Transportes - algoritmo simplex de redes

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

27 de setembro de 2020

Transportes

antes

- O algoritmo simplex resolve problemas de programação linear.

Guião

- O problema de transportes é um caso particular do problema de programação linear em que o modelo é definido num grafo (rede).
- O algoritmo para o problema de transportes é uma especialização do algoritmo simplex que tira partido dessa estrutura em rede.
- A sua implementação, usando estruturas de dados adequadas, pode traduzir-se em resoluções muito mais rápidas.
- Vamos ver as operações básicas do algoritmo simplex de redes.

depois

- Aplicaremos o algoritmo em vários tipos de grafos (redes).

Problema de Transportes em Rede: modelo geral

- Dado um grafo $G = (V, A)$, pretende-se:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{suj. a} & -\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_j, \ \forall j \in V & (1) \\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A & (2)
\end{array}
$$

Variáveis de decisão:

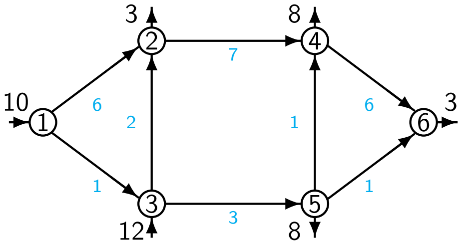
- x_{ij}: fluxo de *um único tipo de entidades* no arco orientado (i,j);

Dados:

- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- b_j: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j;
- u_{ij}: capacidade do arco orientado (i,j).

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo.*
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade.*

Exemplo (arcos sem capacidade)

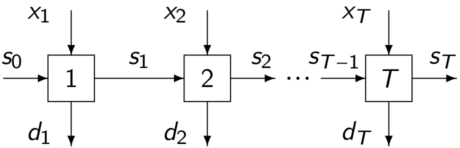


- Cada coluna A_{ij} tem apenas dois elementos não nulos, um $+1$ na linha i (origem do arco) e um -1 na linha j (destino do arco).

	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{32}	x_{35}	x_{46}	x_{54}	x_{56}		
vért.1	1	1							=	10
vért.2	-1		1	-1					=	-3
vért.3		-1		1	1				=	12
vért.4			-1			1	-1		=	-8
vért.5					-1		1	1	=	-8
vért.6						-1		-1	=	-3
min	6	1	7	2	3	6	1	1		

Exemplo: problema dos lotes de produção

- Objectivo: determinar a dimensão dos lotes a fabricar em cada período, dentro de um horizonte de planeamento, de modo a minimizar a soma dos custos de produção e dos custos de armazenagem, satisfazendo a procura em cada período.



- Em cada período j, se o número de unidades disponíveis (*i.e.*, as unidades produzidas no período, x_j, mais as existentes em stock, s_{j-1}) for superior à procura nesse período, d_j, as unidades remanescentes, s_j, podem ser armazenadas em stock para entrega em períodos subsequentes.

Exemplo: modelo de programação linear

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{T} (c_j x_j + h_j s_j) \\
\text{suj. a} \quad & x_j + s_{j-1} - s_j = d_j \ , \ j = 1, \ldots, T \\
& 0 \le x_j \le x_j^{max} \ , \ j = 1, \ldots, T \\
& 0 \le s_j \le s_j^{max} \ , \ j = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Variáveis de decisão:

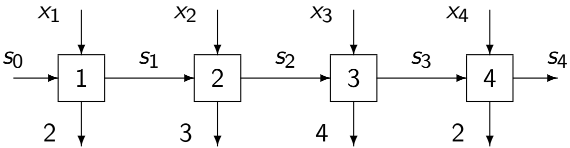
- x_j : número de unidades produzidas no período j,
- s_j : stock existente após o período j.

Dados:

- T : número de períodos do horizonte de planeamento
- d_j : procura existente no período j
- c_j : custo unitário de produção dos artigos no período j
- h_j : custo unitário de posse de inventário no período j
- x_j^{max} : número máximo de unidades produzidas no período j
- s_j^{max} : nível máximo de stock no período j
- s_0 e s_n : stocks inicial e final, respectivamente

Exemplo: dados de um problema de lotes de produção

- Horizonte de planeamento (T): 4 períodos



- Procura em cada período de 2, 3, 4 e 2, respectivamente.
- Capacidade máxima de produção, x_j^{max} : 4 unidades em cada período.
- Nível máximo de stock, s_{max} : 2 unidades.
- Custos unitários de armazenagem, h_j : 1 U.M./ artigo x período.
- Custos de produção: custo variável proporcional ao número de artigos, p_j.
- Valores dos coeficientes de custo de produção:

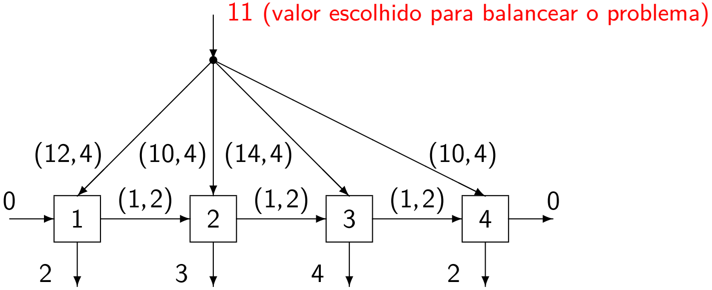
j	1	2	3	4
p_j	12	10	14	10

Exemplo: modelo de transporte em rede

Rede com capacidades associadas aos arcos:

- valores associados aos arcos, (c_{ij}, u_{ij}), representam o custo unitário de transporte e a capacidade do arco, respectivamente,
- valores associados aos vértices representam ofertas e procuras.

