Programação Linear - método simplex

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

21 de outubro de 2020

Programação Linear - método simplex

antes

- Existe sempre um vértice que é uma solução óptima do problema.(*)

Guião

- As soluções básicas do sistema de equações (vértices) podem ser representadas em quadros.
- O algoritmo Simplex explora uma sequência de vértices admissíveis.
- Em cada vértice, é necessário avaliar se o vértice actual é o óptimo, e se não for, decidir qual o vértice adjacente seguinte.
- Uma operação fundamental do algoritmo é o *pivô* (a mudança de um vértice para um vértice adjacente).
- O método algébrico para efectuar o pivô é a eliminação de Gauss.

depois

- Há situações particulares que serão analisadas depois.

(*) - neste conjunto de diapositivos, vamos assumir que existe pelo menos uma solução admissível (*i.e.*, o problema não é impossível), que a solução óptima não é ilimitada e que não há vértices degenerados [veremos depois].

Conteúdo

- Representação de vértices num quadro: o quadro simplex
- Algoritmo simplex
  - coluna pivô: teste de optimalidade
  - linha pivô: vértice admissível adjacente
- Resolução de um Exemplo
- Apêndices
  - Referência à eliminação de Gauss

Lembrete

Quando nos movemos ao longo de uma aresta, desde um vértice,

os valores das variáveis alteram-se do seguinte modo:

- Variáveis não-básicas:
  - há uma **única** variável não-básica cujo valor aumenta;
  - as restantes variáveis não-básicas permanecem nulas.
- Variáveis básicas:
  - alteram-se de acordo com o sistema de equações.

Dois vértices são adjacentes, se houver apenas a troca de 2 variáveis:

- uma variável não-básica num vértice é básica no vértice adjacente;
- uma variável básica num vértice é não-básica no vértice adjacente.

Cada *quadro simplex* apresenta:

- o sistema de m equações das restrições resolvido em ordem a um conjunto de variáveis básicas, *i.e.*,
- uma solução básica do sistema de equações (associando valores nulos às variáveis não-básicas), *i.e.*,
- um vértice do poliedro.

Além disso, apresenta:

- a equação da função objectivo, na última linha.

nota:

- A função objectivo $z = 12x_1 + 10x_2$ é representada como:

$$z - 12x_1 - 10x_2 = 0$$

Exemplo

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max z & & & & & & & & & & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & & & = & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & & & = & 80 \\
 & 1x_1 & & & & & & +1s_3 & & = & 30 \\
z & -12x_1 & - & 10x_2 & & & & & & = & 0 \\
 & & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- As m variáveis básicas e a f. obj. são identificadas na 1.ª coluna.
- Os respectivos valores aparecem na última coluna (lado direito).
- As restantes $(n - m)$ variáveis não-básicas têm valor 0.

O quadro simplex tem uma matriz identidade $I_{m+1,m+1}$ formada:

- pelas m colunas das variáveis básicas, e
- pela coluna de z, a variável que representa a função objectivo.

A matriz identidade do quadro simplex: necessidade

Quadro simplex deve ter sempre uma matriz identidade. Só assim é que:

- cada equação mostra como variam:
  - cada variável básica e
  - a função objectivo

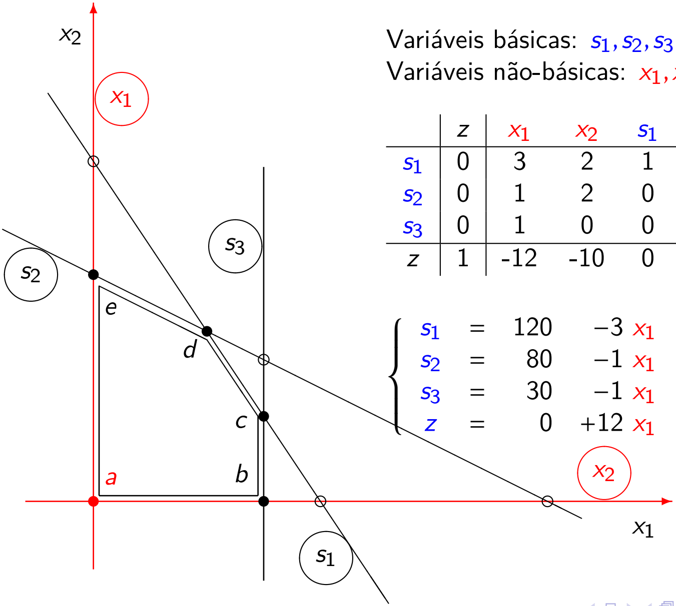
  em função apenas das variáveis não-básicas;
- se podem identificar as decisões correctas no algoritmo simplex.

Exemplo: Variáveis básicas: $x_B = (s_1, s_2, s_3)^\top$
Variáveis não-básicas: $x_N = (x_1, x_2)^\top$

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

Vértice $a : (x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top$

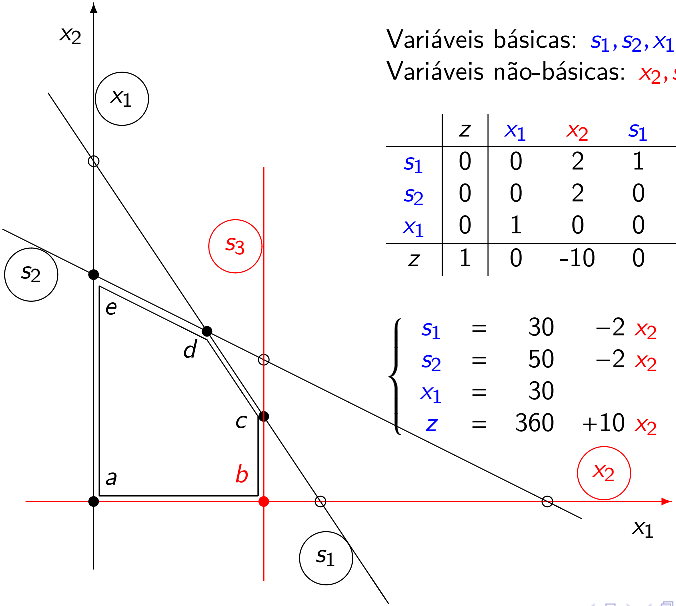


Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3
Variáveis não-básicas: x_1, x_2

