Estructuras de Datos no Lineales 1.1. Árboles binarios

José Fidel Argudo Argudo José Antonio Alonso de la Huerta Mª Teresa García Horcajadas

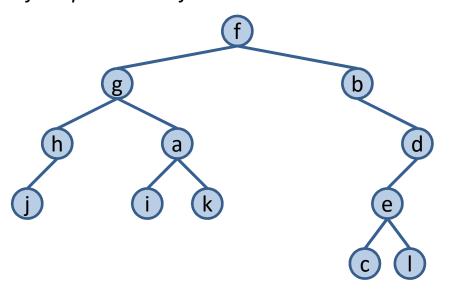


Versión 2.0

TAD Árbol binario

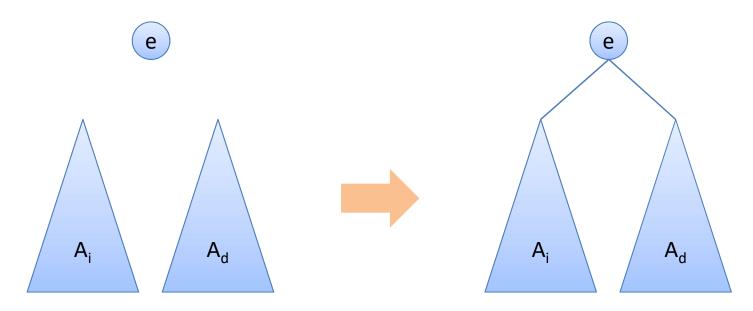
Definición:

Un árbol binario se define como un árbol cuyos nodos son, a lo sumo, de grado 2, es decir, tienen 0, 1 ó 2 hijos. Éstos se llaman hijo izquierdo e hijo derecho.



Operaciones:

- Construcción
- Inserción
- Eliminación
- Recuperación
- Modificación
- Acceso
- Destrucción



Construcción a partir de los componentes de un árbol binario (un nodo y dos subárboles):

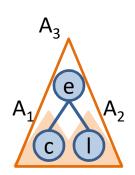
Abin(); // Árbol vacío. void insertarRaiz(const T& e); void insertarIzqdo (Abin& Ai); void insertarDrcho(Abin& Ad);



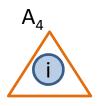
Abin A₁; A₁.insertarRaiz('c');

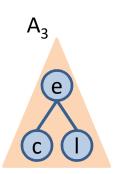
A₁ A₂

Abin A_2 ; A_2 .insertarRaiz('l');

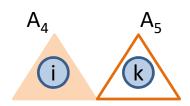


Abin A₃; A₃.insertarRaiz('e'); A₃.insertarIzqdo(A₁); A₃.insertarDrcho(A₂);



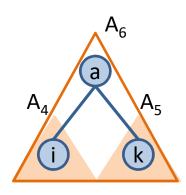


Abin A_4 ; A_4 .insertarRaiz('i');

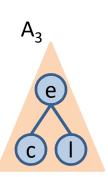


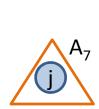
A₃

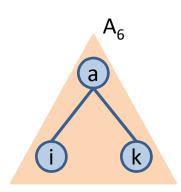
Abin A₅; A₅.insertarRaiz('k');

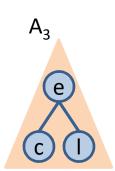


Abin A₆; A₆.insertarRaiz('a'); A₆.insertarIzqdo(A₄); A₆.insertarDrcho(A₅);

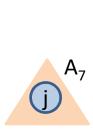


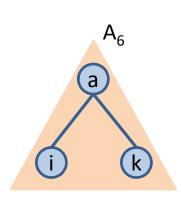




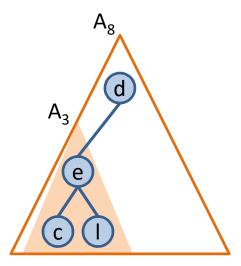


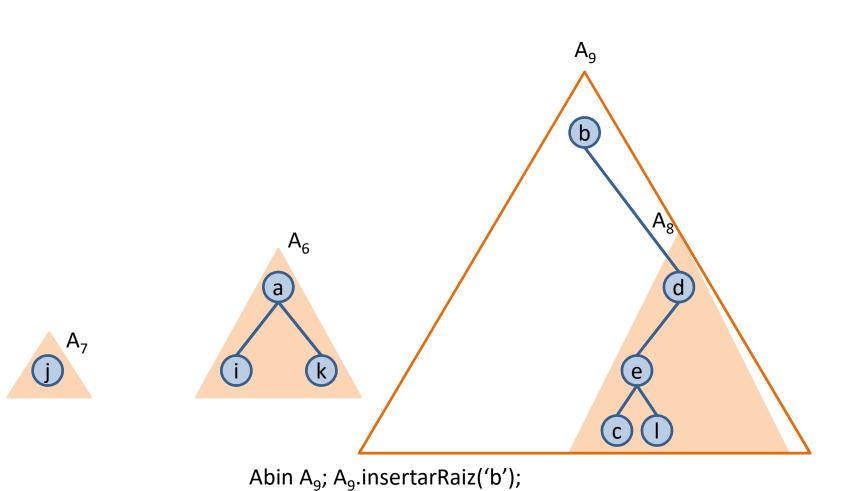
Abin A_7 ; A_7 .insertarRaiz('j');



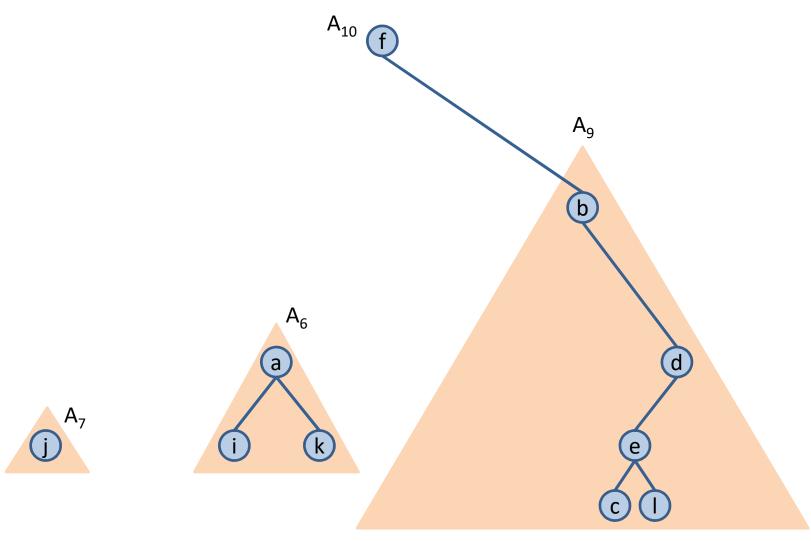


Abin A_8 ; A_8 .insertarRaiz('d'); A_8 .insertarIzqdo(A_3);

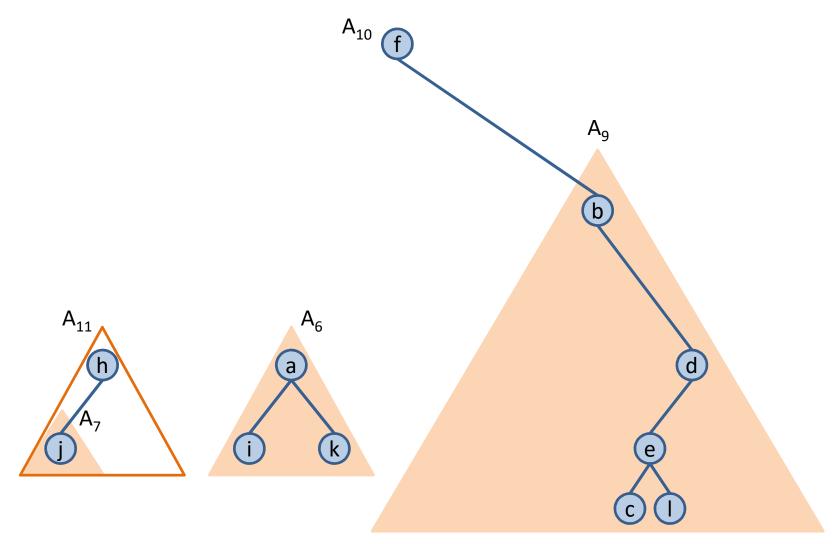




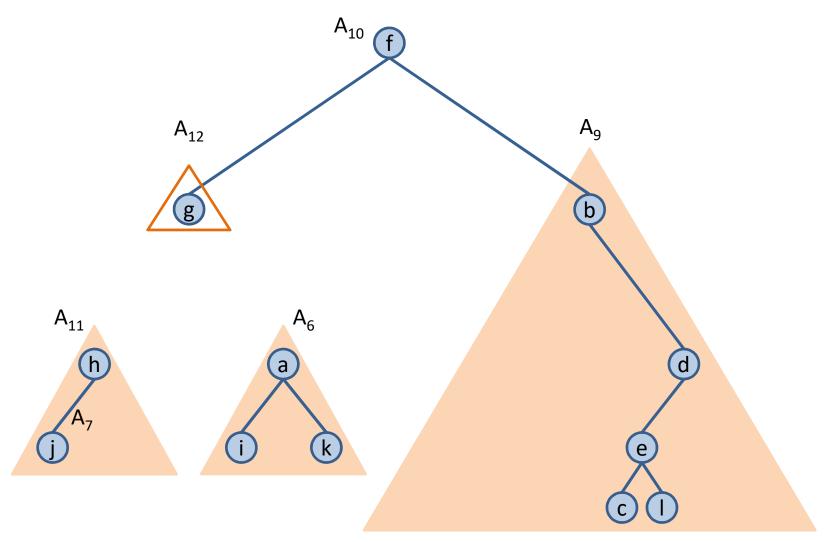
A₉.insertarDrcho(A₈);



