

## Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

MIEI - UMinho

Trabalho 3 (data de entrega: 08 de janeiro)

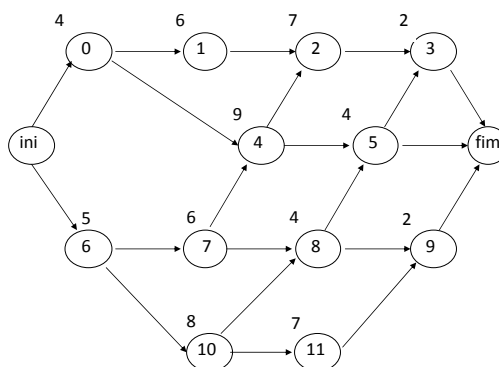
O método do caminho crítico, designado na literatura anglo-saxónica por *critical path method (CPM)*, constitui uma ferramenta muito importante em gestão de projectos. O método do caminho crítico é aplicado a projectos que podem ser decompostos num conjunto de actividades, que se considera terem durações determinísticas, entre as quais existem relações de precedência. As restrições de precedência traduzem o facto de o instante em que se pode dar início a uma dada actividade ter de ser posterior aos instantes em que terminam as actividades que lhe são precedentes.

No método do caminho crítico, a rede que representa o projecto pode ser representada de duas formas alternativas: uma, em que as actividades do projecto são representadas por arcos do grafo, e a outra, em que são representadas por nós. Vamos usar a segunda representação.

Considere um projecto com as actividades e as relações de precedência a seguir indicadas:

Actividade	Duração	Precedências
0	4	—
1	6	0
2	7	1,4
3	2	2,5
4	9	0,7
5	4	4,8
6	5	—
7	6	6
8	4	7,10
9	2	8,11
10	8	6
11	7	10

O grafo associado a este projecto é:



No problema em análise, o caminho crítico corresponde às actividades 6, 7, 4, 2 e 3, com uma duração de 29 unidades de tempo, que é também o menor tempo necessário para completar a execução de todo o projecto.

Há várias formas de determinar o caminho crítico de um projecto. O ficheiro "Programacao linear modelos TEXTO.pdf" apresenta modelos de programação linear que podem apoiar a resolução deste trabalho.

*Neste trabalho, cada grupo deverá considerar um problema em que as actividades do projecto são determinadas da forma indicada no fim do texto do enunciado.*

Considere que é possível, aumentando os recursos aplicados e com custos suplementares, reduzir a duração de uma actividade. A relação entre custos e reduções depende das características da actividade, e pode ser não-linear. Vamos usar dois tipos de relação diferentes. No primeiro caso, o aumento de custo é dado por uma função contínua côncava e, no segundo caso, o aumento de custo é ditado pela escolha de um conjunto discreto de opções.

Em relação ao primeiro caso, um modelo com funções não-lineares pode ser aproximado por um modelo em que cada uma dessas funções é aproximada por uma função contínua linear por partes. Neste trabalho, para aproximar a função não-linear, vamos usar uma função linear com 2 partes.

Na variante em análise, cada actividade tem cinco parâmetros adicionais: o primeiro é o valor do custo normal, expresso em unidades monetárias [U.M.], o segundo é o valor de  $c_1$ , o custo suplementar de reduzir a duração da actividade de uma unidade de tempo [U.T.], expresso em [U.M./U.T.], o terceiro é o valor da máxima redução de tempo a um custo  $c_1$ , o quarto é o valor de  $c_2$ , o custo suplementar de reduzir a duração da actividade de uma unidade de tempo [U.T.] após ter aplicado a máxima redução a um custo  $c_1$ , expresso em [U.M./U.T.], e o quinto é o valor da máxima redução de tempo a um custo  $c_2$ .

Esses valores estão apresentados na seguinte Tabela (considere apenas aqueles que dizem respeito às actividades da lista do grupo):

Actividade	Custo Normal	$c_1$	Máx. red. a custo $c_1$	$c_2$	Máx. red. a custo $c_2$
0	400	200	0,5	100	0,5
1	1000	600	1	300	1
2	1400	1000	3	500	1
3	300	200	0,5	100	0,5
4	2000	800	2	400	1
5	1000	1600	0,5	800	0,5
6	800	180	1	90	1
7	900	—	—	—	—
8	600	200	0,5	100	0,5
9	300	—	—	—	—
10	1600	1000	0,5	500	0,5
11	1400	600	1	300	1

A título ilustrativo, para a Actividade 2, cuja duração normal é de 7 U.T. e cujo custo normal é 1400 U.M., reduzir a duração da actividade de 3 U.T., passando a 4 U.T., tem um custo suplementar de 3000 U.M., ou seja, a Actividade 2 passa a ter um custo total de 4400 U.M.. A redução máxima que se pode obter a este custo é de 3 U.T.. Depois disso, é possível reduzir a duração da actividade de

1 U.T., e o custo suplementar de redução torna-se mais económico, 500 U.M./U.T., ou seja, a realização desta actividade no tempo mínimo de 3 U.T. tem um custo de 4900 U.M. ( $=1400+3*1000+500$ ). Note que a função contínua linear por partes tem um custo de redução maior na primeira parte, tendo portanto a função de redução do custo uma forma côncava.

