PHY 1441

ELECTROMAGNETISME

Hiver 2021

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Chapitre 3 : Le champ électrostatique

Contenu

1. Définition du champ électrostatique crée par une charge

Nous avons vu au chapitre précédent que la forme de la force électrostatique qu'une charge Q exerce sur une charge q est proportionnelle à Q et à q. Dans cette équation, on voit qu'on peut séparer la charge objet q, sur laquelle s'exerce la force, d'une charge Q qui « crée » la force. On peut alors définir une quantité qui s'avèrera très utile par la suite qui est **le champ électrostatique créé par la charge *Q* partout dans l'espace**. En un point $\vec{r}$ le champ est alors

$$\overrightarrow{E_Q} = \frac{\overrightarrow{F_{Q\to q}}}{q}$$

où q est la charge localisée en $\vec{r}$. Le champ s'exprime en V/m.

Donc le champ électrostatique crée par une charge Q en un point $\vec{r}$ est, par définition, la force que ressentirait une charge unité (q = 1 C) placée en $\vec{r}$. La force électrostatique qu'exerce une charge source Q placée en O (origine du repère orthonormé) sur une charge objet q placée en $\vec{r}$ a la forme mathématique

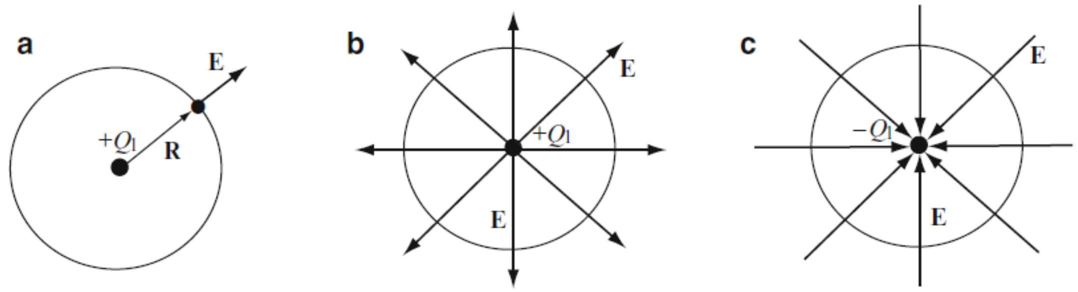
$$\overrightarrow{F_{Q\to q}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}$$

Donc le champ électrostatique crée par la charge source Q est :

$$\boxed{\overrightarrow{E_Q} = \frac{\overrightarrow{F_{Q\to q}}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}}$$

Le champ électrostatique créé par une charge unique localisée dans l'espace a donc les propriétés suivantes :

Le champ électrostatique créé par une charge unique est : continu sauf sur la charge source où il diverge**, radial, tend vers 0 quand *r* tend vers l'infini, dirigé vers l'extérieur si *Q* > 0 et dirigé vers l'intérieur si *Q* < 0.**



EXEMPLE 1 : Soit un électron de charge $e = -1{,}6\times10^{-19}$ C localisé dans l'espace.

a) **Déterminer l'intensité du champ électrique partout dans l'espace.**
b) **Trouver la force exercée par l'électron sur une poussière chargée par 2*e* et se trouve à une distance R de l'électron**

EXEMPLE 2 : Considérons le modèle classique de l'atome d'hydrogène, de rayon a_0, dans lequel l'électron gravite autour du proton à une distance $r \approx a_0 = 0.5$ Å.

a) **Quel est la valeur du champ électrique créé par le proton sur les points de l'orbite de l'électron ?**
b) **Quelle est la force ressentie par l'électron ?**

2. Définition du champ électrostatique créé par une distribution de charges discrètes.

Notons Ω, un ensemble de charges Q_i localisée (c'est-à-dire dont la position est fixée) en $\vec{r_i}$ dans l'espace. Par extension de la définition du champ créé par une charge, on définit le champ créé par un ensemble de charges source :

$$\overrightarrow{E_\Omega} = \frac{\overrightarrow{F_{\Omega\to q}}}{q}$$

Un principe fondamental de la physique stipule que les forces externes agissant sur un corps sont additives. Ceci vaut aussi pour l'électrostatique bien sûr. On peut écrire la force exercée par la distribution Ω sur une charge q localisée en $\vec{r}$.