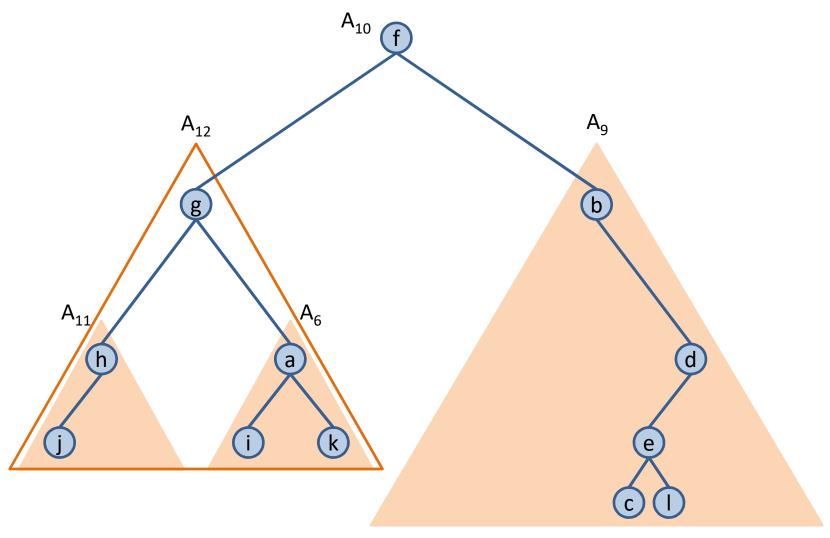
Abin A_{10} ; A_{10} .insertarRaiz('f'); A_{10} .insertarDrcho(A_{9});



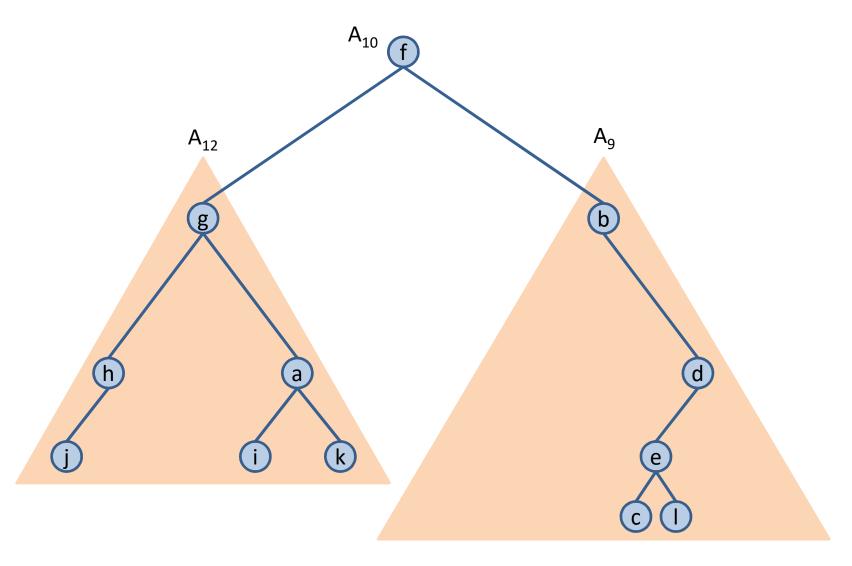
Abin A_{11} ; A_{11} .insertarRaiz('h'); A_{11} .insertarIzqdo(A_7);

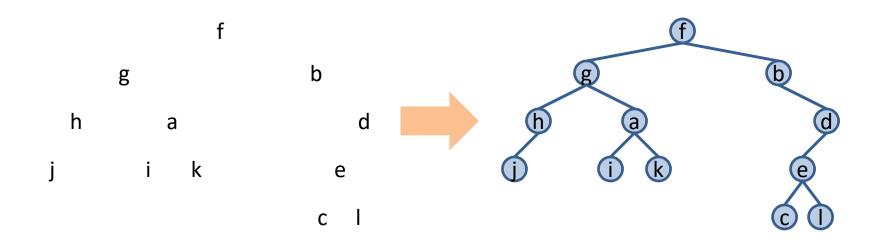


Abin A_{12} ; A_{12} .insertarRaiz('g'); A_{10} .insertarIzqdo(A_{12});



 A_{12} .insertarIzqdo(A_{11}); A_{12} .insertarDrcho(A_6);





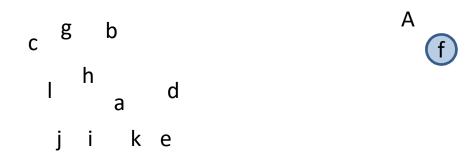
Construcción añadiendo los nodos uno a uno desde la raíz hacia las hojas:

Abin(); // Árbol vacío.
void insertarRaiz(const T& e);
void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);

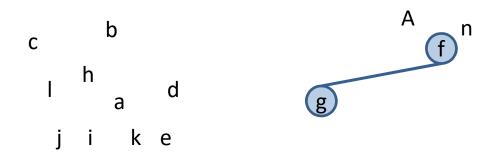
Creación del árbol binario A como un contenedor vacío.

c g b A
c f
l h
l a d
j i k e

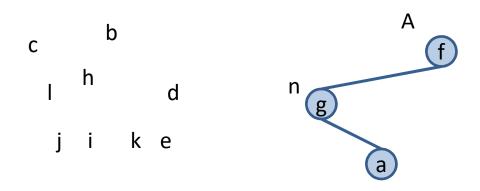
Abin A;



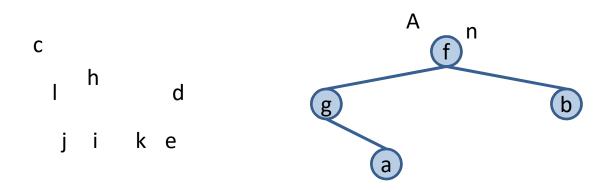
A.insertarRaiz('f');



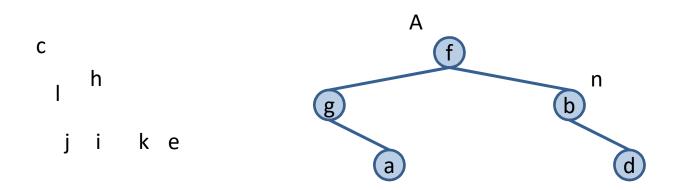
A.insertarHijoIzqdo(n, 'g');



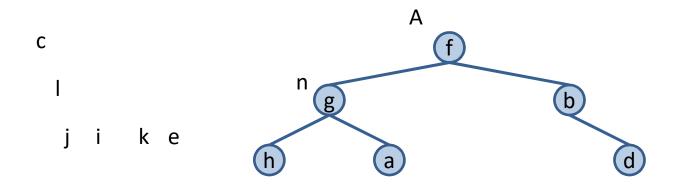
A.insertarHijoDrcho(n, 'a');



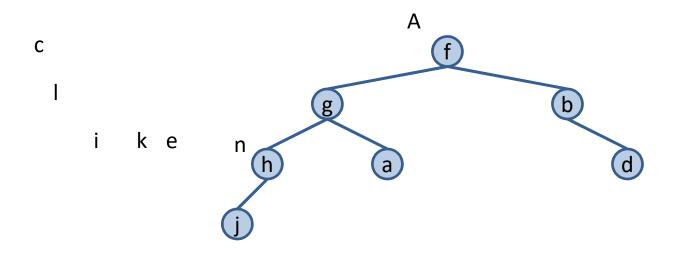
A.insertarHijoDrcho(n, 'b');



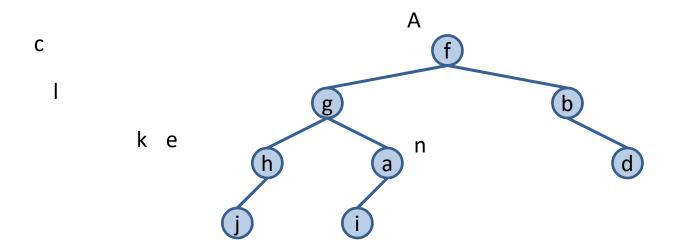
A.insertarHijoDrcho(n, 'd');



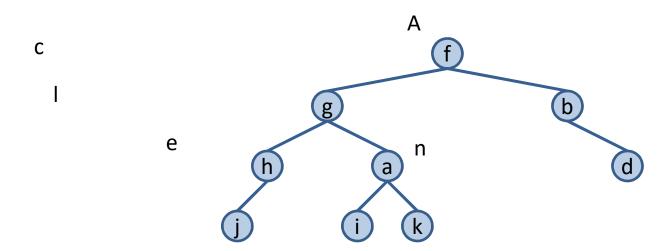
A.insertarHijoIzqdo(n, 'h');



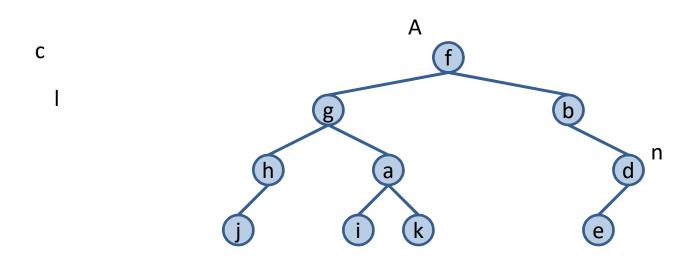
A.insertarHijoIzqdo(n, 'j');



A.insertarHijoIzqdo(n, 'i');

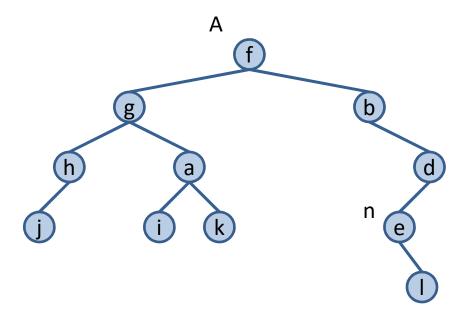


A.insertarHijoDrcho(n, 'k');

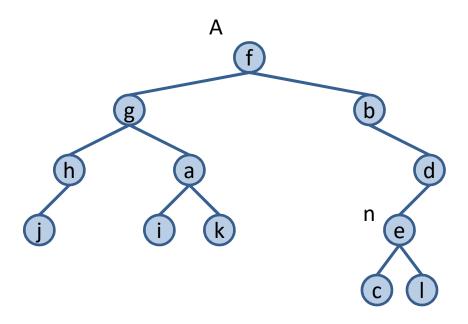


A.insertarHijoIzqdo(n, 'e');

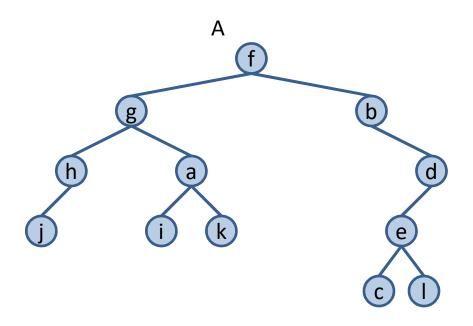
C



A.insertarHijoDrcho(n, 'l');



A.insertarHijoIzqdo(n, 'c');



Especificación de operaciones:

Abin ()

<u>Post</u>: Crea y devuelve un árbol vacío.

void insertarRaiz (const T& e)

Pre: El árbol está vacío.

