

# Programação Linear - definição matricial

## Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho  
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas  
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

3 de novembro de 2020

# Programação Linear - definição matricial

## antes

- O algoritmo simplex foi implementado usando quadros.

## Guião

- As operações realizadas podem ser descritas usando matrizes.
- A definição matricial das operações oferece uma nova perspectiva, que permite conceber operações mais complexas, como:
- mudar directamente de um quadro inicial para qualquer outro quadro final, efectuando simultaneamente um conjunto dos pivôs; ou
- implementar uma forma matricial do algoritmo simplex, muito mais eficiente do que a resolução usando quadros.

## depois

- A definição matricial será usada em análise de sensibilidade.

- Sistema de equações e soluções básicas
- Operação matricial de mudança de base
- Forma matricial do algoritmo simplex

# Problema de PL e representação matricial

Geral	Exemplo																																																			
$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & Ax + Is = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max \quad & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{suj.} \quad & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \quad \quad + s_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$																																																			
<table><tr><td><math>A</math></td><td><math>I</math></td><td><math>b</math></td></tr><tr><td><math>-c</math></td><td><math>\tilde{0}</math></td><td><math>0</math></td></tr></table>	$A$	$I$	$b$	$-c$	$\tilde{0}$	$0$	<table><tr><td></td><td><math>z</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>x_3</math></td><td><math>s_1</math></td><td><math>s_2</math></td><td><math>s_3</math></td><td></td></tr><tr><td><math>s_1</math></td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>40</td></tr><tr><td><math>s_2</math></td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>150</td></tr><tr><td><math>s_3</math></td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr><tr><td><math>z</math></td><td>1</td><td>-30</td><td>-20</td><td>-10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$		$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40	$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150	$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20	$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0
$A$	$I$	$b$																																																		
$-c$	$\tilde{0}$	$0$																																																		
	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$																																													
$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40																																												
$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150																																												
$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20																																												
$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0																																												

# Sistema de equações e soluções básicas

- Dada uma qualquer escolha de variáveis básicas, o problema  $\max z = cx$ , suj. a  $Ax = b, x \geq 0$  é equivalente a:

$$\begin{array}{lll} \max z & = & c_B x_B + c_N x_N \\ \text{suj. a} & & Bx_B + Nx_N = b \\ & & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

- em que o vector de variáveis  $x$  é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} x_B \in \mathbb{R}_+^{m \times 1} & : \text{ subvector de } x \text{ com as variáveis básicas,} \\ x_N \in \mathbb{R}_+^{(n-m) \times 1} & : \text{ subvector de } x \text{ com as variáveis não-básicas,} \end{array}$$

- o vector de custos  $c$  é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} c_B \in \mathbb{R}^{1 \times m} & : \text{ subvector de } c \text{ com os custos das variáveis básicas,} \\ c_N \in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)} & : \text{ subvector de } c \text{ com os custos das variáveis não-básicas,} \end{array}$$

- a matriz  $A$  é partida em duas submatrizes:

$$\begin{array}{ll} B \in \mathbb{R}^{m \times m} & : \text{ submatriz de } A \text{ das variáveis básicas (não-singular),} \\ N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} & : \text{ submatriz de } A \text{ das variáveis não-básicas.} \end{array}$$

## Resolve-se o sistema de equações em ordem a $x_B \dots$

- pré-multiplicando o sistema de equações por  $B^{-1}$ :

$$\begin{aligned} B^{-1}(Bx_B + Nx_N) &= B^{-1}b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

- Substituindo  $x_B$  na função objectivo, obtém-se:

$$\begin{aligned} z &= c_B x_B + c_N x_N = \\ &= c_B (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = \\ &= c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N \end{aligned}$$

Quando  $\tilde{x}_N = 0$ , a solução do sistema de equações é a *solução básica*  $\tilde{x}$  :

- $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$
- que tem um valor de função objectivo  $\tilde{z} = c_B B^{-1}b = c_B \tilde{x}_B$

- Se  $\tilde{x}_B \geq 0$  então  $\tilde{x}$  é uma *solução básica admissível*.

