Universidade do Minho

Departamento de Informática

MDIO - TP3

Grupo Nº 21

Gonçalo Almeida (A84610)

Emanuel Rodrigues (A84776)

Lázaro Pinheiro (A86788)

Luís Ferreira (A76936)

8 de Janeiro de 2020

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho prático desenvolve-se no âmbito da Unidade Curricular Modelos Determinísticos de Investigação Operacional, lecionada no 1º semestre do 3º ano do curso de Engenharia Informática. O objetivo dos trabalhos práticos é desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos, de criar modelos para os descrever, de obter soluções para esses modelos utilizando programas computacionais adequados, de validar os modelos obtidos, de interpretar as soluções obtidas, e de elaborar recomendações para o sistema em análise.

No decorrer deste trabalho, procurou-se formular um modelo de programação linear com vista a obter uma solução ótima.

1.1 Parte 0

Dado que o número de inscrição do aluno do grupo com maior número de inscrição é o 86788, uma vez que os dois últimos dígitos são iguais, removeu-se da lista de atividades a atividade 8.

Assim sendo, obteve-se a seguinte rede:

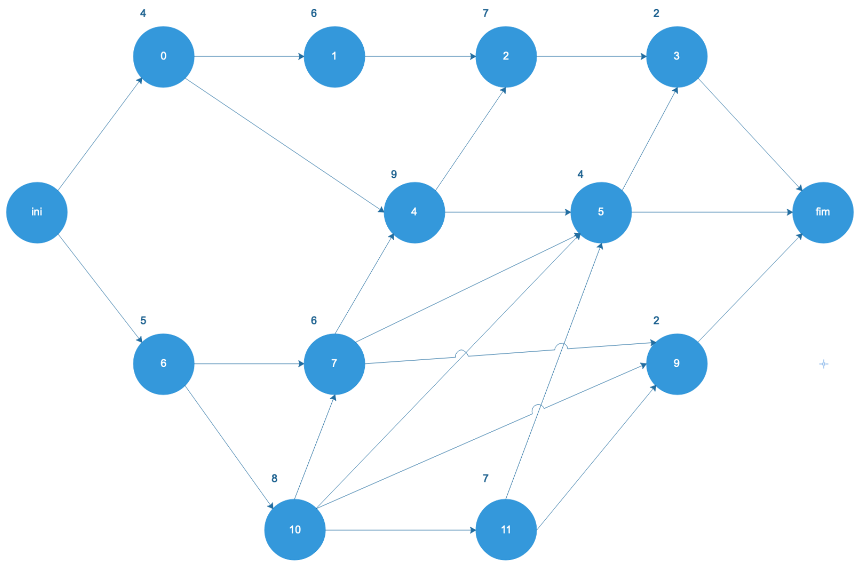

Figura 1.1: Grafo

Em seguida, determinou-se o diagrama de Gantt que resulta de resolver o modelo com as variáveis de decisão ti , $\forall$i