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

Vértice $b : (x_1, x_2)^\top = (30, 0)^\top$



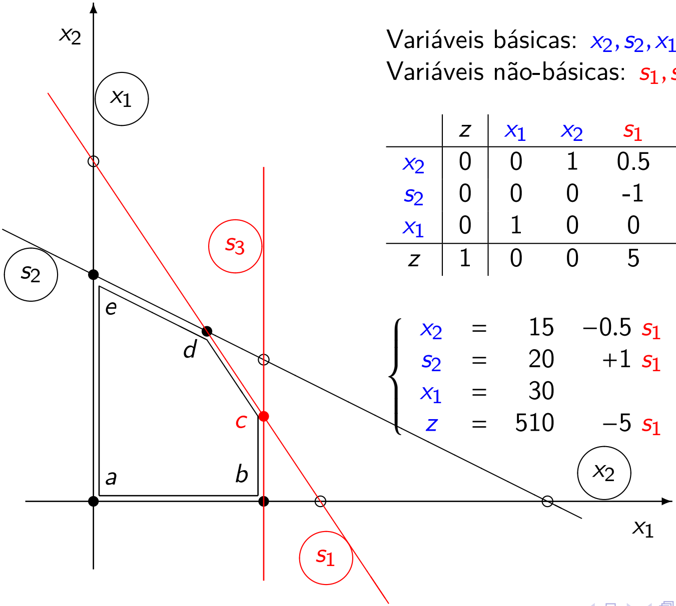
Variáveis básicas: s_1, s_2, x_1

Variáveis não-básicas: x_2, s_3

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

$$\left\{ \begin{array}{lcrrr} s_1 & = & 30 & -2\ x_2 & +3\ s_3 \\ s_2 & = & 50 & -2\ x_2 & +1\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \\ z & = & 360 & +10\ x_2 & -12\ s_3 \end{array} \right.$$

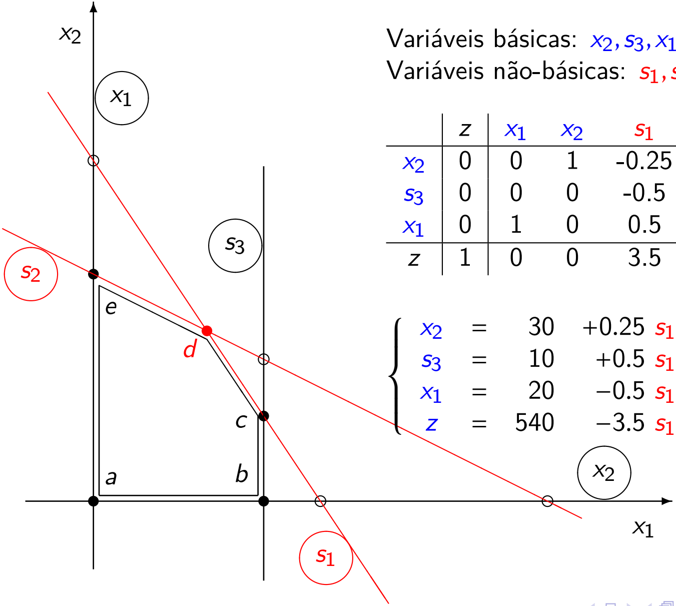
Vértice $c: (x_1, x_2)^\top = (30, 15)^\top$



Variáveis básicas: x_2, s_2, x_1
Variáveis não-básicas: s_1, s_3

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5\, s_1 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 + 1\, s_1 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \\ z = 510 - 5\, s_1 + 3\, s_3 \end{cases}$$



Variáveis básicas: x_2, s_3, x_1
Variáveis não-básicas: s_1, s_2

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

$$\begin{cases} x_2 = 30 + 0.25\, s_1 - 0.75\, s_2 \\ s_3 = 10 + 0.5\, s_1 - 0.5\, s_2 \\ x_1 = 20 - 0.5\, s_1 + 0.5\, s_2 \\ z = 540 - 3.5\, s_1 - 1.5\, s_2 \end{cases}$$

Método simplex

Método simplex

- Um *simplex* é um poliedro formado por um dado vértice e n vértices adjacentes. É o poliedro mais simples no espaço a n dimensões.
- O método simplex dá origem a um algoritmo que percorre uma sequência de vértices admissíveis até atingir a solução óptima.

Algoritmo Simplex (informal)

- seleccionar um vértice admissível inicial
- enquanto (existir um vértice admissível adjacente melhor)
  mudar para vértice admissível adjacente melhor

Operações fundamentais do algoritmo simplex:

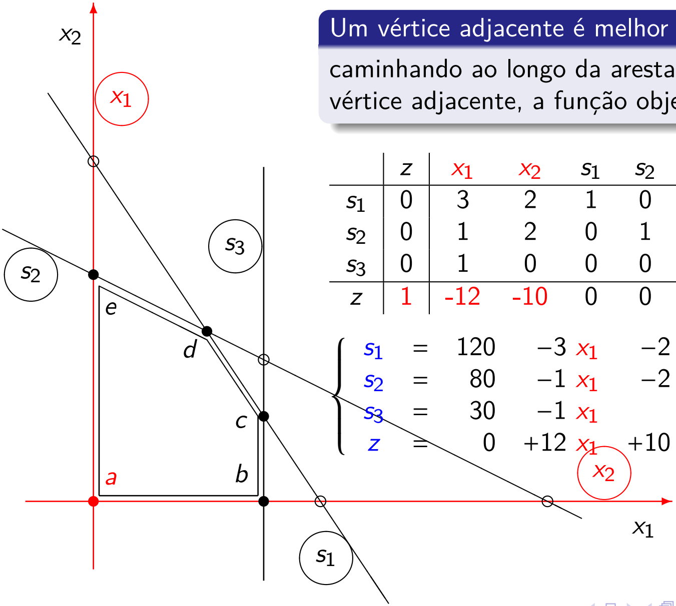
1. teste de optimalidade: existe algum vértice admissível adjacente ao vértice actual com melhor valor de função objectivo?
2. pivô: mudança de uma base (vértice) para uma base adjacente.

