Transportes (grafos bipartidos)

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

27 de setembro de 2020

Transportes

antes

- Vimos as operações básicas do método simplex para grafos (redes).

Guião

- Vamos usar o algoritmo para resolver um exemplo definido sobre um grafo bipartido, usando a representação em quadro e em grafo.
- Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V puder ser dividido em dois conjuntos disjuntos, V_1 e V_2, $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de tal modo que todos os arcos (i,j) tenham origem num vértice $i \in V_1$ e destino num vértice $j \in V_2$.
- O problema de afectação é um caso especial do problema de transportes em grafos bipartidos.

depois

- Aplicaremos o algoritmo em grafos (redes) gerais.

Transportes em grafos bipartidos: modelo

- Objectivo: minimizar o custo de transporte das unidades entre os pontos de produção (origens) e os pontos de consumo (destinos)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\ \text{suj. a} \quad & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\ & \sum_{i \in V_1} x_{ij} = b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Variáveis de decisão:

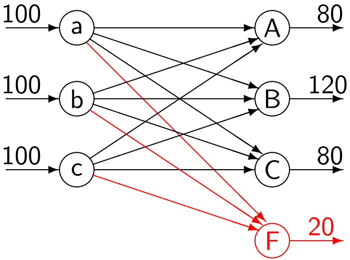
- x_{ij} - quantidade a transportar da origem i para o destino j.

Dados:

- $c_{ij:}$ custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- a_i : número de unidades oferecidas na origem i;
- b_j : número de unidades consumidas no destino j.

Problema de Produção - Distribuição

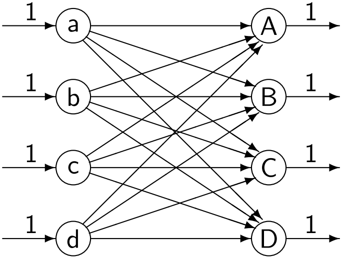
- Cada origem é um local de produção com a capacidade indicada.
- Existe um excedente de capacidade, e é necessário decidir qual a capacidade usada em cada local de produção.



- O modelo pode incluir, para além dos custos unitários de transporte, os custos unitários de produção, usando, para o arco (i,j),
- o custo $c_{ij} = t_{ij} + p_i$, em que t_{ij} é o custo unitário de transporte e p_i o custo unitário de produção na origem i.

Problema de afectação (*assignment*)

- O objectivo do problema de afectação é afectar (atribuir) n pessoss a um igual número de tarefas, de modo a minimizar os custos globais.
- É dado o custo c_{ij} associado à afectação da pessoa i à tarefa $j, \forall i, j$.

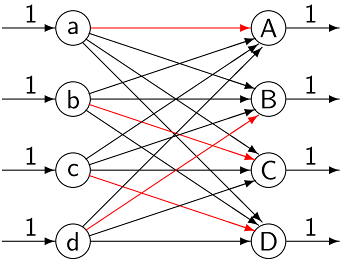


- Só há n variáveis básicas positivas; as soluções básicas são muito degeneradas.
- Há algoritmos combinatórios muito eficientes.

Problema de afectação (*assignment*)

- Os custos c_{ij} podem ser representados numa matriz quadrada.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & A & B & C & D & \\
\hline
a & \mathbf{2} & 2 & 5 & 3 & 1 \\
b & 2 & 5 & \mathbf{4} & 1 & 1 \\
c & 5 & 5 & 7 & \mathbf{2} & 1 \\
d & 4 & \mathbf{3} & 6 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$



- A solução óptima deste exemplo tem um custo total de 11, correspondendo à seguinte afectação: $(a, A), (b, C), (c, D)$ e (d, B).

