

Programação Linear - análise de sensibilidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

5 de novembro de 2020

Análise de sensibilidade

antes

- Até aqui, assumimos que os dados não eram alteráveis.
- Na realidade, os dados podem não estar totalmente correctos, ou podemos querer avaliar se deveremos actuar para os alterar.

Guião

- Após determinar a solução óptima, queremos analisar como é que a solução óptima varia quando varia o valor de um dado (passaremos a tratá-lo como um parâmetro),
- ou seja, analisar a sensibilidade da solução óptima ao parâmetro.
- Parâmetros a analisar: quantidade de recurso disponível e coeficiente da função objectivo.

depois

- Os *solvers* de programação linear produzem relatórios que ajudam a efectuar a análise de sensibilidade.

- Resolvendo o seguinte modelo com um *solver* de PL:

```
max: 30x1 + 20x2 + 10x3;  
restricao1: 1x1 + 1x2 + 2x3 <= 40;  
restricao2: 2x1 + 2x2 + 1x3 <= 150;  
restricao3: 2x1 + 1x2 <= 20;
```

- obtém-se o seguinte relatório com a solução óptima:

Objective	
Variables	result
	500
x1	0
x2	20
x3	10

- Para além de conhecer a solução óptima, fazer 20 unidades da actividade 2 e 10 unidades da actividade 3, com vendas de 500,
- podemos querer saber ...

Questões pós-optimização

- Se a quantidade do recurso 1 variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- A variação seria igual dentro de que limites de variação do recurso?
- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

- *Análise pós-optimização* é uma designação alternativa de análise de sensibilidade.

Para além de determinarem a solução óptima do problema,

- os *solvers* de PL produzem *Relatórios de análise de sensibilidade* com informação para responder a estas questões.

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- Objectivo da análise de sensibilidade
- Alteração num termo independente b_i de uma restrição
 - análise matricial: alteração de b_i
- Conceito de preço-sombra
- Alteração num coeficiente c_j da função objectivo
- Apêndices
 - ① análise matricial: alteração de c_j (var. não-básica no quadro óptimo)
 - ② análise matricial: alteração de c_j (var. básica no quadro óptimo)

A análise de sensibilidade permite determinar:

- as alterações no quadro óptimo que decorrem de uma alteração no quadro inicial:
 - de um termo independente b_i da restrição i
 - de um coeficiente c_j da função objectivo
- os limites de variação desses elementos do quadro inicial sem alterar o conjunto de variáveis básicas da solução óptima.

Alteração do termo independente b_i

- O valor do termo independente b_i da restrição $A^i x \leq b_i$ indica frequentemente a quantidade de recurso disponível.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em comprar mais unidades de recurso.

Questões pós-otimização

- Se a quantidade do recurso variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- A variação seria igual dentro de que limites de variação do recurso?

Exemplo 1: espaço a duas dimensões

- Modelo, quadro óptimo e relatório Duals:

max: $12x_1 + 10x_2$;
tmaquina: $3x_1 + 2x_2 \leq 120$;
maodobra: $1x_1 + 2x_2 \leq 80$;
material: $1x_1 \leq 30$;

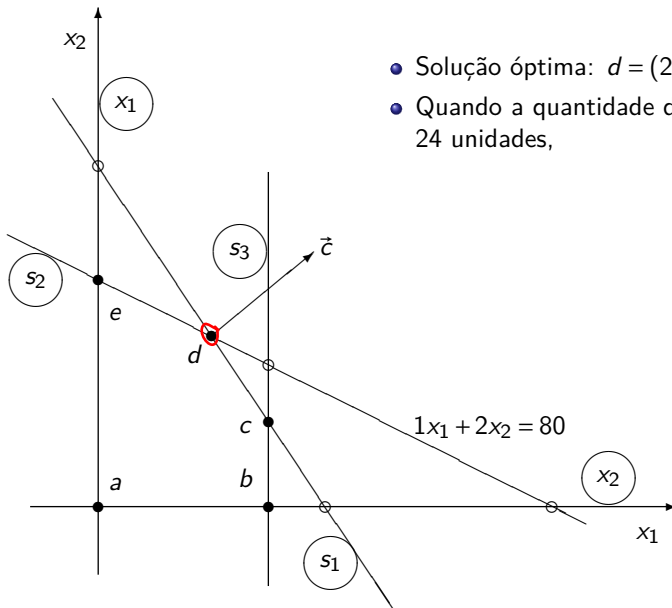
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Duals			
Variables	value	from	till
objective	540	540	540
tmaquina	3,5	80	140
maodobra	1,5	60	120
material	0	$-\infty$	$+\infty$
x_1	0	$-\infty$	$+\infty$
x_2	0	$-\infty$	$+\infty$

