Estructuras de Datos no Lineales

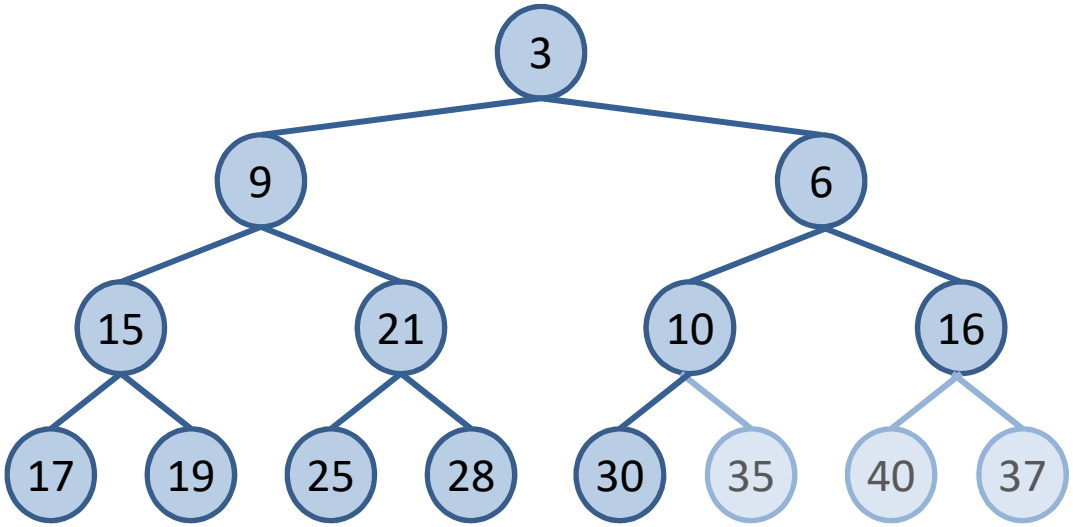
1.7. Árboles parcialmente ordenados (montículos)

José Fidel Argudo Argudo
José Antonio Alonso de la Huerta
Mª Teresa García Horcajadas

Versión 2.0

Árboles parcialmente ordenados

• Un **árbol completo** es un árbol con todos sus niveles llenos, con la posible excepción del nivel más bajo, al cuál sólo le pueden faltar nodos por la derecha.



• Un árbol binario completo de altura *h* tiene entre $1+\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h$ y $\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1}-1$ nodos. Esto implica que un árbol binario completo de *n* nodos tiene una altura $h = log_2\ n$.

Árboles parcialmente ordenados

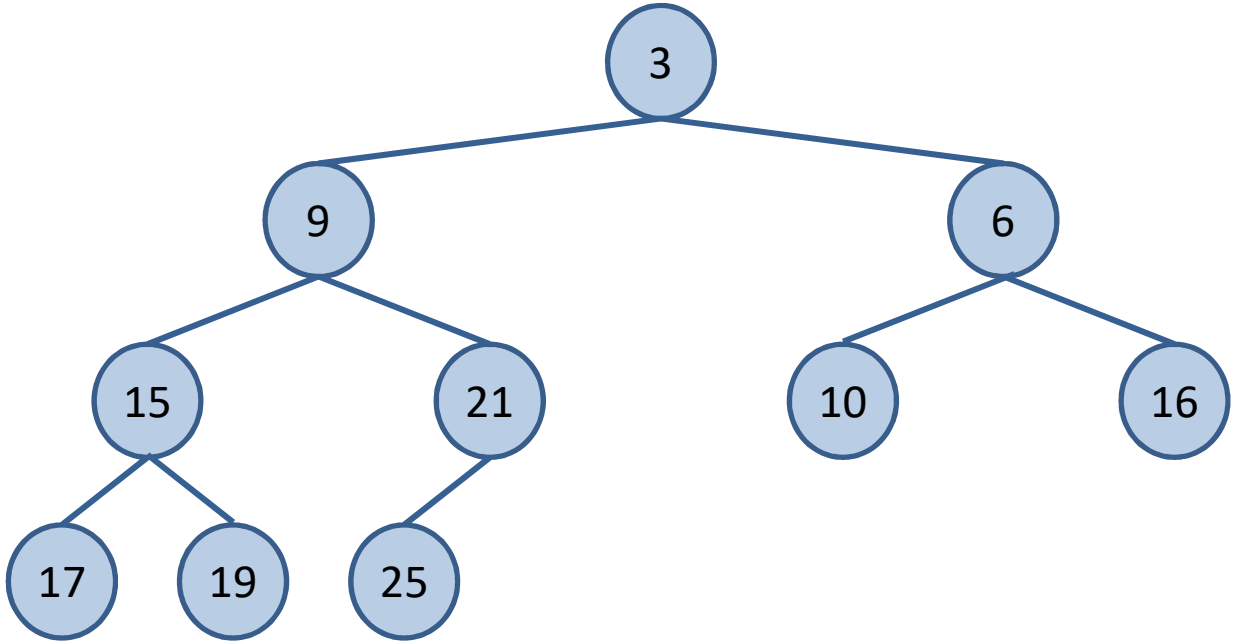
Un **árbol parcialmente ordenado** (o montículo) es un **árbol completo** en el que **el valor en cualquier nodo es menor que el de todos sus descendientes**. Por tanto, para todo nodo *x* de un APO el valor en el padre de *x* es menor o igual que el valor en *x* (con excepción de la raíz, que no tiene padre).

