Estructuras de Datos no Lineales
2.3. Árboles geradores de coste mínimo

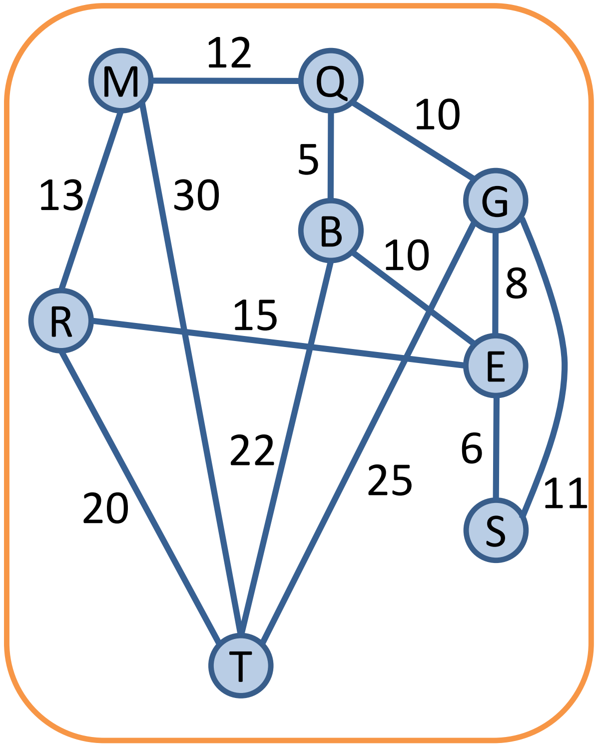
José Fidel Argudo Argudo
José Antonio Alonso de la Huerta
Mª Teresa García Horcajadas

Universidad de Cádiz

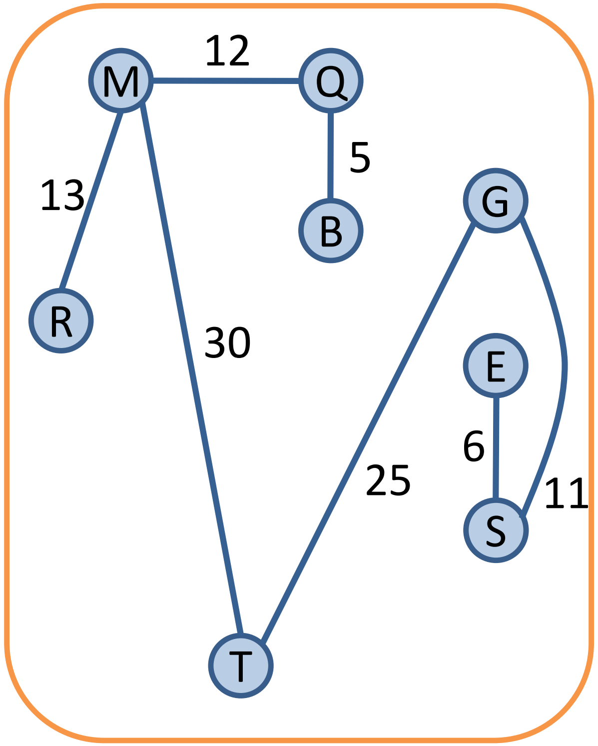
Versión 1.0

Árboles generadores de coste mínimo

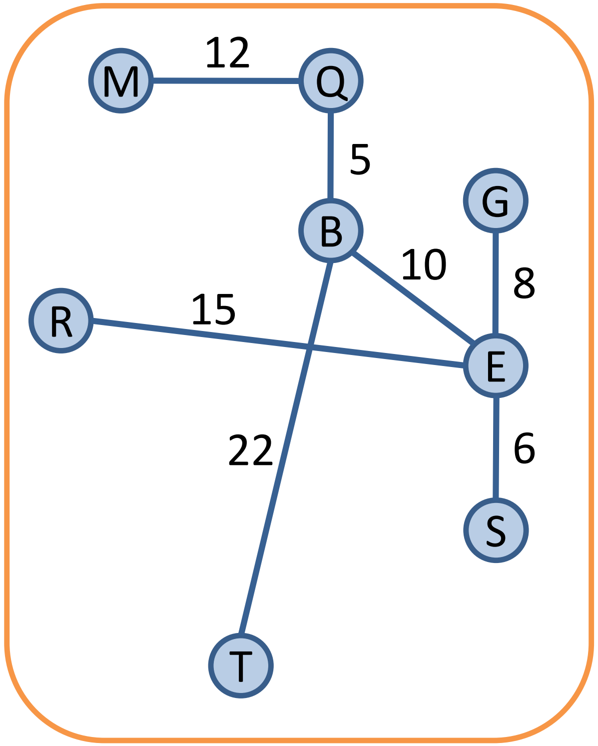
Dado un grafo no dirigido y conexo G = (V, A), se define un **árbol generador** (o de expansión) **de G** como un árbol que conecta todos los vértices de V; su coste es la suma de los costes de las aristas del árbol. Un árbol es un grafo conexo acíclico.



Grafo G



Árbol generador de G
Coste = 102



Árbol generador de G
Coste = 78

TAD Partición

Numeración de elementos:

Definimos una aplicación biyectiva de un conjunto *C* en el rango de enteros [0, *n*-1], tal que *n* es el cardinal de *C*, mediante dos funciones:

int IndiceElto (tElemento x)

Pre: $x \in C$.

Post: Devuelve el índice del elemento x en el rango [0, n−1].

tElemento NombreElto (int i)

Pre: $0 \leq i \leq n-1$

Post: Devuelve el elemento de C cuyo índice es i.

Especificación del TAD Partición

Definición:

Una partición del conjunto de enteros $C = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ es un conjunto de subconjuntos disjuntos cuya unión es el conjunto total C.

Operaciones:

Particion(int n);

Post: Construye una partición de subconjuntos unitarios del intervalo de enteros $[0, n-1]$.

void unir (int a, int b);

Pre: $0 \leq a, b \leq n-1$, a y b son los representantes de sus clases y $a \neq b$.
Post: Une el subconjunto del elemento a y el del elemento b en uno de los dos subconjuntos arbitrariamente. La partición queda con un miembro menos.

int encontrar(int x) const;

Pre: $0 \leq x \leq n-1$.
Post: Devuelve el representante del subconjunto al que pertenece el elemento x.

Implementación del TAD Partición

1. Vector de pertenencia

P = {{2,3,**7**} {0,**4**} {**5**} {**1**,6,8,9}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	1	7	7	4	5	1	7	1	1

P.unir(4,1)

P = {{2,3,**7**} {0,1,**4**,6,8,9} {**5**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	4	7	7	4	5	4	7	4	4

Particion() $\in$ *O(n)*
encontrar() $\in$ *O(1)*
unir() $\in$ *O(n)*

Implementación del TAD Partición

2.1. Listas de elementos

$P = \{\{2,3,\mathbf{7}\}\ \{0,\mathbf{4}\}\ \{\mathbf{5}\}\ \{\mathbf{1},6,8,9\}\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	1	7	7	4	5	1	7	1	1
	-1	6	3	-1	0	-1	8	2	9	-1

P.unir(4,1)

$P = \{\{2,3,\mathbf{7}\}\ \{0,1,\mathbf{4},6,8,9\}\ \{\mathbf{5}\}\}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	4	7	7	4	5	4	7	4	4
	-1	6	3	-1	1	-1	8	2	9	0

encontrar() $\in$ *O(1)*
unir() $\in$ *O(n), pero el tiempo de ejecución es menor.*

Implementación del TAD Partición

2.2. Listas de elementos (con longitud)

P = {{2,3,**7**} {0,**4**} {**5**} {**1**,6,8,9}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	1	7	7	4	5	1	7	1	1
	-1	6	3	-1	0	-1	8	2	9	-1
	■	4	■	■	2	1	■	3	■	■