$$\overrightarrow{F_{\Omega\to q}} = \sum_{Q_i\in\Omega} \overrightarrow{F_{Q_i\to q}}$$

Nous reprenons la formule de la force électrostatique et nous avons :

$$\overrightarrow{F_{\Omega\to q}} = \sum_{Q_i\in\Omega} \frac{qQ_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}-\overrightarrow{r_{Q_i}}}{||\vec{r}-\overrightarrow{r_{Q_i}}||^3} = q\sum_{Q_i\in\Omega} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}-\overrightarrow{r_{Q_i}}}{||\vec{r}-\overrightarrow{r_{Q_i}}||^3}$$

Par définition, les quantités sous le signe somme sont les champs créés par chacune des charges sources à l'endroit où est la charge objet. Donc

$$\overrightarrow{F_{\Omega\to q}} = q \sum_{Q_i\in\Omega} \overrightarrow{E_{Q_i}}(\vec{r})$$

Donc on déduit le théorème d'additivité des champs :

$$\boxed{\overrightarrow{E_{\Omega}} = \sum_{Q_i\in\Omega} \overrightarrow{E_{Q_i}}(\vec{r})}$$

Comme la somme de fonctions continues est une fonction continue, alors on a les propriétés suivantes pour le champ électrostatique : il diverge sur les charges sources, il est continu, il a des dérivées spatiales continues, il tend vers 0 quand $\vec{r} \to \infty$, s'il n'y a pas de charges à l'infini.

EXEMPLE 3 : Calculer le champ électrique produit par deux charges *q* et *q'* séparées par une distance *d* en un point P qui se trouve sur le médian entre les deux charges. Déduire si q=q', si q=-q', et si q=q' et y >> d.

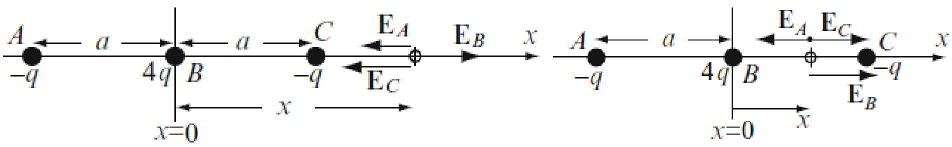
EXEMPLE 4 : Trois charges égales *Q* sont localisées sur le sommet d'un triangle équilatéral ABC de côté *a*. Chaque deux charge sont connectées par un fil fin pour les fixés dans l'espace. Le fil est supposé d'être coupé si une force plus que 0.1 N est appliquée.

a) Représenter les forces exercées sur chaque charge.
b) Si *a* = 20 mm, calculer la charge Q nécessaire pour couper le fil.
c) Calculer l'intensité du champ électrique au centre du fil AB.

EXEMPLE 5 : Trois charges –q, 4q et –q sont localisées en x = -a, x = 0 et x = a, respectivement.

a) Calculer l'intensité du champ électrique sur tout l'axe x.
b) Quels sont les points de l'axe x où le champ électrique s'annule.

Aide :



EXEMPLE 6 : Deux charges égales Q sont localisées en x = -a et x = a. Trouver les lieux où le champ créé par ce système est nul.

EXEMPLE 7 : Deux charges Q et 2Q localisées en x = 0 et x = a, respectivement. Trouver les points de l'axe x où le champ créé par ce système est nul.

Il faut bien comprendre que le champ électrique n'a réellement pas de sens physique. Il s'agit d'un outil mathématique pour pouvoir travailler plus aisément avec les équations de l'électrostatique (ce que nous verrons dans la suite). Physiquement, il est impossible de détecter un champ à un endroit de l'espace sans y placer une charge objet sur laquelle le champ exerce une force de Coulomb. Il est alors possible de mesurer cette force et en divisant par la valeur de la charge objet, on retrouve la valeur du champ. Il s'agit bien là d'une mesure indirecte du champ par le biais de la force électrostatique.

3. Lignes de champ

Considérons une distribution de charges sources localisées dans l'espace. Nous pouvons, au moins en théorie, déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point de l'espace.

