Programação Linear - dualidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

10 de novembro de 2020

Dualidade

antes

- O preço-sombra é um conceito fundamental na análise pós-optimização, relacionado com o valor dos recursos.

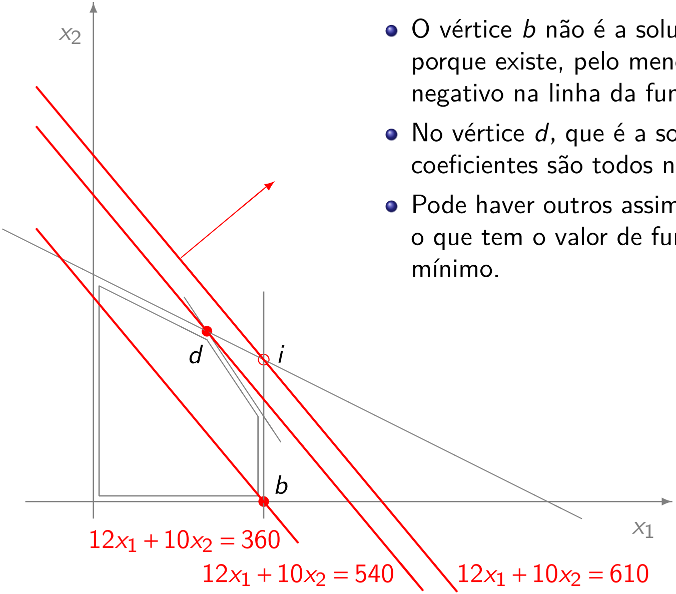
Guião

- Os preços-sombra são os valores óptimos das variáveis de um problema, que se designa por *problema dual*, que tem relações fortes com o problema *(primal)*.
- Quando se resolve um deles, também se resolve o outro.
- Pode dizer-se que são o mesmo problema, visto de perspectivas diferentes.

depois

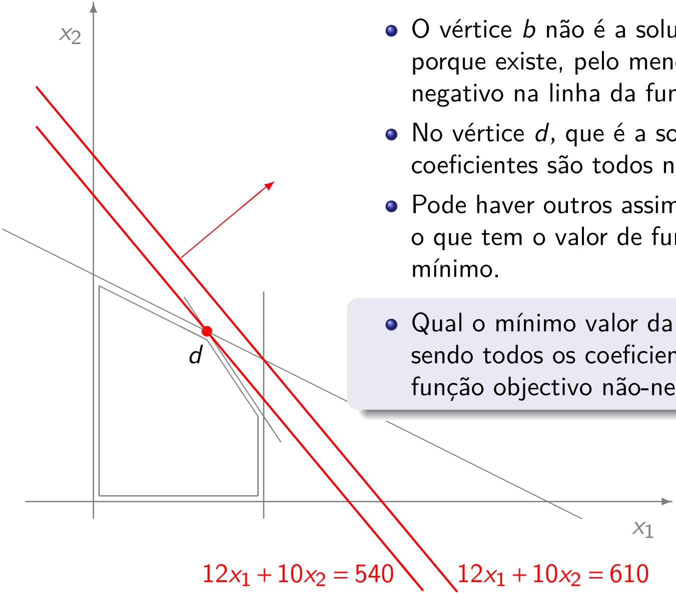
- Dualidade é usada no cálculo de limites (majorantes ou minorantes) para o valor da solução óptima, muito úteis em programação inteira.

Motivação: relembrar a resolução gráfica do exemplo



- O vértice b não é a solução óptima, porque existe, pelo menos, um coeficiente negativo na linha da função objectivo.
- No vértice d, que é a solução óptima, os coeficientes são todos não-negativos.
- Pode haver outros assim, mas o vértice d é o que tem o valor de função objectivo mínimo.

Motivação: relembrar a resolução gráfica do exemplo



- O vértice b não é a solução óptima, porque existe, pelo menos, um coeficiente negativo na linha da função objectivo.
- No vértice d, que é a solução óptima, os coeficientes são todos não-negativos.
- Pode haver outros assim, mas o vértice d é o que tem o valor de função objectivo mínimo.

- Qual o mínimo valor da função objectivo sendo todos os coeficientes da linha da função objectivo não-negativos?

Valor de uma solução e condição de optimalidade

- O quadro simplex associado ao vértice definido pela matriz B (resultante de um conjunto de variáveis básicas) é:

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1} A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1} b$

- O valor da função objectivo do vértice é $c_B B^{-1} b$.