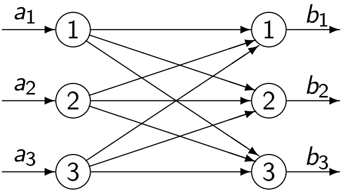
Problema de afectação

O problema de afectação pode ser formulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\ \text{suj. a} \quad & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = 1 \ , \ \forall i \in V_1 \\ & \sum_{i \in V_1} x_{ij} = 1 \ , \ \forall j \in V_2 \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Diversas representações

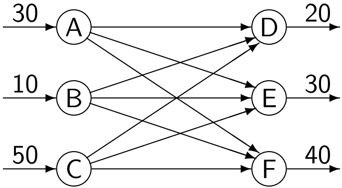
	1	2	3	
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
3	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	a_3
	b_1	b_2	b_3	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
origem 1	1	1	1							$= a_1$
origem 2				1	1	1				$= a_2$
origem 3							1	1	1	$= a_3$
destino 1	-1			-1			-1			$= -b_1$
destino 2		-1			-1			-1		$= -b_2$
destino 3			-1			-1			-1	$= -b_3$
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	

Exemplo

	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							= 30
B				1	1	1				= 10
C							1	1	1	= 50
D	-1			-1			-1			= -20
E		-1			-1			-1		= -30
F			-1			-1			-1	= -40
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

Conteúdo (transportes em grafos bipartidos)

- Balanceamento e caracterização das soluções básicas
- Solução inicial
    - Método do canto NW
    - Método dos custos mínimos
- Pivôs
- Teste de optimalidade
    - Método do Stepping-stone
    - Método dos multiplicadores
- Resolução de um exemplo
- Apêndices
    - Degenerescência
    - Dual do problema de transportes
    - Justificação do método dos multiplicadores

Algoritmo (simplex) de transportes

Algoritmo

```
Obter uma quadro básico inicial (i.e., solução básica inicial)
Enquanto (quadro básico não óptimo)
        mudar para um quadro básico adjacente melhor
```

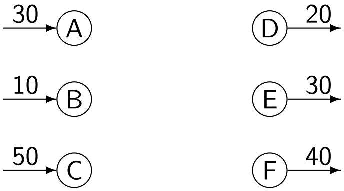
Dois métodos para obter um quadro básico inicial:

- Método do canto NW
- Método dos custos mínimos

Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

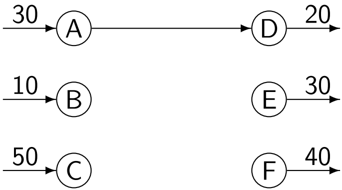
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

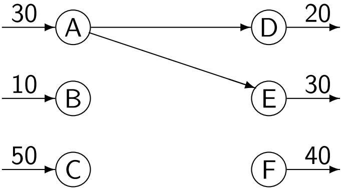
	D	E	F	
A	20 3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

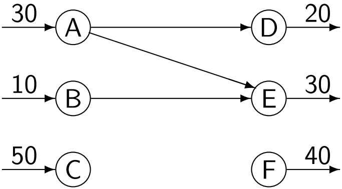
	~~D~~	E	F	
~~A~~	~~20~~ 3	~~10~~ 6	5	~~30~~
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	~~20~~	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

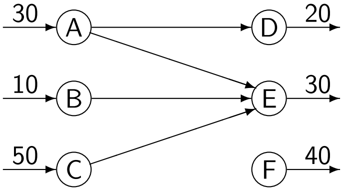
	~~D~~	E	F	
~~A~~	~~20~~ 3	~~10~~ 6	5	~~30~~
~~B~~	2	~~10~~ 5	5	~~10~~
C	1	2	3	50
	~~20~~	30	40	



Solução inicial: método do canto NW

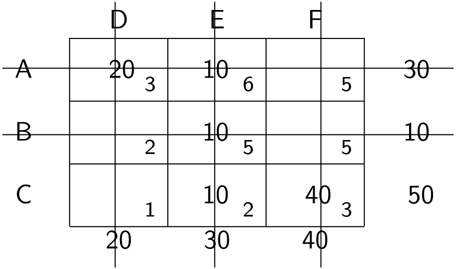
1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
~~A~~	20 3	10 6	5	~~30~~
~~B~~	2	10 5	5	~~10~~
C	1	10 2	3	50
	~~20~~	~~30~~	40	

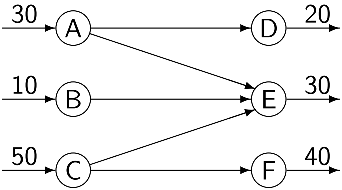


Solução inicial: método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.



