Programação Linear - geometria e álgebra

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

2 de outubro de 2020

Programação Linear - geometria e álgebra

antes

- Os vértices do poliedro são importantes, porque existe uma solução óptima de um problema de programação linear que é um vértice $^{(*)}$.

Guião

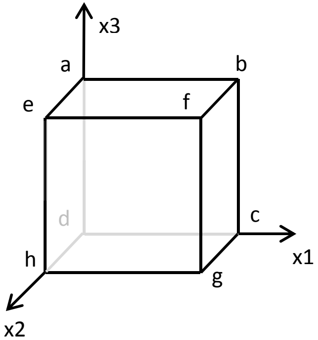
- *Vértice* é um conceito do âmbito da geometria;
- na álgebra, o conceito equivalente é o de *solução básica admissível* do sistema de equações que descreve o domínio do modelo.
- Dois vértices são adjacentes, se existir uma aresta a uni-los.
- Identifica-se se um vértice é óptimo analisando o movimento ao longo das arestas incidentes no vértice.

depois

- O algoritmo simplex determina a sequência de vértices a explorar.

(*) quando o poliedro tem vértices (o que acontece sempre quando há restrições do tipo ≥ 0) e quando a solução óptima não é ilimitada.

Motivação: quais das soluções é que são vértices?



O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & \leq & 1 \\ & x_2 & & \leq & 1 \\ & & x_3 & \leq & 1 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} & & \end{array}$$

- Qualquer solução (ponto com coordenadas $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^\top$) que obedeça a todas as restrições é uma solução admissível.
- Mas só algumas dessas soluções admissíveis é que correspondem a vértices.
- Vamos caracterizar essas soluções, que se designam por *soluções básicas admissíveis*.

Conteúdo

- Transformação de inequações em equações
- Sistemas de equações
- Soluções básicas do sistema de equações indeterminado
  - Variáveis básicas
  - Variáveis não-básicas
- Correspondência entre soluções básicas e vértices
- Arestas e soluções básicas (vértices) adjacentes

Exemplo: modelo de programação linear

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

- Vamos transformar as inequações em equações, porque é mais fácil lidar com um sistema de equações do que um sistema de inequações.

Transformação na forma canónica (usando variáveis adicionais)

$$
\begin{array}{rcl}
\max z & = & cx \\
 & & Ax \leq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
\max z & = & cx \\
 & & Ax + s = b \\
 & & x, s \geq 0
\end{array}
$$

sendo $s \in \mathrm{IR}_{+}^{m \times 1}$ um vector da mesma dimensão que b.

- Há um método de resolução que usa sistemas de inequações (Fourier-Motzkin) que não iremos ver.

Transformação Inequações → Equações

- Qualquer inequação do tipo $\leq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.

- Exemplo:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \leq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 & = 120 \\ x_1, x_2, s_1 & \geq 0 \end{array}\right.$$

- O valor da função linear $3x_1 + 2x_2$ é a quantidade de recurso usado na solução $(x_1, x_2)^\top$;
- o valor de s_1 (variável de folga) é a quantidade não usada (ou folga) do recurso disponível (no exemplo, 120).

- Quando, numa solução $\tilde{x}$, a restrição é obedecida como igualdade (*i.e.*, a variável de folga é nula), diz-se que a *restrição é activa em* $\tilde{x}$.

Exemplo: transformação na forma canónica

Modelo original

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
& 1x_1 & & & \leq & 30 \\
& \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2 \geq 0} & &
\end{array}$$

Modelo na forma canónica (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.
- Variáveis de folga: s_1, s_2, s_3.

$$\begin{array}{rrcrcccrr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & & & \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
& 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
& \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & & &
\end{array}$$

Soluções admissíveis e poliedro

- No modelo canónico, usam-se as designações **Variáveis de decisão** e **Variáveis de folga** para distinguir o tipo de variáveis.
- No algoritmo simplex, todas essas variáveis são simplesmente tratadas como variáveis (semelhantes) de um sistema de equações.
- Vamos passar a designá-las todas indiferenciadamente por x.

- O sistema de equações $Ax = b$,
- em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $x \in \mathbb{R}_+^{n \times 1}$,
- é tipicamente indeterminado (tem várias soluções). $^{(*)}$

- As soluções do sistema de equações $Ax = b$ em que $x \geq 0$ são as *soluções admissíveis*, que formam um poliedro convexo.
- O poliedro pode ser representado no espaço a $(n - m)$ dimensões.

(*) - vamos assumir que existe pelo menos uma solução admissível (*i.e.*, o problema não é impossível) e que a *característica da matriz* A (número de linhas linearmente independentes) é m, porque se houver linhas linearmente dependentes podemos retirá-las antes.

Identificação gráfica das variáveis

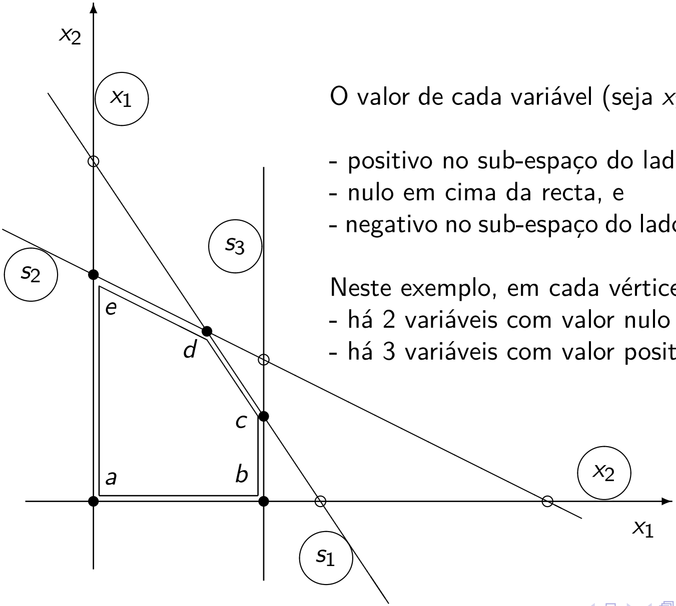
Exemplo: o poliedro pode ser representado no espaço a 2 dimensões

- número de variáveis $n = 5$.
- número de restrições $m = 3$.
- espaço a $(n - m) = 2$ dimensões.

