Programação Inteira - planos de corte

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

20 de novembro de 2019

Programação Inteira - planos de corte

antes

- Em Programação Linear, os valores das variáveis da solução óptima podem ser números fraccionários.

Guião

- Em Programação Inteira, os valores das variáveis da solução óptima devem ser inteiros.
- Estratégia do método dos planos de corte: adicionar planos de corte ao modelo e reoptimizar, até obter uma solução inteira.
- *Plano de corte:* restrição gerada a partir das restrições do modelo
  - que corta uma porção do domínio com soluções fraccionárias e
  - que não corta nenhuma solução inteira.

depois

- Vamos ver outro método, baseado em partição e avaliação.

Conteúdo

Programação Inteira (PI)

problema de programação linear inteiro puro:

$$\begin{aligned} \max z_I &= cx \\ \text{suj. a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \text{ e inteiro} \end{aligned}$$

problema de programação linear inteiro misto:

$$\begin{aligned} \max z_I &= cx + dy \\ \text{suj. a} \quad & Ax + Dy = b \\ & x \geq 0 \text{ e inteiro}, y \geq 0 \end{aligned}$$

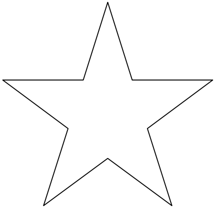
Definição:

- As restrições que declaram que as variáveis de decisão x como inteiras ou binárias designam-se por *Restrições de integralidade*.

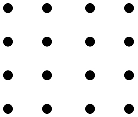
Domínio de PI é um conjunto não-convexo

Relembrar:

Teorema: O conjunto de soluções $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ de um problema de programação linear é um conjunto convexo.



Conjunto não convexo

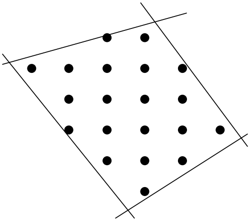


Conjunto não convexo

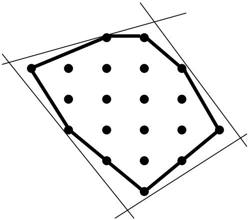
Um conjunto discreto de pontos (como ocorre nos Problemas de Programação Inteira) não pode ser representado apenas por um conjunto de restrições lineares.

Resolver Programação Inteira com Programação Linear

- Em Programação Linear, há uma caracterização do óptimo: o vértice é óptimo se o poliedro não tiver nenhum vértice adjacente melhor!
- Dificuldade: não é conhecida nenhuma "boa" caracterização das soluções óptimas do problema de Programação Inteira.



Conjunto de pontos inteiros que obedecem às restrições



Restrições que delimitam os pontos extremos inteiros

- As restrições (facetas) necessárias para construir o poliedro cujos vértices são pontos **inteiros** podem não ser todas conhecidas, e podem ser em número exponencial em relação à dimensão do espaço.

Algoritmo de planos de corte

Estratégia do método dos planos de corte:

- determinar a solução óptima do problema de programação linear;
- cortar partes do domínio em que não há soluções inteiras e reoptimizar, até obter uma solução inteira (que é óptima!).

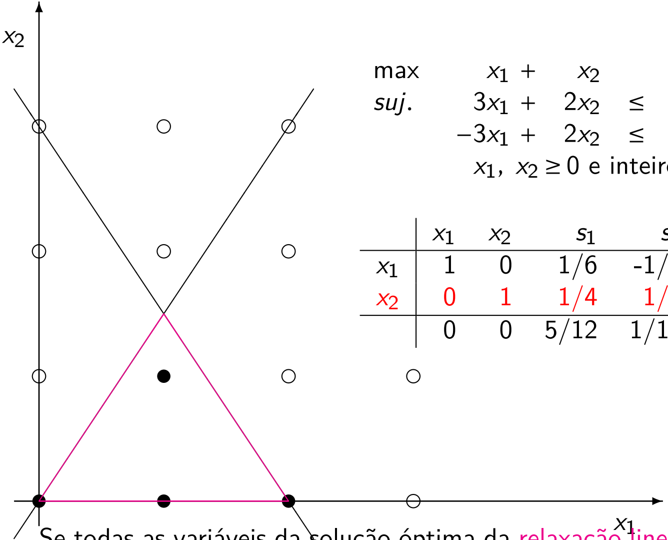
Algoritmo de planos de corte

- Optimizar *relaxação linear* $^{(*)}$
- Enquanto (solução não for inteira),
  - identificar um plano de corte
  - adicionar plano de corte ao conjunto de restrições
  - reoptimizar (usando o método simplex dual)

$^{(*)}$ Definição:

a *relaxação linear* do modelo de Prog. Inteira é o modelo de Prog. Linear que resulta de relaxar (retirar) as restrições de integralidade.

