Programação Linear - modelos

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

2 de outubro de 2020

Conteúdo

- Plano de produção
- Transporte de terras
- Sudoku 2×2
- Planeamento de rotas de veículos
- Transformações básicas de:
  - uma inequação numa equação
  - uma equação em duas inequações
  - um problema de minimização num problema de maximização
  - variáveis sem restrição de sinal
  - variáveis com limite inferior
  - restrições do tipo módulo
- Apêndice
  - Dieta
  - Lotes de produção
  - Corte de stock
  - Gestão de pessoal
  - Investimento

Pressupostos de um modelo de Programação Linear

- Um modelo é uma representação da realidade.
- A validade de um modelo de PL (que usa funções lineares na função objectivo e nas restrições) resulta da assumpção de que são válidos os seguintes pressupostos:

- Proporcionalidade: os contributos para a função objectivo e para as funções usadas nas restrições são proporcionais aos valores das variáveis de decisão.
- Aditividade: em cada função, o contributo total é dado pela soma dos contributos das diferentes variáveis.
- Divisibilidade: as variáveis de decisão podem tomar qualquer valor, incluindo valores fraccionários.
- Determinismo: os dados são valores conhecidos e constantes.

- O uso de variáveis binárias em *Programação Linear Inteira* ajuda a modelar sistemas em que a assumpção de um (ou mais) destes pressupostos viola de uma forma flagrante o que ocorre na realidade.

Programação Linear: elementos dos modelos (exemplos)

- Variáveis de decisão:
  - quantidades a produzir de um artigo
  - rotas a percorrer por veículos
  - fluxos a enviar pelos arcos duma rede
  - actividades (ou projectos) a seleccionar
  - instantes para iniciar as actividades
- Parâmetros
  - recursos disponíveis
  - número de unidades pedidas por um cliente
  - tempo de processamento de uma actividade
- Restrições:
  - relação entre a função que exprime a quantidade de um recurso que as actividades consomem e o recurso disponível
  - relação entre a função que exprime a quantidade de um bem que as actividade produzem e a procura a satisfazer
  - relação que traduz as regras de funcionamento do sistema (*e.g.*, conservação de fluxo, precedência entre operações)

Exemplo 1: plano de produção (análise de capacidades)

- Uma empresa produz 2 tipos de artigos: Artigo 1 e Artigo 2.
- A produção destes artigos requer 3 tipos de recursos:
  - Material
  - Mão de Obra
  - Tempo-Máquina
- Objectivo: determinar o **plano de produção diário** (solução admissível) que **maximiza o lucro total** (com o valor óptimo).
- A quantidade disponível de cada recurso, o consumo de recursos por cada artigo produzido e o lucro líquido de cada artigo são:

	Artigo 1	Artigo 2	Quantidade disponível
Material	3 [unid./art.]	2 [unid./art.]	120 [unid./dia]
Tempo-Homem	1 [h.hom./art.]	2 [h.hom./art.]	80 [h.hom./dia]
Tempo-Máquina	1 [h.maq./art.]	0 [h.maq./art.]	30 [h.maq/dia]
Lucro Unitário	12 [U.M./art.]	10 [U.M./art.]	

Exemplo 1: plano de produção - elementos do modelos

Variáveis de decisão (incógnitas associadas às decisões):

- x_1 : quantidade de artigos de tipo 1 a fabricar diariamente [art./dia]
- x_2 : quantidade de artigos de tipo 2 a fabricar diariamente [art./dia]

Parâmetros (dados do sistema que não podem ser alterados):

- quantidade disponível de cada recurso;
- lucro unitário dos artigos;
- consumo de recursos por cada artigo (coeficientes tecnológicos)

Exemplo 1: plano de produção - restrições e f. objectivo

Restrições:

- função linear $3x_1 + 2x_2$: qtd. de material usada diariamente [unid./dia]
- restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 120$: apenas são admissíveis as soluções que não excedam a disponibilidade diária de material [unid./dia]
- as outras restrições são semelhantes.
- Todas as variáveis têm restrições de não-negatividade $(x_1, x_2 \geq 0)$.$^{(*)}$

Função objectivo:

- função objectivo $12x_1 + 10x_2$: lucro diário [U.M./dia]

(*) o caso em que as variáveis podem ser positivas ou negativas (s/ restrição de sinal) está tratado nos diapositivos

TransformaçõesBásicas.