É condição de optimalidade, num problema de maximização,

- todos os elementos dos vectores $c_B B^{-1} A - c$ e $c_B B^{-1}$ serem ≥ 0.

Objectivo:

- Encontrar o valor mínimo da função objectivo quando o domínio é o conjunto de soluções que cumprem esta condição de optimalidade.

Modelo

- Na linha da função objectivo, A, b e c são dados do problema.
- Só $c_B B^{-1}$ é que representa uma escolha, que resulta da matriz B.

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

- Vamos designar por y as variáveis de decisão que representam os elementos do vector $c_B B^{-1} = y = (y_1, \ldots, y_m)$.
- As restrições que garantem que a solução cumpre a condição de optimalidade são: $yA - c \geq 0$ e $y \geq 0$.
- A função objectivo que associa um valor a cada solução y é yb.
- O modelo para encontrar o valor mínimo é:

$$\begin{aligned} \min \quad & yb \\ & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo

$\max \; cx$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	$$\begin{array}{lllllll} \max & 30x_1 & +20x_2 & +10x_3 & & \\ & 1x_1 & +1x_2 & +2x_3 & \leq & 40 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +1x_3 & \leq & 150 \\ & 2x_1 & +1x_2 & & \leq & 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$
$\min \; yb$ $yA \geq c$ $y \geq 0$	$$\begin{array}{ll} \min & \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 \end{bmatrix} \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$
	$$\begin{array}{llllll} \min & 40y_1 & +150y_2 & +20y_3 & & \\ & 1y_1 & +2y_2 & +2y_3 & \geq & 30 \\ & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & \geq & 20 \\ & 2y_1 & +1y_2 & & \geq & 10 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Conteúdo

- Problema dual
- Informação primal e dual num quadro simplex
- Relação entre os problemas primal e dual
  - Teorema da dualidade fraca
  - Teorema da dualidade forte
  - Teorema da folga complementar

Problema Dual

- Dado um problema *(primal)* de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $A \in \mathrm{IR}^{m \times n}, b \in \mathrm{IR}^{m \times 1}, c \in \mathrm{IR}^{1 \times n}, x \in \mathrm{IR}^{n \times 1}$,

- o *problema dual* é construído associando a cada restrição i do problema (primal), $i = 1, \ldots, m$, uma variável de decisão dual y_i :

$$\begin{aligned} \min \quad & yb \\ & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m) \in \mathrm{IR}^{1 \times m}$ um vector de *variáveis duais*.

Para construir o problema dual,

PRIMAL	DUAL
$\begin{array}{ll} \max & cx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \min & yb \\ & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$
$\begin{array}{lll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 & \\ & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 & \leq 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 & \leq 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 & \leq 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & \end{array}$	$\begin{array}{lll} \min & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 & \\ & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \geq 30 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 & \geq 20 \\ & 2y_1 + 1y_2 & \geq 10 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 & \end{array}$

o problema original deve estar na *Forma Canónica:*

- Problema de max com todas as restrições do tipo de $\leq$.

- no Apêndice, mostra-se como tratar as restrições de igualdade.

O dual do dual é o primal

- Partindo do problema dual, e colocando-o na Forma Canónica:

DUAL	DUAL
$\min \; yb$ $yA \geq c$ $y \geq 0$	$-\max \; -yb$ $-yA \leq -c$ $y \geq 0$
$\min \; 40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ $y_1,\; y_2,\; y_3 \geq 0$	$\max \; -40y_1 - 150y_2 - 20y_3$ $-1y_1 - 2y_2 - 2y_3 \leq -30$ $-1y_1 - 2y_2 - 1y_3 \leq -20$ $-2y_1 - 1y_2 \leq -10$ $y_1,\; y_2,\; y_3 \geq 0$

- se se usar a regra do *slide* anterior, obtém-se o problema primal.

Portanto, basta usar a seguinte regra:

- O dual de um Problema de min com <u>todas</u> as restrições de $\geq$ é um Problema de max com <u>todas</u> as restrições de $\leq$.

Mostra-se que $\min yb = -\max -yb$ nos diapositivos de transformações básicas.