Selecção do elemento pivô no algoritmo simplex

- Efectuar um pivô traduz-se em reescrever o sistema de equações, resolvendo-o em ordem a um novo conjunto de variáveis básicas, o que se faz usando *eliminação de Gauss*.
- Na inversão de matrizes ou na resolução de sistemas de equações, há regras para seleccionar o *elemento pivô* (cruzamento da *coluna pivô* com a *linha pivô*).

No algoritmo simplex, a regra de selecção da:

1. *coluna pivô* (variável não-básica que entra na base) visa mudar para um vértice melhor;
2. *linha pivô* (variável básica que sai da base) assegura que o próximo vértice é admissível.



Um vértice adjacente é melhor se:

caminhando ao longo da aresta, no sentido do vértice adjacente, a função objectivo melhora.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \\ s_2 = 80 - 1x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \\ z = 0 + 12x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

Coluna pivô: teste de optimalidade no quadro simplex

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- A linha da função objectivo é a equação:

$$z - 12x_1 - 10x_2 = 0.$$

- Aresta $\overline{ab}$: quando x_1 aumenta (mantendo $x_2 = 0$), $\quad \partial z / \partial x_1 = 12.$
- Aresta $\overline{ae}$: quando x_2 aumenta (mantendo $x_1 = 0$), $\quad \partial z / \partial x_2 = 10.$

- Em ambos os casos, o valor da função objectivo z aumenta: o vértice a não é o vértice óptimo.

Coluna pivô: regra de selecção

- *Regra de Dantzig:* seleccionar a variável não-básica com maior variação da função objectivo por unidade de incremento da variável não-básica ao longo da aresta, *i.e.*:

A coluna pivô (da variável não-básica a entrar na base) é:

- a coluna com o coeficiente mais negativo da linha da função objectivo, em problemas de maximização.
- a coluna com o coeficiente mais positivo da linha da função objectivo, em problemas de minimização.

- Esta escolha visa atingir a solução óptima mais rapidamente.
- Em caso de empate, a escolha é arbitrária (ou desempata-se seleccionando a aresta que conduz ao vértice adjacente com melhor valor da função objectivo).

- há outras regras como: *Devex rule*, *partial pricing*, *nested pricing*.

Coluna pivô: e se não existir ...

Caracterização algébrica: uma solução é óptima:

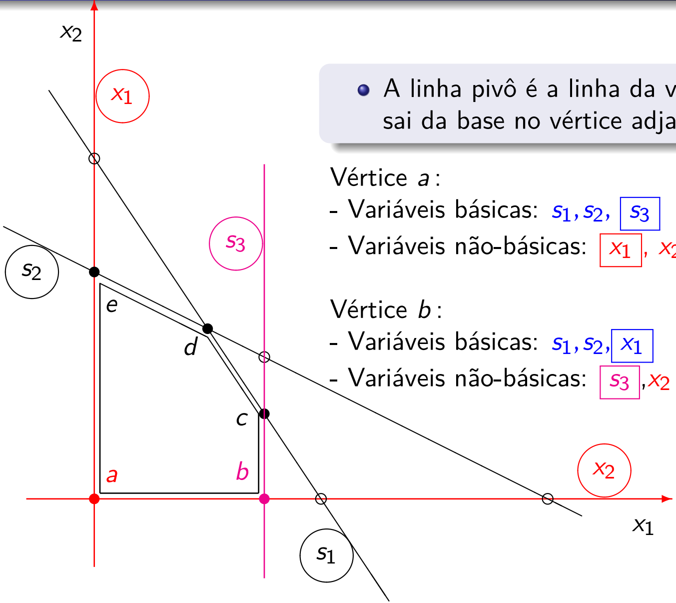
- se não existir nenhum coeficiente negativo na linha da função objectivo, em problemas de maximização.
- se não existir nenhum coeficiente positivo na linha da função objectivo, em problemas de minimização.

- Exemplo: $z + 3.5\ s_1 \ + \ 1.5\ s_2 \ = \ 540$ (problema de maximização)

- quando s_1 aumenta (mantendo $s_2 = 0$), $\quad \partial z / \partial s_1 = -3.5$
- quando s_2 aumenta (mantendo $s_1 = 0$), $\quad \partial z / \partial s_2 = -1.5$
- Em ambos os casos, a função objectivo z diminui.
- (o mesmo acontece se s_1 e s_2 aumentarem ambas; são iguais a 0, e apenas podem aumentar).

Ver caracterização geométrica

Linha pivô: pivô do vértice $a \rightarrow$ vértice b



- A linha pivô é a linha da variável básica que sai da base no vértice adjacente.

Vértice a:

- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{s_3}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{x_1}, x_2$ (iguais a 0)

Vértice b:

- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{x_1}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{s_3}, x_2$ (iguais a 0)

- Cada elemento da coluna pivô indica a variação do valor de uma variável básica quando se caminha ao longo da aresta.

- Exemplo:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- Quando x_1 aumenta (e $\mathbf{x_2}$ **se mantém** $\mathbf{= 0}$), o sistema de equações que descreve a variação das variáveis básicas em função de x_1 é:

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 \\ s_2 = 80 - 1x_1 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \end{cases}$$

Ver mais

Linha pivô: variável que sai da base

- É aquela que, ao decrescer, atinge primeiro o valor zero quando a variável não-básica aumenta.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

$$\begin{cases} s_1 = 120 - 3x_1 \\ s_2 = 80 - 1x_1 \\ s_3 = 30 - 1x_1 \end{cases}$$

nota: o elemento pivô é sempre **positivo**, porque, se o coeficiente for:

- **nulo**, a variável básica **mantém o valor** (*i.e.*, mantém-se ≥ 0);
- **negativo**, a variável básica **aumenta** (*i.e.*, mantém-se ≥ 0);

- nota: as coordenadas do vértice adjacente $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Linha pivô: linha da *menor razão positiva*

- **razão** entre o coef. do lado direito e o coef. da coluna pivô

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
s_1	0	3	2	1	0	0	120	$120/3 = 40$
s_2	0	1	2	0	1	0	80	$80/1 = 80$
s_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30	$30/1 = 30$
z	1	-12	-10	0	0	0	0	

Exemplo: a *menor razão positiva* é 30

- Coluna pivô: coluna de x_1 (entra na base, e atinge o valor 30).
- Linha pivô: linha de s_3 (atinge o valor 0, e torna-se não-básica).

