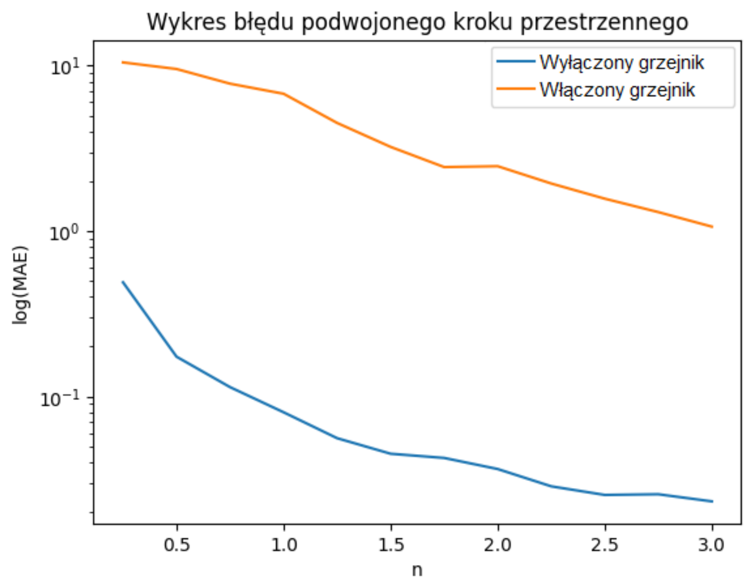
Kod symulacji wymaga, aby siatka zawierała punkty co 0.2, ponieważ z taką dokładnością ustawiamy grzejnik w danym miejscu, dlatego przyjmuje on argument $n \in \mathbb{N}$ oznaczający zwiększającą się dokładność siatki i na jego podstawie wylicza krok. Do badania błędu kroku w zależności od n skorzystamy również z różnicy wyników dla kroku i jego połowy (dwukrotności n).

Błąd obliczany jest podobnie do błędu dla kroku czasowego: porównujemy wyniki symulacji dla danego n (h_x) z wynikami dla $2n$ ($\frac{h_x}{2}$), **ale** średni błąd bezwzględny rozwiązań porównujemy tylko w ostatniej chwili czasowej.

Wzór na błąd we wcześniejszych oznaczeniach

$$\text{Error}(h_x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|u_{1,i}^{(T)} - u_{2,i}^{'(T)}\right|$$

gdzie $u_2^{'(T)}$ tu przyjmuje wartości macierzy rozwiązania z dwukrotnie gęstszą siatką ($u_2^{(T)}$), ale tylko z punktów, które znajdują się również w macierzy u_1, a więc jest jej rozmiarów (N).



Rysunek 3: Wykres błędu kroku przestrzennego.

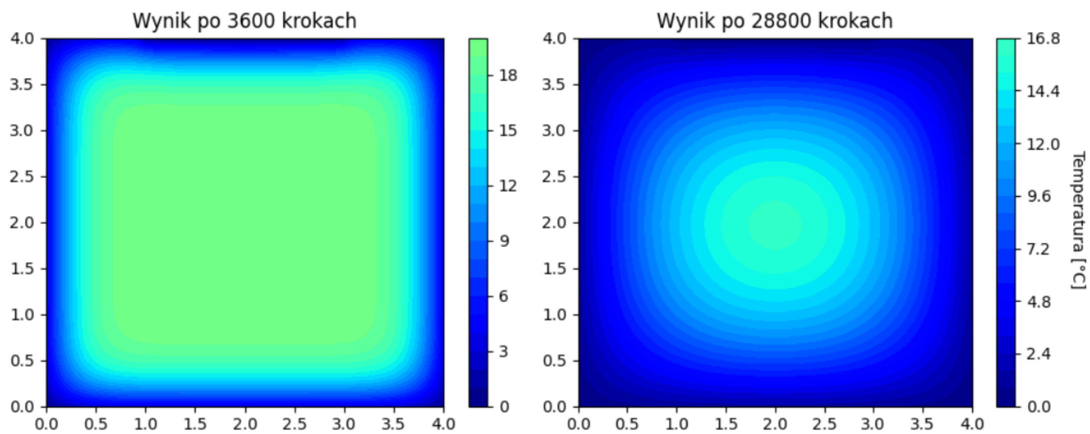
Błąd maleje wraz ze wzrostem n, czyli maleniem kroku. Na podstawie wykresu w symulacji posłużymy się $n = 2$, czyli $h_x = h_y = \frac{2}{20} = 0.1$.