Elementos do vector $c_B B^{-1} A - c$ são as folgas do dual

Problema dual

$$\begin{array}{rcl} \min z &=& yb \\ && yA \geq c \\ && y \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \min z &=& yb \\ && yA - u = c \\ && y, u \geq 0 \end{array}$$

sendo $u \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

As variáveis do problema dual são:

- variáveis de decisão: $y = c_B B^{-1}$,
- variáveis de folga: $u = c_B B^{-1} A - c$ $(u = yA - c)$.

- Solução do problema dual é admissível quando $y, u \geq 0$.

Resolver o primal também resolve o dual,

porque o quadro simplex da resolução do primal fornece os valores das:

- variáveis de decisão do dual: $c_B B^{-1} = y = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$,
- variáveis de folga do dual: $c_B B^{-1} A - c = u = (u_1, u_2, u_3) = (5, 0, 0)$,
- e da função objectivo da solução dual: $yb = (c_B B^{-1}) b = 500$.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	**0**	**0**	**5**	**0**	**15**	500

- Nota: resolver o problema dual do exemplo de motivação, além de fornecer o valor do vértice óptimo, também permite saber as suas coordenadas (que são os valores das variáveis de decisão e de folga do dual do dual).

Teoremas da dualidade ilustrados com um exemplo

Relação entre os problemas primal e o dual:

- Teorema da dualidade fraca
- Teorema da dualidade forte
- Teorema da folga complementar

Vamos ilustrá-los com o seguinte par:

- Problema do caminho mais curto entre os vértices s e t
- Problema do afastamento máximo dos vértices s e t

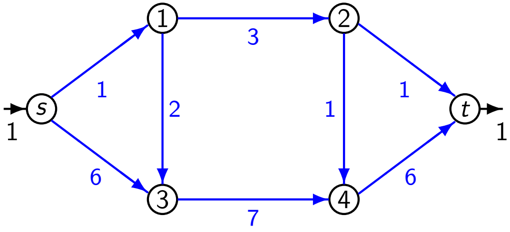
- Designaremos o problema de maximização por primal e o de minimização por dual.

Assim:

- o dual é o de minimização: caminho mais curto
- o primal é o de maximização: afastamento máximo dos vértices

Exemplo: caminho mais curto

- Formulação: injectar uma unidade no vértice s que vai usar a sequência de custo mínimo de arcos de custo c_{ij} até chegar a t.



	x_{s1}	x_{s3}	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{2t}	x_{34}	x_{4t}		
s	$+1$	$+1$							$=$	$+1$
v_1	-1		$+1$	$+1$					$=$	0
v_2			-1		$+1$	$+1$			$=$	0
v_3		-1		-1			$+1$		$=$	0
v_4					-1		-1	$+1$	$=$	0
t						-1		-1	$=$	-1
min	1	6	3	2	1	1	1	6		

- Para evidenciar o significado do prob. primal, vamos i) multiplicar as restrições por -1, e ii) substituí-las por restrições $\geq$ (OK neste caso).

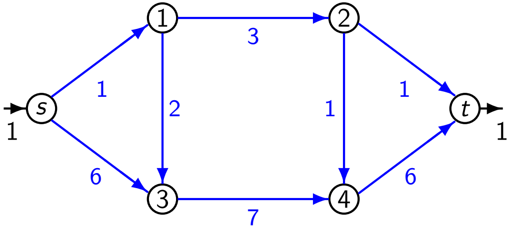
Construção do problema primal (dual do dual)

	x_{s1}	x_{s3}	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{2t}	x_{34}	x_{4t}			*var.primal*
s	-1	-1							$\geq$	-1	(d_s)
v_1	$+1$		-1	-1					$\geq$	0	(d_1)
v_2			$+1$		-1	-1			$\geq$	0	(d_2)
v_3		$+1$		$+1$			-1		$\geq$	0	(d_3)
v_4					$+1$		$+1$	-1	$\geq$	0	(d_4)
t						$+1$		$+1$	$\geq$	$+1$	(d_t)
min	1	6	3	2	1	1	1	6			

- Variáveis primais: d_j : valor do afastamento do vértice j e $s, \forall j \in V$

	d_s	d_1	d_2	d_3	d_4	d_t		
$(s,1)$	-1	$+1$					$\leq$	1
$(s,3)$	-1			$+1$			$\leq$	6
$(1,2)$		-1	$+1$				$\leq$	3
$(1,3)$		-1		$+1$			$\leq$	2
$(2,4)$			-1		$+1$		$\leq$	1
$(2,t)$			-1			$+1$	$\leq$	1
$(3,4)$				-1	$+1$		$\leq$	1
$(4,t)$					-1	$+1$	$\leq$	6
max	-1					$+1$		

Exemplo: interpretação do modelo do problema primal



Restrição do arco $(i,j) : d_j \leq d_i + c_{ij}$:

- o afastamento de j e s não pode exceder o afastamento de i e s adicionado do comprimento do arco (i,j).

