Transportes (redes sem capacidade)

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

27 de setembro de 2020

Transportes - redes gerais

antes

- O algoritmo de transportes em grafos bipartidos (todos os arcos ligam uma origem a um destino)

Guião

- Generalização do algoritmo de transportes a redes gerais: cada vértice pode funcionar como origem e destino, simultaneamente.
- Há questões particulares que é necessário ter em conta.
- Algoritmo de transportes em redes gerais com arcos com capacidade, porque ...

depois

- o software de optimização de redes (*e.g.*, relax4) aceita como *input* uma qualquer rede geral com capacidades nos arcos.

Conteúdo

- Revisão de conceitos, e sua adaptação a redes gerais
  - Problema de Transportes em Rede: modelo geral
  - Caracterização das soluções básicas
  - Método dos multiplicadores
  - Circuito de *Stepping stone*
- Transporte em Redes (ainda sem limites superiores)
  - Exemplo
  - Transporte com Transbordo
- Transporte em Redes com Limites Superiores
  - Exemplo
  - Nota: construção da solução inicial
- Transformação num Problema em Rede com Limites Superiores
  - Problemas com Capacidade nos Vértices
  - Exemplo: Transportes com Armazéns Intermédios
  - Problemas com Limites Inferiores

Problema de Transportes em Rede: modelo geral

- Dado um grafo $G = (V, A)$, pretende-se:

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{suj. a} & -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_j, \ \forall j \in V & (1) \\
 & 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A & (2)
\end{array}$$

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: fluxo de *um único tipo de entidades* no arco orientado (i,j);

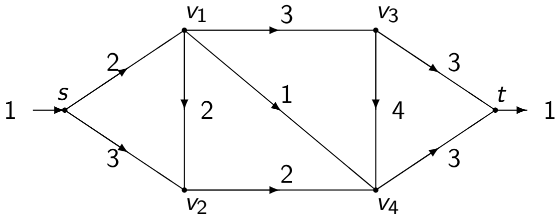
Dados:

- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- b_j: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j;
- u_{ij}: capacidade do arco orientado (i,j).

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo.*
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade.*

Problema do caminho mais curto

- Dado um grafo $G = (V, A)$, com um custo c_{ij} associado ao arco $(i,j), \forall (i,j) \in A$, pretende-se determinar o caminho mais curto entre dois vértices do grafo, designados por s e t.



- O problema é formulado injectando no grafo, no vértice s, uma unidade de fluxo que passa por uma sequência de arcos até atingir o vértice t.

Problema do caminho mais curto: modelo

	x_{sv_1}	x_{sv_2}	$x_{v_1v_2}$	$x_{v_1v_3}$	$x_{v_1v_4}$	$x_{v_2v_4}$	$x_{v_3v_4}$	x_{v_3t}	x_{v_4t}		
vértice s	1	1								=	1
vértice v_1	-1		1	1	1					=	0
vértice v_2		-1	-1			1				=	0
vértice v_3				-1			1	1		=	0
vértice v_4					-1	-1	-1		1	=	0
vértice t								-1	-1	=	-1
min	c_{sv_1}	c_{sv_2}	$c_{v_1v_2}$	$c_{v_1v_3}$	$c_{v_1v_4}$	$c_{v_2v_4}$	$c_{v_3v_4}$	c_{v_3t}	c_{v_4t}		

Problema do caminho mais curto

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

$$\text{suj. a} \quad -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,k)\in A} x_{jk} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } j = s \\ 0 & , \text{ se } j \neq s, t \\ -1 & , \text{ se } j = t \end{cases} \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \ , \ \forall (i,j) \in A \tag{5}$$

Método dos multiplicadores

Multiplicadores associados aos vértices:

- há um multiplicador u_j associado a cada vértice j, $\forall j \in V$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para os arcos (i,j) básicos, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$

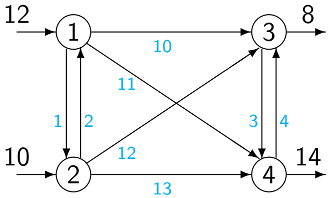
2. Para os arcos (i,j) não-básicos, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$

Output do método dos multiplicadores:

- os δ_{ij} de todos os arcos não-básicos.

