Exercícios de Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
Universidade do Minho

versão 0.0

29 de Setembro de 2020

(R) significa exercício resolvido; (*) significa exercício de maior dificuldade.

1 Programação linear: modelos

Exercícios

1. Uma empresa produz 2 tipos de chapéus. Cada chapéu do primeiro tipo requer duas vezes mais trabalho, em termos de tempo, do que um do segundo tipo. Se todos os chapéus fossem do segundo tipo, a empresa poderia produzir 500 chapéus por dia. O mercado limita diariamente as vendas dos chapéus do primeiro e do segundo tipo a 150 e 250 unidades, respectivamente. Os lucros unitários associados aos chapéus são de 8 U.M. e de 5 U.M. para os de primeiro e de segundo tipo, respectivamente.

   a) Formule um modelo de programação linear que lhe permita determinar o número de chapéus de cada tipo a fabricar para maximizar o lucro.

2. Para realojar um conjunto de famílias através de um programa de Habitação Social, é necessário garantir a construção de 5 apartamentos T2 e de 8 apartamentos T3. A construção de apartamentos a custos controlados permite somente a utilização de duas plantas tipo para a divisão de cada piso, conforme apresentado na seguinte Figura:

   Planta 1

T2	T3
T3	T3

   Planta 2

T2	T2	T3
T2	T2	T3

   Custo dos apartamentos

   T2 - 30000 euros

   T3 - 40000 euros

   Considere que não há limitações ao número de pisos a construir. Indique quantos pisos, e de que tipo, se devem construir, de modo a optimizar o investimento feito neste programa, sabendo que os custos de construção de cada piso são iguais à soma dos custos dos apartamentos nele construídos.

3. Uma empresa agrícola possui três quintas, e pretende planear a sua produção agrícola para o próximo ano. A produção em cada quinta é limitada pela área de terreno arável, e pela quantidade de água disponível para irrigação, de acordo com a seguinte tabela:

quinta	área arável (ha)	água para irrigação (m^3)
1	40	60
2	60	80
3	30	37.5

   Sementeiras apropriadas para esta região incluem o trigo, a aveia e o centeio, que diferem no consumo de água para irrigação e no lucro líquido da colheita (por hectare). Por outro lado há limites em termos da área que pode ser atribuída a cada um destes produtos agrícolas:

produto	área máxima (ha)	consumo água (m^3/ha)	lucro líquido ($U.M./ha$)
trigo	60	3	4
aveia	50	2	3
centeio	32.5	1	1

É possível usar a área de cada quinta para apenas uma cultura ou para qualquer combinação de culturas. A empresa pretende usar a mesma proporção de terra arável em cada quinta, para permitir um repouso proporcional de parcelas de terreno. Apresente um modelo de programação linear que permita determinar a solução que maximiza o lucro.

4. Uma loja que está aberta ao público sete dias por semana está a preparar o plano de serviço do seu pessoal. Para garantir o atendimento aos seus clientes, o número de funcionários necessários em cada dia da semana é o indicado na seguinte tabela:

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	sábado	domingo
10	16	12	8	15	18	12

Cada funcionário deve trabalhar 5 dias consecutivos, e descansar os dois dias seguintes. Um funcionário que trabalhe ao sábado recebe um acréscimo de salário de 50% nesse dia. Se trabalhar ao domingo, recebe o dobro do seu salário diário nesse dia.

a) Formule um modelo que permita ao gerente da loja determinar o plano de menor custo.

5. Uma fábrica da indústria de laminagem recebeu 4 encomendas de rolos com as quantidades e larguras indicadas na seguinte tabela:

encomenda	quantidade	largura (mm)
1	50	550
2	200	500
3	400	400
4	100	300

Os rolos de matéria prima, com a largura inicial de 1000 mm, devem ser divididos longitudinalmente, usando padrões de corte, de modo a satisfazer as encomendas dos clientes.

a) Formule um modelo para determinar os tipos de corte a efectuar nos rolos de matéria prima, de modo a minimizar o número de rolos usados.

b) Como seria a função objectivo caso pretendesse minimizar os desperdícios longitudinais gerados nos padrões de corte.

6. Um homem de negócios pode investir o seu dinheiro em dois projectos, podendo o investimento ter início em qualquer momento. Quando o investimento num dado projecto termina, o capital e o respectivo lucro podem ser reinvestidos num outro projecto, ou noutros projectos. O projecto A garante um lucro de 70% (por cada unidade monetária investida) após um ano. O projecto B garante 200% de lucro ao fim de 2 anos.

a) Como deverá ser feito o investimento para maximizar o lucro ao fim de 5 anos?

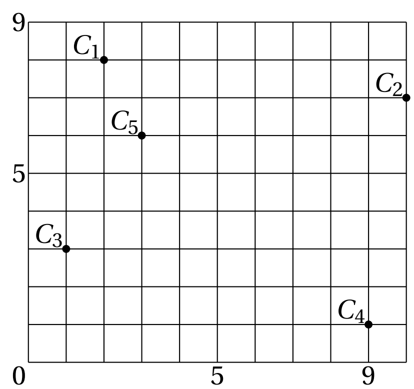
7. Uma companhia que produz 3 tipos de produtos pretende um plano agregado para determinar a melhor forma de utilizar os seus recursos semanais. Cada produto deve ser processado em 3 máquinas diferentes. Quando uma máquina está a funcionar, ela deve ser obrigatoriamente manuseada por um trabalhador. O tempo (em horas) necessário ao processamento de cada tipo de produto em cada uma das máquinas e o lucro associado a cada produto estão indicados na tabela seguinte:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3
Máquina 1	2	3	4
Máquina 2	5	5	6
Máquina 3	3	2	2
Lucro	5 U.M.	8 U.M.	10 U.M.

Existem actualmente 4 máquinas de tipo 1, 3 máquinas de tipo 2, e 4 máquinas de tipo 3. A companhia tem neste momento 10 trabalhadores. A área de produção está aberta 40 horas por semana, e cada trabalhador trabalha 35 horas por semana.

a) Formule um modelo de Programação Linear que permita à companhia determinar o plano óptimo de produção semanal (nota: um trabalhador não tem de passar a semana toda a manusear uma única máquina).

8. O problema de localização consiste em seleccionar os locais onde devem ser estabelecidas instalações de forma a melhor servir um dado conjunto de clientes. Existem 5 clientes, designados por $C_1, \ldots, C_5$, nos locais indicados na figura, com coordenadas $(2,8)^\top$, $(10,7)^\top$, $(1,3)^\top$, $(9,1)^\top$ e $(3,6)^\top$, respectivamente.



Considere que a distância entre os pontos é medida de uma forma rectilínea, ao longo de linhas verticais e horizontais, naquela que é, por vezes, designada por distância de Manhattan. Dados dois pontos $(x_1, y_1)^\top$ e $(x_2, y_2)^\top$, a distância entre eles é dada por $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

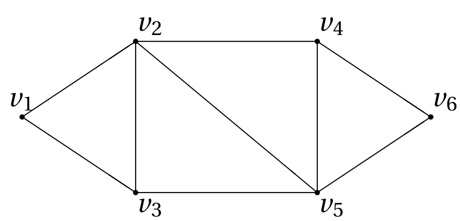
Existem muitas variantes do problema de localização, com diferentes tipos de função objectivo e de restrições. Formule os seguintes problemas usando programação linear. Explique detalhadamente o significado das variáveis de decisão e das restrições do modelo.

a) Decidir a localização de um depósito, designado por D, que vai servir os 5 clientes, com o objectivo de minimizar a soma dos custos de transporte, o que ocorre, por exemplo, em sistemas de distribuição de mercadorias. Os custos de transporte são calculados multiplicando a distância entre o depósito e o cliente pelo número de deslocações mensais, dado pela seguinte tabela:

	C1	C2	C3	C4	C5
# desl.	15	8	17	12	4

b) Decidir a localização de uma instalação, designada por B, com o objectivo de minimizar a maior distância entre B e o cliente mais distante, o que ocorre na localização de serviços de emergência, como, por exemplo, de hospitais ou de bombeiros, em que se pretende minimizar o tempo máximo que decorre até se iniciar a prestação do serviço.

9. Considere o seguinte grafo em que arcos representam os corredores de um museu. Um guarda colocado num vértice do grafo vigia todos os arcos que são incidentes no vértice e vê os guardas (eventualmente) colocados nos vértices adjacentes, e só esses.



Formule modelos para os seguintes problemas:

a) determinar o número máximo de guardas que podem ser colocados em vértices do grafo de modo a que nenhum guarda veja outro guarda.

b) determinar o número mínimo de guardas que são necessários para vigiar todos os corredores do museu.

c) sabendo que é necessário haver guardas em todos os vértices do grafo, determinar o número mínimo de cores de fardas de modo a que cada guarda só veja guardas com fardas de cores todas diferentes (e também diferentes da sua).

10. O método dos mínimos quadrados é a técnica mais usada em estatística para ajustar uma recta a um conjunto de n pontos $(x_1, y_1)^\top, \ldots, (x_n, y_n)^\top$. A programação linear permite encontrar os melhores ajustes quando se pretende minimizar a soma do valores absolutos dos desvios ou minimizar o maior desvio em relação à recta de regressão. Considere o seguinte conjunto de dados: $(1, 12.3)^\top$, $(2, 20.9)^\top$, $(3, 26.4)^\top$, $(4, 33.4)^\top$ e $(5, 39.4)^\top$.

a) Formule o problema de determinar a recta $y = ax + b$ que minimiza a soma dos valores absolutos dos desvios:

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - (ax_i + b) \right|$$

b) Formule o problema de determinar a recta $y = ax + b$ que minimiza o valor do maior desvio absoluto:

$$\min_{a,b} \max_{i} \left| y_i - (ax_i + b) \right|$$

11. (R) O centro de Chebyshev de um poliedro é o centro da maior esfera (no espaço a 2 dimensões, circunferência) que pode ser inscrita no poliedro. Determine o raio r e as coordenadas $(x_c, y_c)^\top$ do centro de Chebyshev dos seguintes poliedros do espaço a duas dimensões:

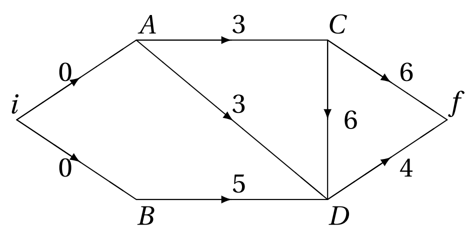
    a) $X_1 = \{x : x_1 + x_2 \leq 4, x_1, x_2 \geq 0\}$

    b) $X_2 = \{x : 3x_1 + 2x_2 \leq 120, 1x_1 + 2x_2 \leq 80, 1x_1 \leq 30, 1x_1 + 1x_2 \geq 30, x_1, x_2 \geq 0\}$

12. Considere um projecto com as actividades e as relações de precedência a seguir indicadas:

Actividade	Duração	Precedências
A	3	–
B	5	
C	6	A
D	4	ABC

A rede de actividade nos nós, com a duração de cada actividade atribuída aos arcos que saem do vértice que representa a actividade é a seguinte:



a) Identifique o caminho crítico.

b) Apresente o modelo de minimização do tempo de conclusão do projecto.

c) Apresente o modelo de determinação do caminho mais longo entre o vértice i e o vértice f, que representam o início e o fim do projecto, respectivamente.

d) O grafo de um projecto é sempre um grafo acíclico. Porquê?

e) Se o grafo tivesse um caminho (não-elementar) entre o vértice i e o vértice f que incluísse um ciclo de comprimento positivo, qual seria a solução óptima do problema de caminho mais longo?

13. (R) Considere um projecto com as actividades e as relações de precedência a seguir indicadas:

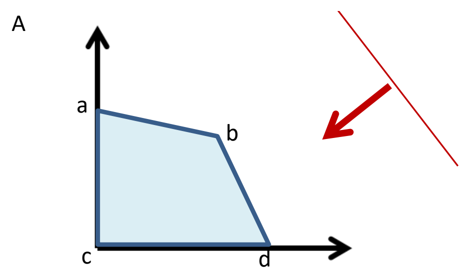
Actividade	Duração	Precedências
A	4	–
B	5	–
C	2	A
D	7	BC
E	6	B
F	2	E
G	1	DF
H	4	E

a) Construa a rede de actividades nos arcos (pista: os vértices do grafo correspondem a instantes de tempo que separam o fim e o início de actividades. Para forçar algumas das relações de precedência a serem respeitadas, pode ser necessário considerar arcos artificiais com duração nula. Isso acontece no exemplo com as actividades D e E, que têm conjuntos diferentes e não-disjuntos de actividades precedentes. A actividade E é precedida pela actividade B, enquanto a actividade D é precedida por B e C).

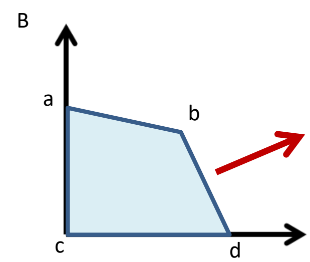
2 Solução gráfica

Quiz

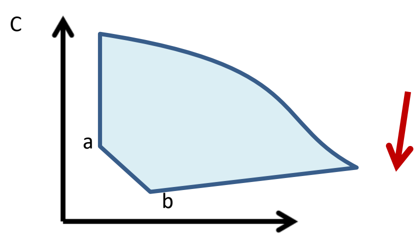
Considere cada domínio (a sombreado) e o respectivo gradiente da função objectivo de um problema que queremos maximizar. Qual é o ponto óptimo? Escolha a opção correcta:



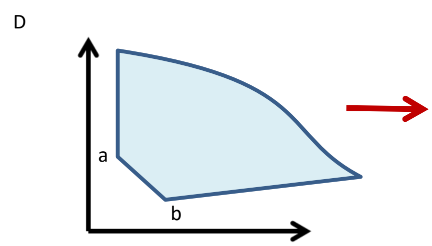
i. b
ii. c



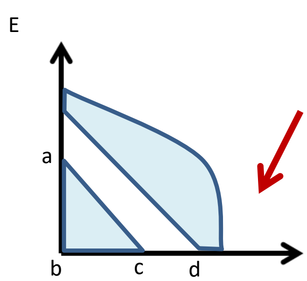
iii. b e d
iv. todos os pontos do segmento bd



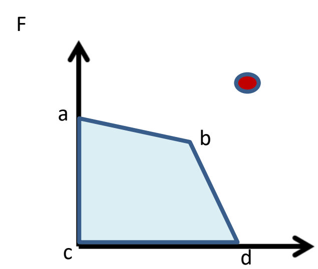
v. b
vi. solução óptima é ilimitada



vii. b
viii. solução óptima é ilimitada



ix. b
x. problema impossível; não há óptimo.



xi. b
xii. qualquer solução admissível é óptima.

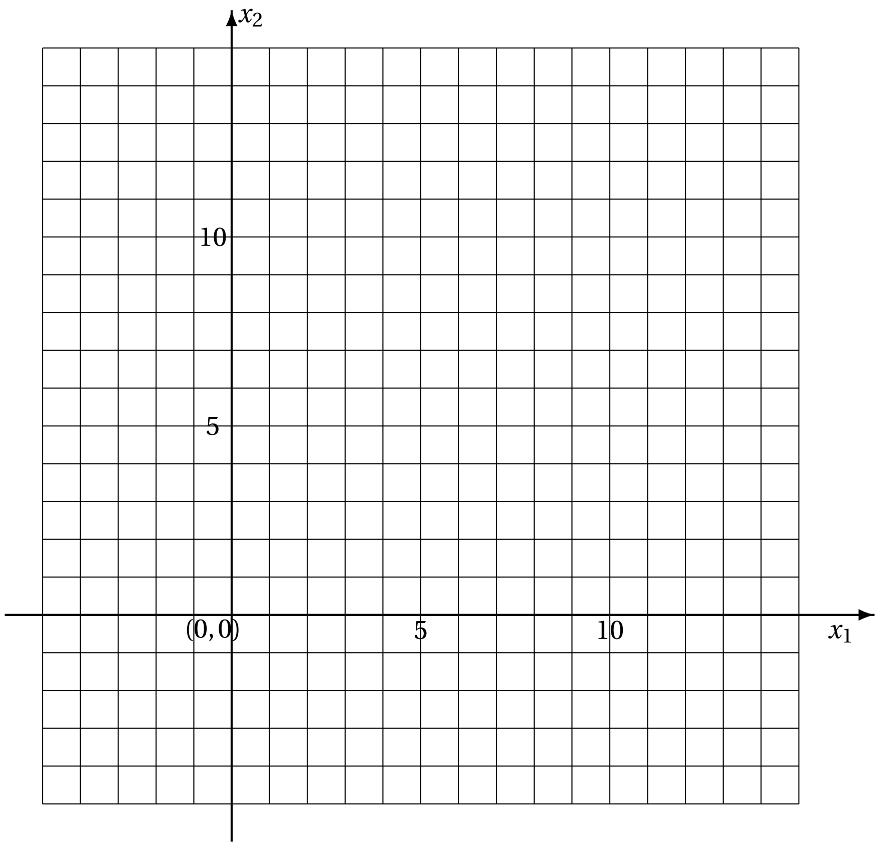
Notas:

- o gradiente da função objectivo é um vector que indica o sentido em que a função objectivo aumenta (a bem dizer, em que aumenta mais por unidade de espaço, porque a função objectivo também aumenta noutros sentidos, mas aumenta menos por unidade de espaço).
- os domínios C e D são ilimitados, sendo abertos na zona indicada por uma curva;
- as restrições do domínio E são contraditórias;
- no caso F, o gradiente é o vector nulo.

Exercícios

Considere o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{array}{llrrrr}
\min z = & 12x_1 & +12x_2 & & \\
\text{suj. a} & x_1 & +x_2 & \geq & 8 \\
& -x_1 & +2x_2 & \geq & 0 \\
& x_1 & & \geq & 4 \\
& & x_2 & \geq & 3 \\
& 2x_1 & -x_2 & \geq & 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$



a) Desenhe o domínio de soluções admissíveis no espaço (x_1, x_2)

b) Identifique todos os vértices admissíveis com um círculo.

c) Desenhe o gradiente da função objectivo (vector aponta no sentido de valores crescentes).

d) Identifique o ponto óptimo do problema, com x^*.

e) Indique as equações das rectas que suportam o ponto óptimo.

f) Calcule as coordenadas (x_1, x_2) do ponto óptimo como intersecção das 2 rectas que o suportam.

g) Verifique que a solução óptima obedece a todas as restrições.

h) Calcule o valor da solução óptima substituindo a solução na função objectivo.

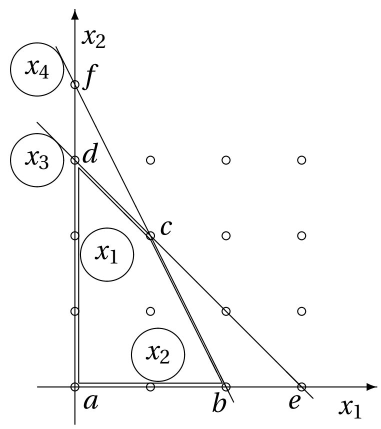
3 Soluções básicas

Quiz 1

Considere o sistema de equações que resulta de acrescentar as variáveis de folga x_3 e x_4 a um conjunto de restrições de um problema de programação linear cujas variáveis de decisão são x_1 e x_2. O domínio correspondente está representado na Figura.