Função objectivo: $d_t - d_s$:

- afastamento dos vértices t e s, que se pretende maximizar.

- Qual o afastamento máximo no exemplo?

Teorema da dualidade fraca

Teorema

O valor da função objectivo ($c\hat{x}$) *de qualquer solução admissível* $\hat{x}$ *do problema primal (de maximização) e*

o valor de função objectivo ($\hat{y}b$) *de qualquer solução admissível* $\hat{y}$ *do problema dual (de minimização)*

obedecem à seguinte relação: $c\hat{x} \leq \hat{y}b$

Prova:

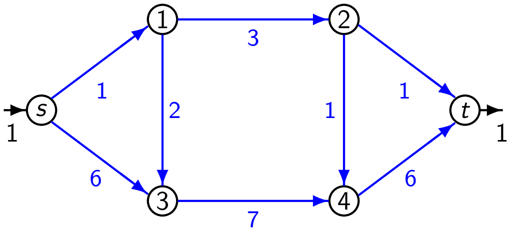
- Se $\hat{y}$ é uma solução admissível do dual, então $\hat{y} \geq 0$, e podemos pré-multiplicar por $\hat{y}$ as restrições $A\hat{x} \leq b$, obtendo $\hat{y}A\hat{x} \leq \hat{y}b$.
- Se $\hat{x}$ é uma solução admissível do primal, então $\hat{x} \geq 0$, e podemos pós-multiplicar por $\hat{x}$ as restrições $\hat{y}A \geq c$, obtendo $\hat{y}A\hat{x} \geq c\hat{x}$.
- Conjugando as duas relações, obtém-se $c\hat{x} \leq \hat{y}A\hat{x} \leq \hat{y}b$. □

Teorema da dualidade fraca: exemplo 1

PRIMAL	DUAL
max cx $Ax \leq b$ $x \geq 0$	min yb $yA \geq c$ $y \geq 0$
max $30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$ $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$ $2x_1 + 1x_2 \leq 20$ $x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$	min $40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

- $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)^\top = (10, 0, 0)^\top$ é um ponto admissível do primal.
- $(\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3) = (30, 0, 0)$ é um ponto admissível do dual.
- $c\widehat{x} = 30(10) + 20(0) + 10(0) = 300$
- $\widehat{y}b = 40(30) + 150(0) + 20(0) = 1200$
- este par de pontos verifica o teorema da dualidade fraca: $c\widehat{x} \leq \widehat{y}b$, *i.e.*, $300 \leq 1200$.

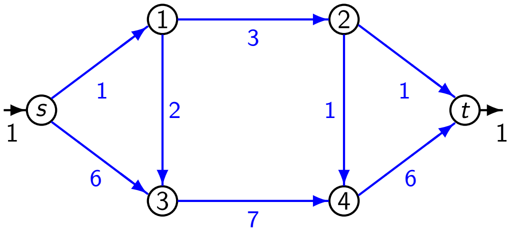
Teorema da dualidade fraca: exemplo 2



- Uma solução do dual é um caminho, e o valor da solução é o comprimento do caminho.
- Uma solução do primal é um conjunto de valores de $\widehat{d}_j$, $\forall j \in V$, e o valor da solução é o afastamento é $\widehat{d}_t - \widehat{d}_s$.

Portanto, ...

Teorema da dualidade fraca: exemplo 2



- Uma solução do dual é um caminho, e o valor da solução é o comprimento do caminho.
- Uma solução do primal é um conjunto de valores de $\widehat{d}_j$, $\forall j \in V$, e o valor da solução é o afastamento é $\widehat{d}_t - \widehat{d}_s$.

Portanto, ...

- o afastamento $\widehat{d}_t - \widehat{d}_s$ de qualquer solução primal admissível $\leq$ $\leq$ o comprimento de qualquer caminho.

Corolário da dualidade fraca: valor óptimo ilimitado

Corolário (do teorema da dualidade fraca)

Se o problema primal de maximização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema dual é impossível.