Plaçons une charge objet $q > 0$, sans vitesse initiale en un point M_0 à $t = 0$ (t est la variable de temps). La charge ressent une force de Coulomb, $\overrightarrow{F_{\Omega\to q}} = q\overrightarrow{E_\Omega}(M_0)$, qui la met en mouvement. Elle suit une trajectoire, notée M(t), qui est donnée par le principe fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a}(t) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = q\overrightarrow{E_\Omega}(M(t))$$

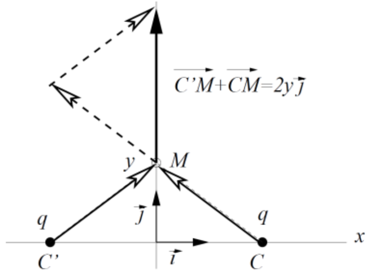
Cette égalité montre que la vitesse est colinéaire au champ quelque soit t. **La trajectoire est tangentielle au champ électrostatique en tout point.** Comme le champ et ses dérivées sont continus, hors des charges sources, alors la trajectoire des charges est continue et ne présente pas de point d'inflexion. Si on place maintenant une charge $q < 0$, sans vitesse initiale au point M_0 à $t = 0$, la trajectoire suivie par cette charge complète celle décrite avant. Donc, l'union de ces deux trajectoires est une trajectoire continue : c'est une **ligne de champ**. Il faut noter aussi que **deux lignes de champ ne se coupent jamais** et **une ligne de champ n'est jamais fermée.**

4. Champ crée par des distributions ponctuelles de charges

4.1. Champ crée par deux charges égales

Considérons deux charges électrostatiques de même signe et de même valeurs Q localisées dans l'espace en deux points notés C et C′ repéré par $x = \pm a$. Nous allons calculer le champ électrostatique en divers régions de l'espace.

Sur l'axe Oy



Par définition, tous les points M du plan médiateur de CC′ sont équidistants de C et de C′. Supposons que le point M est sur l'axe Oy en y (si ce n'est pas le cas, il suffit de faire tourner le repère $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ autour de $\vec{\imath}$ pour que ça le devienne). Nous notons la distance entre une charge et le point objet où on calcule le champ d = CM = C′M = $(a^2 + y^2)^{1/2}$.

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_{qC}}(M) + \overrightarrow{E_{qC'}}(M)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{CM}}{CM^3} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{C'M}}{C'M^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{C'M})$$

Sur la figure ci-dessous, on peut voir facilement que $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{C'M}$ est sur l'axe Oy et vaut $2y\vec{\jmath}$ ce que l'on peut démontrer facilement en notant : $\overrightarrow{CM} = -a\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{C'M} = a\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et en additionnant les deux quantités. On trouve donc pour le champ sur l'axe Oy :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y\vec{\jmath}}{(\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^2)^{3/2}}$$

- On remarque que ce champ s'annule bien lorsque y → ±∞. Ce fait est tout à fait général s'il n'y a pas de charges à l'infini.

- La fonction est impaire : $\vec{E}(-y) = -\vec{E}(y)$ ce qui est dû à la symétrie du problème par rapport à Ox. Nous reviendrons sur cet aspect plus tard.

Sur l'axe Ox

Le point M est maintenant en $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$. On a donc $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (x-a)\,\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC'} = (x+a)\vec{\imath}$. Donc le champ sur Ox est donné par :

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_{qC}}(M) + \overrightarrow{E_{qC'}}(M)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-a)}{(x-a)^3} + \frac{(x+a)}{(x+a)^3}\right)\vec{\imath}$$

En tout point M (x, y)

Le point M est maintenant en $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On a donc

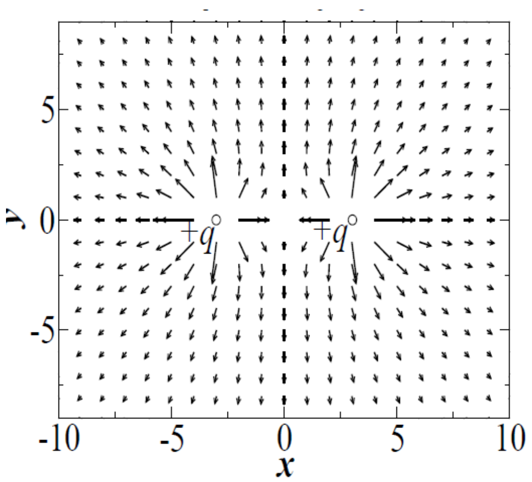
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = (x-a)\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC'} = (x+a)\vec{\imath} + +y\vec{\jmath}$

D'où le champ $\vec{E}(M)$:

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-a)\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{(x+a)\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}}\right)$$

Nous avons calculé numériquement la valeur du vecteur champ électrique en tout point (x, y) et nous avons reporté schématiquement les résultats sur la figure ci-dessous.