Exemplo 1: plano de produção - modelo

- Função objectivo:

$$\max z = 12x_1 + 10x_2$$

- Restrições:

$$\begin{array}{lcr} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ 1x_1 + 2x_2 & \leq & 80 \\ 1x_1 & \leq & 30 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Modelo:

- ver ficheiro `ProblemaDeProducao.lp`

Exemplo 1: plano de produção - resolução

- Resolvendo o seguinte modelo com um *solver* de PL:

```
    max:   12x1 +10x2;
material:    3x1 + 2x2 <= 120;
maodobra:    1x1 + 2x2 <=  80;
tmaquina:    1x1       <=  30;
```

- obtém-se o seguinte relatório com a solução óptima:

Objective	
Variables	result
	540
x1	20
x2	30

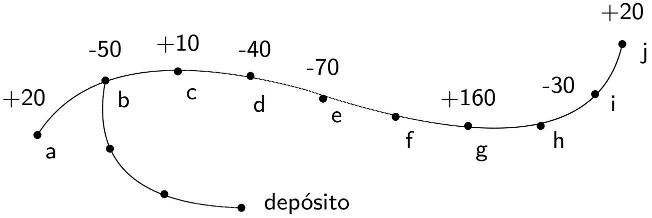
- que é fazer 20 unid./dia de produto 1 e 30 unid./dia de produto 2, com um lucro diário de 540 U.M..

Exemplo 2: transporte de terras

- As obras de terraplanagem representam uma parte significativa dos custos de construção de vias de comunicação.
- Grandes volumes de terra devem ser deslocados de zonas de empréstimo para zonas de depósito para obter os nivelamentos desejados.
- Os custos de transporte de terra são aproximadamente proporcionais à distância percorrida.
- Objectivo: estabelecer o plano de deslocação de terra para minimizar custos de terraplanagem.

Exemplo 2: transporte de terras (cont.)

- Os pontos $a, b, \ldots, j$ encontram-se distanciados entre si de 10 Km.
- As quantidades associadas aos pontos indicam os volumes de terra a deslocar (em milhares de m^3), sendo as zonas de empréstimo e de depósito assinaladas pelos sinais $+$ e $-$, respectivamente.
- Pode ainda recorrer-se a uma zona de depósito, situada fora do traçado da via, a uma distância de 30 Km do ponto b.



- Quais as variáveis de decisão? Quais os dados? Quais as restrições?

Exemplo 2: transporte de terras - elementos dos modelos

Variáveis de decisão:

- volume de terra a transportar desde cada zona de empréstimo para cada zona de depósito.

Parâmetros:

- volume de terra a deslocar (ou depositar) de (em) cada zona;
- distâncias;
- custo de transporte por m^3 e por Km.

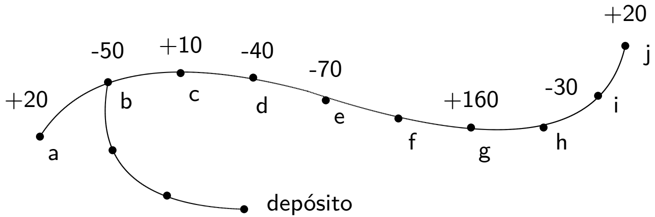
Restrições:

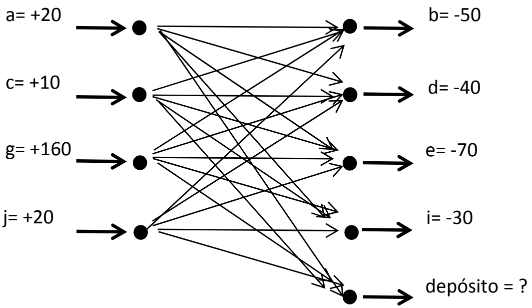
- a soma dos volumes de terra que saem de uma dada zona de empréstimo para cada zona de depósito perfaz o volume a deslocar;
- a soma dos volumes de terra que chegam a uma dada zona de depósito de cada zona de empréstimo perfaz o volume a depositar;

Função objectivo:

- função de custo de transporte.

Exemplo 2: transporte de terras - esboço de modelo





Modelo:

- ver ficheiro `TransporteTerras.lp`

Exemplo 3: sudoku 2 × 2

- O sudoku é um puzzle lógico em que se pretende preencher todas as células com algarismos, de forma a que não haja repetição de nenhum algarismo nas linhas, nas colunas ou nos blocos.
- Vamos ver uma versão com uma matriz 4×4, dividida em 4 blocos 2×2, em que os algarismos de algumas das células são dados.

Exemplo:

	1	4	
			2
1			
	3	2	

- Como representar uma decisão? Quais as variáveis de decisão?
- Quais as restrições?
- Qual é a função objectivo?
- Qual o espaço de soluções admissíveis?

Exemplo 3: sudoku 2 × 2 - elementos do modelo

Variáveis de decisão:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, se a célula } (i,j) \text{ tiver o algarismo } k \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

- cada célula apenas pode ter um algarismo;
- numa linha, cada algarismo apenas pode aparecer uma vez;
- numa coluna, cada algarismo apenas pode aparecer uma vez;
- num bloco 2 × 2, cada algarismo apenas pode aparecer uma vez; e
- há células que devem ter o algarismo dado no puzzle.

Função objectivo:

- O objectivo do jogo é obter uma solução admissível,
- sendo todas as soluções igualmente boas.
- A função objectivo pode ser uma função qualquer.

Exemplo 3: sudoku 2 × 2 - solução do modelo

Modelo:

- ver ficheiro `sudoku_2x2.lp`

Solução do modelo, obtida com o *lpsolve*:

- $x_{121} = x_{134} = x_{242} = x_{311} = x_{423} = x_{432} = 1$ (conforme atribuição feita no modelo)
- $x_{112} = x_{143} = x_{213} = x_{224} = x_{231} = x_{322} = x_{333} = x_{344} = x_{414} = x_{441} = 1$
- todas as outras variáveis $x_{ijk} = 0$

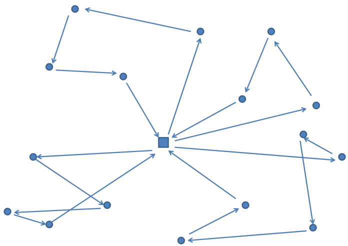
Solução do puzzle:

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

Exemplo 4: planeamento de rotas de veículos

Planeamento de rotas de uma frota de veículos

- Dados:
  - um conjunto de veículos com capacidades e
  - um conjunto de clientes com procuras e janelas temporais de visita,
  - ...
- Objectivo: encontrar a solução de custo mínimo, com
  - um conjunto de rotas, todas começando e terminando no depósito,
  - sendo cada cliente visitado por um único veículo.



- Quais as variáveis de decisão? Quais os dados? Quais as restrições?

Exemplo 4: planeamento de rotas de veículos - elementos

Há modelos diferentes consoante a escolha das variáveis de decisão.

Variáveis de decisão (um exemplo):

- cada rota (uma sequência de arcos) admissível.

Parâmetros:

- carga para cada cliente; capacidade dos veículos;
- distâncias e tempos de viagem;
- ...