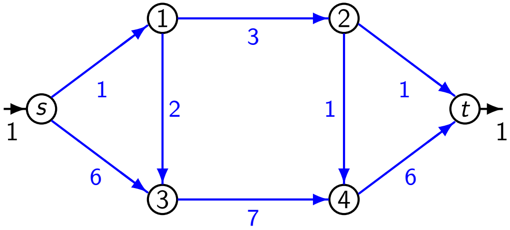
Prova:

- Não pode haver nenhuma solução admissível do dual com um valor de função objectivo maior do que o valor da solução óptima ilimitada do primal.
- Portanto, o domínio do dual tem de ser vazio, e o problema dual é impossível.

e reciprocamente:

Se o problema dual de minimização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema primal é impossível.

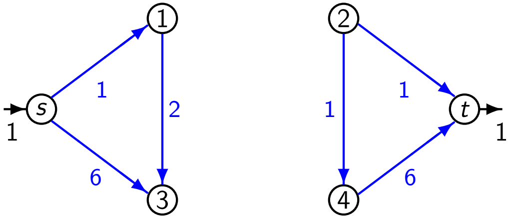
Corolário da dualidade fraca: exemplo 2



- Corolário: se a solução óptima do problema primal do afastamento tiver um valor $d_t^* - d_s^*$ ilimitado, então o problema dual é impossível.

- Isso acontece quando ...

Corolário da dualidade fraca: exemplo 3



- Corolário: se a solução óptima do problema primal do afastamento tiver um valor $d_t^* - d_s^*$ ilimitado, então o problema dual é impossível.

- Isso acontece quando, por exemplo, o grafo tem dois componentes, estando o vértice s num deles e t no outro:
- não havendo restrições que limitem o afastamento dos vértices do mesmo componente que t, o vértice t pode ser colocado a uma distância ilimitada de s;
- o problema dual é impossível: não há caminho entre s e t.

Teorema da dualidade forte

Teorema

Se o problema primal tiver uma solução óptima com valor finito, então o problema dual tem, pelo menos, uma solução óptima com valor finito, e os valores das soluções óptimas são iguais, $cx^* = y^* b$.

sendo

- x^* : solução óptima do primal
- y^* : solução óptima do dual

Prova: O quadro simplex óptimo apresenta soluções admissíveis para o problema primal e para o problema dual com o mesmo valor finito de função objectivo:

$$y^* b = (c_B B^{-1}) b = c_B (B^{-1} b) = cx^*.$$

$\square$

Teorema da dualidade forte: quadro óptimo

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

- Solução é admissível para o problema primal se:
  - variáveis de decisão e de folga do primal: $B^{-1}b \geq 0$,
  - *i.e.*, todos os elementos do lado direito do quadro simplex não-negativos.
- Solução é admissível para o problema dual se:
  - variáveis de decisão do dual: $y = c_B B^{-1} \geq 0$
  - variáveis de folga do dual: $u = c_B B^{-1} A - c \geq 0$,
  - *i.e.*, todos os elementos da linha da função objectivo do quadro simplex não-negativos.

- No quadro óptimo, há pontos admissíveis dos problemas primal e do dual que têm o mesmo valor de função objectivo.

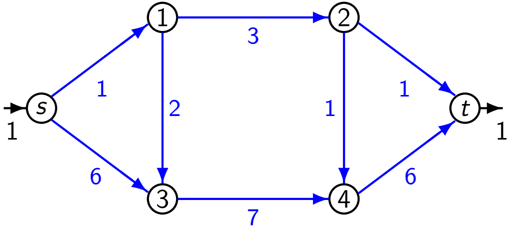
$\therefore$ São as soluções óptimas dos respectivos problemas.