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$



O sistema de equações é $Ax = b$, sendo $A = [A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4]$, $x = [x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4]^\top$ e $b = [b_1 \, b_2]^\top$:

$$\begin{array}{c} A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{array} * \begin{array}{c} x \\ \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}} \end{array} = \begin{array}{c} b \\ \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}} \end{array}$$

Cada vértice de um poliedro corresponde a uma solução básica (admissível) de um sistema de equações. Identifique o par (vértice; variáveis não-básicas nulas) de cada uma das soluções básicas:

$$B = \begin{array}{c} A_1 \quad A_2 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} \end{array} \qquad B^{-1} = \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}} \qquad B^{-1}b = \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}}$$

i. $(a; x_1, x_2)$
ii. $(c; x_3, x_4)$
iii. $(e; x_2, x_3)$

$$B = \begin{array}{c} A_1 \quad A_3 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}} \end{array} \qquad B^{-1} = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{matrix}} \qquad B^{-1}b = \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}$$

iv. $(b; x_2, x_4)$
v. $(d; x_1, x_3)$
vi. $(f; x_1, x_4)$

$$B = \begin{array}{c} A_1 \quad A_4 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}} \end{array} \qquad B^{-1} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}} \qquad B^{-1}b = \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}}$$

vii. $(c; x_3, x_4)$
viii. $(d; x_1, x_3)$
ix. $(e; x_2, x_3)$

$$B = \begin{array}{c} A_3 \quad A_4 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{array} \qquad B^{-1} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \qquad B^{-1}b = \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}}$$

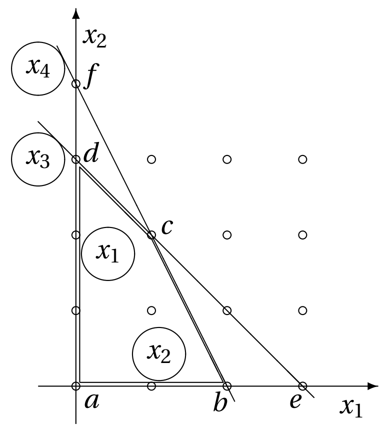
x. $(a; x_1, x_2)$
xi. $(c; x_3, x_4)$
xii. $(f; x_1, x_4)$

Quiz 2

Considere o problema do Quiz 1, sendo a função objectivo $z = 2x_1 + 3x_2$.

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \le 3 \\ 2x_1 + 1x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad\quad = 3 \\ 2x_1 + 1x_2 \quad\quad + 1x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$



Identifique o vértice correspondente a cada quadro simplex ou se o quadro não corresponde a uma solução admissível ou se o quadro não é válido. Pode haver mais do que uma resposta certa.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	0	1	0	-1	1	1
x_2	0	0	1	2	-1	2
	1	0	0	4	-1	8

i. a
ii. c
iii. solução não admissível
iv. quadro não válido

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	-1	1	1
	1	1	0	3	0	9

v. b
vi. d
vii. solução não admissível
viii. quadro não válido

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	1	1	1	0	3
	3	2	1	1	1	7
	1	-2	-3	0	0	0

ix. c
x. d
xi. solução não admissível
xii. quadro não válido

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	2	1	0	1	4
x_3	0	-1	0	1	-1	-1
	1	4	0	0	3	12

xiii. a
xiv. f
xv. solução não admissível
xvi. quadro não válido

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	0	1	0	-1	1	1
x_2	0	0	1	2	-1	2
	1	-2	-3	0	0	0

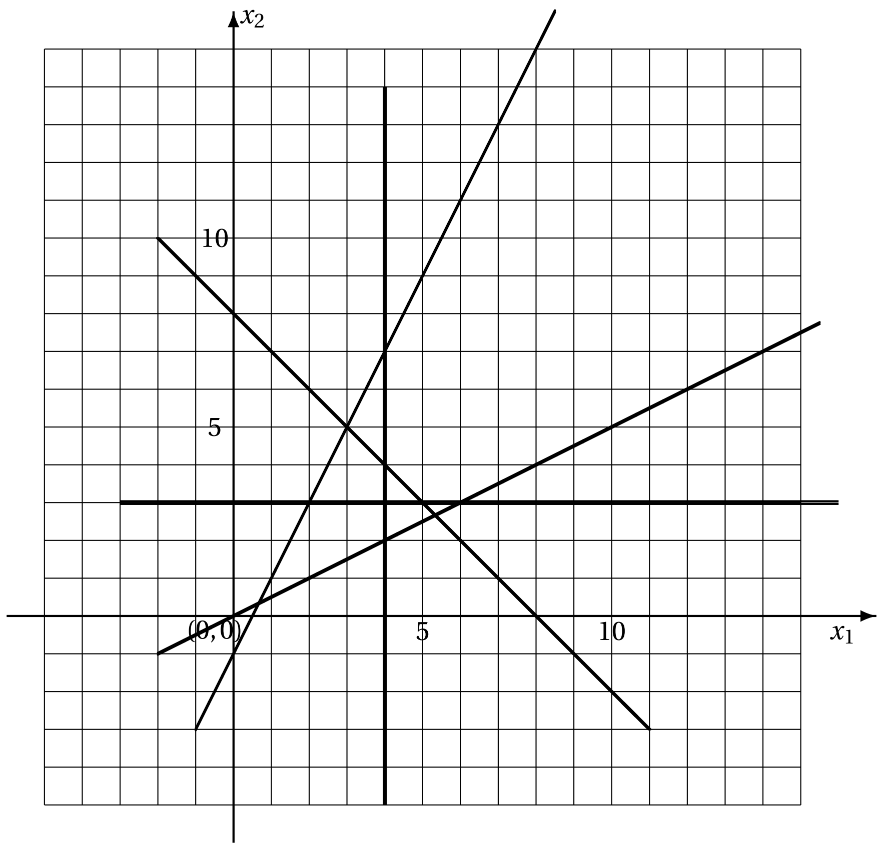
xvii. a
xviii. c
xix. solução não admissível
xx. quadro não válido

Exercícios

1. Considere o seguinte problema de programação linear, e o modelo equivalente depois de acrescentar as variáveis de folga (excesso) adicionais, designadas por x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7 :

$$
\begin{array}{llllll}
\min z = & 12x_1 & +12x_2 & & & \\
\text{suj. a} & x_1 & +x_2 & \geq & 8 \\
 & -x_1 & +2x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1 & & \geq & 4 \\
 & & x_2 & \geq & 3 \\
 & 2x_1 & -x_2 & \geq & 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
\min z = & 12x_1 & +12x_2 & & & \\
\text{suj. a} & x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 8 \\
 & -x_1 & +2x_2 & -x_4 & = & 0 \\
 & x_1 & & -x_5 & = & 4 \\
 & & x_2 & -x_6 & = & 3 \\
 & 2x_1 & -x_2 & -x_7 & = & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$



Um vértice só é admissível se todas as suas coordenadas forem não negativas, ou seja, se $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$.

a) Identifique os vértices admissíveis e os vértices não admissíveis, indicando os valores das respectivas coordenadas nas colunas de x_1 e x_2 do quadro seguinte, ou então, na coluna Observações:

Não OK	, se o vértice for um vértice não-admissível do domínio
sem inversa	, se as colunas das variáveis básicas forem linearmente dependentes

Em cada linha do quadro, vai haver informação sobre o ponto (vértice) resultante da intersecção das duas rectas correspondentes às restrições em que as variáveis das duas primeiras colunas (variáveis não-básicas) são nulas. As restantes variáveis são as que formam a matriz da base B.

A título ilustrativo, na primeira linha, as variáveis $x_1 = x_2 = 0$ correspondem às rectas em que as restrições $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ são obedecidas como igualdades; na última linha, as variáveis $x_6 = x_7 = 0$ correspondem às rectas $x_2 = 3$ e $2x_1 - x_2 = 1$, respectivamente.

(Sugestão: utilize o excel "Quiz Solucoes Basicas.xls"para preencher a informação do quadro, em alternativa a calcular os valores usando o sistema de equações).

vars não-básicas		variáveis básicas					x_1	x_2	Observações
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	0	0	
x_1	x_3	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7	0		
x_1	x_4	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	0		
x_1	x_5	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	0		
x_1	x_6	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	0		
x_1	x_7	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	0		
x_2	x_3	x_1	x_4	x_5	x_6	x_7		0	
x_2	x_4	x_1	x_3	x_5	x_6	x_7		0	
x_2	x_5	x_1	x_3	x_4	x_6	x_7		0	
x_2	x_6	x_1	x_3	x_4	x_5	x_7		0	
x_2	x_7	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6		0	
x_3	x_4	x_1	x_2	x_5	x_6	x_7			
x_3	x_5	x_1	x_2	x_4	x_6	x_7			
x_3	x_6	x_1	x_2	x_4	x_5	x_7			
x_3	x_7	x_1	x_2	x_4	x_5	x_6			
x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7			
x_4	x_6	x_1	x_2	x_3	x_5	x_7			
x_4	x_7	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6			
x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7			
x_5	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6			
x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			

2. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 4x_2 \\ \text{suj.} & 2x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ & 7x_1 + 2x_2 \leq 49 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Desenhe o domínio de soluções admissíveis no espaço (x_1, x_2).

b) Identifique graficamente o ponto óptimo, e indique o valor das variáveis de decisão no ponto óptimo e o valor do óptimo do problema.

3. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{suj.} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Determine todas as soluções básicas óptimas alternativas.

b) Determine a expressão analítica (das coordenadas dos pontos) da aresta de soluções óptimas alternativas, em que as soluções não-básicas (da aresta) são representadas como uma combinação convexa das soluções básicas óptimas alternativas determinadas na alínea anterior.

4. Considere o seguinte modelo de programação linear, em que x_1 e x_2 são variáveis de decisão, e designe por s_1, s_2 e s_3 as variáveis de folga associadas às restrições:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 1x_2 \\ \text{suj. a} & +x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Desenhe o espaço de soluções admissíveis no plano x_1, x_2, e o gradiente da função objectivo.

b) Identifique o vértice óptimo e as respectivas variáveis básicas e não-básicas. Calcule os valores das variáveis básicas e não-básicas e do óptimo do problema. Justifique sucintamente, e apresente os cálculos efectuados.

c) Identifique um vértice adjacente ao vértice óptimo. Suponha que é feito um movimento do vértice óptimo para esse vértice adjacente. Identifique a variável que entra na base e a que sai da base nesta iteração.

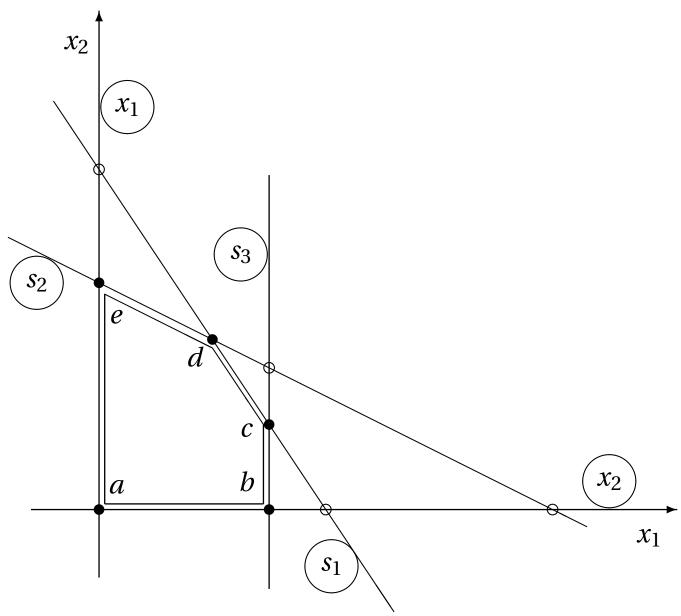
5. Para o exercício anterior.

a) Calcule os valores das variáveis básicas e não-básicas do mesmo vértice adjacente. De seguida, indique os valores das variáveis x_1, x_2, s_1, s_2 e s_3 do ponto a meio da aresta (segmento) que une o vértice óptimo e o vértice adjacente. Como é que se pode identificar que esse ponto não é um vértice do domínio?

4 Método simplex

Quiz

Considere o vértice b da figura:



1. No vértice b, as variáveis não-básicas são:

   (a) x_1, s_3

   (b) x_2, s_3

   (c) x_1, s_1, s_2

   (d) x_1, x_2

2. No vértice c, as variáveis não-básicas são:

   (a) x_2, s_3

   (b) x_1, s_3

   (c) x_2, s_1, s_2

   (d) s_1, s_3

3. Quando se caminha ao longo da aresta $[bc]$, desde b até c, qual a variável não-básica do vértice b que aumenta e valor?

   (a) x_1

   (b) x_2

   (c) s_1

4. Quando se caminha ao longo da aresta $[bc]$, desde b até c, como varia s_2?

   (a) aumenta

(b) diminui

(c) mantém o valor

5. Quando se caminha ao longo da aresta $[bc]$, desde b até c, como varia x_1?

   (a) aumenta

   (b) diminui

   (c) mantém o valor

6. Quando se caminha ao longo da aresta $[bc]$, desde b até c, qual a primeira variável básica do vértice b que atinge o valor 0?

   (a) x_1

   (b) x_2

   (c) s_1

7. Como são os sinais dos coeficientes dos elementos da coluna de x_2 do quadro simplex correspondente ao vértice b?

   (a) $(x_1, s_1, s_2)^\top = (0, +, +)^\top$

   (b) $(x_1, s_1, s_2)^\top = (+, +, +)^\top$

   (c) $(x_1, s_1, s_2)^\top = (0, -, -)^\top$

8. A execução das instruções de um algoritmo:

   (a) deve terminar após um número polinomial (em função de um (ou mais) parâmetro(s) que caracteriza(m) a dimensão dos dados do problema) de passos e de decisões

   (b) pode requerer um número exponencial (em função de um (ou mais) parâmetro(s) que caracteriza(m) a dimensão dos dados do problema) de passos e de decisões

9. Um algoritmo:

   (a) deve terminar após um número finito de passos e de decisões

   (b) pode requerer um número infinito de passos e de decisões desde que sejam produzidas soluções

10. Quando se classifica um problema como NP-completo (ou NP-difícil), a designação NP significa:

    (a) Não-Polinomial

    (b) Não-determinístico Polinomial

11. Assuma que, num problema de programação linear, a função objectivo aumenta em todos os pivôs e que o ponto óptimo tem um valor finito. Escreva um argumento que mostra que, neste caso, o método simplex termina num número finito de passos

Exercícios

1. Determine a solução óptima do seguinte problema de programação linear usando o método simplex.

$$\begin{array}{lrcr} \max & 1x_1 + 2x_2 & & \\ \text{suj. a} & -1x_1 + 1x_2 & \leq & 4 \\ & 1x_2 & \leq & 6 \\ & 1x_1 + 1x_2 & \leq & 10 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Considere o seguinte problema de programação linear com apenas uma restrição.

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5 \\ \text{suj. a} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{array}$$

a) Construa o quadro simplex com a solução básica inicial para este problema.

b) Numa solução básica deste problema, há quantas variáveis básicas e não básicas?

c) Sabendo que apenas uma das variáveis irá ter valor positivo na solução óptima, qual deverá ser a variável básica na solução óptima?

d) Qual a solução óptima do problema e qual o valor óptimo da função objectivo?

e) Resolva o problema pelo método simplex para verificar o resultado obtido na alínea anterior.

3. Determine a solução óptima do seguinte problema de programação linear usando o método simplex.

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \\ \text{suj. a} & x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

4. Determine a solução óptima do seguinte problema de programação linear usando o método simplex (verificar com Quiz Simplex.xls):

$$\begin{array}{ll} \max & 8y_1 + 0y_2 + 4y_3 + 3y_4 + 1y_5 \\ \text{suj. a} & 1y_1 - 1y_2 + 1y_3 + 0y_4 + 2y_5 \leq 12 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 1y_4 - 1y_5 \leq 12 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{array}$$

5. Determine a solução óptima do seguinte problema de programação linear usando o método simplex:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \\
\text{suj. a} & x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 46 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 10 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

6. Determine a solução óptima do seguinte problema de programação linear usando o método simplex:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 8x_5 \\
\text{suj. a} & x_3 - 4x_4 + x_5 \leq 10 \\
& -5x_1 + x_2 + 4x_4 + 5x_5 \leq 5 \\
& -3x_1 + 6x_3 + x_4 + 9x_5 \leq 5 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0
\end{array}
$$

5 Método simplex - situações particulares

Quiz 1

Identifique cada uma das situações que ocorrem em cada um dos seguintes problemas de maximização. Para confirmar, desenhe o domínio de soluções admissíveis e interprete graficamente as situações, acompanhando com a resolução utilizando o algoritmo Simplex.

- Solução óptima degenerada ☐
- Solução temporariamente degenerada ☐
- Soluções óptimas alternativas ☐
- Espaço não limitado e solução óptima ilimitada ☐
- Espaço não limitado e solução óptima limitada ☐

$$\begin{aligned} \max z = {} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{suj. a} \quad & x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & 4x_1 + 6x_2 \le 8 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

A	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	0	1	0	-1	1/2	1
x_2	0	0	1	2/3	-1/3	2/3
	1	0	0	0	1/2	4

$$\begin{aligned} \max z = {} & 2x_1 + x_2 \\ \text{suj. a} \quad & x_1 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	0	1	0	1	0	4
x_2	0	0	1	1	-1	2
	1	0	0	3	-1	10

$$\begin{aligned} \max z = {} & 2x_1 - x_2 \\ \text{suj. a} \quad & x_1 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

C	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	0	1	0	1	0	4
x_2	0	0	1	1	-1	2
	1	0	0	3	1	6

$$\begin{aligned} \max z = {} & x_1 + 2x_2 \\ \text{suj. a} \quad & 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ & x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

D	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	0	1	0	3	-5	0
x_2	0	0	1	-1	2	2
	1	0	0	1	-1	4

$$\begin{aligned} \max z = {} & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{suj. a} \quad & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

E	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_2	0	4/3	1	0	1/3	4
s_1	0	2/3	0	1	-1/3	0
	1	1/3	0	0	4/3	16

Exercícios

1. Considere o problema de programação linear $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas. Para cada caso, construa um pequeno exemplo ou contra-exemplo, em que mostre com detalhe o seu ponto de vista.

   a) Se o domínio de soluções admissíveis for ilimitado, então a solução óptima é ilimitada.

   b) Se existir um coeficiente negativo na linha da função objectivo de um quadro simplex de um problema de maximização, após efectuar o pivô, obtém-se sempre uma nova solução com um valor de função objectivo maior.

2. Quando há uma variável não-básica atractiva (cujo valor interessa aumentar) e se faz um pivô do método simplex:

   (a) a função objectivo aumenta sempre

   (b) a função objectivo pode não aumentar

3. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{suj.} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

   a) Determine a solução óptima do problema.

   b) O espaço de soluções é limitado ou ilimitado? Justifique.

   c) Existem soluções óptimas alternativas? O valor da solução óptima é limitado ou ilimitado? Justifique.

   d) Diga o que se pode concluir em relação ao espaço de soluções e ao valor do óptimo.

   e) (R) Determine a expressão analítica (das coordenadas dos pontos) do raio de soluções óptimas alternativas.

4. Considere o seguinte problema de programação linear de maximização:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	
s_1	0	1	-1	1	0	12
s_2	0	1	2	0	1	12
	1	-8	0	0	0	0

   a) Resolva o problema utilizando o método Simplex. A resolução envolve vários pivôs degenerados. Relembre que a regra é: "Dada uma coluna pivô, a linha pivô (variável básica que sai da base) é a linha com **menor razão** (lado direito/coluna pivô) **positiva** (*i.e.*, coeficiente da coluna pivô >0)". Em vários pivôs, a menor razão é 0, dando origem a pivôs degenerados.

5. Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 10x_2 + x_3 \\ \text{suj.} & 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 50 \\ & x_1 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Em que direcção é que o espaço de soluções é ilimitado?

b) O que se pode concluir em relação à solução óptima do problema?

6. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 \\ \text{suj.} & x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Resolver pelo método das duas fases.