## Exemplo 1: um pivô ...

- para uma base adjacente, entrando  $x_1$  na base, e saindo  $s_3$ ,

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40
$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150
$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20
$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- equivale a resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas  $s_1, s_2$  e  $x_1$ ; as matrizes  $B, N$  e os vectores  $c_B$  e  $c_N$  são:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & x_1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad N = \begin{array}{c|ccc} & x_2 & x_3 & s_3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 30 \\ \hline \end{array} \quad c_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 20 & 10 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- Notar que as colunas da matriz  $B$  e do vector  $c_B$  estão ordenadas na mesma sequência das variáveis básicas no quadro seguinte.

## Exemplo 2: vários pivôs simultaneamente ...

- para uma base não adjacente, que vamos resolver com detalhe.

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40
$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150
$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20
$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- Para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas  $x_3, s_2$  e  $x_2$ , as matrizes  $B, N$  e os vectores  $c_B$  e  $c_N$  são:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad N = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & s_1 & s_3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 0 & 20 \\ \hline \end{array} \quad c_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 30 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- De novo, as colunas da matriz  $B$  e do vector  $c_B$  estão ordenadas na sequência pretendida para as variáveis básicas no quadro final.



## Exemplo 2: cálculo de $B^{-1}$ e $c_B B^{-1}$

- A matriz  $B^{-1}$  e o vector  $c_B B^{-1}$  aparecem várias vezes nos cálculos:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline & 2 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad B^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \hline 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$$c_B = \begin{array}{|ccc|} \hline 10 & 0 & 20 \\ \hline \end{array} \quad c_B B^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \hline 5 & 0 & 15 \\ \hline \end{array}$$

### Perspectiva

- A matriz  $B^{-1}$  pode ser vista como a matriz que guarda informação sobre todos os pivôs efectuados para fazer entrar na base as variáveis básicas pretendidas.

## Exemplo 2: cálculo da solução, determinando $\tilde{x}_B$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

- A solução é admissível:  $\tilde{x}_B$  têm coordenadas não-negativas.
- Os valores das variáveis básicas são:  $\tilde{x}_B = (x_3, s_2, x_2)^T = (10, 100, 20)^T$
- Os valores das vars não-básicas são:  $\tilde{x}_N = (x_1, s_1, s_3)^T = (0, 0, 0)^T$
- $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3)^T = (0, 20, 10, 0, 100, 0)^T$

## Exemplo 2: cálculo do valor da solução, $\tilde{z}$

$$z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N$$

$$z = [5 \ 0 \ 15] * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} + \left( [30 \ 0 \ 0] - [5 \ 0 \ 15] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} =$$

$$z = 500 + [-5 \ -5 \ -15] * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} =$$

- O valor da função objectivo da solução obtida,  $\tilde{z}$ , é 500.
- A solução também é óptima para o problema de maximização (dado que  $z = 500 - 5x_1 - 5s_1 - 15s_3$ ).

## Exemplo 2: o quadro inicial e o quadro final

- A informação dos diapositivos anteriores pode ser usada para construir o quadro final, reordenando as colunas.

quadro inicial		$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40
	$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150
	$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20
	$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

quadro final		$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$x_3$	0	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	10
	$s_2$	0	$-3/2$	0	0	$-1/2$	1	$-3/2$	100
	$x_2$	0	2	1	0	0	0	1	20
	$z$	1	5	0	0	5	0	15	500

- De seguida vamos representar estas operações matriciais no quadro simplex.
- Iremos usá-las em Análise de sensibilidade, também designada por Análise pós-optimização.
- Nesse contexto, dispomos do quadro inicial e do quadro óptimo, e
- podemos estudar os efeitos que uma alteração de dados no quadro inicial tem sobre o quadro óptimo,
- usando a matriz que opera a mudança directa do quadro inicial para o quadro óptimo.

# Operação matricial de mudança de base - i

- No quadro simplex inicial, o sistema de equações:

$$Ax + Is = [A \mid I] * [x \mid s]^T = b$$

está resolvido em ordem às variáveis  $s$ .