	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	10 2	40 3	50
	20	30	40	

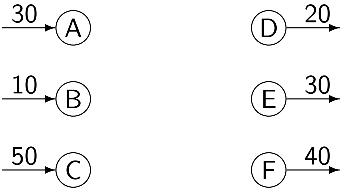


- Desvantagem: não toma em consideração os custos das casas, que podem ser muito elevados nas casas a NW.

Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

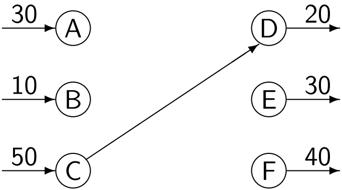
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

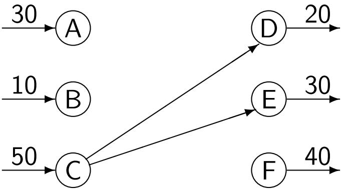
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	20 1	2	3	50
	20	30	40	



Solução inicial: método dos custos mínimos

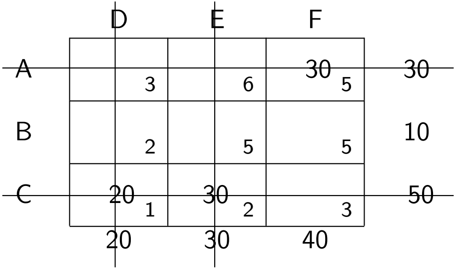
1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	~~D~~	~~E~~	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
~~C~~	~~20~~ 1	~~30~~ 2	3	~~50~~
	~~20~~	~~30~~	40	

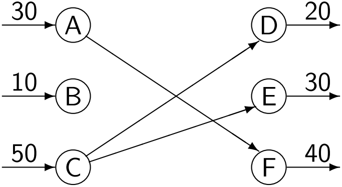


Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

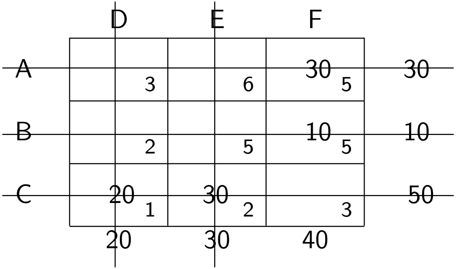


	~~D~~	~~E~~	F	
~~A~~	3	6	30 5	~~30~~
B	2	5	5	10
~~C~~	20 1	30 2	3	~~50~~
	~~20~~	~~30~~	40	

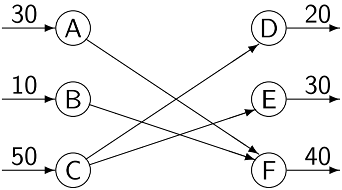


Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

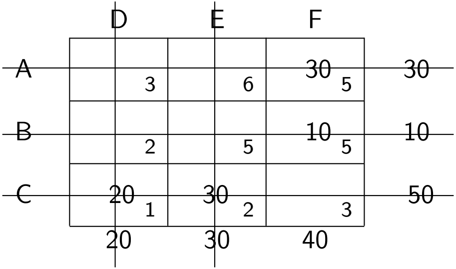


	~~D~~	~~E~~	F	
~~A~~	3	6	30 5	~~30~~
~~B~~	2	5	10 5	~~10~~
~~C~~	20 1	30 2	3	~~50~~
	~~20~~	~~30~~	40	

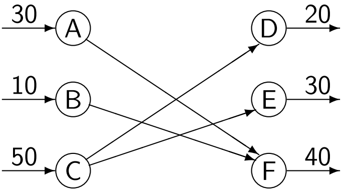


Solução inicial: método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.