Transporte em Redes (ainda sem limites superiores)

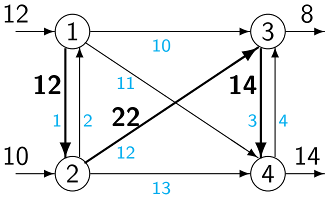


- valor associado ao arco: c_{ij} - custo unitário de transporte.
- valor associado ao vértice: b_j - oferta ou procura no vértice

Exemplo: uma solução inicial básica e admissível

Solução é básica (variáveis básicas formam uma árvore):

- variáveis básicas: $x_{12} = 12, x_{23} = 22, x_{34} = 14.$
- variável não-básicas: $x_{21} = x_{13} = x_{14} = x_{24} = x_{43} = 0.$

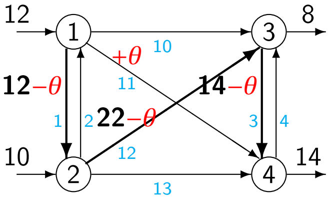


- Solução é admissível: todas as restrições de conservação de fluxo (1) são obedecidas.

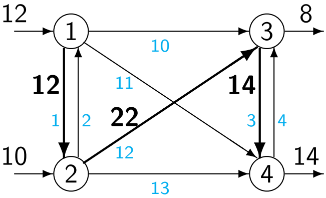
- Custo da solução $= 12\ (1) + 22\ (12) + 14\ (3) = 318$

Stepping stone: variável não-básica x_{14}

- Arco (1,4) forma um ciclo com os arcos (1,2),(2,3) e (3,4) (das variáveis básicas).



- Quando a variável não-básica x_{14} aumenta θ unidades, **todas** as variáveis básicas x_{34}, x_{23} e x_{12} decrementam θ unidades, porque:
    1. quando x_{14} aumenta, x_{34} decrementa, para o fluxo que entra no vértice 4 permanecer igual.
    2. quando x_{34} decrementa, x_{23} decrementa, para a variação do fluxo no vértice 3 ser nula.
    3. quando x_{23} decrementa, x_{12} decrementa, para a variação do fluxo no vértice 2 ser nula.
    4. o decremento de x_{12} e o aumento de x_{14} mantêm o fluxo que sai do vértice 1 igual.



- Dadas as variações (aumento e decremento) de fluxo ao longo do ciclo $(1,2),(2,3),(3,4),(1,4)$, o valor de $\delta_{14} = 11 - 3 - 12 - 1 = -5$.
- Para as restantes variáveis não-básicas:

$$\delta_{13} = 10 - 12 - 1 = -3; \quad \delta_{14} = 11 - 3 - 12 - 1 = -5; \quad \delta_{21} = 2 + 1 = 3$$
$$\delta_{24} = 13 - 3 - 12 = -2; \quad \delta_{43} = 4 + 3 = 7;$$

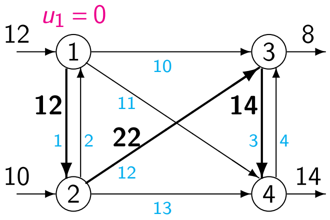
- A variável não-básica mais atractiva é x_{14}.

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$

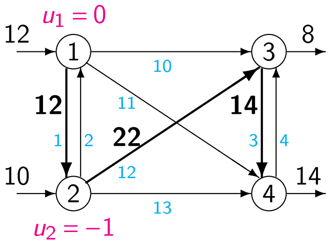


- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2$
-
-

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



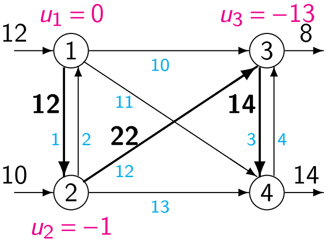
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2 \quad \Rightarrow 1 = 0 - u_2 \quad \Rightarrow u_2 = -1$
- $c_{23} = u_2 - u_3$
-