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0		1	0		
s_2	0	0		0	1		
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0		0	0		

Linha pivô: regra de selecção

Dada uma coluna pivô, a linha pivô (da variável básica que sai da base):

- é a linha com **menor razão positiva**.

clarificação:

- **positiva** significa que o coeficiente da coluna pivô deve ser > 0.
- A **menor razão** pode ser 0, se o lado direito for 0.

- Se não existir um coeficiente da coluna pivô > 0, a solução óptima é ilimitada [veremos depois].
- Em caso de empate, o próximo vértice é degenerado [veremos depois].

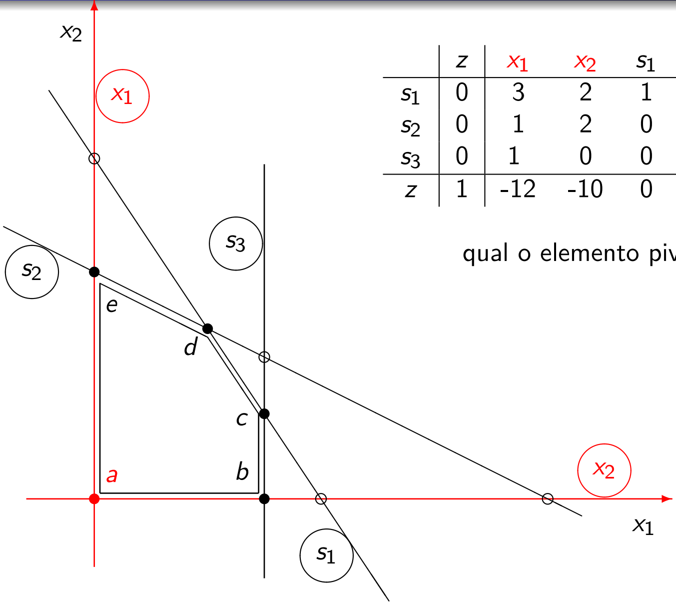
Algoritmo simplex (problema de maximização)

- Selecção de um vértice admissível inicial
  - Se não existir, problema é impossível [veremos depois]
- Repetir
  - Selecção da coluna pivô:
    - Coeficiente mais negativo da linha da função objectivo
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.<0, solução óptima.
  - Selecção da linha pivô:
    - Menor razão (lado direito/coluna pivô) positiva (coef.col.>0)
    - (em caso de empate, o próximo vértice é degenerado) [veremos depois]
    - Se não existir coef.col.>0, solução óptima é ilimitada [veremos depois]
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

Resolução do Exemplo

- Vamos apenas fazer o teste de optimalidade de cada quadro e identificar o elemento pivô.
- Não serão apresentadas as operações do método de eliminação de Gauss.
- No Apêndice, mostra-se como as efectuar, quer manuseando linhas, quer fazendo cálculos elemento a elemento. Ver Mais

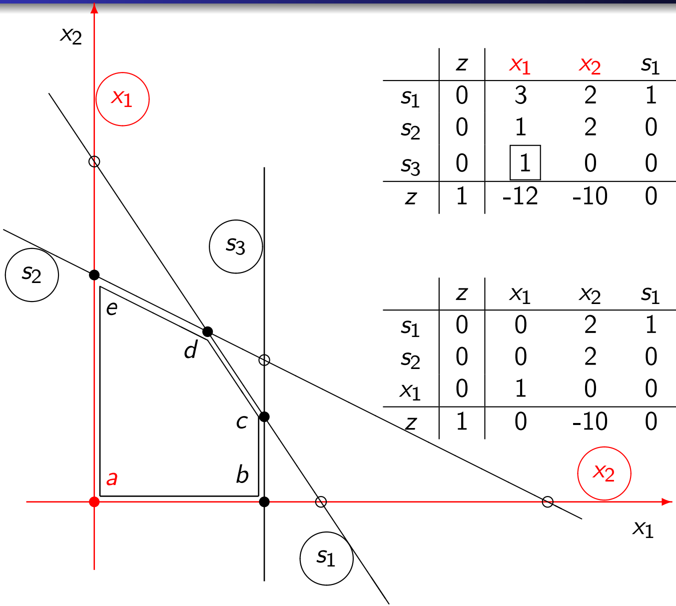
Vértice a (vértice admissível inicial)



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

qual o elemento pivô?