	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	

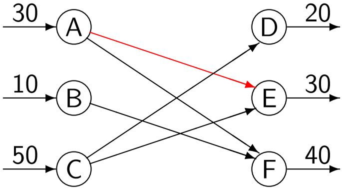


- Solução básica deve ter 5 variáveis básicas. Esta solução é admissível, mas ...

Solução inicial ... deve ter 5 variáveis básicas

- Considerar uma variável com valor nulo como variável básica.
- (neste caso, seleccionamos x_{AE}).
- A solução básica admissível é uma solução degenerada.

	D	E	F	
A	3	0 6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	

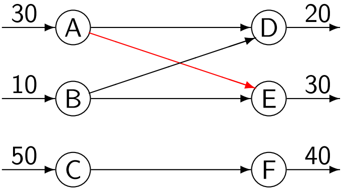


- Grafo associado à solução básica é uma árvore (depois de adicionar o arco).
- Desta forma, quando há vários componentes (floresta), em soluções degeneradas, também se pode associar à solução básica uma árvore.

Nota: selecção da variável básica com valor 0

- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável x_{AE} dá origem a um grafo que não é uma árvore.

	D	E	F
A	*	0	
B	*	*	
C			*



- Os arcos associados às variáveis formam um ciclo (*i.e.*, as colunas do modelo de PL são linearmente dependentes, e portanto não formam uma base)

Pivô: variação das variáveis não-básicas

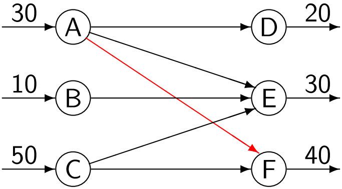
- Pivô: quadro inicial → quadro adjacente

- No movimento ao longo de uma aresta do poliedro do modelo de programação linear (de transportes):
- todas as variáveis não-básicas permanecem nulas, excepto uma **única** que aumenta de valor.

Pivô: como variam os valores das variáveis básicas?

- Exemplo: quando a variável x_{AF} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

	D	E	F	
A	20 3	10 6	$+\theta$ 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	10 2	40 3	50
	20	30	40	



Propriedades das árvores:

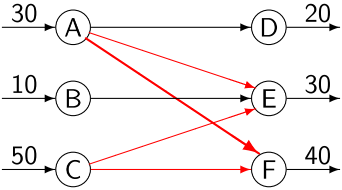
- Há 1 caminho (e 1 só) entre cada par de vértices. Porquê?
- A adição de 1 arco a uma árvore dá origem a 1 (e 1 só) ciclo. Porquê?

Pivô: variação dos valores das variáveis básicas

- O arco (A, F) (variável não-básica) forma um ciclo com os arcos (C, F), (C, E) e (A, E) (das variáveis básicas).

- Os arcos do ciclo formam um conjunto linearmente dependente.

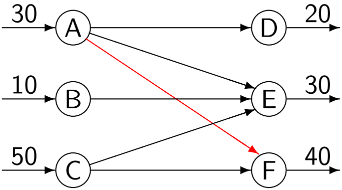
	D	E	F	
A	20_{3}	$10-\theta_{6}$	$+\theta_{5}$	30
B	$_{2}$	10_{5}	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10+\theta_{2}$	$40-\theta_{3}$	50
	20	30	40	



- As variáveis básicas do ciclo são designadas por *Stepping-stones.*
- Os valores das variáveis básicas que ficam fora do ciclo não mudam.

Pivô: qual o aumento máximo de x_{AF}?

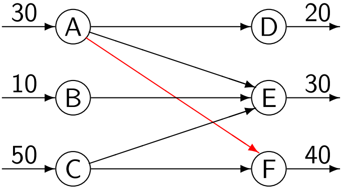
	D	E	F	
A	20 3	$10-\theta$ 6	$+\theta$ 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	



- Quanto pode aumentar a variável não-básica x_{AF} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

Pivô: exemplo

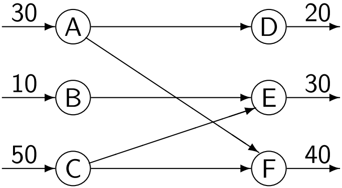
	D	E	F	
A	20 3	$10-\theta$ 6	$+\theta$ 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	20 3	6	10 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	20 2	30 3	50
	20	30	40	