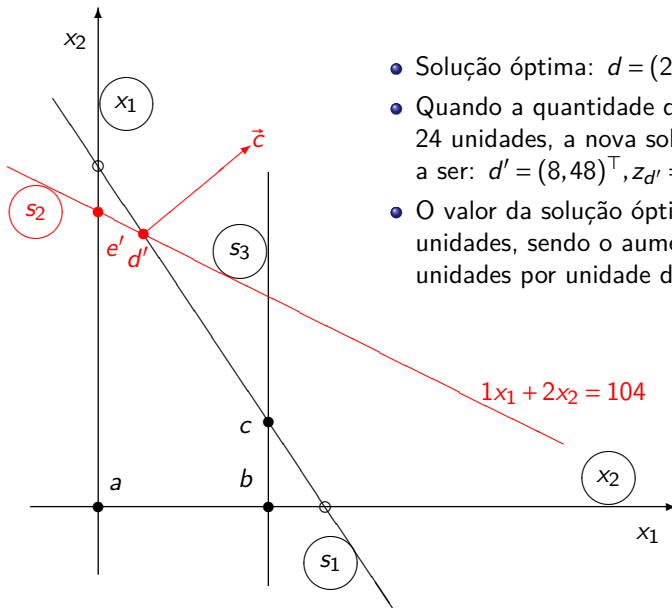
- Como varia o valor da solução óptima quando o valor do parâmetro maodobra aumenta do valor inicial, 80, para 104?
- Do ponto de vista geométrico, a variação de um parâmetro b_i do modelo traduz-se numa translação da recta associada à restrição.

Variação do valor do óptimo: interpretação geométrica

- Solução óptima: $d = (20, 30)^T$, $z_d = 540$.
- Quando a quantidade de recurso aumenta 24 unidades,

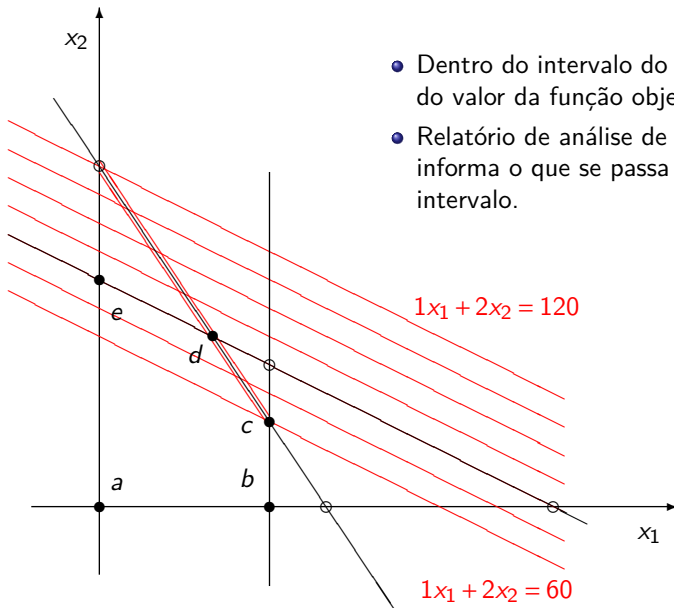


Variação do valor do óptimo: interpretação geométrica



- Solução ótima: $d = (20, 30)^T$, $z_d = 540$.
- Quando a quantidade de recurso aumenta 24 unidades, a nova solução ótima passa a ser: $d' = (8, 48)^T$, $z_{d'} = 576$.
- O valor da solução ótima aumenta 36 unidades, sendo o aumento de 1.5 unidades por unidade de recurso.

