Universidade do Minho

Departamento de Informática

MDIO - TP1

Grupo Nº 21

Gonçalo Almeida (A84610)

Emanuel Rodrigues (A84776)

Lázaro Pinheiro (A86788)

Luís Ferreira (A76936)

15 de Outubro de 2019

Conteúdo

1 Introdução **3**

2 Problema **4**
- 2.1 Variáveis de decisão . . . 4
- 2.2 Parâmetros . . . 4
- 2.3 Restrições . . . 5
- 2.4 Função objetivo . . . 5
- 2.5 Solução ótima . . . 5
- 2.6 Percurso . . . 6
- 2.7 Validação de resultados . . . 6

3 Conclusão **8**

A Ficheiro de input **9**

B Ficheiro de output **11**

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho prático desenvolve-se no âmbito da Unidade Curricular Modelos Determinísticos de Investigação Operacional, lecionada no 1º semestre do 3º ano do curso de Engenharia Informática. O objetivo dos trabalhos práticos é desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos, de criar modelos para os descrever, de obter soluções para esses modelos utilizando programas computacionais adequados, de validar os modelos obtidos, de interpretar as soluções obtidas, e de elaborar recomendações para o sistema em análise.

No decorrer deste trabalho, procurou-se formular um modelo de programação linear com vista a obter uma solução ótima.

Capítulo 2

Problema

O propósito deste trabalho prático é a determinação do circuito, ou conjunto de circuitos, em que todos os arcos de um grafo são percorridos, pelo menos, uma vez, minimizando a distância total percorrida. Note-se que pode ser necessário atravessar o mesmo arco mais de uma vez. Cada arco (rua) representa a ligação entre dois nodos de um grafo, ou seja, o mapa de uma zona de uma cidade.

Este trabalho procura encontrar o percurso que minimize a distância percorrida na recolha do lixo, passando por todas as ruas, com um único sentido (Problema do caminho mais curto).

2.1 Variáveis de decisão

Para melhor compreensão do modelo decidiu-se associar a cada nodo um número, de modo a facilitar a associação de cada variável ao arco corresponde. Assim sendo, cada variável de decisão representa um arco, entre dois nodos, do grafo.

$x_{ij} \in \mathbb{N}$: número de vezes que é percorrido o arco com origem no nodo $i \in \mathbb{N}$ e destino no nodo $j \in \mathbb{N}$.

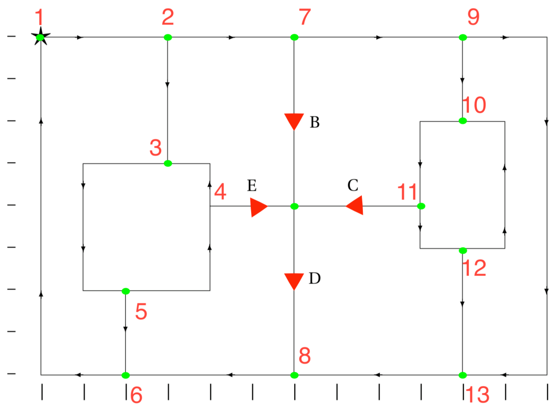


Figura 2.1: Nodos

2.2 Parâmetros

Os parâmetros de um problema são os dados do sistema que não podem ser alterados.

Os dados abaixo apresentados, foram tidos em consideração para concretização do objetivo.

- Comprimento dos arcos, *"... as ruas têm um comprimento inteiro, proporcional à dimensão do seu traço em centímetros."*;
- Sentido dos arcos, *"...Todas as ruas têm apenas um sentido, indicado pelas setas."*;
- Ponto de início e de fim da recolha, *"... O veículo parte do depósito localizado no ponto assinalado com uma estrela e regressa ao mesmo ponto."*.

2.3 Restrições

Com o seguinte grupo de restrições garantiu-se que todos os arcos são percorridos pelo menos uma vez. Para não se tornar maçador, procurou-se generalizar a justificação das restrições apresentadas.

x12 >= 1;	x43 >= 1;	x61 >= 1;	x910 >= 1;	x1210 >= 1;
x23 >= 1;	x48 >= 1;	x78 >= 1;	x913 >= 1;	x1213 >= 1;
x27 >= 1;	x54 >= 1;	x79 >= 1;	x1011 >= 1;	x138 >= 1;
x35 >= 1;	x56 >= 1;	x86 >= 1;	x118 >= 1;	x1112 >= 1;

Com as seguintes restrições garantimos que o número de vezes que o camião entra e sai de um arco é válido e que, ao sair de um arco, segue para outro possível.

