

# Estructuras de Datos no Lineales

## 1.3. Árboles generales

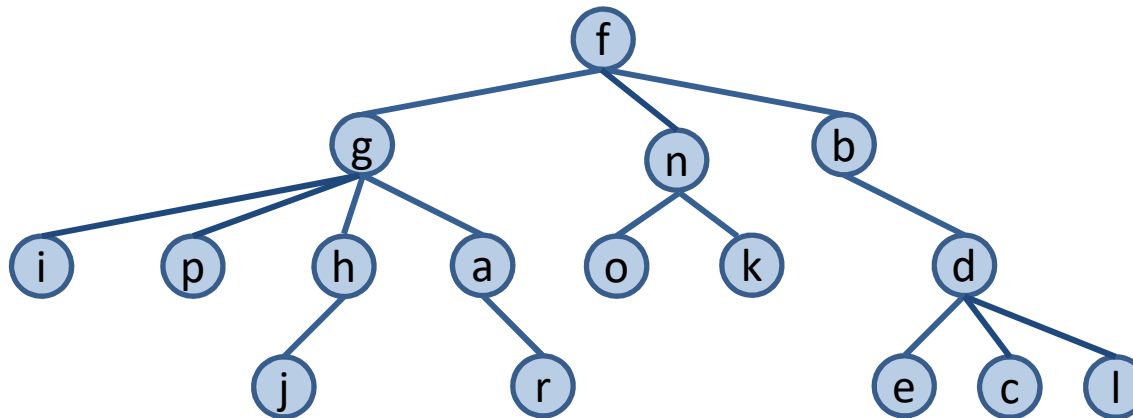
José Fidel Argudo Argudo  
José Antonio Alonso de la Huerta  
M<sup>a</sup> Teresa García Horcajadas



Versión 2.0

# Árboles generales

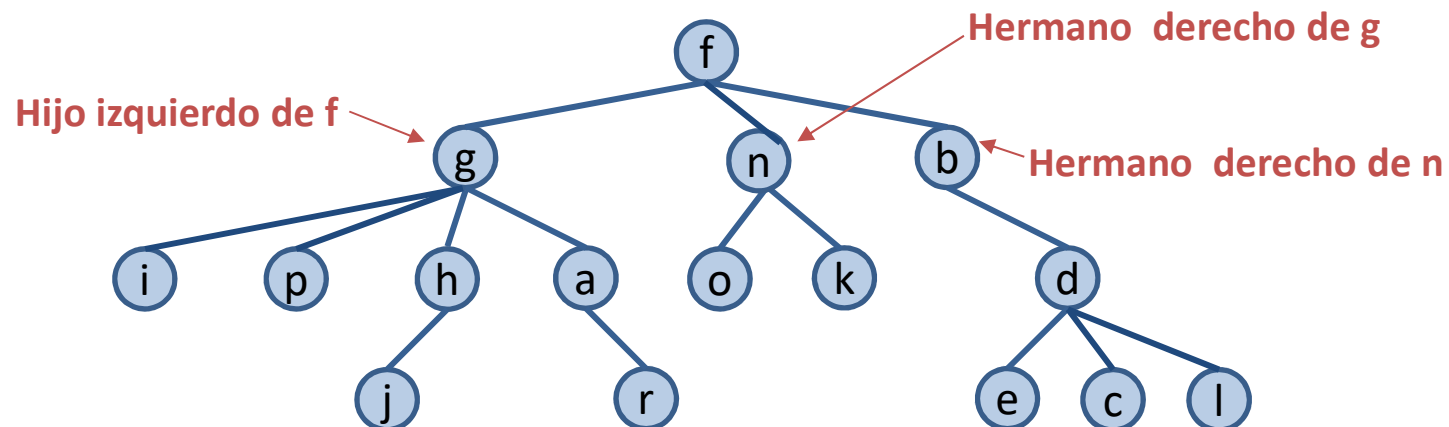
Un árbol cuyos nodos son de cualquier grado, es decir, pueden tener un número cualquiera de hijos, es un **árbol general**.



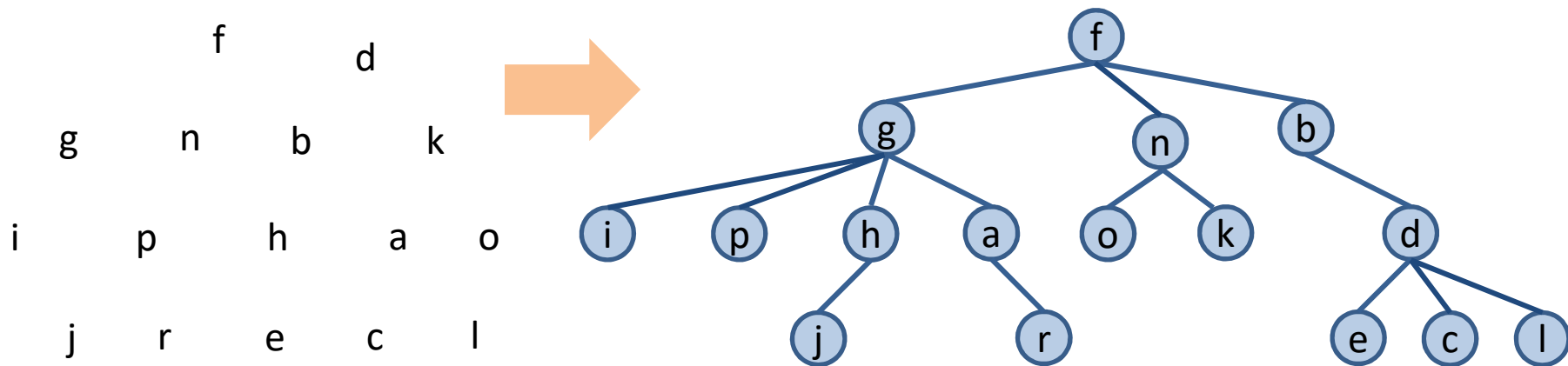
# TAD Árbol General

## Definición:

Un árbol general se define como un árbol cuyos nodos son de cualquier grado, es decir, pueden tener un número cualquiera de hijos. Los hijos de un nodo están ordenados de izquierda a derecha, de tal forma que el primer hijo de un nodo se llama *hijo izquierdo*, el segundo es el *hermano derecho* de éste, el tercero es el *hermano derecho* del segundo y así sucesivamente.



## Construcción de un árbol general

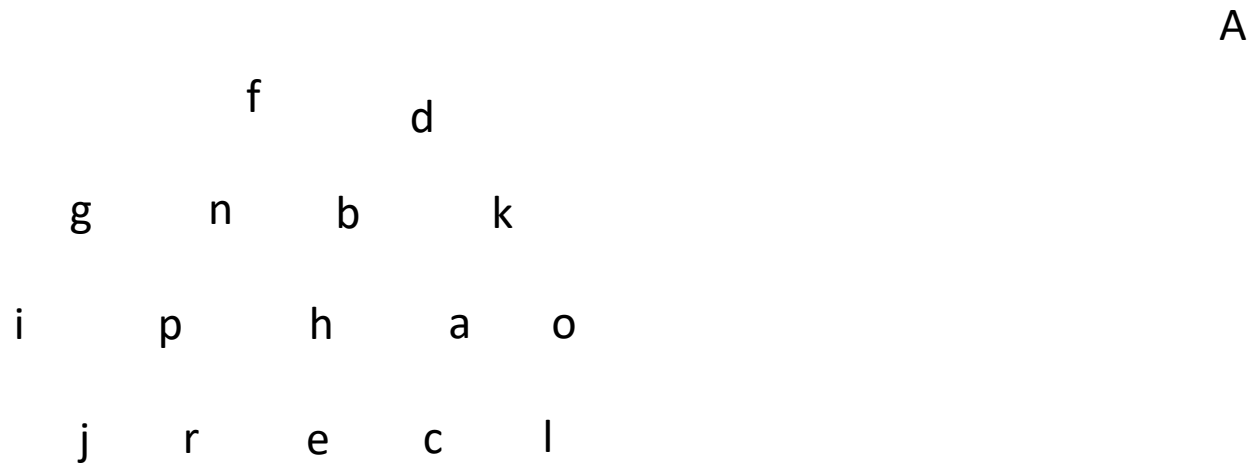


**Construcción añadiendo los nodos uno a uno desde la raíz hacia las hojas:**

```
Agen(); // Árbol vacío  
void insertarRaiz(const T& e);  
void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);  
void insertarHermDrcho(nodo n, const T& e);
```