6 Definição matricial

Quiz

Considere o problema de programação linear cujos quadros inicial e final (óptimo) são apresentados de seguida.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	s_1	s_2	
s_1	1	-1	1	0	2	1	0	12
s_2	1	2	0	1	-1	0	1	12
	-8	0	-4	-3	-1	0	0	0

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	s_1	s_2	
y_1	1	-1	1	0	2	1	0	12
y_4	0	3	-1	1	-3	-1	1	0
	0	1	1	0	6	5	3	96

a) Usando a definição matricial do problema de programação linear, identifique as seguintes matrizes do quadro inicial:

$$B = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} \qquad c_B = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \end{array}$$

b) Verifique que:

$$B^{-1}B = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

c) Usando a definição matricial do problema de programação linear, verifique que as seguintes matrizes estão correctas no quadro óptimo:

$$B^{-1}b = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \quad \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \quad \\ \hline \end{array}$$

$$B^{-1}A = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \end{array}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \end{array}$$

$$(c_B B^{-1})A - c = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \end{array}$$

$$(c_B B^{-1})b = \begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \quad \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \end{array}$$

Exercícios

1. Considere o seguinte problema e a respectiva solução óptima:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{suj.} & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_1	1	2	1	1	0	8
x_5	0	3	-1	1	1	12
	0	3	3	2	0	16

a) Indique as matrizes B e c_B correspondentes à solução óptima. Verifique que o quadro óptimo está correcto, efectuando os cálculos: $BB^{-1}, B^{-1}A, B^{-1}b, c_B B^{-1}A - c, c_B B^{-1}$ e $c_B B^{-1}b$.

Considere de uma forma independente as situações descritas nas seguintes alíneas:

b) Suponha que o coeficiente a_{23}, da segunda restrição e da variável x_3, mudava de -2 para 1. Usando a definição matricial, determine as alterações que haveria no quadro óptimo. Será necessário reoptimizar o quadro para obter a nova solução óptima?

c) Se fosse proposta uma nova actividade, descrita pela coluna $x_4 = (1,2)^\top$ e com lucro associado $c_4 = 4$, será que essa actividade seria atractiva com respeito à solução óptima. Em caso afirmativo, determine a nova solução óptima.

d) Se a quantidade disponível do recurso 1 fosse 10, e não 8, qual seria a nova solução óptima e qual o seu valor?

2. Os quadros abaixo apresentados correspondem à formulação e à solução óptima de um problema de planeamento da produção. Os coeficientes da função objectivo representam os lucros unitários dos três produtos actualmente fabricados pela companhia e as variáveis $s_1,\ s_2,\ s_3$ correspondem às variáveis de folga das restrições, respectivamente.

$$\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x3 \\ \text{suj.} & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \\ & 2x_1 + x_2 \le 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 150 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	-1/2	0	10
x_2	2	1	0	0	1	0	20
s_3	-3/2	0	0	-1/2	-3/2	1	100
	5	0	0	5	15	0	500

a) Se fosse proposta uma nova actividade (x_4) com lucro unitário de 40 e coeficientes de 4, 1, 0, respectivamente, será que essa actividade seria atractiva? Em caso afirmativo, determine a nova solução óptima.

b) Se o coeficiente de x_1 na função objectivo fosse reduzido de 30 para 25 e, simultaneamente, o coeficiente de x_2 fosse reduzido de 20 para 15, será que as variáveis básicas da solução óptima se alterariam? Em caso afirmativo, determine a nova solução óptima.

c) A companhia tem a possibilidade de ou aumentar a capacidade da primeira restrição de 40 para 110 ou aumentar a capacidade da segunda restrição de 20 para 40. Qual será a melhor alternativa?

(nota: considere as alíneas independentes; resolva-as sem recorrer ao método simplex.)

3. Considere os seguintes quadros inicial e óptimo de um problema de programação linear.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	1	2	4	1	0	3
s_2	3	4	3	0	1	8
	-2	-3	-3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_1	1	0	-5	-2	1	2
x_2	0	1	9/2	3/2	−1/2	1/2
	0	0	1/2	1/2	1/2	11/2

a) Se existisse uma alteração do elemento b_2, passando de 8 para 10 unidades, será que a solução óptima teria o mesmo conjunto de variáveis básicas? Porquê?

b) Determine a variação existente na linha da função objectivo do quadro óptimo se o coeficiente c_3, actualmente igual a 3, passasse a ser igual a 4. Diga se a variável x_3 passaria a ser atractiva.

c) Determine a fórmula geral da variação existente na linha da função objectivo do quadro óptimo quando o coeficiente c_3 é igual a $3+\alpha$.

d) Quando há uma variação descrita na alínea anterior, a função objectivo passa a ser $z' = 2x_1 + 3x_2 + (3+\alpha)x_3$. Substitua os valores de x_1 e x_2 (*i.e.*, $x_1 = 2 + 5x_3 + 2s_1 - s_2$ e $x_2 = 1/2 - 9/2x_3 - 3/2s_1 + 1/2s_2$) na expressão para obter o valor de z' expresso em função das variáveis não-básicas x_3, s_1 e s_2.

e) Determine a fórmula geral da variação existente na linha da função objectivo do quadro óptimo quando o coeficiente c_1 é igual a $2+\alpha$.

f) Se fosse proposta uma nova actividade, descrita pela coluna $x_4 = (3,5)^\top$ e com lucro associado $c_4 = 5$, será que essa actividade seria atractiva com respeito à solução óptima. Em caso afirmativo, determine a nova solução óptima.

7 Análise de sensibilidade

Quiz 1

1. Considere o seguinte problema de determinar a mistura óptima de rações para galinha, com 3 nutrientes, identificados por nut1, nut2 e nut 3, respectivamente, com 5 rações à venda no mercado, em que a variável de decisão x_j é a quantidade de ração j da mistura.

$$
\begin{array}{rllllll}
\texttt{min} & 6x_1 & +8x_2 & +2x_3 & +1x_4 & +9x_5 & \\
\texttt{nut1:} & 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & +2x_5 & \geq 3 \\
\texttt{nut2:} & 1x_1 & +4x_2 & & +1x_4 & +1x_5 & \geq 5 \\
\texttt{nut3:} & 2x_1 & +2x_2 & & & +2x_5 & \geq 4 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

A solução óptima do modelo é $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ e $x_4 = x_5 = 0$, e os relatórios de análise de sensibilidade são:

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	16	16	16	16
x1	5	7	$-\infty$	0
x2	6	9	$-\infty$	0
x3	2.2E-16	3	$-\infty$	0
x4	0.66666	$+\infty$	3	0
x5	8	$+\infty$	1	0

Duals			
Variables	value	from	till
objective	16	16	16
nut1	2	2	$+\infty$
nut2	0.66666	2	8
nut3	1.66666	2.5	6
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$
x3	0	$-\infty$	$+\infty$
x4	0.33333	-3	3
x5	1	$-\infty$	1

(a) Se a dose diária recomendada (DDR) do nutriente2 passasse a ser 8 (em vez dos 5 actuais), qual seria o custo óptimo da alimentação das galinhas?

i. 19 = 16 + (8 - 5) * 1 (1 é o custo da ração 4)
ii. 18 = 16 + (8 - 5) * 0.666666
iii. não é possível saber, era preciso resolver o problema outra vez
iv. não é possível saber exactamente, mas é ≥ 19

(b) Se a DDR do nutriente2 passasse a ser 9 (em vez dos 5 actuais), qual seria o custo óptimo da alimentação das galinhas?

i. 20 = 16 + (9 - 5) * 1 (1 é o custo da ração 4)
ii. 18.66666 = 16 + (9 - 5) * 0.666666
iii. não é possível saber exactamente, mas é ≤ 18.66666
iv. não é possível saber exactamente, mas é ≥ 18.66666

(c) Qual o preço de venda que o produtor da ração 5 deveria marcar (actualmente ela é vendida a 9 U.M. /kg) para conseguir vendê-la e lucrar o máximo possível ?

i. 4.5 U.M. /kg (50% de desconto em cartão)

ii. um pouco menor do que 8 U.M. /kg
iii. um pouco menor do que 1 U.M. /kg
iv. só se pode saber por tentativa e erro

(d) Se o custo da ração 1 aumentasse de 6 para 7, qual seria o custo óptimo da mistura? Justifique.

(e) Se, face à alteração da DDR do nut3 referida na alínea c), surgisse no mercado uma nova ração semelhante à ração 1, mas mais rica no nut3, com a composição $[1,1,3]^\top$, ao custo de 7 U.M./kg, será que essa ração seria atractiva? Justifique.

Quiz 2

Considere o seguinte problema de programação linear e os respectivos quadro óptimo e relatório de sensibilidade.

$$\begin{array}{llllll}
\max & 60x_1 & +40x_2 & +30x_3 & \\
\text{suj.} & 3x_1 & +2x_2 & & \leq 120 \\
& 4x_1 & & +x_3 & \leq 60 \\
& & x_2 & +2x_3 & \leq 30 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & & &
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	$-19/4$	1	$-3/4$	-2	15
x_1	1	0	$1/4$	0	$1/4$	0	15
x_2	0	1	2	0	0	1	30
	0	0	65	0	15	40	2100

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	2100	2100	2100	2100
x1	0	$+\infty$	$-\infty$	0
x2	7,50000	$+\infty$	$-\infty$	0
x3	$-\infty$	95	15	0

Duals			
Variables	value	from	till
objective	2100	2100	2100
R1	0	$-\infty$	$+\infty$
R2	15	0	80
R3	40	0	37.5
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$
x3	-65	-3.15789	15

1. Estaria disposto a pagar, no máximo, ... para aumentar a quantidade do recurso disponível relativo à primeira restrição do problema.

2. Estaria disposto a pagar, no máximo, ... para aumentar a quantidade do recurso disponível relativo à segunda restrição do problema.

3. A quantidade do recurso disponível relativo à segunda restrição pode variar entre .... e .... sem haver alteração das variáveis da solução básica óptima, s_1, x_1 e x_2.

4. Quando a quantidade do recurso disponível relativa à **segunda** restrição varia entre .... e ...., o valor da função objectivo varia entre .... e ....

5. A actividade a que corresponde a variável não-básica x_3 tornar-se-ia atractiva se o respectivo coeficiente da função objectivo, c_3, tivesse um valor superior a ....

6. A actividade a que corresponde a variável básica x_1 deixaria de ser atractiva se o respectivo coeficiente da função objectivo, c_1, tivesse um valor inferior a ....

Exercícios

1. Considere os seguintes quadros inicial e óptimo de um problema de programação linear.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	1	2	4	1	0	3
s_2	3	4	3	0	1	8
	-2	-3	-3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_1	1	0	-5	-2	1	2
x_2	0	1	9/2	3/2	$-1/2$	1/2
	0	0	1/2	1/2	1/2	11/2

a) Determine as variações admissíveis para o coeficiente b_2, igual a 8, sem haver alterações nas variáveis básicas óptimas.

b) Determine as variações admissíveis para o coeficiente c_1, igual a 2, sem haver alterações nas variáveis básicas óptimas.

c) Determine as variações admissíveis para o coeficiente c_3, igual a 3, sem haver alterações nas variáveis básicas óptimas.

2. Considere o seguinte problema de programação linear e a respectiva solução óptima:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 2x_1 + x_2 & \\
\text{suj.} & x_1 - 2x_2 & \leq 4 \\
 & x_2 & \leq 2 \\
 & x_1,\ x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	0	1	0	1	2	8
x_2	0	0	1	0	1	2
	1	0	0	2	5	18

a) Desenhe o domínio de soluções admissíveis no espaço (x_1, x_2).

b) Quanto é que estaria disposto a pagar para aumentar o recurso da restrição 1? Justifique.

c) Considere que o valor do recurso 1 passa a ser 5 unidades. Redesenhe o domínio, e determine o valor da nova solução óptima.

d) Quanto é que estaria disposto a pagar para aumentar o recurso da restrição 2? Justifique.

e) Considere que o valor do recurso 2 passa a ser 3 unidades. Redesenhe o domínio, e determine o valor da nova solução óptima.

f) Da observação do desenho da alínea a), determine os limites de variação do recurso 1 (que apareceriam no relatório de análise de sensibilidade) dentro dos quais a variação do valor da função objectivo permanece igual à da alínea b). Justifique.

g) Da observação do desenho da alínea a), determine os limites de variação do recurso 2 (que apareceriam no relatório de análise de sensibilidade) dentro dos quais a variação do valor da função objectivo permanece igual à da alínea d). Justifique.

3. O Departamento de Marketing de uma empresa de mobiliário metálico para escritório sugeriu à administração o lançamento de novos modelos de secretárias e estantes, em substituição dos modelos actuais. Um estudo de mercado realizado mostra que não existe nenhum problema em relação à venda de estantes, enquanto que, em relação à venda de secretárias, as vendas mensais não deverão ultrapassar as 200 unidades. O Departamento de Produção, depois de analisar os novos modelos, concluiu que os tempos de produção são os seguintes:

	Horas-Máquina	Horas-Homem
Secretárias	1	2
Estantes	2	1
Disponibilidade Mensal	400	600

Foi ainda estimado que o lucro unitário será de 20 U.M. para as secretárias e de 10 U.M. para as estantes. A empresa recorreu a um modelo de programação linear para determinar o plano de produção mensal que maximiza o lucro total, tendo obtido o seguinte resultado:

	x_s	x_e	s_1	s_2	s_3	
x_e	0	1	1/2	0	-1/2	100
s_2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_s	1	0	0	0	1	200
	0	0	5	0	15	5000

sendo:
x_s - No. de secretárias a produzir mensalmente
x_e - No. de estantes a produzir mensalmente
s_1 - Folga na disponibilidade de Horas-Máquina
s_2 - Folga na disponibilidade de Horas-Homem
s_3 - Folga na limitação do mercado de secretárias

Assim, devem ser produzidas 200 secretárias e 100 estantes com um lucro mensal de 5000 U.M.

a) A empresa foi contactada por uma cadeia de hipermercados que pretende comprar qualquer quantidade que ela seja capaz de produzir de um modelo exclusivo de estantes. Os dados técnico-económicos deste novo modelo estão na seguinte tabela:

	Horas-Máquina	Horas-Homem	Lucro(U.M.)
Estante para Hipermercado	4	1	25

Deverá a empresa aceitar este novo contrato?

b) Em face da proposta do hipermercado, há ainda a possibilidade de sub-alugar mais 700 Horas-máquina (além das 400 actualmente disponíveis), o que traria custos adicionais de 2000 U.M. por mês. Acha aconselhável a contratação do sub-aluguer? Em caso afirmativo, qual será a nova solução óptima?

4. Uma gelataria vende 3 tipos de gelados os preços indicados na seguinte tabela:

gelado	preço (U.M.)
morango-baunilha	60
morango-chocolate	40
baunilha-chocolate	30

A composição dos gelados é a indicada na seguinte tabela:

gelado	morango	baunilha	chocolate
morango-baunilha	3	4	
morango-chocolate	2		1
baunilha-chocolate		1	2

a) Se as quantidades de morango, baunilha e chocolate estivessem limitadas a 120, 60 e 30, respectivamente, qual seria a venda que maximizaria a facturação?

b) A solução óptima não inclui a venda de gelados de baunilha-chocolate. Qual seria o preço mínimo que eles deveriam ter para o seu fabrico se tornar atractivo?

c) Se o preço de gelados morango-baunilha não fosse tão elevado, possivelmente iria vender gelados de baunilha-chocolate. Verifique se a afirmação é correcta, e dentro de que limites.

d) Se a quantidade de chocolate disponível fosse 50 e não 30, qual seria a decisão óptima?

5. Considere o seguinte problema de programação linear e o respectivo quadro óptimo.

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 + 4x_2 \\ \text{suj.} & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	-1	0	1	0	-2	1
s_2	2	0	0	1	1	6
x_2	1	1	0	0	1	4
	5	0	0	0	4	16

a) Determine quais as variações admissíveis para o coeficiente c_2, igual a 4, sem haver alterações no conjunto de variáveis básicas óptimas.

b) Considere uma nova actividade, descrita pela coluna $x_3 = (1, 1, -1)^\top$ e com lucro associado de -1. Avalie se a actividade deve ser ou não executada, e qual a nova solução óptima.

6. Considere o seguinte problema de planeamento de 3 artigos em que o objectivo é maximizar o lucro, e os respectivos quadro óptimo e relatório de sensibilidade. A primeira e a terceira restrições dizem respeito a mão-de-obra, cujo custo unitário é de 10 U.M./hora. A seguinte tabela fornece os valores dos custos unitários e dos preços unitários de venda, mostrando como se obteve o valor do lucro unitário dos artigos:

	Art. 1	Art. 2	Art. 3
custo mão-de-obra [U.M./art.]	10x3=30	10x2 = 20	10x3 = 30
outros custos [U.M./art.]	10	10	10
preço venda [U.M./art.]	48	36	47

$$\begin{array}{lllll} \max & 8x_1 & +6x_2 & +7x_3 & \\ \text{suj.} & 2x_1 & +1x_2 & +2x_3 & \leq 80 \\ & 1x_1 & & & \leq 40 \\ & 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & \leq 60 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	1	1	0	-1	20
s_2	0	0	-1	-1	1	1	40
x_2	0	1	0	-1	0	2	40
	0	0	1	2	0	4	400

Duals			
Variables	value	from	till
objective	400	400	400
R1	2	60	100
R2	0	$-\infty$	$+\infty$
R3	4	40	80
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$
x3	-1	-20	+20

a) No máximo, quanto estaria disposto a pagar para aumentar o volume de mão-de-obra disponível relativa ao recurso 1. Justifique.

b) Que quantidade adicional de recurso 1 é que estaria disposto a adquirir ao preço indicado na alínea anterior.

c) Qual seria a nova solução óptima, e o lucro, caso adquirisse 10 unidades de recurso (aumentando o volume de mão-de-obra de 80 para 90) . Justifique o valor do lucro obtido, calculando os novos valores de facturação e dos custos.

d) Faça a análise matricial para derivar os limites de variação do recurso 1, que serve para verificar que a informação dada pelo relatório (relativa à alínea b) está correcta.

f) Se fosse proposta uma nova actividade (x_4) com lucro unitário de 12 e coeficientes nas linhas iguais a 1, 0, 2, respectivamente, será que essa actividade seria atractiva? Em caso afirmativo, determine a nova solução óptima usando o método simplex.

8 Dualidade

Quiz 1

No problema da dieta, o avicultor pretende escolher a mistura de rações para alimentar as galinhas a um custo mínimo. O modelo é $\min\{cx : Ax \geq b, x \geq 0\}$, $c = [c_j]$, $A = [a_{ij}]$ e $b = [b_i]$, sendo c_j : custo da ração j, b_i : necessidade de nutriente i, e a_{ij} : quantidade de nutriente i na ração j.

$$
\begin{array}{lllllll}
\texttt{min} & 6x_1 & +8x_2 & +2x_3 & +1x_4 & +9x_5 & \\
\texttt{nut1:} & 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & +2x_5 & \geq 3 \\
\texttt{nut2:} & 1x_1 & +4x_2 & & +1x_4 & +1x_5 & \geq 5 \\
\texttt{nut3:} & 2x_1 & +2x_2 & & & +2x_5 & \geq 4 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

A solução óptima do modelo é $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ e $x_4 = x_5 = 0$. A mistura de 1 unidade de cada umas das rações 1, 2 e 3 satisfaz as necessidades nutricionais a um custo mínimo, de 16.

O essencial é: *o avicultor compra os nutrientes das rações.* As rações escolhidas são competitivas, porque têm um custo que reflecte os valores associados aos nutrientes. *Cada nutriente tem o que se designa por preço sombra.* Uma ração não é competitiva se o seu custo exceder o valor dos seus nutrientes. Por exemplo, o avicultor não escolhe a ração 5, porque a mistura das rações 1 e 3, em partes iguais, tem os mesmos nutrientes, $(2,1,2)^\top$, e é mais barata (8 em vez de 9). Os *preços sombra* dos nutrientes dependem dos *preços das rações oferecidas no mercado* e das necessidades nutricionais das galinhas.

1. Um produtor tem uma nova ração (para simplificar as contas) com a composição $(3,5,4)^\top$, que coincide com as necessidades nutricionais das galinhas. Para *conseguir* vender e *lucrar o máximo possível,* qual deve ser o preço de venda da ração?