P.unir(4,1)

P = {{2,3,**7**} {0,**1**,4,6,8,9} {**5**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	1	1	7	7	1	5	1	7	1	1
	6	4	3	-1	0	-1	8	2	9	-1
	■	6	■	■	■	1	■	3	■	■

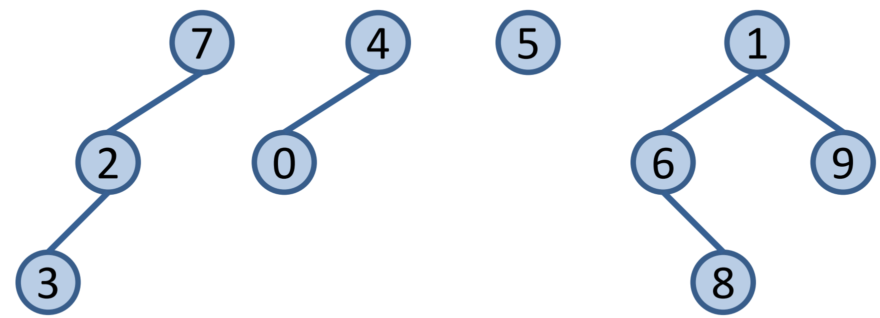
encontrar() ∈ *O(1)*
unir() ∈ *O(n), pero el tiempo de ejecución se reduce por lo menos a la mitad.*

Implementación del TAD Partición

3.1. Bosque de árboles

P = {{2,3,**7**} {0,**4**} {**5**} {**1**,6,8,9}}

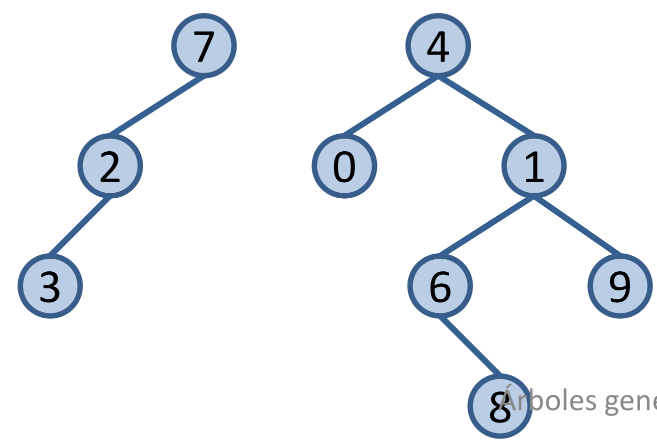
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	-1	7	2	-1	-1	1	-1	6	1



P.unir(4,1)

P = {{2,3,**7**} {0,1,**4**,6,8,9} {**5**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	4	7	2	-1	-1	1	-1	6	1



encontrar() $\in$ *O(n)*
unir() $\in$ *O(1)*

Implementación del TAD Partición mediante bosque de árboles

```
/*----------------------------------------*/
/* particion.h                            */
/*----------------------------------------*/
#ifndef PARTICION_H
#define PARTICION_H
#include <vector>

class Particion {
public:
   Particion(int n): padre(n, -1) {}
   void unir(int a, int b) { padre[b] = a; }
   int encontrar(int x) const;
private:
   std::vector<int> padre;
};

#endif   // PARTICION_H
```

```
/*----------------------------------------*/
/* particion.cpp                          */
/*----------------------------------------*/
#include "particion.h‶

int Particion::encontrar(int x) const
{
   while (padre[x] != -1)
      x = padre[x];
   return x;
}
```

<u>Implementación del TAD Partición</u>

3.2. Bosque de árboles (con control de altura)

a) **<u>Unión por tamaño</u>**

   El árbol con menos nodos se convierte en subárbol del que tiene mayor número de nodos.

b) **<u>Unión por altura</u>**

   El árbol menos alto se convierte en subárbol del otro.

unir() $\in$ ***O(1)***

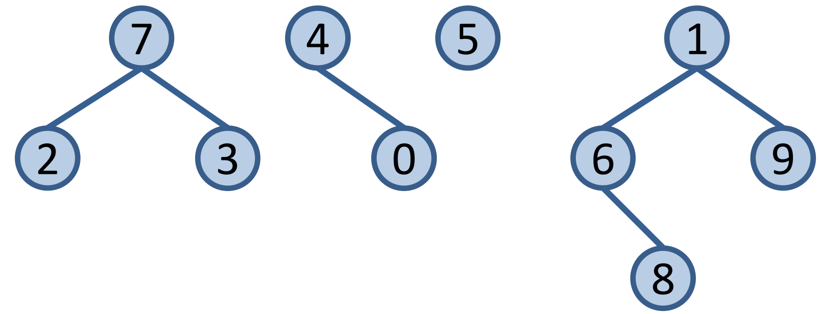
encontrar() $\in$ ***O(log n)***

Implementación del TAD Partición

3.2. Bosque de árboles (con control de altura). Unión por altura

P = {{2,3,**7**} {0,**4**} {**5**} {**1**,6,8,9}}

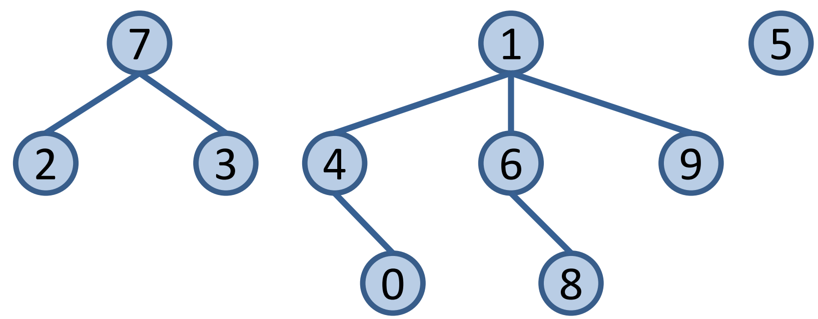
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	-3	7	7	-2	-1	1	-2	6	1



P.unir(4,1)

P = {{2,3,**7**} {0,**1**,4,6,8,9} {**5**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	4	-3	7	7	1	-1	1	-2	6	1



encontrar() $\in$ *O(log n)*
unir() $\in$ *O(1)*

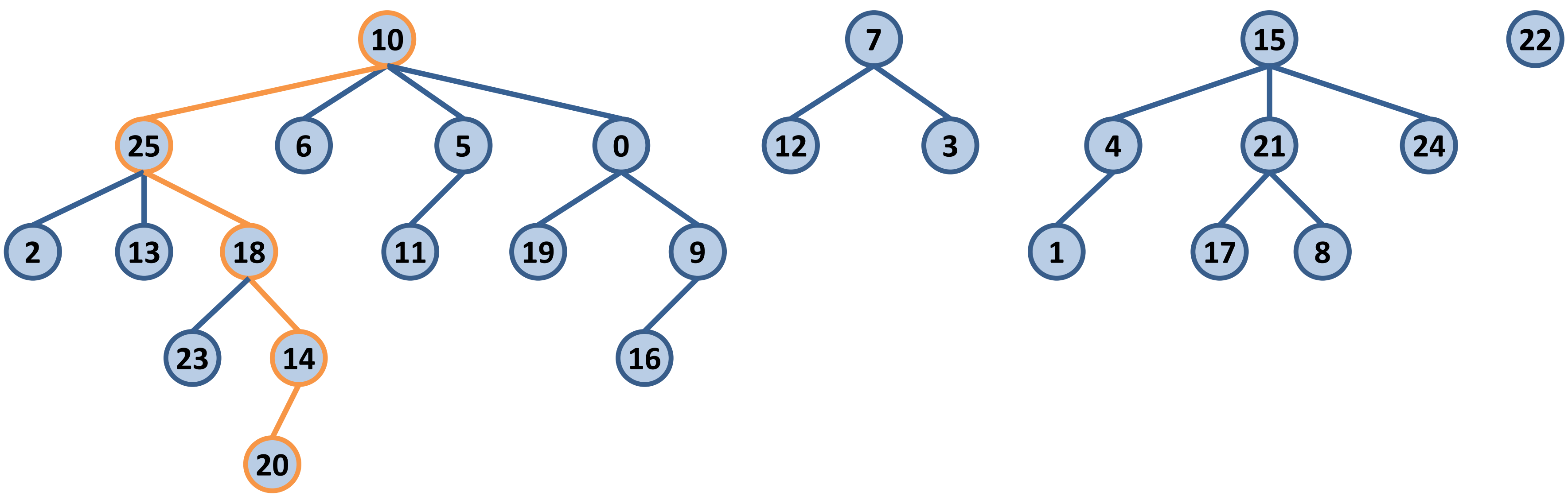
Implementación del TAD Partición

3.2. Bosque de árboles (con control de altura). Compresión de caminos

encontrar(20)