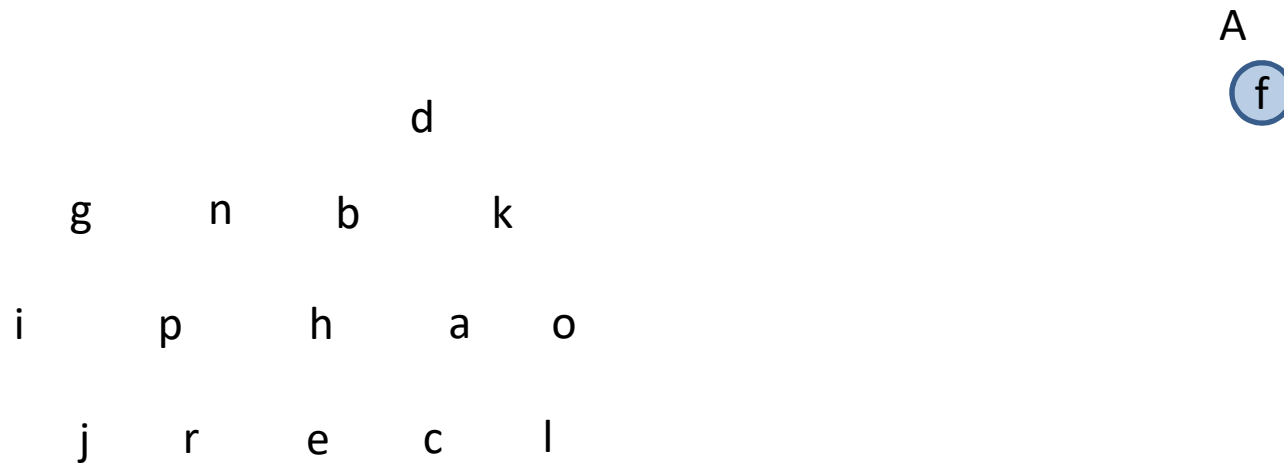
# Construcción de un árbol general

Creación del árbol A como un contenedor vacío.



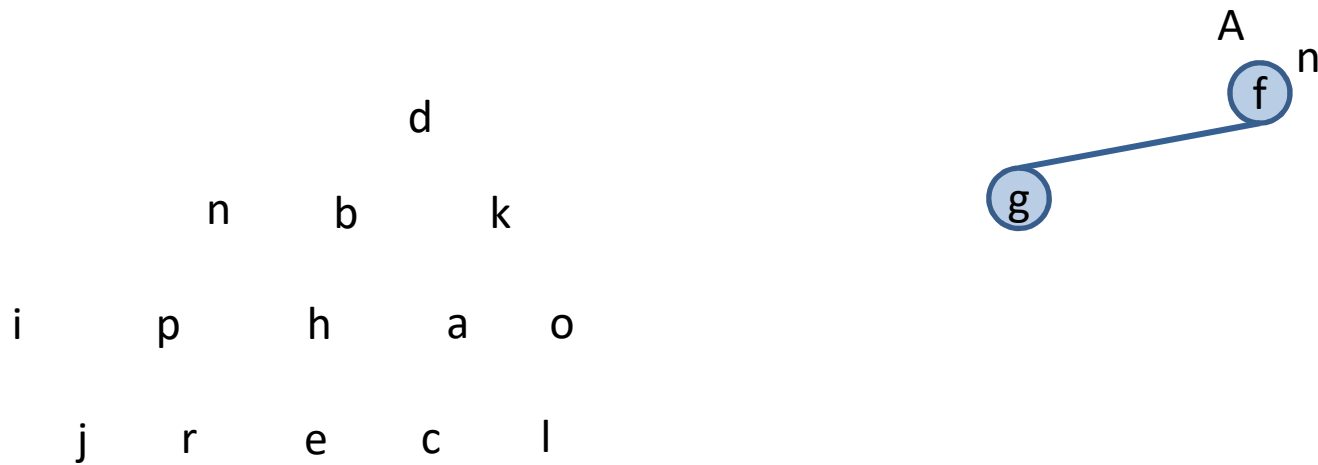
Agen A;

# Construcción de un árbol general



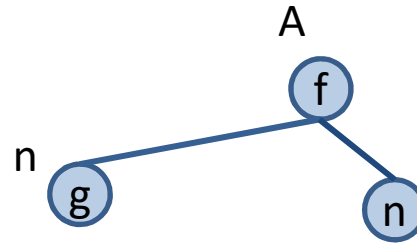
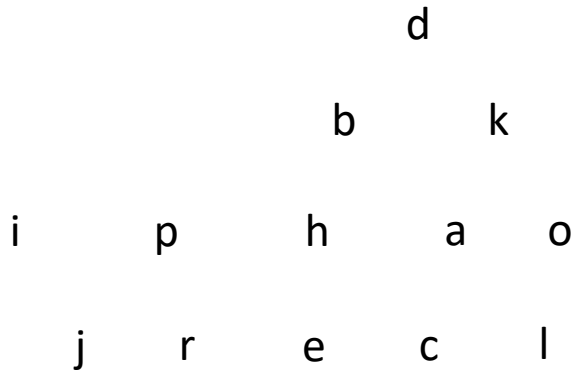
A.insertarRaiz('f');

## Construcción de un árbol general



```
A.insertarHijolzqdo(n, 'g');
```

## Construcción de un árbol general

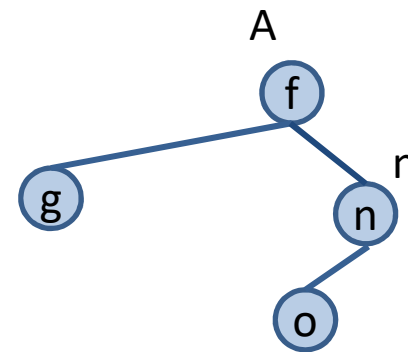


```
A.insertarHermDrcho(n, 'n');
```



## Construcción de un árbol general

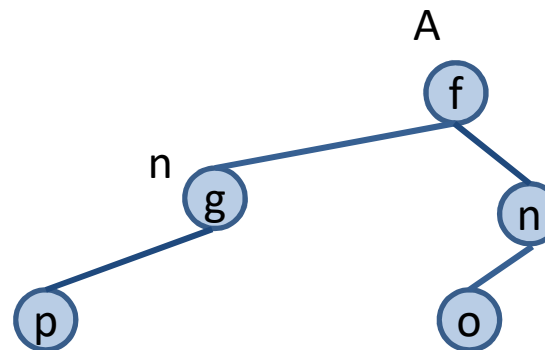
d  
b k  
i p h a  
j r e c l



A.insertarHijoIzqdo(n, 'o');

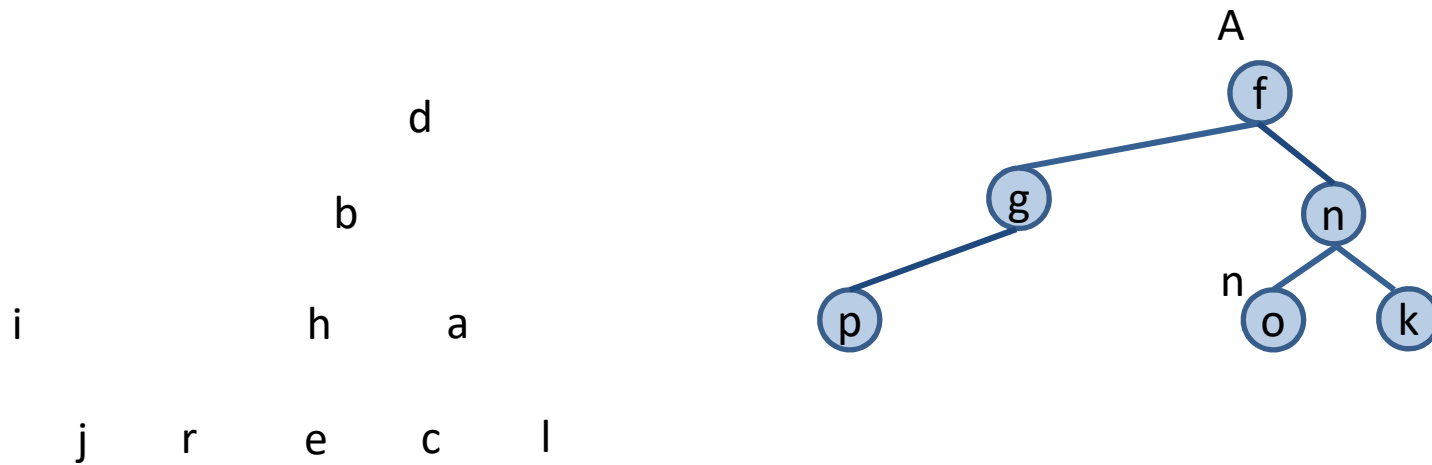
## Construcción de un árbol general

i                      d  
                    b              k  
i                      h              a  
                    j              r              e              c              l