- Para obter um quadro simplex final em que as variáveis básicas sejam as variáveis do conjunto  $x_B$ , temos de identificar:
  - a matriz  $B$ , que é a submatriz de  $[A \mid I]$  com as colunas das variáveis básicas do conjunto  $x_B$ , e
  - o vector  $c_B$ , com os coeficientes do vector  $c$  das mesmas variáveis.

A matriz que opera a mudança do quadro inicial para o final é:

$B^{-1}$	$\tilde{0}$
$c_B B^{-1}$	1

$$\in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$$

# Operação matricial de mudança de base - ii

## Prova:

- No quadro simplex final, as variáveis básicas são as pretendidas, porque:
  - a matriz identidade  $I$  aparece nas posições da matriz  $B$ , e
  - o vector nulo aparece na linha da função objectivo.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline -c_B \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline I \\ \hline \tilde{0} \\ \hline \end{array}$$

- A regra de multiplicação de matrizes partidas (em submatrizes) é semelhante à da multiplicação de matrizes.

# Operação matricial de mudança de base - iii

- O Quadro Final obtém-se pré-multiplicando o Quadro Inicial pela matriz que opera a mudança de base:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \\ \hline \end{array} =$$
$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline \end{array}$$

- Nota: tal como vimos no diapositivo anterior, nas posições que a matriz  $B$  ocupa no Quadro Inicial, aparecem as colunas da matriz identidade no Quadro Final.



## O mesmo Exemplo 2

- Dado o Quadro Inicial:

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40
$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150
$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20
$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas  $x_3, s_2$  e  $x_2$ , as matrizes  $B, N$  e os vectores  $c_B$  e  $c_N$  são:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad B^{-1} = \begin{array}{c|ccc} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{c|ccc} 10 & 0 & 20 \end{array} \quad c_B B^{-1} = \begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 15 \end{array}$$

# Exemplo 2

1/2	0	-1/2	0
-1/2	1	-3/2	0
0	0	1	0
5	0	15	1

\*

	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>		
s <sub>1</sub>	0	1	1	2	1	0	0	40	=
s <sub>2</sub>	0	2	2	1	0	1	0	150	
s <sub>3</sub>	0	2	1	0	0	0	1	20	
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0	

=

	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	
x <sub>3</sub>	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s <sub>2</sub>	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x <sub>2</sub>	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

\*

$B^{-1}$	$\tilde{0}$
$c_B B^{-1}$	1

=

$A$	$I$	$b$
$-c$	$\tilde{0}$	0
$B^{-1}A$	$B^{-1}$	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

- No exemplo, o quadro final é a solução óptima, porque eu escolhi as variáveis básicas que sabia de antemão serem as da solução óptima.
- No caso geral, quando se escolhe um conjunto de variáveis básicas:
  - se algum elemento do vector  $B^{-1}b$  for negativo, obtém-se um vértice não-admissível;
  - se algum elemento dos vectores  $c_B B^{-1}$  ou  $c_B B^{-1}A - c$  for negativo, obtém-se um vértice que não é óptimo (prob. de maximização).
- No contexto de análise de sensibilidade, a matriz  $B^{-1}$  e o vector  $c_B B^{-1}$  aparecem no quadro óptimo, permitindo construir a matriz que opera a mudança de base.
- Está portanto disponível toda a informação necessária para recalculer o quadro óptimo para determinar os efeitos de uma alteração, no quadro inicial, de um elemento dos vectores  $b$  ou  $c$ .

# Forma matricial do algoritmo simplex

## Ideia chave:

- Cada matriz  $B^{-1}$  está associada a uma base (i.e., quadro simplex).
- O algoritmo é implementado actualizando apenas a matriz  $B^{-1}$ ,
- porque a matriz  $B^{-1}$  e as matrizes do quadro inicial  $(A, b, c)$  são suficientes para calcular todos os elementos do quadro simplex.

## Mas não é preciso calculá-los todos. Para determinar o elemento pivô,

- só é preciso calcular a linha da função objectivo, para identificar a coluna pivô, e
  - a coluna do lado direito e a coluna pivô, para identificar a linha pivô.
- 
- Não é necessário calcular nenhuma das outras colunas.