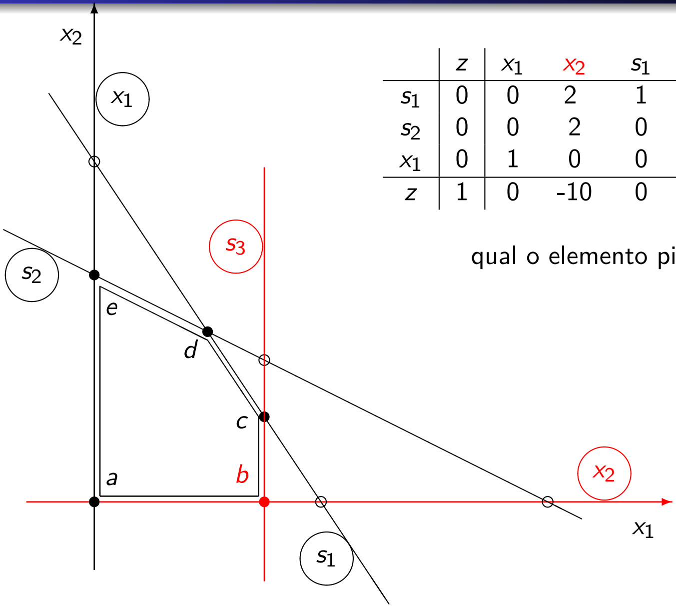
Vértice a $\longrightarrow$ vértice b



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

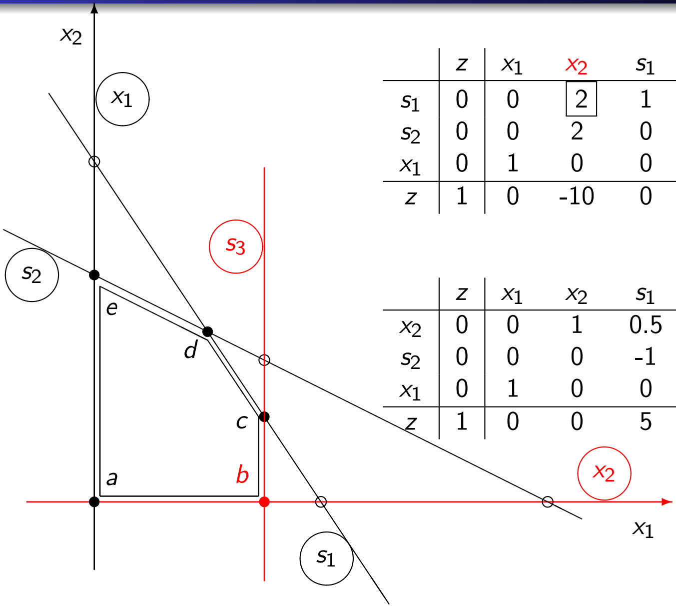
Vértice b



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

qual o elemento pivô?

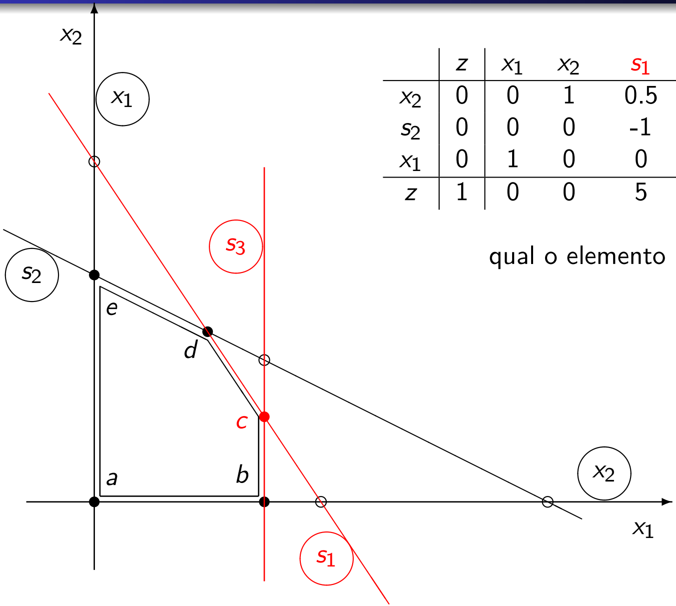
Vértice b $\longrightarrow$ vértice c



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	$\boxed{2}$	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

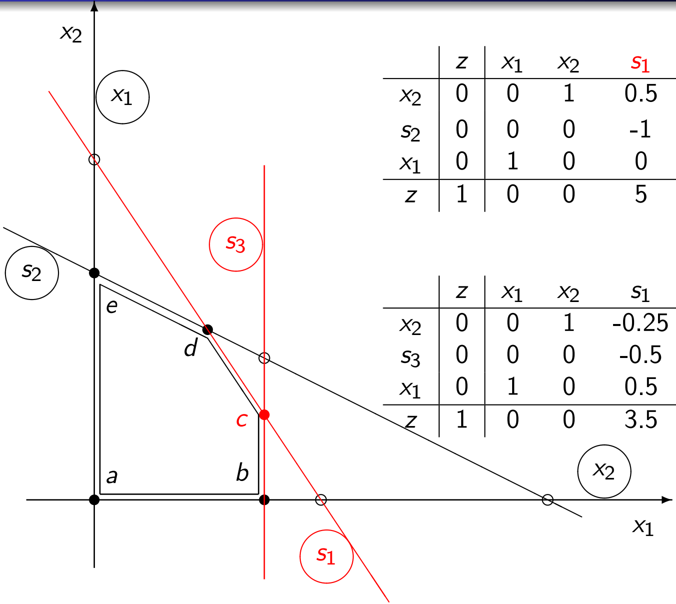
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

Vértice c



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

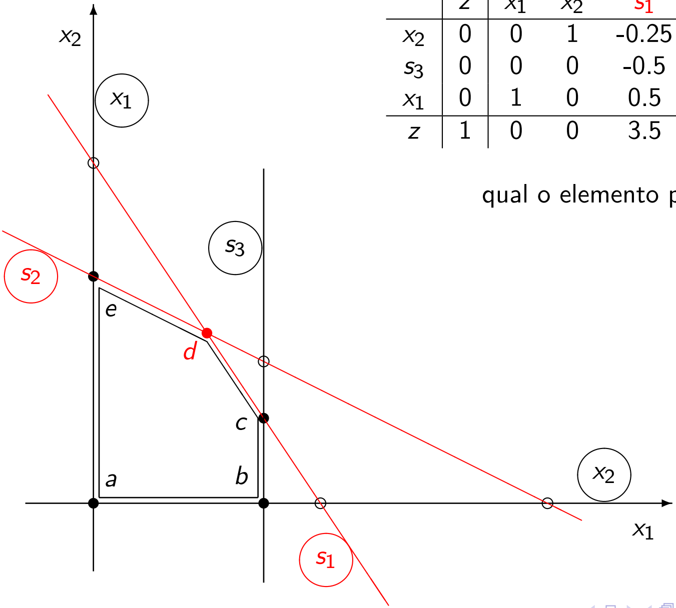
qual o elemento pivô?