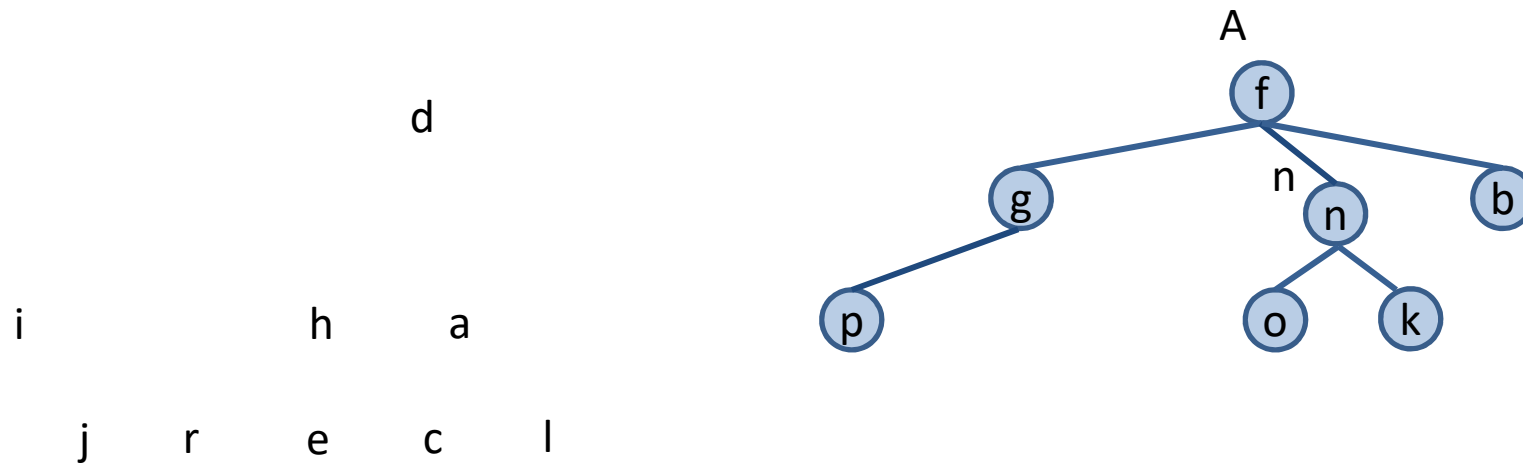
A.insertarHijoIzqdo(n, 'p');

## Construcción de un árbol general



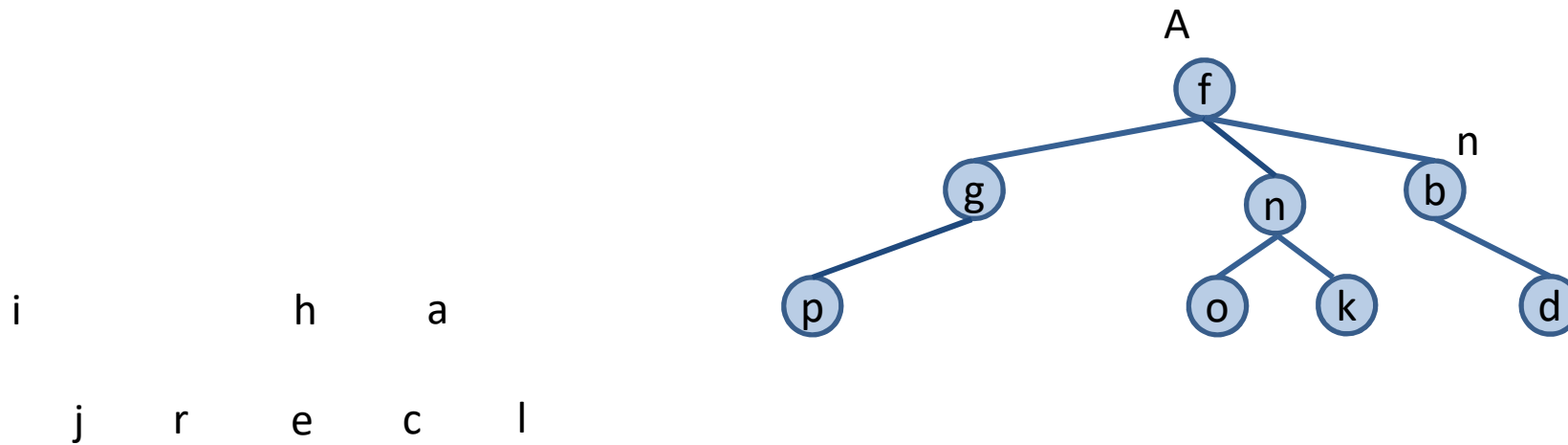
A.insertarHermDrcho(n, 'k');

## Construcción de un árbol general



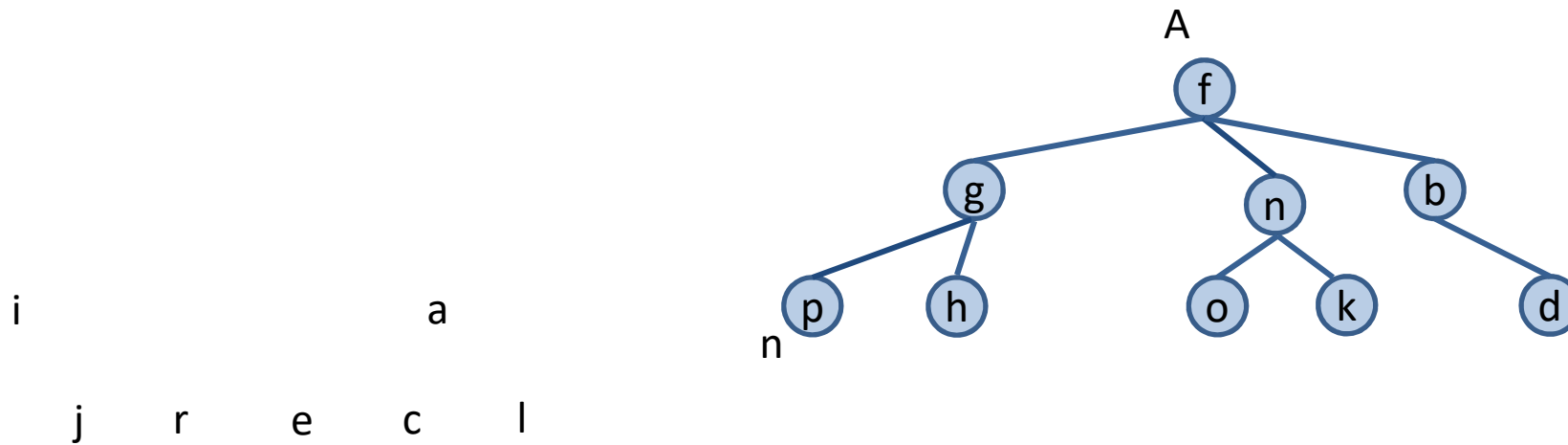
A.insertarHermDrcho(n, 'b');

## Construcción de un árbol general



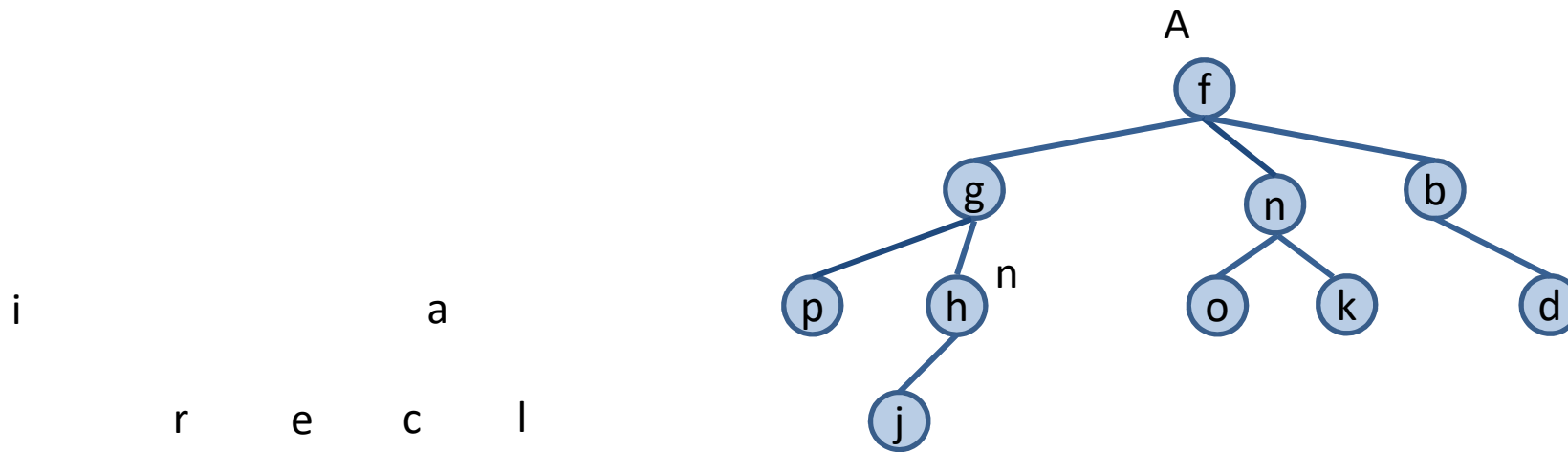
A.insertarHijoIzqdo(n, 'd');