Restrições:

- carga não excede a capacidade do veículo;
- cada cliente é visitado por um único veículo na sua janela temporal;
- ...

Função objectivo:

- função de custo de transporte.

Transformações básicas

Transformação de uma inequação do tipo $\leq$ numa equação

- Qualquer inequação do tipo de menor ou igual pode ser transformada numa equação, introduzindo uma variável adicional de folga com valor não-negativo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, s_i \geq 0.$$

Exemplo

	Antes:	Depois:
•	$2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \leq 8$	$2x_1 - 3x_2 + 4x_4 + s_1 = 8$ $s_1 \geq 0$

- A quantidade de recurso disponível é 8.
- A função linear $2x_1 - 3x_2 + 4x_4$ indica a quantidade de recurso usada.
- A variável de folga s_1 indica a quantidade de recurso não usada.
- $s_1 = 8 - 2x_1 + 3x_2 - 4x_4$

Transformação de uma inequação do tipo $\geq$ numa equação

- Qualquer inequação do tipo de maior ou igual pode ser transformada numa equação, introduzindo uma variável adicional de excesso com valor não-negativo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, s_i \geq 0.$$

Exemplo

	Antes:	Depois:
•	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \ \geq \ 4$	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 - s_1 = 4$ $s_1 \geq 0$

- A quantidade requerida é 4.
- A função linear $1x_1 - 2x_2 + 3x_4$ indica a quantidade produzida.
- A variável de excesso s_1 indica o excesso em relação à quantidade requerida.
- $s_1 = 1x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 4$

Transformação de uma equação em duas inequações

- Qualquer restrição de igualdade pode ser expressa como uma par de inequações do tipo de menor ou igual:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & -b_i \end{array} \right.$$

Exemplo

	Antes:	Depois:
•	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 4$	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \leq 4$
		$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \geq 4$

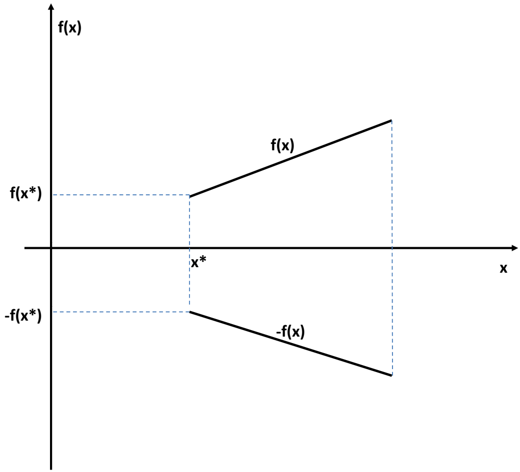
Transformação de um problema de minimização num problema de maximização - I

- Qualquer problema de minimização pode ser reduzido a um problema de maximização, em que se optimiza a função objectivo simétrica da original:

$$\min z = cx \Leftrightarrow \max z' = -cx.$$

(cont.)

- Solução óptima x^* é a mesma,
- mas o valor da função objectivo da solução óptima é o simétrico $f(x^*) = \min f(x) = -\max -f(x)$



Transformação de variáveis sem restrição de sinal

- Qualquer variável sem restrição de sinal pode ser expressa como a diferença de duas variáveis não-negativas:

$$x_j \text{ sem restrição} \Leftrightarrow x_j = x_j^+ - x_j^-, x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0.$$

Exemplo

- Antes: $2x_1 + 3x_2 \leq 20, x_1$ sem restrição$, x_2 \geq 0$
- Fazendo $x_1 = x_1^+ - x_1^-$
- Depois: $2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 \leq 20,\ x_1^+, x_1^-, x_2 \geq 0$

Transformação de variáveis com limite inferior

- Uma variável com limite inferior pode ser substituída por uma variável com limite inferior igual a 0, por mudança de variável:

Exemplo

- Antes: $2x_1 + 3x_2 \leq 20,\ \ x_1 \geq 8, x_2 \geq 0$
- Fazendo $x_1' = x_1 - 8 \rightarrow x_1 = x_1' + 8$
- $2(x_1' + 8) + 3x_2 \leq 20, x_1' \geq 0, x_2 \geq 0$
- Depois: $2x_1' + 3x_2 \leq 4, x_1' \geq 0, x_2 \geq 0$

Restrições do tipo módulo (caso $\leq$)

- $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & -b_i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \end{array} \right.$$

Exemplo

- Antes: $|2x_1 + 3x_2| \leq 20$
- Depois: $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq & -20 \end{array} \right.$
- Trata-se de uma conjunção de restrições.

Restrições do tipo módulo (caso 2)

- $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geq b_i \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & -b_i \end{array}\right.$$
- A disjunção de condições não pode ser representada por uma conjunção de restrições lineares, porque
- uma conjunção de restrições lineares define sempre um domínio convexo (ver slides sobre solução gráfica).

Exemplo

- $|x_1| \geq 2$
- equivale a: $\left|\begin{array}{ccc} x_1 & \leq & -2 \\ x_1 & \geq & 2 \end{array}\right.$
- Trata-se de um domínio não-convexo.

Fim

Apêndice

Problema da dieta

Um avicultor pretende determinar a quantidade que deve utilizar de cada alimento de modo a satisfazer as necessidades nutricionais das suas aves. Os nutrientes, o custo de cada alimento e as necessidades mínimas diárias são os apresentados no seguinte quadro.

	alimentos			mínimo
nutriente	milho	trigo	ração	diário
proteínas	4	8	4	10
hidratos de carbono	2	4	4	6
vitaminas	3	2	4	4
custo (U.M.)	0.10	0.06	0.04	

Objectivo: minimizar o custo de alimentação diário das galinhas.

Problema da dieta: elementos do modelo

nutriente	milho	trigo	ração	mínimo diário
	alimentos			
proteínas	4	8	4	10
hidratos de carbono	2	4	4	6
vitaminas	3	2	4	4
custo (U.M.)	0.10	0.06	0.04	

Variáveis de decisão:

- x_1 : quantidade de milho diária.
- x_2 : quantidade de trigo diária.
- x_3 : quantidade de ração.

Dados:

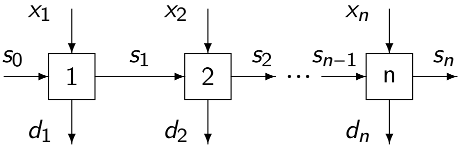
- b_i : quantidade mínima diária do nutriente i
- c_j : custo do alimento j
- a_{ij} : quantidade de nutriente i existente na unidade de peso do alimento j

Problema da dieta: modelo

$$
\begin{array}{lrrrl}
\min z = & 0.10x_1 & +0.06x_2 & +0.04x_3 & \\
 & 4x_1 & +8x_2 & +4x_3 & \geq 10 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & \geq 6 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \geq 4 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

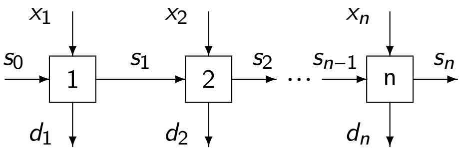
Problema de Lotes de Produção *(lotsizing)*

- Determinar a dimensão dos lotes a fabricar em cada período, dentro de um horizonte de planeamento.
- Em cada período, se o número de unidades disponíveis (*i.e.*, as unidades produzidas no período mais as existentes em stock) for superior à procura nesse período, as unidades remanescentes podem ser armazenadas em stock para venda em períodos subsequentes, segundo o seguinte esquema:



- Objectivo: minimização da soma dos custos de produção e dos custos de armazenagem, satisfazendo a procura em cada período.

Problema de Lotes de Produção: elementos do modelo



Variáveis de decisão:

- x_j : número de unidades produzidas no período j,
- s_j : stock existente após o período j.