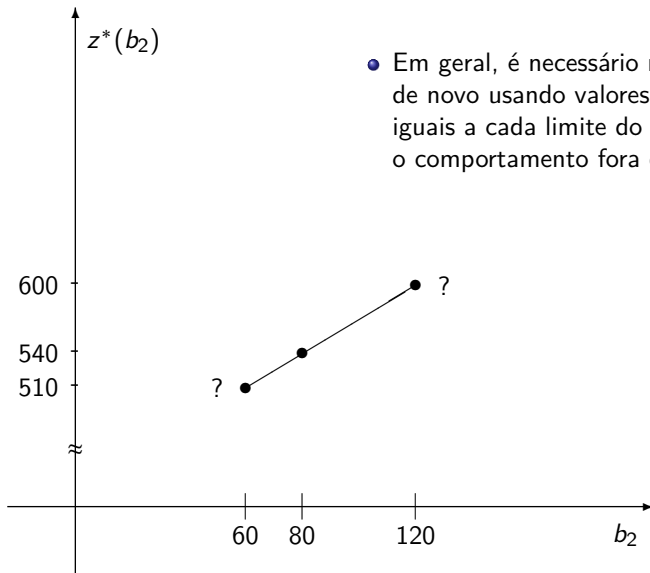
Limite variação parâmetro: interpretação geométrica



- Dentro do intervalo do $[60,120]$, a variação do valor da função objectivo é linear.
- Relatório de análise de sensibilidade só informa o que se passa dentro desse intervalo.

Variação do valor do óptimo em função do parâmetro b_2

- Em geral, é necessário resolver o problema de novo usando valores do parâmetro b_2 iguais a cada limite do intervalo para saber o comportamento fora do intervalo.



Conceito de preço-sombra de um recurso

Preço-sombra: valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso,

- medido pelo aumento do valor da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso.
- O valor é algo individual: diferentes agentes económicos podem atribuir valores diferentes a um dado recurso.
- Cada agente optimiza um modelo semelhante, mas com diferenças, e
- os valores dos relatórios de análise de sensibilidade resultam do modelo.

Preço-sombra de um recurso vs. custo de um recurso

- O custo de um recurso (preço no mercado) é uma coisa diferente.
- A comparação do preço-sombra e do custo ajuda a tomar decisões no âmbito da análise pós-optimização.

Exemplo 2: o *preço-sombra* no quadro simplex

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

O *preço-sombra* do recurso i é dado pelo custo reduzido $(c_B B^{-1})_i$

- $(c_B B^{-1})_i = \delta z / \delta(-s_i)$, i.e.,
- o valor da função objectivo aumenta $\delta z / \delta(-s_i)$ unidades por cada unidade adicional do recurso i ;
- acontece o oposto do que quando se aumenta a variável de folga s_i .

Exemplo 2: preço-sombra dos recursos 1 e 2

Quadro Ótimo		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	x_3	0	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	10
	s_2	0	$-3/2$	0	0	$-1/2$	1	$-3/2$	100
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	5	0	0	5	0	15	500

- O preço-sombra do recurso 1 é $\delta z / \delta(-s_1) = +5$ (o valor da função objectivo aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1).
- O preço-sombra do recurso 2 é $\delta z / \delta(-s_2) = +0$.
- Não há interesse em ter unidades adicionais de recurso 2: o aumento do recurso 2 não aumenta o valor da função objectivo, só aumenta a folga s_2 .

Relatório *Duals* (vamos ver que há um *problema dual*)

- A coluna *value* apresenta os valores da linha da função objectivo do quadro simplex:
 - $\{x_1, \dots, x_3\} \leftrightarrow$ variáveis de folga do dual (de facto, são os valores simétricos, porque o *LPSolve* apresenta o vector $c - c_B B^{-1} A$).
 - $\{\text{recurso1}, \dots, \text{recurso3}\} \leftrightarrow$ variáveis de decisão do dual ($c_B B^{-1}$).

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

- O relatório *Duals* indica que o preço-sombra do recurso 1 é 5.

Relatório *Duals*: interpretação

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Relativamente ao recurso 1:

- quando a quantidade de recurso 1 (b_1) varia desde 20 até 240,
- o valor do óptimo da função obj. é $500 + 5(b_1 - 40), \forall b_1 \in [20, 240]$,
- e as variáveis básicas óptimas continuam a ser x_3, s_2 e x_2 .

Análise matricial: alteração de b_i

Quais os vectores / matrizes que sofrem alterações no quadro óptimo?

- Quando há uma alteração de um elemento do vector b (vector dos termos independentes das restrições),
- as únicas alterações no quadro óptimo são no vector $B^{-1}b$ e no elemento $c_B B^{-1}b$ (ver quadros no diapositivo seguinte).
- Lembrete: a matriz B é a submatriz de $[A \mid I]$ com as colunas das variáveis básicas:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline & 2 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{|ccc|} \hline 10 & 0 & 20 \\ \hline \end{array}$$

- O vector c_B tem os coeficientes do vector c das mesmas variáveis.