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	$\boxed{2}$	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Vértice d

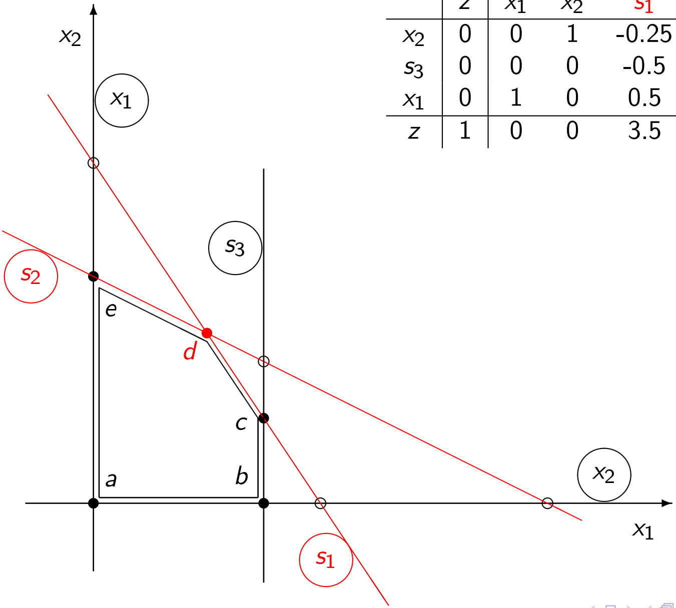


	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

qual o elemento pivô?

Vértice d : solução óptima

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540



Verificação da solução óptima

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
& 1x_1 & & & \leq & 30 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

Solução óptima:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

- Verificação da solução (uso de recursos e valor da solução óptima):

	act.1	act.2	folga		qtd.rec.	
recurso 1:	3(20)	+2(30)		=	120	
recurso 2:	1(20)	+2(30)		=	80	
recurso 3:	1(20)		+10	=	30	
valor f.obj.:	12(20)	+10(30)				= 540

Conclusão

- O resultado que estabelece que existe um vértice que é uma solução óptima do problema permite que o algoritmo simplex restrinja a procura apenas aos vértices admissíveis.
- As decisões (selecção da coluna e da linha pivô) garantem que se muda de um vértice admissível (do problema primal) para outro vértice admissível mais próximo da solução óptima.
- A mudança de base faz-se usando eliminação de Gauss.

Apêndices

Método de eliminação de Gauss: manuseamento de linhas

- Elemento pivô: $\boxed{}$ (cruzamento linha pivô e coluna pivô).

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- A variável x_1 entra na base e a variável s_3 sai da base:
  - Novas variáveis básicas: s_1, s_2, x_1
  - Novas variáveis não-básicas: x_2, s_3
- Pretende-se que a coluna da variável x_1, que entra na base, faça parte da matriz identidade:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0		1	0		
s_2	0	0		0	1		
x_1	0	1		0	0		
z	1	0		0	0		

- Nota: para uma explicação mais detalhada do Método da Eliminação de Gauss, ver o tutorial,
- em particular, a partir da pág.22, onde se apresentam os cálculos necessários a efectuar o pivô realizado nos diapositivos seguintes.

É necessário eliminar coeficiente de x_1 da primeira linha

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- Usando a equação da linha pivô: $x_1 + s_3 = 30 \Leftrightarrow x_1 = 30 - s_3$, substituindo na primeira linha: $3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \Leftrightarrow$ $3(30 - s_3)\ +2x_2 + s_1 = 120 \Leftrightarrow 2x_2 + s_1 - 3s_3 = 30$
- É equivalente a somar à 1.^{a} linha a linha pivô multiplicada por -3:

Linha 1	0	3	2	1	0	0	120
$-3\times$LinhaPivô	0	-3	0	0	0	-3	-90
Resultado	0	0	2	1	0	-3	30

- Quadro seguinte:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
				$\dots$			
x_1	0	1	0	0	0	1	30

Eliminação de Gauss: cálculo elemento a elemento

- Os cálculos podem ser feitos elemento a elemento, reproduzindo as operações que se efectuam com as linhas.
- Os dois quadros representam dois conjuntos de células, um do quadro actual e outro do quadro seguinte.
- O elemento pivô é o elemento *a*, e as outras células ocupam uma posição na mesma linha ou na mesma coluna do elemento pivô.

quadro actual

c	d
$\boxed{a}$	b

$\Rightarrow$

quadro seguinte

0	(ad-bc)/a
1	b/a

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
				...			
x_1	0	1	0	0	0	1	30
				...			

quadro actual $\Rightarrow$ quadro seguinte

3	120
$\boxed{1}$	30

$\Rightarrow$

0	(120.1-30.3)/1
1	30/1

3	120
$\boxed{1}$	0

$\Rightarrow$

0	30
1	30

Eliminação de Gauss: exemplo II

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
				...			
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

quadro actual

$\boxed{1}$	30
-12	0

$\Rightarrow$

quadro seguinte

1	30/1
0	(0.1-30.(-12))/1

$\boxed{1}$	30
-12	0

$\Rightarrow$

1	30
0	360

Voltar

1. Pivô: direcção

O que significa $x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_j$?

- A solução básica $B^{-1}b$ é o vértice x_{v_actual}.
- O vector $B^{-1}N_j$ indica uma direcção d.
- O vector θd, $\theta \geq 0$, é um múltiplo escalar do vector d.

ou seja, no pivô

- partindo do vértice x_{v_actual}, ao longo da direcção $d \in IR^n$, percorremos os pontos $x = x_{v\_actual} + \theta\ d$,

  que devem pertencer ao domínio, *i.e.*, $A(x_{v\_actual} + \theta d) = b$.
- Como $Ax_{v\_actual} = b$, d deve ser uma direcção tal que $Ad = 0$.

- Quando $\theta = \theta_{max}$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{v\_adj} = x_{v\_actual} + \theta_{max}\ d$$

- Quando só uma variável aumenta, d é a direcção de uma aresta.

1. Pivô: aumento máximo

- Quando $\theta = \theta_{max}$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{v\_adj} = x_{v\_actual} + \theta_{max} \ d$$

- O aumento máximo é determinado pelo facto de que se deve permanecer na região admissível, ou seja, nenhuma variável pode ter valor negativo.