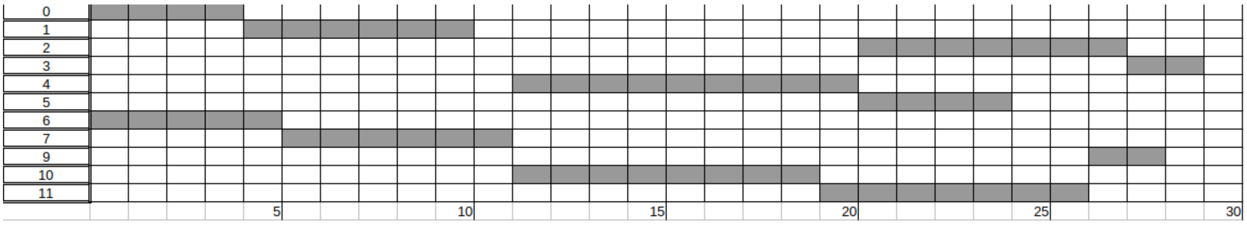

Figura 1.2: Diagrama de Gantt

1.2 Parte 1

O CPM (critical path method) assume que qualquer atividade pode ser realizada em paralelo com qualquer outra. É, por exemplo, o caso das atividades 0 e 6. Há, no entanto, situações em que os recursos são limitados, e a realização das atividades depende dos recursos disponíveis. Se existir apenas um equipamento utilizado pelas atividades 0 e 6, as duas atividades não podem decorrer em simultâneo, devendo a atividade 0 terminar antes de se iniciar a atividade 6 ou a atividade 6 terminar antes de se iniciar a atividade 0. Claramente, pode haver casos em que a duração global do projeto aumenta em consequência disso.

A partir do diagrama de Gantt da Parte 0, identificaram-se 3 atividades que decorrem em paralelo, não descorando que uma das atividades identificadas pertence ao caminho crítico e que apenas existe um equipamento para realizar as três atividades, com o objetivo de realizar o projeto na menor duração possível. Assim sendo, as atividades identificadas foram a 2, a 5 e a 11.

1.2.1 Restrições

Com o primeiro grupo de restrições (Ver E) garantiu-se as relações de precedência entre as atividades.

Para não se tornar maçador, procurou-se generalizar a justificação das restrições apresentadas.

Considere-se a seguinte restrição genérica.

$$\text{arco\_ij} : \text{tj} \geq \text{ti} + \text{di}$$

Para uma dada atividade j, o tempo de início da atividade j deve ser posterior ao tempo de conclusão de cada uma das atividades i que precedem j. Dado que ti designa o tempo de início da atividade i, a função ti + di designa o tempo de conclusão da atividade i. O projeto termina no instante de tempo tf , quando todas as atividades predecessoras imediatas da atividade fictícia fim estiverem concluídas.

Com o segundo grupo de restrições (Ver E) garantiu-se que as três atividades não podem ocupar simultaneamente a máquina. Estas restrições intitulam-se por Restrições de não-simultaneidade.

Para não se tornar maçador, procurou-se generalizar a justificação das restrições apresentadas.

Considere-se a seguinte restrição genérica.

$$\text{ti} + \text{di} \leq \text{tj} + \text{M (1 - yij)};$$
$$\text{tj} + \text{dj} \leq \text{ti} + \text{M yij};$$

Tome-se M como um limite superior. Para que se pudesse representar M como um valor virtualmente infinito, utilizou-se o 1000.

A variável yij representa a seguinte separação:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, se a tarefa } i \text{ precede a tarefa } j \\ 0 & \text{, se a tarefa } j \text{ precede a tarefa } i \end{cases}$$

Figura 1.3

1.2.2 Função Objetivo

A função objetivo retorna a duração da execução de todas as atividades, garantindo que esta é a menor duração possível realizando as três atividades selecionadas de forma sequencial.