Exemplo:



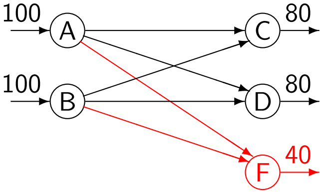
- Problema balanceado (soma das ofertas = soma dos procuras)

Propriedade dos modelos em rede: balanceamento

Condição necessária para o modelo ser válido:

- Soma das ofertas = soma dos consumos, *i.e.*, $\sum_{j \in V} b_j = 0$.

- Se (oferta > consumo), criar destino fictício que absorva excesso.
- Exemplo:



Destino fictício F absorve excesso. Geralmente, custos unitários de transporte dos novos arcos são nulos ($i.e.$, $c_{AF} = c_{BF} = 0$).

- Se (oferta < consumo), problema é impossível, porque não é possível satisfazer o consumo (assumindo que não é possível recorrer a ofertas externas ao modelo).

Propriedade que resulta do balanceamento

O número de equações linearmente independentes é $|V|-1$,

- porque qualquer uma das $|V|$ equações pode ser expressa como uma combinação linear das restantes.

- Exemplo:

	x_{AC}	x_{AD}	x_{AF}	x_{BC}	x_{BD}	x_{BF}	
A	1	1	1				= 100
B				1	1	1	= 100
C	-1			-1			= -80
D		-1			-1		= -80
F			-1			-1	= -40
min	c_{AC}	c_{AD}	c_{AF}	c_{BC}	c_{BD}	c_{BF}	

- A equação de F é igual ao simétrico da soma das equações de A, B, C e D.

- O número de variáveis básicas é $|V|-1$.

Caracterização das soluções básicas (base ≡ árvore)

- O grafo associado a uma solução básica é uma *árvore*$^{(*)}$ que suporta todos os vértices.

Uma *árvore de suporte* é um grafo com as seguintes propriedades $^{(**)}$:

- ***ligado*** (existe um caminho entre cada par de vértices),
- **sem ciclos**,
- com um **número de arcos = número de vértices -1.**

Independência e dependência linear num grafo

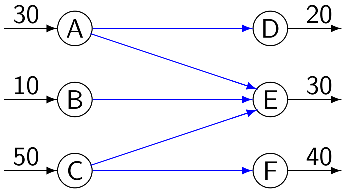
- Os arcos de uma árvore correspondem a um conjunto de vectores linearmente independentes (base) do modelo de programação linear.
- Os arcos de um ciclo correspondem a um conjunto de vectores linearmente dependentes: um arco do ciclo pode ser expresso como uma combinação linear dos restantes arcos.

(*) Uma árvore é um grafo com arcos não-orientados (ou arestas); iremos considerar os arcos sem a sua orientação.

(**) Pode ser provado que quaisquer 2 das propriedades caracterizam uma árvore e implicam a terceira.

Exemplo: escolhida uma base, a solução é única

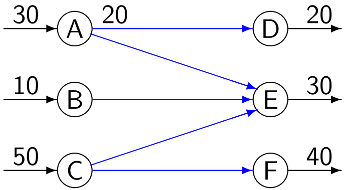
- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.



- A solução do sistema de equações em ordem às variáveis básicas é uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis;
- as variáveis não-básicas são iguais a 0.

Exemplo: escolhida uma base, a solução é única

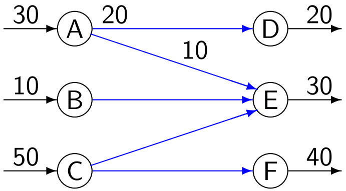
- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.



- A solução do sistema de equações em ordem às variáveis básicas é uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis;
- as variáveis não-básicas são iguais a 0.

Exemplo: escolhida uma base, a solução é única

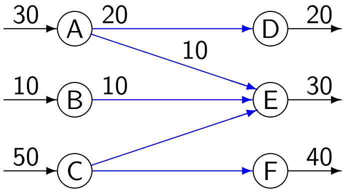
- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.



- A solução do sistema de equações em ordem às variáveis básicas é uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis;
- as variáveis não-básicas são iguais a 0.

Exemplo: escolhida uma base, a solução é única

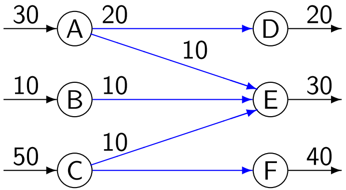
- Conjunto das variáveis básicas $\mathcal{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathcal{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathcal{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.



- A solução do sistema de equações em ordem às variáveis básicas é uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis;
- as variáveis não-básicas são iguais a 0.