A título exemplificativo, evitadas repetições de justificações de restrições, suponhamos a seguinte restrição válida: ($x_a = x_b + x_c + x_d$). Para chegar a x_a é garantido que se parte de x_b, x_c ou x_d.

x12 = x61;	x35 = x54 + x56;	x86 = x48 + x78 + x118 + x138;	x12 = x23 + x27;
x54 = x43 + x48;	x1011 = x910 + x1210;	x138 = x913 + x1213;	x27 = x78 + x79;
x61 = x56 + x86;	x1011 = x118 + x1112;	x35 = x23 + x43;	x79 = x910 + x913;
x1112 = x1210 + x1213;			

2.4 Função objetivo

$$min\ z = 3x12 + 3x23 + 3x27 + 6x35 + 2x43 + 6x48 + 4x54 + 2x56 + 10x61 + 8x78 + 4x79 \\ + 4x86 + 2x910 + 12x913 + 3x1011 + 7x118 + 2x1112 + 5x1210 + 3x1213 + 4x138$$

O coeficiente de cada variável x_{ij} (referida em 2.1) representa o comprimento do respetivo arco. Substituindo cada valor da solução ótima na função objetivo, obtém-se a distância associada ao menor percurso.

2.5 Solução ótima

Neste problema a solução ótima é obtida aquando um conjunto de circuitos, em que todos os arcos de um de um grafo são percorridos, pelo menos uma vez, minimizando a distância total percorrida.

$$x^* = \begin{pmatrix} x12* \\ x23* \\ x27* \\ x35* \\ x43* \\ x48* \\ x54* \\ x56* \\ x61* \\ x78* \\ x79* \\ x86* \\ x910* \\ x913* \\ x1011* \\ x118* \\ x1112* \\ x1210* \\ x1213* \\ x138* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