1.2.3 Plano de Execução

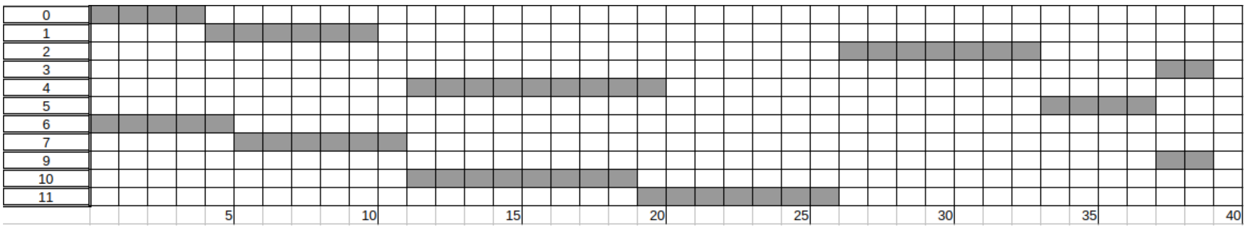

Figura 1.4: Diagrama de Gantt

```
arco_01: t1>= t0 + 4 ⇔ 4 >= 0 + 4 ⇔ 4 >= 4;
arco_12: t2>= t1 + 6 ⇔ 26 >= 4 + 6 ⇔ 26 >= 10;
arco_23: t3>= t2 + 7 ⇔ 37 >= 26 + 7 ⇔ 37 >= 33;
arco_i0: t0>= ti + 0 ⇔ 0 >= 0 + 0 ⇔ 0 = 0;
arco_04: t4>= t0 + 4 ⇔ 11 >= 0 + 4 ⇔ 11 >= 4;
arco_42: t2>= t4 + 9 ⇔ 26 >= 11 + 9 ⇔ 26 >= 20;
arco_53: t3>= t5 + 4 ⇔ 37 >= 33 + 4 ⇔ 37 >= 37;
arco_3f: tf>= t3 + 2 ⇔ 39 >= 37 +2 ⇔ 39 >= 39;
arco_45: t5>= t4 + 9 ⇔ 33 >= 11 + 9 ⇔ 33 >= 20;
arco_5f: tf>= t5 + 4 ⇔ 39 >= 33 + 4 ⇔ 39 >= 37;
arco_i6: t6>= ti + 0 ⇔ 0 >= 0 + 0 ⇔ 0 = 0;
arco_74: t4>= t7 + 6 ⇔ 11 >= 5 + 6 ⇔ 11 >= 11;
arco_9f: tf>= t9 + 2 ⇔ 39 >= 37 + 2 ⇔ 39 >= 39;
arco_67: t7>= t6 + 5 ⇔ 5 >= 0 + 5 ⇔ 5= 5;
arco_710: t10>= t7 + 6 ⇔ 11 >= 5 + 6 ⇔ 11 = 11;
arco_79: t9>= t7 + 6 ⇔ 37 >= 5 + 6 ⇔ 37 >= 11;
arco_610: t10>= t6 + 5 ⇔ 11 >= 0 + 5 ⇔ 11 >= 5;
arco_109: t9>= t10 + 8 ⇔ 37 >= 11 + 8 ⇔ 37 >= 19;
arco_105: t5>= t10 + 8 ⇔ 33 >= 11 + 8 ⇔ 33 >= 19;
arco_119: t9>= t11 + 7 ⇔ 37 >= 19 + 7 ⇔ 37 >= 26;
arco_1011: t11>= t10 + 8 ⇔ 19 >= 11 + 8 ⇔ 19 >= 19;


// 2 5
t2 + 7 <= t5 + 1000 - 1000 y25 ⇔ 26 + 7 <= 33 + 1000 – 1000*1 ⇔ 33 <= 33;
t5 + 4 <= t2 + 1000 y25 ⇔ 33 + 4 <= 26 + 1000 * 1 ⇔ 37 <= 1026;

//2 11
t2 + 7 <= t11 + 1000 - 1000 y211 ⇔ 26 + 7 <= 19 + 1000 – 1000 * 0 ⇔ 33 <= 1019;
t11 + 7 <= t2 + 1000 y211 ⇔ 19 + 7 <= 26 + 1000 * 0 ⇔ 26 <= 26;

//5 11
t5 + 4 <= t11 + 1000 - 1000 y511 ⇔ 33 + 4 <= 19 + 1000 – 1000 * 0 ⇔ 37 <= 1019;
t11 + 7 <= t5 + 1000 y511 ⇔ 19 + 7 <= 33 + 1000 * 0 ⇔ 26 <= 33;
```

Figura 1.5: Validação dos resultados

1.3 Parte 2

Embora haja uma duração definida para cada atividade, é muitas vezes possível, aumentando os recursos nela aplicados, reduzir a sua duração. Isto é feito com custos suplementares, mas pode trazer o benefício de reduzir a duração de execução do projeto global.

Na nova formulação deste problema, a função objetivo visa minimizar a soma dos produtos dos custos de aumentar cada variável com os respetivos valores máximos de redução. As variáveis rpi e rsi representam, respetivamente, o máximo que uma redução c1i e c2i podem ser aplicadas.