Exemplo: escolhida uma base, a solução é única

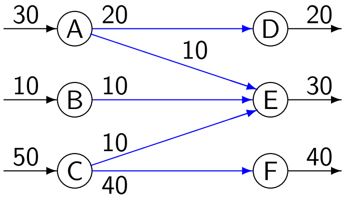
- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.



- A solução do sistema de equações em ordem às variáveis básicas é uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis;
- as variáveis não-básicas são iguais a 0.

Exemplo: escolhida uma base, a solução é única

- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.



- A solução do sistema de equações em ordem às variáveis básicas é uma solução básica (única) do sistema (determinado) com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis;
- as variáveis não-básicas são iguais a 0.

Algoritmo (simplex) de redes

Algoritmo

Obter uma solução básica inicial
Enquanto (solução básica não óptima)
mudar para uma solução básica adjacente melhor

Agora vamos ver:

Operações básicas do algoritmo simplex de redes:

1. teste de optimalidade: existe alguma solução admissível adjacente à solução actual com melhor valor de função objectivo?
2. pivô: mudança de uma base (vértice) para uma base adjacente.

Aulas seguintes:

Vamos aplicar o algoritmo na resolução completa de exemplos:

- Transportes em grafos bipartidos
- Transportes em redes (ainda sem limites superiores)
- Transportes em redes com limites superiores

Teste de optimalidade em redes

Um vértice não é óptimo se existir

- uma *variável não-básica atractiva*, cujo aumento melhore o valor da função objectivo.
- caso contrário, a solução é óptima.

- Podemos identificar se existe alguma variável não-básica ij atractiva
- calculando os valores de δ_{ij} de todas as variáveis não-básicas ij
- ($\equiv$ aos coef. da linha da função objectivo num quadro simplex).

- O cálculo dos valores de δ_{ij} é feito com o método dos multiplicadores.

Método dos multiplicadores

Multiplicadores são valores associados aos vértices:

- há um multiplicador u_j associado a cada vértice j, $\forall j \in V$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para os arcos (i,j) básicos, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$

2. Para os arcos (i,j) não-básicos, calcular:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$

Output do método dos multiplicadores:

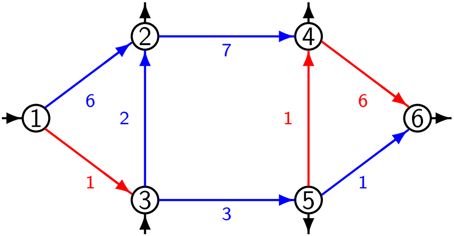
- os δ_{ij} de todos os arcos não-básicos.

Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

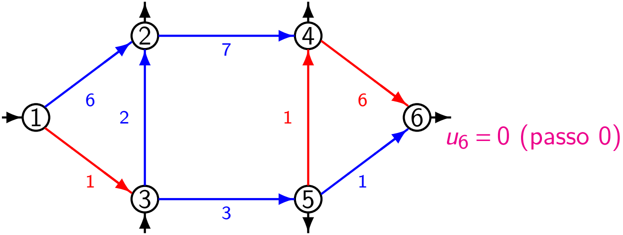


Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

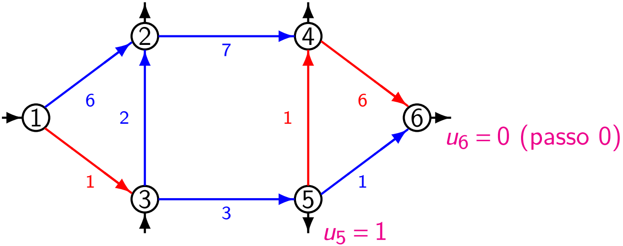


Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

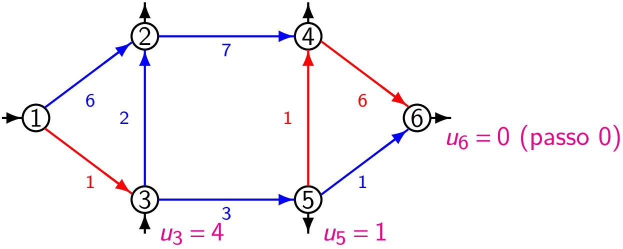


Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

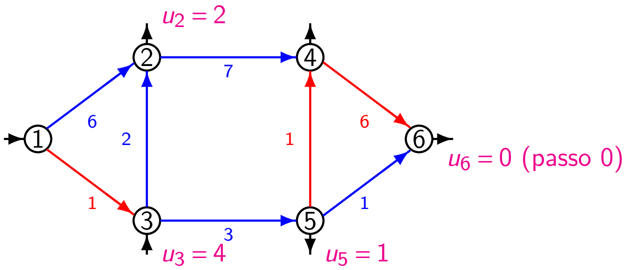


Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

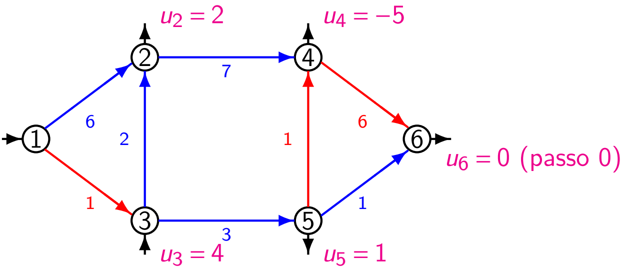


Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

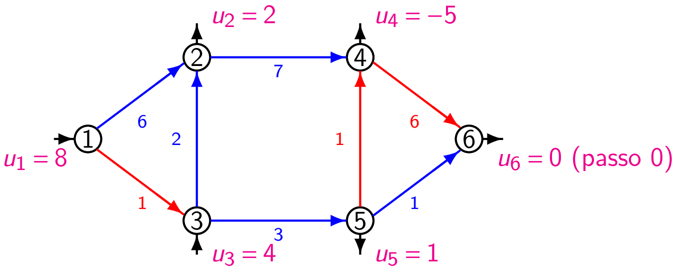


Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.