## Construcción de un árbol general



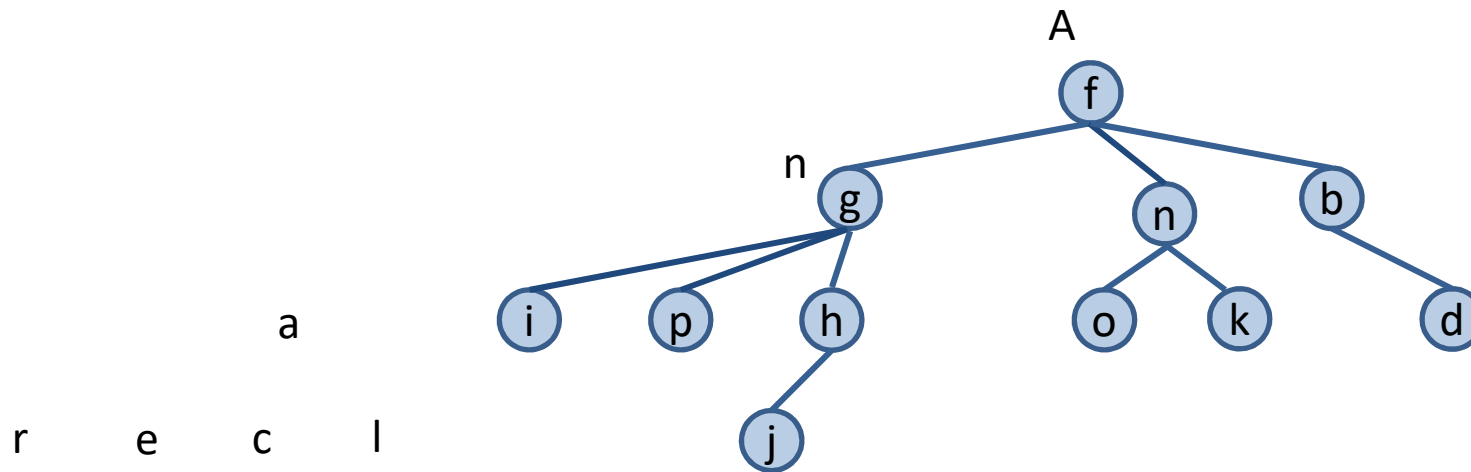
```
A.insertarHermDrcho(n, 'h');
```

## Construcción de un árbol general



A.insertarHijoIzqdo(n, 'j');

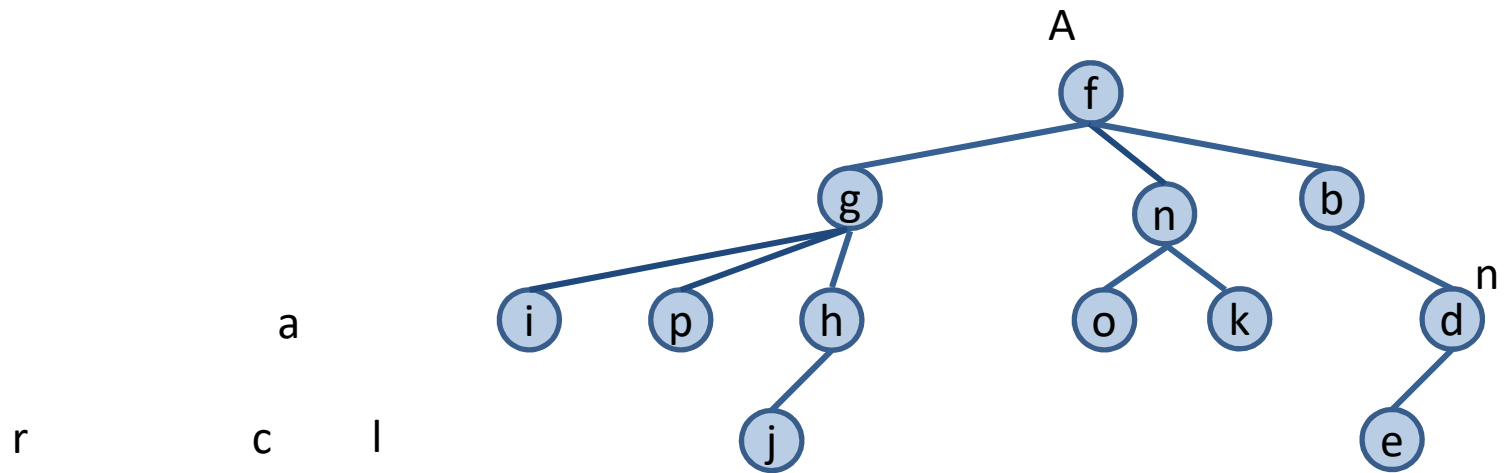
## Construcción de un árbol general



`A.insertarHijoIzqdo(n, 'i');`

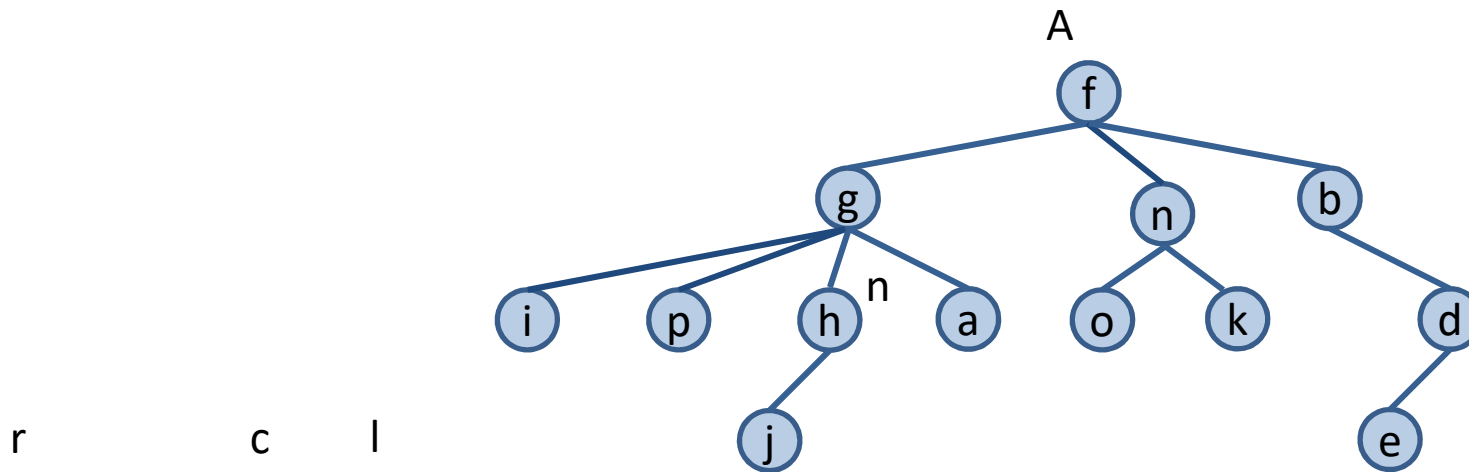


## Construcción de un árbol general



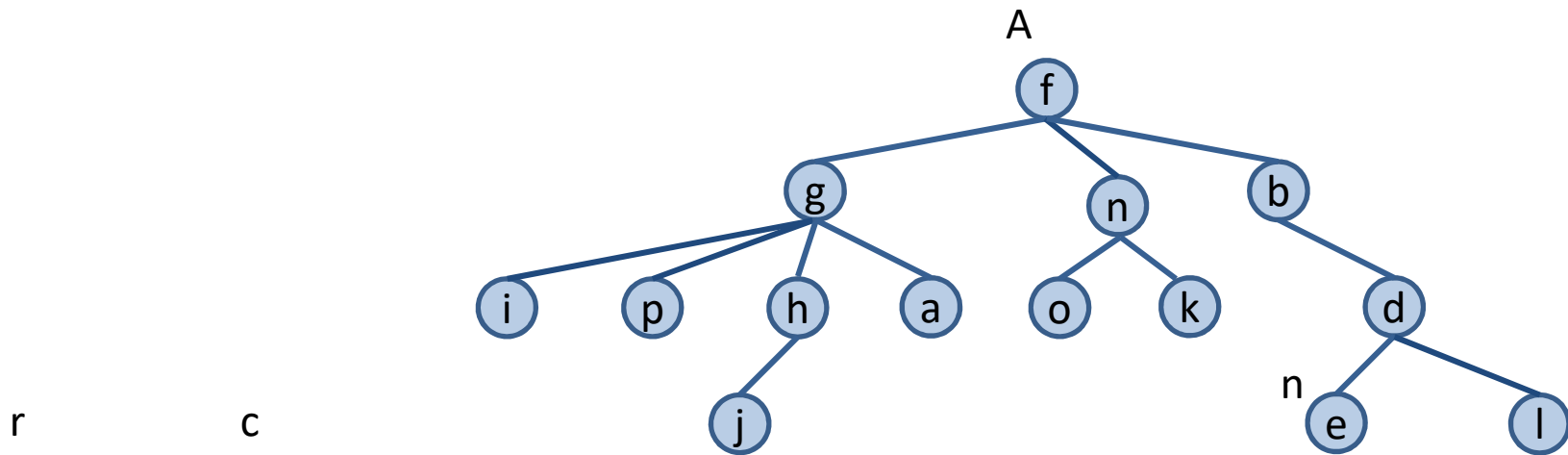
A.insertarHijoIzqdo(n, 'e');