<u>Post</u>: Inserta el nodo raíz cuyo contenido será *e*.

void insertarHijoIzqdo (nodo n, const T& e)

<u>Pre</u>: *n* es un nodo del árbol que no tiene hijo izquierdo.

<u>Post</u>: Inserta el elemento *e* como hijo izquierdo del nodo *n*.

void insertarHijoDrcho (nodo n, const T& e)

<u>Pre</u>: *n* es un nodo del árbol que no tiene hijo derecho.

<u>Post</u>: Inserta el elemento *e* como hijo derecho del nodo *n*.

void eliminarHijoIzqdo (nodo n)

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Existe *hijolzqdoB(n)* y es una hoja.

<u>Post</u>: Destruye el hijo izquierdo del nodo *n*.

void eliminarHijoDrcho (nodo n)

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Existe *hijoDrchoB(n)* y es una hoja.

<u>Post</u>: Destruye el hijo derecho del nodo *n*.

void eliminarRaiz ()

<u>Pre</u>: El árbol no está vacío y *raizB()* es una hoja.

<u>Post</u>: Destruye el nodo raíz. El árbol queda vacío

bool arbolVacio () const

Post: Devuelve true si el árbol está vacío y false en caso contrario.

const T& elemento(nodo n) const

T& elemento(nodo n)

<u>Pre</u>: *n* es un nodo del árbol.

<u>Post</u>: Devuelve el elemento del nodo *n*.

EDNL

nodo raíz () const

<u>Post</u>: Devuelve el nodo raíz del árbol. Si el árbol está vacío, devuelve *NODO_NULO*.

nodo padre (nodo n) const

Pre: *n* es un nodo del árbol.

<u>Post</u>: Devuelve el padre del nodo *n*. Si *n* es el nodo raíz, devuelve *NODO_NULO*.

nodo hijolządo (nodo n) const

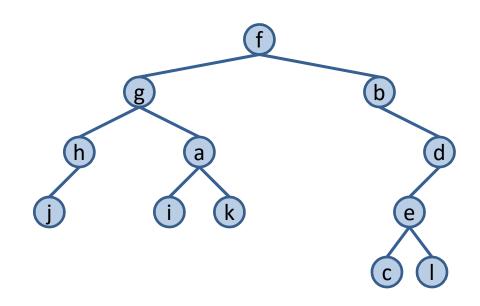
<u>Pre</u>: *n* es un nodo del árbol.

<u>Post</u>: Devuelve el nodo hijo izquierdo del nodo *n*. Si no existe, devuelve *NODO_NULO*.

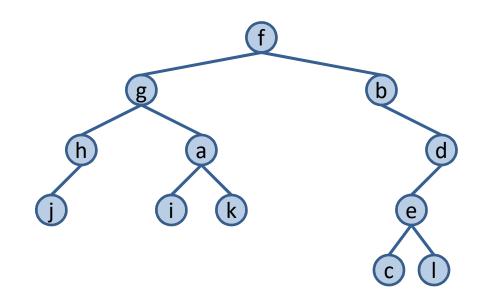
nodo hijoDrcho (nodo n) const

Pre: *n* es un nodo de *A*.

<u>Post</u>: Devuelve el nodo hijo derecho del nodo *n*. Si no existe, devuelve *NODO_NULO*.

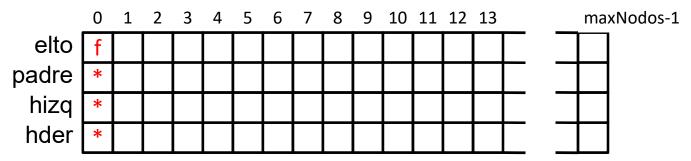


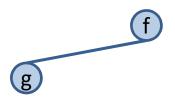
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	j	j	k	е		С					
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9					

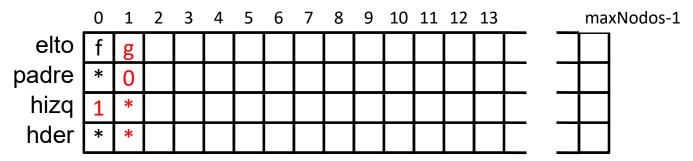


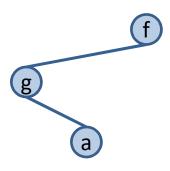
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	j	i	k	е		С					
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9					
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*					
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	10	*	*					



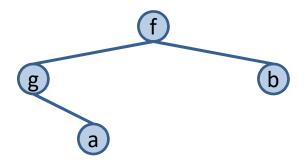




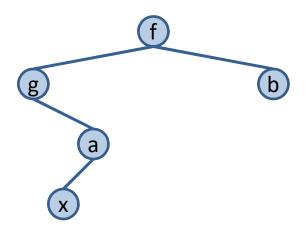




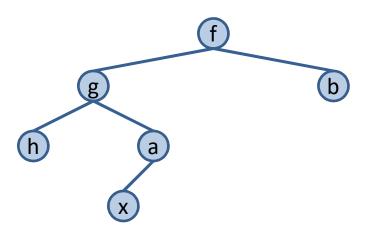
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	a														
padre	*	0	1														
hizq	1	*	*														
hder	*	2	*														



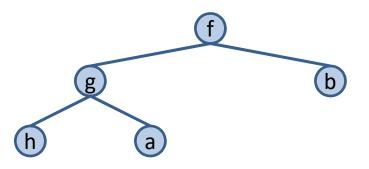
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b													
padre	*	0	1	0													
hizq	1	*	*	*													
hder	3	2	*	*													



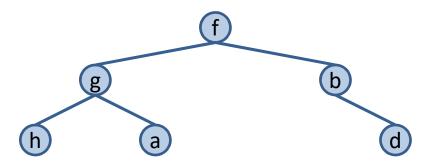
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	X												
padre	*	0	1	0	2												
hizq	1	*	4	*	*												
hder	3	2	*	*	*												



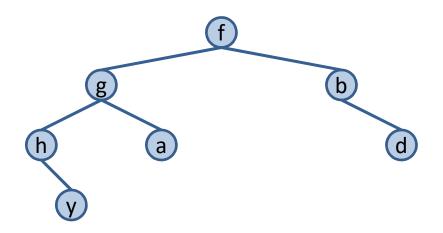
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	Χ	h											
padre	*	0	1	0	2	1											
hizq	1	5	4	*	*	*											
hder	3	2	*	*	*	*											



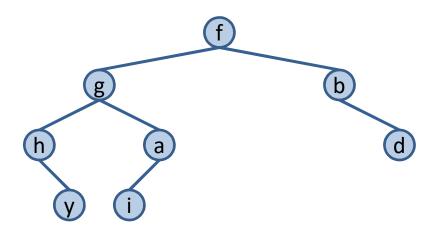
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b		h											
padre	*	0	1	0		1											
hizq	1	5	*	*		*											
hder	3	2	*	*		*											



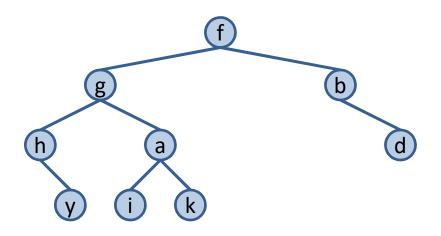
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h											
padre	*	0	1	0	3	1											
hizq	1	5	*	*	*	*											
hder	3	2	*	4	*	*											



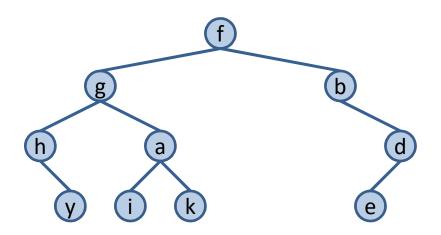
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	У										
padre	*	0	1	0	3	1	5										
hizq	1	5	*	*	*	*	*										
hder	3	2	*	4	*	6	*										



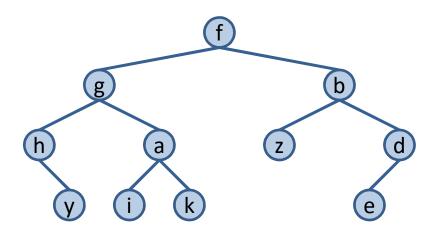
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	У	i									
padre	*	0	1	0	3	1	5	2									
hizq	1	5	7	*	*	*	*	*									
hder	3	2	*	4	*	6	*	*									



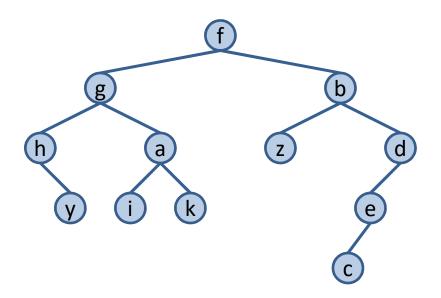
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	У	i	k								
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2								
hizq	1	5	7	*	*	*	*	*	*								
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*								



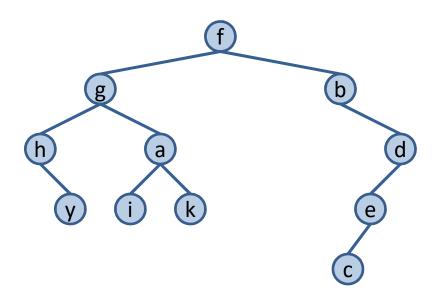
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	У	i	k	е							
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4							
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	*							
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*							



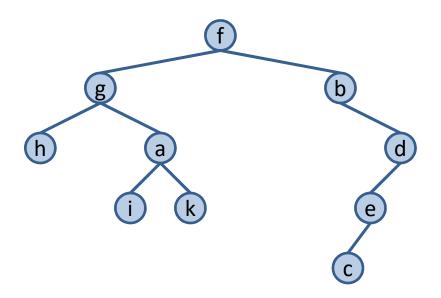
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	у	i	k	е	Z						
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	3						
hizq	1	5	7	10	9	*	*	*	*	*	*						
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*						



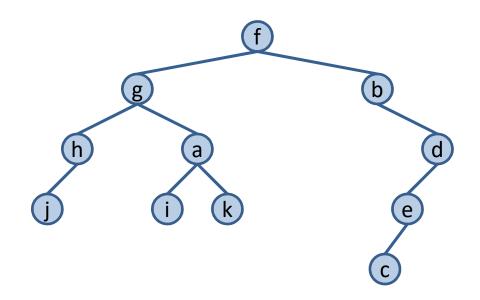
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	У	i	k	е	Z	С					
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	3	9					
hizq	1	5	7	10	9	*	*	*	*	11	*	*					
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*	*					