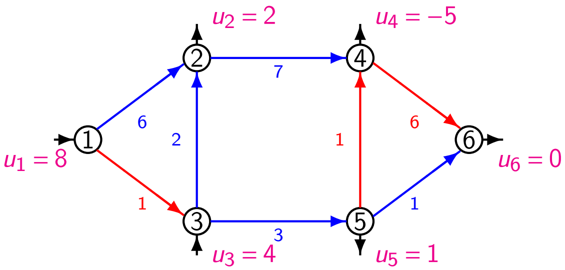
- No passo 2, iremos comparar o c_{ij} do arco não-básico (i,j) com a diferença de potencial entre os vértices i e j, *i.e.*, $(u_i - u_j)$.

Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passo 2

- O arco não-básico (i, j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

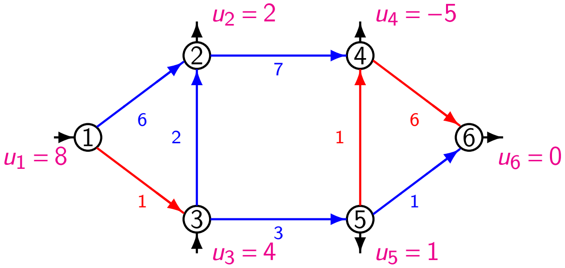
- $\delta_{13} =$
- $\delta_{54} =$
- $\delta_{46} =$



- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

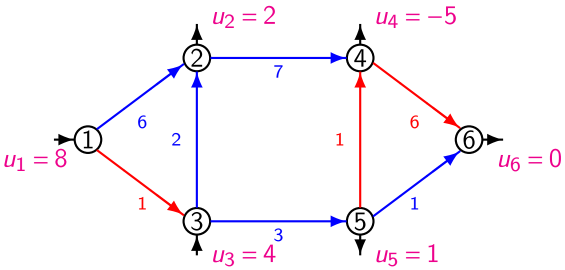
- $\delta_{13} = 1 - (8-4) = -3$: arco atractivo
- $\delta_{54} =$
- $\delta_{46} =$



- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

- $\delta_{13} = 1 - (8-4) = -3$: arco atractivo
- $\delta_{54} = 1 - (1+5) = -5$: arco atractivo
- $\delta_{46} =$

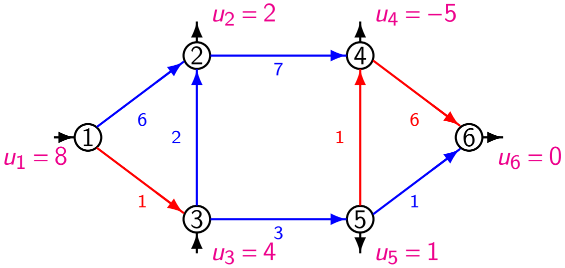


Exemplo 1: mét. multiplicadores: aplicação passo 2

- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

- $\delta_{13} = 1 - (8 - 4) = -3$: arco atractivo
- $\delta_{54} = 1 - (1 + 5) = -5$: arco atractivo
- $\delta_{46} = 6 - (-5 - 0) = 11$: arco não atractivo

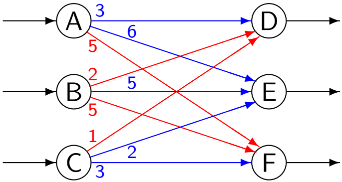


Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

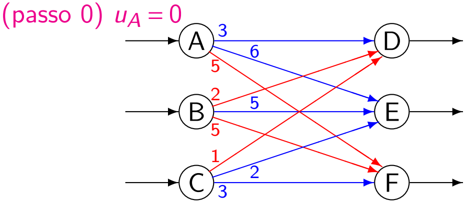


Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

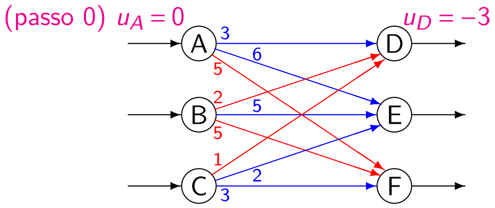
- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.



- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

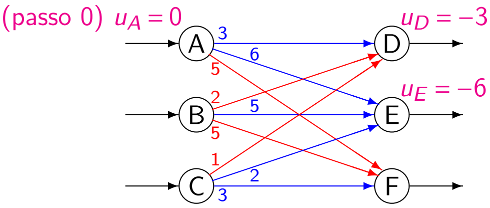
- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.



- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.