## Construcción de un árbol general



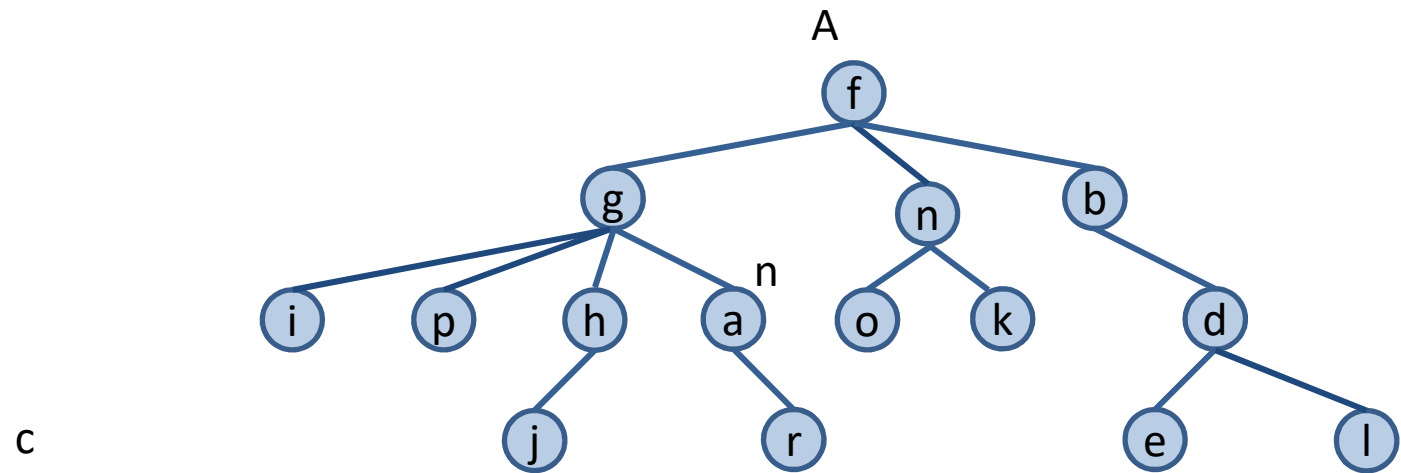
A.insertarHermDrcho(n, 'a');

## Construcción de un árbol general



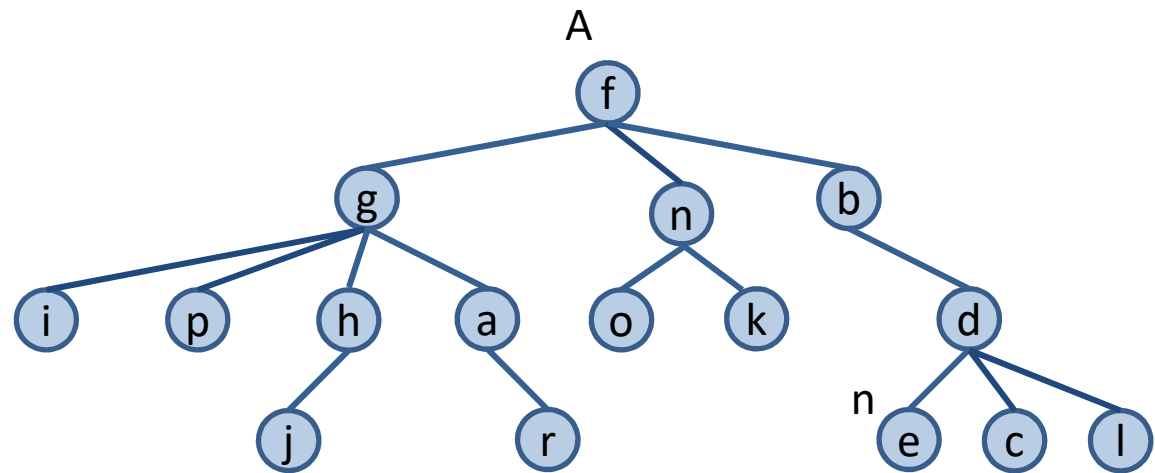
A.insertarHermDrcho(n, 'l');

## Construcción de un árbol general



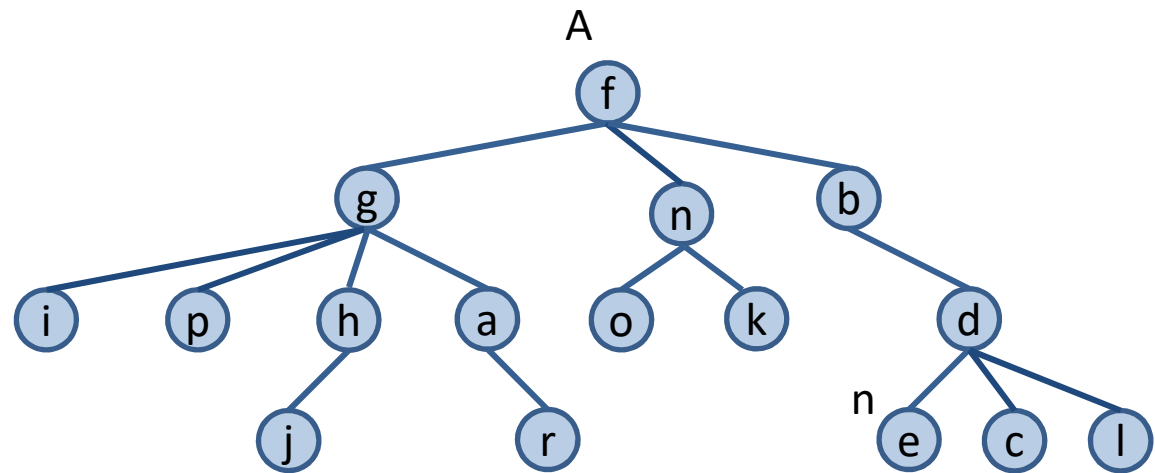
A.insertarHijoIzqdo(n, 'r');

## Construcción de un árbol general



A.insertarHermDrcho(n, 'c');

## Construcción de un árbol general



## Especificación de operaciones:

*Agen()*

Post: Construye un árbol vacío.

*void insertarRaiz (const T& e)*

Pre: El árbol está vacío.

Post: Inserta el nodo raíz de A cuyo contenido será e.

*void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e)*

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Post: Inserta el elemento *e* como hijo izquierdo del nodo *n*. Si ya existe hijo izquierdo, éste se convierte en el hermano derecho del nuevo nodo.

*void insertarHermDrcho(nodo n, const T& e)*

Pre: *n* es un nodo del árbol y no es el nodo raíz.

Post: Inserta el elemento *e* como hermano derecho del nodo *n* del árbol.  
Si ya existe hermano derecho, éste se convierte en el hermano derecho del nuevo nodo.

*void eliminarHijolzqdo(nodo n)*

Pre:  $n$  es un nodo del árbol. Existe *hijolzqdo(n)* y es una hoja.

Post: Destruye el hijo izquierdo del nodo  $n$ . El segundo hijo, si existe, se convierte en el nuevo hijo izquierdo de  $n$ .

*void eliminarHermDrcho(nodo n)*

Pre:  $n$  es un nodo del árbol. Existe *hermDrcho(n)* y es una hoja.

Post: Destruye el hermano derecho del nodo  $n$ . El siguiente hermano se convierte en el nuevo hermano derecho de  $n$ .

*void eliminarRaiz()*

Pre: El árbol no está vacío y *raiz()* es una hoja.

Post: Destruye el nodo raíz. El árbol queda vacío.



*bool arbolVacio() const*

Post : Devuelve **true** si el árbol está vacío y **false** en caso contrario.

*const T& elemento(nodo n) const*

*T& elemento(nodo n)*

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Post: Devuelve el elemento del nodo *n*.

*nodo raiz() const*

Post: Devuelve el nodo raíz del árbol. Si el árbol está vacío, devuelve *NODO\_NULO*.

*nodo padre(nodo n) const*

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Post: Devuelve el padre del nodo *n*. Si *n* es el nodo raíz, devuelve *NODO\_NULO*.

*nodo hijoIzqdo(nodo n) const*

Pre: *n* es un nodo del árbol.

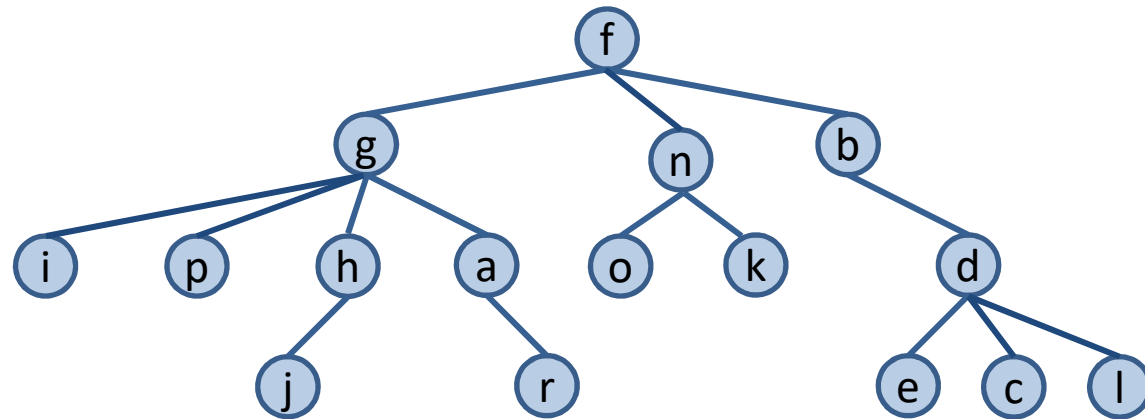
Post: Devuelve el hijo izquierdo del nodo *n*. Si no existe, devuelve *NODO\_NULO*.