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



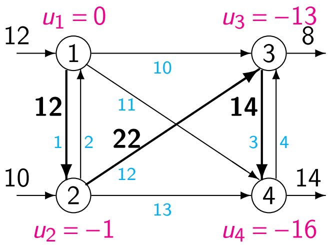
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2 \quad \Rightarrow 1 = 0 - u_2 \quad \Rightarrow u_2 = -1$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = -1 - u_3 \quad \Rightarrow u_3 = -13$
- $c_{34} = u_3 - u_4$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



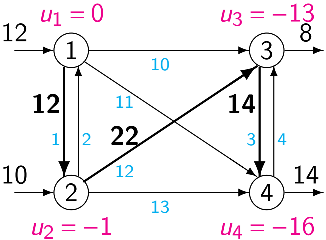
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2 \quad \Rightarrow 1 = 0 - u_2 \quad \Rightarrow u_2 = -1$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = -1 - u_3 \quad \Rightarrow u_3 = -13$
- $c_{34} = u_3 - u_4 \quad \Rightarrow 3 = -13 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -16$

Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



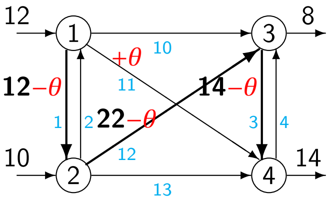
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{13} = 10 - (0 - (-13)) = -3; \quad \delta_{14} = 11 - (0 - (-16)) = -5;$$
$$\delta_{21} = 2 - (-1 - 0) = 3; \quad \delta_{24} = 13 - (-1 - (-16)) = -2;$$
$$\delta_{43} = 4 - (-16 - (-13)) = 7;$$

- x_{14} é a variável mais atractiva.

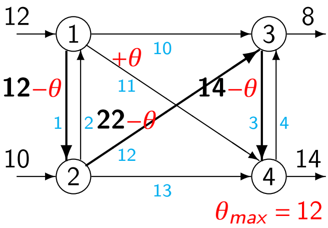
Valor máximo do aumento de x_{14}

- Arco (1,4) forma um ciclo com os arcos $(1,2),(2,3)$ e $(3,4)$ (das variáveis básicas).

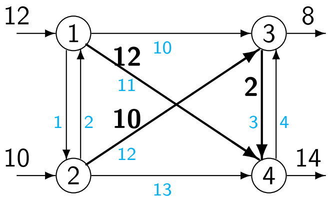


- Quando a variável não-básica x_{14} aumenta, as variáveis básicas x_{34}, x_{23} e x_{12} diminuem.
- Qual o aumento máximo de x_{14} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min\{14, 22, 12\} = 12.$

Pivô



- A variável x_{14} entra na base e x_{12} sai da base.

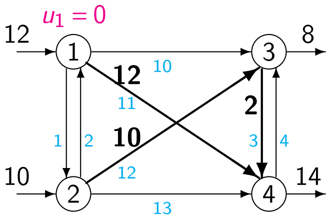


- Custo $= 12\ (11) + 10\ (12) + 2\ (3) = 258$

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



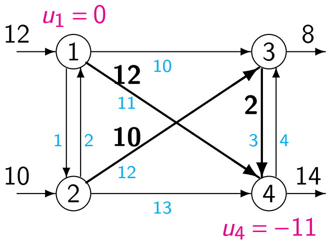
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4$
-
-

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



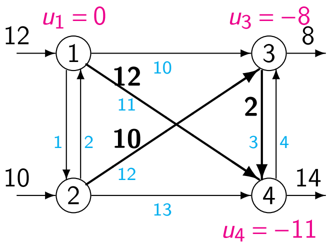
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4 \quad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{34} = u_3 - u_4$
-

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



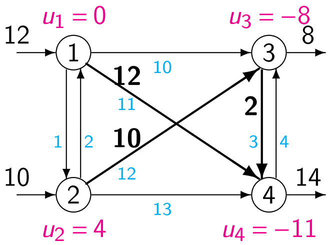
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4 \quad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{34} = u_3 - u_4 \quad \Rightarrow 3 = u_3 - (-11) \quad \Rightarrow u_3 = -8$
- $c_{23} = u_2 - u_3$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



