Universidade do Minho

Métodos Determinísticos de Investigação Operacional

MIEI - 3º ano - 1º semestre
Universidade do Minho

Trabalho Prático Experimental III


André Ferreira
A64296


Tiago Gomes
A69853


Sebastião Freitas
A71074


Gonçalo Almeida
A84610


Angélica Cunha
A84398

Braga, 9 de janeiro de 2021

Conteúdo

1 Introdução **3**

2 Modelação **4**
2.1 Formulação 6
2.1.1 Restrições 6
2.1.2 Função Objetivo 7
2.2 Ficheiro de Input 8
2.3 *Output LPSolve* 9
2.4 Plano de Execução 10

3 Conclusão **11**

Lista de Figuras

2.1 Grafo associado ao projeto 4
2.2 Diagrama de Gantt do projeto 5
2.3 *Output LPSolve* 9
2.4 Diagrama de Gantt do plano de execução 10

1. Introdução

O presente relatório irá abordar a elaboração do projeto desenvolvido no âmbito da unidade curricular de Modelos Determinísticos de Investigação Operacional. Neste trabalho prático é apresentado um problema em que se pretende aplicar o método do caminho crítico, o qual é aplicado a projetos que podem ser decompostos num conjunto de actividades, que se considera terem durações determinísticas, entre as quais existem relações de precedência. É-nos dado um projeto no qual a rede consiste num grafo em que cada nó é uma atividade deste.

No problema em análise, o caminho crítico corresponde às actividades 6, 7, 4, 2 e 3, com uma duração de 29 unidades de tempo, que é também o menor tempo necessário para completar a execução de todo o projecto. O objectivo do problema é decidir como devem ser reduzidas as durações das actividades, de modo a realizar o projecto na nova duração desejada, com um custo suplementar mínimo.

De modo a apresentar uma solução a este problema, procedemos a modelá-lo, de modo a poder descrevê-lo de um modo mais facilmente compreensível e objetivo, permitindo-nos seguidamente aplicar métodos de programação linear, com o auxílio de software, para encontrar uma solução ótima para o problema.

2. Modelação

De forma a respondermos às necessidades do enunciado proposto, começamos por realizar as alterações necessárias à rede, tendo em conta o número mecanográfico 84610, seguido da formulação do modelo para atingir o objectivo proposto do problema.

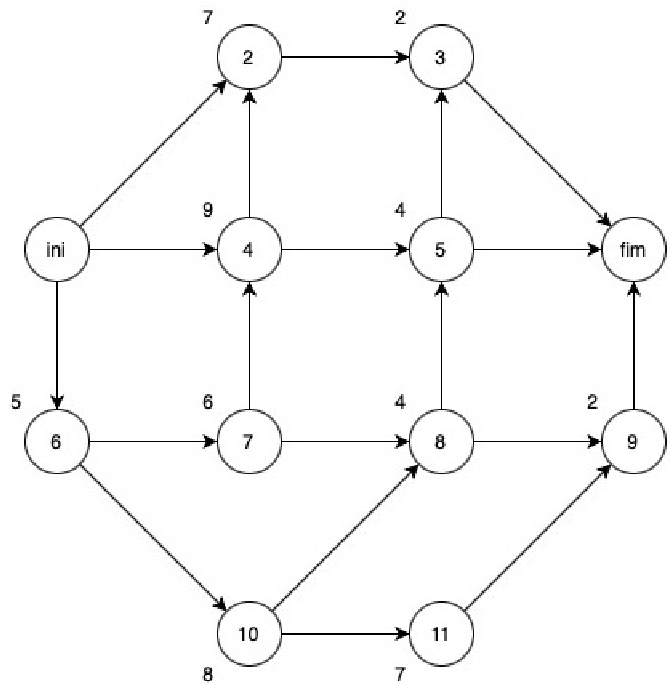

Figura 2.1: Grafo associado ao projeto

De seguida, foi realizado o diagrama de Gantt que resulta de resolver o modelo com as variáveis de decisão t_i, $\forall i$. Há que notar que cada linha representa a atividade indicada e, por exemplo, a primeira coluna corresponde ao intervalo de tempo entre 0 U.T. e 1 U.T..