1. Exemplo: aresta vértice $c \rightarrow d$ (s_3 aumenta)

- no vértice c, as equações que relacionam o valor das variáveis são:

$$\begin{cases} x_2 = 15 - 0.5\, s_1 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 + 1\, s_1 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \end{cases}$$

- para caminhar para o vértice d, a variável não-básica s_3 aumenta e s_1 mantém-se igual a 0:

$$\begin{cases} x_2 = 15 + 1.5\, s_3 \\ s_2 = 20 - 2\, s_3 \\ x_1 = 30 - 1\, s_3 \end{cases}$$

- o que é equivalente ao seguinte conjunto de equações usando θ para representar o incremento:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta. \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Exemplo: aresta vértice $c \to d$ (s_3 aumenta) (cont.)

- quando a variável não-básica s_3 aumenta de θ unidades, a variável básica x_2 aumenta de 1.5θ unidades, s_2 decresce de 2θ unidades, e x_1 decresce de θ unidades.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta . \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Esta representação baseia-se num ponto, o vértice c, e numa direcção, o vector $\overrightarrow{cd}$.
- Exercício: verificar que $Ax_{v\_actual} = b$ e $Ad = 0$.

- Quando $\theta = \theta_{max} = 10$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{vertice\_d} = x_{vertice\_c} + \theta_{max} \; d$$

2. Pivô: como variam as variáveis básicas quando a variável não-básica aumenta θ unidades?

- O sistema de equações das restrições é $Bx_B + Nx_N = b$.

Num pivô, do conjunto de variáveis não-básicas $\mathcal{N}$,

- uma variável não-básica x_j, $j \in \mathcal{N}$, aumenta θ unidades, $\theta \in I\!R_+$,
- as restantes variáveis não-básicas $x_i, i \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$, mantêm-se nulas.

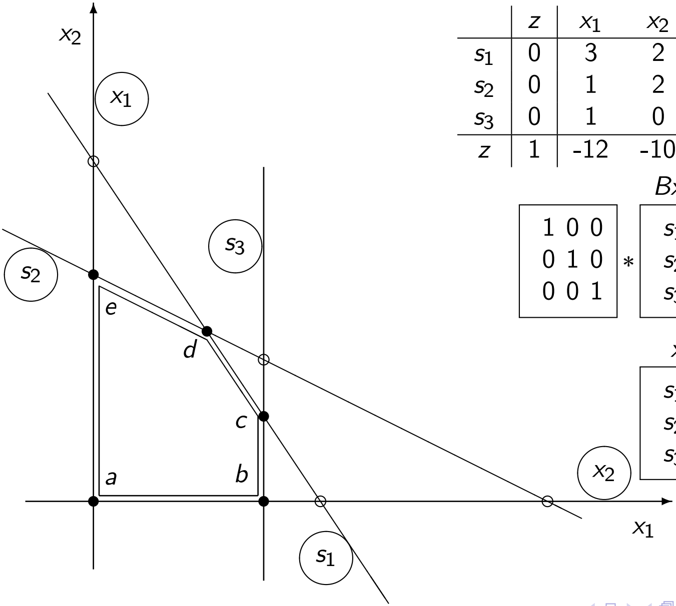
- Assim, o sistema de equações que descreve as mudanças dos valores das variáveis envolvidas no pivô é $Bx_B + N_j.x_j = b$, ou $Bx_B = b - \theta N_j$.
- Pré-multiplicando por B^{-1} :

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_j$$

- em que $B^{-1}b$ é a coluna do lado direito do quadro simplex, e $B^{-1}N_j$ é a coluna da variável não-básica que aumenta.

- Os 2 exemplos seguintes mostram as mudanças dos valores das variáveis, quer no quadro simplex inicial, quer no quadro actual.

2. Exemplo: vértice $a \rightarrow$ vértice b (aumenta x_1)



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

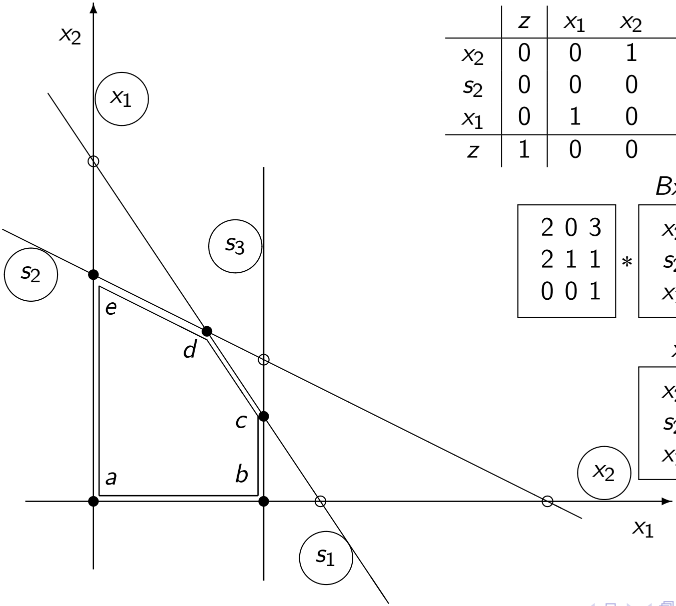
$$Bx_B = b - \theta N_{x_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1} N_{x_1}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Exemplo: vértice $c \rightarrow$ vértice d (aumenta s_3)



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

$$Bx_B = b - \theta N_{s_3}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{matrix}} - \theta \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}$$

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_{s_3}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 15 \\ 20 \\ 30 \end{matrix}} - \theta \boxed{\begin{matrix} -1.5 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}}$$

2. Pivô: dependência linear

- A coluna N_j da variável não-básica j e as colunas da variáveis básicas são um conjunto de vectores *linearmente dependentes:*

$$N_j - B\ (B^{-1} N_j) = 0$$

- Exemplo: vértice c (base x_2, s_2 e x_1) e var não-básica s_3 aumenta:
- quando a variável não-básica s_3 aumenta de θ unidades, a variável básica x_2 aumenta de 1.5θ unidades, s_2 decresce de 2θ unidades, e x_1 decresce de θ unidades.

