Transportes (redes com capacidade)

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

27 de setembro de 2020

Transportes (redes com capacidade)

antes

- O algoritmo de transportes em grafos bipartidos (todos os arcos ligam uma origem a um destino)

Guião

- Generalização do algoritmo de transportes a redes gerais: cada vértice pode funcionar como origem e destino, simultaneamente.
- Há questões particulares que é necessário ter em conta.
- Algoritmo de transportes em redes gerais com arcos com capacidade, porque …

depois

- o software de optimização de redes (*e.g.*, relax4) aceita como *input* uma qualquer rede geral com capacidades nos arcos.

Conteúdo

- Revisão de conceitos, e sua adaptação a redes gerais
  - Problema de Transportes em Rede: modelo geral
  - Caracterização das soluções básicas
  - Método dos multiplicadores
  - Circuito de *Stepping stone*
- Transporte em Redes (ainda sem limites superiores)
  - Exemplo
  - Transporte com Transbordo
- Transporte em Redes com Limites Superiores
  - Exemplo
  - Nota: construção da solução inicial
- Transformação num Problema em Rede com Limites Superiores
  - Problemas com Capacidade nos Vértices
  - Exemplo: Transportes com Armazéns Intermédios
  - Problemas com Limites Inferiores

Problema de Transportes em Rede: modelo geral

- Dado um grafo $G = (V, A)$, pretende-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{suj. a} \quad & -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_j, \ \forall j \in V && (1) \\ & 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A && (2) \end{aligned}$$

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: fluxo de *um único tipo de entidades* no arco orientado (i,j);

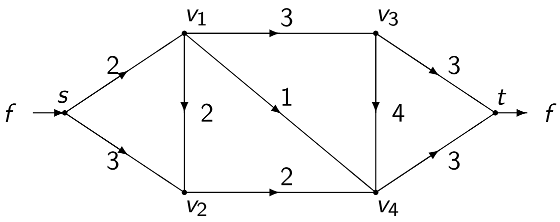
Dados:

- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- b_j: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j;
- u_{ij}: capacidade do arco orientado (i,j).

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo.*
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade.*

Problema do fluxo máximo

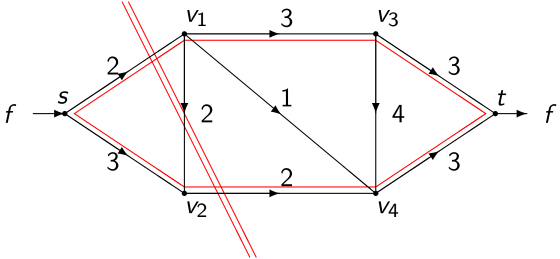
- Na rede de transporte desde os campos de petróleo localizados no ponto s até à refinaria localizada no ponto t, cada troço do oleoduto tem a capacidade [Mlitros/hora] indicada junto do respectivo arco.
- A bombagem apenas pode ser efectuada no sentido das setas.



- Qual a capacidade máxima de transporte entre os pontos s e t, *i.e.*, o fluxo máximo $f^* = \max f$.

Problema do fluxo máximo

- Na rede de transporte desde os campos de petróleo localizados no ponto s até à refinaria localizada no ponto t, cada troço do oleoduto tem a capacidade [Mlitros/hora] indicada junto do respectivo arco.
- A bombagem apenas pode ser efectuada no sentido das setas.



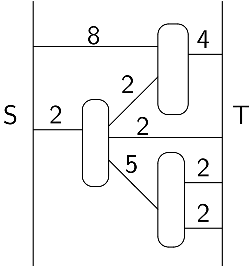
- Qual a capacidade máxima de transporte entre os pontos s e t, *i.e.*, o fluxo máximo $f^* = \max f$.
- O valor do fluxo máximo é 4.

Problema do fluxo máximo

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f \\
\text{suj. a} \quad & -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,k)\in A} x_{jk} = \begin{cases} f & , \ \text{se } j = s \\ 0 & , \ \text{se } j \neq s, t \\ -f & , \ \text{se } j = t \end{cases} \\
& 0 \leq x_{ij} \leq l_{ij} \ , \ \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

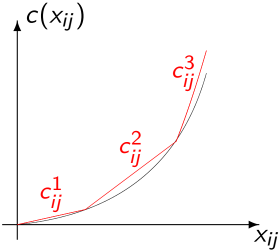
Problema do corte mínimo

- As tropas do General S avançaram até à margem oeste do rio, onde há as ilhas e pontes da Figura. O General T pretende isolar as duas margens, dinamitando pontes.
- Os Kg de TNT para destruir cada ponte são os indicados.