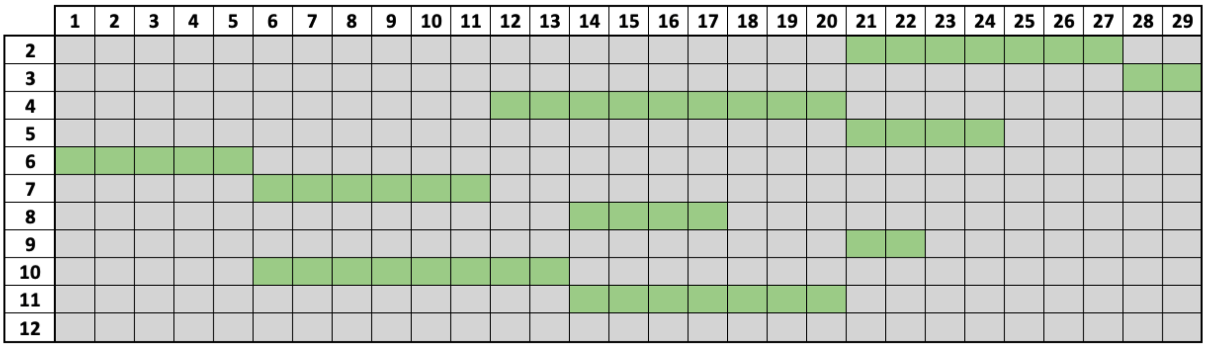

Figura 2.2: Diagrama de Gantt do projeto

2.1 Formulação

2.1.1 Restrições

A seguinte restrição indica que o tempo de execução do projeto deve reduzir, no mínimo, 3 U.T. em relação ao modelo original.

tf <= 26;

Dado que t_i e d_i representam o tempo de início e duração da atividade i respetivamente, a função $t_i\ +\ d_i$ representa o tempo de conclusão da mesma. Foram definidas as variáveis ra_i e rb_i que representam, respetivamente, o valor da máxima redução de tempo a um custo c_1 e c_2. As seguintes restrições visam garantir as relações de precedência entre atividades tendo em conta as reduções de tempo em cada arco.

O modelo destas restrições é o seguinte:

$$arco_{ij}:\ t_j\ \geq\ t_i\ +\ d_i\ -\ ra_i\ -\ rb_i$$

Assim sendo, temos as seguintes restrições:

arco_i2: t2 >= ti + 0;
arco_i4: t4 >= ti + 0;
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_23: t3 >= t2 + 7 - ra2 - rb2;
arco_3f: tf >= t3 + 2 - ra3 - rb3;
arco_42: t2 >= t4 + 9 - ra4 - rb4;
arco_45: t5 >= t4 + 9 - ra4 - rb4;
arco_53: t3 >= t5 + 4 - ra5 - rb5;
arco_5f: t3 >= t5 + 4 - ra5 - rb5;
arco_67: t7 >= t6 + 5 - ra6 - rb6;
arco_610: t10 >= t6 + 5 - ra6 - rb6;
arco_85: t5 >= t8 + 4 - ra8 - rb8;
arco_89: t9 >= t8 + 4 - ra8 - rb8;
arco_108: t8 >= t10 + 8 - ra10 - rb10;
arco_1011: t11 >= t10 + 8 - ra10 - rb10;
arco_119: t9 >= t11 + 7 - ra11 - rb11;

Para as reduções de tempo relativas às atividades 7 e 9, foram criadas 4 variáveis binárias que apresentam o valor 1 caso sejam realizadas e 0 caso contrário.

A associação das variáveis e as opções de redução é a seguinte:

- opcao1: A atividade 7 é realizada em 5 U.T. com um custo adicional de 300 U.M.;
- opcao2: A atividade 7 é realizada em 4 U.T. com um custo adicional de 1100 U.M.;
- opcao3: A atividade 9 é realizada em 1 U.T. com um custo adicional de 200 U.M.;
- opcao4: A atividade 9 é realizada em 0 U.T. com um custo adicional de 400 U.M..