Teorema da dualidade forte: exemplo 1

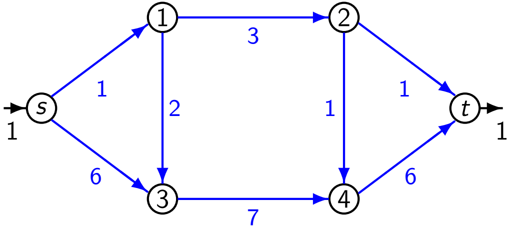
PRIMAL	DUAL
$\max \; cx$ $Ax \le b$ $x \ge 0$	$\min \; yb$ $yA \ge c$ $y \ge 0$
$\max \; 30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \le 40$ $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 150$ $2x_1 + 1x_2 \le 20$ $x_1,\; x_2,\; x_3 \ge 0$	$\min \; 40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 30$ $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \ge 20$ $2y_1 + 1y_2 \ge 10$ $y_1,\; y_2,\; y_3 \ge 0$

- $x^* = (x_1, x_2, x_3)^\top = (0, 20, 10)^\top$ é o ponto óptimo do primal.
- $y^* = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$ é o ponto óptimo do dual.
- $cx^* = 30(0) + 20(20) + 10(10) = 500$
- $y^* b = 40(5) + 150(0) + 20(15) = 500$
- este par de pontos verifica o teorema da dualidade forte: $cx^* = y^* b$, *i.e.*, $500 = 500$.

Teorema da dualidade forte: exemplo 2



Portanto, ...



Portanto, ...

- Afastamento máximo dos vértices s e t = Comprimento do caminho mais curto entre s e t

Teorema da folga complementar

Teorema

No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.

Regra de correspondência:

var. folga de uma restrição $\widehat{=}$ var. decisão dual associada à restrição

PRIMAL	DUAL
$\begin{array}{lll} \max & cx & \\ & Ax + s = b & (y) \\ & x \geq 0 & \end{array}$	$\begin{array}{lll} \min & yb & \\ & yA - u = c & (x) \\ & y \geq 0 & \end{array}$

$\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40 \quad (y_1) \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150 \quad (y_2) \\ & 2x_1 + 1x_2 \qquad + s_3 = 20 \quad (y_3) \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \min & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 30 \quad (x_1) \\ & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 - u_2 = 20 \quad (x_2) \\ & 2y_1 + 1y_2 \qquad - u_3 = 10 \quad (x_3) \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0 \end{array}$

Folga complementar no quadro simplex óptimo: exemplo 1

- Se uma variável é básica no problema primal (≥ 0) $\Rightarrow$ coeficiente da linha da função objectivo (variável dual correspondente) é 0.
- Se um coeficiente da linha da função objectivo (variável do problema dual) ≥ 0 $\Rightarrow$ variável primal correspondente é não-básica (igual a 0).

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

PRIMAL			DUAL
var. folga	$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 100 \\ s_3 = 0 \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} y_1 = 5 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 15 \end{matrix}\right\}$	var. decisão
var. decisão	$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = 10 \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} u_1 = 5 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{matrix}\right\}$	var. folga

Prova do teorema da folga complementar

Teorema

No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.

Prova:

- No óptimo, $cx^* = y^*Ax^* = y^*b$. Há duas equações:

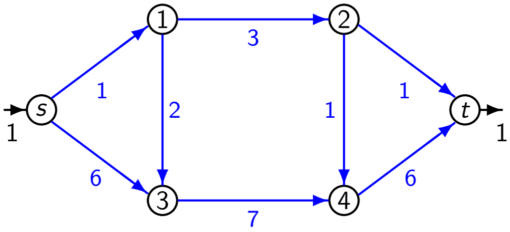
$$\begin{cases} y^*Ax^* & = & y^*b \\ cx^* & = & y^*Ax^* \end{cases} \quad \begin{cases} y^*\left(b - Ax^*\right) & = & 0 \\ \left(y^*A - c\right)x^* & = & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^*s^* & = & 0 \\ u^*x^* & = & 0 \end{cases}$$

- Para o produto escalar $y^*s^* = 0$, como $y^* \geq 0$ e $s^* \geq 0$, então necessariamente, $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{cases} \text{se } y_i^* > 0 \;\Rightarrow\; s_i^* = 0 \\ \text{se } s_i^* > 0 \;\Rightarrow\; y_i^* = 0 \end{cases}$$

- O mesmo resultado aplica-se à segunda equação $u^*x^* = 0$.

Teorema da folga complementar: exemplo 2



- Se arco (i,j) pertence ao caminho mais curto ($x^*_{ij} = 1$ no problema dual), então

  a folga da restrição primal $(d_j \leq d_i + c_{ij})$ é nula.