1.3.1 Restrições

A restrição tf¡= 26 tem como objetivo reduzir, no mínimo, 3 U.T. em relação aos resultados anteriores $(29 - 3 = 26)$.

Para não se tornar maçador, procurou-se generalizar a justificação das restrições apresentadas.

Considere-se a seguinte restrição genérica.

$$\text{arco\_ij} : \text{tj} \geq \text{ti} - \text{rpi - rsi} + \text{di}$$

A descrição das variáveis acima é semelhante à da Parte 1, tendo sido introduzidas as reduções de custo em cada arco.

1.3.2 Plano de execução

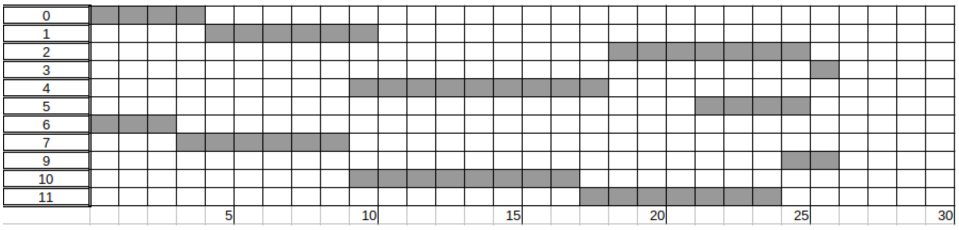

Figura 1.6: Diagrama de Gantt

```
arco_01: 4>= 0 - 0 - 0 + 4 ;
arco_12: 18>= 4 - 0 - 0 + 6;
arco_23: 25>= 18 - 0 - 0 + 7;
arco_i0: 0>= 0 + 0;
arco_04: 9>= 0 - 0 - 0 + 4;
arco_42: 18>= 9 - 0 - 0 + 9;
arco_53: 25>= 21 - 0 - 0 + 4 ;
arco_3f: 26>= 25 - 0.5 - 0.5 + 2 ;
arco_45: 21>= 9 - 0 - 0 + 9 ;
arco_5f: 26>= 21 - 0 - 0 + 4 ;
arco_i6: 0>= 0 + 0;
arco_74: 9>= 3 - 0 - 0 + 6;
arco_9f: 26>= 24 - 0 - 0 + 2;
arco_67: 3>= 0 - 1 - 0 + 5;
arco_710: 9>= 3 - 0 - 0 + 6;
arco_79: 24>= 3 - 0 - 0 + 6;
arco_610: 9>= 0 - 1 - 0 + 5;
arco_109: 24>= 9 - 0 - 0 + 8;
arco_105: 21>= 9 - 0 - 0 + 8;
arco_119: 24>= 17 - 0 - 0 + 7;
arco_1011: 17>= 9 - 0 - 0 + 8;

0<= 0.5;
0<= 1;
0<= 3;
0.5<= 0.5;
0<= 2;
0<= 0.5;
1<= 1;
0<= 0;
0<= 0;
0<= 0.5;
0<= 1;

0<= 0.5;
0<= 1;
0<= 1;
0.5<= 0.5;
0<= 1;
0<= 0.5;
1<= 1;
0<= 0;
0<= 0;
0<= 0.5;
0<= 1;
```

Figura 1.7: Verificação dos resultados

Capítulo 2

Conclusão

Culminada a elaboração do trabalho prático 3, atingindo-se o percurso ótimo respondendo ao objetivo proposto.

Ao nível de dificuldades sentidas, importa referir a complexidade em colocar no papel as restrições, visto que a sua idealização foi fácil, todavia transpor objetivamente foi um trabalho árduo.

Com o mesmo, foi permitida a consolidação de aprendizagens, nomeadamente o uso do software LPSOLVE, que facilitou a realização dos cálculos necessários.

No ímpeto geral o desenvolvimento do trabalho decorreu como planeado, alcançando o objetivo esperado e a solução para o problema proposto.