P = {{0,2,5,6,9,**10**,11,13,14,16,18,19,20,23,25} {3,**7**,12} {1,4,8,**15**,17,21,24} {**22**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
P	10	4	25	7	15	10	10	-2	21	0	-5	5	7	25	18	-3	9	21	25	0	14	15	-1	18	15	10



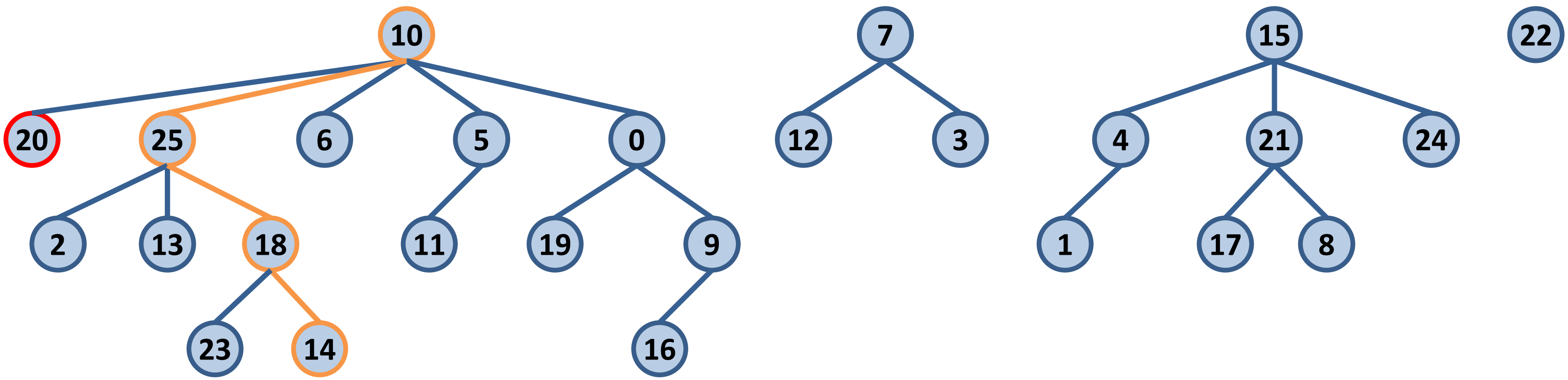
Implementación del TAD Partición

3.2. Bosque de árboles (con control de altura). Compresión de caminos

encontrar(20)

P = {{0,2,5,6,9,**10**,11,13,14,16,18,19,20,23,25} {3,**7**,12} {1,4,8,**15**,17,21,24} {**22**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
P	10	4	25	7	15	10	10	-2	21	0	-5	5	7	25	18	-3	9	21	25	0	10	15	-1	18	15	10



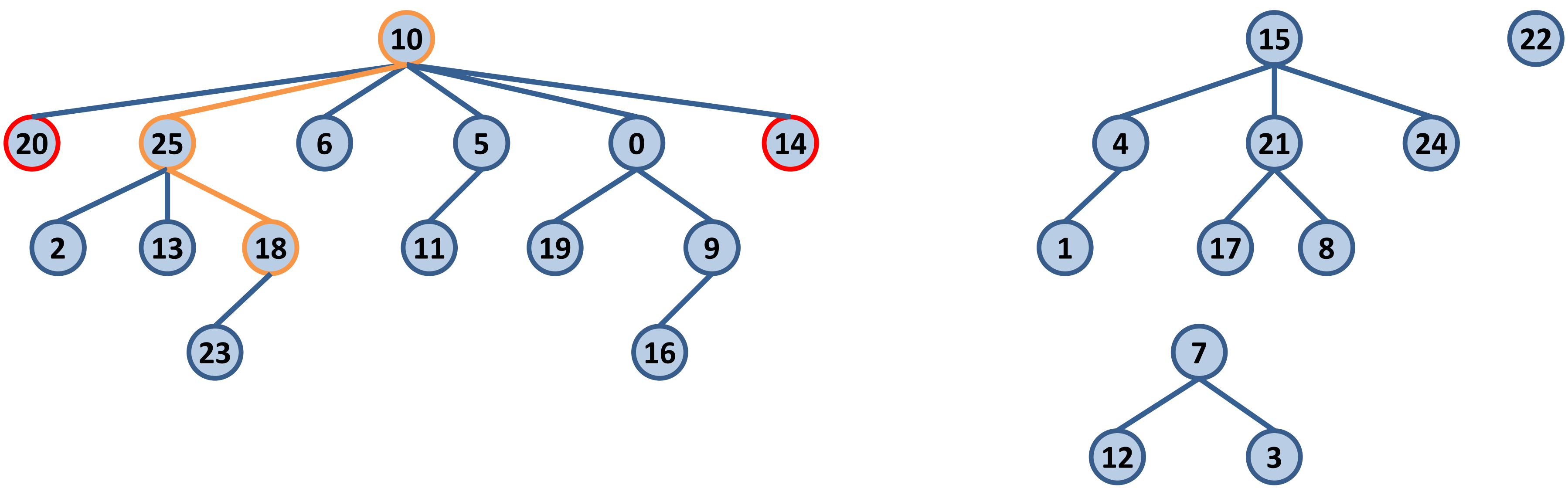
Implementación del TAD Partición

3.2. Bosque de árboles (con control de altura). Compresión de caminos

encontrar(20)

P = {{0,2,5,6,9,**10**,11,13,14,16,18,19,20,23,25} {3,**7**,12} {1,4,8,**15**,17,21,24} {**22**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
P	10	4	25	7	15	10	10	-2	21	0	-5	5	7	25	10	-3	9	21	25	0	10	15	-1	18	15	10