Symulacje

Wyniki

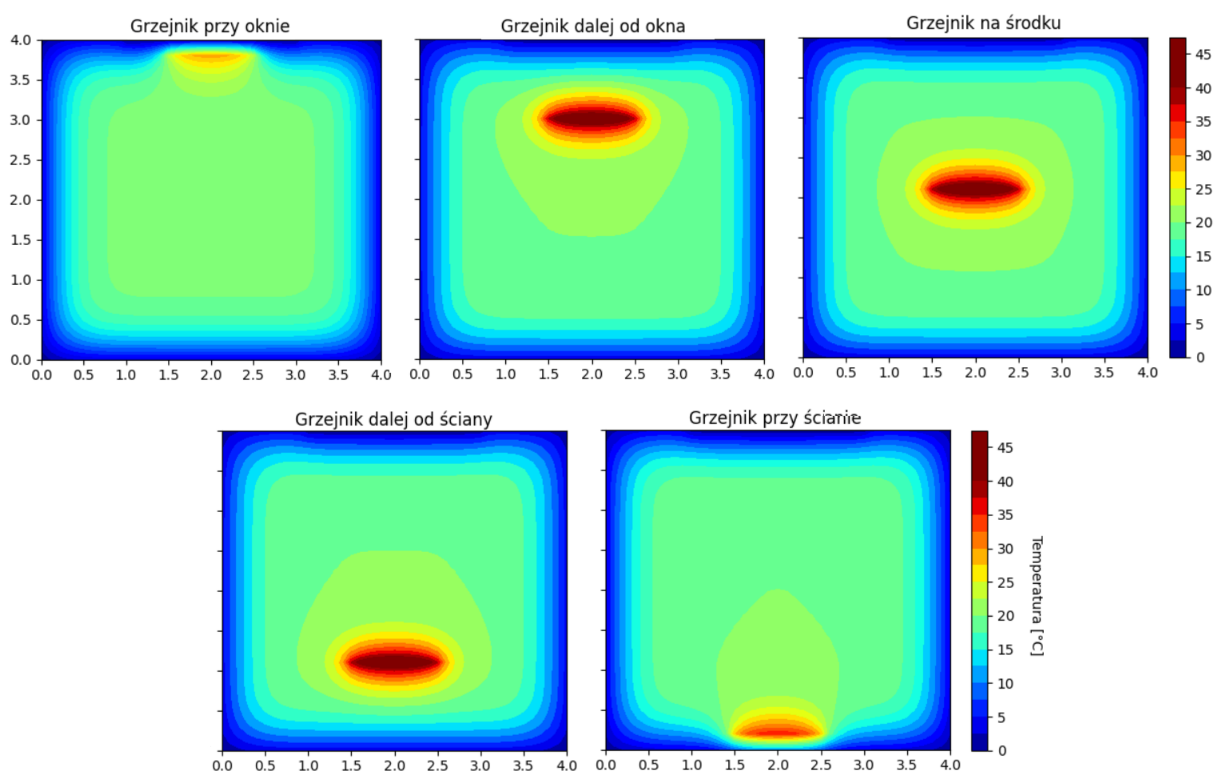
Problem 1. Umiejscowienie grzejnika

Dla porównania z wynikami eksperymentów przeprowadzamy próbę kontrolną z wyłączonym grzejnikiem i tym samym czasem symulacji - 1 godziną. Na poniższym wykresie (po lewej) możemy zauważyć, że ciepło odpływa z pomieszczenia poprzez ściany i okno, najlepiej utrzymuje się w centrum pokoju. Układ dąży do stanu stacjonarnego, czyli całkowitego wychłodzenia do temperatury zewnętrznej, co widać jeszcze lepiej po wydłużeniu symulacji do 8 godzin (po prawej).



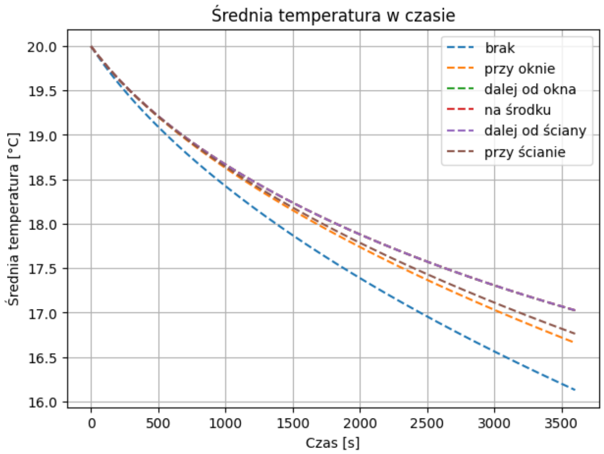
Rysunek 4: Układ po godzinie (lewo) i po 8 godzinach (prawo).