Ligne de champ

Nous avons déjà dit que le champ en lui-même n'était pas une grandeur physique et que pour l'observer, il fallait regarder son effet sur une charge électrostatique objet. Donc, plaçons, « par la pensée », une charge positive q à un endroit quelconque $\vec{r}$, dans le champ ci-dessus. Cette charge ressent une force de coulomb égale $q\vec{E}(\vec{r})$. D'après le principe fondamental de la dynamique, cette force met la charge en mouvement. Comme le champ est dirigé vers l'extérieur en tout point et que la charge est positive, la force de coulomb est dirigée vers l'extérieur quelque soit la position d'origine. La charge $q > 0$ sera donc repoussée jusqu'à l'infini.

On pouvait facilement anticiper ce résultat puisque toutes les charges ont le même signe ; elles doivent donc toutes se repousser.

Si maintenant, nous plaçons une charge négative dans le champ, la force que celle-ci ressent est opposée au champ. Si cette charge objet est dans le demi-espace défini par $x > 0$, elle est attirée par la charge source en $x = a$. Si elle est dans le demi-espace $x < 0$, elle est attirée vers la charge source en $x = -a$. Savez-vous le résultat si cette charge est en x = 0 ?

4.2. Champ crée par deux charges opposées

De la même façon que précédemment, nous allons calculer le champ électrique créé par deux charges opposées. Supposons que nous avons une charge $+|Q|$ au point C de coordonnée $x = a$ et une charge $-|Q|$ au point C′ de coordonnée $x = -a$. En reprenant les mêmes notations que précédemment, on a maintenant :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{CM}}{CM^3} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{C'M}}{C'M^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{C'M})$$

ce qui conduit de façon général à :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-a)\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{(x+a)\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}}\right)$$

Sur l'axe Oy.

En plus de x = 0, la contribution du champ selon l'axe Oy s'annule et on a :

$$\vec{E}(M) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\vec{\imath}}{(\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^2)^{3/2}}$$

qui est dirigé selon $-x$. De plus cette quantité tend bien vers 0 quand $y \to \infty$.

Sur l'axe Ox.

La contribution du champ selon l'axe Ox (y = 0) est :

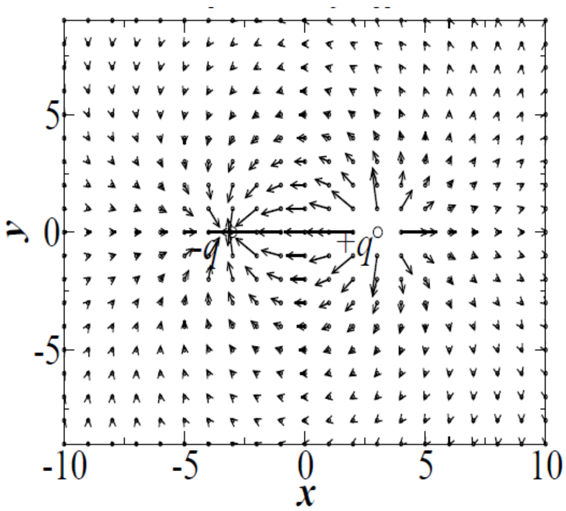
$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} - \frac{x+a}{|x+a|^3}\right)\vec{\imath}$$

- quand x tend vers $\pm\infty$, cette fonction tend bien vers 0.

- quand x = 0, on obtient $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-a}{|-a|^3} - \frac{+a}{|+a|^3}\right)\vec{\imath} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{a^2} - \frac{1}{a^2}\right)\vec{\imath} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a^2}\vec{\imath}$

En tout point M (x, y)

Le champ électrostatique qui règne partout dans l'espace est tracé sur la figure ci-dessous. Il a été calculé numériquement en tout point du plan.



Ligne de champ

Choisissons un point M(x, y) quelconque dans le plan mais pas sur l'axe Ox.