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1.5\ \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\ \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\ \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voltar

3. Caracterização geométrica da solução óptima

- Solução é óptima se o gradiente da função objectivo estiver contido no cone (combinação não-negativa) gerado pelos vectores simétricos dos *gradientes das restrições* activas no vértice óptimo.
- O gradiente da restrição $a^i x \leq b_i$(*i.e.*, $a^i x + s_i = b_i$) é:

$$\partial s_i / \partial x = -a^i$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{lcl} \text{restrição } 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 & \rightarrow & \partial s_1/\partial x = (-3, -2)^\top. \\ \text{restrição } 1x_1 + 2x_2 + s_2 = \ \ 80 & \rightarrow & \partial s_2/\partial x = (-1, -2)^\top. \end{array}$$

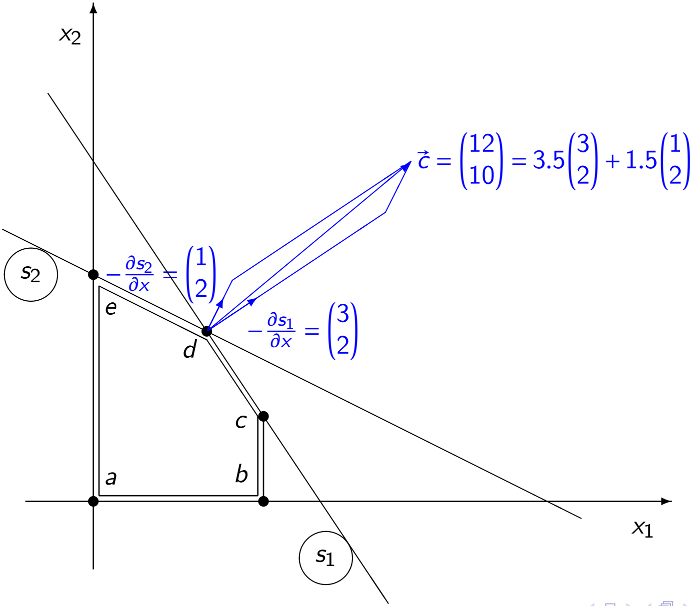
- Gradiente da função objectivo, $\vec{c}$, é uma combinação não-negativa dos vectores simétricos dos gradientes das restrições activas ($s_1 = 0$ e $s_2 = 0$)

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = 3.5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- os coeficientes 3.5 e 1.5 são os mesmos do quadro simplex.

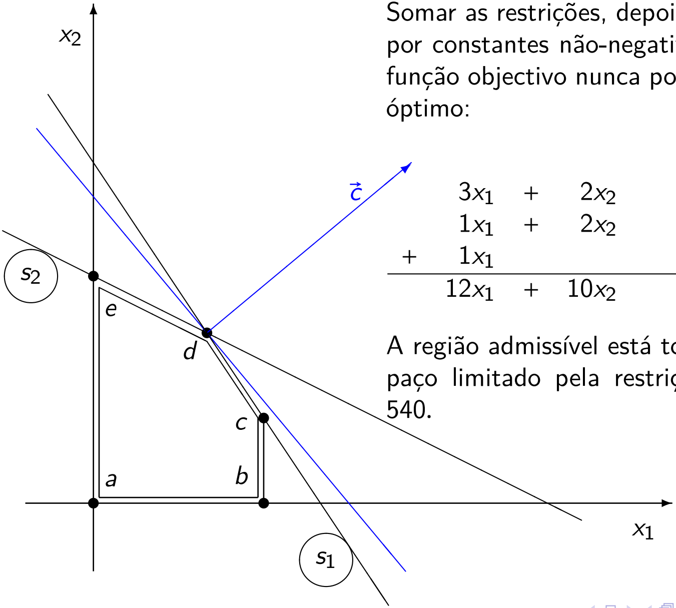
(cont.)

3. Solução óptima: gradiente $\vec{c}$ está contido no cone



(cont.)

3. Certificado de optimalidade



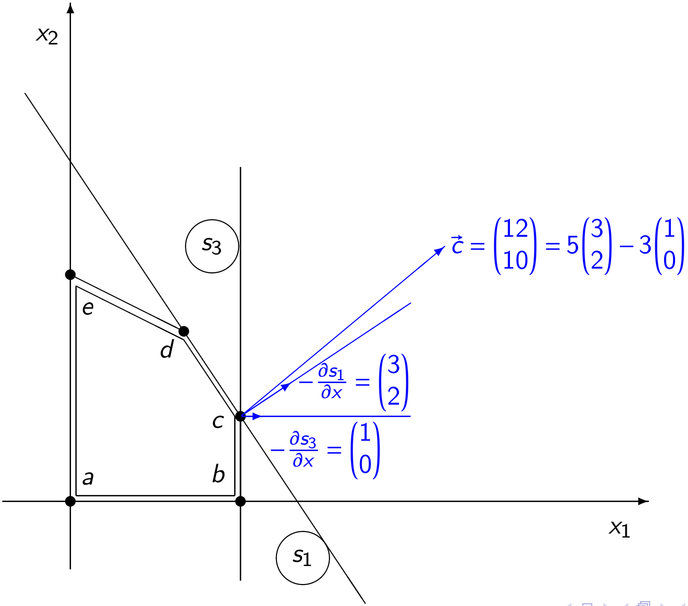
Somar as restrições, depois de as multiplicar por constantes não-negativas, mostra que a função objectivo nunca pode exceder o valor óptimo:

$$
\begin{array}{rrcrcrr}
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 & (3.5) \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 & (1.5) \\
+ & 1x_1 & & & \leq & 30 & (0) \\
\hline
 & 12x_1 & + & 10x_2 & \leq & 540 &
\end{array}
$$

A região admissível está toda contida no espaço limitado pela restrição $12x_1 + 10x_2 \leq 540$.

(cont.)

3. Solução em que o gradiente $\vec{c}$ não está contido no cone



Voltar

Fim