As variáveis são semelhantes:

- Na recta que delimita o sub-espaço definido pela restrição $x_1 \geq 0$ (eixo (vertical) das ordenadas), o valor da variável $x_1 = 0$.
- Na recta que delimita o sub-espaço definido pela restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 120$, o valor da variável $s_1 = 0$.

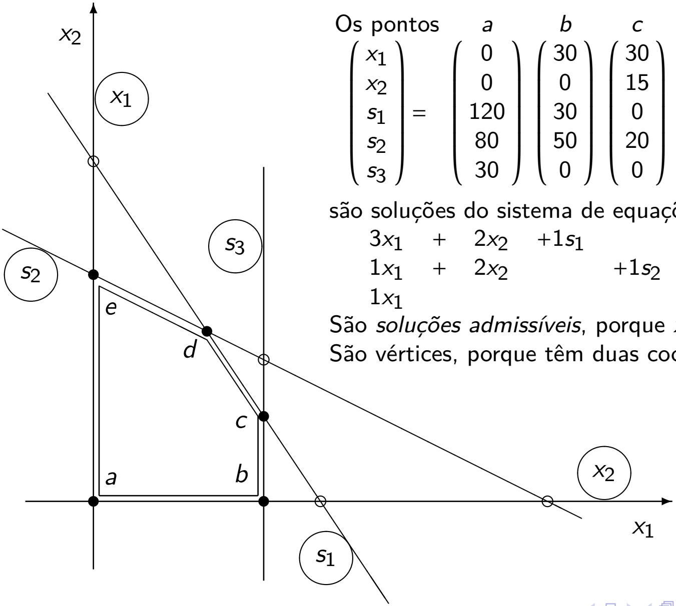
- (nota: ambas as equações $3x_1 + 2x_2 = 120$ e $s_1 = 0$ descrevem a mesma recta).



O valor de cada variável (seja x_1, x_2, s_1, s_2 ou s_3) é:

- positivo no sub-espaço do lado do círculo,
- nulo em cima da recta, e
- negativo no sub-espaço do lado oposto ao círculo.

Neste exemplo, em cada vértice:
- há 2 variáveis com valor nulo
- há 3 variáveis com valor positivo



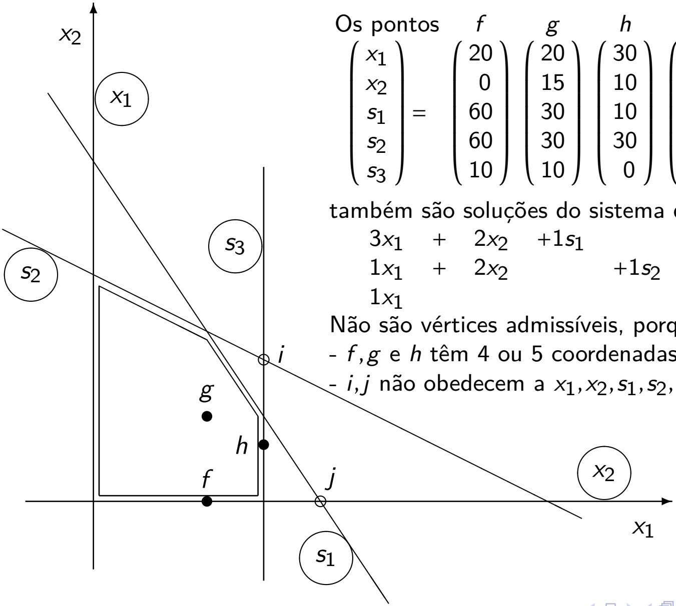
Os pontos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 30 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

são soluções do sistema de equações:

$$\begin{array}{rcrcrrrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}$$

São *soluções admissíveis*, porque $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.
São vértices, porque têm duas coordenadas nulas.



Os pontos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} f & g & h & i & j \\ \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

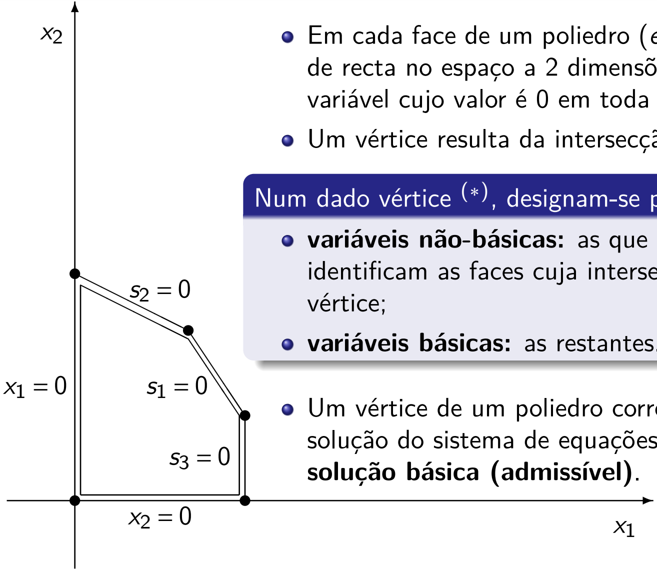
também são soluções do sistema de equações:

$$\begin{array}{lllllll} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}$$

Não são vértices admissíveis, porque:

- f, g e h têm 4 ou 5 coordenadas positivas;
- i, j não obedecem a $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Vértices de um poliedro e soluções básicas



- Em cada face de um poliedro (*e.g.*, num segmento de recta no espaço a 2 dimensões), há uma variável cujo valor é 0 em toda a face.
- Um vértice resulta da intersecção de faces.