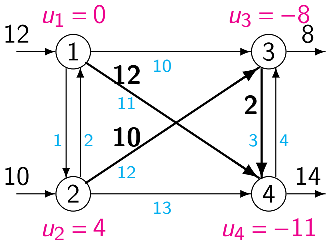
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4 \quad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{34} = u_3 - u_4 \quad \Rightarrow 3 = u_3 - (-11) \quad \Rightarrow u_3 = -8$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = u_2 - (-8) \quad \Rightarrow u_2 = 4$

Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



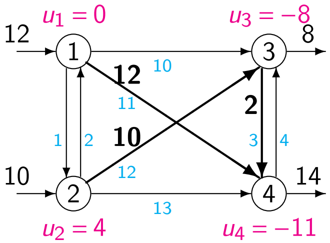
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{12} = 1 - (0 - 4) = 5; \qquad \delta_{13} = 10 - (0 - (-8)) = 2;$$
$$\delta_{21} = 2 - (4 - 0) = -2; \qquad \delta_{24} = 13 - (4 - (-11)) = -2;$$
$$\delta_{43} = 4 - (-11 - (-8)) = 7;$$

- x_{21} e x_{24} são as variáveis não-básicas mais atractivas.
- Desempate: x_{24} é seleccionada (escolha é arbitrária).

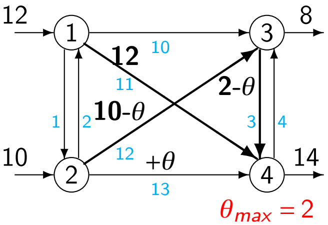
Valor máximo do aumento de x_{24}

- Arco (2,4) forma um ciclo com os arcos (2,3) e (3,4) (das variáveis básicas).

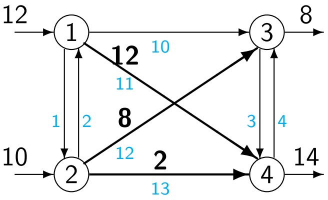


- Quando a variável não-básica x_{24} aumenta, as variáveis básicas x_{23} e x_{34} diminuem.
- Qual o aumento máximo de x_{24} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min = \{10, 2\} = 2$.

Pivô



- A variável x_{24} entra na base e x_{34} sai da base.

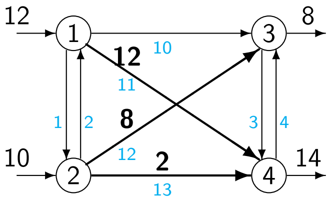


- Custo $= 12\ (11) + 8\ (12) + 2\ (13) = 254$

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



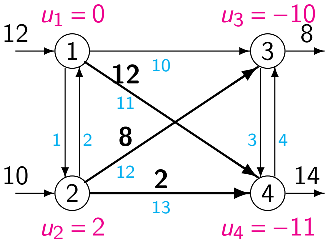
- $u_1 = 0.$
- $c_{14} = u_1 - u_4 \quad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{24} = u_2 - u_4 \quad \Rightarrow 13 = u_2 - (-11) \quad \Rightarrow u_2 = 2$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = 2 - u_3 \quad \Rightarrow u_3 = -10$

Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\begin{array}{ll}
\delta_{12} = 1 - (0 - 2) = 3; & \delta_{13} = 10 - (0 - (-10)) = 0; \\
\delta_{21} = 2 - (2 - 0) = 0; & \delta_{34} = 3 - (-10 - (-11)) = 2; \\
\delta_{43} = 4 - (-11 - (-10)) = 5; &
\end{array}$$

- Solução é óptima. Há soluções óptimas alternativas. Porquê?

Transportes com transbordo

- O problema anteriormente apresentado é muitas vezes designado por problema com transbordo ou de transexpedição.

O que é o transbordo?

- Expedição de todas / algumas unidades produzidas numa origem para outra origem, tendo em vista o seu transporte para os destinos.
- No exemplo, também há transbordo de unidades nos destinos.

Fim