Plaçons en M une charge $q > 0$. Cette charge ressent une force de Coulomb dirigée dans le sens de la ligne de champ en M. Elle est donc mise en mouvement dans le sens de la ligne de champ. Nous constatons que sa trajectoire l'emmènera sur $-Q$.

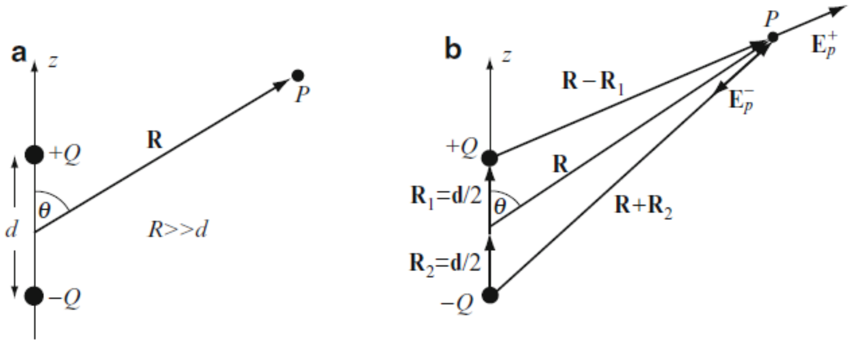
En ce même point M(x, y), plaçons maintenant une charge q′ < 0. La charge q′ ressent une force opposée aux lignes de champ. Nous voyons qu'en remontant les lignes de champ, la trajectoire de cette charge fini sur +Q.

L'axe Ox est ici particulier : c'est l'axe de symétrie du problème. Si une charge q > 0 est placée sur l'axe Ox en x > a, la force qu'elle ressent est dirigée selon Ox. Elle a une trajectoire qui tend à expulser les charges jusqu'à l'infini. Si à la place de la charge q > 0, on place une charge q′ < 0, celle-ci adoptera une trajectoire qui l'emmènera sur +Q. Pouvez-vous conclure pour x < -a et pour –a < x < a ?

On a donc les deux lignes de champ particulières qui sont sur l'axe de symétrie du système : l'une va de $-\infty$ à –Q et l'autre va de +Q à $+\infty$

5. Dipôle électrique

Une configuration d'importance pratique est celle de deux charges opposées $-Q$ et $+Q$ séparées par une distance d relativement courte par rapport à la distance R où le champ électrique sera calculé. Cette configuration est appelée dipôle électrique et est rencontrée lorsqu'on manipule des atomes et molécules.



Les intensités du champ électrique créé par la charge négative et la charge positive sont les suivantes :

$$\overrightarrow{E_P^-} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}+\overrightarrow{R_2}}{\left|\left|\vec{R}+\overrightarrow{R_2}\right|\right|^3} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}+\vec{d}/2}{\left|\left|\vec{R}+\vec{d}/2\right|\right|^3}$$

$$\overrightarrow{E_P^+} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}-\overrightarrow{R_1}}{\left|\left|\vec{R}-\overrightarrow{R_1}\right|\right|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}-\vec{d}/2}{\left|\left|\vec{R}-\vec{d}/2\right|\right|^3}$$

Le champ électrique total $\overrightarrow{E_d}$ est donc donné par :

$$\overrightarrow{E_d} = \overrightarrow{E_P^+} + \overrightarrow{E_P^-} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{R}-\vec{d}/2}{\left|\left|\vec{R}-\vec{d}/2\right|\right|^3} - \frac{\vec{R}+\vec{d}/2}{\left|\left|\vec{R}+\vec{d}/2\right|\right|^3}\right)$$

Bien que cette expression soit exacte, une forme simplifiée est souvent plus utile. Pour l'obtenir, on utilise le fait que $R >> d$:

$$\frac{1}{\left|\left|\vec{R}+\vec{d}/2\right|\right|^3} = \left[\left(\vec{R}+\frac{\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\vec{R}+\frac{\vec{d}}{2}\right)\right]^{-3/2} = \left[R^2 + 2\vec{R}\cdot\overrightarrow{d/2} + d^2/4\right]^{-3/2}$$

$$\frac{1}{\left|\left|\vec{R}-\vec{d}/2\right|\right|^3} = \left[\left(\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\vec{R}-\frac{\vec{d}}{2}\right)\right]^{-3/2} = \left[R^2 - 2\vec{R}\cdot\overrightarrow{d/2} + d^2/4\right]^{-3/2}$$