- Os arcos com fluxo igual à capacidade na solução óptima do problema de fluxo máximo indicam as pontes a dinamitar.
- O fluxo máximo é igual ao número de Kg de TNT necessários.
- O problema do corte mínimo é dual do problema do fluxo máximo.

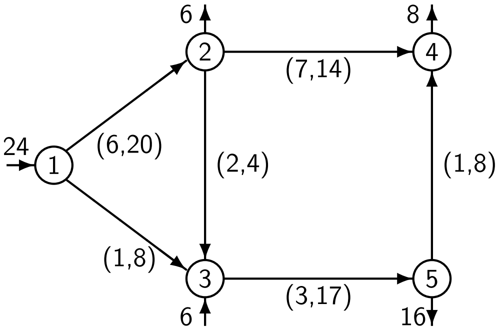
- Aproximação linear por partes de função de custo não linear convexa, $c(x_{ij})$, usando múltiplos arcos com capacidade entre 2 vértices.



- Custos unitários de transporte $c_{ij}^1 < c_{ij}^2 < c_{ij}^3 < \ldots$ crescentes.
- Arco com maior custo unitário só é usado depois do anterior atingir o limite superior.
- Modelar funções de custos não convexas requer uso de variáveis binárias.

Rede com capacidades associadas aos arcos:

- valores associados aos arcos, (c_{ij}, u_{ij}), representam o custo unitário de transporte e a capacidade do arco, respectivamente,
- valores associados aos vértices representam ofertas e procuras.



- Problema balanceado (soma das ofertas = soma dos procuras)

Caracterização das soluções básicas

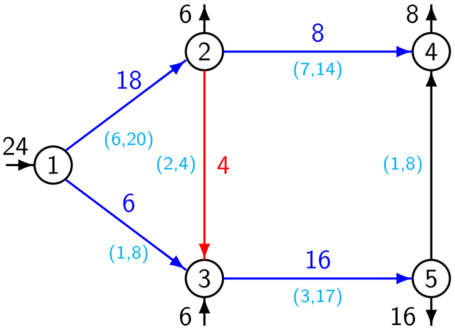
- O grafo associado às variáveis básicas é sempre uma *árvore de suporte*, *i.e.*, um grafo :
  - ligado,
  - sem ciclos, e
  - com $|V|-1$ arcos.

- As restantes variáveis x_{ij} são não-básicas:
  - no limite inferior $(x_{ij}=0)$, ou
  - no limite superior $(x_{ij}=u_{ij})$
- O arco de cada variável não-básica (quer seja uma no limite inferior ou uma no limite superior) forma um (e um só) ciclo com arcos (todos ou alguns) da árvore associada às variáveis básicas.

Exemplo: uma solução inicial básica e admissível

Solução é básica (variáveis básicas formam uma árvore):

- variáveis básicas: $x_{12} = 18, x_{24} = 8, x_{13} = 6, x_{35} = 16.$
- variável não-básica no limite inferior: $x_{54} = 0.$
- variável não-básica no limite superior: $x_{23} = 4.$



- Solução é admissível: todas as restrições de conservação de fluxo (1) e de capacidade (2) são obedecidas.

Teste de optimalidade

- A definição do δ_{ij} não varia: o δ_{ij} indica a variação de custo total quando a variável não-básica ij aumenta.

- Por isso, quando se considera uma variável não-básica ij no limite superior, e a operação a efectuar é **decrementar o valor do seu fluxo**, se o seu $\delta_{ij} > 0$, há uma redução do custo total.

Uma variável não-básica é atractiva quando:

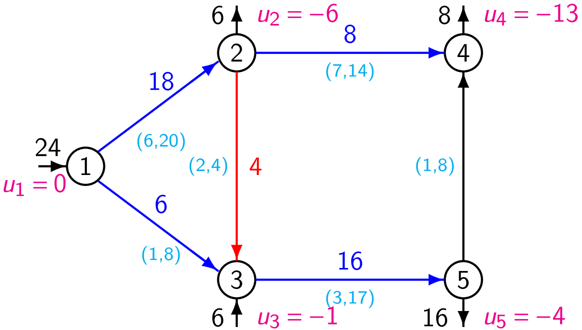
- $x_{ij} = 0$ (variável aumenta de valor) e $\delta_{ij} < 0$.
- $x_{ij} = u_{ij}$ (variável decrementa de valor) e $\delta_{ij} > 0$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