Num dado vértice $^{(*)}$, designam-se por:

- **variáveis não-básicas:** as que têm valor 0, e identificam as faces cuja intersecção determina o vértice;
- **variáveis básicas:** as restantes.

- Um vértice de um poliedro corresponde a uma solução do sistema de equações designada por **solução básica (admissível)**.

(*) - vamos assumir que o vértice não é degenerado (veremos depois).

Soluções básicas de um sistema de equações

Valores das variáveis não-básicas:

- Dado o sistema de equações $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $x \in \mathbb{R}_{+}^{n \times 1}$,
- numa *solução básica* (vértice), há $(n - m)$ *variáveis não-básicas* com valor igual a 0.

Valores das variáveis básicas:

- Fixando os valores das $(n - m)$ *variáveis não-básicas* em 0,
- resulta um sistema de m equações e m *variáveis básicas* (correspondentes a um conjunto de m vectores que devem ser linearmente independentes, *a base)*, que tem
- uma solução única, porque o sistema de equações é determinado.

- n : número de variáveis (nota: inclui as variáveis x e s)
- m : número de variáveis básicas = número de restrições (não contam as restrições $x \geq 0$ e $s \geq 0$)
- $(n - m)$: número de variáveis não-básicas

Exemplo: solução básica 1 (*variáveis básicas*: s_1, s_2 e s_3)

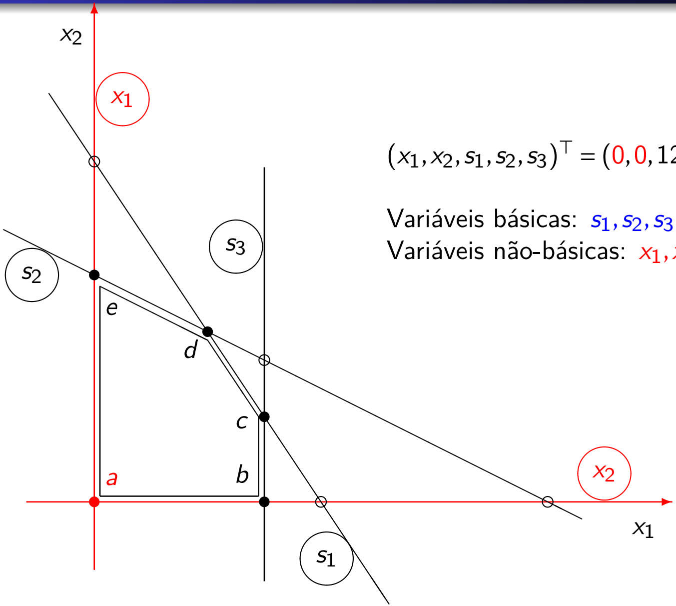
- $n = 5$: número de variáveis
- $m = 3$: número de variáveis básicas $=$ número de restrições
- $n - m = 2$: número de variáveis não-básicas

- Reordenando as colunas, vê-se que o sistema de equações:

$$
\begin{array}{c c c}
\textcolor{blue}{\text{Vars básicas}} & \textcolor{red}{\text{Vars não-básicas}} & \\
\boxed{\begin{array}{ccc} +1s_1 & & \\ & +1s_2 & \\ & & +1s_3 \end{array}} &
\boxed{\begin{array}{ccc} +3x_1 & + & 2x_2 \\ +1x_1 & + & 2x_2 \\ +1x_1 & & \end{array}} &
\begin{array}{cr} = & 120 \\ = & 80 \\ = & 30 \end{array}
\end{array}
$$

- já está resolvido em ordem a s_1, s_2 e s_3 (*variáveis básicas*).
- Sendo x_1 e x_2 (*variáveis não-básicas*) iguais a 0,
- obtém-se a solução básica $x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 120, s_2 = 80$ e $s_3 = 30$.

- Esta *solução básica* corresponde ao vértice origem dos eixos, $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (\textcolor{red}{0}, \textcolor{red}{0}, 120, 80, 30)^\top$.
- A função objectivo é $z = 12x_1 + 10x_2$, e o valor desta solução é 0.



$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$

Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3
Variáveis não-básicas: x_1, x_2

Exemplo: solução básica 2 (*variáveis básicas*: x_1, x_2 e s_3)

- Reordenando as colunas, para resolver em ordem a x_1, x_2 e s_3,

$$\boxed{\begin{array}{lll} 3x_1 & +2x_2 & \\ 1x_1 & +2x_2 & \\ 1x_1 & & +1s_3 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lll} +1s_1 & & \\ & + & 1s_2 \\ & & \end{array}} \quad \begin{array}{rr} = & 120 \\ = & 80 \\ = & 30 \end{array}$$