   (a) 17

   (b) 16

   (c) 15

2. O produtor decide vender a tal ração com a composição $(3,5,4)^\top$ a um custo de 15. Assinale as opções correctas:

   (a) o produtor não conseguirá vender o seu produto

   (b) o produtor tem um produto competitivo

   (c) o produtor poderia ter um maior lucro

   (d) o avicultor não verá os seus custos diminuídos

   (e) os preços sombra alteram-se

3. O custo c_j (o preço de venda) de uma ração competitiva deve ser: $c_j = a_{1j}\pi_1 + a_{2j}\pi_2 + a_{3j}\pi_3$, sendo π_1, π_2 e π_3 os preços sombra dos nutrientes 1, 2 e 3, respectivamente. No exemplo:

$$
\begin{aligned}
6 &= 1\pi_1 + 1\pi_2 + 2\pi_3 \\
8 &= 1\pi_1 + 4\pi_2 + 2\pi_3 \\
2 &= 1\pi_1
\end{aligned}
$$

Qual é o conjunto correcto dos preços sombra?

(a) $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (2, 1, 1)$
(b) $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (2, 2/3, 5/3)$
(c) $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (2, 2, 2)$

4. O essencial é: o produtor vende os nutrientes das rações, e quer descobrir os seus preços sombra para marcar o preço de venda da sua ração. Qual o tipo das restrições ($\geq, \leq$ ou $=$) relativas aos preços sombra que o mercado impõe para a ração do produtor ser competitiva?

$$1\pi_1 + 1\pi_2 + 2\pi_3 \ldots\ldots 6 \qquad 1\pi_2 \ldots\ldots 1$$
$$1\pi_1 + 4\pi_2 + 2\pi_3 \ldots\ldots 8 \qquad 2\pi_1 + 1\pi_2 + 2\pi_3 \ldots\ldots 9$$
$$1\pi_1 \ldots\ldots 2 \qquad \pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots\ldots 0$$

5. As *necessidades nutricionais das galinhas de todos os avicultores* é que determinam as vendas de todos os produtores de rações. Os preços sombra formam-se nesse mercado, onde todos intervêm. É por eles que um produtor *individual* deve alinhar o *preço da sua ração*, com a composição $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})^\top$, que *poderá ser misturada com rações de outros produtores*. A facturação da venda de rações (que *os produtores, em conjunto, querem maximizar*) é proporcional a:

(a) $3\pi_1 + 5\pi_2 + 4\pi_3$
(b) $a_{1j}\pi_1 + a_{2j}\pi_2 + a_{3j}\pi_3$
(c) $1\pi_1 + 1\pi_2 + 2\pi_3$

6. Qual é o problema do produtor de rações (que também conhece as necessidades nutricionais das galinhas e os custos das rações da concorrência)? Escreva o modelo.

Quiz 2

Identifique, para cada quadro, se a solução apresentada é a solução óptima, e, se não for, qual o método adequado (método simplex primal, método das 2 fases ou método simplex dual) para resolver o problema. Há situações em que se pode usar mais do que um método.

1. $$\begin{aligned} \max z = &-12x_1 - 10x_2 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ &1x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ &1x_1 \leq 30 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	+12	+10	0	0	0	0

sol.ópt. ☐
m. primal ☐
m. 2 fases ☐
m. dual ☐

2. $$\begin{aligned} \max z = &+12x_1 - 10x_2 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ &1x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ &1x_1 \leq 30 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	+10	0	0	0	0

sol.ópt. ☐
m. primal ☐
m. 2 fases ☐
m. dual ☐

3. $$\begin{array}{rrrrrl} \max z = & -12x_1 & - & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \geq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	-1	-2	0	+1	0	-80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	+12	+10	0	0	0	0

- sol.ópt. ☐
- m. primal ☐
- m. 2 fases ☐
- m. dual ☐

4. $$\begin{array}{rrrrrl} \max z = & +12x_1 & - & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \geq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	-1	-2	0	+1	0	-80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	+10	0	0	0	0

- sol.ópt. ☐
- m. primal ☐
- m. 2 fases ☐
- m. dual ☐

5. $$\begin{array}{rrrrrl} \min z = & +12x_1 & + & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- sol.ópt. ☐
- m. primal ☐
- m. 2 fases ☐
- m. dual ☐

6. $$\begin{array}{rrrrrl} \min z = & +12x_1 & - & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	+10	0	0	0	0

- sol.ópt. ☐
- m. primal ☐
- m. 2 fases ☐
- m. dual ☐

7. $$\begin{array}{rrrrrl} \min z = & +12x_1 & + & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \geq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	-1	-2	0	+1	0	-80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- sol.ópt. ☐
- m. primal ☐
- m. 2 fases ☐
- m. dual ☐

8. $$\begin{array}{rrrrrl} \min z = & +12x_1 & - & 10x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\ & 1x_1 & + & 2x_2 & \geq & 80 \\ & 1x_1 & & & \leq & 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	-1	-2	0	+1	0	-80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	+10	0	0	0	0

- sol.ópt. ☐
- m. primal ☐
- m. 2 fases ☐
- m. dual ☐

Exercícios

1. Considere o problema de programação linear e o quadro simplex com a respectiva solução óptima abaixo apresentados. As variáveis de folga são s_1 e s_2.

$$
\begin{array}{ll}
\max & 1x_1 + 3x_2 \\
\text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 \leq 6 \\
 & -1x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & x_1,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	1/3	1/3	4
	0	0	5/3	2/3	14

   (a) Escreva o dual do problema original.

   (b) Obtenha a solução do problema dual a partir do quadro apresentado, e verifique que se trata de uma solução admissível do problema dual.

   (c) Calcule o valor da solução óptima dual.

   (d) Multiplique as restrições do primal pelo valor das variáveis duais da solução óptima, e some as duas restrições, para mostrar que o valor da função objectivo do primal nunca pode ser superior a 14.

   (e) Multiplique as restrições do dual pelo valor das variáveis primais da solução óptima, e some as duas restrições, para mostrar que o valor da função objectivo do dual nunca pode ser inferior a 14.

   (f) Interprete o significado da relação obtida nas duas últimas alíneas.

2. Considere os problemas primal e dual do exercício anterior. O problema dual de minimização com restrições de $\geq$ pode ser reescrito como um problema de maximização (ver Transformações básicas) com restrições de $\leq$, como se apresenta de seguida:

$$
\begin{array}{ll}
\min & b^\top y^\top \\
\text{suj. a} & A^\top y^\top \geq c^\top \\
 & y^\top \geq 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\max & -b^\top y^\top \\
\text{suj. a} & -A^\top y^\top \leq -c^\top \\
 & y^\top \geq 0
\end{array}
$$

   a) Aplique a reescrita do modelo dual ao exemplo do exercício anterior, e construa o problema dual do modelo reescrito para mostrar que "O problema dual do problema dual é o problema primal".

3. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 4x_1 + x_2 \\
\text{suj.} & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\
 & x_2 \leq 4 \\
 & x_1,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

   a) Escreva o modelo dual do problema acima apresentado.

   b) Seleccione dois pontos admissíveis, um do domínio primal e outro do dual, com valores de função objectivo diferentes, e mostre que obedecem ao Teorema da Dualidade Fraca.

   c) Considere os pontos do espaço primal $(x_1, x_2)^\top = (14, 4)^\top$ e do espaço dual $(y_1, y_2)^\top = (4, 9)^\top$. Será que eles são soluções óptimas do problema primal e do problema dual, respectivamente? Justifique.

d) Considere o ponto óptimo primal $(x_1, x_2)^\top = (14, 4)$ e o ponto óptimo dual $(y_1, y_2)^\top = (4, 9)$. Mostre que se verifica o Teorema da Folga Complementar.

4. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{suj.} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - 1x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Resolver pelo método simplex dual.

5. Considere os seguintes quadros inicial e óptimo de um problema de programação linear, que já foram analisados num exercício num capítulo anterior.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
s_1	1	2	4	1	0	3
s_2	3	4	3	0	1	8
	-2	-3	-3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_1	1	0	-5	-2	1	2
x_2	0	1	9/2	3/2	$-1/2$	1/2
	0	0	1/2	1/2	1/2	11/2

a) Se existir uma alteração do elemento b_2, passando de 8 para 10 unidades, a solução do quadro final deixa de ser admissível. Reoptimize o novo quadro final utilizando o método simplex dual.

6. Considere o seguinte problema e a respectiva solução óptima:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{suj.} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	2	1	1	0	8
x_5	0	3	-1	1	1	12
	0	3	3	2	0	16

a) Suponha que a restrição $x_2 + x_3 \geq 2$ era adicionada ao problema. Determine a nova solução óptima (pista: exprima esta restrição em função das variáveis não básicas e introduza-a no quadro óptimo, e depois reoptimize-o usando o método simplex dual).

7. Escreva o dual do seguinte problema (primal), resolva o dual e, a partir do quadro óptimo do problema dual, determine a solução óptima do problema primal.

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 8x_2 \\ \text{suj. a} & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

8. A formulação de um problema de programação linear e a respectiva solução óptima são as seguintes:

$$\begin{array}{lrrrcl} \max & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & \\ & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +3x_3 & \leq & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
x_1	1	0	-5	-2	1	1
x_2	0	1	9/2	3/2	-1/2	0
	0	0	1/2	1/2	1/2	2

a) "A uma solução óptima degenerada no problema primal correspondem soluções óptimas alternativas no problema dual."Para este exemplo, apresente duas soluções óptimas alternativas para o problema dual. **Nota:** Apresente o resultado sem resolver explicitamente o problema dual.

b) Formule o problema dual.

c) Mostre que as soluções que determinou constituem, de facto, soluções admissíveis alternativas que têm o mesmo valor de função objectivo.

9. Suponha que numa determinada iteração do simplex a variável de folga x_s é básica na linha i. Mostre que se todos os coeficientes $y_{ij} \leq 0, j = 1, \dots, n,\ j \neq s$, então a restrição associada à variável de folga x_s é geometricamente redundante. Mostre também que a restrição pode ser eliminada do quadro sem alterar o espaço de soluções.

   (Pista: reformule o problema como um problema de minimização do valor de x_s, considerando como domínio admissível o espaço definido pelas restantes restrições.

		x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_s	$\dots$	x_n		
linha i	x_s	y_{i1}	$\dots$	y_{j1}	$\dots$	1	$\dots$	y_{in}	a_i	$, a_i > 0$

10. Na resolução do seguinte problema de maximização, após o início da segunda fase do Método das 2 Fases e antes de eliminar as colunas das variáveis artificiais, a_1 e a_2, obteve-se o quadro simplex apresentado.

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{suj.} & -x_1 + x_2 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	a_1	a_2	
x_2	0	1	2/3	1/3	14/3
x_1	1	0	-1/3	1/3	2/3
	0	0	-1/3	7/3	38/3

a) Desenhe o espaço de soluções admissíveis no plano x_1, x_2, e o gradiente da função objectivo.

b) Será que a solução apresentada no quadro simplex é a solução óptima do problema? Justifique.

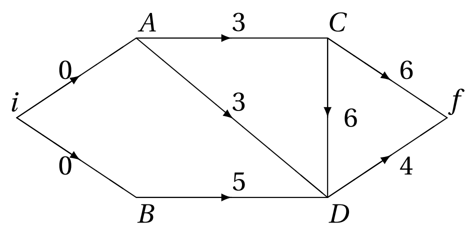
c) Escreva o modelo dual, e verifique se a solução dual existente no quadro simplex é uma solução admissível.

d) Seleccione dois pontos admissíveis, um do domínio primal e outro do domínio dual, com valores de função objectivo diferentes, para ilustrar o Teorema da Dualidade Fraca.

e) Se as restrições do problema fossem do tipo de menor ou igual, será que a solução apresentada no quadro simplex seria a solução óptima do problema? Justifique.

f) Em caso de resposta afirmativa à alínea e), determine a solução óptima usando o método simplex.

11. Considere um projecto, cuja rede de actividade nos nós, com a duração de cada actividade atribuída aos arcos que saem do nó é a seguinte:



a) Escreva o modelo dual do problema de minimização do tempo de conclusão do projecto, e verifique que se trata do modelo de determinação do caminho mais longo de um grafo.

b) Qual o conjunto de soluções admissíveis do problema do caminho mais longo?

c) Qual o conjunto de soluções admissíveis do problema de minimização do tempo de conclusão do projecto?

d) Como se expressa, em linguagem corrente, o Teorema da Dualidade Fraca para este par de problemas?

e) Como se expressa, em linguagem corrente, o Teorema da Dualidade Forte para este par de problemas?

f) Como se expressa, em linguagem corrente, o Teorema da Folga Complementar para este par de problemas?

12. (*) Considere um problema de corte em que se pretende determinar o menor número de rolos necessários para cortar 3, 5, 2 e 4 itens de comprimento 6, 4, 3 e 2, respectivamente. Assuma que o rolo tem um comprimento igual a 15 unidades. O padrão de corte j é descrito pelo vector $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j})^\top$, em que os coeficientes a_{ij} designam o número de itens do tipo i no padrão de corte j, $i \in \{1,2,3,4\}$ e $j \in J$, sendo J o conjunto de padrões de corte válidos.

Usando o modelo de programação inteira em que as variáveis correspondem ao número de vezes em que é usado um determinado padrão de corte, e enumerando apenas um subconjunto dos padrões válidos, obteve-se a solução óptima da relaxação linear descrita no quadro abaixo:

	x_1	x_2	x_3	x_4			dual
$w_d = 6$	2	1	1		$\geq$	3	3/7
4		1	1	3	$\geq$	5	2/7
3	1	1		1	$\geq$	2	1/7
2		1	2		$\geq$	4	1/7
min	1	1	1	1			

primal	2/7	6/7	11/7	6/7	$z^1 =$ 25/7

Para determinar se a solução indicada é também óptima para a relaxação linear do problema completo, é necessário resolver um problema de saco de mochila para descobrir se existe um padrão de corte atractivo com respeito à solução indicada.

a) Qual a restrição do problema de saco de mochila que serve para identificar os padrões de corte válidos?

b) Como se exprime o custo reduzido (com respeito à solução indicada) da coluna do padrão de corte j? (pista: é uma função dos valores das variáveis duais da solução)

c) Resolva o problema de saco de mochila para determinar se existe alguma coluna atractiva?

9 Transportes: modelos

Exercícios

Esta secção contém problemas de transporte em grafos bipartidos e em redes gerais, com ou sem limites superiores de fluxo nos arcos.

1. Três refinarias com capacidade de produção diária de gasolinas de 25000, 15000 e 5000 toneladas, respectivamente, abastecem três grandes centros distribuidores, cujas necessidades são, respectivamente, 10000, 20000 e 15000 toneladas diariamente. O abastecimento é feito através de uma rede de oleadutos com uma tarifa de 200 U.M./ton/km. Sabendo que as distâncias, em Kms, entre as refinarias e os centros distribuidores são os que constam da tabela:

	D1	D2	D3
R1	5	70	250
R2	75	15	220
R3	300	200	10

   a) formule o problema.

   b) devido a trabalhos de manutenção, o troço (R3,D3) não estará operacional nos próximos dois meses. Como se altera o modelo?

2. O responsável pelo planeamento da ABC deve decidir o número de automóveis a produzir mensalmente em cada uma das fábricas da empresa, sediadas em Alenquer, Barcelos e Coimbra. Os automóveis são depois enviados para centros de consumo em Douro, Évora e Faro. As capacidades máximas de produção mensais de cada fábrica e os respectivos custos unitários de produção (de um automóvel) são os indicados na seguinte tabela:

Fábrica	Capacidade Mensal	Custo Unitário de Produção
Alenquer	400	120
Barcelos	400	100
Coimbra	300	110

   Para o mês em planeamento, as procuras em Douro, Évora e Faro são de 250, 250 e 400, respectivamente. Os custos unitários de transporte desde cada fábrica para cada centro de consumo são os seguintes:

	D	E	F
A	10	50	100
B	50	90	120
C	10	60	90

   a) Construa um modelo de transportes que minimize os custos totais de operação.

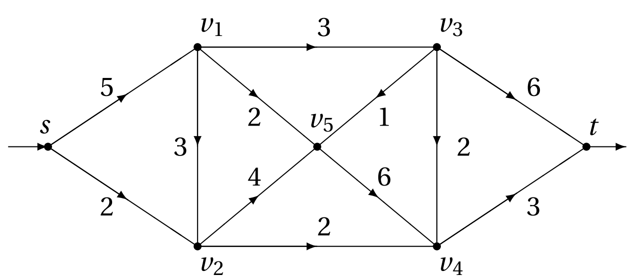
   b) Será que todas as fábricas irão laborar à capacidade máxima?

c) Os custos unitários de produção da fábrica de Coimbra acima apresentados são uma aproximação. Na realidade, o custo unitário das primeiras 150 unidades é de 100, enquanto todas as restantes unidades, até ao máximo de 300, são produzidas a um custo unitário de 120. Construa um modelo para esta situação, apresentando um quadro de transporte com uma solução básica admissível para este modelo. Justifique.

3. Um problema muito conhecido da área da optimização combinatória é o problema da determinação do caminho mais curto. Embora existam algoritmos especializados para a sua solução, este problema pode ser formulado e resolvido como um problema de programação linear.

   Considere um grafo $G = (V, A)$, sendo V um conjunto de vértices e A um conjunto de arcos orientados. Cada arco é designado como (i, j), sendo i o vértice de origem do arco e j o vértice de destino. A cada arco está associado um custo c_{ij}.

   O problema do caminho mais curto consiste em determinar o caminho de custo mínimo entre o vértice de origem s e o vértice de destino t. Para formular este problema como um problema de programação linear, considera-se que se pretende enviar uma unidade de fluxo desde o vértice s até ao vértice t.



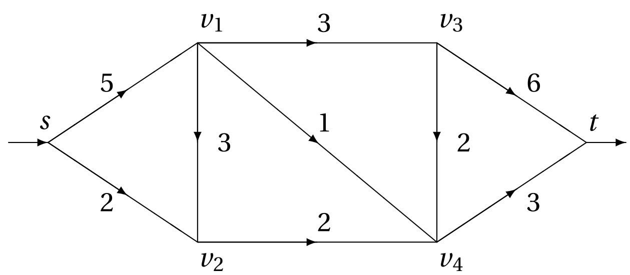
   a) Formule este problema como um problema de transportes.

   b) Será que as equações das restrições são linearmente independentes? Justifique.

4. Outro problema é o de maximização do fluxo numa rede. Embora existam algoritmos especializados de optimização combinatória para a sua resolução, este problema pode ser formulado e resolvido como um problema de programação linear.

   Seja dado um grafo $G = (V, A)$, sendo V um conjunto de vértices e A um conjunto de arcos orientados. Do conjunto de vértices, considere o vértice s como sendo uma fonte ilimitada de fluxo e o vértice t como um terminal capaz de absorver todo o fluxo conduzido pelos outros arcos. Nos outros vértices, $v_1, \ldots, v_4$, existe conservação de fluxo, *i.e.*, o fluxo proveniente dos arcos que chegam a um vértice é igual ao fluxo que sai do vértice.

   Designe cada arco orientado como (i, j), sendo i o vértice de origem do arco e j o vértice de destino. A cada arco, está associada uma capacidade máxima l_{ij}, que corresponde ao maior fluxo possível para o arco. A título ilustrativo, a capacidade do arco $(s, v_1) = 5$.



a) Formule este problema como um problema de transportes.

5. Outro problema da área de optimização combinatória é o problema de afectação. O objectivo é afectar um conjunto de n tarefas a n operadores, de modo a optimizar uma função objectivo. Cada operador realiza uma tarefa. Quando qualquer operador pode realizar qualquer tarefa, existem $n!$ soluções possíveis. Embora este problema possa ser formulado como um problema de transportes, os algoritmos de transportes não se revelam eficientes, por as soluções básicas serem altamente degeneradas. Quase todos os *pivôs* são degenerados, sem haver melhoria da função objectivo. Há algoritmos primais-duais que resolvem o problema em tempo polinomial.