Exemplo: problema e solução óptima da relaxação linear



$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
suj. & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
 & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}}
\end{array}
$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2
	0	0	5/12	1/12	5/2

Se todas as variáveis da solução óptima da relaxação linear forem inteiras, essa solução é a solução óptima do problema inteiro (porquê?)

Plano de corte de Chvátal-Gomory

para problema de programação linear inteiro puro:

$$\begin{aligned} \max z_I &= cx \\ \text{suj. a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \text{ e inteiro} \end{aligned}$$

- todas as variáveis devem ser inteiras (as variáveis de folga devem ser inteiras se as variáveis de decisão tiverem de ser inteiras e a matriz A e o vector b forem inteiros).

Plano de corte de Chvátal-Gomory

- Dada uma solução básica não inteira:
  - $\mathscr{B} = \{x_{B_1}, \ldots, x_{B_i}, \ldots, x_{B_m}\}$: conjunto de variáveis básicas,
  - $\mathscr{N}$: conjunto de variáveis não básicas,
- existe uma variável básica x_{B_i} cujo valor é o número fraccionário b_i.
- A restrição relativa à variável básica x_{B_i}, retirada do quadro simplex óptimo, é:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in \mathscr{N}} a_{ij} x_j \quad = \quad b_i$$

- Dado que $x_j \geq 0, \ \forall j$, a seguinte restrição é válida:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in \mathscr{N}} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \quad \leq \quad b_i$$

- A função do lado esquerdo deve ter um valor inteiro.
- Portanto, se se arredondar para baixo o lado direito, de b_i para $\lfloor b_i \rfloor$, apenas se cortam soluções fraccionárias.
- O plano de corte de Chvátal-Gomory é:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in \mathscr{N}} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \quad \leq \quad \lfloor b_i \rfloor$$

- $\lfloor \cdot \rfloor$: operador arredondamento para baixo

... expresso em termos das variáveis não-básicas

- Plano de corte está expresso em termos de x_{B_i} e das variáveis não-básicas:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor a_{ij} \rfloor x_j \quad \leq \quad \lfloor b_i \rfloor \quad (1)$$

- Restrição relativa à variável básica x_{B_i} com valor fraccionário b_i:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij} x_j \quad = \quad b_i \qquad (2)$$

- Fazendo eliminação de Gauss ((2) - (1)) para eliminar x_{B_i} do plano de corte, o plano de corte fica expresso apenas em termos das variáveis não-básicas:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \quad \geq \quad b_i - \lfloor b_i \rfloor$$

- podendo ser inserido no quadro simplex mantendo a matriz identidade.

Exemplo

- Considere a seguinte restrição relativa à variável básica x_2 com valor fraccionário $3/2$ (sendo s_1 e s_2 variáveis não-básicas):

$$x_2 + 1/4\ s_1 + 1/4\ s_2 = 3/2$$

- Forma do plano de corte: $\sum_{j \in \mathcal{N}} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \geq b_i - \lfloor b_i \rfloor$

$$\begin{array}{lcccc} a_{2s_1} = 1/4 & \rightarrow & a_{2s_1} - \lfloor a_{2s_1} \rfloor & = & 1/4 - \lfloor 1/4 \rfloor = 1/4 \\ a_{2s_2} = 1/4 & \rightarrow & a_{2s_2} - \lfloor a_{2s_2} \rfloor & = & 1/4 - \lfloor 1/4 \rfloor = 1/4 \\ b_2 = 3/2 & \rightarrow & b_2 - \lfloor b_2 \rfloor & = & 3/2 - \lfloor 3/2 \rfloor = 1/2 \end{array}$$

- Plano de corte:

$$1/4\ s_1 + 1/4\ s_2 \quad \geq \quad 1/2$$

Operador arredondamento para baixo $\lfloor \cdot \rfloor$: exemplos

- Dado a_{ij},
- $\lfloor a_{ij} \rfloor$: característica (parte inteira)
- $(a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor)$: mantissa (parte decimal (sempre ≥ 0))

Valor a_{ij} positivo:

$$\begin{array}{lclcl}
a_{ij} = 1/3 & \rightarrow & \lfloor a_{ij} \rfloor & = & \lfloor 1/3 \rfloor = 0 \\
a_{ij} = 1/3 & \rightarrow & a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor & = & 1/3 - \lfloor 1/3 \rfloor = 1/3 \\
 & & & & \\
a_{ij} = 11/6 & \rightarrow & \lfloor a_{ij} \rfloor & = & \lfloor 11/6 \rfloor = 1 \\
a_{ij} = 11/6 & \rightarrow & a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor & = & 11/6 - \lfloor 11/6 \rfloor = 5/6
\end{array}$$