Operaciones básicas: acceso al mínimo, inserción y eliminación

- **El mínimo se puede obtener en un tiempo O(1)**, puesto que se encuentra en la raíz.
- La propiedad de completitud implica que la altura menor posible de un APO de *n* nodos es $h = log_2 n$.
- Las propiedad de orden de un APO permite efectuar las inserciones y eliminaciones de nodos en un tiempo *O(h)* en el peor caso.
- En consecuencia, **las inserciones y eliminaciones en un APO son $O(log_2 n)$**.

Principal aplicación: representación de **colas con prioridad**.

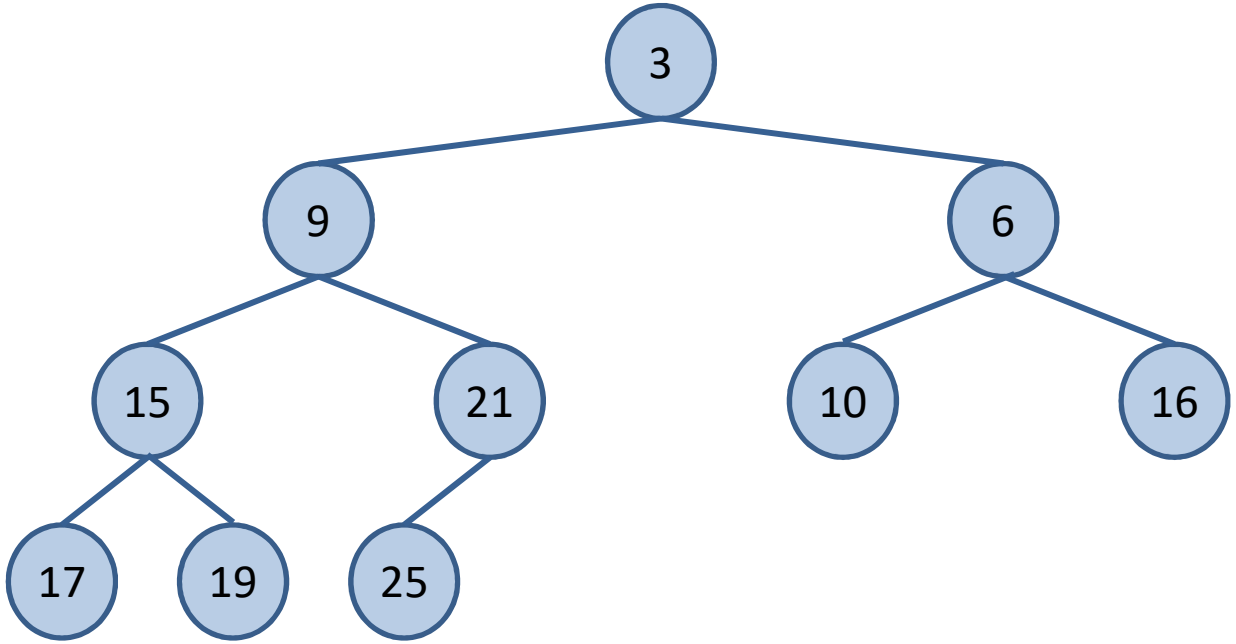
Árboles parcialmente ordenados



Altura = 3

Número de nodos (n): $2^3 \leq n \leq 2^4 - 1$

Representación de un APO mediante un vector de posiciones relativas



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
nodos	3	9	6	15	21	10	16	17	19	25					

maxNodos = 15

ultimo = 9

```
#ifndef APO_H
#define APO_H
#include <cassert>

template <typename T> class Apo {
public:
   explicit Apo(size_t maxNodos);        // constructor
   void insertar(const T& e);
   void suprimir();
   const T& cima() const;
   bool vacio() const;
   Apo(const Apo<T>& A);                 // ctor. de copia
   Apo<T>& operator =(const Apo<T>& A); // asignación de apo
   ~Apo();                               // destructor
private:
   typedef int nodo; // índice del vector
                     // entre 0 y maxNodos-1
   T* nodos;       // vector de nodos
   int maxNodos;   // tamaño del vector
   nodo ultimo;    // último nodo del árbol
```

```
    nodo padre(nodo i) const { return (i-1)/2; }
    nodo hIzq(nodo i)  const { return 2*i+1; }
    nodo hDer(nodo i)  const { return 2*i+2; }
    void flotar(nodo i);
    void hundir(nodo i);
};
```