En prenant le terme $[R^2]^{-3/2}$ en dehors de la parenthèse et en négligeant le terme $d^2/4$:

$$\left|\left|\vec{R}+\vec{d}/2\right|\right|^{-3} = R^{-3}\left(1+\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2}\right)^{-3/2} \quad et \quad \left|\left|\vec{R}-\vec{d}/2\right|\right|^{-3} = R^{-3}\left(1-\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2}\right)^{-3/2}$$

D'autre part, nous savons que

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

Nous obtiendrons :

$$\left\|\vec{R}+\vec{d}/2\right\|^{-3} \approx R^{-3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2}\right) \quad et \quad \left\|\vec{R}-\vec{d}/2\right\|^{-3} \approx R^{-3}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2}\right)$$

L'équation du champ électrique s'écrira donc :

$$\overrightarrow{E_d} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left((\vec{R}-\vec{d}/2)\cdot\left(1+\frac{3}{2}\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2}\right)-(\vec{R}+\vec{d}/2)\cdot\left(1-\frac{3}{2}\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2}\right)\right)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3\frac{\vec{R}\cdot\vec{d}}{R^2}\vec{R}-\vec{d}\right)$$

A ce stade, **on définit le vecteur $\vec{P} = Q\vec{d}$ comme le moment dipolaire électrique**. On a donc :

$$\overrightarrow{E_d} \approx= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3\frac{\vec{R}\cdot\vec{P}}{R^2}\vec{R}-\vec{P}\right)$$

On remarque aussi que $\vec{P} = P\overrightarrow{u_z} = Qd\overrightarrow{u_z}$ et si on passe en coordonnées sphériques (voir chapitre 1, page 19, Coordonnées sphériques vers coordonnées cartésiennes), nous avons :

$$\overrightarrow{u_z} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Donc nous aurons :

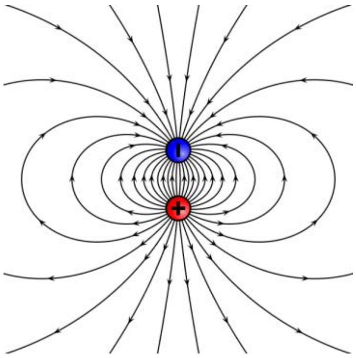
$$\vec{R}\cdot\vec{P} = RPcos\,\theta$$

(On peut aussi obtenir cette relation par un produit scalaire classique…)

$$\overrightarrow{E_d} \approx= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3\frac{RPcos\,\theta}{R^2}R\overrightarrow{u_r} - P(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta})\right)$$

$$\overrightarrow{E_d} \approx= \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(2\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta})$$

Noter bien que le champ électrique est proportionnel à $1/R^3$ et dans le cas d'une charge ponctuelle le champ est en $1/R^2$. Les lignes de champ sont présentées sur la figure ci-dessous :



EXEMPLE 8 : Calculer le champ électrique d'un dipôle constitué d'une charge négative –*Q* et une charge positive +2*Q*.

Dans leur état normal, appelé *état fondamental*, les atomes sont neutres et possèdent une distribution de charges à symétrie sphérique. En conséquence, leur moment dipolaire est nul.

Cependant, lorsque des atomes s'associent pour former des molécules, la situation est différente. En effet, ils mettent en commun des électrons pour former une liaison. Ainsi, la molécule est toujours neutre, mais selon sa symétrie, le moment dipolaire peut ou non être nul. Les molécules qui ne possèdent pas de centre de symétrie ont un moment dipolaire, comme par exemple HCl ou H_2O. Au contraire, celles qui ont un centre de symétrie, comme CO_2 (O=C=O) ou CH_4 (4 liaisons hydrogène avec l'atome central de carbone), n'ont pas de moment dipolaire.

Par exemple, pour la molécule HCl, le chlore étant plus électronégatif que l'hydrogène, il attire les deux électrons qui participent à la liaison. Autrement dit, le centre de «gravité» est déplacé vers l'atome de chlore. Il en résulte un moment dipolaire dirigé vers l'hydrogène avec une valeur $P=3{,}43\times10^{-30}$ C.m.