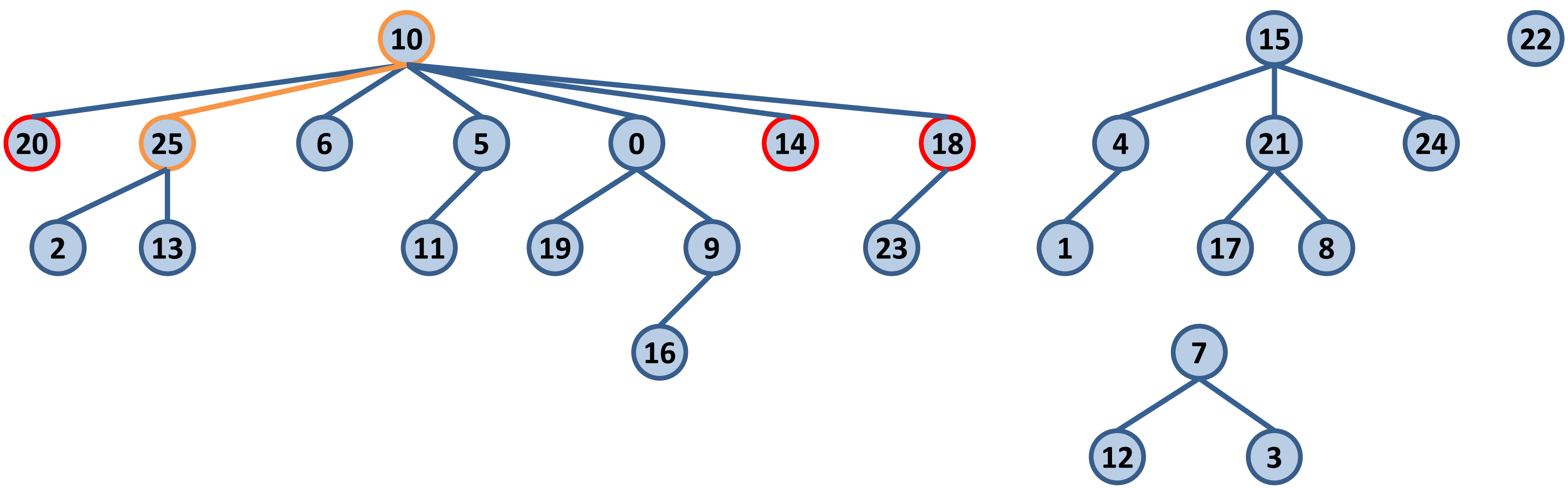
Implementación del TAD Partición

3.2. Bosque de árboles (con control de altura). Compresión de caminos

Encontrar(20)

P = {{0,2,5,6,9,**10**,11,13,14,16,18,19,20,23,25} {3,**7**,12} {1,4,8,**15**,17,21,24} {**22**}}

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
P	10	4	25	7	15	10	10	-2	21	0	-5	5	7	25	10	-3	9	21	10	0	10	15	-1	18	15	10



Implementación del TAD Partición mediante bosque de árboles

```
/*--------------------------------------------------------*/
/* particion.h                                            */
/*--------------------------------------------------------*/
#ifndef PARTICION_H
#define PARTICION_H
#include <vector>

class Particion {
public:
   Particion(int n): padre(n, -1) {}
   void unir(int a, int b);
   int encontrar(int x) const;
private:
   mutable std::vector<int> padre;
};

#endif   // PARTICION_H
```

```
/*----------------------------------------------------------*/
/* particion.cpp                                            */
/*                                                          */
/* Implementación de la clase Particion:                    */
/* Bosque de árboles con unión por altura y búsqueda con    */
/* compresión de caminos.                                   */
/*----------------------------------------------------------*/
#include "particion.h"
// El árbol con mayor altura se convierte en subárbol del otro.
void Particion::unir(int a, int b)
{
   if (padre[b] < padre[a])
      padre[a] = b;
   else {
      if (padre[a] == padre[b])
         padre[a]--; // El árbol resultante tiene un nivel más.
      padre[b] = a;
   }
}
```

```
int Particion::encontrar(int x) const
{
   int y, raiz = x;

   while (padre[raiz] > -1)
      raiz = padre[raiz];
   // Compresión del camino de x a raíz: Los nodos
   // del camino se hacen hijos de la raíz.
   while (padre[x] > -1) {
      y = padre[x];
      padre[x] = raiz;
      x = y;
   }
   return raiz;
}
```

Árboles generadores de coste mínimo

Algoritmo de Kruskal

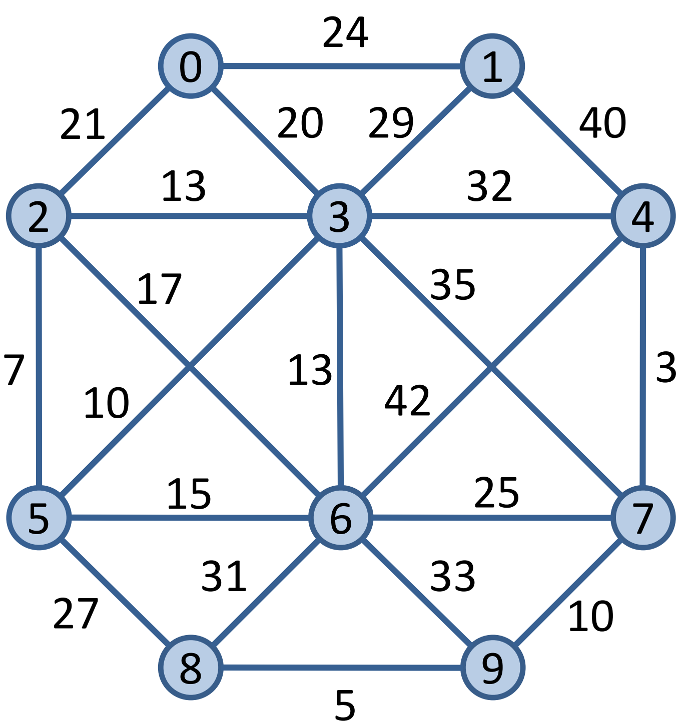
```
template <typename T> class GrafoP {
public:
   typedef T tCoste;
   typedef size_t vertice;
   struct arista {
      vertice orig, dest;
      tCoste coste;
      explicit arista(vertice v=vertice(), vertice w=vertice(),
             tCoste c=tCoste()): orig(v), dest(w), coste(c) {}
      // Orden de aristas para Prim y Kruskall
      bool operator <(const arista& a) const
      { return coste < a.coste; }
   };
   // resto de miembros de la clase GrafoP<T> ...
};
```

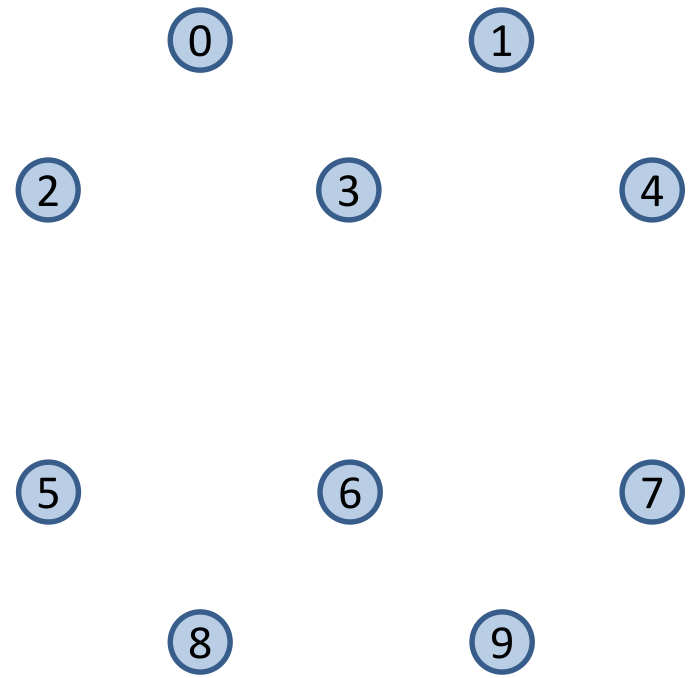
```
#include "particion.h"
#include "apo.h"

template <typename tCoste>
GrafoP<tCoste> Kruskall(const GrafoP<tCoste>& G)
// Devuelve un árbol generador de coste mínimo
// de un grafo no dirigido ponderado y conexo G.
{
   typedef typename GrafoP<tCoste>::vertice vertice;
   typedef typename GrafoP<tCoste>::arista arista;
   const tCoste INFINITO = GrafoP<tCoste>::INFINITO;

   const size_t n = G.numVert();
   GrafoP<tCoste> g(n);     // Árbol generador de coste mínimo.
   Particion P(n);   // Partición inicial de los vértices de G.
   Apo<arista> A(n*(n-1)/2);// Aristas de G ordenadas por coste.
```

```
   // Copiar aristas del grafo G en el APO A.
   for (vertice u = 0; u <= n-2; u++)
      for (vertice v = u+1; v <= n-1; v++)
         if (G[u][v] != INFINITO)
            A.insertar(arista(u, v, G[u][v]));

   size_t i = 1;
   while (i <= n-1) {                   // Seleccionar n-1 aristas.
      arista a = A.cima();              // arista de menor coste
      A.suprimir();
      vertice u = P.encontrar(a.orig);
      vertice v = P.encontrar(a.dest);
      if (u != v) {// extremos de a pertenecen a distintos componentes
         P.unir(u, v);
         // Incluir la arista a en el árbol g.
         g[a.orig][a.dest] = g[a.dest][a.orig] = a.coste;
         i++;
      }
   }
   return g;
}
```