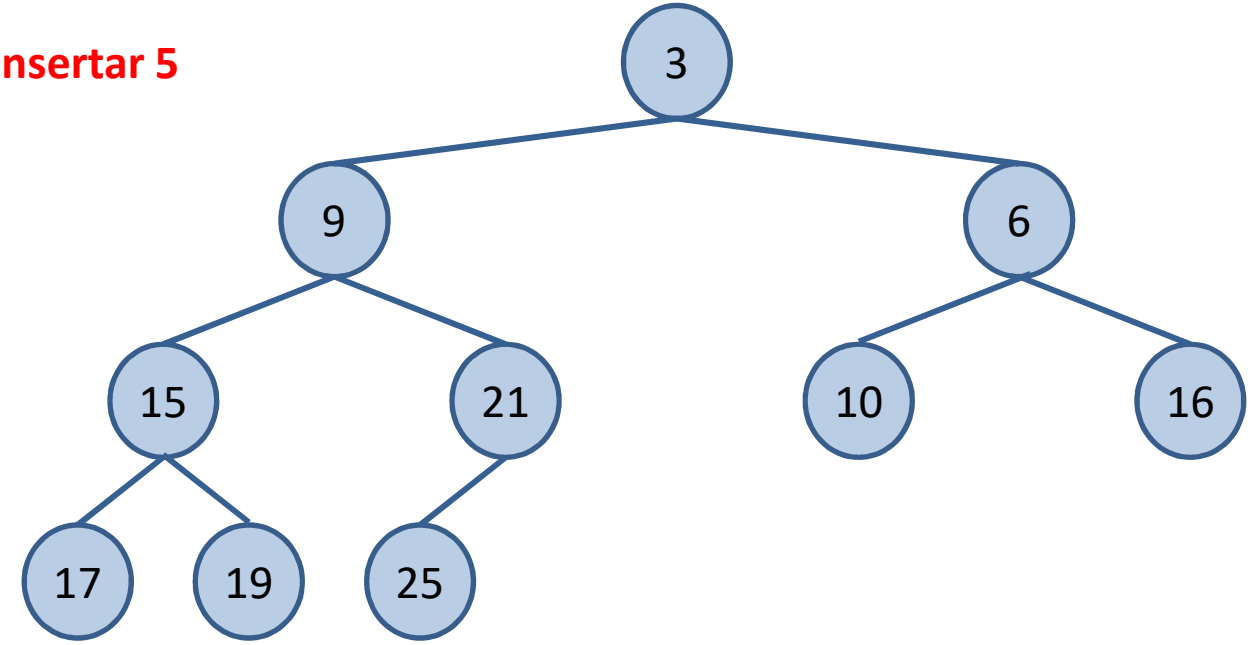
```
template <typename T>
inline Apo<T>::Apo(size_t maxNodos) :
   nodos(new T[maxNodos]),
   maxNodos(maxNodos),
   ultimo(-1)    // Apo vacío.
{}

template <typename T>
inline const T& Apo<T>::cima() const
{
   assert(ultimo > -1);    // Apo no vacío.
   return nodos[0];
}

template <typename T>
inline bool Apo<T>::vacio() const
{
   return (ultimo == -1);
}
```