   Considere um conjunto de 5 tarefas (a, b, c, d, e) e 5 máquinas (M1, M2, M3, M4, M5). Os lucros associados à realização de cada tarefa em cada máquina são os seguintes:

	M1	M2	M3	M4	M5
a	2	3	5	1	4
b	–	2	4	7	3
c	0	6	5	7	2
d	1	–	4	1	4
e	7	1	2	1	2

   a) Formule este problema de afectação como um problema de transportes, de modo a maximizar o lucro global.

   b) Numa solucão básica de um problema com n tarefas, qual o número de variáveis básicas? Quantas são positivas e quantas são nulas?

6. Um conhecido partido político pretende fazer num dado dia 2 comícios nas cidades de Braga e da Guarda. O chefe desse partido, receando o insucesso desses comícios resolveu recrutar simpatizantes noutras cidades e custear todas as despesas de viagem.

   Após contactos com as delegações distritais, foi possível mobilizar 500 simpatizantes em Guimarães, 1500 em Santarém e 4500 em Évora. Como o partido estava menos implantado no norte e no interior do que no sul, era necessário fazer chegar a Braga 4000 pessoas e 2500 à Guarda.

   Por questões relacionadas com a organização do partido, e para proporcionar um ambiente de camaradagem entre os simpatizantes, as pessoas recrutadas deverão passar pela sede distrital do Porto, de Lisboa ou de Coimbra para, em seguida, viajar juntas em autocarros, previamente alugados pelo partido, para os locais onde se realizarão os comícios. É justamente nessas sedes distritais que cada simpatizante recebe o dinheiro gasto na sua viagem de autocarro desde casa, uma senha de almoço no valor de 3 euros e uma bandeirinha do partido.

É possível reunir um total de 50 autocarros no Porto, 60 em Coimbra e 50 em Lisboa. O aluguer desses autocarros, cada um com 50 lugares, foi feito em más condições e o preço de transporte por cada passageiro é de 0,025 euros/ quilómetro.

O mapa das distâncias quilométricas entre as várias cidades portuguesas é o seguinte:

	Porto	Lisboa	Braga	Coimbra	Faro	Sant.	Guarda	Évora	Guim.
1 Porto	—								
2 Lisboa	300	—							
3 Braga	40	350	—						
4 Coimbra	130	180	180	—					
5 Faro	600	300	640	350	—				
6 Santarém	250	30	290	100	320	—			
7 Guarda	200	200	210	130	315	140	—		
8 Évora	500	100	540	200	200	215	230	—	
9 Guimarães	40	300	25	100	635	280	200	530	—

a) Determine como deveria ser o esquema completo de transporte para minimizar os custos, e qual o custo total em que o partido incorre.

b) Se tivesse 80 autocarros em Lisboa, qual seria a nova solução óptima?

7. Um fabricante de mobílias tem três fábricas, que requerem, semanalmente, 500, 700 e 600 toneladas de madeira. O fabricante pode comprar a madeira em três companhias diferentes. As duas primeiras companhias podem fornecer, virtualmente, uma quantidade infinita de madeira. Por outro lado, a terceira companhia pode fornecer no máximo 500 toneladas.

   A primeira companhia usa os caminhos de ferro para fazer o transporte e não há qualquer limitação às quantidades que podem ser transportadas para qualquer uma das fábricas de mobmlia. Por outro lado, as duas outras companhias utilizam camiões para o transporte, o que limita a quantidade que pode ser transportada entre cada companhia e cada fábrica a 200 toneladas.

   A Tabela seguinte indica os custos de transporte unitários entre cada companhia e cada fábrica.

		Fábrica		
		1	2	3
Companhia	1	20	30	50
	2	25	40	48
	3	30	36	32

   a) Formule o problema como um problema de transportes.

8. Dez milhões de barris de petróleo devem ser transportados de Dharan, na Arábia Saudita, para os portos de Roterdão, Nápoles e Marselha. As necessidades nestes portos são, respectivamente, 2, 6 e 2 milhões de barris. Há três vias alternativas para efectuar o transporte do petróleo (todos os custos indicados representam custos de transporte por milhão de barris):

1) De Dharan, circundando África, directamente para os portos de Roterdão, Nápoles e Marselha, sendo os custos de transporte iguais a \$2.8, \$2.8 e \$2.4, respectivamente.

2) De Dharan para a cidade de Suez, e então através do Canal do Suez para Port Said. De Port Said, o petróleo é transportado em barco para Roterdão, Nápoles e Marselha. Os custos de transporte de Dharan para a cidade do Suez são de \$0.6 e há um custo adicional através do canal de \$0.4. Finalmente, os custos de transporte desde Port Said até Roterdão, Nápoles e Marselha são, respectivamente, \$0.5, \$0.4 e \$0.3.

3) De Dharan para a cidade de Suez e então através de um oleoduto para Alexandria. Os custos de transporte no oleoduto são de \$0.3. Finalmente, os custos de transporte desde Alexandria até Roterdão, Nápoles e Marselha são, respectivamente, \$0.44, \$0.40 e \$0.36.

Existem limitações de capacidade no Canal do Suez e no oleoduto que são, respectivamente, 1 e 5 milhões de barris.

a) Formule o problema como um modelo de transportes.

10 Transportes em grafos bipartidos

Quiz 1

Considere as seguintes soluções de um problema de transportes. Seleccione as opções adequadas, sabendo que pode haver mais do que uma resposta certa. Os valores indicados em cada célula significam o fluxo (x_{ij}) e o custo unitário de transporte (c_{ij}), do seguinte modo: $\boxed{x_{ij}\ {}_{c_{ij}}}$.

20_{5}	$_{4}$	$_{1}$	20
5_{6}	5_{7}	$_{3}$	10
$_{4}$	25_{3}	15_{5}	40
25	30	15	

i. solução básica admissível

ii. solução não-admissível (não é básica)

iii. solução não-admissível (não respeita as restrições)

iv. solução degenerada

$_{5}$	20_{4}	$_{1}$	20
$_{6}$	10_{7}	$_{3}$	10
25_{4}	$_{3}$	15_{5}	40
25	30	15	

v. solução básica admissível

vi. solução não-admissível (não é básica)

vii. solução não-admissível (não respeita as restrições)

viii. solução degenerada

$_{5}$	20_{4}	$_{1}$	20
5_{6}	5_{7}	$_{3}$	10
20_{4}	5_{3}	15_{5}	40
25	30	15	

ix. solução básica admissível

x. solução não-admissível (não é básica)

xi. solução não-admissível (não respeita as restrições)

xii. solução degenerada

$_{5}$	20_{4}	0_{1}	20
$_{6}$	10_{7}	$_{3}$	10
25_{4}	$_{3}$	15_{5}	40
25	30	15	

xiii. solução básica admissível

xiv. solução não-admissível (não é básica)

xv. solução não-admissível (não respeita as restrições)

xvi. solução degenerada

$_{5}$	20_{4}	$_{1}$	20
$_{6}$	5_{7}	15_{3}	10
25_{4}	15_{3}	$_{5}$	40
25	30	15	

xvii. solução básica admissível

xviii. solução não-admissível (não é básica)

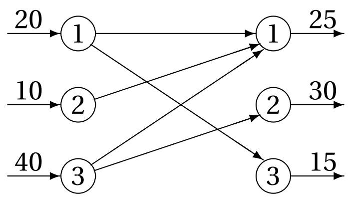
xix. solução não-admissível (não respeita as restrições)

xx. solução degenerada

Quiz 2

Considere o problema do Quiz 1. Pretende-se transportar (usando apenas os arcos indicados e no sentido da seta) as quantidades produzidas nas origens (1, 2 e 3) para satisfazer a procura existente nos destinos (1, 2 e 3).

1. Escolha a opção correcta:



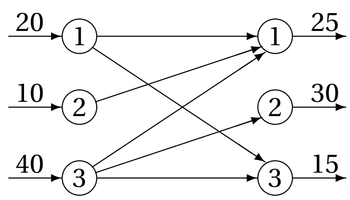
   i. não existe solução

   ii. existe uma e uma só solução

   iii. existem várias soluções

2. no caso de existir uma e uma só solução, determine os valores dos fluxos.

3. Escolha a opção correcta:

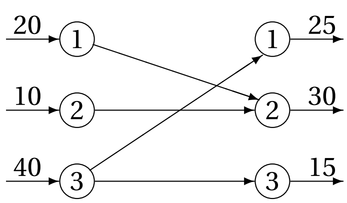


   iv. não existe solução

   v. existe uma e uma só solução

   vi. existem várias soluções

4. Escolha a opção correcta:



   vii. não existe solução

   viii. existe uma e uma só solução

   ix. existem várias soluções

5. Os 3 grafos acima apresentados são, respectivamente:

   (a) grafo com ciclo, grafo com ciclo, floresta
   (b) floresta, grafo com ciclo, floresta
   (c) árvore, floresta, floresta
   (d) árvore, grafo com ciclo, grafo com ciclo
   (e) árvore, grafo com ciclo, floresta

6. Quais dos grafos acima apresentados são grafos associados a bases do problema de transportes?

   (a) o primeiro e o terceiro
   (b) só o terceiro
   (c) só o primeiro
   (d) o segundo e o terceiro
   (e) todos

Exercícios

1. Uma transportadora opera entre três localidades de origem e três localidades de destino. Os custos unitários de operação entre as origens e os destinos são dados pela seguinte tabela:

	1	2	3
1	2	6	8
2	4	3	5
3	1	7	3

   As disponibilidades das origens são, respectivamente, iguais a 20, 15 e 30. As procuras nos destinos são, respectivamente, iguais a 35, 20 e 10.

   a) Partindo da solução inicial dada pelo método do canto NW, determine a solução óptima.

   b) Prevê-se que o custo unitário de transporte c_{22}, actualmente igual a 3, vá aumentar. Formule o modelo de transportes parametrizado associado a esta situação e determine as possíveis soluções óptimas para o problema em função dos correspondentes domínios do parâmetro.

2. O seguinte problema de transportes ilustra o conhecido "Paradoxo do Problema de Transportes": há situações em que transportando mais unidades entre as origens e os destinos se podem obter custos totais mais baixos.

	D	E	F	G	
A	1	6	3	5	20
B	7	3	1	6	10
C	8	3	4	2	25
	11	13	17	14	

   a) Apresente a solução inicial gerada pelo método dos custos mínimos.

   b) Determine a solução óptima do problema e o seu custo.

   c) Se a quantidade requerida pelo destino D passasse de 11 a 12 unidades e a quantidade oferecida pela origem B passasse de 10 a 11 unidades, qual seria a nova solução óptima?

   Pista: Resolva a partir da solução da alínea a), adicionando uma unidade à casa 21 (ou seja, BD), o que dá origem a uma solução não-básica; a partir dessa solução, obtenha uma solução básica, e depois optimize. Respostas que envolvam a solução do problema desde o início não serão consideradas.

   d) Compare o custo da nova solução óptima com o custo da alínea b). Usando linguagem corrente, explique porque é que a nova solução é mais económica.

   e) Identifique a relação que é necessário existir entre os valores de c_{ij} e do δ_{ij} (neste caso, entre c_{21} e δ_{21} da solução óptima da alínea b)) para que o paradoxo possa ocorrer. Justifique.

3. (R) Considere a seguinte solução básica de um problema de transportes, em que se indica o *stepping-stone* da variável não-básica mais atractiva. Como é o quadro simplex correspondente a esta solução básica?

	-3	-6	-7	
0	20 3	$10-\theta$ 6	-2 $+\theta$ 5	30
-1	0 2	10 5	-1 5	10
-4	+2 1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	

4. (R) O problema dual do problema de transportes (minimização) é:

$$\max\{\sum_i a_i u_i - \sum_j b_j v_j : u_i - v_j \leq c_{ij}\}.$$

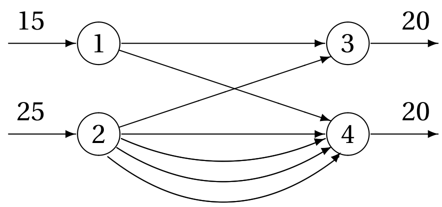
Usando a função objectivo do dual, calcule o custo da seguinte solução dual do problema de transportes, e compare-o com o valor da solução primal.

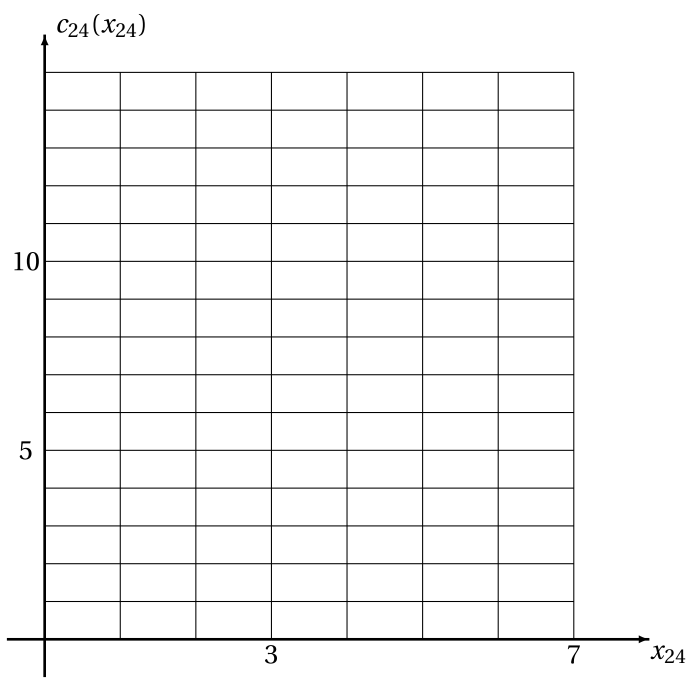
	-3	-4	-5	
0	10 3	+2 6	20 5	30
-1	10 2	+2 5	+1 5	10
-2	0 1	30 2	20 3	50
	20	30	40	

11 Transportes em redes gerais

Quiz

Considere o seguinte problema de transportes com limites superiores nos arcos (capacidades) que foi resolvido com o Relax4. Os valores dos custos unitários de transporte e das capacidades do arcos estão indicados no ficheiro de input do Relax4.






```
  Input do Relax4:
4
7
1 3 11 1000
1 4 12 1000
2 3 13 1000
2 4 1 1
2 4 2 1
2 4 3 2
2 4 4 1000
15
25
-20
-20
Output do Relax4:
NUMBER OF NODES = 4, NUMBER OF ARCS = 7
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
***********************************
TOTAL SOLUTION TIME = 0.  SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0.  SECS.
1 3 15.
2 3 5.
2 4 1.
2 4 1.
2 4 2.
2 4 16.
OPTIMAL COST = 303.
```

1. Desenhe a função que indica o custo total de transporte, $c_{24}(x_{24})$, em função do número de unidades transportadas entre os vértices 2 e 4.

2. Da análise do output do Relax4, indique o fluxo óptimo em cada arco, e verifique o custo da solução óptima.

3. A árvore associada à base da solução óptima é constituída pelos seguintes arcos:

   (a) $x_{13}, x_{23}, x_{24(1,1)}, x_{24(4,1000)}$

   (b) $x_{13}, x_{23}, x_{24(4,1000)}$

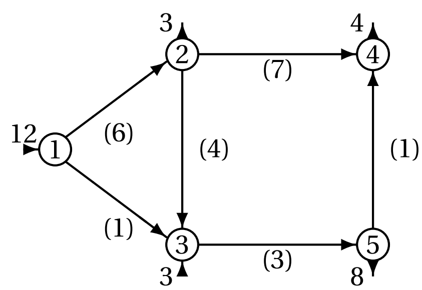
(c) $x_{13}, x_{23}, x_{24(1,1)}$

4. Para a solução óptima, escolha a opção correcta para cada arco: variável básica (B), variável não-básica no limite inferior (NB-Inf) ou variável não-básica no limite superior (NB-Sup).

$$
\begin{array}{lllll}
x_{13} & : & (B) & (NB-Inf) & (NB-Sup) \\
x_{14} & : & (B) & (NB-Inf) & (NB-Sup) \\
x_{23} & : & (B) & (NB-Inf) & (NB-Sup) \\
x_{24(1,1)} & : & (B) & (NB-Inf) & (NB-Sup) \\
x_{24(2,1)} & : & (B) & (NB-Inf) & (NB-Sup) \\
x_{24(3,2)} & : & (B) & (NB-Inf) & (NB-Sup) \\
x_{24(4,1000)} & : & (B) & (NB-Inf) & (NB-Sup)
\end{array}
$$

Exercícios

1. Considere a rede apresentada na figura, em que os valores associados aos arcos, (c_{ij}), representam o custo unitário de transporte, e os valores associados aos vértices representam ofertas e procuras.



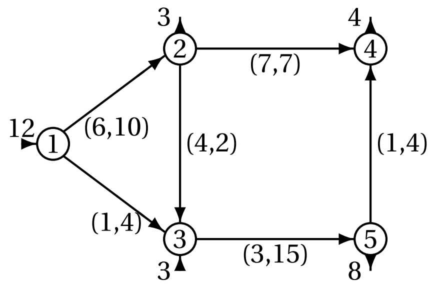
Considere a seguinte solução: $x_{12} = 7, x_{13} = 5, x_{24} = 4,$ e $x_{35} = 8$.

a) Verifique que a solução é admissível, e identifique as variáveis básicas e não-básicas.

b) Partindo da solução indicada na alínea a), utilizando o método de optimização de redes, determine a solução óptima do problema.

c) Existirão soluções óptimas alternativas? Justifique, e indique uma, em caso afirmativo.

2. Considere a rede apresentada na figura, em que os valores associados aos arcos, (c_{ij}, u_{ij}), representam o custo unitário de transporte e a capacidade do arco, respectivamente, e os valores associados aos vértices representam ofertas e procuras.



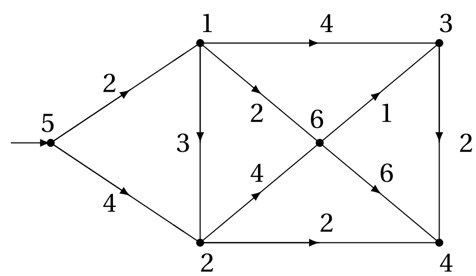
Considere a seguinte solução: $x_{12} = 9, x_{13} = 3, x_{23} = 2, x_{24} = 4,$ e $x_{35} = 8$.

a) Verifique que a solução é admissível, e identifique as variáveis básicas e não-básicas.

b) Partindo da solução indicada na alínea a), utilizando o método de optimização de redes com limites superiores, determine a solução óptima do problema.

c) Existirão soluções óptimas alternativas? Justifique, e indique uma, em caso afirmativo.

3. Um centro de produção, localizado no vértice 5, abastece 4 pontos de consumo, localizados nos vértices $1, 2, 3$ e 4. A procura nestes vértices é de 12, 20, 4 e 14, respectivamente. O vértice 6 é um vértice intermédio sem procura. Os únicos percursos permitidos são os indicados pelas setas. Considere a seguinte solução: $x_{51} = 30, x_{52} = 20, x_{16} = 18, x_{63} = 18,$ e $x_{34} = 14$.



a) Determine o plano de distribuição que minimiza os custos globais e indique o seu custo.

b) Existem soluções óptimas alternativas ? Indique uma, se for caso disso.

c) Considerando que todos os arcos têm uma capacidade máxima de 30, determine a nova solução óptima utilizando o método de optimização de redes com limites superiores.

d) Identifique as variáveis básicas e não-básicas da nova solução óptima.

e) Qual o incremento de custo que resulta da nova restrição?

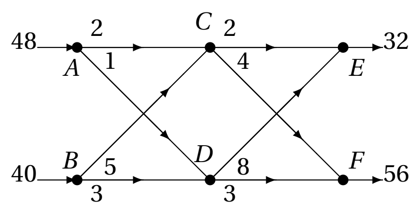
4. Considere o problema de programação linear associado à rede de transporte do exercício anterior.

a) Formule o respectivo modelo de programação linear. Explique com detalhe o significado das restrições e da função objectivo do modelo.

b) Considere que uma nova análise do transporte no arco $(1, 3)$ tinha permitido determinar que, para além das primeiras 4 unidades que se podem transportar com um custo unitário de 1, se pode transportar um qualquer número de unidades com um custo unitário de 2. Apresente as alterações a introduzir no modelo da alínea a) para esta nova situação.

c) Considere que havia um limite inferior de fluxo no arco $(5, 4)$ igual a 2 unidades. Altere a rede da Figura da Questão 3 para representar um modelo com todos os arcos com limites inferiores iguais a 0, que lhe permita determinar a solução óptima do novo problema. Descreva as relações entre os dois modelos. Mostre que o novo modelo pode ser obtido através de uma mudança da variável x_{54}.