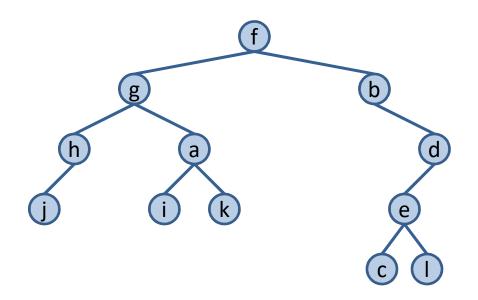
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	у	i	k	е		С					
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4		9					
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	11		*					
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*		*					



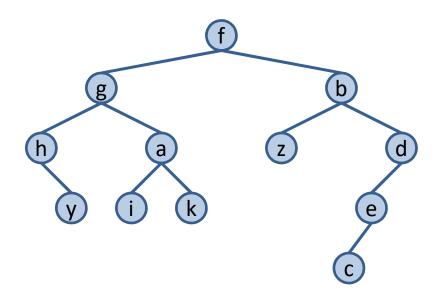
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h		j	k	е		С					
padre	*	0	1	0	3	1		2	2	4		9					
hizq	1	5	7	*	9	*		*	*	11		*					
hder	3	2	8	4	*	*		*	*	*		*					



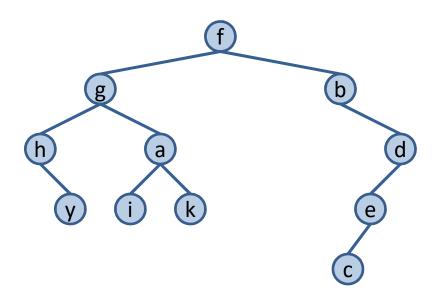
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	j	j	k	е		С					
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4		9					
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11		*					
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	*		*					



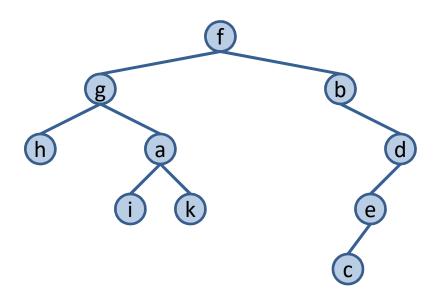
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	j	i	k	е		С					
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9					
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*					
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	10	*	*					



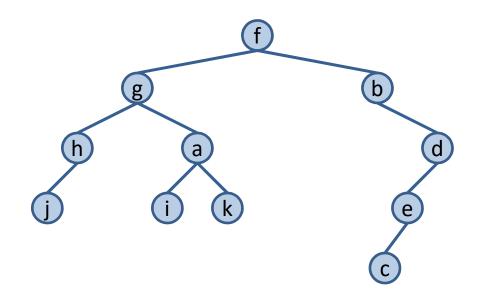
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	у	i	k	е	Z	С					
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	3	9					
hizq	1	5	7	10	9	*	*	*	*	11	*	*					
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*	*					



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	У	i	k	е	Z	С					
padre	0	0	1	0	3	1	5	2	2	4	*	9	*	*		*	
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	11	*	*					
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*	*					



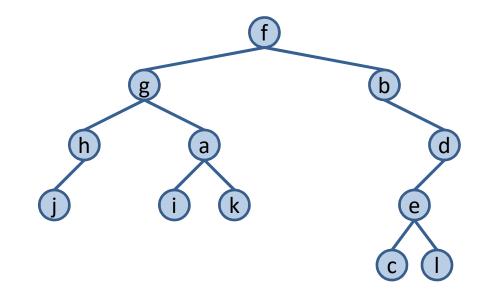
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	У	i	k	е	Z	С					
padre	0	0	1	0	3	1	*	2	2	4	*	9	*	*		*	
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	11	*	*					
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	*	*	*					



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	d	h	j	i	k	е	Z	С					
padre	0	0	1	0	3	1	5	2	2	4	*	9	*	*		*	
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*					
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	*	*	*					

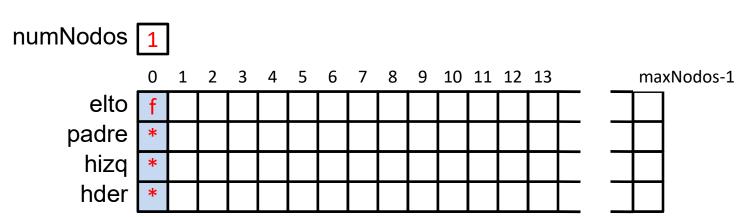
Inserción y eliminación

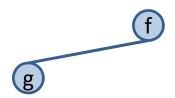
Inserción *O(n)* Eliminación *O(1)*

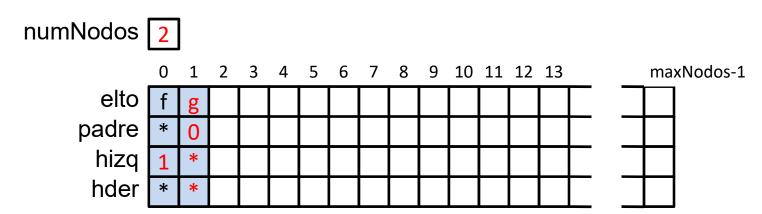


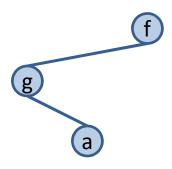
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
elto	f	g	а	b	d	h	j	i	k	е	-	С			
padre	0	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9	*	*	
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	10	*	*			