Dados:

- d_j : procura existente no período j
- c_j : custo unitário de produção dos artigos no período j
- h_j : custo unitário de posse de inventário no período j
- x_j^{max} : número máximo de unidades produzidas no período j
- s_j^{max} : nível máximo de stock no período j

Problema de Lotes de Produção: modelo

Modelo de Programação Linear

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^{n} c_j x_j + h_j s_j \\
\text{suj. a} & x_j + s_{j-1} - s_j = d_j \ , \ \forall j \\
 & 0 \leq x_j \leq x_j^{max} \ , \ \forall j \\
 & 0 \leq s_j \leq s_j^{max} \ , \ \forall j
\end{array}
$$

Problema de Lotes de Produção: Exemplo I

- Horizonte de planeamento (T): 4 períodos
- Procura em cada período de 2, 3, 4 e 2, respectivamente.
- Capacidade máxima de produção, x_j^{max} : 4 unidades em cada período.
- Nível máximo de stock, s_{max} : 2 unidades.
- Custos unitários de armazenagem, h_j : 1 U.M./ artigo x período.
- Custos de produção: custo variável proporcional ao número de artigos, p_j.
- Valores dos coeficientes de custo de produção:

j	1	2	3	4
p_j	12	10	14	10

Problema de Lotes de Produção: Exemplo II (com custos fixos de preparação)

Para construir um modelo para o seguinte caso, é necessário considerar variáveis binárias para incluir o custo de preparação só nos casos devidos.

- Custos de produção incluem um custo de preparação das máquinas, k_j, e um custo variável proporcional ao número de artigos, p_j :

$$c_j(x_j) = \begin{cases} k_j + p_j x_j & , \text{ se } x_j > 0 \\ 0 & , \text{ se } x_j = 0, \end{cases}$$

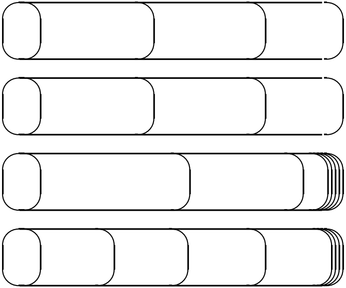
  para qualquer período $j = 1, 2, \ldots, T$.

- Valores dos coeficientes de custo de produção:

j	1	2	3	4
p_j	12	10	14	10
k_j	2	2	1	1

Problema de Corte (*cutting stock*)

Determinar o modo como um stock de matérias primas deve ser cortado em partes menores de maneira a satisfazer pedidos colocados por clientes.



Objectivo: determinar os padrões de corte de modo a minimizar o número de rolos utilizados.

Problema de Corte: definição de padrões de corte

Dados:

- W : largura dos rolos em stock (em quantidade ilimitada)
- m : número de clientes
- w_i : largura dos rolos pedidos pelo cliente $i \quad (0 < w_i \leq W), i = 1, \ldots, m$
- b_i : número de dos rolos pedidos pelo cliente $i, i = 1, \ldots, m$

Padrão de corte: possível arranjo de pedidos na largura do rolo:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \leq W$$

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{e inteiro} \ , \ \forall j \in J.$$

sendo:

- a_{ij} : número de rolos de largura w_i obtidos a partir do padrão de corte j,
- J : o conjunto de padrões de corte possíveis.

Problema de Corte: modelo

Variáveis de decisão:

- x_j : número de rolos a cortar segundo o padrão de corte j.

Cada coluna $A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})^T$ define um padrão de corte, com elementos a_{ij} conforme foram definidos acima.
A formulação de programação matemática é a seguinte:

$$\begin{array}{lcl} min\ z & = & \sum_{j \in J} x_j \\ suj.\ a & & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m \\ & & x_j \geq 0,\ \ \forall j \in J \end{array}$$

Pode haver um número exponencial de padrões de corte, mas há técnicas especializadas para ultrapassar essa dificuldade.