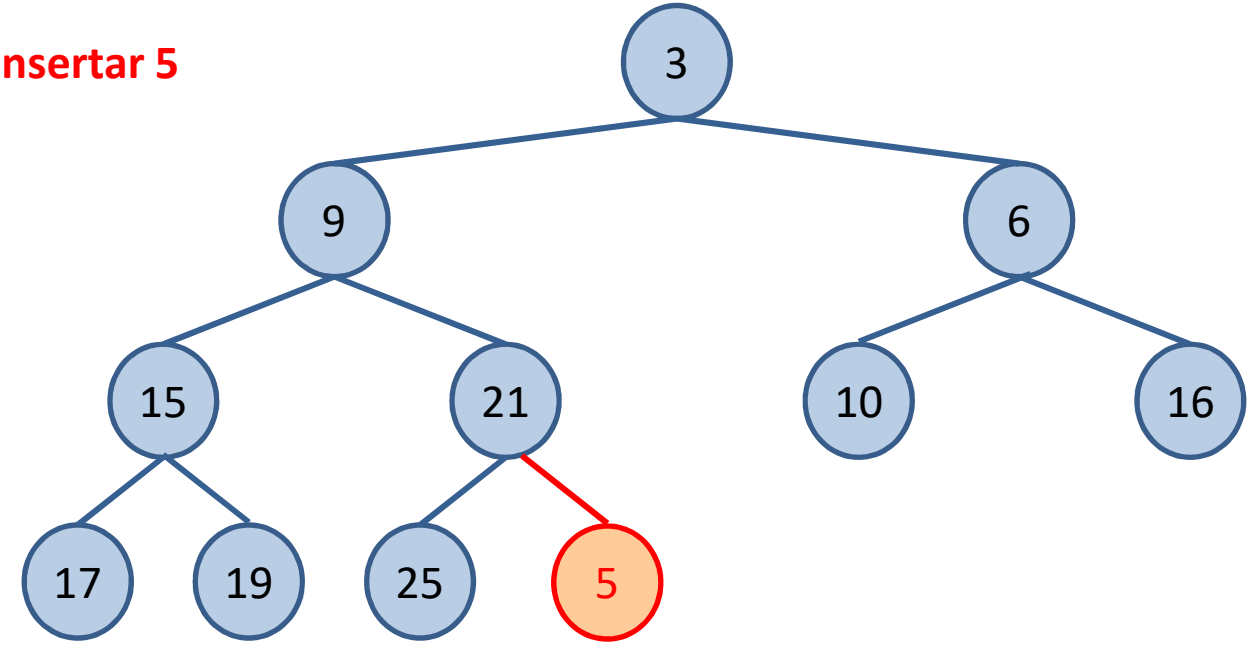
Inserción en un APO

Insertar 5



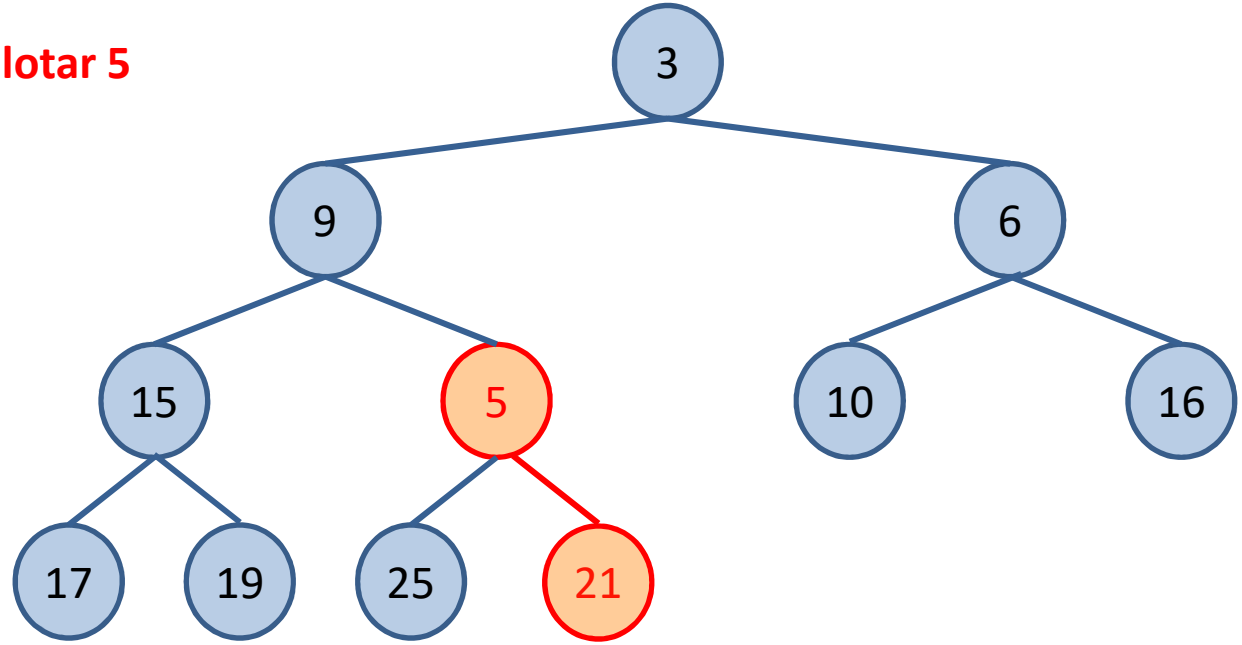
Inserción en un APO

Insertar 5



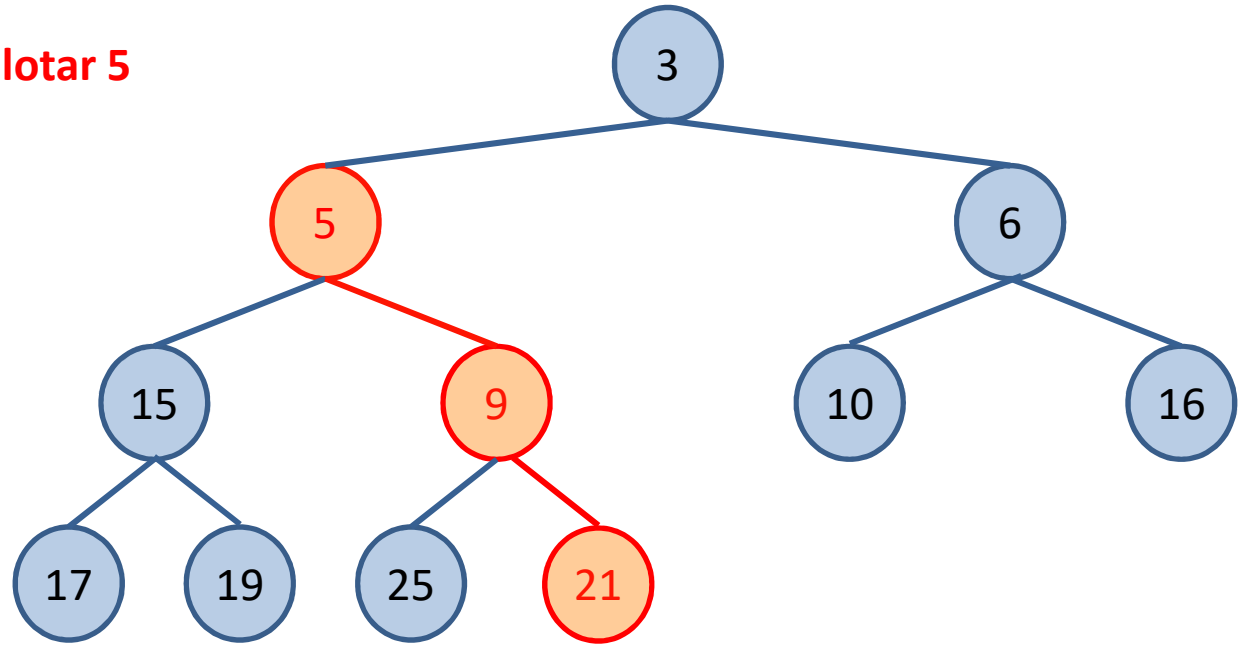
Inserción en un APO

Flotar 5



Inserción en un APO

Flotar 5



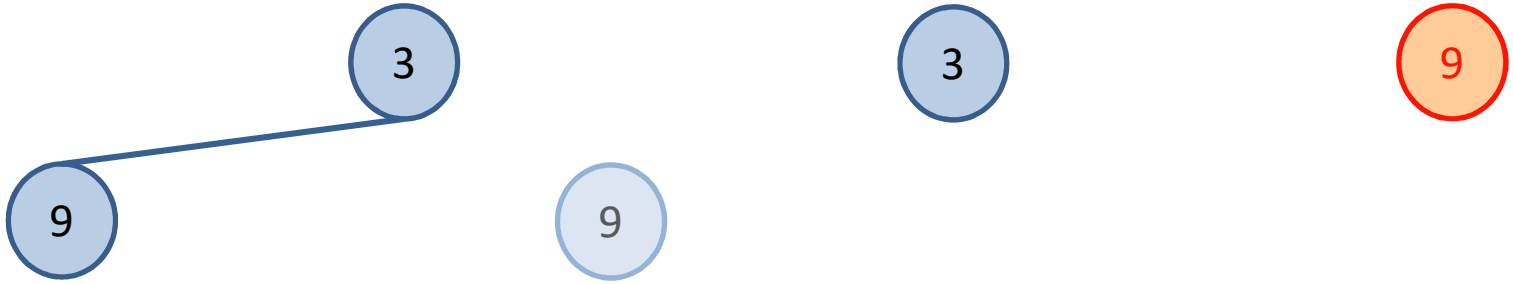
```
template <typename T>
inline void Apo<T>::insertar(const T& e)
{
   assert(ultimo < maxNodos-1);   // Apo no lleno.
   nodos[++ultimo] = e;
   if (ultimo > 0)
      flotar(ultimo);   // Reordenar.
}

template <typename T>
void Apo<T>::flotar(nodo i)
{
   T e = nodos[i];
   while (i > 0 && e < nodos[padre(i)])
   {
      nodos[i] = nodos[padre(i)];
      i = padre(i);
   }
   nodos[i] = e;
}
```