5. Considere o problema de distribuição em que os fornecedores A e B abastecem os clientes E e F. O transporte deverá ser efectuado via um ou dois dos pontos intermédios, C e D. A seguinte figura ilustra esquematicamente a rede de transporte, incluindo informação sobre as quantidades disponíveis nas origens, as necessárias nos destinos, bem como os custos unitários de transporte entre os diversos pontos. As capacidades dos pontos intermédios C e D são 40 e 64, respectivamente.



a) Determine a solução óptima deste problema.

b) Apresente o respectivo plano de transporte.

c) Calcule o custo da solução óptima com base na solução óptima primal.

d) Determine o custo unitário de transporte entre B e C que torna este arco atractivo. Justifique.

e) Determine o custo unitário de transporte entre A e C que torna este arco não-atractivo. Justifique.

f) Usando a informação dada pelo quadro óptimo, identifique a solução óptima dual, e com base nela, calcule o custo da solução óptima. Justifique e comente.

6. Considere o seguinte problema de transportes (minimização) com limites superiores em cada arco, designados por u_{ij}. Os valores indicados no quadro significam: $\boxed{x_{ij}\ {}^{u_{ij}}_{c_{ij}}}$.

	a	b	c	d	
A	$^{9}_{18}$	10 $^{12}_{5}$	6 $^{7}_{4}$	$^{2}_{16}$	16
B	5 $^{8}_{4}$	$^{6}_{18}$	$^{4}_{12}$	5 $^{7}_{4}$	10
C	6 $^{6}_{11}$	1 $^{3}_{2}$	$^{8}_{1}$	3 $^{4}_{10}$	10
	11	11	6	8	

a) Será que a solução indicada é óptima? Se o não for, determine o óptimo. Justifique.

b) Existirão soluções óptimas alternativas? Indique uma, se for caso disso. Justifique.

7. Considere um problema de transportes (minimização) em que, além de existirem limites superiores para as quantidades que podem ser transportadas em cada ramo, existem também limites inferiores que podem tomar qualquer valor positivo ou negativo. Obviamente, a variável x_{ij} pode tomar qualquer valor entre o limite inferior e o limite superior da variável.

Considere, para cada ramo, que os valores do limite superior (u_{ij}), limite inferior (l_{ij}) e do custo unitário de transporte (c_{ij}) são indicados do seguinte modo:

$\boxed{c_{ij}\,{}^{u_{ij}}_{l_{ij}}}$.

	a	b	c	
A	$5\,{}^{14}_{-2}$	$4\,{}^{14}_{0}$	$1\,{}^{4}_{0}$	12
B	$6\,{}^{14}_{-2}$	$7\,{}^{14}_{0}$	$3\,{}^{7}_{0}$	16
C	$4\,{}^{14}_{-2}$	$3\,{}^{14}_{0}$	$5\,{}^{12}_{3}$	16
	20	14	10	

a) Determine a solução inicial pelo método do canto NW.

b) Partindo da solução obtida na alínea a), determine a solução óptima.

b) Existirão soluções óptimas alternativas? Indique uma, se for caso disso. Justifique.

12 Programação inteira: modelos

Quiz

Duas restrições que definam o mesmo conjunto de pontos inteiros podem corresponder a domínios diferentes quando se considera a relaxação linear (ou seja, quando as variáveis podem ter valores fraccionários).

1. Considere as restrições :

$$\begin{array}{ll} \text{alternativa 1:} & 7x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ \text{alternativa 2:} & x_1 + x_2 \leq 1 \end{array}$$

   (a) Identifique o conjunto de pontos inteiros definido pelas duas restrições:

$$(x_1, x_2)^\top = (\ldots\ldots, \ldots\ldots)^\top, (\ldots\ldots, \ldots\ldots)^\top, (\ldots\ldots, \ldots\ldots)^\top.$$

   (b) Identifique um ponto com coordenadas fraccionárias que obedeça à primeira restrição, mas não obedeça à segunda:

$$(x_1, x_2)^\top = (\ldots\ldots, \ldots\ldots)^\top.$$

2. Quanto mais restritivas (mais fortes) forem as inequações quando se considera a relaxação linear, melhor é o modelo, significando que os solvers encontram mais rapidamente a solução óptima.

   Para cada par de alternativas de modelos com variáveis binárias, identifique a restrição (ou o conjunto de restrições) mais forte:

3. Considere as restrições :

$$\begin{array}{ll} \text{alternativa 1:} & x_1 + x_2 \leq 2y \\ \text{alternativa 2:} & x_1 \leq y, x_2 \leq y \end{array}$$

   Identifique um ponto com coordenadas fraccionárias que obedeça à primeira restrição, mas não obedeça à segunda:

$$(x_1, x_2, y)^\top = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)^\top.$$

4. Considere as restrições :

$$\begin{array}{ll} \text{alternativa 1:} & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ \text{alternativa 2:} & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \end{array}$$

   Identifique um ponto com coordenadas fraccionárias que obedeça à primeira restrição, mas não obedeça à segunda:

$$(x_1, x_2, x_3)^\top = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)^\top.$$

5. Considere as restrições :

$$\begin{array}{ll} \text{alternativa 1:} & x_1 + x_2 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 1 \\ \text{alternativa 2:} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \end{array}$$

Identifique um ponto com coordenadas fraccionárias que obedeça à primeira restrição, mas não obedeça à segunda:

$$(x_1, x_2, x_3)^\top = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)^\top.$$

Exercícios

1. Para fazer face a uma procura adicional de 250 passageiros, a companhia aérea VIP (Vôos Irregulares da Pomerâmia) pretende fretar aviões à FAST (Fretamos Aviões Sem Tripulação). A FAST dispõe para aluguer dos seguintes tipos de avião:

Tipo de Avião	Tripulação necessária	Capacidade de Transporte	Custo do aluguer (U.M.)
A	4	50	50
B	3	30	40
C	1	10	20

Para assegurar estes vôos adicionais, a VIP pode dispor de 22 elementos de tripulação.

a) Determine um modelo que lhe permia determinar o plano óptimo de aluguer.

2. Uma empresa utiliza 2 tipos de máquina (A e B) para a fabricação de 3 produtos diferentes. A gestão da empresa está a analisar a viabilidade de adquirir mais máquinas para aumentar a sua capacidade de produção anual, dispondo para esse efeito de 140 U.M..

As restrições que limitam a capacidade produtiva anual são as seguintes:

	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	
máquina A	$4x_1$	$+6x_2$	$+2x_3$	≤ 50
máquina B	$5x_1$	$+3x_2$	$+4x_3$	≤ 60

A função que traduz os lucros anuais da empresa é a seguinte:

	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3
lucro	$110x_1$	$+150x_2$	$+90x_3$

Após uma análise do marcado, verificou-se existirem 2 máquinas adequadas do tipo A que permitiam aumentar a capacidade anual de produção de 6 e 10 unidades, respectivamente, sendo os seus preços de 50 e 70 U.M., respectivamente. Também, 2 máquinas adequadas do tipo B que permitiam aumentar a capacidade anual de produção de 4 e 10 unidades, respectivamente, sendo os seus preços de 60 e 90 U.M., respectivamente. Assuma que os lucros unitários dos produtos produzidos nas novas máquinas são os mesmos.

A empresa amortiza as máquinas em 10 anos, o que se traduz em ter custos anuais de utilização iguais a um décimo do seu custo. A empresa encara a hipótese de permanecer como está actualmente.

a) Formule um modelo de programação inteira que lhe permita determinar se a empresa deve adquirir mais alguma máquina.

b) Determine a solução óptima usando um método computacional.

c) Que máquinas deveriam ser adquiridas?

d) Qual o incremento de lucro em relação à situação actual?

3. Considere o seguinte problema de planeamento de produção de 1000 unidades de um determinado produto. Existem 4 máquinas diferentes disponíveis, cujos custos fixos, custos variáveis e capacidades máximas são os indicados no quadro seguinte:

máquina	custos fixos	custos variáveis	capacidade máxima
1	20	7	500
2	40	4	200
3	10	8	400
4	70	1	600

Por razões técnicas, pelo menos uma das máquinas deve ficar inactiva para se proceder a operações de manutenção.

Sabe-se também que, para a máquina 4, que possui maiores custos fixos e menores custos variáveis, a quantidade mínima que interessa fabricar é de 500 unidades.

a) Formule o problema como um modelo de programação inteira, explicando sucintamente cada uma das restrições.

b) Determine a solução óptima usando um método computacional.

c) Qual o plano de produção?

4. O problema de localização de armazéns tem como objectivo escolher os locais onde instalar armazéns para servir um conjunto de clientes. Considere que existe uma capacidade associada a cada local possível, e uma procura associada a cada cliente. A procura dos clientes afectos a um dado armazém não pode exceder a sua capacidade. Pretende-se satisfazer os pedidos a um custo global mínimo, que envolve os custos mensais de renda dos armazéns e os custos de transporte da mercadoria entre os armazéns e os clientes.

Considere 4 possíveis armazéns (A, B, C e D) com as capacidades de 35, 28, 22 e 28, respectivamente, e com as rendas mensais indicadas na Tabela. Existe um conjunto de 5 clientes (a, b, c, d e e) que representam as procuras de 14, 12, 10, 12 e 8, respectivamente. Os custos de transporte unitários de transporte entre cada possível armazém e cada cliente são os indicados na Tabela.

	Rendas	a	b	c	d	e	
A	50	2	5	1	2	5	35
B	32	4	4	9	1	4	28
C	28	1	8	5	6	2	22
D	36	7	1	2	2	8	28
		14	12	10	12	8	

(Custos de Transporte: colunas a–e)

Formule um modelo de programação inteira que lhe permita determinar qual o conjunto óptimo de armazéns a seleccionar. Considere variáveis x_{ij} que designam a quantidade a transportar desde o armazém i até ao cliente j e variáveis binárias y_i, que tomam o valor 1, se o armazém i é seleccionado, e 0, caso contrário.

(a) Usando o lpsolve, determine a solução óptima do problema.

(b) Identifique os armazéns a seleccionar e desenhe o plano de transporte.

(c) Verifique que a solução obedece a todas as restrições.

(d) Verifique que o custo está correcto.

5. Considere o problema de localização apresentado no exercício anterior, mas com as seguintes restrições adicionais:

   - dos locais C e D, exactamente 1 deve ser seleccionado.
   - a selecção do local A ou do local B implica a exclusão do local C.
   - a selecção do local A e do local B implica a selecção do local D.

   Formule um modelo apropriado para a resolução deste problema.

   (a) Usando o lpsolve, determine a solução óptima do problema.

   (b) Identifique os armazéns a seleccionar e desenhe o plano de transporte.

   (c) Verifique que a solução obedece a todas as restrições.

   (d) Verifique que o custo está correcto.

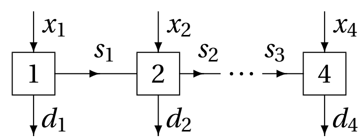
6. Uma companhia necessita de comprar 1000 caixas. Há 3 fornecedores, designados por A, B e C, que podem fornecer as caixas da qualidade pretendida. O fornecedor A normalmente vende as caixas ao preço de 10 U.M. e cobra uma taxa fixa de entrega de 300 U.M.. O fornecedor B cobra 9.5 U.M. por caixa mais uma taxa fixa de entrega de 500 U.M.. O fornecedor C normalmente vende as caixas por 9.2 U.M. e tem uma taxa fixa de 400 U.M..

   Enquanto o fornecedor A pode vender qualquer quantidade de caixas, o fornecedor B não pode vender mais de 500 e o fornecedor C mais de 800. A companhia pretende ter, pelo menos, dois fornecedores.

   a) Formule um modelo de programação inteira que lhe permita minimizar os custos de aquisição.

b) Diga como poderia formular uma situação de descontos de quantidade, *i.e.*, o produto tem dois preços unitários diferentes dependendo das quantidades adquiridas. Suponha que o fornecedor A praticava o preço de 10 U.M., para quantidades inferiores a 600 unidades, e o preço de 8.8 U.M., para todas as unidades acima dessa quantidade.

7. Considere o seguinte problema de produção/armazenagem. Em cada dia j, existe uma procura d_j que é necessário satisfazer. Para esse efeito, podem usar-se as unidades produzidas no próprio dia e/ou as unidades em armazém. Se, num determinado dia, as unidades produzidas mais as unidades em armazém forem superiores à procura, o excesso é armazenado para o dia subsequente. O diagrama de fluxos das unidades é o seguinte:



sendo x_j o número de unidades produzidas no dia j e s_j o stock existente após o dia j.

O horizonte de planeamento é de 4 dias. A procura em cada dia é de 2, 1, 3 e 2 unidades, respectivamente. Os custos unitários de produção são de 10 U.M.. A capacidade máxima de produção diária é de 4 unidades. Os custos de armazenagem são de 1 U.M./dia/unidade e a capacidade máxima de armazenagem é de 3 unidades. Os stocks iniciais e finais são nulos.

a) Formule um modelo de programação linear com para este problema com o objectivo de minimizar a soma dos custos de produção e de armazenagem. Justifique.

b) Em complemento ao problema descrito na alínea a), considere que existe um custo de preparação, com o valor de 1 U.M./preparação, quando num período há produção não tendo havido produção no período anterior. Indique **as alterações** ao modelo. Justifique.

8. Uma empresa está a estudar a introdução de quatro novos produtos. O Departamento de Produção deve seleccionar os produtos a produzir, e em que quantidades. Existe um custo inicial associado à introdução de qualquer um dos produtos e lucros líquidos esperado por cada unidade de um novo produto, que são dados pela seguinte tabela:

Produto	1	2	3	4
Custo inicial (U.M.)	4000	5000	7000	6000
Lucro líquido (U.M./unidade)	50	60	30	40

Formule um modelo para determinar a melhor decisão, sabendo que:

- no máximo, só podem ser introduzidos três novos produtos,
- a selecção do produto 1 força a selecção do produto 3,
- das seguintes três restrições relativas ao processo tecnológico, uma poderá não ser efectiva:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 20000$$
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20000$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 5000$$

Identifique claramente o significado das variáveis de decisão, das restrições e da função objectivo. Teça todas as considerações que entender convenientes.

9. Considere um problema de planeamento da produção, em que se pretende sequenciar um conjunto de tarefas numa única máquina. Neste sistema, a medida de eficiência é dada pela soma dos atrasos existentes em todas as tarefas. Um tarefa tem atraso se o instante de tempo em que termina o seu processamento for superior ao seu prazo de entrega; caso contrário, considera-se que o atraso é nulo. Embora se admita a entrega após o prazo estipulado, pretende-se sequenciar as tarefas de modo a minimizar a soma de todos os atrasos.

   Os tempos de processamento (a_j) e os prazos de entrega (d_j) das tarefas são os indicados na seguinte Tabela:

j	1	2	3
a_j	15	18	17
d_j	18	22	25

   Por questões de ordem tecnológica, a tarefa 2 deve preceder a tarefa 1.

   Para o conjunto de tarefas indicado, formule **apenas** um modelo de programação inteira que lhe permita determinar o modo como os tarefas devem ser sequenciados de modo a minimizar a medida de eficiência do sistema.

10. O problema da p-mediana é usado frequentemente para escolher a localização de centros de serviço, nomeadamente no sector público.

   Considerem-se N pontos de consumo, cada um quais constitui um local possível para a instalação de um centro de serviço. O objectivo do problema é seleccionar exactamente p locais ($p < N$) para instalar centros de serviço, de modo a minimizar a soma dos tempos de deslocação entre os pontos de consumo (pesados pela população existente em cada ponto) e os centros onde os serviços estão localizados.

   Cada ponto de consumo é constituído por uma população w_i ($i = 1, \ldots, N$) e o parâmetro t_{ij} representa o tempo de deslocação de uma pessoa entre o ponto de consumo i e o centro de serviço j. Evidentemente, na solução óptima, cada ponto de consumo será integralmente servido pelo centro de serviço que se encontrar mais próximo.

   Considerando os dados abaixo referidos, referentes a três pontos de consumo, e sabendo que se pretende instalar dois centros de serviço, formule **apenas** um modelo de programação inteira que lhe permita determinar a solução óptima.

i	1	2	3
w_i	15	11	10

t_{ij}	1	2	3
1	0	4	2
2	4	0	3
3	2	3	0

   Considere variáveis de decisão x_{ij} que tomam o valor unitário se o ponto de consumo i for servido pelo centro de serviço j.

11. O problema da satisfação de um conjunto de cláusulas é um problema de lógica matemática que pode ser resolvido usando programação inteira. É dado um conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, designadas por literais, que podem tomar o valor lógico verdadeiro ou falso. Designe-se o complemento (negação) de cada variável x_i por $\bar{x}_i$. O símbolo $\wedge$ designa a operação lógica *e* e o símbolo $\vee$ designa a operação *ou*.

    Qualquer expressão Booleana pode ser reduzida à forma normal conjuntiva. Nesta forma, a expressão pode ser escrita como a conjunção de um número finito de disjunções, onde cada literal aparece apenas uma vez.

$$(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_5)$$

    Se existir uma atribuição de valores lógicos aos literais que tornem a expressão verdadeira, diz-se que a expressão Booleana pode ser satisfeita. Para a expressão ser verdadeira, é necessário que todas as cláusulas sejam verdadeiras; para isso, pelo menos um literal de cada disjunção deve ser verdadeiro. Para a expressão apresentada, os valores lógicos x_2 =verdadeiro e $x_1 = x_3 =$ falso satisfazem a expressão.

    Usando variáveis de decisão binárias (que tomam o valor 0 ou 1), formule um modelo de programação inteira que lhe permita determinar se a expressão acima indicada pode ser ou não satisfeita.

12. Uma empresa naval tem de proceder à reparação de três embarcações que devem estar todas prontas o mais cedo possível, para iniciarem uma viagem conjunta. A empresa dispõe de um estaleiro com apenas uma doca para reparações, pelo que só se pode reparar uma embarcação de cada vez. Além disso, uma vez iniciada, a reparação tem de ser concluída. Existe a possibilidade de se recorrer a uma empresa associada, mas ela só poderá aceitar uma única reparação. O tempo de reparação da embarcação na empresa associada é igual à sua duração normal mais quatro unidades de tempo, devido às deslocações. A reparação da embarcação j, $j = 1, \ldots, 3$, só pode ser iniciada depois da recepção de peças já encomendadas, cuja data de disponibilidade é designada por d_j (considere que as peças podem ser recebidas na empresa associada na mesma data). O tempo de reparação é designado por r_j. Os seus valores são os seguintes:

embarcação j	1	2	3
r_j	15	18	17
d_j	5	4	3

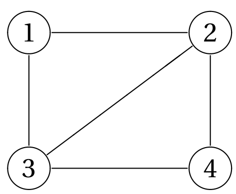
    a) Formule mas não resolva, um modelo que lhe permita determinar o melhor plano de execução das reparações. Identifique claramente as variáveis de decisão e os dados do problema e explique com detalhe o significado das restrições e da função objectivo, indicando as suas dimensões. Teça todas as considerações necessárias.

    b) Apresente uma solução admissível (qualquer) para este problema (plano de execução).

13. As redes de comunicação podem ser representadas por um grafo, em que os arcos representam linhas de transmissão e os nós representam pontos de origem e de destino de mensagens, e/ou *routers*, que as encaminham para outros nós da rede. O grafo da rede de comunicação $G = (V, A)$ é constituído por um conjunto de vértices V e um conjunto de arcos A.