*nodo hermDrcho(nodo n) const*

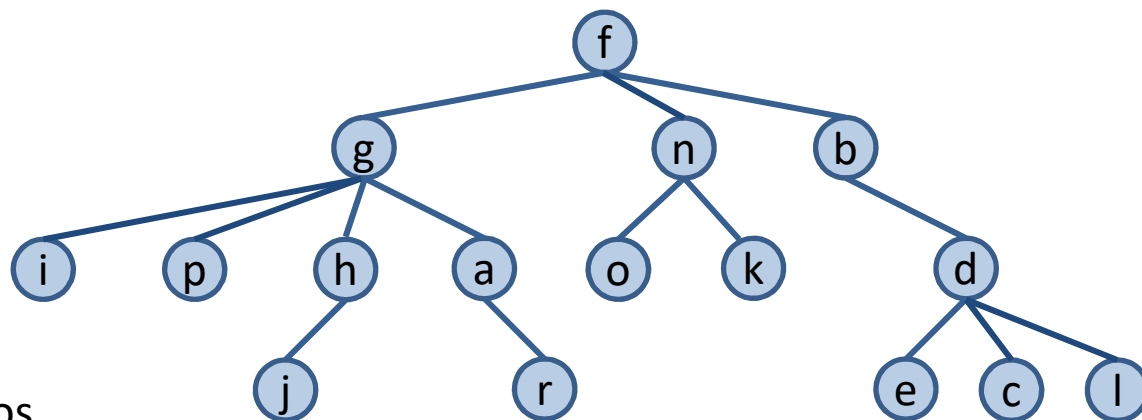
Pre: *n* es un nodo del árbol.

Post: Devuelve el hermano derecho del nodo *n*. Si no existe, devuelve *NODO\_NULO*.

## Implementación vectorial de árboles generales mediante listas de hijos



# Implementación vectorial de árboles generales mediante listas de hijos

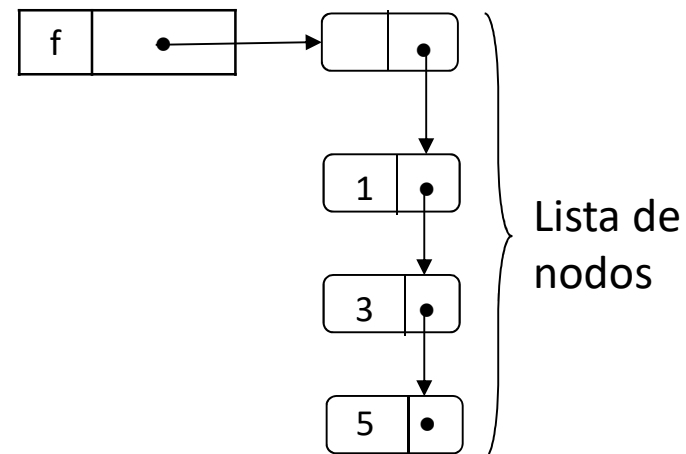


	elto	hijos
0	f	(1,3,5)
1	g	(7,14,2,8)
2	h	(9)
3	n	( 4,10)
4	o	( )
5	b	(6)
6	d	(11,12,13)
..		
99	—	—

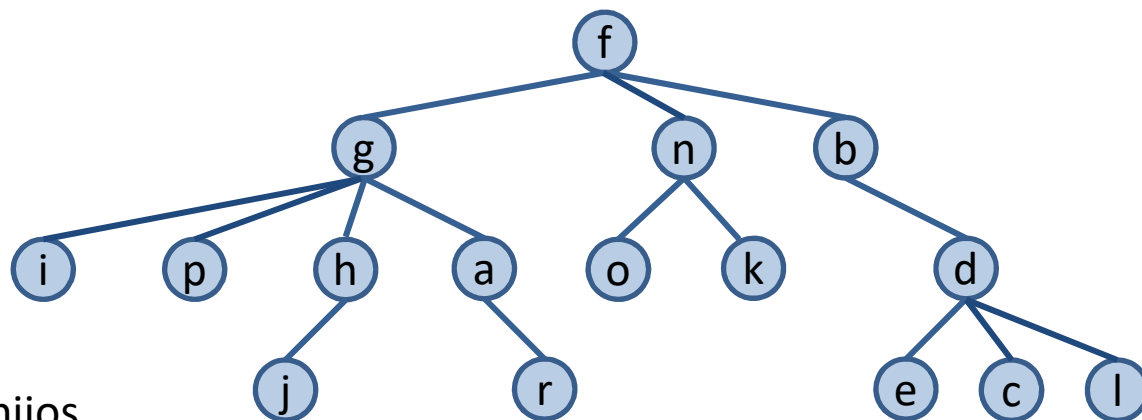
nodos	•
numNodos	16
maxNodos	100

EDNL

elto hijos



# Implementación vectorial de árboles generales mediante listas de hijos

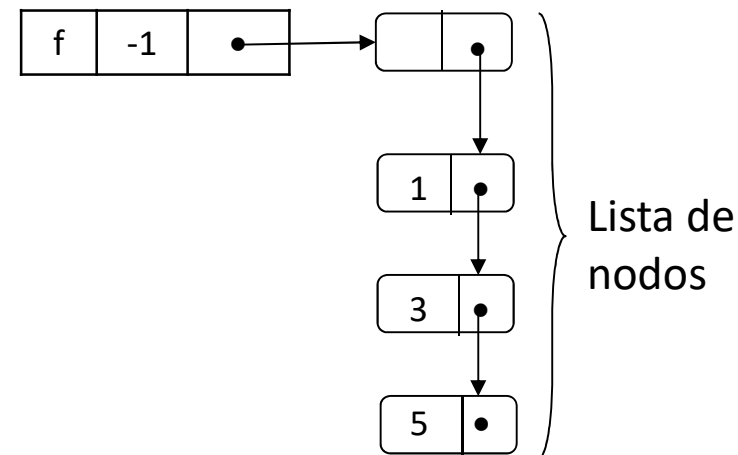


elto padre hijos

0	f	-1	(1,3,5)
1	g	0	(7,14,2,8)
2	h	1	(9)
3	n	0	( 4,10)
4	o	3	( )
5	b	0	(6)
6	d	5	(11,12,13)
..			
99	—	-1	—

nodos	•
numNodos	16
maxNodos	100

elto padre hijos



```

#ifndef AGEN_LIS_H
#define AGEN_LIS_H
#include <cassert>
#include "listaenla.h"

template <typename T> class Agen {
public:
    typedef int nodo; // índice de la matriz
                        // entre 0 y maxNodos-1

    static const nodo NODO_NULO;
    explicit Agen(size_t maxNodos);           // ctor., requiere ctor. T()
    void insertarRaiz(const T& e);
    void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
    void insertarHermDrcho(nodo n, const T& e);
    void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
    void eliminarHermDrcho(nodo n);
    void eliminarRaiz();
    bool arbolVacio() const;
    const T& elemento(nodo n) const;          // acceso a elto, lectura
    T& elemento(nodo n);                      // acceso a elto, lectura/escritura
};

```

```

nodo raiz() const;
nodo padre(nodo n) const;
nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
nodo hermDrcho(nodo n) const;
Agen(const Agen<T>& A); // ctor. de copia
Agen<T>& operator =(const Agen<T>& A); // asignación de árboles
~Agen(); // destructor

private:
    struct celda {
        T elto;
        nodo padre;
        Lista<nodo> hijos;
    };
    celda *nodos; // vector de nodos
    int maxNodos; // tamaño del vector
    int numNodos; // número de nodos del árbol
};

/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Agen<T>::nodo Agen<T>::NODO_NULO(-1);

```

```

template <typename T>
inline Agen<T>::Agen(size_t maxNodos) :
    nodos(new celda[maxNodos]), // Se crean las listas de
                                // hijos vacías.

    maxNodos(maxNodos),
    numNodos(0)
{
    // Marcar todas las celdas como libres.
    for (nodo i = 0; i <= maxNodos-1; i++)
        nodos[i].padre = NODO_NULO;
}

template <typename T>
void Agen<T>::insertarRaiz(const T& e)
{
    assert(numNodos == 0); // Árbol vacío.

    numNodos = 1;
    nodos[0].elto = e;
    // La lista de hijos está vacía.
}