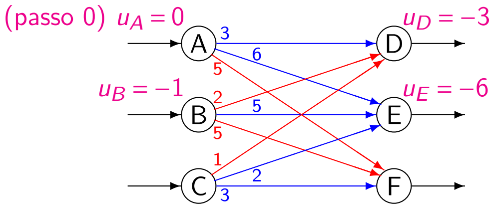


Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passos 0 e 1

- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

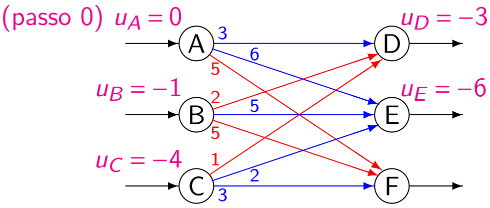
- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.



- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

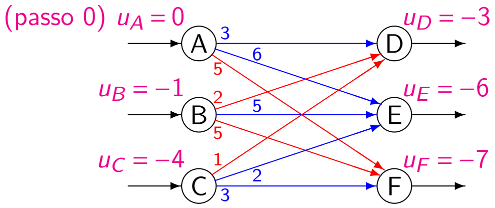
- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.



- O multiplicador u_j associado ao vértice j, $\forall j \in V$, pode ser interpretado como um **potencial** associado ao vértice.

Exemplo: árvore de arcos básicos a azul

- Valores associados a arcos são custos unitários de transporte c_{ij}.



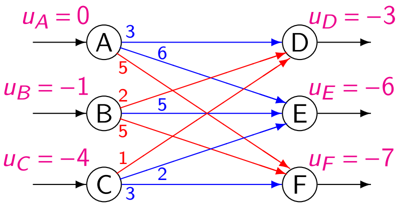
- No passo 2, iremos comparar o c_{ij} do arco não-básico (i,j) com a diferença de potencial entre os vértices i e j, *i.e.*, $(u_i - u_j)$.

Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passo 2

- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

- $\delta_{AF} =$
- $\delta_{BD} =$
- $\delta_{BF} =$
- $\delta_{CD} =$

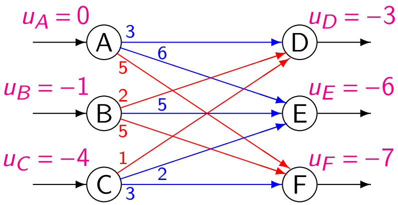


Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passo 2

- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

- $\delta_{AF} = 5-(0-(-7)) = -2$: arco atractivo
- $\delta_{BD} =$
- $\delta_{BF} =$
- $\delta_{CD} =$

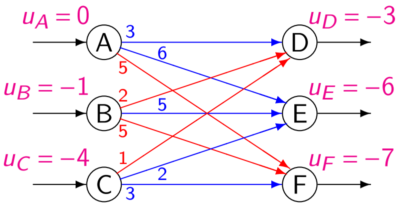


Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passo 2

- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

- $\delta_{AF} = 5 - (0 - (-7)) = -2$: arco atractivo
- $\delta_{BD} = 2 - (-1 - (-3)) = 0$: arco indiferente
- $\delta_{BF} =$
- $\delta_{CD} =$

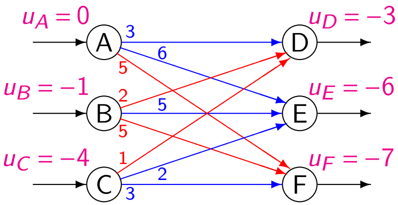


Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passo 2

- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

- $\delta_{AF} = 5-(0-(-7)) = -2$: arco atractivo
- $\delta_{BD} = 2-(-1-(-3)) = 0$: arco indiferente
- $\delta_{BF} = 5-(-1-(-7)) = -1$: arco não atractivo
- $\delta_{CD} =$



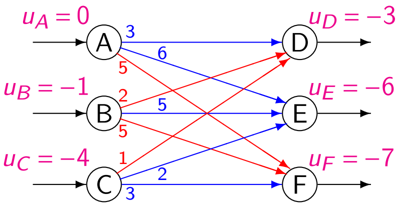
- Os δ_{ij} são os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex (... a bem dizer, são os simétricos...)

Exemplo 2: mét. multiplicadores: aplicação passo 2

- O arco não-básico (i,j) é atractivo se $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) < 0$.

Exemplo: arcos não-básicos a vermelho

- $\delta_{AF} = 5-(0-(-7)) = -2$: arco atractivo
- $\delta_{BD} = 2-(-1-(-3)) = 0$: arco indiferente
- $\delta_{BF} = 5-(-1-(-7)) = -1$: arco não atractivo
- $\delta_{CD} = 1-(-4-(-3)) = +2$: arco não atractivo



- Os δ_{ij} são os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex (... a bem dizer, são os simétricos...)

Os multiplicadores são variáveis duais!