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

Inicialización

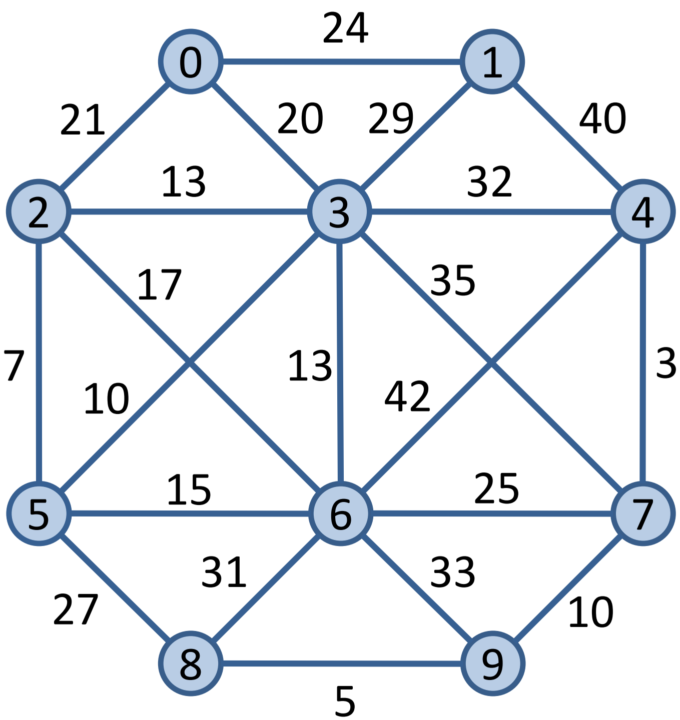


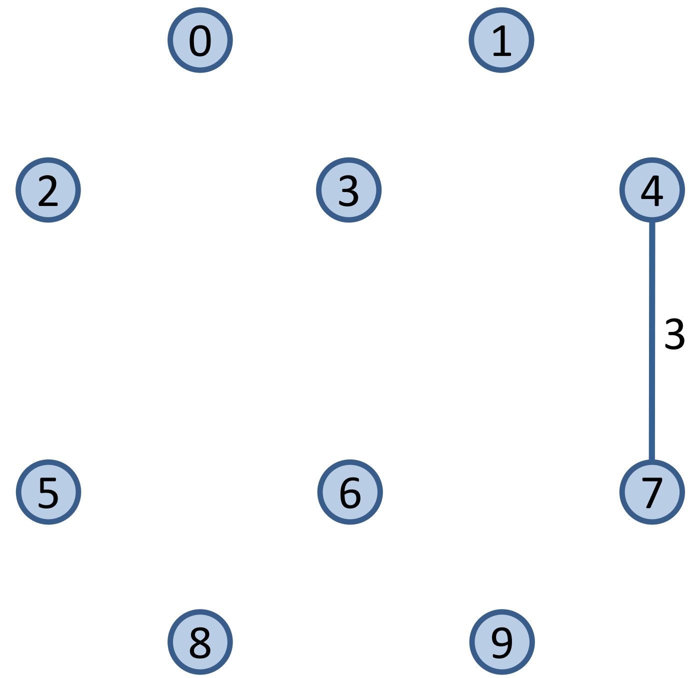


P = {{0} {1} {2} {3} {4} {5} {6} {7} {8} {9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 1 a = (4, 7, 3)

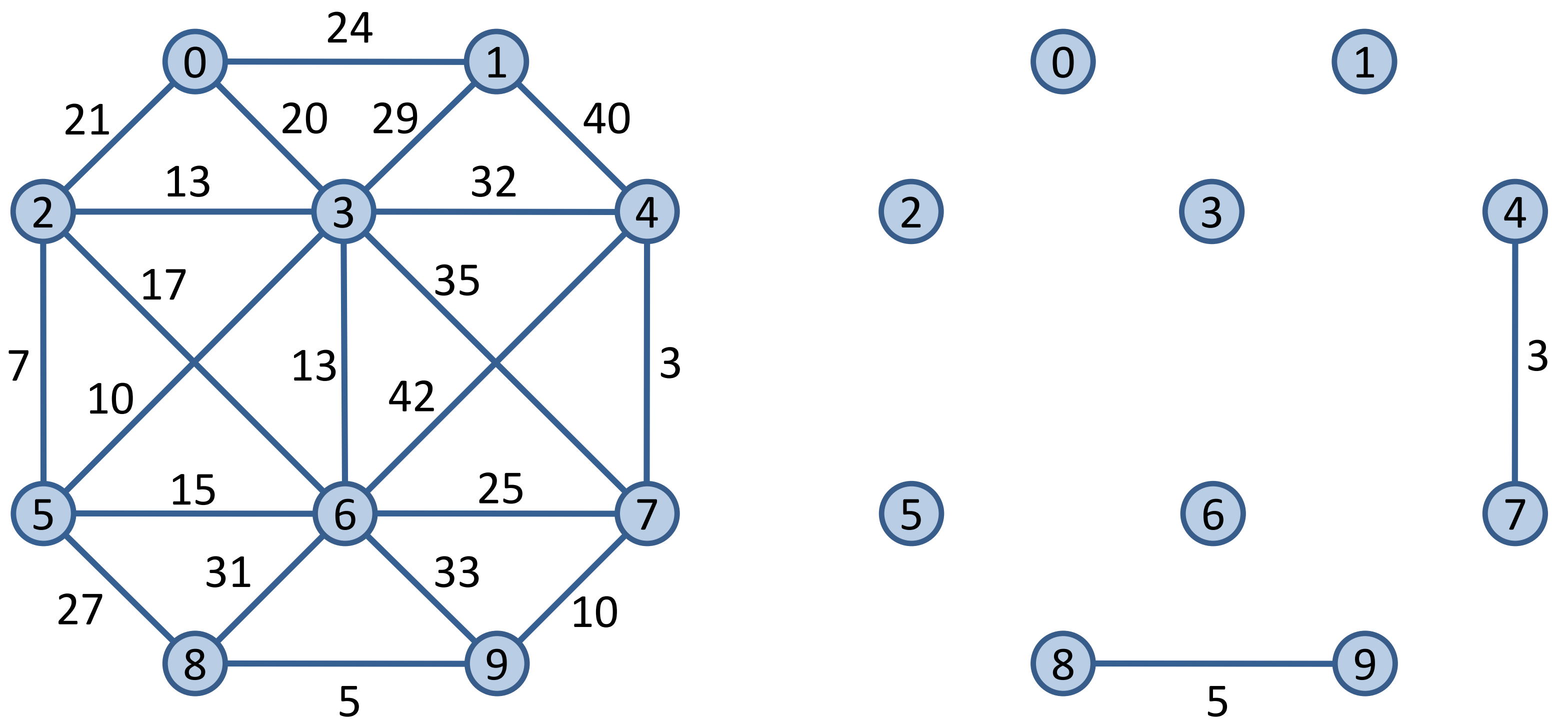




P = {{0} {1} {2} {3} {4,7} {5} {6} {8} {9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