As redes são concebidas para permitir o tráfego descrito por uma matriz origem destino de tráfego $\Theta = [\theta_{st}]$, cujos elementos θ_{st} representam a quantidade de tráfego desde uma origem s até um destino $t, \forall s, t \in V$, podendo o tráfego θ_{st} ser encaminhado por um único ou por vários caminhos.

Considere uma situação em que um operador de comunicações pode alugar ao dono da infra-estrutura de comunicação (rede) uma porção de capacidade das linhas, com o fim de assegurar o tráfego dos seus clientes. A rede de comunicação com 4 vértices é a apresentada na figura, e o custo mensal de aluguer da linha de transmissão (i, j) depende do valor da capacidade alugada, expressa em unidades de fluxo [U.F.]. Para cada linha (i, j), o dono da infra-estrutura oferece três opções de aluguer, cujos custos mensais [U.M./mês] são os indicados na tabela:



capacidade	custo mensal da linha [U.M./mês]				
alugada [U.F.]	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(3,4)$
50	360	540	90	315	180
15	200	300	50	175	100
5	80	120	20	70	40

Formule modelos que permitam ao operador de comunicações determinar quais as linhas, e quais as capacidades, que deve alugar de modo a assegurar as comunicações dos seus clientes nas seguintes duas situações:

a) a matriz origem destino de tráfego tem apenas um elemento positivo $\theta_{14} = 30$ U.F..

b) a matriz origem destino de tráfego tem dois elementos positivos $\theta_{14} = 30$ U.F. e $\theta_{23} = 12$ U.F..

14. Resolva cada um dos dez puzzles, determinando a afectação de valores que torne a equação verdadeira, sabendo que cada letra diferente corresponde a um dígito diferente.

    1) LGARI + OSMTH + ARLGO = TMGIH

    2) BUGRO + GADNK + ACDAB = NCRUA

    3) MELBI + PCOTA + EOATP = IPBCT

    4) DOMER + MYHPY + GYDEA = HGOMM

    5) LACRP + EILUH + HOEPU = IULEA

    6) ILDIT + FRZAG + DEIFT = GIRIF

    7) SRHOY + ESDNU + HRGDY = NHUYH

    8) VHASE + GNISR + HTVAT = SIEEE

    9) MPEOC + ECMAP + INRTA = RENNC

    0) MJOUR + UILRA + JNSML = NNIIL

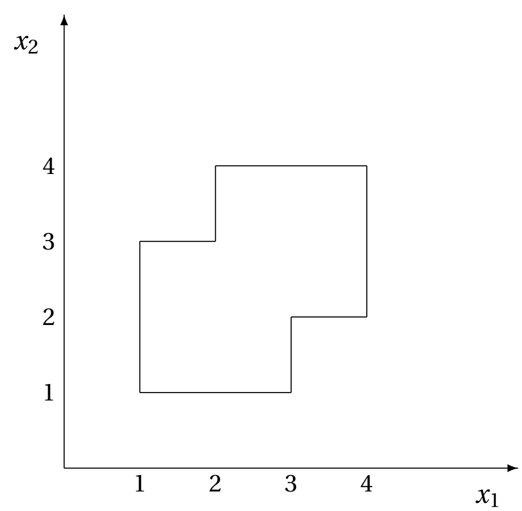
15. Derive novas formulações mais fortes para cada um dos seguintes conjuntos.

    a) $$79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178$$
    $$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \text{ binário}$$

b) $x_1 + (1 - x_2) + x_4 \leq 1$
$x_3 + (1 - x_2) + x_4 \leq 1$
$x_1 + x_3 \leq 1$
x_1, x_2, x_3, x_4 binário

c) $x_1 - My_1 \leq 0$
$x_2 - My_2 \leq 0$
$x_3 - My_3 \leq 0$
$x_1 + x_3 \leq 1$
$x_2 + x_3 \leq 10$
x_1, x_2, x_3 inteiro
y_1, y_2, y_3 binário

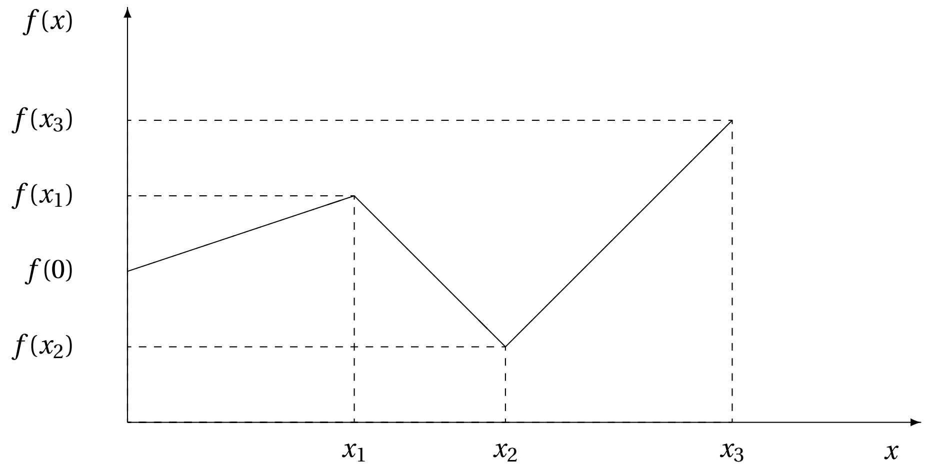
16. Considere o domínio côncavo apresentado na seguinte Figura:



a) Utilizando variáveis binárias, descreva o domínio apresentado.

b) Apresente graficamente a relaxação linear desse domínio, ou seja, o domínio obtido quando as restrição relativas às variáveis binárias, x_j binário, $\forall j$, são substituídas por $0 \leq x_j \leq 1$, $\forall j$.

17. Considere uma função linear por partes como a apresentada na Figura.

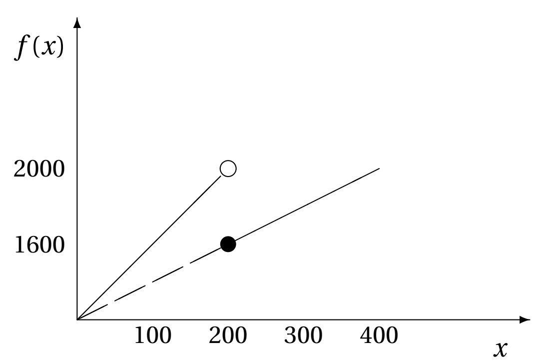


a) Determine uma forma geral de modelar funções lineares por partes usando variáveis binárias.

b) Aplique ao exemplo da Figura, com $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 8$, $f(0) = 2, f(x_1) = 3, f(x_2) = 1$ e $f(x_3) = 4$.

c) Como se deveria alterar o modelo se houvesse descontinuidades no valor da função? Relembre que os modelos de programação linear inteira apenas admitem restrições dos tipos $\leq, \geq$ e $=$.

18. Considere a seguinte função de custo, $f(x)$, que ocorre em situações em que há descontos de quantidade. O custo unitário dos artigos é 10, se a quantidade adquirida, x, for inferior a 200 unidades, ou 8, se a quantidade adquirida for igual ou superior a 200 unidades, como se mostra na figura:



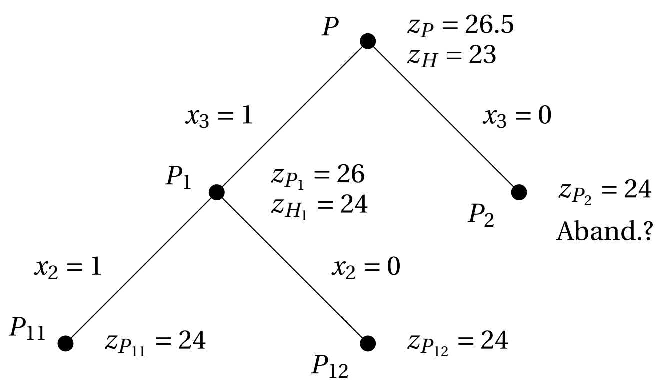
a) Como é se deve tratar a descontinuidade que ocorre no ponto em que a quantidade pedida é 200? Será que a variável x pode tomar valores fraccionários?

b) Apresente o modelo da função custo usando variáveis binárias.

13 Programação inteira: partição e avaliação

Quiz

Na resolução de um problema de Programação Inteira apenas com variáveis binárias através do método de partição e avaliação, pesquisou-se já a árvore ilustrada na figura. A pesquisa é feita em profundidade (ordem de visita dos nós: P, P_1, P_{11}, P_{12} e P_2). Em cada nó, são indicados o limite superior do nó e o valor de uma solução heurística, identificados por z_{P_i} e z_{H_i}, $i \in \{\emptyset, 1, 11, 12, 2\}$, respectivamente.



1. Trata-se de um problema de minimização ou de maximização? Justifique.

   (a) maximização

   (b) minimização

2. Quantas soluções admissíveis foram já encontradas e quais os respectivos valores?

   (a) 3, com valores 26.5, 26 e 24

   (b) 2, com valores 23 e 24

   (c) 4, com valores 23, 24, 26 e 26.5

3. Será que o nó P_2 pode ser abandonado?

   (a) Não, ainda pode ser encontrada uma solução com valor superior a 24

   (b) Sim, não se pode encontrar nenhuma solução com valor superior a 24

   (c) Não, ainda pode ser encontrada uma solução com valor inferior a 26.5

   (d) Nenhuma das de cima

4. A pesquisa feita é suficiente para identificar a solução óptima do problema?

   (a) Sim, a solução óptima é 23.

   (b) Sim, a solução óptima é 24.

   (c) Sim, a solução óptima é 26.5.

   (d) Não, é ainda preciso explorar os nós P11, P12 e P2.

5. Se fosse feita uma pesquisa em largura (ordem de visita dos nós: $P, P_1, P_2, P_{11}, P_{12}$), seria preciso explorar todos os nós indicados na figura?

   (a) Não, não seria preciso explorar os nós P11 e P12

   (b) Sim, seria preciso explorar os nós indicados e todos os que ainda faltam.

   (c) Sim, mas os nós seriam os mesmos, neste caso.

6. Quais os limites inferior e superior para o valor da solução óptima inteira ao longo da pesquisa. Para cada nó da árvore, indique os respectivos valores.

Exercícios

1. O problema do saco de mochila consiste em seleccionar o conjunto de itens a incluir num saco de mochila de modo a melhor usar a sua capacidade. As variáveis de decisão x_j significam o número de itens do tipo j a incluir no saco de mochila. A cada item está associado um lucro p_j, e um peso w_j. A mochila tem uma capacidade W. Considere o seguinte problema de mochila binário, em que os itens foram previamente ordenados por valores decrescentes de razão p_j/w_j :

$$\begin{aligned} \max\ & 10x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 3x_5 \\ \text{suj.}\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 8 \\ & x_j = 0 \text{ ou } 1,\ j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

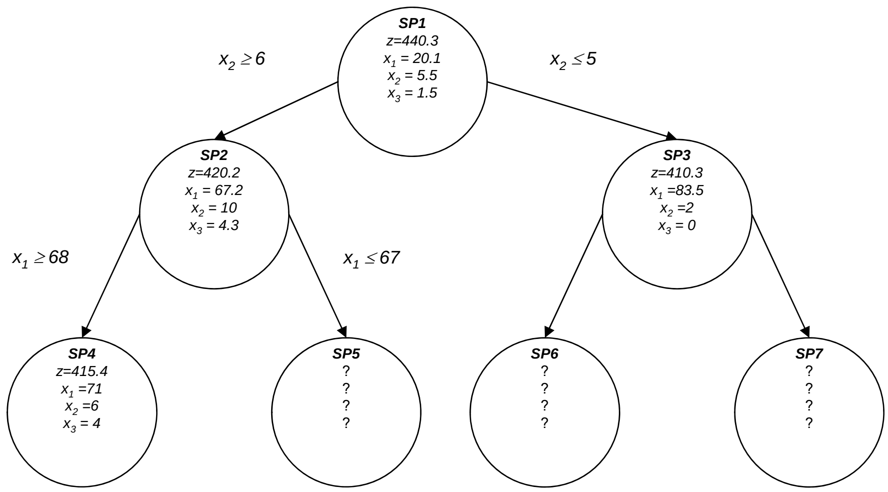
   a) Apresente a relaxação linear do modelo. Justifique.

   b) Diga qual é, e como pode obter, a solução óptima da relaxação linear do modelo. Justifique a metodologia adoptada.

   Para o problema acima apresentado, é conhecida uma solução heurística com o valor de 24, correspondendo a incluir no saco de mochila os itens 1, 3 e 4.

   c) Determine a solução óptima do problema de saco de mochila usando o método de partição e avaliação, usando uma regra de pesquisa em largura.

2. Considere um problema de problema de programação inteira que está a ser resolvido pelo método de partição e avaliação, tendo já sido explorados alguns nós da árvore de pesquisa.



a) Trata-se de um problema de minimização ou de maximização?

b) Indique um intervalo no qual se encontra o valor da solução óptima inteira.

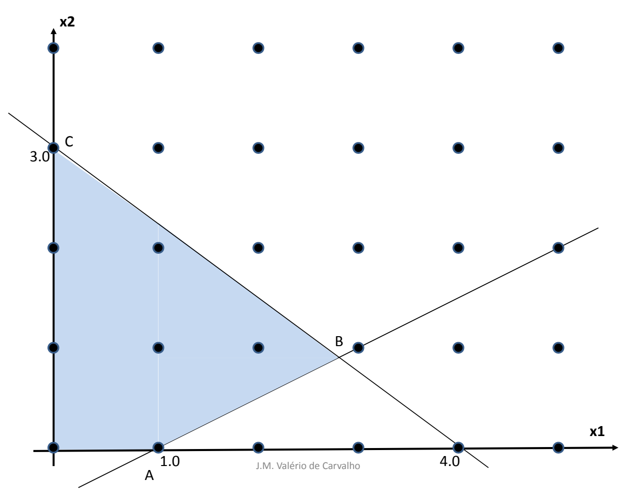
c) Indique as restrições de partição que dão origem aos nodos 6 e 7.

d) De entre os nodos 5, 6 e 7, quais os nodos que podem ser abandonados?

3. Considere o seguinte problema de programação inteira:

$$\max 1000x_1 + 1x_2, \text{ suj. a } 3x_1 + 4x_2 \leq 12, x_1 - 2x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

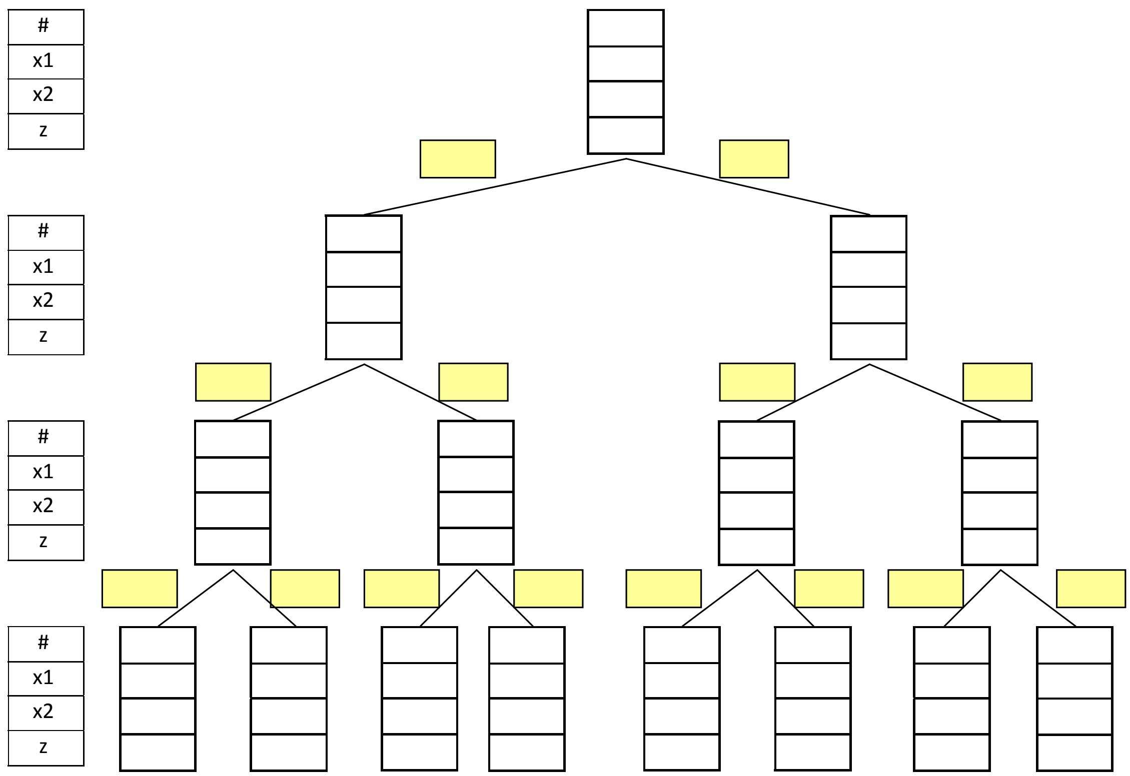
Os vértices abaixo indicados têm as coordenadas $A = (1,0)^\top, B = (2.8, 0.9)^\top, C = (0,3)^\top$, respectivamente.



a) Usando a regra de pesquisa $BFS(FIFO)$ e explorando em primeiro lugar o ramo correspondente à restrição do tipo ≤, resolva graficamente (*i.e.*, pode determinar a solução óptima de cada nó usando a informação dada acima, inspeccionando o desenho ou calculando a intersecção de rectas, **não sendo necessário usar o método simplex**) o problema pelo método de partição e avaliação, construindo uma árvore de pesquisa (justificando sucintamente todas as decisões tomadas) em que sejam indicados:

- em cada nó da árvore: o número de ordem de visita do nó, as coordenadas do ponto e o valor da função objectivo;

- em cada ramo da árvore: a restrição de partição.



Além disso, indique a decisão em cada nó (partição ou abandono), justificando-a:

nó	decisão / justificação
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

4. (R) Considere a solução óptima da relaxação linear de um problema de programação inteira.

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	1/4	1/4	3
x_2	0	1	1/4	-1/4	1/2
	0	0	3/4	1/4	6 1/2

a) Quais as restrições de partição a considerar na raiz da árvore de pesquisa?

b) Calcule a solução óptima de cada nó descendente inserindo as restrições de partição no quadro óptimo da raíz.

c) Da análise dos 2 nós descendentes é suficiente para determinar a solução óptima inteira?

14 Programação inteira: planos de corte

Exercícios

1. Considere o seguinte problema de programação inteira e a solução óptima da respectiva relaxação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2x_2 \\ \text{suj.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2
	0	0	5/6	1/6	5

Na prática, para a solução de problemas de programação inteira, é frequente recorrer a métodos que combinam o uso de planos de corte com *branch and bound*. Determine a solução óptima (ou uma das soluções óptimas) deste problema de programação inteira, utilizando o método a seguir indicado:

a) Introduza **apenas** 1 plano de corte.

b) Determine a equação do plano de corte em função das variáveis de decisão do problema original.

c) Partindo da solução obtida na alínea a), prossiga, utilizando o método de *branch and bound*.

2. Determine a solução óptima do seguinte problema de programação inteira:

$$\begin{array}{ll} \max & 8x_1 + 6x_2 \\ \text{suj.} & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & 4x_1 + 1x_2 \leq 8 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \\ & x_1,\ x_2 \text{ inteiros} \end{array}$$

3. Considere o seguinte problema de programação inteira e a solução óptima da respectiva relaxação linear:

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{suj. a} & x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_2	0	1	-3/10	1/10	8/10
x_1	1	0	2/10	-4/10	18/10
	0	0	7/10	11/10	-112/10

a) Usando cortes fraccionais, determine a solução óptima inteira deste problema.