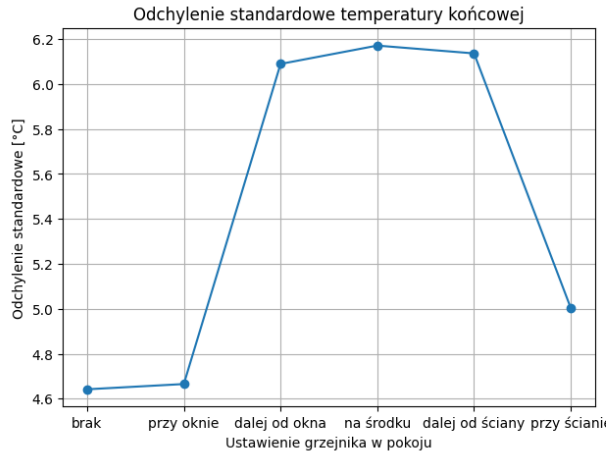
Symulujemy teraz, co dzieje się w pomieszczeniu, gdy grzejnik jest włączony na maksymalne pokrętło - nr 4, czyli grzeje, dopóki temperatura w pokoju nie osiągnie 28°C.



Rysunek 5: Symulacja temperatur przez godzinę z różnymi ustawieniami grzejnika.

Na wykresach widać, jak bardzo wychładzają pomieszczenie ściany, moc grzania grzejnika, zaznaczonego przez nią na czerwono oraz łunę ciepła, która wychodzi z niego w stronę centrum pokoju. Łuna bliska ścianom lub oknu znika, ponieważ temperatura wyrównuje się z zimnem ze ścian. Z tego też powodu grzejnik nie rozgrzewa się aż tak mocno jak postawiony w środku pomieszczenia.





Rysunek 6: Średnia temperatura i odchylenie standardowe w godzinnej symulacji w zależności od ustawienia grzejnika.

Jak widać średnia temperatura w pomieszczeniu spada niezależnie od starań - zapewne jeden grzejnik to za mało, by utrzymać ciepło w pomieszczeniu takich rozmiarów w zaistniałych warunkach zewnętrznych.

Temperatura spada najbardziej w przypadku braku grzejnika, o prawie 4°C. Następnie najzimniej w pokoju, ale o 0.5°C więcej jest w przypadku ustawienia punktu ogrzewania pod oknem oraz pod ścianą. Temperatura spada tylko o 3°C we wszystkich trzech przypadkach ustawienia grzejnika zdala od ścian i okna. Jest ona częściowo zawyżona tym, że grzejnik rozgrzewa się mocniej, a jego punkty są brane pod uwagę przy liczeniu średniej.

Z tego też powodu w tych przypadkach zdecydowanie największe jest odchylenie standardowe. Najmniejsze jest ono w przypadku braku grzejnika i przy ustawianiu go przy oknie - te przypadki mogą być do siebie podobne, bo grzejnik anuluje największe ochładzanie pomieszczenia z okna, ale jednocześnie przez to sam nie może się dość rozgrzać, żeby nagrzać resztę pokoju. Drugie najmniejsze odchylenie jest w przypadku postawienia grzejnika przy ścianie - jest to przypadek podobny do ustawienia przy oknie, ale ściany mniej ograniczają grzejnik niż okno, więc więcej ciepła dociera do środka pokoju i lepiej się on ogrzewa.

Wnioski i podsumowanie

Problem 1. Umiejscowienie grzejnika

Biorąc pod uwagę powyższe eksperymenty i wnioski, możemy zauważyć, że obecne źródło ciepła utrzymuje je tylko w swoim otoczeniu - zdala od niego, szczególnie pod ścianami, robi się bardzo chłodno. Trochę lepiej od pozostałych w utrzymaniu równomiernej temperatury sprawuje się grzejnik umiejscowiony pod oknem, jednak on sam nie jest w stanie ogrzać całego pomieszczenia - potwierdzają to również przeprowadzone w innych dostępnych w repozytorium plikach symulacje. Możemy uznać, że w takim pokoju potrzeba więcej grzejników, aby temperatura nie malała przy zimowej pogodzie. Biorąc pod uwagę zimno przechodzące ze ścian, efektywne mogłoby być ustawienie grzejnika pod każdą z nich.