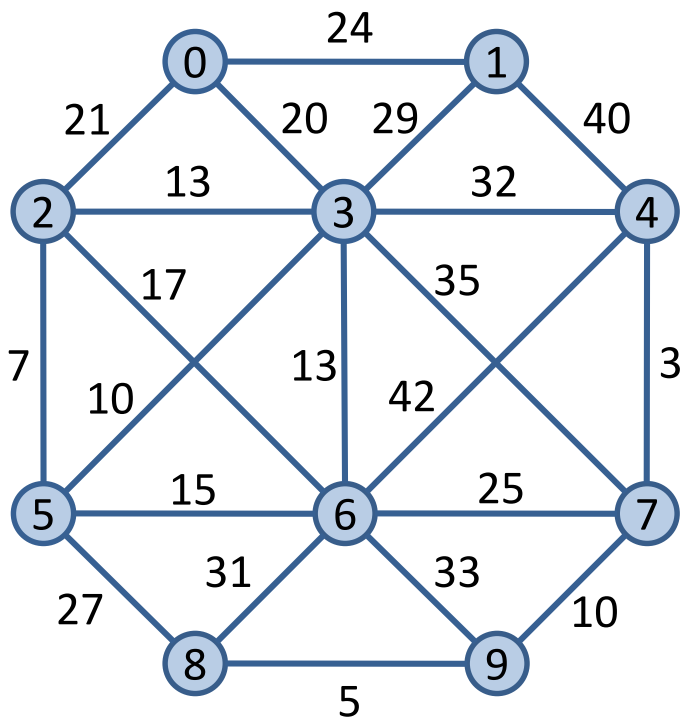
i = 2 a = (8, 9, 5)

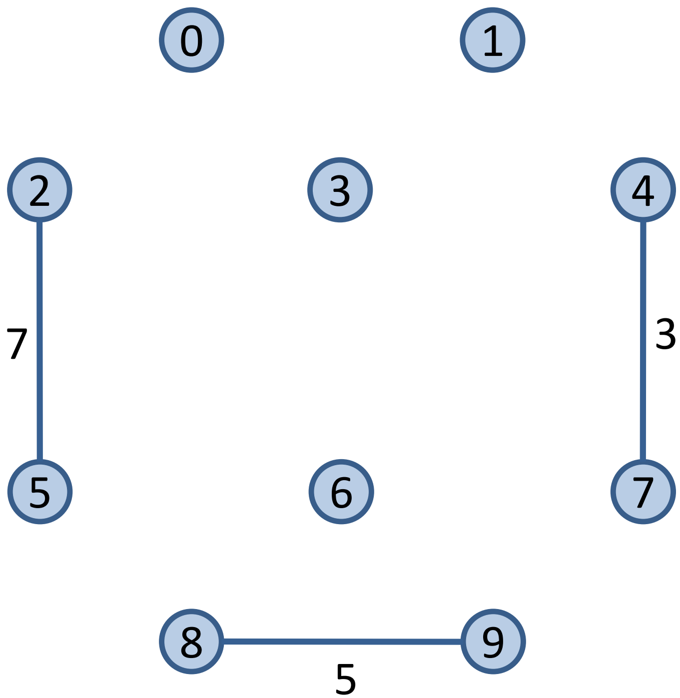


P = {{0} {1} {2} {3} {4,7} {5} {6} {8,9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 3   a = (2, 5, 7)

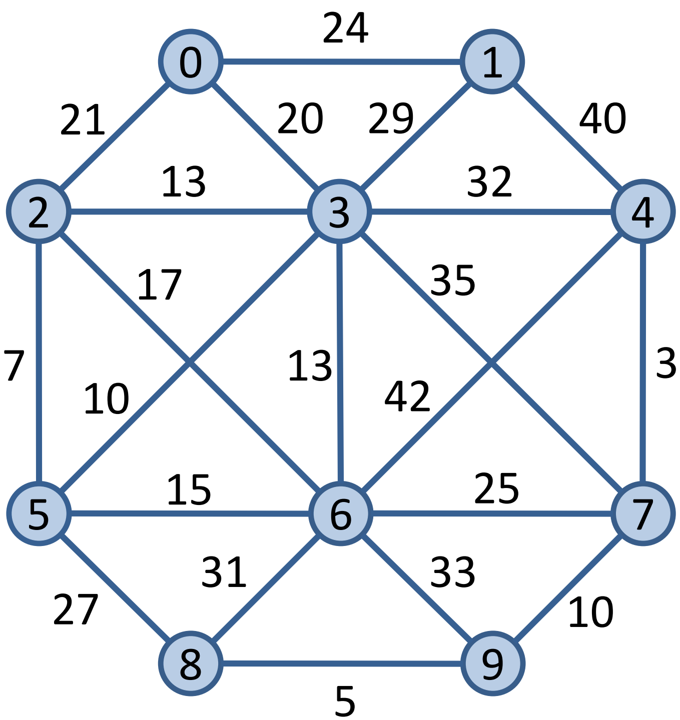


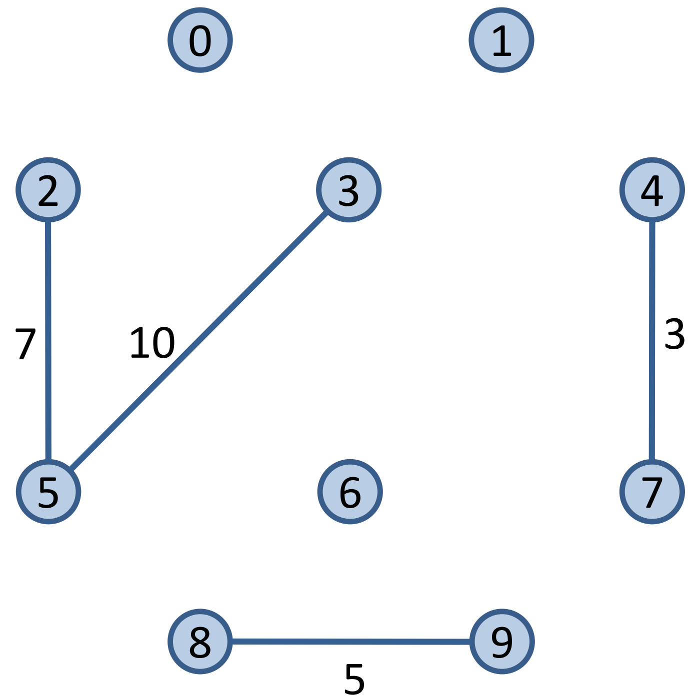


P = {{0} {1} {2,5} {3} {4,7} {6} {8,9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 4 a = (3, 5, 10)