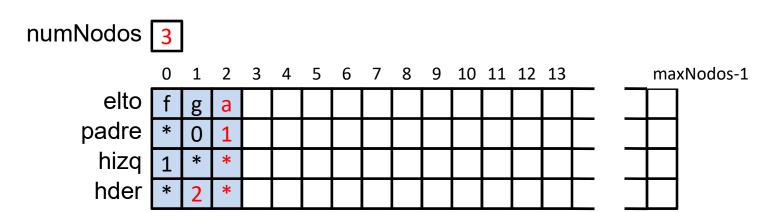


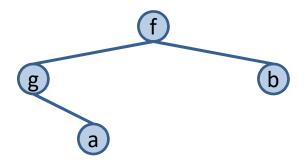


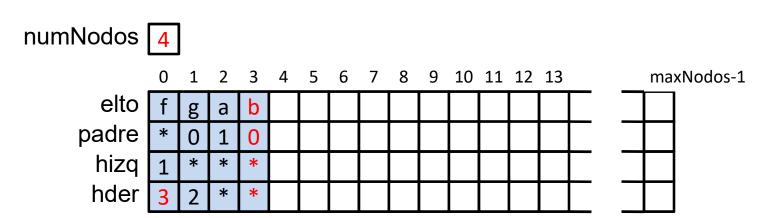


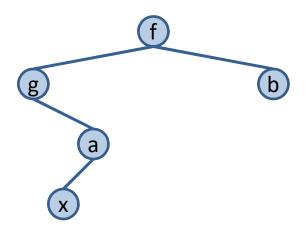


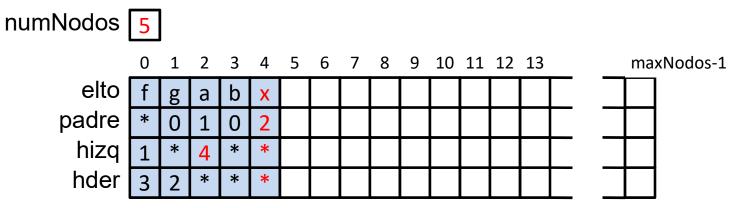


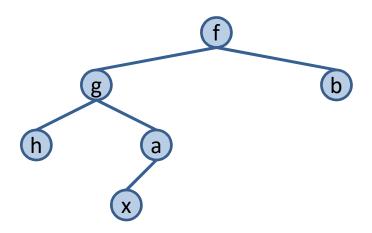


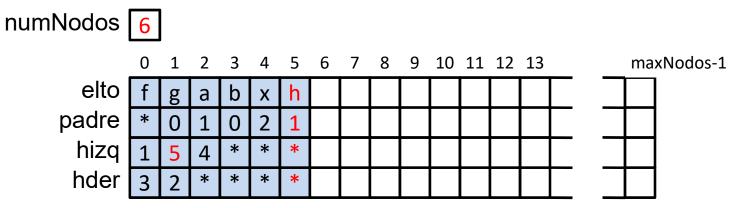


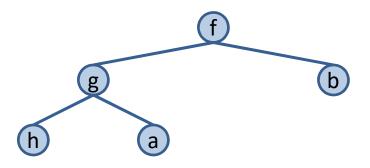


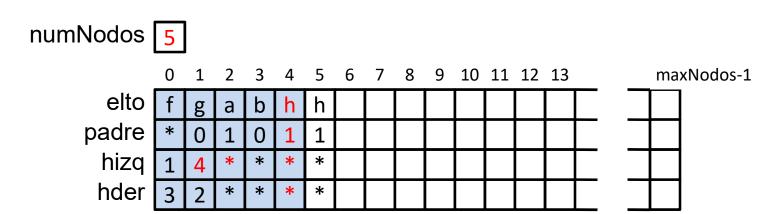


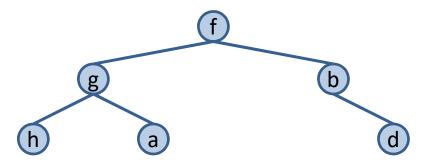


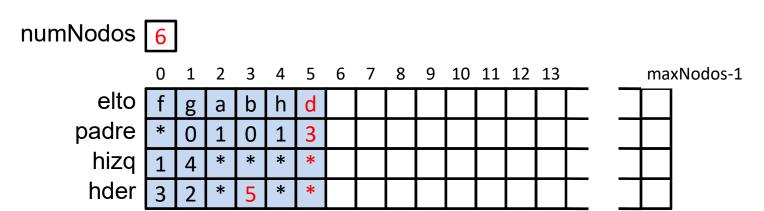


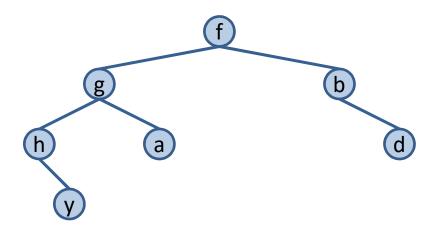


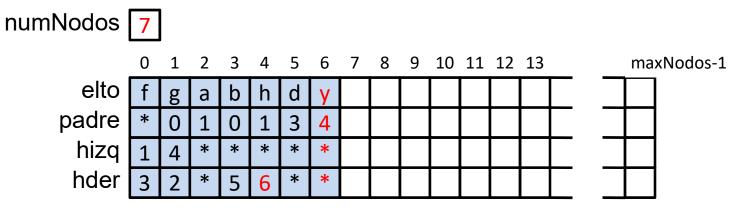


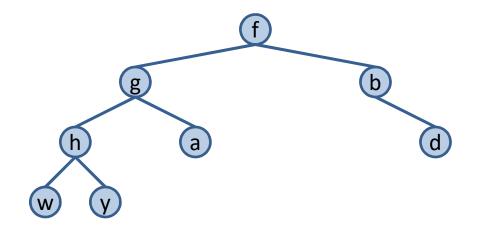






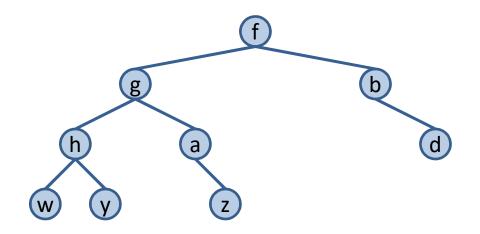






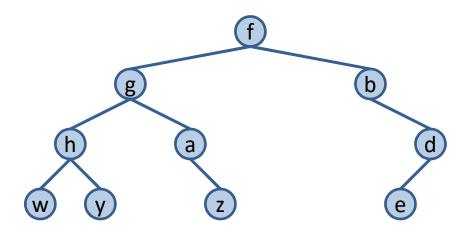


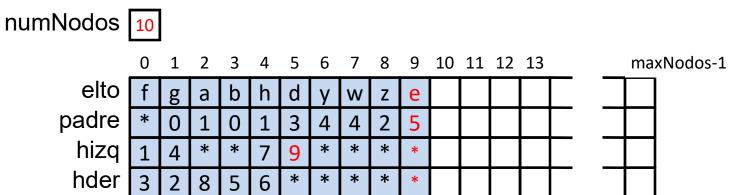
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	h	d	У	W									
padre	*	0	1	0	1	3	4	4									
hizq	1	4	*	*	7	*	*	*									
hder	3	2	*	5	6	*	*	*									

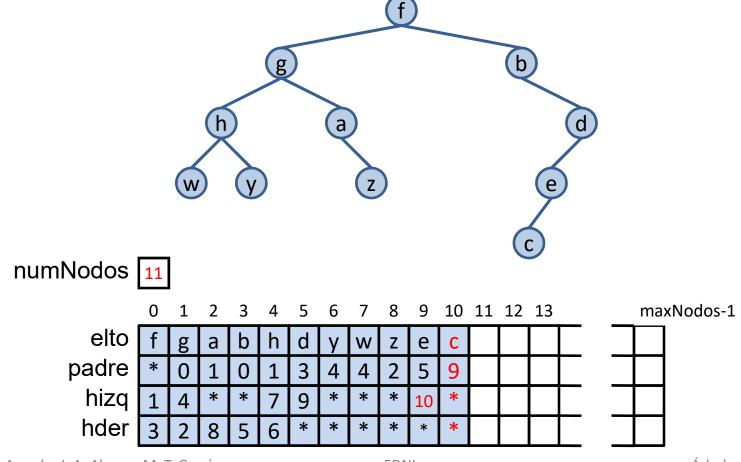


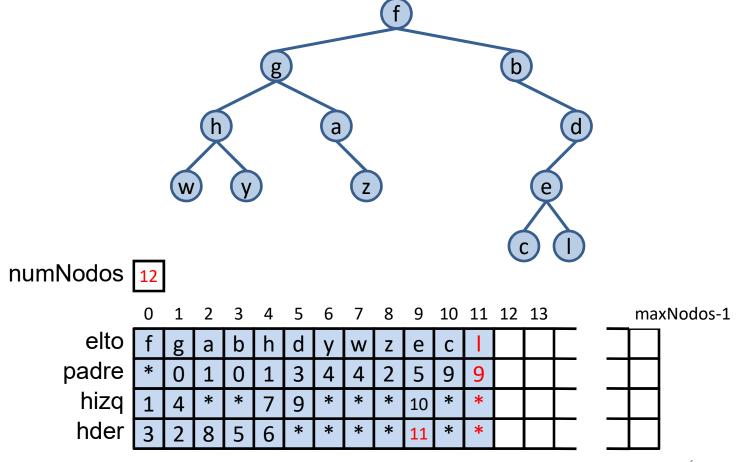


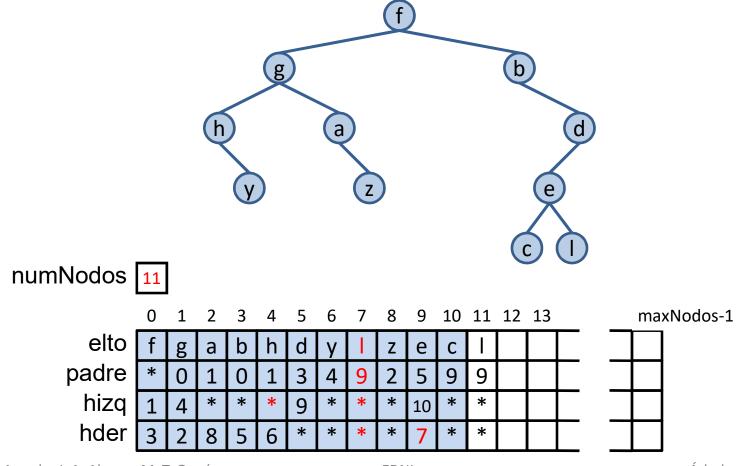
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		ma	xNodos-1
elto	f	g	а	b	h	d	У	W	Z								
padre	*	0	1	0	1	3	4	4	2								
hizq	1	4	*	*	7	*	*	*	*								
hder	3	2	8	5	6	*	*	*	*								