4. Determine a solução óptima do seguinte problema de programação inteira mista:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 \\
\text{suj.} & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 22 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 14 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \\
& x_3 \text{ inteiro}
\end{array}
$$

5. Determine a solução óptima do problema de programação inteira mista, em que apenas x_1 e x_2 precisam de ser inteiros, cuja solução optima fraccionária é a indicada no seguinte quadro:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	-11/3	-1/3	0	-5/3	5/3
x_5	0	0	14/3	1/3	1	5/3	16/3
x_2	0	1	5/3	1/3	0	2/3	4/3
	0	0	55/3	5/3	0	19/3	-7/3

15 Programação dinâmica

Exercícios

1. A Empresa Sarilhos, Lda., possui uma unidade fabril em Altatensão, um país do médio oriente que nos últimos tempos se tem confrontado com graves problemas sociais. Informações seguras garantem que as forças revolucionárias estão prestes a atacar a capital para derrubar o regime e a Sarilhos, Lda., está a considerar um plano de emergência para retirar o valioso património existente na empresa.

   O único navio capaz de transportar o equipamento dispõe apenas de um porão de carga com a capacidade máxima de 9 toneladas. O peso (em toneladas) e o valor (em milhões de dólares) de cada máquina são os que constam da seguinte lista:

Máquina	Peso	Valor
1	4	8
2	3	7
3	3	6
4	3	6
5	2	3
6	1	2

   Usando programação dinâmica, determine quais as máquinas que deverão ser escolhidas de modo a maximizar o valor da carga tranportada. Sugestão: agrupe as máquinas 3 e 4, que têm os mesmos pesos e valores, tratando-as como um único tipo de máquina, de que existem 2 unidades.

2. O gestor de uma empresa possui 5 U.M. que pode investir em 3 projectos diferentes. Os lucros obtidos em cada projecto dependem do capital a ele alocado, de acordo com a seguinte Tabela:

	capital alocado (U.M.)					
projecto	0	1	2	3	4	5
1	0	1	4	6	7	8
2	0	3	5	8	10	11
3	0	0	2	10	11	11

   a) Diga como deveria o capital ser alocado aos projectos de modo a maximizar o lucro total.

   b) Considere agora que se deve investir, pelo menos, 1 U.M. em cada projecto. Qual seria a nova solução óptima? (sugestão: use um modelo em que se aloca o capital livre depois de atribuir 1 U.M. a cada projecto, com um espaço de estados mais reduzido).

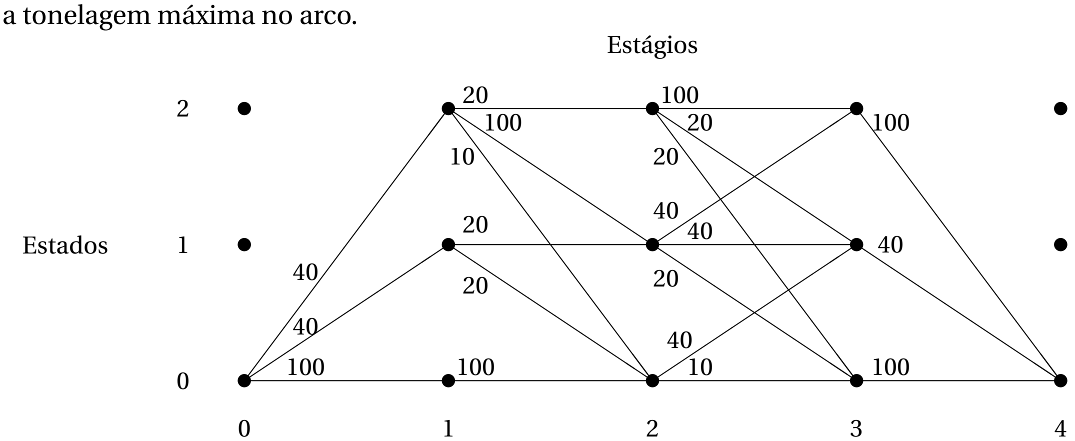
3. Uma companhia de construções possui 3 obras em curso. De acordo com a actual distribuição de mão–de–obra, equipamento e materiais, os 3 projectos podem ser terminados em 15, 20 e 18 semanas, respectivamente. A administração da empresa pretende reduzir os tempos para a conclusão das obras e decidiu afectar uma verba adicional de 20000 U.M. aos 3

projectos. Os novos tempos necessários para a conclusão das obras, em função dos fundos adicionais, são dados pela seguinte Tabela:

Fundos Adicionais ($\times$ 1000 U.M.)	Projecto 1	Projecto 2	Projecto 3
0	15	20	18
5	12	16	15
10	10	13	12
15	8	11	10
20	7	9	9

Considere que os fundos podem ser afectados apenas em múltiplos de 5000 U.M.. Como é que a verba de 20000 U.M. deveria ser distribuída, de modo a obter a maior redução total possível nos tempos de execução? Formule o problema usando programação dinâmica, indicando claramente o que entende por estados, estágios e contribuições de estágio.

4. A programação dinâmica pode ser usada para determinar a carga máxima que pode ser transportada por um camião quando, no trajecto, é necessário atravessar pontes com tonelagem máxima. Sendo $f(j,y)$ a carga máxima que pode ser transportada até ao estado y no estágio j, a relação de recorrência seria $f(j,y) = \max_{\forall((j-1,y'),(j,y))}\{\min\{f(j-1,y'), t_{((j-1,y'),(j,y))}\}\}$, sendo $t_{((j-1,y'),(j,y))}$ a tonelagem máxima no arco (ponte) entre os estados $(j-1,y')$ e (j,y). A resolução envolve determinar o caminho em que o valor do arco com menor tonelagem é o maior possível. O caminho a percorrer é entre os estados inicial $((0,0))$ e final $((4,0))$ apresentados na Figura, em que o valor associado a cada arco representa a tonelagem máxima no arco.



a) Em que valor, $f(0,0)$, deve ser inicializado o estado inicial $((0,0))$?

b) Exprima em linguagem corrente o significado da relação de recorrência deste exemplo.

c) Use programação dinâmica para determinar a tonelagem máxima que pode ser transportada, considerando que o camião tem peso (tara) zero. Indique o caminho óptimo.

5. O gestor de uma empresa pretende investir 50 U.M.. Há três alternativas para o investimento. Os lucros obtidos em cada projecto dependem do capital investido, de acordo com a Tabela abaixo apresentada.

	capital invest. (U.M.)				
projecto	10	20	30	40	50
1	1	4	6	7	8
2	–	–	9	12	13
3	1	2	10	11	–

O projecto 2, a ser seleccionado, requer uma entrada mínima de 30 U.M.. Determine como deveria o gestor investir o capital de modo a maximizar os lucros. Formule como um modelo de programação dinâmica, indicando claramente o que entende por estados, estágios e decisões alternativas, e determine a solução óptima.

6. Considere o seguinte problema de saco de mochila binário:

$$\begin{array}{lllll} \max & 9x_1 & +7x_2 & +5x_3 & +2x_4 \\ s.a. & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 \leq 7 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 = 0 \text{ ou } 1 \end{array}$$

a) Usando programação dinâmica, determine a solução óptima do problema.

7. Considere o seguinte problema de saco de mochila.

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ \text{suj.} & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 14 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

a) Estabeleça as relações de recorrência para este problema com variáveis inteiras gerais.

b) Usando programação dinâmica, determine a solução óptima do problema.

8. Uma companhia pretende construir três novos edifícios A, B e C, à razão de um por ano, podendo escolher a ordem pela qual eles são construídos. O custo de construção de cada edifício depende dos edifícios já concluídos, de acordo com a seguinte tabela.

já construído	Custos		
	A	B	C
nada	10	8	6
A	–	9	8
B	13	–	9
C	11	10	–
A e B	–	–	11
A e C	–	12	–
B e C	14	–	–

a) Formule este problema usando programação dinâmica definindo claramente os estágios, estados e as contribuições de estágio. Justifique.

b) Determine qual a sequência em que os edifícios devem ser construídos, de modo a minimizar os custos.

9. Considere o problema de programação inteira abaixo apresentado em que as contribuições resultantes de variável x_3 não são lineares, e são dadas pela função $f(x_3)$.

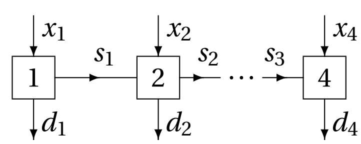
$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + f(x_3) \\ suj. & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ e inteiro, } j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

$$f(x_3) = \begin{cases} -3 + 3x_3 & \text{, se } x_3 > 0 \\ 0 & \text{, se } x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Formule este problema usando programação dinâmica. Defina, claramente, o que são estágios, estados, e contribuições de estágio.

b) Determine a solução óptima, usando programação dinâmica.

10. Considere o seguinte problema de produção/armazenagem. Em cada dia j, existe uma procura d_j que é necessário satisfazer. Para esse efeito, podem usar-se as unidades produzidas no próprio dia e/ou as unidades em armazém. Se, num determinado dia, as unidades produzidas mais as unidades em armazém forem superiores à procura, o excesso é armazenado para o dia subsequente. O diagrama de fluxos das unidades é o seguinte:



sendo x_j o número de unidades produzidas no dia j e s_j o stock existente após o dia j.

O horizonte de planeamento é de 4 dias. A procura em cada dia é de 2, 1, 3 e 2 unidades, respectivamente. Os custos unitários de produção são de 10 U.M.. A capacidade máxima de produção diária é de 4 unidades. Os custos de armazenagem são de 1 U.M./dia/unidade e a capacidade máxima de armazenagem é de 3 unidades. Os stocks iniciais e finais são nulos.

a) Formule este problema usando programação dinâmica, usando o modelo típico em que os estados correspondem aos diferentes valores permitidos para o stock.

b) Determine a solução óptima, usando programação dinâmica.

c) Considere agora que existe um custo de preparação, com o valor de 1 U.M./preparação, quando num período não há produção tendo havido produção no período anterior. Considere a construção de um modelo de programacão dinâmica para esta situação. Será que é suficiente usar o espaço de estados definido na alínea a)? Justifique.

11. Considere o seguinte problema de programação inteira:

$$\begin{aligned}
\max z = \quad & x_1 + 2x_2 + f(x_3) \\
\text{suj. a} \quad & x1 + 3x2 + 2x3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}$$

sendo $f(x_3) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_3 = 0 \\ -3 + 3x_3 & \text{se } x_3 > 0 \end{cases}$

a) Formule como um modelo de programação dinâmica, indicando claramente o que entende por estados, estágios e acções alternativas.

b) Determine a solução óptima, usando programação dinâmica.

12. O problema do saco de mochila pode também ser resolvido com programação dinâmica, usando um modelo em que um estado é caracterizado por um valor da função objectivo e o espaço de estados é definido por todos os valores inteiros que a função objectivo pode tomar. Para limitar a dimensão do espaço de estados interessa calcular um limite superior para o valor do óptimo, z_{max}, sendo então o espaço de estados definido por todos os valores menores ou iguais a esse limite superior.

Cada estágio corresponde a um item. Em cada estágio j, para cada estado y, podemos decidir incluir, ou não o item. Para cada estado, a inclusão do item conduz a um estado em que o valor da função objectivo é maior.

A contribuição de estágio relativa à inclusão do item j no saco é dada por w_j. O valor óptimo de um estado, $g_j(y)$, é a mínima soma dos pesos que é possível obter da consideração de itens com índice inferior a j, otendo um valor de função objectivo de y unidades. Claramente, no estágio n, ao fim do qual todos os itens foram já considerados, o estado obtido com maior valor de função objectivo utilizando uma soma de pesos inferior à capacidade do saco de mochila corresponde ao óptimo do problema de programação dinâmica.

Seja $g_j(y), 0 \leq y \leq z_{max}, 0 \leq j \leq n$, a menor soma de pesos que permite obter uma solução de valor y com as variáveis $i = 1, \ldots, j$. Então,

$$g_j(y) \quad = \quad \min\left\{\sum_{i=1}^{j} w_i x_i : \sum_{i=1}^{j} p_i x_i = y,\ x_i \text{ binário } , i = 1, \ldots, j\right\} \tag{1}$$

As equações recursivas da programação dinâmica são as seguintes:

$$g_i(y) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ll} g_{i-1}(y) & \text{, para } y = 0, \ldots, p_i - 1 \\ min\{g_{i-1}(y), g_{i-1}(y - p_i) + w_i & \text{, para } y = p_i, \ldots, z_{max} \end{array} \right\}, \tag{2}$$

para $j = 1, \ldots, n$. Os valores dos estados são iniciados em $g_0(0) = 0$ e $g_0(y) = \infty, y = 1, \ldots, q$.

Um limite superior para o valor do óptimo, z_{max}, pode ser calculado do seguinte modo. Vamos assumir que os artigos estão ordenados por valor decrescente de razão p_j / w_j, isto é, $p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \ldots \geq p_n/w_n$, e definir o item crítico como sendo o item com o índice s, tal que:

$$s = \min\{k : \sum_{j=1}^{k} w_j > W\}.$$

Se $\sum_{j=1}^{s-1} w_j = W$, a solução constituída pelos primeiros $s-1$ itens é óptima, sendo $z^* = \sum_{j=1}^{s-1} p_j$. Caso contrário, $z_{max} = \sum_{j=1}^{s} p_j$ é um limite superior para o valor do óptimo.

Usando este modelo, determine a solução óptima do seguinte problema de saco de mochila binário:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1x_5 \\ suj.\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 8 \\ & x_j = 0 \text{ ou } 1, \forall j \end{aligned}$$

16 Respostas aos quizzes

secção	quiz	respostas
2		ii, iv, v, viii, x, xii
3	1	ii, iv, ix, x
3	2	ii, vi, xii, xv, xx
4		b, d, b, b, c, c, a, b, a, b, não pode haver uma soma finita de uma quantidade infinita de termos positivos
5	1	E, D, A, B, C
6		$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $c_B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
7	1	ii, iv, ii, 17, sim, porque $[2 \quad 2/3 \quad 5/3] * [1 \quad 1 \quad 3]^\top - 7 = +2/3$, sendo a nova variável atractiva para um problema de minimização.
7	2	1(0), 2(15), 3(0,80), 4(0,80,1200,2400), 5(95), 6(0)
8	1	b, (b,c), b, $(\leq, \leq, \leq, \leq, \leq, \geq)$, a, é o modelo dual.
8	2	1. solução é óptima, para o primal e para o dual.
		2. usar o simplex primal (não se pode usar o simplex dual: há um coeficiente < 0 na linha da função objectivo)
		3. usar o simplex dual ou 2 fases (não se pode usar o simplex primal: há um coeficiente < 0 do lado direito)
		4. usar o método das 2 fases (não se pode usar o simplex primal: há um coeficiente < 0 do lado direito, não se pode usar o simplex dual. Há um coeficiente < 0 na linha da função objectivo)
		5. solução é óptima, para o primal e para o dual.
		6. usar o simplex primal (não se pode usar o simplex dual: há um coeficiente > 0 na linha da função objectivo)
		7. usar o simplex dual ou 2 fases (não se pode usar o simplex primal: há um coeficiente > 0 do lado direito)
		8. usar o método das 2 fases (não se pode usar o simplex primal: há um coeficiente < 0 do lado direito, não se pode usar o simplex dual. Há um coeficiente < 0 na linha da função objectivo)
10	1	i, vi, x, (xiii,xvi), xix
10	2	ii, $(x_{11} = 5, x_{13} = 15, x_{21} = 10, x_{31} = 10, x_{32} = 30)$, vi, viii, e, c
11		unir os seguintes pontos $(x_{24}, c_{24}(x_{24}))$: $(0,0)^\top, (1,1)^\top, (2,3)^\top, (4,9)^\top, (5,13)^\top$, devendo o último segmento ser prolongado, $c_{\text{total}} = 11(15) + 13(5) + 1(1) + 1(2) + 2(3) + 16(4) = 303$, b, $(x_{13}, B), (x_{14}, NB - Inf), (x_{23}, B), (x_{24(1,1)}, NB - Sup), (x_{24(2,1)}, NB - Sup), (x_{24(3,2)}, NB - Sup), (x_{24(4,1000)}, B)$.
12		a, b, b, b, c, nó P (23,26.5), nó P_1 (24,26.5), nó P_{11} (24,26.5), nó P_{12} (24,26.5), nó P_2 (24,24).

17 Respostas a exercícios seleccionados

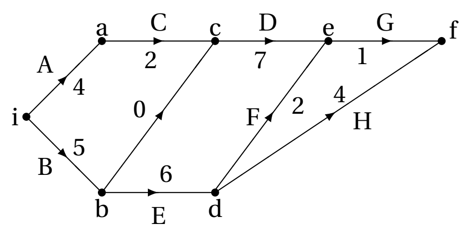
- O raio é definido pelo vértice óptimo, dado pelo quadro simplex, e pela direcção, que pode ser determinada analisando como variam os valores das variáveis básicas quando a variável não básica x_2, com custo reduzido nulo, aumenta e as outras variáveis não básicas permanecem nulas. As coordenadas dos pontos do raio são:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 40/3 + 1/3\theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall \theta \geq 0$$

  É fácil verificar que qualquer ponto do raio (*i.e.*, $\forall \theta \geq 0$) :

  - obedece às restrições do modelo;
  - tem um valor de função objectivo igual a 40.

- O grafo associado ao projecto com a representação das actividades nos arcos é:



- Há uma matriz identidade associada às variáveis básicas e os coeficientes das colunas das variáveis não-básicas podem ser determinados analisando a variação das variáveis básicas quando a variável não-básica aumenta. A título de exemplo, quando x_{AF} aumenta, x_{AE} e x_{CF} diminuem e x_{CE} aumenta; as outras variáveis básicas mantém o mesmo valor. Apresenta-se o quadro simplex de um problema de minimização, com a informação da coluna da variável x_{AF}. A informação relativa às restantes colunas pode ser obtida de forma semelhante:

	x_{AD}	x_{AE}	x_{AF}	x_{BD}	x_{BE}	x_{BF}	x_{CD}	x_{CE}	x_{CF}	
x_{AD}	1	0	0		0			0	0	20
x_{AE}	0	1	+1		0			0	0	10
x_{BE}	0	0	0		1			0	0	10
x_{CE}	0	0	-1		0			1	0	10
x_{CF}	0	0	+1		0			0	1	40
z	0	0	+2		0			0	0	310

- Os multiplicadores são variáveis duais. A solução dual é $(u_A, u_B, u_C, v_D, v_E, v_F)^\top = (0, -1, -2, -3, -4, -5)^\top$, e o respectivo custo = 30(0)+10(-1)+50(-2)-20(-3)-30(-4)-40(-5)=270, que é igual ao custo calculado com base na solução primal.

- As restrições de partição a inserir são: $x_2 \geq 1$ e $x_2 \leq 0$.

A restrição $x_2 \geq 1$ não pode ser inserida nesta forma no quadro simplex, porque o quadro deixaria de ter a matriz identidade. Usando eliminação de Gauss:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & \geq & 1 \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2) & \geq & 1 \\ -\frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 & \leq & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Após inserir a restrição $\frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 \leq -\frac{1}{2}$, é necessário re-optimizar o quadro, usando o método simplex dual.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	1/4	1/4	0	3
x_2	0	1	1/4	-1/4	0	1/2
s_3	0	0	1/4	-1/4	1	-1/2
	0	0	3/4	1/4	0	6 1/2

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	1/2	0	1	2.5
x_2	0	1	0	0	-1	1
s_2	0	0	-1	1	-4	2
	0	0	1	0	1	6

Esta é a solução óptima do nó relativo à restrição $x_2 \geq 1$. Note-se que o valor de x_2 na solução é maior ou igual a 2.

- Para o poliedro $X = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, \forall i\}$, as restrições são $a_i^\top x + r \parallel a_i \parallel_n \leq b_i$, em que $\parallel a_i \parallel_n$ é a norma do vector a_i.

  Para o exemplo, a solução óptima = $x_c = y_c = r = 1,171572876$ é dada pelo seguinte modelo.

  ```
  max:  r;
  xc + yc + 1.41421356 r <= 4;
  - xc + r <= 0;
  - yc + r <= 0;
  ```

- $r = 6,730947213, xc = 16,69375873, yc = 22,82514682.$