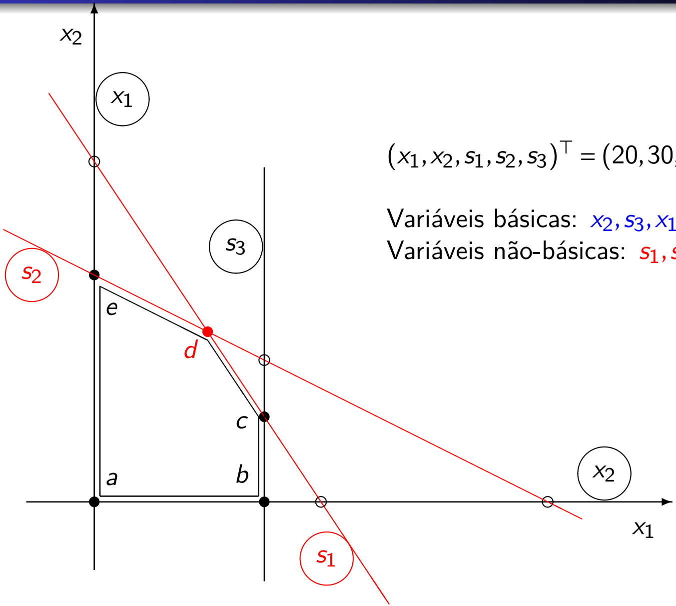
- pré-multiplicando por $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$, obtém-se $^{(*)}$:

Vars básicas — Vars não-básicas

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1x_1 & & \\ & 1x_2 & \\ & & 1s_3 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{crcr} + & 0.5\ s_1 & - & 0.5\ s_2 \\ - & 0.25\ s_1 & + & 0.75\ s_2 \\ - & 0.5\ s_1 & + & 0.5\ s_2 \end{array}} \quad \begin{array}{rr} = & 20 \\ = & 30 \\ = & 10 \end{array}$$

- Sendo s_1 e s_2 (variáveis não-básicas) iguais a 0, a solução básica é:
- $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$.
- O valor desta solução é 540 $(= 12 \times 20 + 10 \times 30)$.

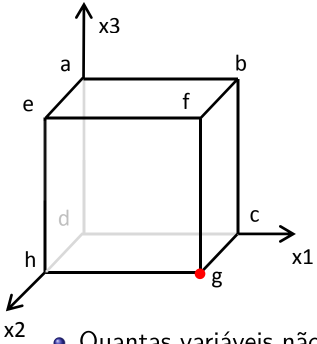
(*) - em alternativa, pode usar-se eliminação de Gauss.



$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$

Variáveis básicas: x_2, s_3, x_1
Variáveis não-básicas: s_1, s_2

Exemplo (espaço a 3 dimensões)

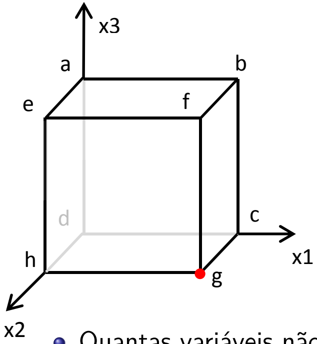


O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
 & x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
 & & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Quantas variáveis não-básicas há nos vértices do cubo?

Exemplo (espaço a 3 dimensões)

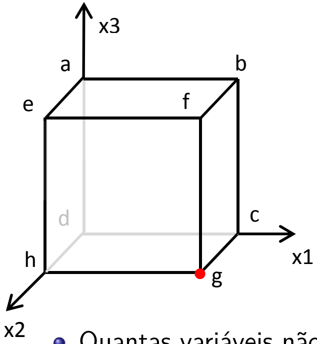


O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
 & x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
 & & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Quantas variáveis não-básicas há nos vértices do cubo?
- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações ($n = 6, m = 3$).
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas (espaço a 3 dimensões).
- Quais as vars não-básicas na solução básica equivalente ao vértice g?

Exemplo (espaço a 3 dimensões)



O cubo unitário é um poliedro definido pelas restrições:

$$
\begin{array}{llllllcl}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Quantas variáveis não-básicas há nos vértices do cubo?
- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações ($n = 6, m = 3$).
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas (espaço a 3 dimensões).
- Quais as vars não-básicas na solução básica equivalente ao vértice g?
- As variáveis não-básicas são as variáveis com valor 0 nas 3 faces que definem o vértice g : x_3, s_1 e s_2.
- As variáveis básicas são $x_1 = x_2 = s_3 = 1$ (fácil de resolver).

Caso geral

Como é que se identifica se um vértice é óptimo?

Um vértice é óptimo se nenhum dos vértices adjacentes for melhor:

- é necessário analisar como mudam os valores das variáveis e da função objectivo quando nos movemos ao longo de cada uma das arestas incidentes no vértice.

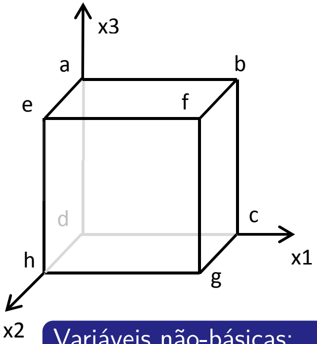
Já vimos como se caracteriza um vértice:

- Uma face é definida por uma variável (não-básica) cujo valor é 0.
- Um vértice é definido pela intersecção de faces.

Caracterização de uma aresta

- Uma aresta é definida pelas faces que são comuns aos dois vértices.
- As respectivas variáveis não-básicas são comuns aos dois vértices.

Movimento ao longo de uma aresta



- Quando nos movemos ao longo de uma aresta partindo de um vértice, os valores das variáveis alteram-se do seguinte modo:

Variáveis não-básicas:

- há uma **única** variável não-básica cujo valor aumenta;
- as restantes variáveis não-básicas permanecem nulas (elas são nulas nas faces que definem a aresta, e portanto em toda a aresta).

Variáveis básicas:

- as alterações dos valores das variáveis básicas são dadas pelo sistema de equações.