Exemplo 2

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Ótimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

B^{-1}	$\tilde{0}$
$c_B B^{-1}$	1

*

A	I	b
$-c$	$\tilde{0}$	0

=

=

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

Exemplo 2: análise da variação de b_1 (passa a ser $40 + \alpha$)

$$b_{ant} = \begin{bmatrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad b_{novo} = \begin{bmatrix} 40 + \alpha \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Novo vector $B^{-1}b_{novo}$:

$$B^{-1}b_{novo} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 + \alpha \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + \alpha/2 \\ 100 - \alpha/2 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Novo valor de $c_B B^{-1}b_{novo}$:

$$c_B B^{-1}b_{novo} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 40 + \alpha \\ 150 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 + 5\alpha \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: quadro óptimo quando há uma variação de b_1

Quadro Inicial		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	s_1	0	1	1	2	1	0	0	$40 + \alpha$
	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0
Quadro Óptimo		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	$10 + \alpha/2$
	s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	$100 - \alpha/2$
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	5	0	0	5	0	15	$500 + 5\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação de α , i.e., enquanto todos os elementos de $B^{-1}b_{\text{novo}}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo no lado direito do quadro, e é necessário usar o simplex dual [veremos depois] para determinar o novo quadro óptimo.

Exemplo 2: determinação dos limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$B^{-1}b_{\text{nov}} = \begin{bmatrix} 10 + \alpha/2 \\ 100 - \alpha/2 \\ 20 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} \alpha \geq -20 \\ \alpha \leq 200 \end{cases}$$

ou seja,

$$-20 \leq \alpha \leq 200.$$

- Limites de variação de b_1 (no quadro inicial, $b_1 = 40$):

$$40 - 20 \leq b_1 \leq 40 + 200,$$

ou seja,

$$20 \leq b_1 \leq 240.$$

- Estes são os valores apresentados no relatório *Duals*.

Alteração num coeficiente da função objectivo

- O valor do coeficiente c_j da função objectivo está frequentemente relacionado com o preço de venda ou com o lucro associado a uma actividade.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em alterá-lo para a actividade se tornar atractiva.

Questões pós-optimização

- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

Exemplo 1: espaço a duas dimensões

- Modelo, quadro óptimo e relatório Objective:

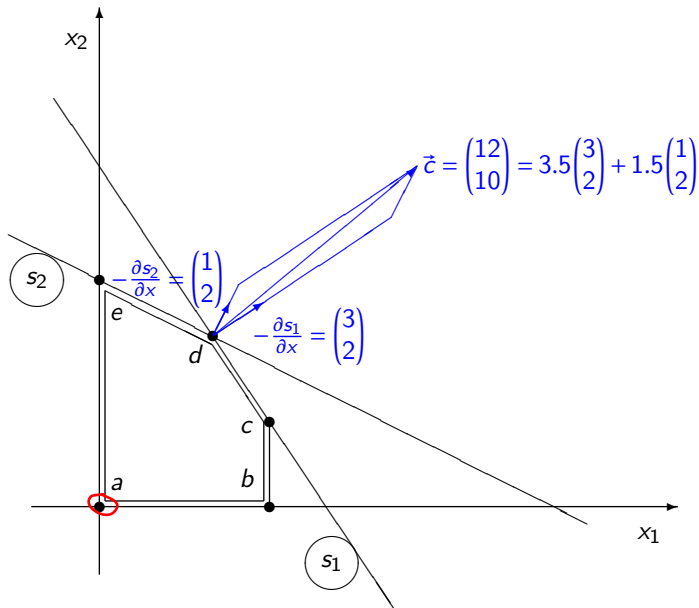
max: $12x_1 + 10x_2$;
tmaquina: $3x_1 + 2x_2 \leq 120$;
maodobra: $1x_1 + 2x_2 \leq 80$;
material: $1x_1 \leq 30$;