Problema dual do problema de transporte em rede geral

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j \in V} b_j u_j \\ \text{suj. a} & u_i - u_j \leq c_{ij} \ , \ \forall (i,j) \in A \\ & u_j \text{ sem restrição de sinal} \end{array}$$

sendo u_j : variável dual associada à restrição do vértice $j \in V$

Exemplo:

	x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{32}	x_{35}	x_{46}	x_{54}	x_{56}			Variáveis duais
vért.1	1	1							=	b_1	u_1
vért.2	−1		1	−1					=	b_2	u_2
vért.3		−1		1	1				=	b_3	u_3
vért.4			−1			1	−1		=	b_4	u_4
vért.5					−1		1	1	=	b_5	u_5
vért.6						−1		−1	=	b_6	u_6
min	c_{12}	c_{13}	c_{24}	c_{32}	c_{35}	c_{46}	c_{54}	c_{56}			

Justificação do método dos multiplicadores

Passo 1: para cada variável básica x_{ij}, fazer: $u_i - v_j = c_{ij}$

- Qualquer solução deve obedecer ao teorema da folga complementar, *i.e.*, se a variável primal é positiva, a variável dual correspondente (*i.e.*, a variável de folga da restrição dual) deve ser nula;
- pela mesma razão, num quadro simplex, o coeficiente da linha da função objectivo de uma variável básica $j, c_B B^{-1} A_j - c_j = 0$.

Solução dual: $c_B B^{-1} = (u_1, \ldots, u_m)$.

Passo 2: para cada variável não-básica x_{ij}, calcular: $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - v_j)$

- Como cada coluna A_{ij} tem apenas 2 elementos diferentes de 0,
- o valor de $(c_B B^{-1}) A_{ij} - c_{ij} = u_i - v_j - c_{ij}$,
- que é simétrico de δ_{ij}, *i.e.*, $\delta_{ij} = -(c_B B^{-1}) A_{ij} + c_{ij}$

Nota: o uso é coerente: para minimizar, no método simplex, escolhe-se o coeficiente mais positivo; em redes, o mais negativo.

Pivô em redes

- Pivô no simplex: mudar de solução inicial → solução adjacente
- No movimento ao longo de uma aresta do poliedro do modelo de programação linear (de transportes) todas as variáveis não-básicas permanecem nulas, excepto uma **única** que aumenta de valor.

Das propriedades de uma árvore, sabemos que:

- Há 1 caminho (e 1 só) entre cada par de vértices. Porquê?
- Combinar 1 arco e 1 árvore dá origem a 1 (e 1 só) ciclo. Porquê?

- Os arcos do ciclo formam um conjunto linearmente dependente.

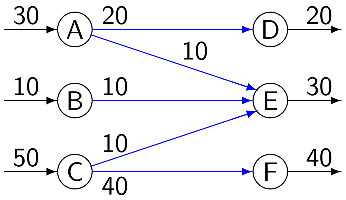
Pivô em redes: mudar os valores das variáveis ao longo do ciclo:

- A variável não-básica aumenta;
- as variáveis básicas que formam o ciclo vão alterar-se.

- As variáveis básicas fora do ciclo mantêm o mesmo valor.

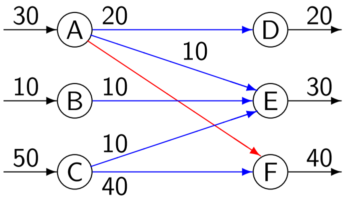
Pivô: exemplo 1

Exemplo de uma solução básica:



Pivô: exemplo 1

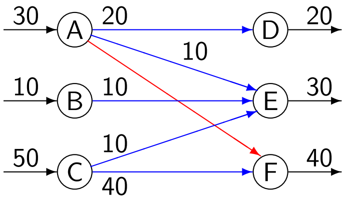
Exemplo de uma solução básica:



- Qual o ciclo que se forma quando se combina o arco da variável x_{AF} (não-básica) com a árvore?

Pivô: exemplo 1

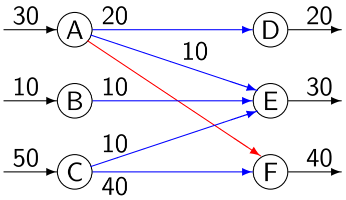
Exemplo de uma solução básica:



- Qual o ciclo que se forma quando se combina o arco da variável x_{AF} (não-básica) com a árvore?
- O arco (A, F) (variável não-básica) forma um ciclo com os arcos (C, F), (C, E) e (A, E) (das variáveis básicas).

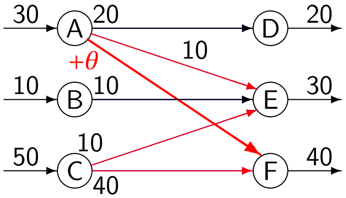
Pivô: exemplo 1

Exemplo de uma solução básica:

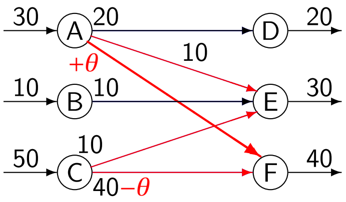


- Qual o ciclo que se forma quando se combina o arco da variável x_{AF} (não-básica) com a árvore?
- O arco (A, F) (variável não-básica) forma um ciclo com os arcos (C, F), (C, E) e (A, E) (das variáveis básicas).
- Quando a variável x_{AF} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