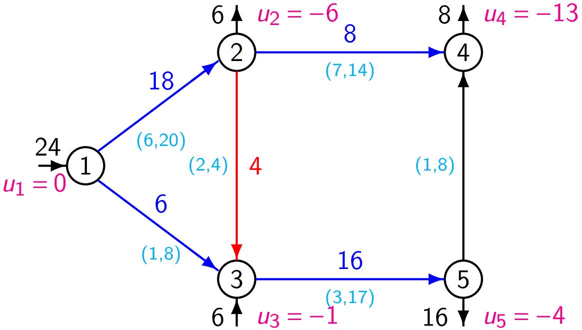
$$c_{ij} = u_i - u_j$$



Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:
$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



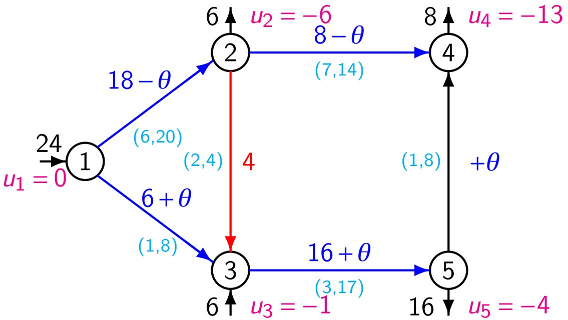
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{23} = 2 - (-6 - (-1)) = +7; \quad \delta_{54} = 1 - (-4 - (-13)) = -8;$$

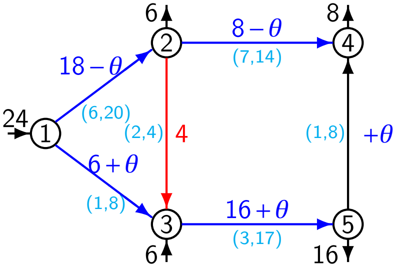
- Ambas são atractivas; x_{54} é a variável mais atractiva.

Valor máximo do aumento de x_{54}

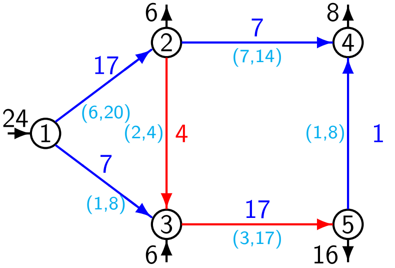
- Arco (5,4) forma um ciclo com os arcos (2,4),(1,2),(1,3) e (3,5) (das variáveis básicas).



- Quando a variável não-básica x_{54} aumenta, a variável básica x_{24} decrementa, a x_{12} decrementa, a x_{13} aumenta e a x_{35} aumenta.
- Qual o aumento máximo de x_{54} sem ela própria ultrapassar o limite superior, nem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa ou ultrapassar o limite superior?
- $\theta_{max} = \min\{8, 8, 18, 2, 1\} = 1$.



- A variável x_{54} entra na base e x_{35} sai da base, tornando-se não-básica no limite superior. Qual é nova árvore?

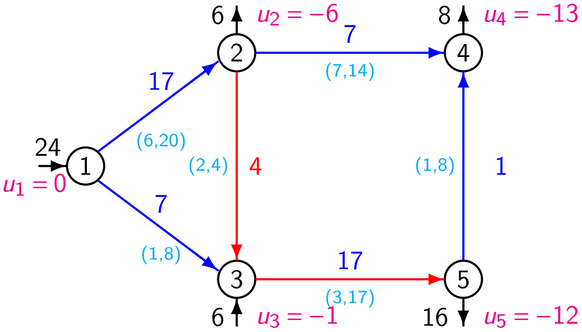


Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

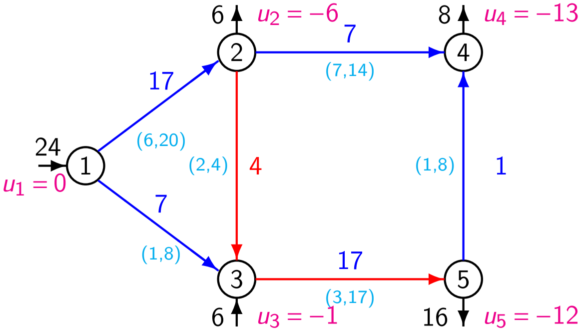
$$c_{ij} = u_i - u_j$$



Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:
$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



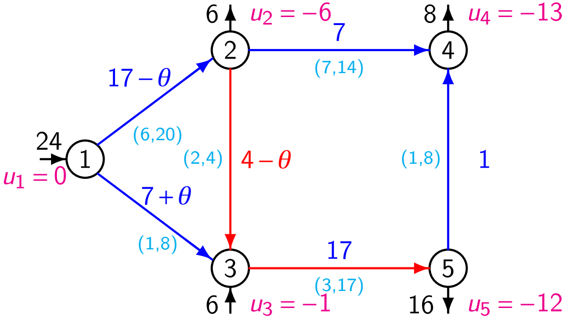
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{23} = 2 - (-6 - (-1)) = +7; \quad \delta_{35} = 3 - (-1 - (-12)) = -8;$$