Suprimir en un APO

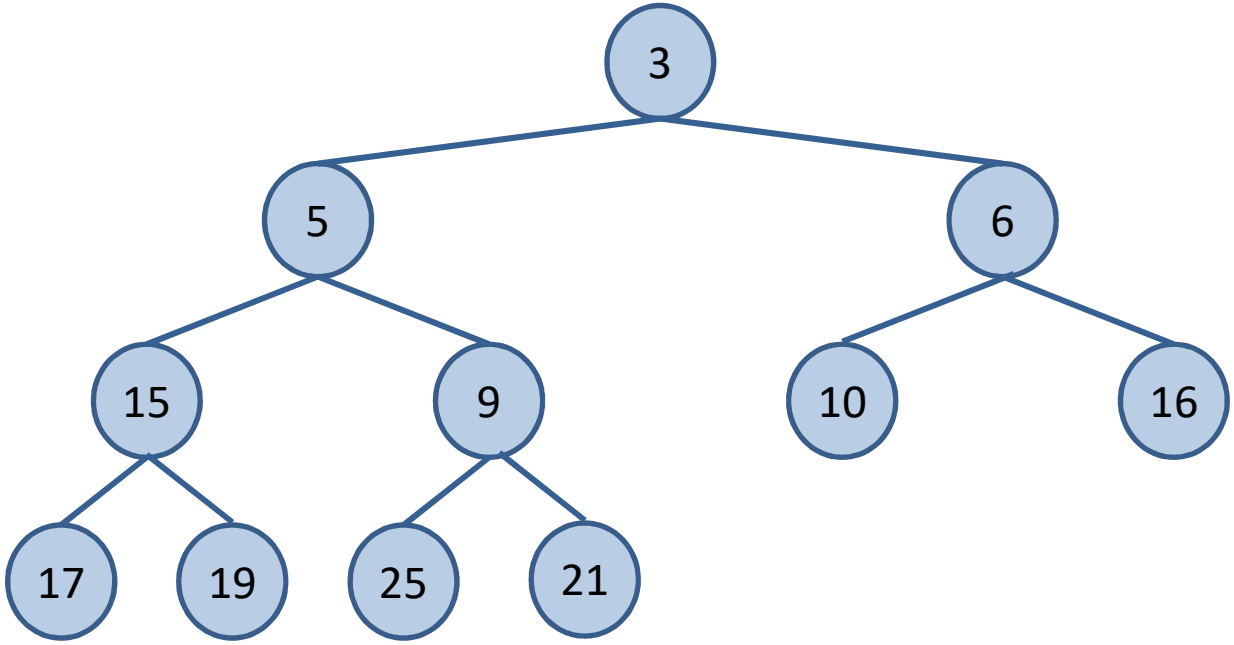
Caso 1: Un nodo

Caso 2: Dos nodos



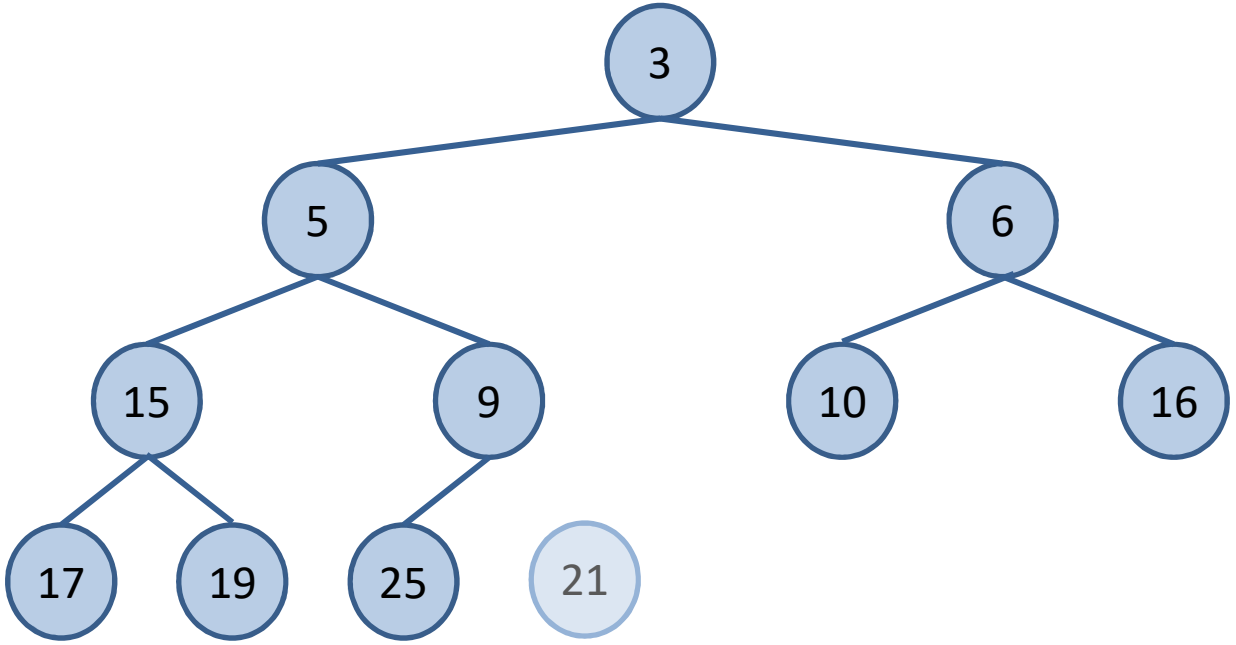
Suprimir en un APO

Caso 3: Más de dos nodos



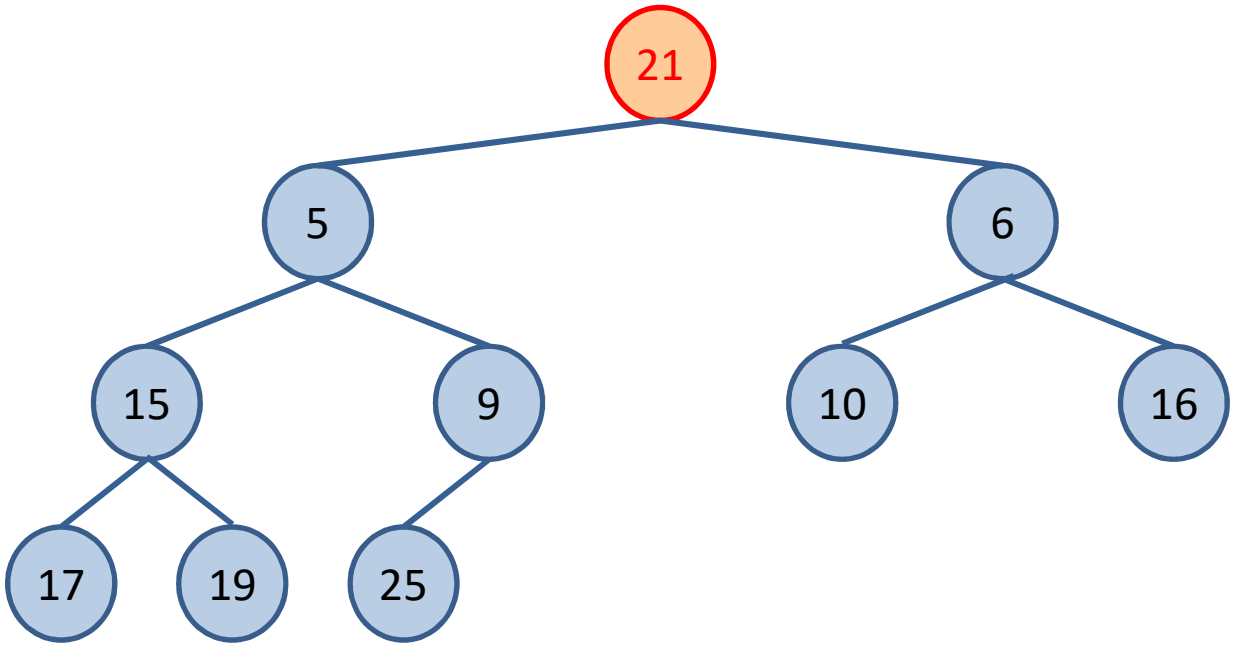
Suprimir en un APO

Caso 3: Más de dos nodos



Suprimir en un APO

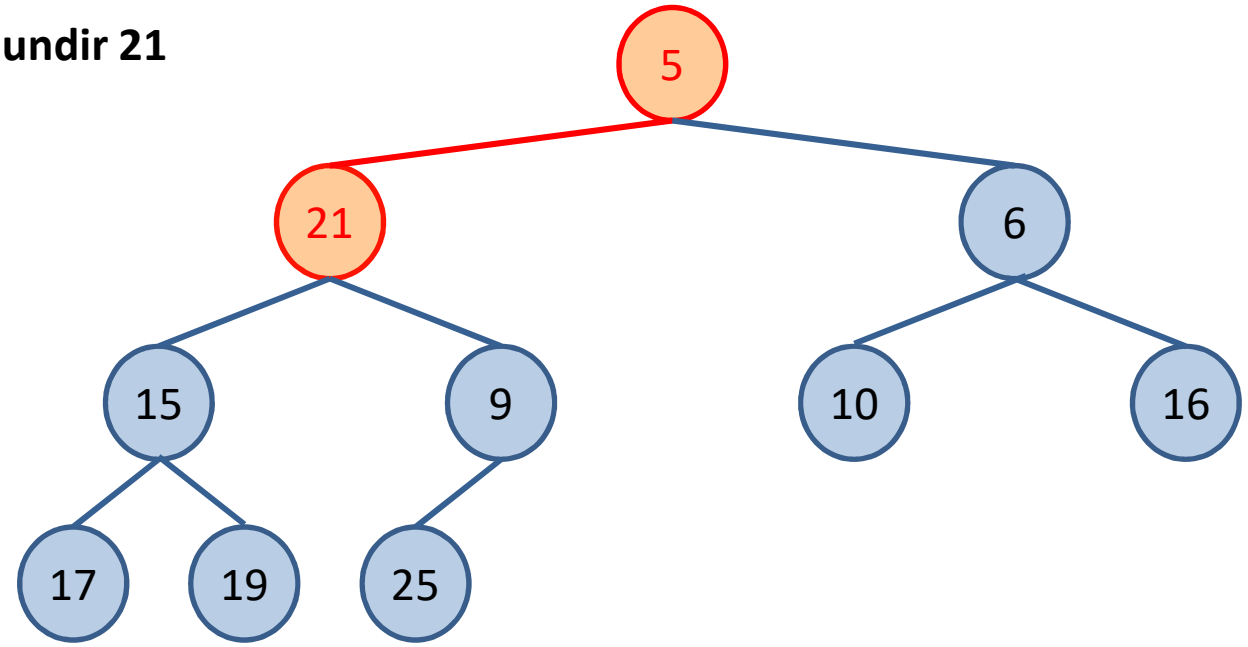
Caso 3: Más de dos nodos



Suprimir en un APO

Caso 3: Más de dos nodos

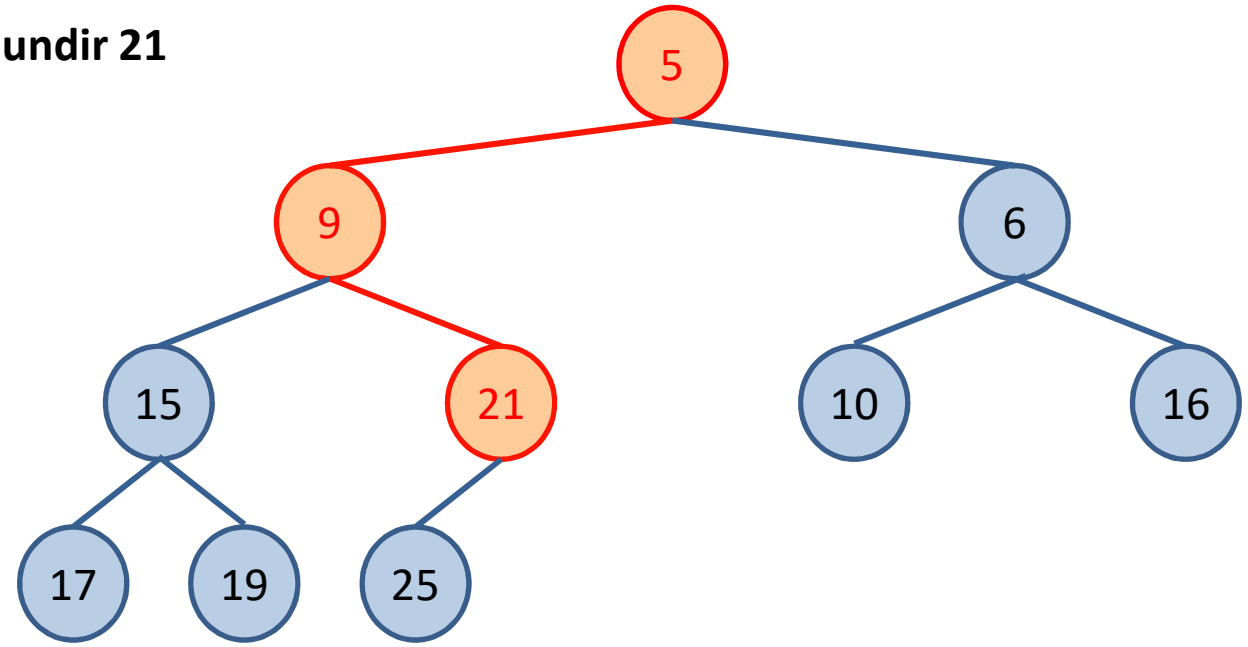
Hundir 21



Suprimir en un APO

Caso 3: Más de dos nodos

Hundir 21



```
template <typename T>
inline void Apo<T>::suprimir()
{
   assert(ultimo > -1);    // Apo no vacío.
   if (--ultimo > -1)      // Apo no queda vacío.
   {
      nodos[0] = nodos[ultimo+1];
