IFT 2125
Introduction à l'algorithmique
Devoir 2

Nom: Gbian, Bio Samir
Matricule: 20250793
Nom: Sourou, Johann
Matricule: 20227958

10 mars 2024

Question 1

Récurrence : $t_n = 3t_{n-1} - 2t_{n-2} + 5n2^n$
On remplace n par $n-1$ dans t_n :
$t_{n-1} = 3t_{n-2} + 2t_{n-3} + 5(n-1)2^{n-1}$
$2t_{n-1} = 6t_{n-2} + 4t_{n-3} + 5(n-1)2^n(*)$.
On remplace $n-2$ dans t_n :
$t_{n-2} = 3t_{n-3} - 2t_{n-4} + 5(n-2)2^{n-2}$
$4t_{n-2} = 12t_{n-3} - 8t_{n-4} + 5(n-2)2^n(**)$
On a ensuite la combinaison linéaire : $t_n - c_1(*) - c_2(**)$
En mettant tous les termes non homogènes égale à 0, nous obtenons :
$5n2^n - c_1(5(n-1)2^n) - c_2(5(n-2)2^n) = 0$
$5n2^n - c_1(5n2^n - 5 \times 2^n) - c_2(5n2^n - 2 \times 5 \times 2^n) = 0$
$5n2^n - c_1 \times 5n2^n - c_1 \times 5 \times 2^n - c_2 \times 5n2^n - c_2 \times 2 \times 5 \times 2^n = 0$
$2^n(5n - c_1 \times 5n - c_1 \times 5 \times -c_2 \times 5n - c_2 \times 2 \times 5) = 0$
$5n - c_1 \times 5n - c_1 \times 5 \times -c_2 \times 5n - c_2 \times 10 = 0$
$-c_1 \times 5n - c_1 \times 5 \times -c_2 \times 5n - c_2 \times 10 = -5n$
$5nc_1 + 5nc_2 + 5c_1 + 10c_2 = 5n$
$5n(c_1 + c_2) + 5(c_1 + 2c_2) = 5n \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$ et $c_1 + 2c_2 = 0$
Nous obtenons le système suivant :
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 & (*) \\ c_1 + 2c_2 = 0 & (**) \end{cases}$$
De $(*)$, nous avons : $c_1 = 1 - c_2$. En remplaçant c_1 dans $(**)$, nous avons : $1 - c_2 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2(2-1) = -1 \Rightarrow c_2 = -1$. Nous avons ensuite que $c_1 = 1 - (-1) = 2$.

Ensuite, on :
$t_n - 2(*) + (**) = tn - 4t_{n-1} + 4t_{n-2}$
$= 3t_{n-1} - 2t_{n-2} - 12t_{n-2} + 8t_{n-3} + 12t_{n-3} - 8t_{n-4}$
$\Rightarrow t_n - 4t_{n-1} - 3t_{n-1} + 4t_{n-2} + 2t_{n-2} + 12t_{n-2} - 8t_{n-3} - 12t_{n-3} + 8t_{n-4} = 0$
$\Rightarrow t_n - 7t_{n-1} + 18t_{n-2} - 20t_{n-3} + 8t_{n-4} = 0$
Nou obtenons le polynome suivant :
Polynôme : $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$
Pour $x = 1$, nous avons $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$ donc 1 est une racine du polynôme. En éffectuant une division euclédienne de $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$ par $x - 1$, nous obtenons $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$:

$$
\begin{array}{r|r}
 & X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \\ \hline
X - 1 & X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 20X + 8 \\
 & -X^4 + X^3 \\ \hline
 & -6X^3 + 18X^2 \\
 & 6X^3 - 6X^2 \\ \hline
 & 12X^2 - 20X \\
 & -12X^2 + 12X \\ \hline
 & -8X + 8 \\
 & 8X - 8 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

Pour $x = 2$, avons que ce polynôme est nulle donc 2 est une racine de $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Ensuite, en effectuant une division euclidienne de $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ par $x - 2$, nous obtenons $x^2 - 4x + 4$:

$$
\begin{array}{r|r}
 & X^2 - 4X + 4 \\ \hline
X - 2 & X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \\
 & -X^3 + 2X^2 \\ \hline
 & -4X^2 + 12X \\
 & 4X^2 - 8X \\ \hline
 & 4X - 8 \\
 & -4X + 8 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

Ensuite, en utilisant la formule quadratique, nous pouvons trouver les racines du polynôme $x^2 - 4x + 4$:
$r = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(4)}}{2} = 2 \Rightarrow r_1 = 2$ et $r_2 = 2$. Les racines du polynôme initiale sont donc 1(de multiplicité 1) et 2(de multiplicité 3).
Forme générale :
$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n + c_4 n^2 2^n$