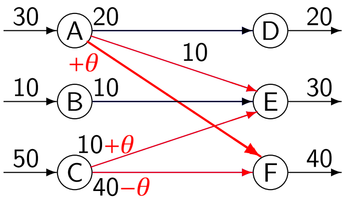
Pivô: exemplo 1



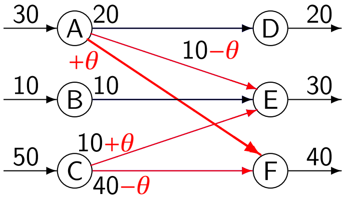
Pivô: exemplo 1



Pivô: exemplo 1

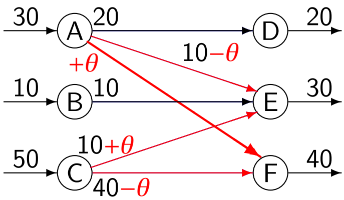


Pivô: exemplo 1

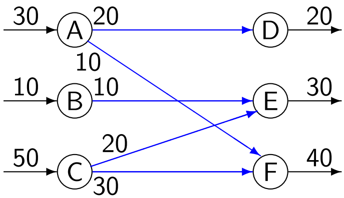


- Qual o valor máximo de θ?

Pivô: exemplo 1



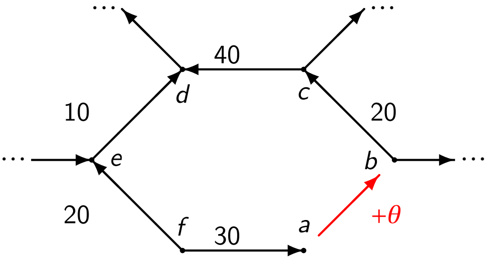
- Qual o valor máximo de θ? $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$



- A variável x_{AF} entra na base e sai a variável x_{AE}.

Pivô: exemplo 2

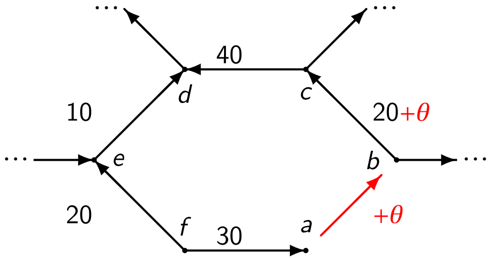
Exemplo: ciclo formado pelo arco da variável não-básica x_{ab} e os arcos (b, c), (c, d), (e, d), (f, e) e (f, a) da árvore (outros arcos da árvore omitidos).



- Quando a variável x_{ab} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

Pivô: exemplo 2

Exemplo: ciclo formado pelo arco da variável não-básica x_{ab} e os arcos (b, c), (c, d), (e, d), (f, e) e (f, a) da árvore (outros arcos da árvore omitidos).

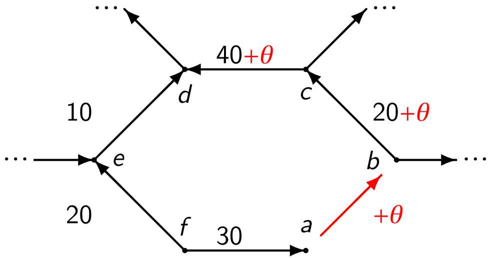


- Quando a variável x_{ab} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

- A soma das variações de fluxo de entrada e de saída deve ser nula,
- ou seja, o saldo dos fluxos que entram e saem em cada vértice permanece igual (ao valor de b_j do vértice).

Pivô: exemplo 2

Exemplo: ciclo formado pelo arco da variável não-básica x_{ab} e os arcos (b, c), (c, d), (e, d), (f, e) e (f, a) da árvore (outros arcos da árvore omitidos).

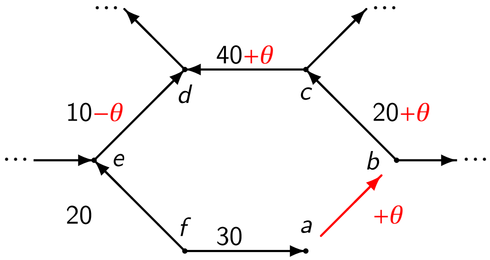


- Quando a variável x_{ab} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

- A soma das variações de fluxo de entrada e de saída deve ser nula,
- ou seja, o saldo dos fluxos que entram e saem em cada vértice permanece igual (ao valor de b_j do vértice).

Pivô: exemplo 2

Exemplo: ciclo formado pelo arco da variável não-básica x_{ab} e os arcos (b, c), (c, d), (e, d), (f, e) e (f, a) da árvore (outros arcos da árvore omitidos).

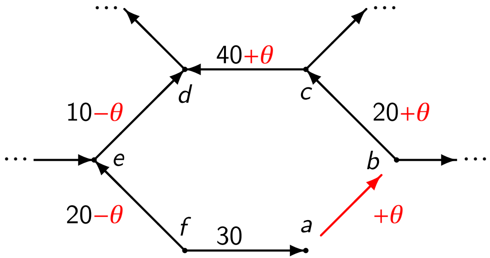


- Quando a variável x_{ab} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

- A soma das variações de fluxo de entrada e de saída deve ser nula,
- ou seja, o saldo dos fluxos que entram e saem em cada vértice permanece igual (ao valor de b_j do vértice).

