IFT 2125
Introduction à l'algorithmique
Devoir 1

Nom: Gbian, Bio Samir
Matricule: 20250793
Nom: Sourou, Johann
Matricule: 20227958

21 février 2024

1 Notation asymptotique

Question 1

1)

Montrons $2^n \in O(3^n)$:
Montrons $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ et c $\in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $2^n \leq c3^n$

on sait que : $2 \leq 3$
donc : $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots}_{n \text{ fois}} \leq \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots}_{n \text{ fois}} \forall$ n $\in \mathbb{N}$
ainsi : $2^n \leq 3^n$, $\forall$n $\in \mathbb{N}$

Pour c = 1, et $n_0 = 0$, on a bien que $\forall$ n $\geq n_0$ on a $2^n \leq 3^n$
d'où $2^n \in O(3^n)(1)$

Montrons $2^n \notin \Omega(3^n)$:
Supposons que $2^n \in \Omega(3^n)$, alors $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ et c $\in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall$ n $\geq n_0$ on a $2^n \geq c(3^n)$:

On a que : $2^n \geq c(3^n)$
$\Rightarrow \dfrac{1}{c} \geq \left(\dfrac{3^n}{2^n}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}^n\right) \leq \frac{1}{c}$
$\Rightarrow log\left(\frac{3}{2}^n\right) \leq log\left(\frac{1}{c}\right)$
$\Rightarrow nlog\left(\frac{3}{2}\right) \leq log\left(\frac{1}{c}\right)$
$\Rightarrow n \leq \frac{log(\frac{1}{c})}{log(\frac{3}{2})}$ On a une contradiction car n ne peux pas être borné par une constante.
On conclut donc que $2^n \notin \Omega(3^n)(2)$.
De (1) et (2) on peut conclure que $2^n \notin \Theta(3^n)$

2)

Montrons $2^{n+b} \in O(2^n)$:
Montrons $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ et c $\in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall$ n $\geq n_0, \forall$ b $\in \mathbb{N}^{\geq 2}$ on a $2^{n+b} \leq c2^n$

on a que : $2^{n+b} \leq 2^{n+b+1}$, $\forall n \geq 0, \forall b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$
soit $2^{n+b} \leq (2^{b+1})2^n$, $\forall n \geq 0, \forall b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$

Pour c = 2^{b+1}, et $n_0 = 0$, on a bien que $\forall n \geq n_0, \forall b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ on a $2^{n+b} \leq c2^n$
d'où $2^{n+b} \in O(2^n)$.(3)

Montrons $2^{n+b} \in \Omega(2^n)$:
Montrons que $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ et c $\in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ on a $2^{n+b} \geq c2^n$:

$b \geq 2$, donc $2^{b+n} \geq 2^n, \forall n \geq 0, \forall b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$,

donc pour c = 1 et $n_0 = 0$, on a bien que $2^{b+n} \geq c2^n, \forall n \geq n_0, \forall b \in \mathbb{N}^{\geq 2}$
d'ou $2^{n+b} \in \Omega(2^n)$.(4)

De (3) et (4) on peut conclure que $2^{n+b} \in \Theta(2^n)$

Question 2

1.
$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ puisque $0 < \frac{2}{3} < 1$.
Par la règle de la limite, nous pouvons conclure que $2^n \in O(3^n)$ et $3^n \notin O(2^n)$.

2.
$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{ln(n)}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{ln(n)} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{ln(n)} \overset{RH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$
Par la règle de la limite, nous pouvons conclure que $\frac{n}{ln(n)} \in \Omega(\sqrt{n})$ et $\frac{n}{ln(n)} \notin \Omega(\sqrt{n})$.

Question 3

Soit $f(n) = 2n^2 - 3n - 4$. Montrons que f est lisse.

(1) f est éventuellement non décroissante :
$f(n+1) = 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 4 = 2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 7$
$= 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 7 = 2n^2 + n - 5$.
Nous avons donc que $f(n) = 2n^2 - (3n + 4)$ et $f(n+1) = 2n^2 - (-n + 5)$.
Ensuite, nous avons :
$3n + 4 \geq 5 - n \Leftrightarrow 4n \geq 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{4}$.
Donc, pour $n = 1$, $f(n+1) \geq f(n)$. Par conséquent, nous pouvons conclure que f est éventuellement non décroissante.

(2) $f(bn) \in O(f(n))$.
On a : $f(bn) = 2(bn)^2 - 3(bn) - 4 = 2b^2n^2 + 3bn - 4$. Ensuite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(bn)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2b^2n^2 + 3bn - 4}{2n^2 - 3n - 4} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4b^2n - 3b}{4n - 3} \overset{\text{RH}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4b^2}{4} = b^2 \in \mathbb{N}$$

Par la règle de la limite, nous pouvons conclure que $f(bn) \in O(f(n))$.

Par les points (1) et (2), nous pouvons conclure que f est lisse.

$\square$