- Caminho mais curto: $x^*_{s1} = x^*_{12} = x^*_{2t} = 1$, restantes vars $= 0$.
- Folgas restrições nulas: $d^*_1 = d^*_s + 1, \quad d^*_2 = d^*_1 + 3, \quad d^*_t = d^*_2 + 1$, *i.e.*,
  $d^*_1 = d^*_s + 1, \quad d^*_2 = d^*_s + 4, \quad d^*_t = d^*_s + 5.$

- Há mais relações de folga complementar.

Em síntese, o teorema fundamental da programação linear:

Teorema (Condições de optimalidade)

Uma solução de um problema de programação linear é óptima se:

- *for admissível para o problema primal,*
- *for admissível para o problema dual, e*
- *obedecer à folga complementar.*

Conclusão

- Existem relações muito fortes entre um problema e o seu dual.
- Eles mostram duas perspectivas diferentes da mesma realidade; até podemos resolver um para obter a solução do outro.
- Há outros exemplos de pares de problemas primal-dual. O problema do produtor de rações é o problema dual do problema da dieta (ver Quiz sobre dualidade).

Apêndice

Variáveis duais associadas a restrições de igualdade

- A variável dual associada a uma restrição de igualdade não tem restrição de sinal, *i.e.*, pode ter valor positivo, nulo ou negativo.
- No LPSolve, a sua declaração seria, por exemplo, `Free y1;`

- Isto pode ser provado desdobrando a restrição de $=$ em 2 restrições de $\leq$, e identificando que, no modelo dual, a variável dual é a diferença de 2 variáveis, o que corresponde a uma variável `Free`.

Uma perspectiva dual da solução do problema primal

- O problema dual encontra os melhores valores que podem ser atribuído aos recursos usados nas actividades.
- As variáveis duais (os preços-sombra) traduzem o valor dos recursos, e explicam como se forma o valor de uma actividade.
- As actividades seleccionadas (no problema primal) são aquelas que atribuem um maior valor aos recursos.

Solução óptima: uso de recursos e valor dos recursos

```
        max:   30x1 +20x2 +10x3;
restricao1:    1x1 + 1x2 + 2x3 <=  40;
restricao2:    2x1 + 2x2 + 1x3 <= 150;
restricao3:    2x1 + 1x2       <=  20;
```

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- Uso de recursos e *valor dos recursos*:

	act.1	act.2	act.3	folga		qtd.rec.	valor rec.
recurso 1:	1(0)	+1(20)	+2(10)		=	40	40(5)
recurso 2:	2(0)	+2(20)	+1(10)	+100	=	150	+150(0)
recurso 3:	2(0)	+1(20)			=	20	+20(15)
valor f.obj.:	30(0)	+20(20)	+10(10)				= 500

Como se forma o valor da solução óptima, $c_B B^{-1} b$?

Perspectiva primal:

$c_B \ (B^{-1} b) =$ f(valor das vars decisão (c_{ij}), nível das vars decisão (x_{ij}))

exemplo:

$$c_B \ \ (B^{-1} b) \ \ = \ \ \boxed{\begin{matrix} 10 & 0 & 20 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

Perspectiva dual:

$(c_B B^{-1}) \ b =$ f(valor dos recursos (y_i), nível dos recursos (b_i))

exemplo:

$$(c_B B^{-1}) \ \ b \ \ = \ \ \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

O que significa o valor $c_B B^{-1} A_j - c_j$ da actividade j?

$$c_B B^{-1} A_j = \sum_{i=1}^{m} (c_B B^{-1})_i \; \times \; a_{ij}, \quad \forall j,$$

- $(c_B B^{-1})_i$ é o valor para o decisor de uma unidade de recurso i,
- a_{ij} é a quantidade de recurso i usado numa unidade da actividade j.
- Portanto, $c_B B^{-1} A_j$ é o valor dos recursos usados numa unidade da actividade j.

- c_j é o valor de venda de uma unidade da actividade j.

Na solução óptima de um problema de maximização,

- se $c_B B^{-1} A_j - c_j > 0$, o valor dos recursos usados é maior do que o valor da venda; é melhor não fazer esta actividade (variável não-básica); há outras actividades que usam melhor os recursos,
- se $c_B B^{-1} A_j - c_j = 0$, o valor de venda iguala o valor dos recursos usados; esta actividade (variável básica) dá o maior valor possível aos recursos.

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

Actividade 1: $$c_B B^{-1} A_1 - c_1 = \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}} - 30 = 5$$

Actividade 2: $$c_B B^{-1} A_2 - c_2 = \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} - 20 = 0$$

Fim