Caracterização de bases (vértices) adjacentes

Além das faces que definem a aresta,

- numa das extremidades da aresta, há uma face que pertence apenas ao vértice que fica nessa extremidade, e
- na outra extremidade, há outra face que pertence apenas ao vértice adjacente.

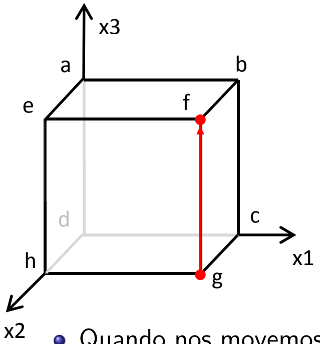
Definição:

Dois vértices são adjacentes, se houver apenas a troca de 2 variáveis:

- uma variável não-básica num vértice é básica no vértice adjacente
- uma variável básica num vértice é não-básica no vértice adjacente

- Quando há degenerescência, duas bases diferentes podem dar a mesma solução básica (o mesmo vértice) [veremos depois].

Exemplo 1 (espaço a 3 dimensões)

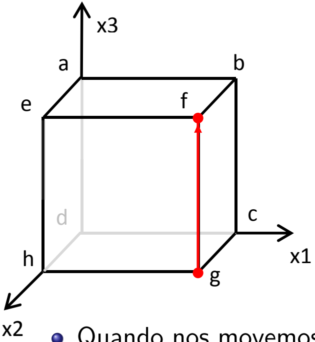


No vértice g (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & -s_1 & & \\ x_2 & = & 1 & & -s_2 & \\ s_3 & = & 1 & & & -x_3 \\ z & = & \multicolumn{3}{l}{(1-s_1)+(1-s_2)+x_3} \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice g para o vértice f, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice g?

Exemplo 1 (espaço a 3 dimensões)

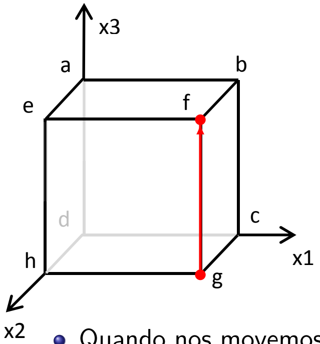


No vértice g (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - s_1 \\ x_2 = 1 - s_2 \\ s_3 = 1 - x_3 \\ z = (1 - s_1) + (1 - s_2) + x_3 \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice g para o vértice f, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice g?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantém-se iguais a 0;

Exemplo 1 (espaço a 3 dimensões)

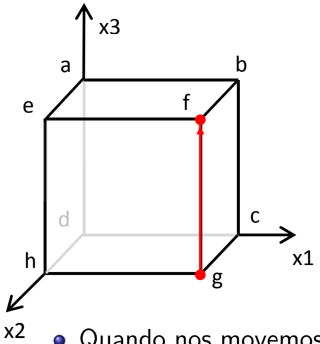


No vértice g (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 1 - s_1 \\ x_2 & = & 1 - s_2 \\ s_3 & = & 1 - x_3 \\ z & = & (1 - s_1) + (1 - s_2) + x_3 \end{array}\right.$$

- Quando nos movemos do vértice g para o vértice f, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice g?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantém-se iguais a 0;
- em consequência, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice g?

Exemplo 1 (espaço a 3 dimensões)

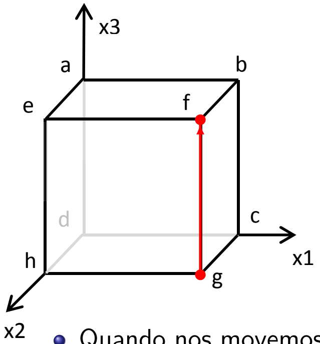


No vértice g (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & -s_1 & & \\ x_2 & = & 1 & & -s_2 & \\ s_3 & = & 1 & & & -x_3 \\ z & = & (1-s_1)+(1-s_2)+x_3 & & & \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice g para o vértice f, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice g?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantém-se iguais a 0;
- em consequência, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice g?
- Resposta: s_3 diminui, e x_1 e x_2 mantém-se iguais a 1.

Exemplo 1 (espaço a 3 dimensões)

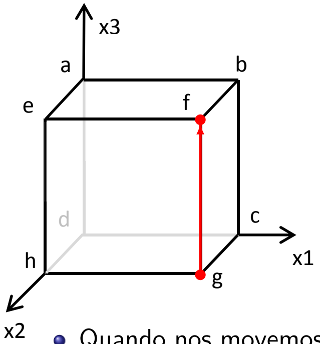


No vértice g (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - s_1 \\ x_2 = 1 - s_2 \\ s_3 = 1 - x_3 \\ z = (1 - s_1) + (1 - s_2) + x_3 \end{cases}$$

- Quando nos movemos do vértice g para o vértice f, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice g?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantém-se iguais a 0;
- em consequência, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice g?
- Resposta: s_3 diminui, e x_1 e x_2 mantém-se iguais a 1.
- E o valor da função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$?