      if (ultimo > 0)      // Quedan dos o más elementos.
         hundir(0);        // Reordenar.
   }
}
```

```
template <typename T>
void Apo<T>::hundir(nodo i)
{
   bool fin = false;
   T e = nodos[i];
   while (hIzq(i) <= ultimo && !fin)   // Hundir e.
   {
      nodo hMin;   // Hijo menor del nodo i.
      if (hIzq(i) < ultimo && nodos[hDer(i)] < nodos[hIzq(i)])
         hMin = hDer(i);
      else
         hMin = hIzq(i);
      if (nodos[hMin] < e) { // Subir el hijo menor.
         nodos[i] = nodos[hMin];
         i = hMin;
      }
      else   // e <= hijos
         fin = true;
   }
   nodos[i] = e;   // Colocar e.
}
```

```
template <typename T>
inline Apo<T>::~Apo()
{
   delete[] nodos;
}

template <typename T>
Apo<T>::Apo(const Apo<T>& A) :
   nodos(new T[A.maxNodos]),
   maxNodos(A.maxNodos),
   ultimo(A.ultimo)
{
   // Copiar el vector.
   for (nodo n = 0; n <= ultimo; n++)
      nodos[n] = A.nodos[n];
}
```

```
template <typename T>
Apo<T>& Apo<T>::operator =(const Apo<T>& A)
{
   if (this != &A)   // Evitar autoasignación.
   {  // Destruir el vector y crear uno nuevo si es necesario.
      if (maxNodos != A.maxNodos)
      {
         delete[] nodos;
         maxNodos = A.maxNodos;
         nodos = new T[maxNodos];
      }
      ultimo = A.ultimo;
      // Copiar el vector
      for (nodo n = 0; n <= ultimo; n++)
         nodos[n] = a.nodos[n];
   }
   return *this;
}

#endif // APO_H
```