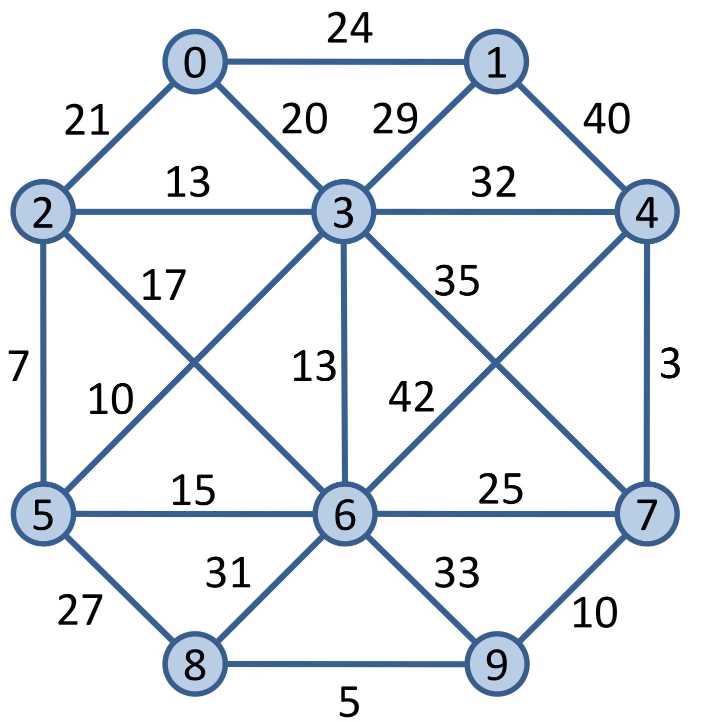


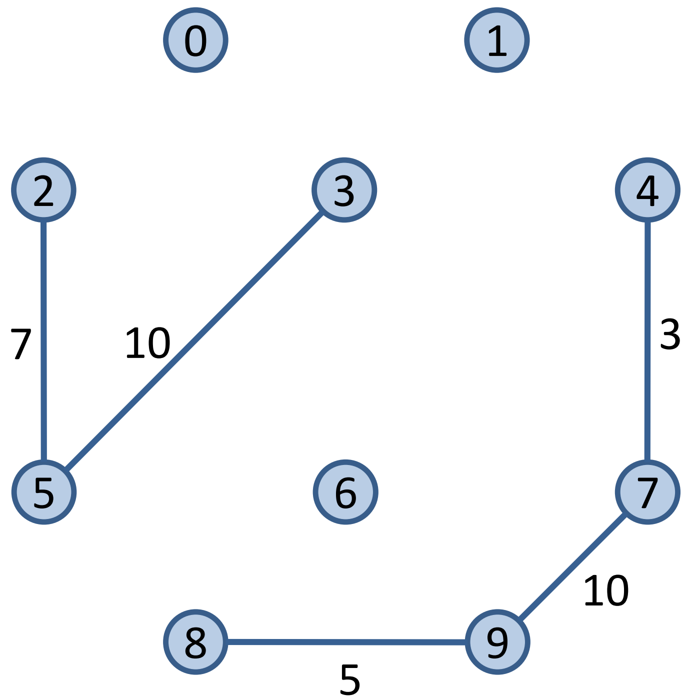


P = {{0} {1} {2,3,5} {4,7} {6} {8,9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 5   a = (7, 9, 10)

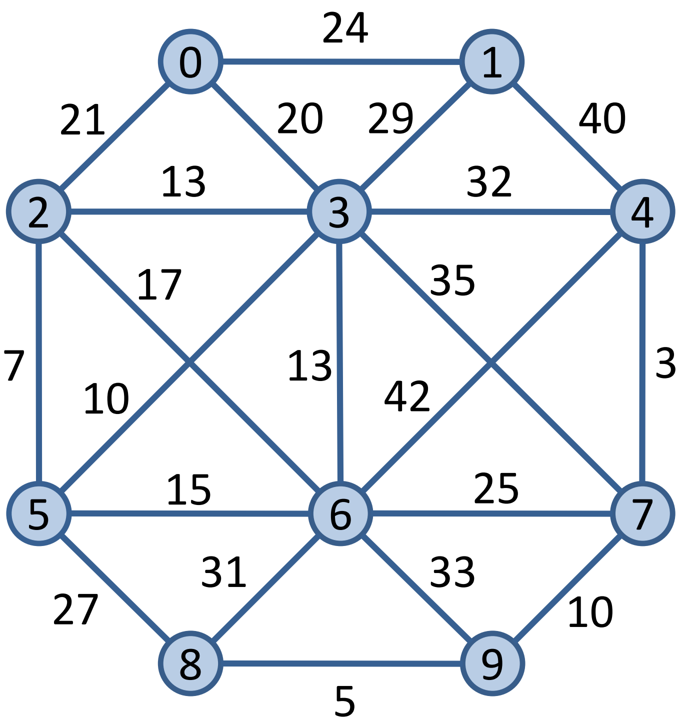


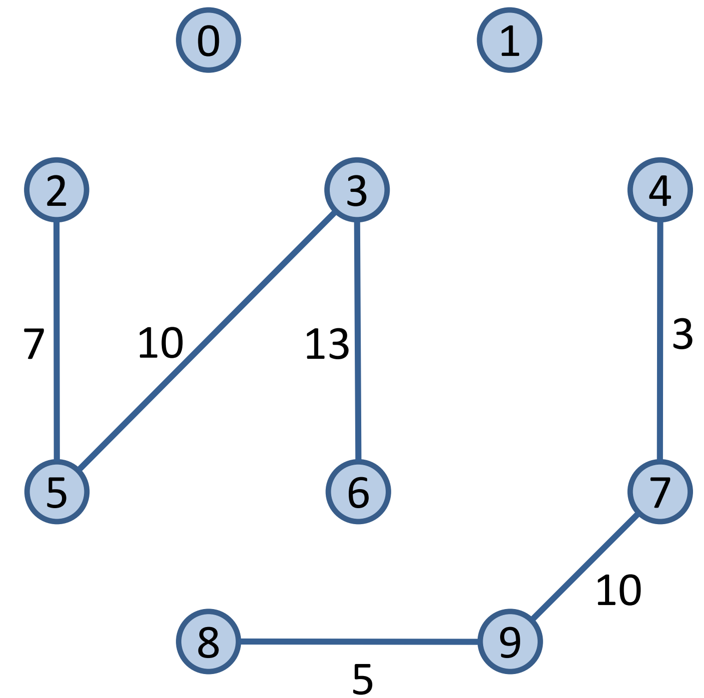


P = {{0} {1} {2,3,5} {4,7,8,9} {6}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 6 a = (3, 6, 10)

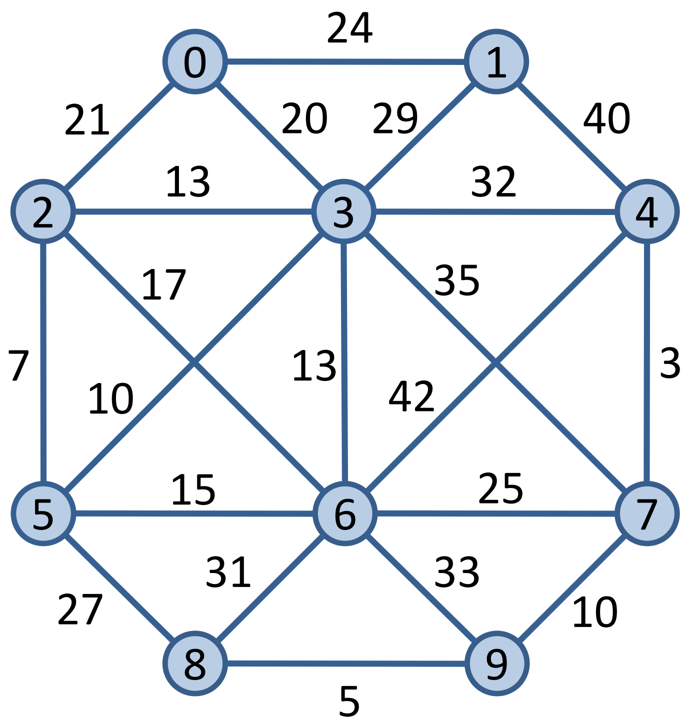


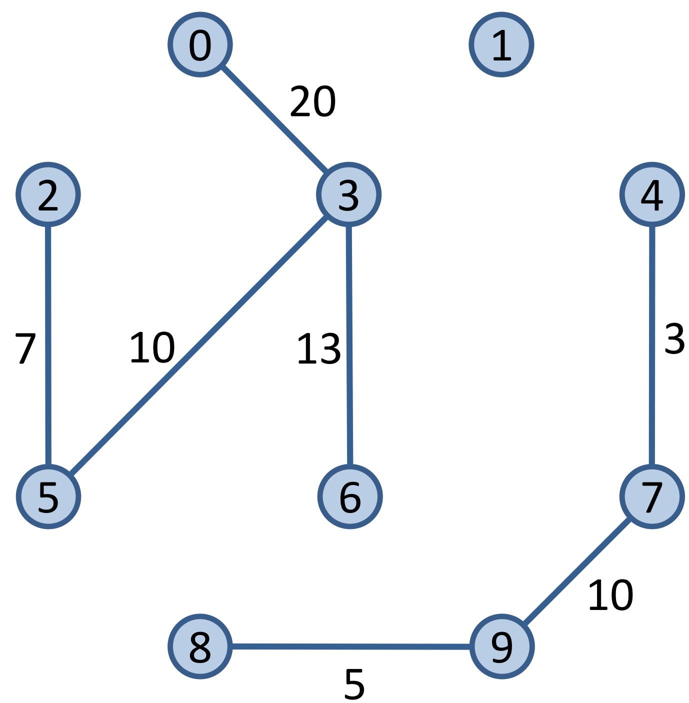


P = {{0} {1} {2,3,5,6} {4,7,8,9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 7   a = (0, 3, 20)