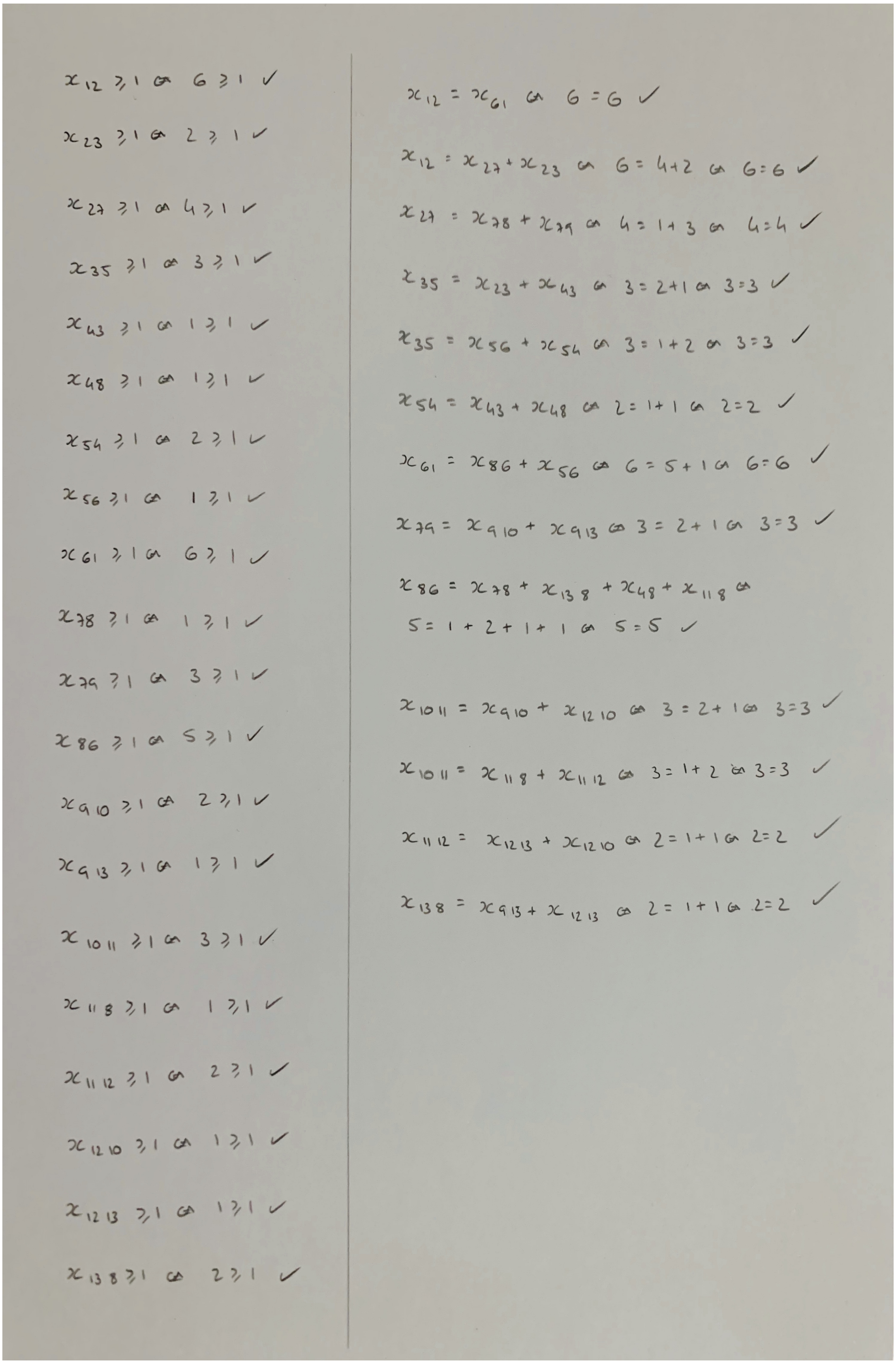
$$Z(x^*) = 224;$$

2.6 Percurso

Conforme a solução ótima e observação do mapa, o percurso ideal é:
$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 8 \to 6 \to 1 \to 2 \to 7 \to 8 \to 6 \to 1 \to 2 \to 7 \to 9 \to 10 \to 11 \to 12 \to 10 \to 11 \to 8 \to 6 \to 1 \to 2 \to 7 \to 9 \to 10 \to 11 \to 12 \to 13 \to 8 \to 6 \to 1 \to 2 \to 7 \to 9 \to 13 \to 8 \to 6 \to 1$

2.7 Validação de resultados

De modo a validar o resultado obtido, substitui-se os valores das variáveis nas restrições, como exemplificado abaixo, obtendo afirmações verdadeiras.



$x_{12} \geq 1 \Leftrightarrow 6 \geq 1$ ✓

$x_{23} \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 1$ ✓

$x_{27} \geq 1 \Leftrightarrow 4 \geq 1$ ✓

$x_{35} \geq 1 \Leftrightarrow 3 \geq 1$ ✓

$x_{43} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{48} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{54} \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 1$ ✓

$x_{56} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{61} \geq 1 \Leftrightarrow 6 \geq 1$ ✓

$x_{78} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{79} \geq 1 \Leftrightarrow 3 \geq 1$ ✓

$x_{86} \geq 1 \Leftrightarrow 5 \geq 1$ ✓

$x_{9\,10} \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 1$ ✓

$x_{9\,13} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{10\,11} \geq 1 \Leftrightarrow 3 \geq 1$ ✓

$x_{11\,8} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{11\,12} \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 1$ ✓

$x_{12\,10} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{12\,13} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ✓