Pivô: exemplo 2

Exemplo: ciclo formado pelo arco da variável não-básica x_{ab} e os arcos (b,c), (c,d), (e,d), (f,e) e (f,a) da árvore (outros arcos da árvore omitidos).

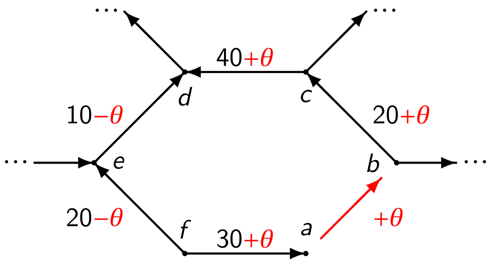


- Quando a variável x_{ab} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

- A soma das variações de fluxo de entrada e de saída deve ser nula,
- ou seja, o saldo dos fluxos que entram e saem em cada vértice permanece igual (ao valor de b_j do vértice).

Pivô: exemplo 2

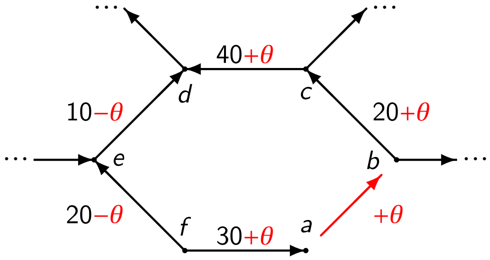
Exemplo: ciclo formado pelo arco da variável não-básica x_{ab} e os arcos (b, c), (c, d), (e, d), (f, e) e (f, a) da árvore (outros arcos da árvore omitidos).



- Quando a variável x_{ab} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

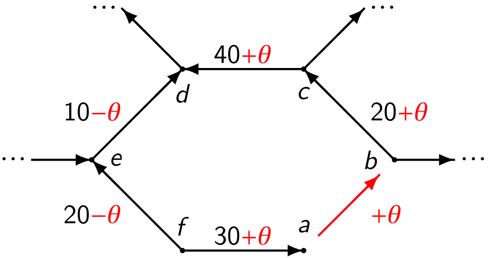
- A soma das variações de fluxo de entrada e de saída deve ser nula,
- ou seja, o saldo dos fluxos que entram e saem em cada vértice permanece igual (ao valor de b_j do vértice).

Pivô: exemplo 2

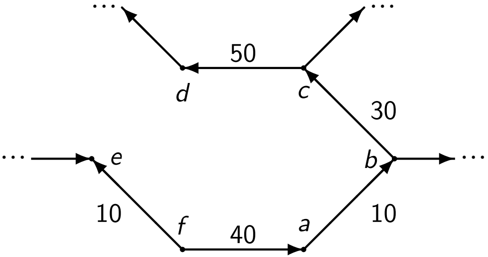


- Qual o valor máximo de θ?

Pivô: exemplo 2



- Qual o valor máximo de θ? $\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$



- A variável x_{ab} entra na base e sai a variável x_{ed}.

Conclusão

- A estrutura especial das redes permite, usando estruturas de dados adequadas, implementar as operações do método simplex de uma forma muito eficiente.
- Além disso, as operações são feitas com números inteiros, em vez de reais.
- Para isso, os *solvers* requerem que os dados (ofertas, procuras e custos) sejam inteiros, o que é sempre possível usando uma escala adequada.

Apêndices

1. Propriedade do poliedro do problema de transportes
2. Propriedade das soluções do problema de transporte

- Se todos os valores das ofertas, dos consumos e das capacidades forem inteiros (*i.e.*, o vector b), todos os vértices do poliedro do problema de transportes em rede são soluções inteiras.

- Esta propriedade decorre do facto de a matriz A do problema de transportes ser totalmente unimodular.

Definição (Propriedade da total unimodularidade)

Uma matriz A é totalmente unimodular (TU) se o determinante de qualquer submatriz quadrada de A for igual a ± 1 ou 0. Esta propriedade implica que todos os elementos da matriz A sejam iguais a ± 1 ou 0, porque cada elemento é também uma submatriz quadrada de ordem 1.

- Como consequência, todas as bases de um problema de redes estão associadas a uma matriz B com determinante ± 1.
- A solução básica $B^{-1}b$ é inteira, porque a matriz B^{-1} é inteira, dado que B^{-1} é a adjunta da transposta de B, cujo cálculo resulta numa matriz inteira, a dividir pelo determinante, igual a ± 1.

Propriedade das soluções do problema de transporte

- Dado um grafo $G = (V, A)$, com $|V| = n$ e $|A| = m$, qualquer solução (conjunto de valores de fluxo em cada arco) obedece a:

Teorema (Teorema da decomposição de fluxos, Ahuja et al.,93)

Um fluxo não-negativo numa rede pode ser decomposto num conjunto de fluxos em caminhos e em ciclos (não necessariamente de uma forma única) com as seguintes duas propriedades:

(a) *cada caminho com fluxo positivo liga um vértice de oferta a um vértice de consumo.*

(b) *no máximo $n + m$ caminhos e ciclos têm fluxo positivo; destes, no máximo, m ciclos têm fluxo positivo.*

Inversamente, um dado conjunto de fluxos em caminhos e em ciclos tem uma representação única como um fluxo não-negativo numa rede.

Fim