Teste de optimalidade: método dos multiplicadores

Multiplicadores associados às restrições:

- há um multiplicador u_i associado a cada linha i, $i = 1, \dots, m$;
- há um multiplicador v_j associado a cada coluna j, $j = 1, \dots, n$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas ($ij \in \mathscr{B}$), fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

2. Para as casas não-básicas ($ij \in \mathscr{N}$), fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j)$$

Output do método dos multiplicadores:

- os δ_{ij} de todas as casas não-básicas.

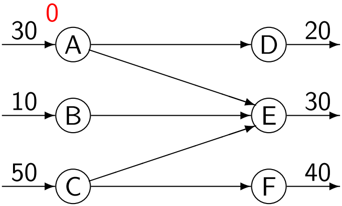
Nota: há livros que usam $c_{ij} = u_i + v_j$ em grafos bipartidos, o que equivale a usar os valores simétricos de v_j. É fácil de verificar que o cálculo dos δ_{ij} dá o mesmo resultado.

Exemplo: passo 0 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).

u_i	v_j			
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- fixar um multiplicador: $u_A = 0$.

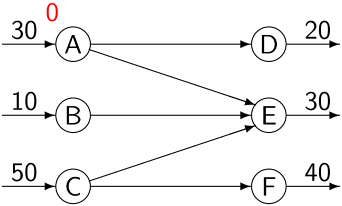
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i v_j				
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A - v_D = 3$ $\Rightarrow v_D =$

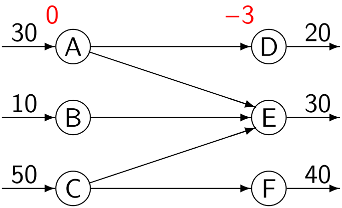
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3			
0	20 $_3$	10 $_6$	$_5$	30
	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
	$_1$	10 $_2$	40 $_3$	50



- $u_A - v_D = 3$ $\Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6$ $\Rightarrow v_E =$
-
-
-
-

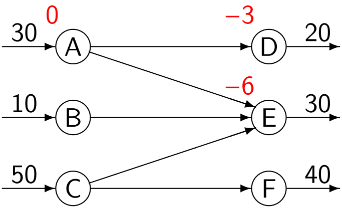
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i v_j	-3	-6		
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B =$
-
-
-

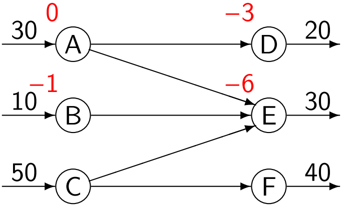
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6		
0	20 3	10 6	5	30
-1	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A - v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \qquad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \qquad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \qquad \Rightarrow u_C =$
-
-

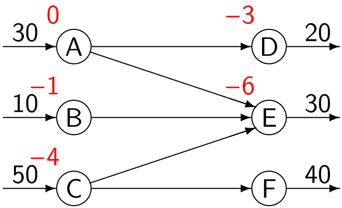
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i v_j	-3	-6		
0	20 3	10 6	5	30
-1	2	10 5	5	10
-4	1	10 2	40 3	50



- $u_A - v_D = 3$ $\Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6$ $\Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5$ $\Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2$ $\Rightarrow u_C = -4$
- $u_C - v_F = 3$ $\Rightarrow v_F =$
-

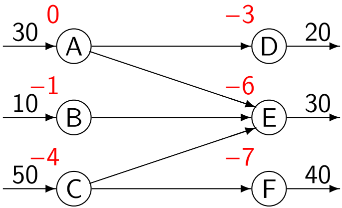
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - v_j$$

u_i \ v_j	-3	-6	-7	
0	20 3	10 6	5	30
-1	2	10 5	5	10
-4	1	10 2	40 3	50



- $u_A - v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = -3$
- $u_A - v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = -6$
- $u_B - v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C - v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C - v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F = -7$
- Será sempre possível calcular todos os multiplicadores? Porquê?