Em relação ao segundo caso, existe um conjunto discreto de opções para a realização de uma actividade, por exemplo, resultante de diversas opções oferecidas por um empreiteiro que usa recursos com capacidades diferentes. Neste trabalho, considere que as actividades 7 e 9, além das opções com a duração normal e o custo normal acima indicados, podem ser realizadas com durações diferentes e custos diferentes, com as seguintes opções alternativas.

A actividade 7 pode também ser realizada com **uma duração de 5 unidades de tempo** e com custo adicional de 300 U.M. ou com uma duração de 4 unidades de tempo e com um custo adicional de 1100 U.M.. A actividade 9 pode também ser realizada com uma duração de 1 unidade de tempo e com custo adicional de 200 U.M. ou com uma duração de 0 unidades de tempo e com um custo adicional de 400 U.M..

Pretende-se que o tempo de execução do projecto encontrado na PARTE 0 seja reduzido em 3 U.T.. O objectivo do problema é decidir como devem ser reduzidas as durações das actividades, de modo a realizar o projecto na nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo.

## PARTE 0

0. Indique o valor de ABCDE, e apresente a rede que representa o projecto depois de eliminar as actividades indicadas na secção "Determinação da lista de actividades", no final do texto, identificando os vértices da rede e os arcos e respectivos custos.
0. Apresente o diagrama de Gantt (que resulta de resolver o modelo com as variáveis de decisão  $t_i, \forall i$ ), e indique a duração do projecto.

## PARTE I

1. Apresente a formulação apenas das **novas** restrições e da **nova** função objectivo do novo modelo de programação linear inteira mista (ver informação no Anexo).
2. Apresente o modelo de programação linear inteira mista (ver informação no Anexo).
3. Apresente o ficheiro de input (*cut-and-paste*).
4. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa (*cut-and-paste*).
5. Apresente o plano de execução (diagrama de Gantt) do projecto representando as actividades com as durações que elas têm após a respectiva redução.
6. Verifique que o custo da solução está correcto.
7. Faça *upload* no BlackBoard do ficheiro .1p juntamente com os ficheiros .1p das outras Partes.

### **Determinação da lista de actividades**

Seja  $ABCDE$  o número de inscrição do aluno do grupo com maior número de inscrição. Remova da lista de actividades as actividades  $D$  e  $E$ , passando as precedências a ser estabelecidas da seguinte forma:

- os sucessores da actividade  $D$  passam a ter como novas precedências os antecessores da actividade  $D$ ; e
- o mesmo para  $E$ .

A título ilustrativo, se a actividade 4 for removida, a actividade 2 passa a ter como precedências, como novas precedências, as actividades 0 e 7 (em vez da actividade 4), o mesmo acontecendo com a actividade 5.

## ANEXO

### Objectivo

Os trabalhos práticos experimentais visam desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos, de criar modelos para os descrever, de obter soluções para esses modelos utilizando programas computacionais adequados, de validar os modelos obtidos, de interpretar as soluções obtidas, e de elaborar recomendações para o sistema em análise.

### Apresentação da formulação e do modelo

Um dos aspectos mais valorizados é a correcção da apresentação das formulações e dos modelos, que devem ser delineados como se indica de seguida.

Formulação:

- A formulação do problema é a ideia (fórmula) subjacente à construção do modelo.
- Usando linguagem corrente e em linhas gerais, deve conter:
  1. a descrição do problema, indicando aspectos relevantes, como os recursos disponíveis ou regras gerais de funcionamento;
  2. o objectivo;
  3. a escolha das variáveis de decisão e o modo como os valores das variáveis de decisão (ou conjuntos de valores) se traduzem em decisões a implementar no sistema real;
  4. uma apresentação da coerência global do modelo a construir, *i.e.*, como se pretende representar o problema do sistema real através de um modelo com restrições lineares e uma função objectivo linear;
  5. em casos mais complexos em que a formulação não é de todo evidente, por ser justificada por resultados teóricos, estes devem ser apresentados, ou, em alternativa, deve ser fornecida evidência suficiente, complementada por referências bibliográficas.