Valor a_{ij} negativo:

$$\begin{array}{lclcl}
a_{ij} = -2/3 & \rightarrow & \lfloor a_{ij} \rfloor & = & \lfloor -2/3 \rfloor = -1 \\
a_{ij} = -2/3 & \rightarrow & a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor & = & -2/3 - \lfloor -2/3 \rfloor = -2/3 - (-1) = 1/3 \\
 & & & & \\
a_{ij} = -11/6 & \rightarrow & \lfloor a_{ij} \rfloor & = & \lfloor -11/6 \rfloor = -2 \\
a_{ij} = -11/6 & \rightarrow & a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor & = & -11/6 - \lfloor -11/6 \rfloor = -11/6 - (-2) = 1/6
\end{array}$$

Exemplo: plano de corte derivado da linha de x_2

- Restrição relativa à variável básica x_2 :

$$x_2 + 1/4\ s_1 + 1/4\ s_2 = 3/2$$

- Forma do plano de corte: $\sum_{j \in \mathcal{N}} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \geq b_i - \lfloor b_i \rfloor$
- Plano de corte:

$$1/4\ s_1 + 1/4\ s_2 \quad \geq \quad 1/2$$

- Após a introdução de uma nova variável de folga, s_3, e sendo expresso como uma restrição do tipo $\leq$, é equivalente a:

$$-1/4\ s_1 - 1/4\ s_2 + s_3 \quad = \quad -1/2$$

- podendo ser inserido no quadro simplex mantendo a matriz identidade.

Exemplo: após inserção do primeiro plano de corte

- Quadro com plano de corte:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	1/6	-1/6	0	1
x_2	0	1	1/4	1/4	0	3/2
s_3	0	0	-1/4	-1/4	1	-1/2
	0	0	5/12	1/12	0	5/2

- Após a reoptimização do quadro, obtém-se:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	1/3	0	-2/3	4/3
x_2	0	1	0	0	1	1
s_2	0	0	1	1	-4	2
	0	0	1/3	0	1/3	7/3

- A solução ainda é fraccionária. É necessário inserir mais planos de corte.

Exemplo: plano de corte derivado da linha de x_1

- Restrição relativa à variável básica x_1 :

$$x_1 + 1/3\ s_1 - 2/3\ s_3 = 4/3$$

- Forma do plano de corte: $\sum_{j \in \mathcal{N}} (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor) x_j \geq b_i - \lfloor b_i \rfloor$

$$\begin{aligned} a_{1s_1} - \lfloor a_{1s_1} \rfloor &= 1/3 - \lfloor 1/3 \rfloor = 1/3 \\ a_{1s_3} - \lfloor a_{1s_3} \rfloor &= -2/3 - \lfloor -2/3 \rfloor = -2/3 - (-1) = 1/3 \\ b_1 - \lfloor b_1 \rfloor &= 4/3 - \lfloor 4/3 \rfloor = 1/3 \end{aligned}$$

- Plano de corte:

$$1/3\ s_1 + 1/3\ s_3 \geq 1/3$$

- Após a introdução de uma nova variável de folga, s_4, e sendo expresso como uma restrição do tipo $\leq$, é equivalente

$$-1/3\ s_1 - 1/3\ s_3 + s_4 = -1/3$$

Exemplo: após inserção do segundo plano de corte

- Quadro com plano de corte:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	1/3	0	-2/3	0	4/3
x_2	0	1	0	0	1	0	1
s_2	0	0	1	1	-4	0	2
s_4	0	0	-1/3	0	-1/3	1	-1/3
	0	0	1/3	0	1/3	0	7/3

- Após a reoptimização do quadro, obtém-se:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	0	0	-1	1	1
x_2	0	1	0	0	1	0	1
s_2	0	0	0	1	-5	3	1
s_1	0	0	1	0	1	-3	1
	0	0	0	0	0	1	2

- Solução óptima inteira.

Exemplo: planos de corte em termos das vars de decisão

- Substituindo os valores de s_1, s_2 e s_3, os planos de corte podem ser expressos em termos das variáveis de decisão do problema, x_1 e x_2 :
- Do quadro inicial, sabe-se que:
  $s_1 = 6 - 3x_1 - 2x_2$
  $s_2 = 0 + 3x_1 - 2x_2$
- Da equação derivada do primeiro plano de corte, sabe-se que:
  $s_3 = -1/2 + 1/4\ s_1 + 1/4\ s_2$
  $s_3 = -1/2 + 1/4\ (6 - 3x_1 - 2x_2) + 1/4\ (0 + 3x_1 - 2x_2)$
  $s_3 = 1 - x_2$