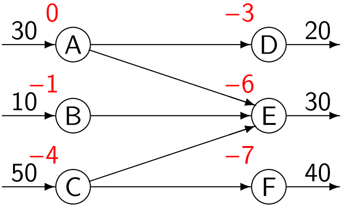
Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j) = c_{ij} - u_i + v_j$$

u_i v_j	-3	-6	-7	
0	20 3	10 6	-2 5	30
-1	0 2	10 5	-1 5	10
-4	$+2$ 1	10 2	40 3	50



- $\delta_{AF} = 5 - 0 - 7 = -2$
- $\delta_{BD} = 2 - (-1) + (-3) = 0$
- $\delta_{BF} = 5 - (-1) + (-7) = -1$
- $\delta_{CD} = 1 - (-4) + (-3) = +2$
- A variável não-básica x_{AF} é a mais atractiva.

Variável não-básica que entra na base: selecção

- Seleccionar a variável não-básica com maior variação da função objectivo por unidade de incremento da variável não-básica, ou seja:

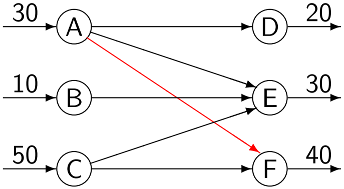
A variável não-básica a entrar na base é:

- a variável não-básica com δ_{ij} mais negativo (em problemas de minimização).

- Esta escolha visa atingir a solução óptima mais rapidamente.
- Em caso de empate, a escolha é arbitrária.

Resolução do exemplo: diapositivo repetido da iteração 1

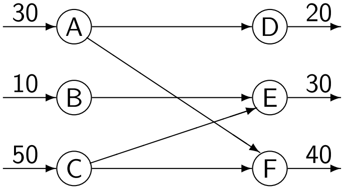
	D	E	F	
A	$20\ _{3}$	$10-\theta_{6}$	$+\theta\ _{5}$	30
B	$_{2}$	$10\ _{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10+\theta_{2}$	$40-\theta_{3}$	50
	20	30	40	



$$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$$

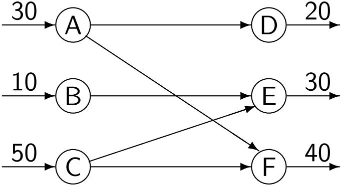
- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	$20\ _{3}$	$_{6}$	$10\ _{5}$	30
B	$_{2}$	$10\ _{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$20\ _{2}$	$30\ _{3}$	50
	20	30	40	



Quadro 2: teste de optimalidade

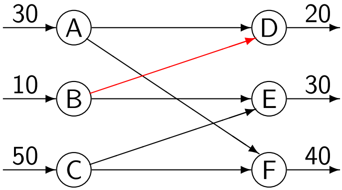
	-3	-4	-5	
0	20 3	$+2$ 6	10 5	30
1	-2 2	10 5	-1 5	10
-2	0 1	20 2	30 3	50
	20	30	40	



- A variável não-básica mais atractiva é a variável $x_{BD} : \delta_{BD} = -2$.

Iteração 2

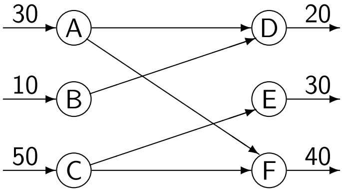
	D	E	F	
A	$20-\theta$ 3	6	$10+\theta$ 5	30
B	$+\theta$ 2	$10-\theta$ 5	5	10
C	1	$20+\theta$ 2	$30-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20, 30\} = 10$

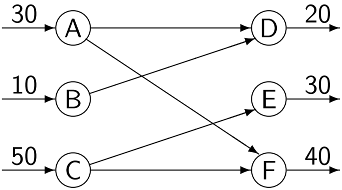
- A variável x_{BD} entra na base e x_{BE} sai da base.