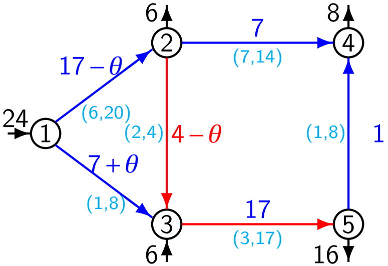
- Só a variável x_{23} é atractiva.

Valor máximo do decremento de x_{23}

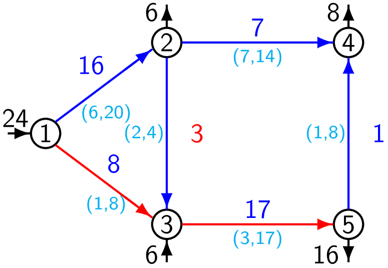
- Arco (2,3) forma um ciclo com os arcos (1,2) e (1,3) (das variáveis básicas).



- Quando a variável não-básica no limite superior x_{23} decrementa, a variável básica x_{13} aumenta e a x_{12} decrementa.
- Qual o decremento máximo de x_{23} sem ela própria se tornar negativa, nem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa ou ultrapassar o limite superior?
- $\theta_{max} = \min\{4, 17, 1\} = 1$.



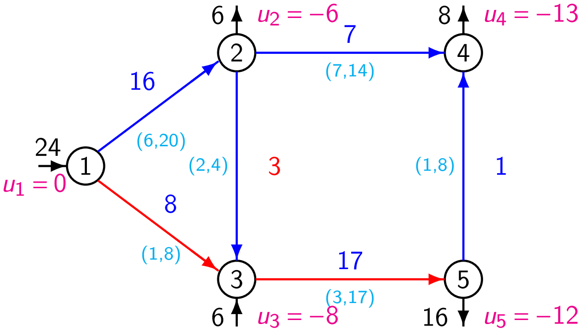
- A variável x_{23} entra na base e x_{13} sai da base, tornando-se não-básica no limite superior. Qual é nova árvore?



Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

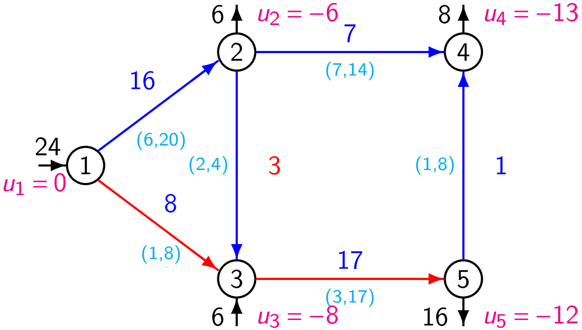
$$c_{ij} = u_i - u_j$$



Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{13} = 1 - (0 - (-8)) = -7; \quad \delta_{35} = 3 - (-8 - (-12)) = -1;$$

- Nenhuma variável é atractiva. Solução é óptima.

Construção da solução inicial

- Ao atribuir valores aos fluxos, para construir a solução inicial, devemos respeitar os limites superiores dos arcos, sempre que possível, para obter uma solução válida.
- Se não for possível respeitar o limite superior de um (ou mais) arcos, num segundo passo, devemos tentar obter uma solução válida, alterando o fluxo ao longo de ciclos.
- Se tal não for possível, o problema é impossível.

Transformações

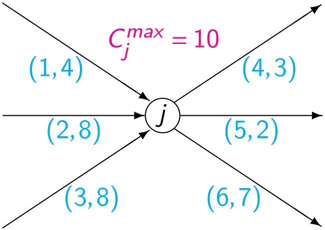
Podemos determinar a solução óptima de uma instância com:

- um vértice com capacidade, ou
- um arco com um limite inferior,

- criando uma nova instância, definida numa rede $G = (V, A)$ apenas com arcos com limites superiores.
- A nova rede é definida por uma lista de arcos $(i, j, c_{ij}, u_{ij}), \forall (i, j) \in A$, sendo:
  - i : origem do arco
  - j : destino do arco
  - c_{ij} : custo unitário de transporte no arco, e
  - u_{ij} : limite superior de fluxo no arco.
- Este é o formato normalmente usado em *software* de optimização de redes (*e.g.*, *relax4*).