Estas variáveis são multiplicadas pela diferença entre a duração original da atividade e a nova duração.

arco_74: t4 >= t7 + 6 - 1 opcao1 - 2 opcao2;
arco_78: t8 >= t7 + 6 - 1 opcao1 - 2 opcao2;
arco_9f: tf >= t9 + 2 - 1 opcao3 - 2 opcao4;

Como apenas pode ser realizada uma das opções, são necessárias as seguintes restrições:

opcao1 + opcao2 <= 1;
opcao3 + opcao4 <= 1;

Por fim, as seguintes, restrições são referentes aos valores das máximas reduções de tempo dos custos c_1 e c_2:

ra2 <= 3;	rb2 <= 1;
ra3 <= 0.5;	rb3 <= 0.5;
ra4 <= 2;	rb4 <= 1;
ra5 <= 0.5;	rb5 <= 0.5;
ra6 <= 1;	rb6 <= 1;
ra8 <= 0.5;	rb8 <= 0.5;
ra10 <= 0.5;	rb10 <= 0.5;
ra11 <= 1;	rb11 <= 1;

2.1.2 Função Objetivo

A função objetivo deste problema visa minimizar o custo total da operação. Sendo que a soma dos custos normais das atividades é constante, esta não foi especificada na função. Deste modo, é apenas minimizada a soma dos custos adicionais relativos às reduções das durações das atividades.

min: 1000 ra2 + 200 ra3 + 800 ra4 + 1600 ra5 + 180 ra6 + 200 ra8 + 100 ra10 + 600 ra11 +
500 rb2 + 100 rb3 + 400 rb4 + 800 rb5 + 90 rb6 + 100 rb8 + 500 rb10 + 300 rb11 +
300 opcao1 + 1100 opcao2 + 200 opcao3 + 400 opcao4;

2.2 Ficheiro de Input

```
min: 1000 ra2 + 200 ra3 + 800 ra4 + 1600 ra5 + 180 ra6 + 200 ra8 + 100 ra10 + 600 ra11 +
500 rb2 + 100 rb3 + 400 rb4 + 800 rb5 + 90 rb6 + 100 rb8 + 500 rb10 + 300 rb11 +
300 opcao1 + 1100 opcao2 + 200 opcao3 + 400 opcao4;

opcao1 + opcao2 <= 1;
opcao3 + opcao4 <= 1;

tf <= 26;

arco_i2: t2 >= ti + 0;
arco_i4: t4 >= ti + 0;
arco_i6: t6 >= ti + 0;
arco_23: t3 >= t2 + 7 - ra2 - rb2;
arco_3f: tf >= t3 + 2 - ra3 - rb3;
arco_42: t2 >= t4 + 9 - ra4 - rb4;
arco_45: t5 >= t4 + 9 - ra4 - rb4;
arco_53: t3 >= t5 + 4 - ra5 - rb5;
arco_5f: t3 >= t5 + 4 - ra5 - rb5;
arco_67: t7 >= t6 + 5 - ra6 - rb6;
arco_610: t10 >= t6 + 5 - ra6 - rb6;
arco_85: t5 >= t8 + 4 - ra8 - rb8;
arco_89: t9 >= t8 + 4 - ra8 - rb8;
arco_108: t8 >= t10 + 8 - ra10 - rb10;
arco_1011: t11 >= t10 + 8 - ra10 - rb10;
arco_119: t9 >= t11 + 7 - ra11 - rb11;

arco_74: t4 >= t7 + 6 - 1 opcao1 - 2 opcao2;
arco_78: t8 >= t7 + 6 - 1 opcao1 - 2 opcao2;
arco_9f: tf >= t9 + 2 - 1 opcao3 - 2 opcao4;

ra2 <= 3;
ra3 <= 0.5;
ra4 <= 2;
ra5 <= 0.5;
ra6 <= 1;
ra8 <= 0.5;
ra10 <= 0.5;
ra11 <= 1;

rb2 <= 1;
rb3 <= 0.5;
rb4 <= 1;
rb5 <= 0.5;
rb6 <= 1;
rb8 <= 0.5;
rb10 <= 0.5;
rb11 <= 1;

bin opcao1, opcao2, opcao3, opcao4;
```