Problema de Corte: modelo de minimização de perdas

Para o padrão de corte j, a perda T_j associada é:

$$T_j = W - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

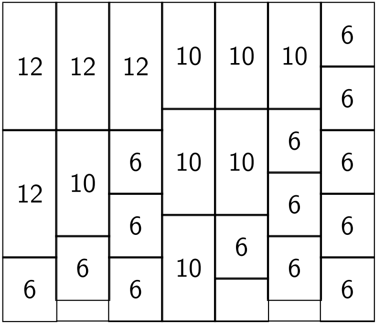
A formulação de programação matemática de minimização de perdas é a seguinte:

$$\begin{aligned} min\ z &= \sum_{j \in J} T_j x_j \\ suj.\ a &\quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m \\ &\quad x_j \geq 0,\ \ \forall j \in J \end{aligned}$$

Pode haver diferenças na solução óptima dos 2 modelos.

Problema de Corte: exemplo (pequeno)

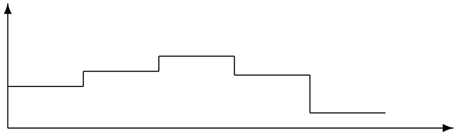
Rolos de largura 30, e 3 pedidos de larguras de 12, 10 e 6, nas quantidades de 200, 300 e 100, respectivamente.



larguras	padrões de corte							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
12	2	1	1					$\geq$ 200
10		1		3	2	1		$\geq$ 300
6	1	1	3		1	3	5	$\geq$ 100
min	1	1	1	1	1	1	1	

Problema de Gestão de Pessoal

- horizonte de planeamento com um conjunto de períodos.
- necessidades de pessoal que variam ao longo do tempo.
- contratos são permitidos por durações pré-determinadas.
- custo de contratação, treino e despedimento de pessoal com contratos a termo certo.



Objectivo

Estabelecimento de uma política de contratações.

Problema de Gestão de Pessoal: elementos do modelo

Discretizar o tempo: Cada variável de decisão (coluna) corresponde a uma acção de contratação permitida que cobre um conjunto de períodos.

x_{ij} : Número de trabalhadores contratados desde o início do período i até ao fim do período j.

c_{ij} : custo de contratação, treino e despedimento de um trabalhador com contrato desde o início do período i até ao fim do período j, e ordenados pagos durante esse período.

	x_{15}	x_{13}	x_{24}	x_{35}	x_{12}	x_{23}	x_{34}	x_{22}		
1	1	1			1				$\geq$	6
2	1	1	1		1	1		1		10
3	1	1	1	1		1	1			14
4	1		1	1			1			9
5	1			1						8

Problema de Gestão de Pessoal: modelo

c_{ij} : ordenado é 1 U.M./mês e custo de contratação, treino e despedimento é 1 U.M.

	x_{15}	x_{13}	x_{24}	x_{35}	x_{12}	x_{23}	x_{34}	x_{22}		
1	1	1			1				$\geq$	6
2	1	1	1		1	1		1		10
3	1	1	1	1		1	1			14
4	1		1	1			1			9
5	1			1						8
c_{ij}	6	4	4	4	3	3	3	2		