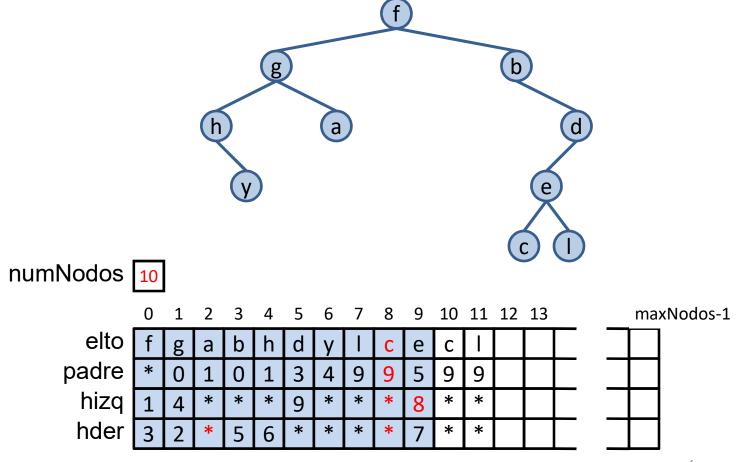


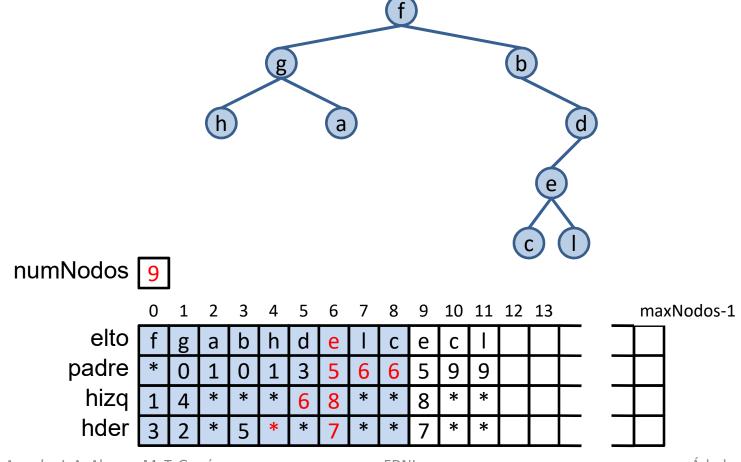


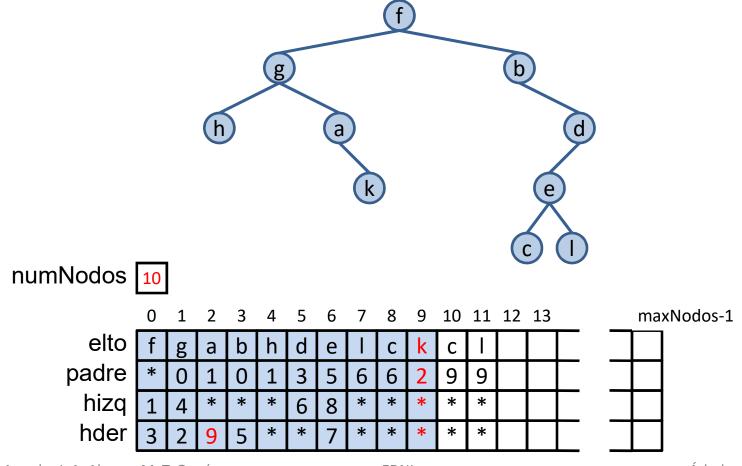


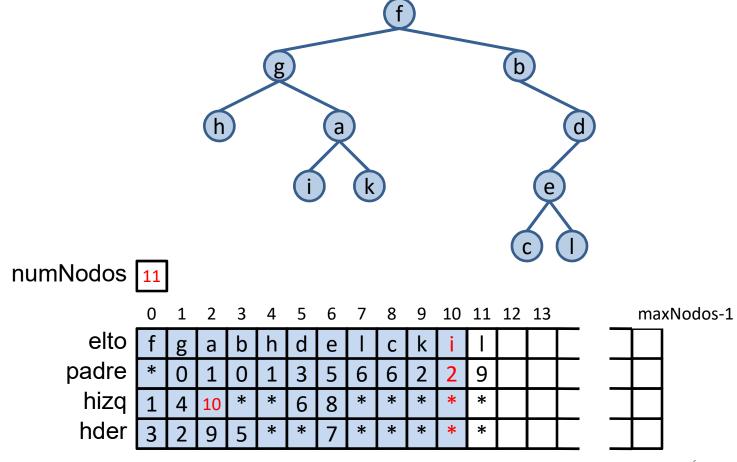


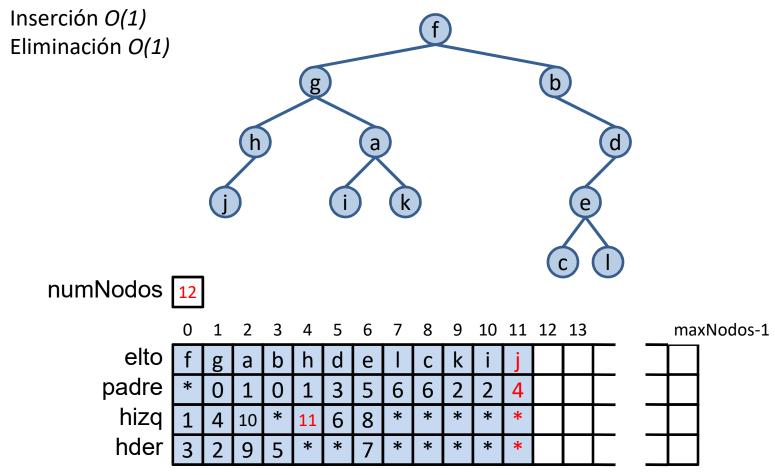












```
#ifndef ABIN VEC0 H
#define ABIN VECO H
#include <cassert>
template <typename T> class Abin {
public:
  typedef int nodo; // indice de la matriz
                   // entre 0 y maxNodos-1
  static const nodo NODO NULO;
  void insertarRaiz(const T& e);
  void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
  void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);
  void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
  void eliminarHijoDrcho(nodo n);
  void eliminarRaiz();
  bool arbolVacio() const;
  const T& elemento(nodo n) const; // acceso a elto, lectura
  T& elemento(nodo n); // acceso a elto, lectura/escritura
```

```
nodo raiz() const;
   nodo padre(nodo n) const;
   nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
   nodo hijoDrcho(nodo n) const;
                             // ctor. de copia
   Abin(const Abin<T>& A);
   Abin<T>& operator = (const Abin<T>& A); // asig. de árboles
   ~Abin();
                                         // destructor
private:
   struct celda {
      T elto;
     nodo padre, hizq, hder;
   };
   celda *nodos; // vector de nodos
   int maxNodos; // tamaño del vector
   int numNodos; // número de nodos del árbol
};
/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Abin<T>::nodo Abin<T>::NODO NULO(-1);
```

```
template <typename T>
inline Abin<T>::Abin(size t maxNodos) :
  nodos(new celda[maxNodos]),
  maxNodos (maxNodos) ,
  numNodos (0)
{ }
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarRaiz(const T& e)
  assert(numNodos == 0);  // Árbol vacío
  numNodos = 1;
  nodos[0].elto = e;
  nodos[0].padre = NODO NULO;
  nodos[0].hizq = NODO NULO;
  nodos[0].hder = NODO NULO;
```

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoIzqdo(Abin<T>::nodo n, const T& e)
   assert(n >= 0 \&\& n < numNodos); // Nodo válido
   assert(nodos[n].hizq == NODO NULO); // n no tiene hijo izqdo.
   assert(numNodos < maxNodos); // Arbol no lleno</pre>
   // Añadir el nuevo nodo al final de la secuencia.
   nodos[n].hizq = numNodos;
   nodos[numNodos].elto = e;
   nodos[numNodos].padre = n;
   nodos[numNodos].hizq = NODO NULO;
   nodos[numNodos].hder = NODO NULO;
   ++numNodos;
}
```

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoDrcho(Abin<T>::nodo n, const T& e)
   assert(n >= 0 && n < numNodos); // Nodo válido</pre>
   assert(nodos[n].hder == NODO NULO); // n no tiene hijo drcho.
   assert(numNodos < maxNodos); // Arbol no lleno</pre>
   // Añadir el nuevo nodo al final de la secuencia.
   nodos[n].hder = numNodos;
   nodos[numNodos].elto = e;
   nodos[numNodos].padre = n;
   nodos[numNodos].hizq = NODO NULO;
   nodos[numNodos].hder = NODO NULO;
   ++numNodos;
}
```

```
template <typename T>
void Abin<T>::eliminarHijoIzqdo(Abin<T>::nodo n)
   nodo hizqdo ;
   assert(n >= 0 && n < numNodos); // Nodo válido</pre>
   hizqdo = nodos[n].hizq;
   assert(hizqdo != NODO NULO); // Existe hijo izqdo. de n.
   assert(nodos[hizqdo].hizq == NODO NULO && // Hijo izqdo. de
          nodos[hizqdo].hder == NODO NULO);  // n es hoja.
   if (hizqdo != numNodos-1)
   {
      // Mover el último nodo a la posición del hijo izqdo.
      nodos[hizqdo] = nodos[numNodos-1];
      // Actualizar la posición del hijo (izquierdo o derecho)
      // en el padre del nodo movido.
      if (nodos[nodos[hizqdo].padre].hizq == numNodos-1)
         nodos[nodos[hizqdo].padre].hizq = hizqdo;
      else
         nodos[nodos[hizqdo].padre].hder = hizqdo;
```

```
template <typename T>
void Abin<T>::eliminarHijoDrcho(Abin<T>::nodo n)
   nodo hdrcho;
   assert(n >= 0 && n < numNodos); // Nodo válido</pre>
   hdrcho = nodos[n].hder;
   assert(hdrcho != NODO NULO); // Existe hijo drcho. de n.
   assert(nodos[hdrcho].hizq == NODO NULO && // Hijo drcho. de
          nodos[hdrcho].hder == NODO NULO);  // n es hoja.
   if (hdrcho != numNodos-1)
   {
      // Mover el último nodo a la posición del hijo drcho.
      nodos[hdrcho] = nodos[numNodos-1];
      // Actualizar la posición del hijo (izquierdo o derecho)
      // en el padre del nodo movido.
      if (nodos[nodos[hdrcho].padre].hizq == numNodos-1)
         nodos[nodos[hdrcho].padre].hizq = hdrcho;
      else
         nodos[nodos[hdrcho].padre].hder = hdrcho;
```

```
// Si el nodo movido tiene hijos,
      // actualizar la posición del padre.
      if (nodos[hdrcho].hizq != NODO NULO)
         nodos[nodos[hdrcho].hizq].padre = hdrcho;
      if (nodos[hdrcho].hder != NODO NULO)
         nodos[nodos[hdrcho].hder].padre = hdrcho;
   nodos[n].hder = NODO NULO;
   --numNodos;
}
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarRaiz()
{
   assert(numNodos == 1);
  numNodos = 0;
}
```

```
template <typename T>
inline bool Abin<T>::arbolVacio() const
   return (numNodos == 0);
template <typename T>
inline const T& Abin<T>::elemento(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n >= 0 \&\& n < numNodos);
   return nodos[n].elto;
template <typename T>
inline T& Abin<T>::elemento(Abin<T>::nodo n)
   assert(n >= 0 \&\& n < numNodos);
   return nodos[n].elto;
```

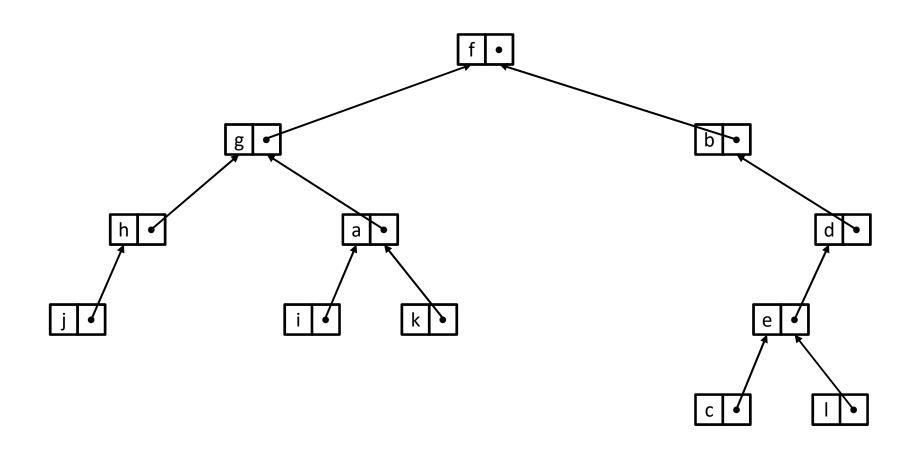
```
template <typename T>
inline typename Abin<T>::nodo Abin<T>::raiz() const
{
   return (numNodos > 0) ? 0 : NODO NULO;
}
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::padre(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n >= 0 \&\& n < numNodos);
   return nodos[n].padre;
}
```

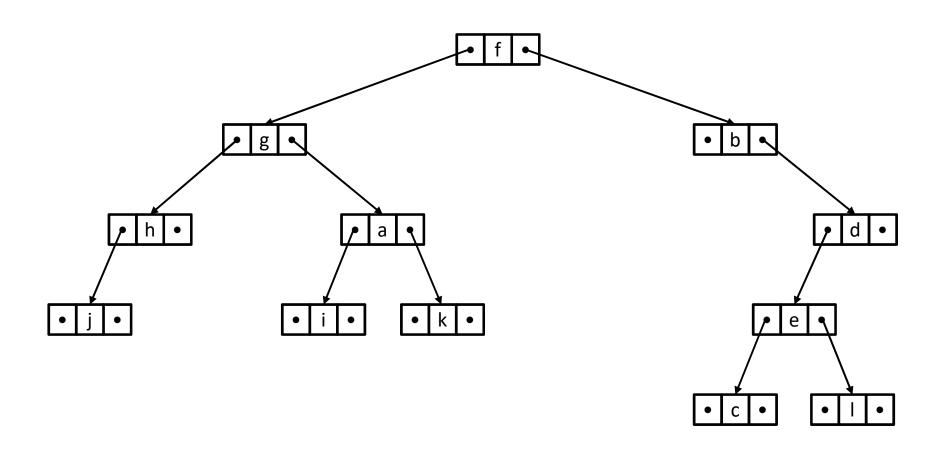
```
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoIzqdo(Abin<T>::nodo n) const
{
    assert(n >= 0 && n < numNodos);
    return nodos[n].hizq;
}

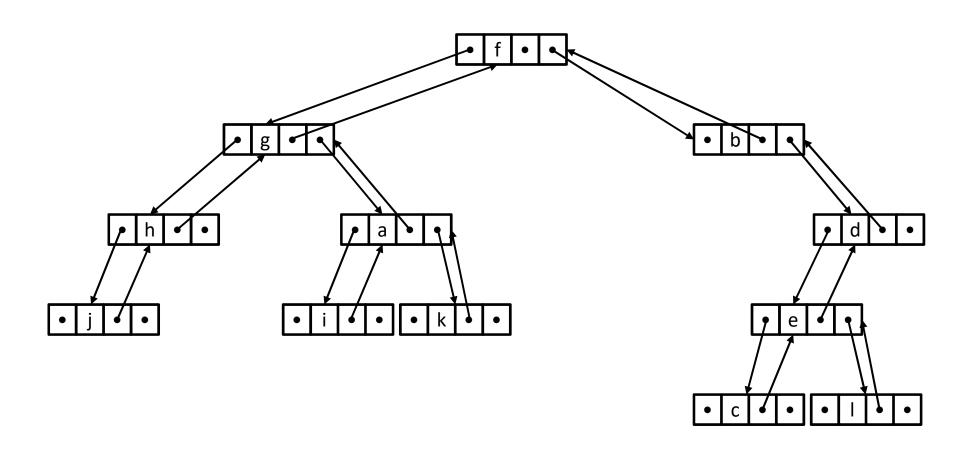
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoDrcho(Abin<T>::nodo n) const
{
    assert(n >= 0 && n < numNodos);
    return nodos[n].hder;
}</pre>
```