Apêndice A

Input: Caminho crítico - Parte 0

```
max: 4 x01 + 4 x04 + 6 x12 + 7 x23 + 2 x3f + 9 x42 + 9 x45 +
4 x53 +4 x5f + 5 x67 + 5 x610 + 6 x74 + 2 x9f + 8 x1011 +
7 x119 + 8 x109 + 8 x105 + 6 x79 + 6 x75;


vertice_i: xi0 + xi6 = 1;
vertice_0: xi0 = x01 + x04;
vertice_1: x01 = x12;
vertice_2: x12 + x42 = x23;
vertice_3: x23 + x53 = x3f;
vertice_4: x04 + x74 = x42 + x45;
vertice_5: x45 + x75 + x105 = x53 + x5f;
vertice_6: xi6 = x67 + x610;
vertice_7: x67 = x74 + x75 + x79;
vertice_9: x109 + x79 + x119 = x9f;
vertice_10: x610 = x1011 + x109 + x105;
vertice_11: x1011 = x119;
```

Apêndice B

Output: Caminho crítico - Parte 0

```
Value of objective function: 29.00000000

Actual values of the variables:
x01                             0
x04                             0
x12                             0
x23                             1
x3f                             1
x42                             1
x45                             0
x53                             0
x5f                             0
x67                             1
x610                            0
x74                             1
x9f                             0
x1011                           0
x119                            0
x109                            0
x105                            0
x79                             0
x75                             0
xi0                             0
xi6                             1
```

Apêndice C

Input: Tempo de conclusão - Parte 0

```
min: tf;

arco_01: t1>= t0 + 4;
arco_12: t2>= t1 + 6;
arco_23: t3>= t2 + 7;
arco_i0: t0>= ti + 0;
arco_04: t4>= t0 + 4;
arco_42: t2>= t4 + 9;
arco_53: t3>= t5 + 4;
arco_3f: tf>= t3 + 2;
arco_45: t5>= t4 + 9;
arco_5f: tf>= t5 + 4;
arco_i6: t6>= ti + 0;
arco_74: t4>= t7 + 6;
arco_9f: tf>= t9 + 2;
arco_67: t7>= t6 + 5;
arco_710: t10>= t7 + 6;
arco_79: t9>= t7 + 6;
arco_610: t10>= t6 + 5;
arco_109: t9>= t10 + 8;
arco_105: t5>= t10 + 8;
arco_119: t9>= t11 + 7;
arco_1011: t11>= t10 + 8;
```

Apêndice D

Output: Tempo de conclusão - Parte 0

```
Value of objective function: 29.00000000

Actual values of the variables:
tf                              29
t1                               4
t0                               0
t2                              20
t3                              27
ti                               0
t4                              11
t5                              20
t6                               0
t7                               5
t9                              26
t10                             11
t11                             19
```

Apêndice E

Ficheiro de input - Parte 1

```
min: tf;

arco_01: t1>= t0 + 4;
arco_12: t2>= t1 + 6;
arco_23: t3>= t2 + 7;
arco_i0: t0>= ti + 0;
arco_04: t4>= t0 + 4;
arco_42: t2>= t4 + 9;
arco_53: t3>= t5 + 4;
arco_3f: tf>= t3 + 2;
arco_45: t5>= t4 + 9;
arco_5f: tf>= t5 + 4;
arco_i6: t6>= ti + 0;
arco_74: t4>= t7 + 6;
arco_9f: tf>= t9 + 2;
arco_67: t7>= t6 + 5;
arco_710: t10>= t7 + 6;
arco_79: t9>= t7 + 6;
arco_610: t10>= t6 + 5;
arco_109: t9>= t10 + 8;
arco_105: t5>= t10 + 8;
arco_119: t9>= t11 + 7;
arco_1011: t11>= t10 + 8;

//2 5
t2 + 7 <= t5 + 1000 - 1000 y25;
t5 + 4 <= t2 + 1000 y25;

//2 11
t2 + 7 <= t11 + 1000 - 1000 y211;
t11 + 7 <= t2 + 1000 y211;

//5 11
t5 + 4 <= t11 + 1000 - 1000 y511;
t11 + 7 <= t5 + 1000 y511;

bin y25, y211, y511;
```