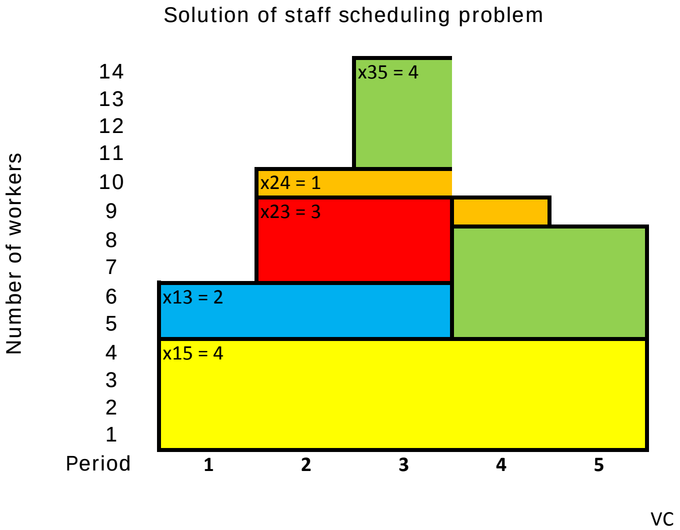
x^*	4	2	1	4	0	3	0	0

Usando um LP solver, pode-se obter a solução óptima $x^{*.}$ o seu custo é 61 unidades. O número de trabalhadores e cada período é igual ao requerido.

Problema de Gestão de Pessoal: solução - I

Variables	result
	61
x15	4
x13	2
x24	1
x35	4
x12	0
x23	3
x34	0
x22	0

Problema de Gestão de Pessoal: solução - II



Problema de Gestão de Pessoal: notas

Nota:

Se os custos de contratação forem elevados, pode haver períodos em que o número de trabalhadores seja maior do que o requerido (incorrendo um custo de não-utilização, mas economizando custos de contratação).

Casos Particulares

- Planeamento de pessoal em serviços de funcionamento diário permanente (*e.g.*, hospitais). Pode haver blocos de 1's consecutivos que são partidos a meio à meia-noite (entre a última e a primeira linha da matriz).
- Se houver mais de um bloco de 1's consecutivos (*e.g.*, caso de haver intervalo para almoço), o modelo já não tem estrutura em rede.

Problema de Gestão de Pessoal: estrutura com 1's consecutivos

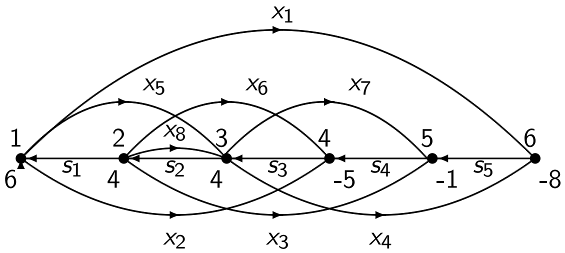
$$
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & & & 1 & & & & -1 & & & & \\
1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & & -1 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & & & & -1 & & \\
1 & & 1 & 1 & & & 1 & & & & & -1 & \\
1 & & & 1 & & & & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix} \\ x \\ \\ y \\ \\ \\ \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \\ 9 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Subtraindo a cada linha a linha que lhe fica por cima, obtém-se:

$$
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & & & 1 & & & & -1 & & & & \\
 & & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & -1 & & & \\
 & & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & \\
 & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 & \\
 & & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 \\
-1 & & & -1 & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix} \\ x \\ \\ y \\ \\ \\ \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ -5 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}
$$

Problema de Gestão de Pessoal: estrutura em rede

$$
\begin{array}{c}
1\\2\\3\\4\\5\\6
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & & & 1 & & & & -1 & & & & \\
 & & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & -1 & & & \\
 & & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & 1 & -1 & & \\
 & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 & \\
 & & -1 & & & & -1 & & & & & 1 & -1 \\
-1 & & & -1 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} 6\\4\\4\\-5\\-1\\-8 \end{array}\right]
$$



Problemas de Investimento: enunciado

- Um investidor dispõe actualmente de 10000 U.M. para investir num período de 5 anos, pretendendo reaver o capital e os lucros obtidos no fim desse período.
- O banco paga um juro de 5% ao ano, ou, em alternativa, 12% ao fim de 2 anos para aplicações a 2 anos.
- Além disso, daqui a 1 ano, irão ser oferecidas obrigações que pagarão 19% no fim do quarto ano.
- Objectivo: determinar o plano de aplicação do capital, de modo a maximizar o montante disponível ao fim de 5 anos.