2.3 *Output LPSolve*

```
Value of objective function: 420.00000000

Actual values of the variables:
ra2                              0
ra3                            0.5
ra4                              0
ra5                              0
ra6                              1
ra8                              0
ra10                             0
ra11                             0
rb2                              0
rb3                            0.5
rb4                              0
rb5                              0
rb6                              1
rb8                              0
rb10                             0
rb11                             0
opcao1                           0
opcao2                           0
opcao3                           0
opcao4                           0
tf                              26
t2                              18
ti                               0
t4                               9
t6                               0
t3                              25
t5                              18
t7                               3
t10                              3
t8                              11
t9                              18
t11                             11
```

Figura 2.3: *Output LPSolve*

Analisando o resultado obtido, observa-se que, no total, são aplicadas as reduções da duração das atividades 3 e 6, sendo estas de 1 e 2 U.T. respetivamente. Tendo em conta os custos destas reduções de duração é possível validar o custo total obtido.

$$200 * 0.5 + 100 * 0.5 + 1 * 180 + 1 * 90 = 420$$

2.4 Plano de Execução

Conforme o *output* obtido pelo *LPSolve* e o grafo associado ao projeto, foi desenvolvido o seguinte diagrama de Gantt representativo do plano de execução. Há que notar que cada linha representa a atividade indicada e, por exemplo, a primeira coluna corresponde ao intervalo de tempo entre 0 U.T. e 1 U.T..

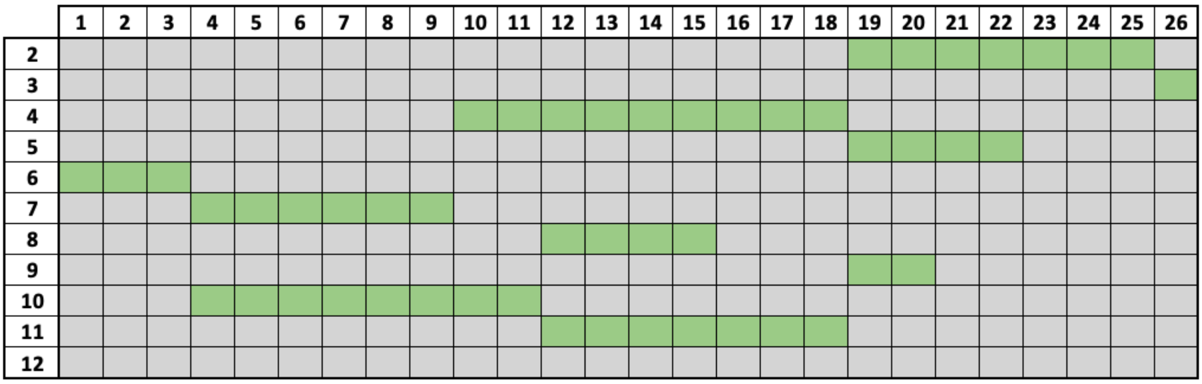

Figura 2.4: Diagrama de Gantt do plano de execução

É possível confirmar que o tempo deste plano é de 26 U.M., tal como é pedido no enunciado.

3. Conclusão

Para a resolução deste problema de investigação operacional, começamos por modular o problema para o poder tratar e resolver com auxílio de software com tal propósito. Em particular, utilizamos o LPSolve, como nos era proposto, na tentativa de obter uma solução ótima para este problema.

Este trabalho ajudou-nos a resolver mais um tipo de problema de programação linear, e permitiu-nos melhorar as nossas capacidades de traduzir problemas concretos em modelações apropriadas que permitam a sua resolução, de um modo mais fácil e perceptível.