Modelo:

- Usando linguagem matemática, a apresentação de cada elemento do modelo (eventualmente agrupando elementos) deverá ser justificada e acompanhada de uma explicação com detalhe do seu significado, e de uma identificação da dimensão:
  1. variáveis de decisão (*e.g.*,  $x_i$  : número de artigos de tipo  $i$  a produzir por hora,  $i = 1, 2$ ). Adicionalmente, deverá haver uma declaração do tipo de variável, por exemplo:
    - $x_1, x_2 \geq 0$  (ou  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ou  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ );
    - $x_1, x_2 \geq 0$  e inteiros (ou  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ou  $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ ); ou

- $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$  (ou  $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$  ou  $x \in \mathbb{B}^2$  ou  $x \in \{0, 1\}^2$ ).
  - 2. parâmetros (*e.g.*, número de artigos disponíveis/mês, número de horas da máquina  $j$  disponíveis / dia,  $j = 1, \dots, m$ , etc.);
  - 3. função objectivo (linear) (*e.g.*, lucro diário), explicitando se se trata de um problema de maximização ou minimização;
  - 4. restrições (lineares), eventualmente com uma verificação da coerência dimensional das funções lineares das restrições quando elas se relacionam com dados do problema (*e.g.*, horas da máquina  $j$  / dia,  $j = 1, \dots, m$ , etc.).
- Finalmente, pode justificar-se aprofundar a análise da coerência global do modelo, mostrando que:
    1. as restrições (ou os grupos de restrições) traduzem as regras de funcionamento do sistema e definem um espaço de soluções que permite obter qualquer decisão admissível no sistema real;
    2. a função objectivo traduz a medida desejada de eficiência do sistema;

Outros aspectos que são também valorizados são os relacionados com a metodologia da Investigação Operacional. Por exemplo, o trabalho de validação do modelo, que deve necessariamente incluir uma verificação de que a solução obtida pelo *solver* é uma decisão admissível e correcta do modelo e que pode ser traduzida numa decisão adequada ao sistema real.

## Grupos de Trabalho

Os trabalhos experimentais devem ser realizados em grupos de 3, 4 ou 5 estudantes.

Os estudantes de um grupo podem pertencer a turnos TP diferentes.

## Formato do Relatório

- O relatório de cada trabalho experimental deve traduzir a experiência de modelação e resolução dos casos propostos e conter as peças requeridas no enunciado do trabalho.
- Poderá incluir a discussão de dificuldades surgidas durante a realização do trabalho.
- Não é desejável que o estudante perca muito tempo com a qualidade de "apresentação gráfica", que não é valorizada. O relatório pode incluir texto editado com processador de texto e impresso, texto manuscrito legível, desenhos feitos em computador e desenhos feitos manualmente. É aceitável haver páginas que combinem elementos de todos estes tipos. No caso de haver páginas que tenham uma matriz comum (template), o original com a matriz pode ser fotocopiado, e depois manuscrito.
- O relatório deve ser feito em folhas formato A4, ter uma folha de capa com a identificação dos estudantes do grupo, do trabalho e da data, e em formato PDF, desejavelmente, ou Word.

## **Entrega dos Relatórios dos Trabalhos**

- No Blackboard, na entrada > Upload de ficheiros de trabalhos (NOVO).
- O nome do ficheiro com o Relatório deve conter ABCDE (*e.g.*, ABCDE.pdf ou ABCDE.docx), em que ABCDE é o número de inscrição do aluno do grupo com maior número de inscrição.

## **Outras Informações**

Os trabalhos em que haja conduta académica ilícita serão anulados, de acordo com o definido no Art. 152.º do Regulamento Académico da Universidade do Minho (RAUM), publicado em Diário da República, 2.ª série, em 20 de janeiro de 2020, e proceder-se-á conforme está definido nesse artigo.

## **Dispensa de realização de Trabalhos Práticos Experimentais**

Aplica-se o que está descrito em baixo, a menos que algum despacho superveniente estabeleça outras regras.

### **1. Estudantes sem regime especial de frequência**

Um estudante que não tenha obtido aproveitamento na UC num ano lectivo anterior, apesar de ter tido classificação positiva nos trabalhos, não está dispensado da realização dos trabalhos no ano lectivo corrente.

### **2. Estudantes em regime especial de frequência de estudante-trabalhador**

Segundo está determinado no Artigo 68.º - Frequência e avaliação das aprendizagens - do Regulamento Académico da Universidade do Minho (RAUM):

5 - O estudante trabalhador que obtenha aproveitamento na componente de natureza laboratorial ou componente de trabalho prático num dado ano letivo e não obtenha aproveitamento na respetiva UC fica dispensado de efetuar essa componente no ano letivo seguinte.

Assim, no corrente ano, essa dispensa não é válida para os estudantes trabalhadores que realizaram os trabalhos há dois ou mais anos.

### **3. Alunos em outros regimes especiais de frequência**

Aplica-se o determinado no RAUM. Solicita-se aos alunos nestes regimes que informem o docente caso estejam dispensados da realização dos trabalhos práticos.

### **4. A verificação do estatuto do aluno é feita à data de emissão das classificações, no final do semestre.**