ÖDEV

1) $f(x) = x^{1/3}$ denkleminin kökünü bulmak için Newton-Rapson yöntemini kullanınız. Elde edilen bulguları yorumlayınız

1. adım : $f(x) = x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Başlangıç değeri $x_0 = 1$ olsun

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} x_0^{-\frac{2}{3}}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} x_1^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} x_2^{-\frac{2}{3}}} = \frac{5}{12} - \frac{5}{9} = \frac{5}{36}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} x_3^{-\frac{2}{3}}} = \frac{5}{36} - \frac{5}{12} = -\frac{5}{27}$$

$$\vdots$$

Yukarıdaki işleme devam ettikçe x değerleri sonsuza doğru büyüyüp küçülecektir. Bu durumda $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonunun kökü yaklaşık olarak değişken bir biçimde $x = -\infty$ ve $x = \infty$ şekilde yorumlanır.

Bu durum, kökün negatif ve pozitif sonsuz değerlerine yaklaştığını gösterir.

ÖDEV1: $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ denkleminin $[2,4]$ aralığında kökünü ikiye bölme metodu ile 4 iterasyonda gerçekleştiriniz.

1. adım: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= 8 - 8 - 5 = -5 \\ f(4) &= 4^3 - 2 \cdot 4^2 - 5 = -27 \end{aligned}\right\}$$ $f(2) \cdot f(4) < 0$ olduğundan bu aralıkta bir kök vardır

2. adım: ikiye bölme metodu

1. iterasyon:

$\frac{2+4}{2} = 3$

2 — 3 — 4
(−) (+) (+)

$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 = 4$

$f(2) \cdot f(3) < 0$ olduğundan bu aralıkta kök vardır $[2,3]$

2. iterasyon:

$\frac{2+3}{2} = 2{,}5$

2 — 2,5 — 3
(−) (−) (+)

$f(2{,}5) = (2{,}5)^3 - 2(2{,}5)^2 - 5$

$= 15.625 - 12.5 - 5 = -1.875$

$f(2{,}5) \cdot f(3) < 0$ olduğundan bu aralıkta kök vardır $[2{,}5,$

3. iterasyon:

$\frac{2{,}5+3}{2} = 2.75$

2,5 — 2.75 — 3
(−) (+) (+)

$f(2.75) = (2.75)^3 - 2(2.75)^2 - 5$

$= 20.796875 - 15.125 - 5$

$= 0.671875$

$f(2{,}5) \cdot f(2.75) < 0$

4. iterasyon:

$\frac{2{,}5+2.75}{2} = 2.625$

2,5 — 2.625 — 2.75
(−) (−) (+)

$f(2.625) = (2.625)^3 - 2(2.625)^2 - 5$

$= 18.087890625 - 13.78125 - 5$

$= -0.69335975$

$x_{yaklaşık} = 2{,}625$

ÖDEV 2: $x^3+4x^2-10=0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında kökünü ikiye bölme metodu ile 4 iterasyonda gerçekleştiriniz. Çözüme bağıl hata payı $\varepsilon=10^{-6}$ olana kadar devam edin.

1. adım: $f(x)=x^3+4x^2-10$ $\quad f(x)$ $[1,2]$ aralığında sürekli

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1+4-10=-5 \\ f(2)=8+16-10=14 \end{array}\right\} f(1).f(2)<0$$ olduğundan bu aralıkta kök vardır.

2. adım: İkiye bölme metodu

1. iterasyon:

$\frac{1+2}{2}=1.5$

1   1.5   2
(−)   (+)   (+)

$f(1.5)=(1.5)^3+4(1.5)^2-10$
$=3.375+9-10=2.375$

$f(1).f(1.5)<0$ olduğundan bu aralıkta kök vardır.

2. iterasyon:

$\frac{1+1.5}{2}=1.25$

1   1.25   1.5
(−)   (−)   (+)

$f(1.25)=(1.25)^3+4(1.25)^2-10$
$=1.953125+6.25-10$
$=-1.796875$

$f(1.25).f(1.5)<0$

3. iterasyon:

$\frac{1.25+1.5}{2}$

1.25   1.375   1.5
(−)   (+)   (+)

$f(1.375)=(1.375)^3+4(1.375)^2-10$
$=0.162109375$

$f(1.25).f(1.375)<0$

4. iterasyon:

$\frac{1.25+1.375}{2}$

1.25   1.3125   1.375
(−)   (−)   (+)

$f(1.3125)=(1.3125)^3+4(1.3125)^2$
$=-0.848388671 9$

$x_{yaklaşık}=1.3125$

ÖDEV 2: $f(x) = 4e^{-0.5x} - x$ denkleminin kökünü Newton - Raphson ile başlangıç değeri $x_0 = 2$ alarak 4 iterasyon sonucunda bulunuz

$$f(x) = 4e^{-0,5x} - x$$

$$f'(x) = -2e^{-0.5x} - 1$$

1. iterasyon: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$x_1 = 2 - \frac{4e^{(-0,5)\cdot 2} - 2}{-2e^{-0,5\cdot 2} - 1}$$

$$x_1 \approx 1.787$$

2. iterasyon: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$$x_2 = 1.787 - \frac{4e^{-0,5\cdot 1.787} - 1.787}{-2e^{0.5\cdot 1.787} - 1.787}$$

$$x_2 \cong 1.715$$

3. iterasyon: $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$$x_3 = 1.712$$

4. iterasyon: $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

$$x_4 \cong 1.712$$