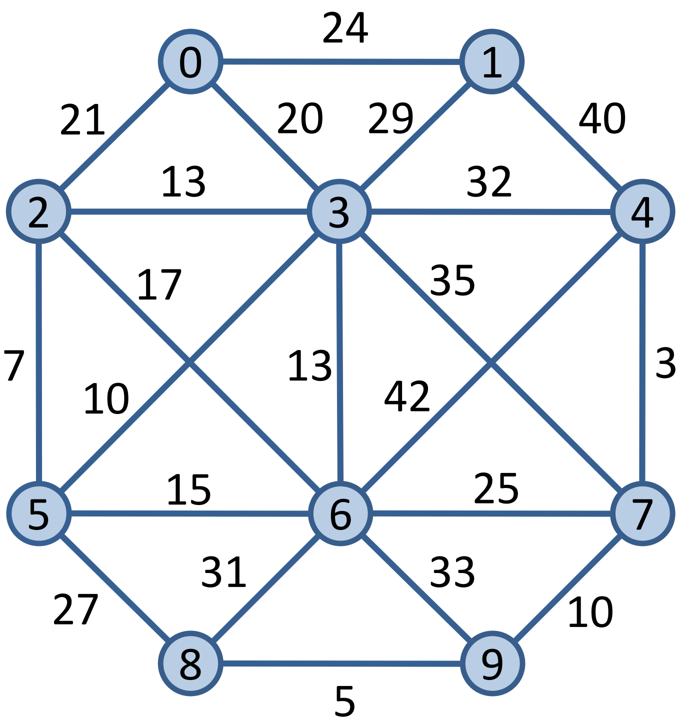


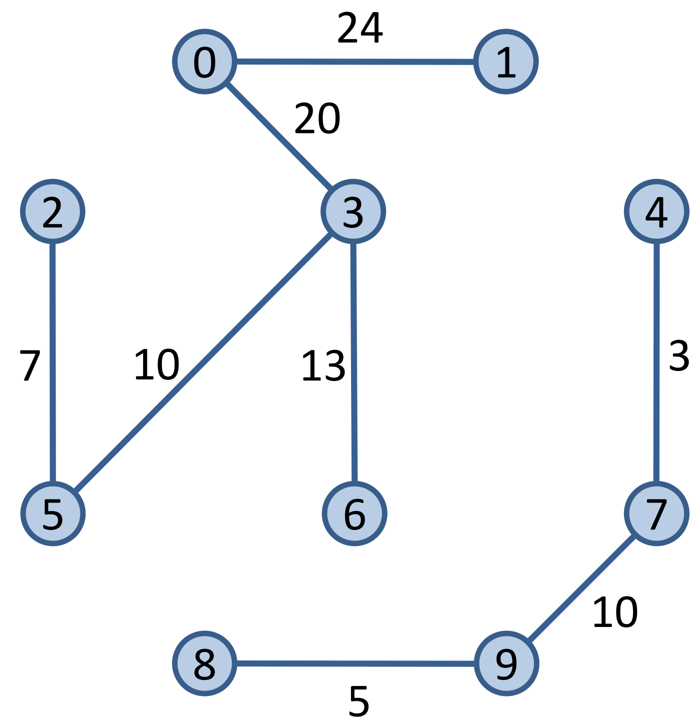


P = {{1} {0,2,3,5,6} {4,7,8,9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 8 a = (0, 1, 24)

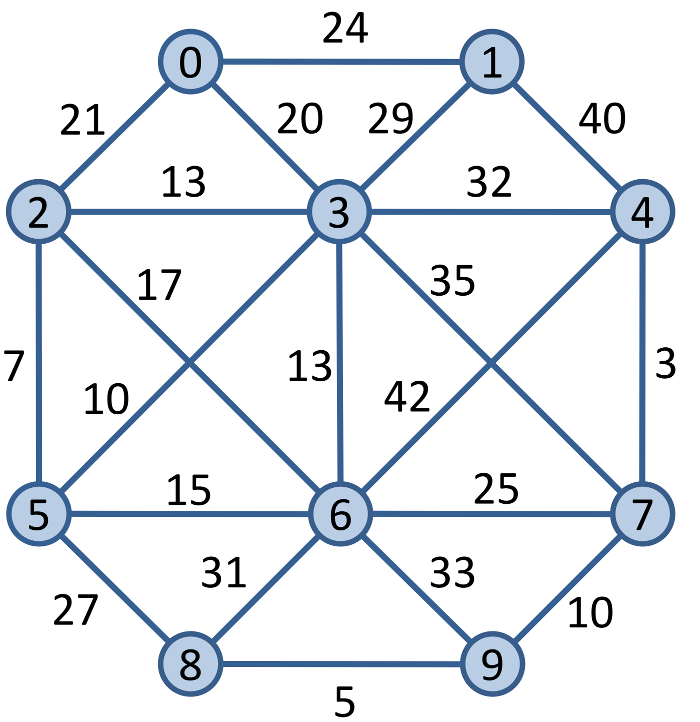


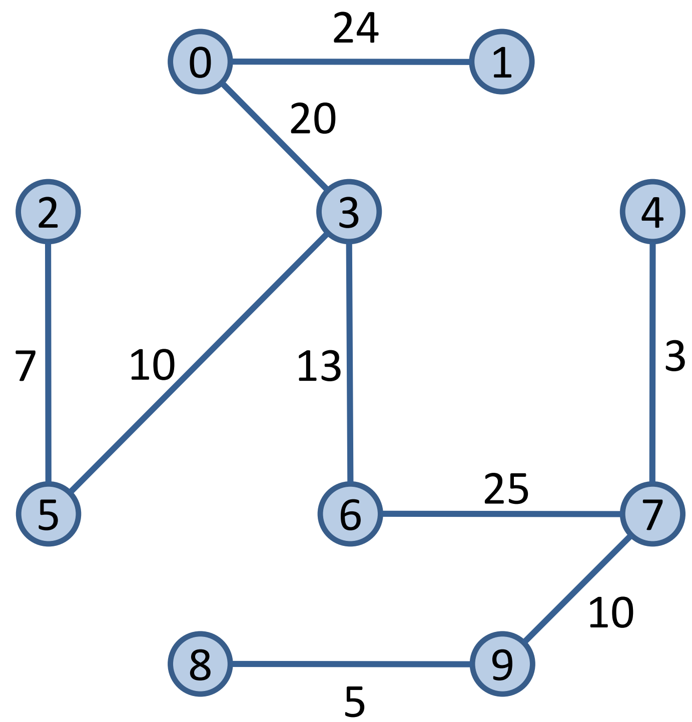


P = {{0,1,2,3,5,6} {4,7,8,9}}

Algoritmo de Kruskal
Ejemplo

i = 9 a = (6, 7, 25)





P = {{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}}