- As transformações apresentadas de seguida são aplicadas sucessivamente a cada caso acima descrito.

Como transformar uma instância com capacidade num vértice numa instância apenas com capacidade nos arcos?

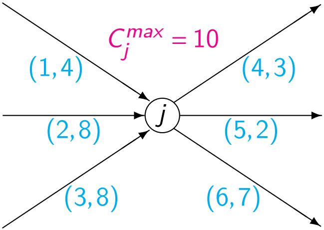


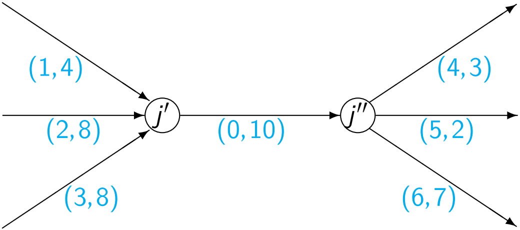
- valores associados aos arcos: (c_{ij}, u_{ij}), sendo:
- c_{ij} : custo unitário de transporte.
- u_{ij} : limite superior de fluxo no arco.

- C_j^{max} : fluxo máximo no vértice j :

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{(j,k)\in A} x_{jk} \leq C_j^{max}.$$

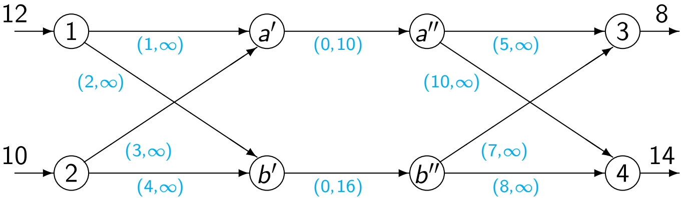
Transformação de uma instância com capacidade num vértice numa instância apenas com capacidade nos arcos





Exemplo: Transportes com Armazéns Intermédios

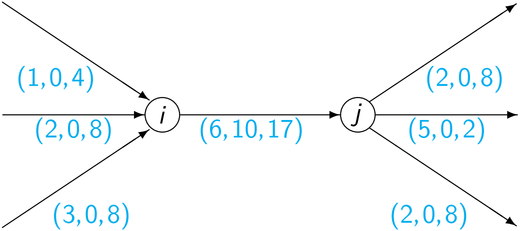
- Existem armazéns a e b entre as origens e os destinos com capacidades de 10 e de 16, respectivamente.
- Cada vértice representando um armazém é desdobrado num vértice de entrada e num vértice de saída, e é criado um arco com a capacidade do armazém.



- O fluxo pelo armazém é limitado pela sua capacidade.
- O custo do novo arco tipicamente é nulo; no entanto, pode ser igual ao custo unitário de armazenagem.

Como transformar uma instância com um limite inferior num arco numa instância apenas com limites superiores?

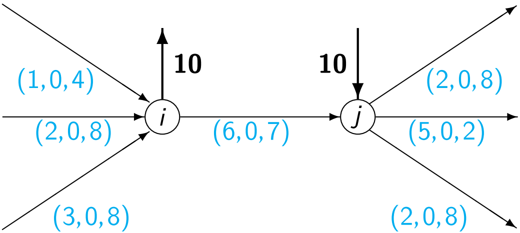
- Deve haver um fluxo mínimo no arco $(i,j) : x_{ij} \geq l_{ij}$



- Valores associados aos arcos: (c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}), sendo:

- c_{ij} : custo unitário de transporte.
- l_{ij} : limite inferior de fluxo no arco.
- u_{ij} : limite superior de fluxo no arco.

Transformação de uma instância com um limite inferior num arco numa instância apenas com limites superiores



- Os valores da oferta (ou procura) nos vértices i e j devem ser reajustados: a procura do vértice i é aumentada de l_{ij} unidades e a oferta do vértice j é aumentada de l_{ij} unidades.
- Esta transformação é equivalente a efectuar uma mudança de variável $x'_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$ no modelo de programação linear apresentado.

Após calcular a solução óptima do problema transformado,

- os valores finais do fluxo no arco devem ser recalculados, bem como os custos.

Conclusão

- O algoritmo de transporte em redes com capacidades é uma especialização do algoritmo simplex com limites superiores (que não foi apresentado).
- A sua implementação usando estruturas de dados adequadas permite resolver instâncias de muito grande dimensão em tempo razoável.
- Há uma regra (que não iremos ver) para evitar que situações de degenerescência (duas ou mais variáveis atingem simultaneamente os seus limites inferior ou superior) originem que o algoritmo entre em ciclo.

Fim