```



```

template <typename T>
void Agen<T>::insertarHijoIzqdo(Agen<T>::nodo n, const T& e)
{
    nodo hizqdo;

    assert(numNodos > 0); // Árbol no vacío.
    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // n es una celda del vector
    assert(n == 0 || nodos[n].padre != NODO_NULO); // que está ocupada.
    assert(numNodos < maxNodos); // Árbol no lleno.

    // Añadir el nuevo nodo en la primera celda libre.
    for (hizqdo = 1; nodos[hizqdo].padre != NODO_NULO; hizqdo++);
    nodos[hizqdo].elto = e;
    nodos[hizqdo].padre = n;
    // Insertar el nuevo nodo al inicio de la lista de hijos de n.
    Lista<nodo>& Lh = nodos[n].hijos; // Lista de hijos.
    Lh.insertar(hizqdo, Lh.primer());
    ++numNodos;
}

```

```

template <typename T>
void Agen<T>::insertarHermDrcho(Agen<T>::nodo n, const T& e)
{
    nodo hedrcho;

    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);    // n es un nodo válido.
    assert(nodos[n].padre != NODO_NULO);    // n existe y no es la raíz.
    assert(numNodos < maxNodos);           // Árbol no lleno.

    // Añadir el nuevo nodo en la primera celda libre.
    for (hedrcho = 1; nodos[hedrcho].padre != NODO_NULO; hedrcho++);
    nodos[hedrcho].elto = e;
    nodos[hedrcho].padre = nodos[n].padre;
    // Insertar el nuevo nodo en la lista de hijos del padre
    // en la posición siguiente a la de n.
    Lista<nodo>& Lhp = nodos[nodos[n].padre].hijos; // Lista de hijos
                                                    // del padre.
    Lhp.insertar(hedrcho, Lhp.siguiente(Lhp.buscar(n)));
    ++numNodos;
}

```

```

template <typename T>
void Agen<T>::eliminarHijoIzqdo(Agen<T>::nodo n)
{
    nodo hizqdo;

    assert(numNodos > 0); // Árbol no vacío.
    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // n es una celda del vector
    assert(n == 0 || nodos[n].padre != NODO_NULO); // que está ocupada.
    Lista<nodo>& Lh = nodos[n].hijos; // Lista de hijos.
    assert(Lh.primer() != Lh.fin()); // Lista no vacía, n tiene hijos.
    hizqdo = Lh.elemento(Lh.primer());
    assert(nodos[hizqdo].hijos.primer() == // Lista vacía, hijo izq.
           nodos[hizqdo].hijos.fin()); // de n es una hoja.

    // Eliminar hijo izqdo. de n.
    nodos[hizqdo].padre = NODO_NULO; // Marcar celda libre.
    Lh.eliminar(Lh.primer()); // Eliminar primer nodo de la
                             // lista de hijos de n.

    --numNodos;
}

```

```

template <typename T>
void Agen<T>::eliminarHermDrcho (Agen<T>::nodo n)
{
    nodo hdrcho;
    Lista<nodo>::posicion p;

    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);    // n es un nodo válido.
    assert(nodos[n].padre != NODO_NULO);    // n existe y no es la raíz.
    // Buscar hermano drcho. de n en la lista de hijos del padre.
    Lista<nodo>& Lhp = nodos[nodos[n].padre].hijos; // Lista de hijos
                                                    // del padre.

    p = Lhp.siguiente(Lhp.buscar(n));
    assert(p != Lhp.fin());    // n tiene hermano drcho.
    hdrcho = Lhp.elemento(p);
    assert(nodos[hdrcho].hijos.primer() ==    // Lista vacía, hermano
           nodos[hdrcho].hijos.fin());        // drcho. de n es hoja.

    // Eliminar hermano drcho. de n.
    nodos[hdrcho].padre = NODO_NULO; // Marcar celda libre.
    Lhp.eliminar(p);                // Eliminar hermano de la lista
                                    // de hijos del padre.

    --numNodos;
}

```

```

template <typename T>
inline void Agen<T>::eliminarRaiz()
{
    assert(numNodos == 1);

    numNodos = 0;
}

template <typename T>
inline bool Agen<T>::arbolVacio() const
{
    return (numNodos == 0);
}

template <typename T>
inline const T& Agen<T>::elemento(Agen<T>::nodo n) const
{
    assert(numNodos > 0); // Árbol no vacío.
    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // n es una celda del vector
    assert(n == 0 || nodos[n].padre != NODO_NULO); // que está ocupada

    return nodos[n].elto;
}

```

```

template <typename T>
inline T& Agen<T>::elemento(Agen<T>::nodo n)
{
    assert(numNodos > 0); // Árbol no vacío.
    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // n es una celda del vector
    assert(n == 0 || nodos[n].padre != NODO_NULO); // que está ocupada

    return nodos[n].elto;
}

template <typename T>
inline typename Agen<T>::nodo Agen<T>::raiz() const
{
    return (numNodos > 0) ? 0 : NODO_NULO;
}

template <typename T>
inline typename Agen<T>::nodo Agen<T>::padre(Agen<T>::nodo n) const
{
    assert(numNodos > 0); // Árbol no vacío.
    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // n es una celda del vector
    assert(n == 0 || nodos[n].padre != NODO_NULO); // que está ocupada

    return nodos[n].padre;
}

```

```

template <typename T>
inline typename Agen<T>::nodo Agen<T>::hijoIzqdo(Agen<T>::nodo n) const
{
    assert(numNodos > 0); // Árbol no vacío.
    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // n es una celda del vector
    assert(n == 0 || nodos[n].padre != NODO_NULO); // que está ocupada.

    Lista<nodo>& Lh = nodos[n].hijos;
    if (Lh.primer() != Lh.fin()) // Lista no vacía.
        return Lh.elemento(Lh.primer());
    else
        return NODO_NULO;
}

```

```

template <typename T>
inline typename Agen<T>::nodo Agen<T>::hermDrcho(Agen<T>::nodo n) const
{
    Lista<nodo>::posicion p;

    assert(numNodos > 0); // Árbol no vacío.
    assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // n es una celda del vector
    assert(n == 0 || nodos[n].padre != NODO_NULO); // que está ocupada.

    if (n == 0) // n es la raíz.
        return NODO_NULO;
    else
    {
        Lista<nodo>& Lhp = nodos[nodos[n].padre].hijos; // Lista de hijos
                                                    // del padre.

        p = Lhp.siguiente(Lhp.buscar(n));
        if (p != Lhp.fin()) // n tiene hermano drcho.
            return Lhp.elemento(p);
        else
            return NODO_NULO;
    }
}

```



```

template <typename T>
Agen<T>::Agen(const Agen<T>& A) :
    nodos(new celda[A.maxNodos]),
    maxNodos(A.maxNodos), numNodos(A.numNodos)
{
    for (nodo n = 0; n <= maxNodos-1; n++) // Copiar el vector.
        nodos[n] = A.nodos[n];
}

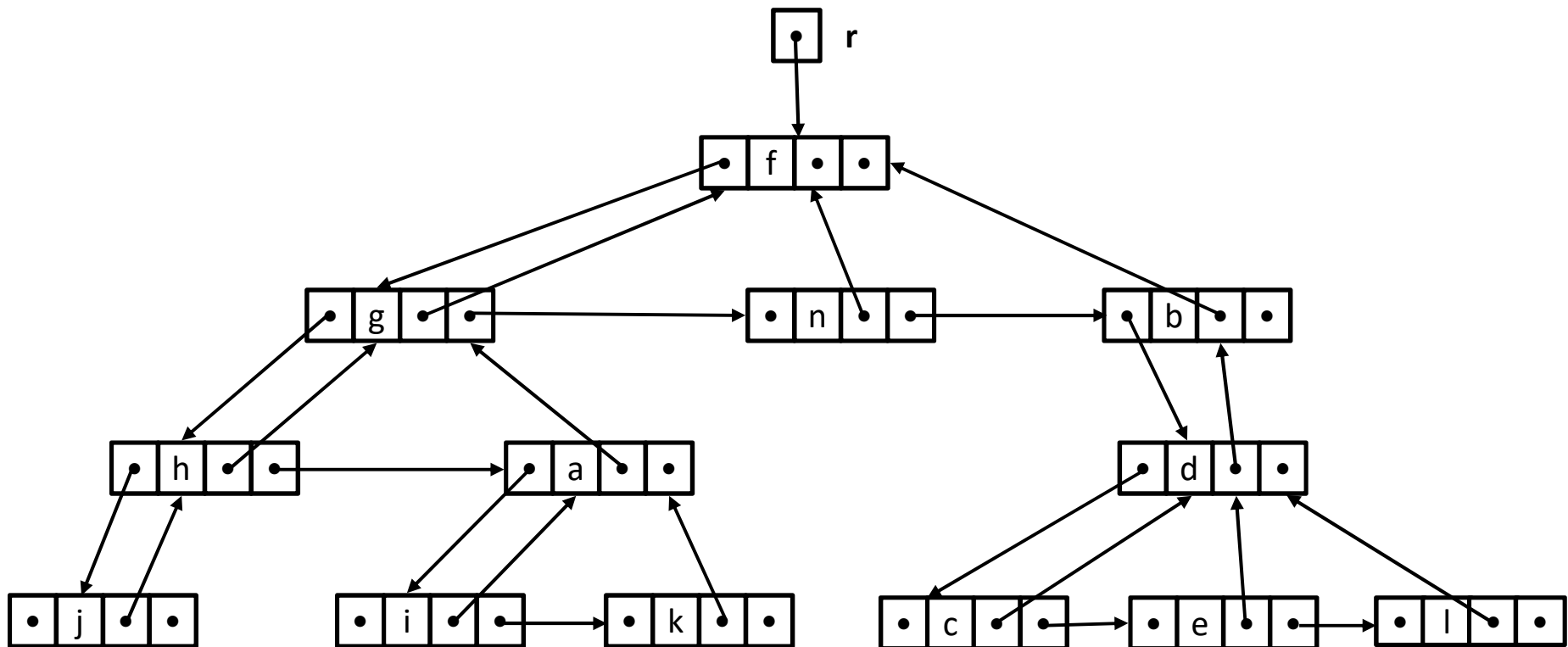
template <typename T>
Agen<T>& Agen<T>::operator =(const Agen<T>& A)
{
    if (this != &A) { // Evitar autoasignación.
        // Destruir el vector y crear uno nuevo si es necesario.
        if (maxNodos != A.maxNodos) {
            delete[] nodos;
            maxNodos = A.maxNodos;
            nodos = new celda[maxNodos];
        }
        numNodos = A.numNodos;
        for (nodo n = 0; n <= maxNodos-1; n++) // Copiar el vector.
            nodos[n] = a.nodos[n];
    }
    return *this;
}