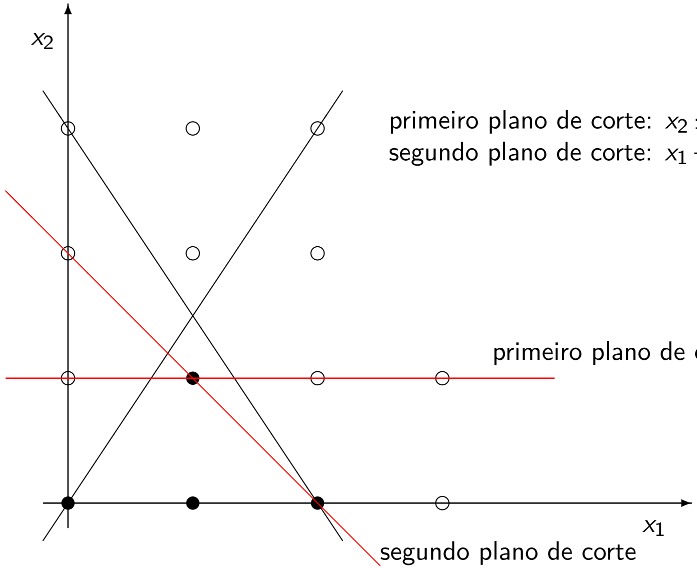
Primeiro plano de corte: $1/4\ s_1 + 1/4\ s_2 \geq 1/2$

- $1/4\ (6 - 3x_1 - 2x_2) + 1/4\ (0 + 3x_1 - 2x_2) \geq 1/2$
- $x_2 \leq 1$

Segundo plano de corte: $1/3\ s_1 + 1/3\ s_3 \geq 1/3$

- $1/3\ (6 - 3x_1 - 2x_2) + 1/3\ (1 - x_2) \geq 1/3$
- $x_1 + x_2 \leq 2$

Exemplo: planos de corte em termos das vars de decisão



primeiro plano de corte: $x_2 \leq 1$
segundo plano de corte: $x_1 + x_2 \leq 2$

Notas

- Pode provar-se que o método converge para o óptimo inteiro após inserir um número finito de planos de corte [G63].
- No pior caso, pode ser necessário um número de planos de corte exponencialmente grande em relação ao número de variáveis de decisão (Problema de Programação Inteira é NP-completo).
- Tipicamente, à medida que se adicionam planos de corte, as porções fraccionárias eliminadas são progressivamente menores.
- Na prática, os *solvers* de PI tipicamente usam a seguinte metodologia:
    - inserir planos de corte enquanto o corte é significativo;
    - usar depois o método de partição e avaliação [vamos ver].

Selecção da linha para gerar o plano de corte

- Seleccionar linha com coeficiente do lado direito com maior parte fraccionária:

$$\text{linha } k : f_k = \max_i \{f_i\}, \text{ sendo } f_i = b_i - \lfloor b_i \rfloor$$

- Em caso de empate, seleccionar:

$$\text{linha } k : \alpha_k = \max_i \{\alpha_i\}, \text{ sendo } \alpha_i = f_i / \sum f_{ij}, \text{ sendo } f_{ij} = (a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor)$$

Planos de Corte Mistos

para problema de programação linear inteiro misto:

$$
\begin{aligned}
\max z_I &= cx + dy \\
\text{suj. a} \quad & Ax + Dy = b \\
& x \geq 0 \text{ e inteiro}, y \geq 0
\end{aligned}
$$

- algumas variáveis devem ser inteiras, mas há outras que podem ser fraccionárias.

Plano de corte misto

- $\mathscr{B} = \{x_{B_1}, \dots, x_{B_i}, \dots, x_{B_m}\}$: conjunto de variáveis básicas
- $\mathscr{N}$: conjunto de variáveis não básicas
- A partir de uma restrição da variável básica x_{B_i} do quadro simplex:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in \mathscr{N}} a_{ij} x_j \quad = \quad b_i,$$

- o plano de corte misto tem a forma:

$$\sum_{j \in \mathscr{N}} d_{ij} x_j \quad \geq \quad f_i$$

sendo

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{, se} \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad x_j \text{ puder ser fraccionário} \\ (f_i/(1-f_i))(-a_{ij}) & \text{, se} \quad a_{ij} < 0 \quad \text{e} \quad x_j \text{ puder ser fraccionário} \\ f_{ij} & \text{, se} \quad f_{ij} \leq f_i \quad \text{e} \quad x_j \text{ tiver que ser inteiro} \\ (f_i/(1-f_i))(1-f_{ij}) & \text{, se} \quad f_{ij} > f_i \quad \text{e} \quad x_j \text{ tiver que ser inteiro} \end{cases}$$

- sendo $f_i = b_i - \lfloor b_i \rfloor$

Conclusão

- Os planos de corte são válidos para qualquer problema de programação inteira.
- Há também planos de corte para problemas específicos (*e.g.*, Travelling Salesman Problem (TSP), Generalized Assignment Problem (GAP), Bin Packing Problem (BPP), Knapsack Problem (KP)), que usam informação sobre a estrutura do problema.
- Estes planos de corte são estudados em *Teoria poliédrica.*

Fim