# Algoritmo simplex primal na forma matricial

- 1 /\* Calcular custos reduzidos das variáveis não-básicas \*/  
Calcular  $c_B B^{-1} A_j - c_j, \quad \forall j$
- 2 /\* Testar optimalidade (prob. de maximização) \*/  
Se  $c_B B^{-1} A_j - c_j \geq 0, \forall j$ , a solução é ótima. Senão,
- 3 /\* Seleccionar coluna pivô  $k$  \*/

$$k = \operatorname{argmin}_{j \in N} \{c_B B^{-1} A_j - c_j\}$$

- 4 Calcular coluna pivô,  $B^{-1} A_k$
- 5 Se todos os elementos de  $B^{-1} A_k \leq 0$ , a solução é ilimitada. Senão,
- 6 Calcular coluna do lado direito,  $B^{-1} b$ , e seleccionar linha pivô  $p$

$$p = \operatorname{argmin}_i \{(B^{-1} b)_i / (B^{-1} A_k)_i\}.$$

- 7 Actualizar a matriz  $B^{-1}$ , e voltar ao passo 1.

Designam-se por *Custos reduzidos* de uma variável os elementos do vector  $-(c - c_B B^{-1} A)$ . Os coeficientes de custo inicial são reduzidos de uma quantidade  $c_B B^{-1} A$ . Notar que  $c_B B^{-1} A$  é um caso particular quando  $A_j$  é uma coluna das variáveis de folga.

# Implementação: alguns pormenores

## Adicionalmente

- A matriz  $A$  é tipicamente uma matriz dispersa (esparsa). A percentagem de elementos não-zero de  $A$  pode ser 2% ou 5%.
  - Há estruturas de dados para representar matrizes dispersas que permitem grandes economias de espaço.
  - A multiplicação de matrizes dispersas só envolve os cálculos com os elementos diferentes de 0.
- 
- A matriz  $B^{-1}$  é guardada como o produto de uma matriz triangular inferior (*lower*) e uma matriz triangular superior (*upper*), i.e., uma factorização LU.
  - Isso permite a sua actualização eficiente em cada pivô.
- 
- Os *solvers* de programação linear usam a forma matricial.

- Uma matriz é apenas uma forma de representar e condensar informação.
- Mas a definição matricial oferece uma nova perspectiva das operações efectuadas no método simplex, o que permite ver a forma de realizar operações mais complexas, como a mudança entre bases não adjacentes;
- também permite conceber uma implementação do algoritmo simplex na forma matricial com grandes economias de cálculo, que possibilita a resolução de problemas de muito grande dimensão.





# Exemplo: a base $B$ e o sistema de equações original

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$			$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$		
$x_3$	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10		$s_1$	0	1	1	2	1	0	0	40
$s_2$	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100		$s_2$	0	2	2	1	0	1	0	150
$x_2$	0	2	1	0	0	0	1	20		$s_3$	0	2	1	0	0	0	1	20
$z$	1	5	0	0	5	0	15	500		$z$	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$B x_B = b - N x_N$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_3 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

# Coordenadas de um vector na base $B$

- Qualquer vector de um espaço vectorial pode ser representado como uma combinação linear dos vectores da base.
- Exemplo: os elementos do vector  $B^{-1}b$  são as coordenadas do vector  $b$  em relação à base  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ .

$$\begin{aligned} b &= B * (B^{-1}b) \\ \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} &= \begin{matrix} x_3 & s_2 & x_2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} * \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} &= 10 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ b &= 10 \vec{v}_1 + 100 \vec{v}_2 + 20 \vec{v}_3 \end{aligned}$$

- ou seja, é a solução  $x_B = B^{-1}b = (x_3, s_2, x_2)^T = (10, 100, 20)^T$ .

$B^{-1}A$	$B^{-1}$	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

## Definição

- Os coeficientes da linha da função objectivo relativos às variáveis de decisão são iguais a  $-(c - c_B B^{-1}A)$ .
- Os valores dos elementos do vector custo inicial são reduzidos de uma quantidade  $c_B B^{-1}A$ .

# Operações com matrizes: exemplos

- Soma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+10 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \end{bmatrix}$$

# Fim