Question 2

Résolvons la récurrence suivante exactement pour les puissances de 2 seulement, sans utiliser le théorème maître.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{ou si } n = 0, \\ 2 & \text{ou si } n = 1, \\ 9T(\frac{n}{2}) + 8(\frac{n}{2})^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $n = 2^i$, et $t_i = T(2^i) = T(n)$

on a que : $t_i = 9T(2^{i-1}) + 8(2^{i-1})^2$

soit $t_i = 9t_{i-1} + 8(2^{i-1})^2$
$\Rightarrow t_i = 9t_{i-1} + 8(2^i(\frac{1}{2}))^2$
$\Rightarrow t_i = 9t_{i-1} + 8(\frac{1}{4})(2^i)^2$
$\Rightarrow t_i = 9t_{i-1} + 2(2^2)^i$
$\Rightarrow t_i = 9t_{i-1} + 2(4^i)$
$\Rightarrow t_i$ - $9t_{i-1} = 2(4^i)$

On a que le polynôme $p(i)c^i = 2(4^i)$, degre(p) = 0 et c = 4 alors, on remarque que ce polynôme engrendre (x-4) dans l'équation caractéristique de la récurrence.

On obtient donc $P(x) = (x-9)(x-4)$ qui à les racines $x_1 = 9$ et $x_2 = 4$.

donc $t_i = c_1 9^i + c_2 4^i$

$$\begin{cases} t_0 = T(1) = 2 \\ t_1 = T(2) = 9T(1) + 8(1)^2 = 18 + 8 = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 9c_1 + 4c_2 = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 2 - c_1 \\ 9c_1 + 4(2 - c_1) = 26 \end{cases}$$

$9c_1 + 8 - 4c_1 = 26$
$5c_1 = 18$

$c_1 = \frac{5}{18}$

$c_1 = \frac{10}{5} - \frac{5}{18}$

$c_2 = -\frac{8}{5}$

$t_i = \frac{5}{18}9^i - \frac{8}{5}4^i$ (1)

$9 = 2^k \Rightarrow lg(9) = klg(2) \Rightarrow lg(9) = k$ alors $9 = 2^{lg(9)}$, en utilisant cette relation dans l'équation 1 on a que :

$t_i = \frac{5}{18}(2^{lg(9)})^i - \frac{8}{5}(2^2)^i$
$t_i = \frac{5}{18}(2^i)^{lg(9)} - \frac{8}{5}(2^i)^2$

or $t_i = T(n)$ et $n = 2^i$ d'où

$T(n) = \frac{5}{18}n^{lg(9)} - \frac{8}{5}n^2$

On conclut donc que $T(n) \in O(n^{lg(9)})$ (car $lg(9) \approx 3.16 > 2$ ainsi $n^{lg(9)}$ l'emporte sur n^2).

Question 3

Utilisons le théorème maître pour trouver l'ordre exacte des récurrences suivantes :

1) $t(n) = t(\frac{n}{2}) + 2n$
l = 1 ; b = 2 ; k = 1 ;
$1 < 2^1$
donc $l < b^k$, En utilisant le théorème maître on peut conclure que $t(n) \in \Theta(n^k)$ soit $t(n) \in \Theta(n)$.

2) $t(n) = 3t(\frac{n}{2}) + 3n$
l = 3 ; b = 2 ; k = 1 ;
$3 > 2^1$
donc $l > b^k$, En utilisant le théorème maître on peut conclure que $t(n) \in \Theta(n^{\log_b l})$ soit $t(n) \in \Theta(n^{lg(3)})$.

3) $t(n) = 4t(\frac{n}{2}) + n^2$
l = 4 ; b = 2 ; k = 2 ;
$4 = 2^2$
donc $l = b^k$, En utilisant le théorème maître on peut conclure que $t(n) \in \Theta(n^k \log n)$ soit $t(n) \in \Theta(n^2 lg(n))$.

4) $t(n) = 2t(\frac{n}{2}) + 2n$
l = 2 ; b = 2 ; k = 1 ;
$2 = 2^1$
donc $l = b^k$, En utilisant le théorème maître on peut conclure que $t(n) \in \Theta(n^k \log n)$ soit $t(n) \in \Theta(nlg(n))$.

5) $t(n) = 2t(\frac{n}{3}) + 2n$
l = 2 ; b = 3 ; k = 1 ;
$2 < 3^1$
donc $l < b^k$, En utilisant le théorème maître on peut conclure que $t(n) \in \Theta(n^k)$ soit $t(n) \in \Theta(n)$.