	D	E	F	
A	10 3	6	20 5	30
B	10 2	5	5	10
C	1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



Quadro 3: teste de optimalidade

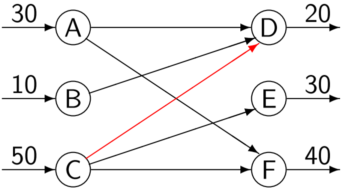
	−3	−4	−5	
0	10 3	+2 6	20 5	30
−1	10 2	+2 5	+1 5	10
−2	0 1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



- Solução óptima.
- Custo da solução óptima: 10(3)+20(5)+10(2)+30(2)+20(3)=270
- Há soluções óptimas alternativas, porque $\delta_{CD} = 0$.

Uma solução óptima alternativa

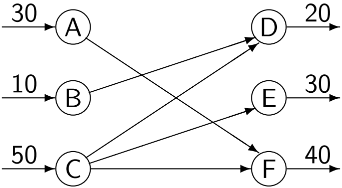
	D	E	F	
A	$10-\theta$ 3	6	$20+\theta$ 5	30
B	10 2	5	5	10
C	$+\theta$ 1	30 2	$20-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$

- O custo da seguinte solução é o mesmo. Porquê?

	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	10 2	5	5	10
C	10 1	30 2	10 3	50
	20	30	40	



Conclusão

- O algoritmo apresentado é uma especialização do algoritmo simplex para um problema que é representado num grafo bipartido.
- Este problema é, por vezes, designado por problema de Hitchcock(†), que apresentou um modelo matemático e um procedimento para a sua resolução.
- Os grafos bipartidos são uma classe de grafos, e o algoritmo pode ser generalizado para grafos gerais.

(†) - Frank. L. Hitchcock, The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Physics, 20 (1941), 224-230.

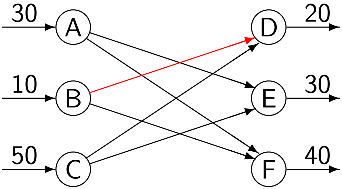
Apêndices

1. Degenerescência

Degenerescência: pivô degenerado

- Com degenerescência, regras são semelhantes, mas θ_{max} pode ser 0.

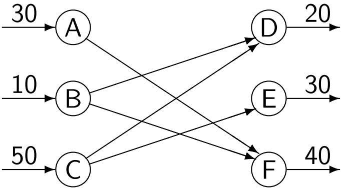
	-5	-6	-5	
0	-2 3	0-θ 6	$30+\theta$ 5	30
0	-3 $+\theta$ 2	-1 5	$10-\theta$ 5	10
-4	$20-\theta$ 1	$30+\theta$ 2	$+2$ 3	50
	20	30	40	



$\theta_{max} = \min\{0, 10, 20\} = 0$

- A variável x_{BD} entra na base (com valor nulo) e x_{AE} sai da base.

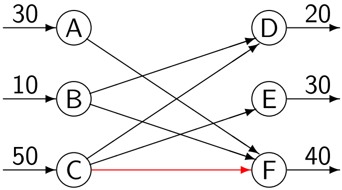
3	6	30 5	30
0 2	5	10 5	10
20 1	30 2	3	50
20	30	40	



Degenerescência: saída do vértice degenerado

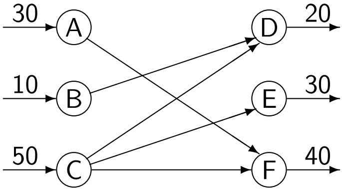
- O pivô anterior designa-se por *pivô degenerado:* a base é diferente, mas a solução básica (vértice) é a mesma.

	-2	-3	-5	
0	$+1$ 3	$+3$ 6	30 5	30
0	$0+\theta$ 2	$+2$ 5	$10-\theta$ 5	10
-1	$20-\theta$ 1	30 2	-1 $+\theta$ 3	50
	20	30	40	



$$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$$

	-2	-3	-5	
0	$+1$ 3	$+3$ 6	30 5	30
0	10 2	$+2$ 5	5	10
-1	10 1	30 2	-1 10 3	50
	20	30	40	



Fim