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

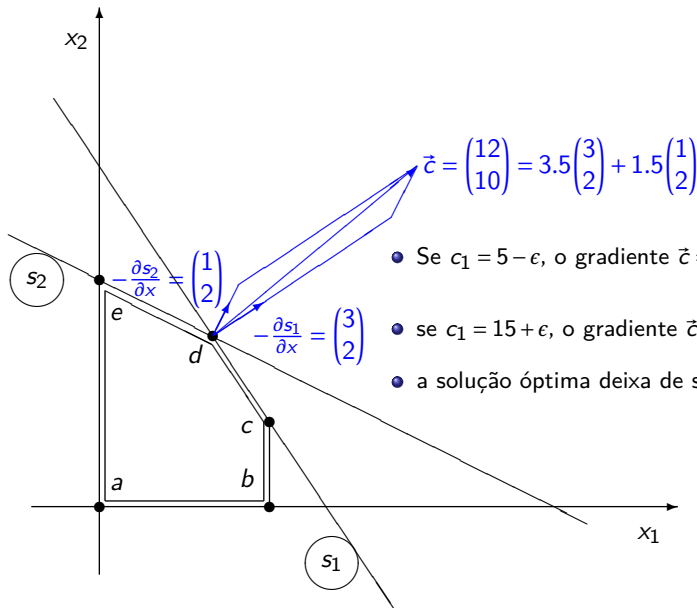
Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	540	540	540	540
x_1	5	15	$-\infty$	0
x_2	8	24	$-\infty$	0

- Porque é que a solução óptima muda se o valor do coeficiente c_1 estiver fora do intervalo $[5, 15]$?
- Do ponto de vista geométrico, a alteração de um coeficiente da função objectivo traduz-se numa alteração da direcção do vector gradiente.

Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo

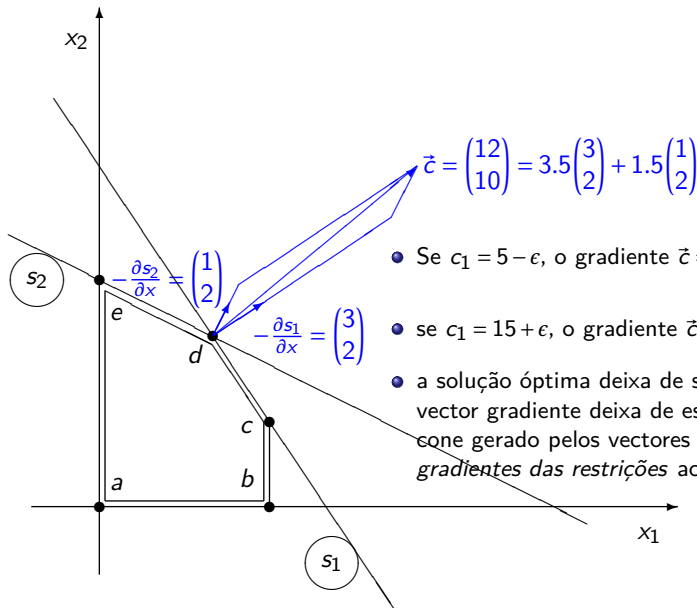


Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo



- Se $c_1 = 5 - \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 - \epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$, ou
- se $c_1 = 15 + \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 15 + \epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$,
- a solução óptima deixa de ser d , porque

Exemplo 1: alteração de um coeficiente da f. objectivo



- Se $c_1 = 5 - \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 - \epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$, ou
- se $c_1 = 15 + \epsilon$, o gradiente $\vec{c} = \begin{pmatrix} 15 + \epsilon \\ 10 \end{pmatrix}$,
- a solução óptima deixa de ser d , porque o vector gradiente deixa de estar contido no cone gerado pelos vectores simétricos dos gradientes das restrições activas em d .

Interpretação da informação do Relatório:

- Não há alteração das actividades atractivas (variáveis básicas na solução óptima) se todos os coeficientes da função objectivo pertencerem ao intervalo definido pelas colunas **from** e **till**.

Exemplo 2:

- Os coeficientes da função objectivo são $(c_1, c_2, c_3) = (30, 20, 10)$.

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- A análise matricial, usando a mesma metodologia, é apresentada nos Apêndices 1 e 2 (será aplicada num exercício das TP).

Exemplo 2: caso de var. não-básica no quadro óptimo

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_1 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 se o coeficiente c_1 for menor ou igual a 35.
- Acima desse valor, a variável não-básica x_1 tornar-se-á atractiva para entrar na base, e é necessário usar o algoritmo simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.
- Ver informação adicional no Apêndice 1.