Apêndice F

Ficheiro de output - Parte 1

```
Value of objective function: 39.00000000

Actual values of the variables:
tf                              39
t1                               4
t0                               0
t2                              26
t3                              37
ti                               0
t4                              11
t5                              33
t6                               0
t7                               5
t9                              37
t10                             11
t11                             19
y25                              1
y211                             0
y511                             0
```

Apêndice G

Ficheiro de input - Parte 2

```
min: 200 rp0 + 600 rp1 + 1000 rp2 + 200 rp3 + 800 rp4 + 1600 rp5 +
180 rp6 + 0 rp7 + 0 rp9 + 1000 rp10 + 600 rp11 + 100 rs0 + 300 rs1 +
500 rs2 + 100 rs3 + 400 rs4 + 800 rs5 +  90 rs6 + 0 rs7 + 0 rs9 +
500 rs10 + 300 rs11;

tf<= 26;

arco_01: t1>= t0 - rp0 - rs0 + 4 ;
arco_12: t2>= t1 - rp1 - rs1 + 6 ;
arco_23: t3>= t2 - rp2 - rs2 + 7 ;
arco_i0: t0>= ti + 0 ;
arco_04: t4>= t0 - rp0 - rs0 + 4 ;
arco_42: t2>= t4 - rp4 - rs4 + 9 ;
arco_53: t3>= t5 - rp5 - rs5 + 4 ;
arco_3f: tf>= t3 - rp3 - rs3 + 2 ;
arco_45: t5>= t4 - rp4 - rs4 + 9 ;
arco_5f: tf>= t5 - rp5 - rs5 + 4 ;
arco_i6: t6>= ti + 0 ;
arco_74: t4>= t7 - rp7 - rs7 + 6 ;
arco_9f: tf>= t9 - rp9 - rs9 + 2 ;
arco_67: t7>= t6 - rp6 - rs6 + 5 ;
arco_710: t10>= t7 - rp7 - rs7 + 6 ;
arco_79: t9>= t7 - rp7 - rs7 + 6 ;
arco_610: t10>= t6 - rp6 - rs6 + 5 ;
arco_109: t9>= t10 - rp10 - rs10 + 8 ;
arco_105: t5>= t10 - rp10 - rs10 + 8 ;
arco_119: t9>= t11 - rp11 - rs11 + 7 ;
arco_1011: t11>= t10 - rp10 - rs10 + 8;

rp0<= 0.5;
rp1<= 1;
rp2<= 3;
rp3<= 0.5;
rp4<= 2;
rp5<= 0.5;
rp6<= 1;
rp7<= 0;
rp9<= 0;
rp10<= 0.5;
```

```
rp11<= 1;

rs0<= 0.5;
rs1<= 1;
rs2<= 1;
rs3<= 0.5;
rs4<= 1;
rs5<= 0.5;
rs6<= 1;
rs7<= 0;
rs9<= 0;
rs10<= 0.5;
rs11<= 1;
```

Apêndice H

Ficheiro de output - Parte 2

```
Value of objective function: 420.00000000

Actual values of the variables:
rp0                              0
rp1                              0
rp2                              0
rp3                            0.5
rp4                              0
rp5                              0
rp6                              1
rp7                              0
rp9                              0
rp10                             0
rp11                             0
rs0                              0
rs1                              0
rs2                              0
rs3                            0.5
rs4                              0
rs5                              0
rs6                              1
rs7                              0
rs9                              0
rs10                             0
rs11                             0
tf                              26
t1                               4
t0                               0
t2                              18
t3                              25
ti                               0
t4                               9
t5                              21
t6                               0
t7                               3
t9                              24
t10                              9
t11                             17
```