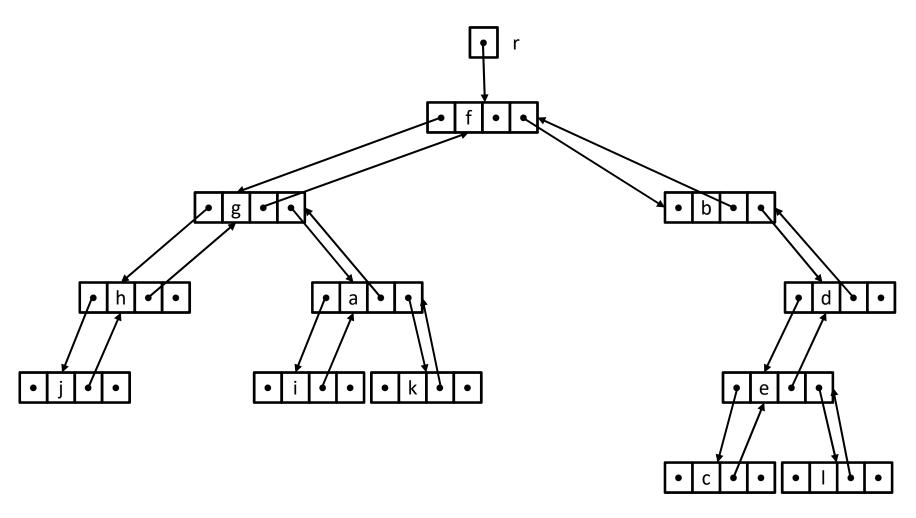
```
template <typename T>
Abin<T>::Abin(const Abin<T>& A) :
  nodos(new celda[A.maxNodos]),
  maxNodos(A.maxNodos),
  numNodos (A.numNodos)
  // Copiar el vector.
  nodos[n] = a.nodos[n];
template <typename T>
inline Abin<T>::~Abin()
  delete[] nodos;
```

```
template <typename T>
Abin<T>& Abin<T>::operator = (const Abin<T>& A)
   if (this != &A) // Evitar autoasignación.
   {
      // Destruir el vector y crear uno nuevo si es necesario.
      if (maxNodos != A.maxNodos)
         delete[] nodos;
         maxNodos = A.maxNodos;
         nodos = new celda[maxNodos];
      // Copiar el vector.
      numNodos = A.numNodos;
      for (nodo n = 0; n \le numNodos-1; n++)
         nodos[n] = A.nodos[n];
   return *this;
#endif // ABIN VECO H
```









```
#ifndef ABIN H
#define ABIN H
#include <cassert>
template <typename T> class Abin {
   struct celda; // declaración adelantada privada
public:
   typedef celda* nodo;
   static const nodo NODO NULO;
                                          // constructor
   Abin();
   void insertarRaiz(const T& e);
   void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
   void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);
   void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
   void eliminarHijoDrcho(nodo n);
   void eliminarRaiz();
   bool arbolVacio() const;
   const T& elemento(nodo n) const; // acceso a elto, lectura
   T& elemento(nodo n); // acceso a elto, lectura/escritura
   nodo raiz() const;
```

```
nodo padre(nodo n) const;
   nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
   nodo hijoDrcho(nodo n) const;
                            // ctor. de copia
   Abin(const Abin<T>& a);
   Abin<T>& operator = (const Abin<T>& A); // asiq.de árboles
   ~Abin();
                                          // destructor
private:
   struct celda {
      T elto:
      nodo padre, hizq, hder;
      celda(const T& e, nodo p = NODO NULO): elto(e),
        padre(p), hizq(NODO NULO), hder(NODO NULO) {}
   };
   nodo r; // nodo raíz del árbol
   void destruirNodos(nodo& n);
   nodo copiar(nodo n);};
};
/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Abin<T>::nodo Abin<T>::NODO NULO(0);
```

```
/* Métodos públicos
/*----*/
template <typename T>
inline Abin<T>::Abin() : r(NODO NULO) {}
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarRaiz(const T& e)
{
  assert(r == NODO_NULO);  // Árbol vacío
  r = new celda(e);
}
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoIzqdo(Abin<T>::nodo n, const T& e)
{
  assert(n != NODO NULO);
  assert(n->hizq == NODO_NULO); // No existe hijo izqdo.
  n->hizq = new celda(e, n);
```

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoDrcho(Abin<T>::nodo n, const T& e)
   assert(n != NODO NULO);
   assert(n->hder == NODO NULO); // No existe hijo drcho.
   n->hder = new celda(e, n);
}
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarHijoIzqdo(Abin<T>::nodo n)
{
   assert(n != NODO NULO);
   assert(n->hizq != NODO NULO); // Existe hijo izqdo.
   assert(n->hizq->hizq == NODO NULO && // Hijo izqdo.
          n->hizq->hder == NODO_NULO);  // es hoja.
   delete n->hizq;
   n->hizq = NODO NULO;
}
```

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarHijoDrcho(Abin<T>::nodo n)
   assert(n != NODO NULO);
   assert(n->hder != NODO NULO); // Existe hijo drcho.
   assert(n->hder->hizq == NODO NULO && // Hijo drcho.
         n->hder->hder == NODO NULO);  // es hoja
   delete n->hder;
  n->hder = NODO NULO;
}
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarRaiz()
{
   assert(r != NODO NULO); // Árbol no vacío.
   assert(r->hizq == NODO NULO &&
          r->hder == NODO NULO); // La raíz es hoja.
   delete r;
   r = NODO NULO;
}
```

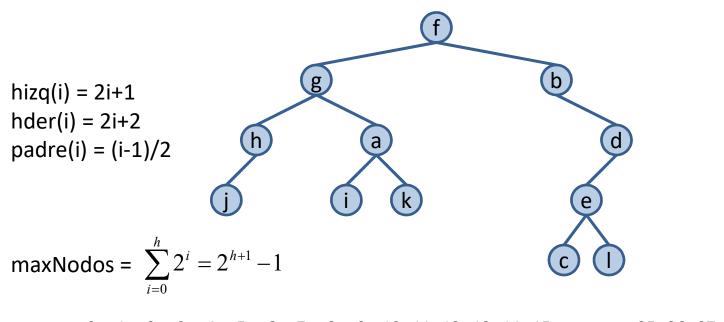
```
template <typename T> inline bool Abin<T>::arbolVacio() const
{ return (r == NODO NULO); }
template <typename T>
inline const T& Abin<T>::elemento(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n != NODO NULO);
   return n->elto;
}
template <typename T>
inline T& Abin<T>::elemento(Abin<T>::nodo n)
{
   assert(n != NODO NULO);
   return n->elto;
}
template <typename T>
inline typename Abin<T>::nodo Abin<T>::raiz() const
{ return r; }
```

```
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::padre(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n != NODO NULO);
   return n->padre;
}
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoIzqdo(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n != NODO NULO);
  return n->hizq;
}
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoDrcho(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n != NODO NULO);
   return n->hder;
```

```
template <typename T>
inline Abin<T>::Abin(const Abin<T>& A)
   r = copiar(A.r); // Copiar raíz y descendientes.
}
template <typename T>
Abin<T>& Abin<T>::operator = (const Abin<T>& A)
{
   if (this != &A) // Evitar autoasignación.
      this->~Abin(); // Vaciar el árbol.
      r = copiar(A.r); // Copiar raíz y descendientes.
   return *this;
}
```

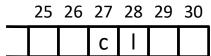
```
template <typename T>
inline Abin<T>::~Abin()
   destruirNodos(r); // Vaciar el árbol.
}
/* Métodos privados
// Destruye un nodo y todos sus descendientes
template <typename T>
void Abin<T>::destruirNodos(Abin<T>::nodo& n)
{
   if (n != NODO NULO)
      destruirNodos(n->hizq);
      destruirNodos(n->hder);
      delete n;
      n = NODO NULO;
```

```
// Devuelve una copia de un nodo y todos sus descendientes
template <typename T>
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::copiar(Abin<T>::nodo n)
{
   nodo m = NODO NULO;
   if (n != NODO NULO) {
     m = new celda(n->elto); // Copiar n.
     m->hizq = copiar(n->hizq); // Copiar subárbol izqdo.
      if (m->hizq != NODO NULO) m->hizq->padre = m;
     m->hder = copiar(n->hder); // Copiar subárbol drcho.
      if (m->hder != NODO NULO) m->hder->padre = m;
   }
   return m;
}
#endif // ABIN H
```

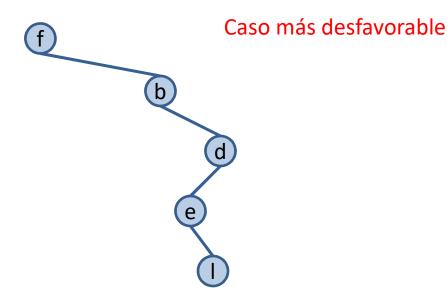


maxNodos-1

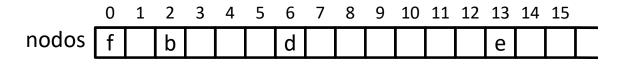
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
nodos	f	g	b	h	а		d	j		i	k			е			

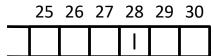


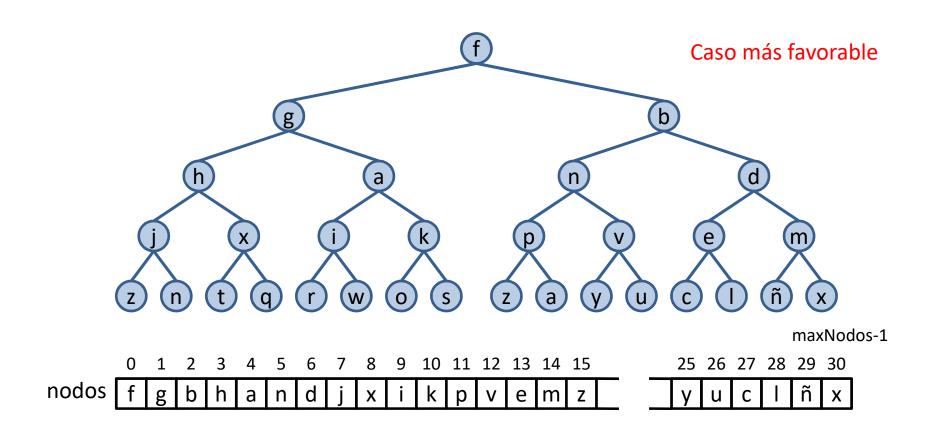
Sea un árbol de altura máxima h. La ausencia de un nodo en el nivel $n \le h$ provocará $2^{h-n+1}-1$ posiciones libres en el vector.