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Exemplo 2: caso de variável básica no quadro ótimo

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_3 :

- A solução ótima terá como variáveis básicas ótimas x_3, s_2 e x_2 se o coeficiente c_3 pertencer ao intervalo $[0, 20]$.
- Se o valor for inferior a 0, a actividade x_3 deixa de ser atractiva.
- Se o valor for superior a 20, a actividade x_3 permanece atractiva, mas a solução ótima terá outras variáveis básicas.
- Ver informação adicional no Apêndice 2.

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- O conceito de preço-sombra é um conceito fundamental.
- Os recursos mais críticos são os que têm maior preço-sombra.
- A análise de sensibilidade permite avaliar alternativas ao cenário actual, e ajuda em processos de decisão pós-optimização;
- permite evitar ter de resolver novamente o problema com novos valores dos parâmetros.
- A análise de sensibilidade à variação simultânea de vários parâmetros pode ser feita com análise matricial.
- A análise de sensibilidade dos elementos a_{ij} da matriz A é mais complexa.

- 1 Análise matricial das alterações de c_j (Variável não-básica no quadro óptimo)
- 2 Análise matricial das alterações de c_j (Variável básica no quadro óptimo)
- 3 Identificação da variável que entra na base quando há alteração do coeficiente de uma variável básica para além dos limites de variação
- 4 Significado do elemento **from value**

1. Alteração de c_j : quais as alterações no quadro óptimo?

- Há alterações nas matrizes e nos vectores do quadro óptimo que envolvem os coeficientes da função objectivo que se alteram nos dados iniciais.
- É necessário distinguir 2 casos:

Caso I: Variável é **não-básica** no quadro óptimo

- só se altera um elemento do vector c ,
- e só há alterações no vector $c_B B^{-1} A - c$ do quadro final;

Caso II: Variável é **básica** no quadro óptimo

- alteram-se um elemento do vector c e um elemento do vector c_B (que é construído a partir de c),
- e há alterações nos vectores $c_B B^{-1} A - c$, $c_B B^{-1}$ e $c_B B^{-1} b$ do quadro final.

1. Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Ótimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

B^{-1}	$\tilde{0}$
$c_B B^{-1}$	1

*

A	I	b
$-c$	$\tilde{0}$	0

=

=

$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$

1. Exemplo: variação de c_1

- Como a actividade 1 não é atractiva, interessa analisar o aumento do valor do coeficiente c_1 , que passa a ser igual a $30 + \alpha$,

Caso I: Variável x_1 é não-básica no quadro óptimo

$$c_{ant} = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$c_{novo} = \begin{bmatrix} 30 + \alpha & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Novo vector $c_B B^{-1} A - c_{novo}$:

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} A - c_{novo} &= c_B B^{-1} A - c_{novo} + c_{ant} - c_{ant} = \\ &= (c_B B^{-1} A - c_{ant}) + (c_{ant} - c_{novo}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} A - c_{novo} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5 - \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_1

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30 + \alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5 - \alpha$	0	0	5	0	15	500

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação de α , i.e., enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{\text{novo}}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

1. Determinação dos limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$c_B B^{-1} A - c_{\text{nov}} = \boxed{5 - \alpha \quad 0 \quad 0}$$

$$\{ 5 - \alpha \geq 0 \quad \{ \alpha \leq 5$$

ou seja,

$$-\infty \leq \alpha \leq 5.$$

- Limites de variação de c_1 :

$$-\infty \leq c_1 \leq 30 + 5,$$

ou seja,

$$-\infty \leq c_1 \leq 35.$$

Estes são os valores apresentados no relatório *Objective*.

2. Exemplo: variação de c_3

- Como a actividade 3 é atractiva, interessa analisar o decremento do valor do coeficiente c_3 , que passa a ser igual a $10 - \alpha$,

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

$$c_{ant} = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$c_{novo} = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 10 - \alpha \end{bmatrix}$$

$$c_{B_{ant}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$c_{B_{novo}} = \begin{bmatrix} 10 - \alpha & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

(continua)

2. Exemplo: variação de c_3 (cont.)

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1}$:

$$\begin{aligned} c_{B_{novo}} B^{-1} &= \begin{bmatrix} 10 - \alpha & 0 & 20 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5 - \alpha/2 & 0 & 15 + \alpha/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo}$ (após efectuar todos os cálculos):

$$c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} = \begin{bmatrix} 5 + \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_3