$x_{13\,8} \geq 1 \Leftrightarrow 2 \geq 1$ ✓

$x_{12} = x_{61} \Leftrightarrow 6 = 6$ ✓

$x_{12} = x_{27} + x_{23} \Leftrightarrow 6 = 4+2 \Leftrightarrow 6 = 6$ ✓

$x_{27} = x_{78} + x_{79} \Leftrightarrow 4 = 1+3 \Leftrightarrow 4 = 4$ ✓

$x_{35} = x_{23} + x_{43} \Leftrightarrow 3 = 2+1 \Leftrightarrow 3 = 3$ ✓

$x_{35} = x_{56} + x_{54} \Leftrightarrow 3 = 1+2 \Leftrightarrow 3 = 3$ ✓

$x_{54} = x_{43} + x_{48} \Leftrightarrow 2 = 1+1 \Leftrightarrow 2 = 2$ ✓

$x_{61} = x_{86} + x_{56} \Leftrightarrow 6 = 5+1 \Leftrightarrow 6 = 6$ ✓

$x_{79} = x_{9\,10} + x_{9\,13} \Leftrightarrow 3 = 2+1 \Leftrightarrow 3 = 3$ ✓

$x_{86} = x_{78} + x_{13\,8} + x_{48} + x_{11\,8} \Leftrightarrow$
$5 = 1+2+1+1 \Leftrightarrow 5 = 5$ ✓

$x_{10\,11} = x_{9\,10} + x_{12\,10} \Leftrightarrow 3 = 2+1 \Leftrightarrow 3 = 3$ ✓

$x_{10\,11} = x_{11\,8} + x_{11\,12} \Leftrightarrow 3 = 1+2 \Leftrightarrow 3 = 3$ ✓

$x_{11\,12} = x_{12\,13} + x_{12\,10} \Leftrightarrow 2 = 1+1 \Leftrightarrow 2 = 2$ ✓

$x_{13\,8} = x_{9\,13} + x_{12\,13} \Leftrightarrow 2 = 1+1 \Leftrightarrow 2 = 2$ ✓

Figura 2.2: Validação dos resultados

Capítulo 3

Conclusão

Culminada a elaboração do trabalho prático 1, atingindo-se o percurso ótimo respondendo ao objetivo proposto.

Ao nível de dificuldades sentidas, importa referir a complexidade em colocar no papel as restrições, visto que a sua idealização foi fácil, todavia transpor objetivamente foi um trabalho árduo.

Com o mesmo, foi permitida a consolidação de aprendizagens, nomeadamente o uso do software LPSOLVE que facilitou a realização dos cálculos necessários.

No ímpeto geral o desenvolvimento do trabalho decorreu como planeado, alcançando o objetivo esperado e a solução para o problema proposto.

Apêndice A

Ficheiro de input

```
/* Objective function */
min: 3 x12 + 3 x23 + 3 x27 + 6 x35 + 2 x43 + 6 x48 + 4 x54 +
2 x56 + 10 x61 + 8 x78 + 4 x79 + 4 x86 + 2 x910 + 12 x913 +
3 x1011 + 7 x118 + 2 x1112 + 5 x1210 + 3 x1213 + 4 x138;

/* Variable bounds */

x12 >= 1;
x23 >= 1;
x27 >= 1;
x35 >= 1;
x43 >= 1;
x48 >= 1;
x54 >= 1;
x56 >= 1;
x61 >= 1;
x78 >= 1;
x79 >= 1;
x86 >= 1;
x910 >= 1;
x913 >= 1;
x1011 >= 1;
x118 >= 1;
x1112 >= 1;
x1210 >= 1;
x1213 >= 1;
x138 >= 1;


x12 = x61;
x12 = x27 + x23;
x27 = x78 +x79;
x35 = x23 + x43;
x35 = x56 + x54;
x54 = x43 + x48;
x61 = x86 + x56;
x79 = x910 + x913;
x86 = x78 + x138 + x48 + x118;
```

```
x1011 = x910 + x1210;
x1011 = x118 + x1112;
x1112 = x1213 + x1210;
x138 = x913 + x1213;


int x12, x23, x27, x35, x43, x48, x54, x56, x61,
x78, x79, x86, x910, x913, x1011, x118, x1112,
x1210, x1213, x138;
```

Apêndice B

Ficheiro de output

```
Value of objective function: 224.00000000

Actual values of the variables:
x12                              6
x23                              2
x27                              4
x35                              3
x43                              1
x48                              1
x54                              2
x56                              1
x61                              6
x78                              1
x79                              3
x86                              5
x910                             2
x913                             1
x1011                            3
x118                             1
x1112                            2
x1210                            1
x1213                            1
x138                             2
```