Exemplo 1 (espaço a 3 dimensões)

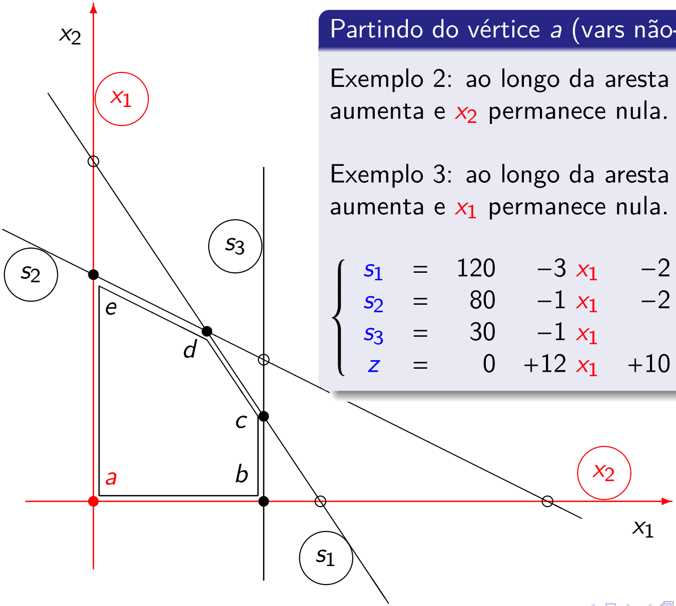


No vértice g (vars não-básicas $s_1 = s_2 = x_3 = 0$), as equações que definem o cubo unitário e a função objectivo são:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & = & 1 & -s_1 & & \\ x_2 & = & 1 & & -s_2 & \\ s_3 & = & 1 & & & -x_3 \\ z & = & (1-s_1)+(1-s_2)+x_3 & & & \end{array}\right.$$

- Quando nos movemos do vértice g para o vértice f, como se alteram os valores das variáveis não-básicas do vértice g?
- Resposta: x_3 aumenta, e s_1 e s_2 mantém-se iguais a 0;
- em consequência, segundo o sistema de equações, como se alteram os valores das variáveis básicas do vértice g?
- Resposta: s_3 diminui, e x_1 e x_2 mantém-se iguais a 1.
- E o valor da função objectivo $z = x_1 + x_2 + x_3$?
- Resposta: o valor de z aumenta.

Exemplos 2 e 3 (espaço a 2 dimensões)



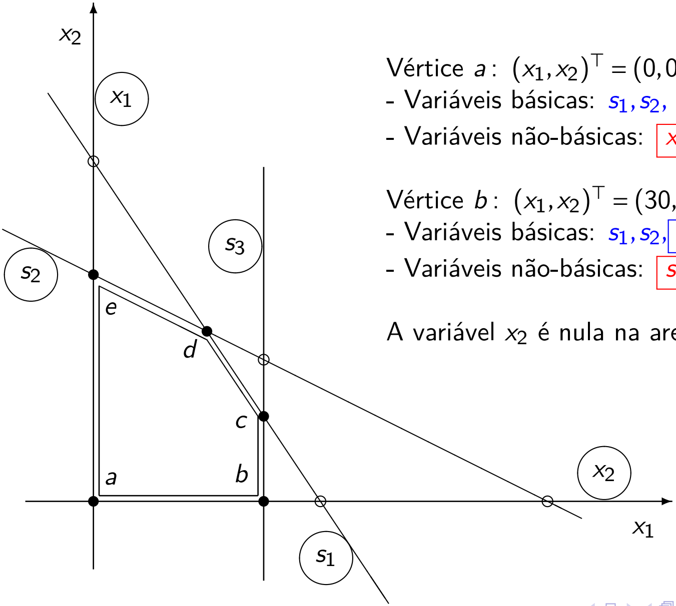
Partindo do vértice a (vars não-básicas $x_1 = x_2 = 0$),

Exemplo 2: ao longo da aresta $\overline{ab}$, a variável x_1 aumenta e x_2 permanece nula.

Exemplo 3: ao longo da aresta $\overline{ae}$, a variável x_2 aumenta e x_1 permanece nula.

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\,x_1 & -2\,x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\,x_1 & -2\,x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\,x_1 & \\ z & = & 0 & +12\,x_1 & +10\,x_2 \end{array}\right.$$

Exemplo 1: o vértice b é adjacente ao vértice a



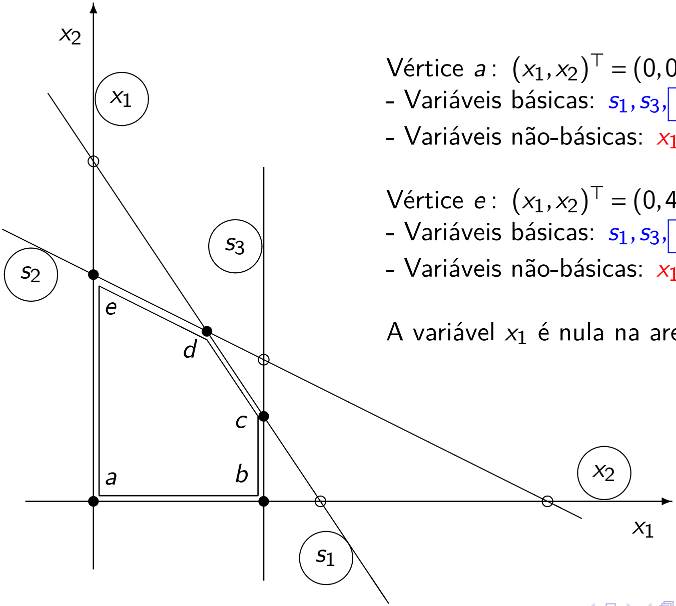
Vértice a: $(x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top$:
- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{s_3}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{x_1}, x_2$ (iguais a 0)

Vértice b: $(x_1, x_2)^\top = (30, 0)^\top$:
- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{x_1}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{s_3}, x_2$ (iguais a 0)

A variável x_2 é nula na aresta $\overline{ab}$

▸ Expressão Aresta

Exemplo 2: o vértice e é adjacente ao vértice a



Vértice a: $(x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top$:

- Variáveis básicas: $s_1, s_3, \boxed{s_2}$
- Variáveis não-básicas: $x_1, \boxed{x_2}$ (iguais a 0)