Quadro Inicial		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	30	-20	$-(10 - \alpha)$	0	0	0	0
Quadro Óptimo		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
	s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	$5 + \alpha/2$	0	0	$5 - \alpha/2$	0	$15 + \alpha/2$	$500 - 10\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação de α , i.e., enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{\text{novo}}$ e de $c_{B_{\text{novo}}} B^{-1}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

2. Determinação dos limites de variação de α

- Limites de variação de α :

$$c_{B_{\text{nov}}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - c_{\text{nov}} = \begin{bmatrix} 5 + \alpha/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq \tilde{0}$$

$$c_{B_{\text{nov}}}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 - \alpha/2 & 0 & 15 + \alpha/2 \end{bmatrix} \geq \tilde{0}$$

$$\begin{cases} 5 + \alpha/2 \geq 0 \\ 5 - \alpha/2 \geq 0 \\ 15 + \alpha/2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \geq -10 \\ \alpha \leq 10 \\ \alpha \geq -30 \end{cases}$$

ou seja,

$$-10 \leq \alpha \leq 10.$$

- Limites de variação de c_3 :

$$10 - 10 \leq c_3 \leq 10 - (-10),$$

ou seja,

$$0 \leq c_3 \leq 20.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Objective*.

3. Aumento do preço associado à actividade x_3

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $20 + \epsilon$ (i.e., $\alpha = -10 - \epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	-30	-20	$-(10 - \alpha)$	0	0	0	0
Quadro Óptimo		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
	s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
	x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
	z	1	$5 + \alpha/2$	0	0	$5 - \alpha/2$	0	$15 + \alpha/2$	$500 - 10\alpha$

3. Decréscimo do preço associado à actividade x_3

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $0 - \epsilon$ (i.e., $\alpha = 10 + \epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial		z	x_1	x_2	x_3		s_1	s_2	s_3	
	s_1	0	1	1	2		1	0	0	40
	s_2	0	2	2	1		0	1	0	150
	s_3	0	2	1	0		0	0	1	20
	z	1	30	-20	$-(10 - \alpha)$		0	0	0	0
Quadro Óptimo		z	x_1	x_2	x_3		s_1	s_2	s_3	
	x_3	0	-1/2	0	1		1/2	0	-1/2	10
	s_2	0	-3/2	0	0		-1/2	1	-3/2	100
	x_2	0	2	1	0		0	0	1	20
	z	1	$5 + \alpha/2$	0	0		$5 - \alpha/2$	0	$15 + \alpha/2$	$500 - 10\alpha$

4. Significado do elemento **from value**

- No Relatório *Objective*, o elemento da coluna **from value** só é significativo para variáveis não-básicas na solução óptima.
- Quando x_1 é atractiva (coluna pivô), entra na base, e toma o valor $20/2 = 10$.
- É o valor da menor razão positiva (a linha pivô é a da variável básica x_2 (ver diapositivo seguinte).

Objective				
Variables	from	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

4. Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30 + \alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	$-1/2$	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	10
s_2	0	$-3/2$	0	0	$-1/2$	1	$-3/2$	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5 + \alpha$	0	0	5	0	15	500

nota: coluna do quadro simplex mostra alterações em $B^{-1}b$

O novo vector $B^{-1}b_{novo}$ pode ser expresso em função do vector anterior $B^{-1}b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} B^{-1}b_{novo} &= B^{-1}b_{novo} + B^{-1}b_{ant} - B^{-1}b_{ant} = \\ &= B^{-1}b_{ant} + B^{-1}(b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

As alterações produzidas em $B^{-1}b_{ant}$ seguem a alteração existente na coluna da variável de folga associada ao recurso que varia (neste exemplo, a coluna de s_1).

$$\begin{aligned} B^{-1}b_{novo} &= \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nota: preço-sombra mostra alteração do valor de $c_B B^{-1} b$

O novo valor da função objectivo $c_B B^{-1} b_{novo}$ pode ser expresso em função do valor anterior $c_B B^{-1} b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} b_{novo} &= c_B B^{-1} b_{novo} + c_B B^{-1} b_{ant} - c_B B^{-1} b_{ant} = \\ &= c_B B^{-1} b_{ant} + c_B B^{-1} (b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

As alterações produzidas em $c_B B^{-1} b_{ant}$ seguem o preço-sombra associado ao recurso que varia (neste exemplo, o recurso associado à variável de folga s_1).

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} b_{novo} &= \boxed{500} + \boxed{5 \quad 0 \quad 15} * \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \boxed{500} + \alpha \boxed{5} \end{aligned}$$

Fim