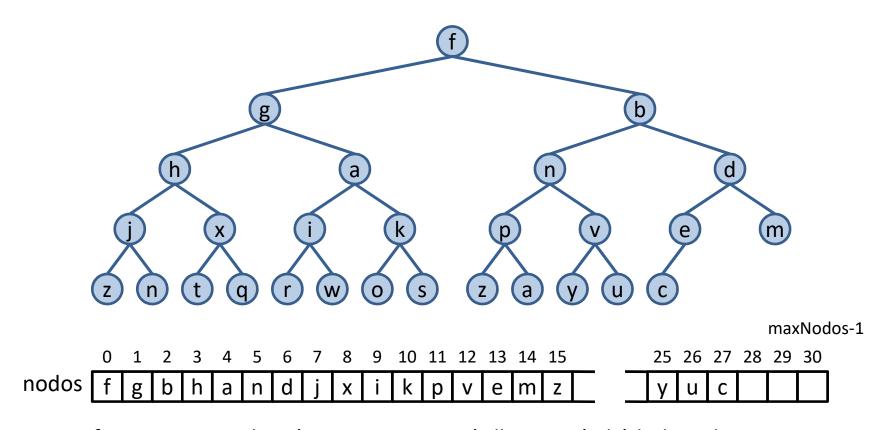


maxNodos-1

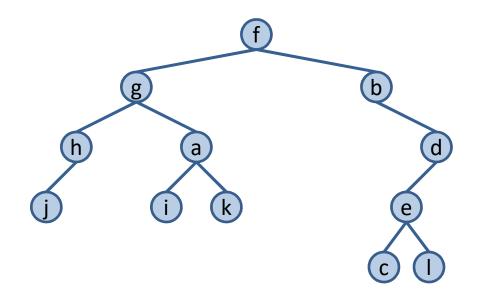




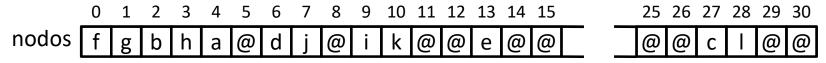




La eficiencia espacial será mayor cuanto más lleno esté el árbol, es decir, cuantos menos nodos falten y, por tanto, más bajos sean los niveles en que falten.



maxNodos-1



Un valor del tipo de los elementos del árbol no significativo en la aplicación se utilizará para marcar las posiciones libres del vector.

```
#ifndef ABIN VEC1 H
#define ABIN VEC1 H
#include <cassert>
template <typename T> class Abin {
public:
   typedef int nodo; // indice del vector,
                     // entre 0 y maxNodos-1
   static const nodo NODO NULO;
   explicit Abin(size t maxNodos, const T& e nulo = T());
   void insertarRaiz(const T& e);
   void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
   void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);
   void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
   void eliminarHijoDrcho(nodo n);
   void eliminarRaiz();
   bool arbolVacio() const;
```

```
const T& elemento(nodo n) const; // acceso a elto, lectura
   T& elemento(nodo n); // acceso a elto, lectura/escritura
   nodo raiz() const;
   nodo padre(nodo n) const;
   nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
   nodo hijoDrcho(nodo n) const;
   Abin(const Abin<T>& a);
                                         // ctor. de copia
   Abin<T>& operator = (const Abin<T>& a); // asig. de árboles
   ~Abin();
                                          // destructor
private:
   T* nodos; // vector de nodos
   int maxNodos; // tamaño del vector
   T ELTO NULO; // marca celdas vacías
};
/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Abin<T>::nodo Abin<T>::NODO NULO(-1);
```

```
template <typename T>
Abin<T>::Abin(size t maxNodos, const T& e_nulo) :
   nodos(new T[maxNodos]),
  maxNodos (maxNodos) ,
  ELTO NULO(e nulo)
{
   // Marcar todas las celdas libres.
   for (nodo n = 0; n \le maxNodos-1; n++)
      nodos[n] = ELTO NULO;
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarRaiz(const T& e)
   assert(nodos[0] == ELTO NULO); // Árbol vacío.
  nodos[0] = e;
```

```
template <typename T> inline
void Abin<T>::insertarHijoIzqdo(Abin<T>::nodo n,const T& e)
{
   assert(n >= 0 && n <= \max Nodos -1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol.
   assert(2*n+1 < maxNodos); // Hijo izqdo. cabe en el árbol.</pre>
   assert(nodos[2*n+1] == ELTO NULO); // n no tiene hijo izqdo.
   nodos[2*n+1] = e;
template <typename T> inline
void Abin<T>::insertarHijoDrcho(Abin<T>::nodo n,const T& e)
   assert(n \ge 0 \&\& n < maxNodos-1); // Nodo válido
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol
   assert(2*n+2 < maxNodos); // Hijo drcho. cabe en el árbol.
   assert(nodos[2*n+2] == ELTO NULO); // n no tiene hijo drcho.
   nodos[2*n+2] = e;
  J. F. Argudo; J. A. Alonso; M. T. García
                                                      Árboles binarios 118
                                EDNL
```

```
template <typename T> inline
void Abin<T>::eliminarHijoIzqdo(Abin<T>::nodo n)
{
   assert(n >= 0 && n <= \max Nodos - 1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol.
   assert(2*n+1 < maxNodos); // Hijo izqdo. cabe en el árbol.</pre>
   assert(nodos[2*n+1] != ELTO NULO); // n tiene hijo izqdo.
   if (4*n+4 < maxNodos) // Caben los hijos del hijo izgdo. de n
      assert(nodos[4*n+3] == ELTO NULO && // Hijo izgdo. de
            nodos[4*n+4] == ELTO NULO); // n es hoja
   else if (4*n+3 < maxNodos) //Sólo cabe h. izq. de h. izq. de n
      assert(nodos[4*n+3] == ELTO NULO); //Hijo izq. de n es hoja
  nodos[2*n+1] = ELTO NULO;
```

```
template <typename T> inline
void Abin<T>::eliminarHijoDrcho(Abin<T>::nodo n)
{
   assert(n >= 0 && n <= \max Nodos - 1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol.
   assert(2*n+2 < maxNodos); // Hijo drcho. cabe en el árbol.
  assert(nodos[2*n+2] != ELTO NULO); // n tiene hijo drcho.
   if (4*n+6 < maxNodos) // Caben los hijos del hijo drcho. de n
      assert(nodos[4*n+5] == ELTO NULO && // Hijo drcho. de
             nodos[4*n+6] == ELTO NULO); // n es hoja
  else if (4*n+5 < maxNodos) //Sólo cabe h. izq. de h. drch de n
      assert(nodos[4*n+5] == ELTO NULO); //Hijo drch de n es hoja
  nodos[2*n+2] = ELTO NULO;
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarRaiz()
{
   assert(nodos[0] != ELTO NULO);  // Arbol no vacío
   assert(nodos[1] == ELTO NULO &&
          nodos[2] == ELTO NULO); // La raíz es hoja
  nodos[0] = ELTO NULO;
  J. F. Argudo: J. A. Alonso: M. T. García
                               EDNL
```

```
template <typename T>
inline bool Abin<T>::arbolVacio() const
   return (nodos[0] == ELTO NULO);
template <typename T>
inline const T& Abin<T>::elemento(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n >= 0 && n <= \max Nodos -1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol.
   return nodos[n];
template <typename T>
inline T& Abin<T>::elemento(Abin<T>::nodo n)
   assert(n >= 0 && n <= \max Nodos - 1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol.
  return nodos[n];
```

```
template <typename T>
inline typename Abin<T>::nodo Abin<T>::raiz() const
{
   return (nodos[0] == ELTO_NULO) ? NODO_NULO : 0;
}

template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::padre(Abin<T>::nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO); // Nodo del árbol.

return (n == 0) ? NODO_NULO : (n-1)/2;
}</pre>
```

```
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoIzqdo(Abin<T>::nodo n) const
   assert(n >= 0 && n <= \max Nodos - 1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol.
   return (2*n+1 \ge \max Nodos | | nodos [2*n+1] == ELTO NULO)?
             NODO NULO : 2*n+1;
}
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoDrcho(Abin<T>::nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n <= \max Nodos - 1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO NULO);  // Nodo del árbol.
   return (2*n+2 \ge maxNodos | | nodos[2*n+2] == ELTO NULO)?
             NODO NULO : 2*n+2;
```

```
template <typename T>
Abin<T>::Abin(const Abin<T>& A) :
   nodos(new T[A.maxNodos]),
   maxNodos(A.maxNodos),
   ELTO NULO (A.ELTO NULO)
{
   // Copiar el vector
   for (nodo n = 0; n \le maxNodos-1; n++)
      nodos[n] = A.nodos[n];
}
template <typename T>
inline Abin<T>::~Abin()
   delete[] nodos;
```

```
template <typename T>
Abin<T>& Abin<T>::operator = (const Abin<T>& A)
{
   if (this != &A) // Evitar autoasignación.
      // Destruir el vector y crear uno nuevo si es necesario
      if (maxNodos != A.maxNodos)
         delete[] nodos;
         maxNodos = A.maxNodos;
         nodos = new T[maxNodos];
      ELTO NULO = A.ELTO NULO;
      // Copiar el vector.
      for (nodo n = 0; n \le maxNodos-1; n++)
         nodos[n] = A.nodos[n];
   return *this;
#endif // ABIN VEC1 H
```