Vértice e: $(x_1, x_2)^\top = (0, 40)^\top$:

- Variáveis básicas: $s_1, s_3, \boxed{x_2}$
- Variáveis não-básicas: $x_1, \boxed{s_2}$ (iguais a 0)

A variável x_1 é nula na aresta $\overline{ae}$

Exemplo 3 Dimensões

Modelo a optimizar

$$
\begin{array}{rrcrrrrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & & & \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
& 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
& 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
& \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrcrrrrcr}
\max z & & & & & & & & & \\
& & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
& & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
& & 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
& z & -12x_1 & - & 10x_2 & & & & = & 0 \\
& & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

- Uma solução admissível é $x_1 = x_2 = 0, s_1 = 120, s_2 = 80, s_3 = 30$.
- O valor da função objectivo z dessa solução admissível é 0.

iteração 1

- A solução corrente é $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (0, 0, 120, 80, 30)^\top$ e $z = 0$.
- Será que há alguma solução melhor?

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} s_1 & = & 120 & -3\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_2 & = & 80 & -1\ x_1 & -2\ x_2 \\ s_3 & = & 30 & -1\ x_1 & \\ z & = & 0 & +12\ x_1 & +10\ x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Sim, por exemplo, se o valor de x_1 aumentar, mantendo $x_2 = 0$, o valor de z aumenta.
- Quanto podemos aumentar x_1 permanecendo a solução admissível?
- O valor de x_1 pode aumentar até 30 (diminuindo s_3 até 0).
- Vamos rescrever as equações usando eliminação de Gauss.
- Nota: $s_3 = 30 - 1x_1$, *i.e.*, $x_1 = 30 - 1s_3$

iteração 2

- Vamos eliminar x_1 do lado direito usando $x_1 = 30 - 1s_3$.

$$\begin{cases} s_1 &= & 120 & -3\,(30 - 1s_3) & -2\,x_2 \\ s_2 &= & 80 & -1\,(30 - 1s_3) & -2\,x_2 \\ x_1 &= & & (30 - 1s_3) & \\ z &= & 0 & +12\,(30 - 1s_3) & +10\,x_2 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} s_1 &= & 30 & -2\,x_2 & +3\,s_3 \\ s_2 &= & 50 & -2\,x_2 & +1\,s_3 \\ x_1 &= & 30 & & -1\,s_3 \\ z &= & 360 & +10\,x_2 & -12\,s_3 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- A solução corrente é $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (30, 0, 30, 50, 0)^\top$ e $z = 360$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando x_2 e mantendo $s_3 = 0$.
- O valor de x_2 pode aumentar até 15 (diminuindo s_1 até 0).
- Nota: $s_1 = 30 - 2x_2 + 3s_3$, *i.e.*, $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$

- Vamos eliminar x_2 do lado direito usando $x_2 = 15 - 0.5s_1 + 1.5s_3$.

$$\begin{cases} x_2 & = & & & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & \\ s_2 & = & 50 & -2 & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & +1\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & & -1\ s_3 \\ z & = & 360 & +10 & (15 - 0.5s_1 + 1.5s_3) & -12\ s_3 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ s_3 \\ s_2 & = & 20 & +1\ s_1 & -2\ s_3 \\ x_1 & = & 30 & & -1\ s_3 \\ z & = & 510 & -5\ s_1 & +3\ s_3 \\ & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

- A solução corrente é $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (30, 15, 0, 20, 0)^\top$ e $z = 510$.
- Podemos aumentar o valor de z aumentando s_3 e mantendo $s_1 = 0$.
- O valor de s_3 pode aumentar até 10 (diminuindo s_2 até 0).
- Nota: $s_2 = 20 + 1s_1 - 2s_3$, *i.e.*, $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$

iteração 4

- Vamos eliminar s_3 do lado direito usando $s_3 = 10 + 0.5s_1 - 0.5s_2$.

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 15 & -0.5\ s_1 & +1.5\ (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ s_3 & = & & & (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ x_1 & = & 30 & & -1\ (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ z & = & 510 & -5\ s_1 & +3\ (10+0.5s_1-0.5s_2) \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- Resolvendo, obtém-se:

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 30 & +0.25\ s_1 & -0.75\ s_2 \\ s_3 & = & 10 & +0.5\ s_1 & -0.5\ s_2 \\ x_1 & = & 20 & -0.5\ s_1 & +0.5\ s_2 \\ z & = & 540 & -3.5\ s_1 & -1.5\ s_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

- A solução corrente é $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = (20, 30, 0, 0, 10)^\top$ e $z = 540$.
- O valor de z não pode aumentar mais.
- A solução é óptima.

Conclusão

- Um vértice de um poliedro convexo é caracterizado algebricamente por ser uma solução básica de um sistema de equações.
- A análise do que acontece ao longo das arestas incidentes no vértice permite identificar se o vértice é óptimo.
- Veremos o método simplex que define as regras para percorrer uma sequência de vértices admissíveis sucessivamente melhores até atingir a solução óptima.

Apêndices

Determinação dos valores das vars numa solução básica

- Reordenando as colunas e fazendo uma partição do conjunto de variáveis, as restrições $Ax = b, x \geq 0$ são equivalentes a:

$$\begin{aligned} Bx_B \quad + \ Nx_N \quad &= b \\ x_B, x_N \geq 0 & \end{aligned}$$

- após partir o vector de variáveis de decisão x em dois subvectores:

$x_B \in \mathrm{IR}_+^{m\times 1}$: subvector de variáveis básicas
$x_N \in \mathrm{IR}_+^{(n-m)\times 1}$: subvector de variáveis não-básicas

- e a matriz A em duas submatrizes:

$B \in \mathrm{IR}^{m\times m}$: submatriz de A das variáveis básicas (não-singular),
$N \in \mathrm{IR}^{m\times (n-m)}$: submatriz de A das variáveis não-básicas.