```

```
template <typename T>
inline Agen<T>::~~Agen()
{
    delete[] nodos; // También destruye las listas de hijos.
}

#endif // AGEN_LIS_H
```

## Implementación de un árbol general usando celdas enlazadas



```

#ifndef AGEN_H
#define AGEN_H
#include <cassert>

template <typename T> class Agen {
    struct celda;    // declaración adelantada privada
public:
    typedef celda* nodo;
    static const nodo NODO_NULO;
    Agen();          // constructor
    void insertarRaiz(const T& e);
    void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
    void insertarHermDrcho(nodo n, const T& e);
    void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
    void eliminarHermDrcho(nodo n);
    void eliminarRaiz();
    bool arbolVacio() const;
    const T& elemento(nodo n) const;    // acceso a elto, lectura
    T& elemento(nodo n);                // acceso a elto, lectura/escritura
    nodo raiz() const;
    nodo padre(nodo n) const;
    nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
    nodo hermDrcho(nodo n) const;

```

```

    Agen(const Agen<T>& a);           // ctor. de copia
    Agen<T>& operator =(const Agen<T>& a); // asignación de árboles
    ~Agen();                          // destructor
private:
    struct celda {
        T elto;
        nodo padre, hizq, heder;
        celda(const T& e, nodo p = NODO_NULO): elto(e),
            padre(p), hizq(NODO_NULO), heder(NODO_NULO) {}
    };

    nodo r;    // nodo raíz del árbol

    void destruirNodos(nodo& n);
    nodo copiar(nodo n);
};

/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Agen<T>::nodo Agen<T>::NODO_NULO(nullptr);

```

```

/*-----*/
/* Métodos públicos */
/*-----*/

template <typename T>
inline Agen<T>::Agen() : r(NODO_NULO) {}

template <typename T>
inline void Agen<T>::insertarRaiz(const T& e)
{
    assert(r == NODO_NULO);    // Árbol vacío.

    r = new celda(e);
}

```

```

template <typename T>
inline void Agen<T>::insertarHijoIzqdo(Agen<T>::nodo n, const T& e)
{
    assert(n != NODO_NULO);

    nodo hizqdo = n->hizq;    // Hijo izqdo. actual.
    n->hizq = new celda(e, n);
    n->hizq->heder = hizqdo; // El actual hijo izqdo. se convierte en
                           // hermano drcho. del nuevo hijo.
}

template <typename T>
inline void Agen<T>::insertarHermDrcho(Agen<T>::nodo n, const T& e)
{
    assert(n != NODO_NULO);
    assert(n != r); // n no es la raíz.

    nodo hedrcho = n->heder;    // Hermano drcho. actual
    n->heder = new celda(e, n->padre);
    n->heder->heder = hedrcho; // El actual hermano drcho. se convierte
                           // en hermano drcho. del nuevo.
}

```

```

template <typename T>
inline void Agen<T>::eliminarHijoIzqdo (Agen<T>::nodo n)
{
    nodo hizqdo;

    assert(n != NODO_NULO);
    hizqdo = n->hizq;
    assert(hizqdo != NODO_NULO);           // Existe hijo izqdo.
    assert(hizqdo->hizq == NODO_NULO);    // Hijo izqdo. es hoja.

    // El hermano drcho. pasa a ser el nuevo hijo izqdo.
    n->hizq = hizqdo->heder;
    delete hizqdo;
}

```



```

template <typename T>
inline void Agen<T>::eliminarHermDrcho (Agen<T>::nodo n)
{
    nodo hedrcho;

    assert(n != NODO_NULO);
    hedrcho = n->heder;
    assert(hedrcho != NODO_NULO);    // Existe hermano drcho.
    assert(hedrcho->hizq == NODO_NULO); // Hermano drcho. es hoja.

    // El hermano del hermano se convierte en el
    // nuevo hermano drcho. de n.
    n->heder = hedrcho->heder;
    delete hedrcho;
}

```

```

template <typename T>
inline void Agen<T>::eliminarRaiz()
{
    assert(r != NODO_NULO);           // Árbol no vacío.
    assert(r->hizq == NODO_NULO);     // La raíz es hoja.

    delete(r);
    r = NODO_NULO;
}

template <typename T>
inline bool Agen<T>::arbolVacio() const
{
    return (r == NODO_NULO);
}

```

```

template <typename T>
inline const T& Agen<T>::elemento(Agen<T>::nodo n) const
{
    assert(n != NODO_NULO);

    return n->elto;
}

```

```

template <typename T>
inline T& Agen<T>::elemento(Agen<T>::nodo n)
{
    assert(n != NODO_NULO);

    return n->elto;
}

```

```

template <typename T>
inline typename Agen<T>::nodo Agen<T>::raiz() const
{
    return r;
}

template <typename T> inline
typename Agen<T>::nodo Agen<T>::padre(Agen<T>::nodo n) const
{
    assert(n != NODO_NULO);

    return n->padre;
}

```

```

template <typename T> inline
typename Agen<T>::nodo Agen<T>::hijoIzqdo(Agen<T>::nodo n) const
{
    assert(n != NODO_NULO);

    return n->hizq;
}

```

```

template <typename T> inline
typename Agen<T>::nodo Agen<T>::hermDrcho(Agen<T>::nodo n) const
{
    assert(n != NODO_NULO);

    return n->heder;
}

```

```

template <typename T>
inline Agen<T>::Agen(const Agen<T>& A)
{
    r = copiar(A.r); // Copiar raíz y descendientes.
}

template <typename T>
Agen<T>& Agen<T>::operator =(const Agen<T>& A)
{
    if (this != &A) // Evitar autoasignación.
    {
        this->~Agen(); // Vaciar el árbol.
        r = copiar(A.r); // Copiar raíz y descendientes.
    }
    return *this;
}

template <typename T>
inline Agen<T>::~~Agen()
{
    destruirNodos(r); // Vaciar el árbol.
}

```

```

/*-----*/
/* Métodos privados */
/*-----*/
// Destruye un nodo y todos sus descendientes
template <typename T>
void Agen<T>::destruirNodos(Agen<T>::nodo& n)
{
    if (n != NODO_NULO)
    {
        if (n->hizq != NODO_NULO)
        { // Destruir hermanos del hijo izqdo.
            nodo hedrcho = n->hizq->heder;
            while (hedrcho != NODO_NULO)
            {
                n->hizq->heder = hedrcho->heder;
                destruirNodos(hedrcho);
                hedrcho = n->hizq->heder;
            }
            destruirNodos(n->hizq); // Destruir el hijo izqdo.
        }
        delete(n);
        n = NODO_NULO;
    }
}

```

```

// Devuelve una copia de un nodo y todos sus descendientes
template <typename T>
typename Agen<T>::nodo Agen<T>::copiar(Agen<T>::nodo n)
{
    nodo m = NODO_NULO;

    if (n != NODO_NULO) {
        m = new celda(n->elto);           // Copiar n.
        if (n->hizq != NODO_NULO) {       // n tiene descendientes.
            m->hizq = copiar(n->hizq);    // Copiar primer subárbol.
            m->hizq->padre = m;
            // Copiar el resto de subárboles.
            nodo hijo = m->hizq;           // Último subárbol copiado.
            nodo hedrho = n->hizq->heder;  // Siguiente subárbol a copiar
            while (hedrho != NODO_NULO) {
                hijo = hijo->heder = copiar(hedrho);
                hijo->padre = m;
                hedrho = hedrho->heder;
            }
        }
    }
    return m;
}

#endif // AGEN_H

```