- Pré-multiplicando por B^{-1}, obtém-se o seguinte sistema de equações (equivalente):

$$\begin{aligned} B^{-1}(Bx_B + Nx_N) &= B^{-1}b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

Determinação da solução básica (cont.)

- Dado o sistema de equações escrito na forma $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$,
- o valor das variáveis básicas $\tilde{x}_B$ pode ser determinado, dado que o valor das variáveis não-básicas $\tilde{x}_N = 0$:

A *solução básica* $\tilde{x}$ é:

- $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$
- Se $\tilde{x}_B \geq 0$ então $\tilde{x}$ é uma *solução básica admissível*.

Teorema

$\tilde{x}$ é uma solução básica admissível $\Longleftrightarrow$ $\tilde{x}$ é um vértice admissível do poliedro $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

▸ Intuicao ▸ Prova

Valor de função objectivo da solução básica

- A função objectivo $z = cx$ é equivalente a:

$$z = c_B x_B + c_N x_N,$$

- após partir o vector de custos c em dois subvectores:

$c_B \in \mathrm{IR}^{1\times m}$: subvector de coef. de custo das variáveis básicas
$c_N \in \mathrm{IR}^{1\times (n-m)}$: subvector de coef. de custos das variáveis não-básicas

$$\begin{aligned} z &= c_B x_B + c_N x_N = \\ &= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = \\ &= c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N)x_N \end{aligned}$$

- pelo que o valor da função objectivo da solução básica $\tilde{x}$ é:

$$\tilde{z} = c_B B^{-1} b$$

Voltar

O que significa o vector $B^{-1}b$?

- Qualquer vector de um espaço vectorial pode ser representado como uma combinação linear dos vectores da base.
- Os elementos de $B^{-1}b$ são as coordenadas do vector b em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$.
- Exemplo:

$$b = B\,(B^{-1}b)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 120 \\ 80 \\ 30 \end{array}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}} \end{array} * \boxed{\begin{array}{c} 20 \\ 30 \\ 10 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 120 \\ 80 \\ 30 \end{array}} = 20 \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array}} + 30 \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 0 \end{array}} + 10 \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}}$$

$$b = 20\ \vec{v}_1 + 30\ \vec{v}_2 + 10\ \vec{v}_3$$

- ou seja, é a solução $x_B = B^{-1}b = (x_1, x_2, s_3)^\top = (20, 30, 10)^\top$.

O que significa o vector $B^{-1}N$?

- Da mesma forma, os elementos das colunas das variáveis não básicas representam as coordenadas das respectivas colunas iniciais em relação à base B.

Solução básica ≡ Vértice

Intuição

- Uma solução com uma variável igual a 0 pertence à recta (ou, na generalidade, ao (hiper)plano) que delimita o sub-espaço definido por uma restrição.
- Uma solução com $(n - m)$ variáveis iguais a 0 pertence a $(n - m)$ (hiper)planos.
- A intersecção de $(n - m)$ (hiper)planos (linearmente independentes) no espaço com $(n - m)$ dimensões define um vértice do poliedro.

Nota:

- Vértice é um conceito do âmbito da geometria.
- Solução básica é um conceito do âmbito da álgebra.

Voltar

Teorema

$\tilde{x}$ é uma solução básica admissível $\iff$ $\tilde{x}$ é um vértice admissível do poliedro $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

Esboço da prova:

($\Rightarrow$) Vamos considerar uma solução básica que não seja um vértice, e pode portanto ser expressa como combinação convexa estrita de 2 pontos x^1 e x^2 de X, ambos com m coordenadas positivas e $(n-m)$ coordenadas nulas. $Ax^1 = Ax^2 = b$, pelo que $A(x^1 - x^2) = 0$, que é uma combinação linear não-nula dos m vectores, pelo que necessariamente $x^1 = x^2$, por causa da independência linear dos m vectores (contradição).

($\Leftarrow$) Vamos supor que a solução $\tilde{x}$ não é uma solução básica; temos m vectores linearmente dependentes, e é possível arranjar 2 pontos admissíveis, e exprimir a solução como combinação convexa estrita desses 2 pontos admissíveis, pelo que a solução não é um vértice. $\square$

Voltar

Expressão de uma aresta

- A aresta que une os vértices adjacentes x^1 e x^2 é o lugar geométrico dos pontos x :

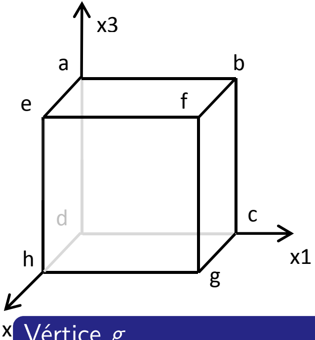
$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \; 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Exemplo: na aresta $\overline{ab}$, o valor de $x_2 = 0$:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^\top = \lambda \; (0, 0, 120, 80, 30)^\top + (1-\lambda) \; (30, 0, 30, 50, 0)^\top, \; 0 \leq \lambda \leq 1$$

Voltar

Vértices (soluções básicas) g e f são adjacentes



Região admissível é o cubo:

$$\begin{array}{llllllll} x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} & & \end{array}$$

Vértice g

- Variáveis não-básicas $= \{x_3, s_1, s_2\}$
- Variáveis básicas $= \{s_3, x_1, x_2\}$

Vértice f

- Variáveis não-básicas $= \{s_3, s_1, s_2\}$
- Variáveis básicas $= \{x_3, x_1, x_2\}$

Fim