Un atome ou une molécule dont le moment dipolaire est nul dans leur état normal peuvent cependant acquérir un moment dipolaire lorsqu'on les soumet à un champ électrique. Ceci résulte du fait que les charges positives et négatives réagissent différemment à l'action de ce champ. Ce moment dipolaire est dit **induit**. Lorsque le champ électrique est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les non-linéarités, le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique appliqué E et s'écrit sous la forme $P = \alpha\varepsilon_0 E$; La quantité α qui a la dimension d'un volume est appelée **polarisabilité**.

6. Champ crée par quatre charges

Nous considérons maintenant quatre charges situées sur les coins d'un carré d'arête $2a$. Nous plaçons deux charges $+|Q|$ en $C_1 = (-a,-a)$ et $C_3 = (a, a)$ et deux charges $-|Q|$ en $C_2 = (-a, a)$ et $C_4 = (a,-a)$. Nous calculons le champ créé par cette distribution en $M = (x, y)$.

Déterminons les vecteurs utiles au calcul :

$$\overrightarrow{C_1M} = (x+a)\,\vec{\imath} + (y+a)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{C_2M} = (x+a)\,\vec{\imath} + (y-a)\vec{\jmath}$$

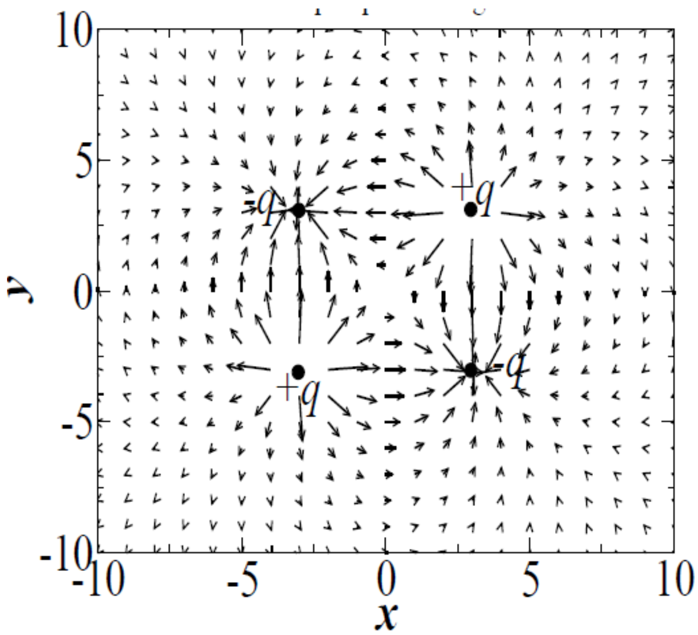
$$\overrightarrow{C_3M} = (x-a)\,\vec{\imath} + (y-a)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{C_4M} = (x-a)\,\vec{\imath} + (y+a)\vec{\jmath}$$

Et nous en déduisons une forme analytique du champ :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x+a)\vec{\imath} + (y+a)\vec{\jmath}}{((x+a)^2 + (y+a)^2)^{3/2}} - \frac{(x+a)\vec{\imath} + (y-a)\vec{\jmath}}{((x+a)^2 + (y-a)^2)^{3/2}} + \frac{(x-a)\vec{\imath} + (y-a)\vec{\jmath}}{((x-a)^2 + (y-a)^2)^{3/2}} - \frac{(x-a)\vec{\imath} + (y+a)\vec{\jmath}}{((x-a)^2 + (y+a)^2)^{3/2}}\right)$$

On peut éventuellement calculer la valeur du champ sur les axes Ox (y = 0) et Oy (x = 0) facilement, mais ce n'est pas notre problème ici. Nous avons calculé et tracé le champ partout dans l'espace sur la figure ci-dessous.



Les remarques faites pour le cas précédent (avec deux charges de signes opposées) restent valables dans ce cas. Elles peuvent être énoncées de la façon suivante :

Si les charges sources sont positives et négatives,

- les lignes de champ, hors axes de symétrie, vont des charges positives vers les charges négatives.

- les lignes de champ, sur les axes de symétrie, vont des charges vers l'infini.

Lignes de champ

Nous voyons ici encore que les observations faites pour le cas précédent restent valables.

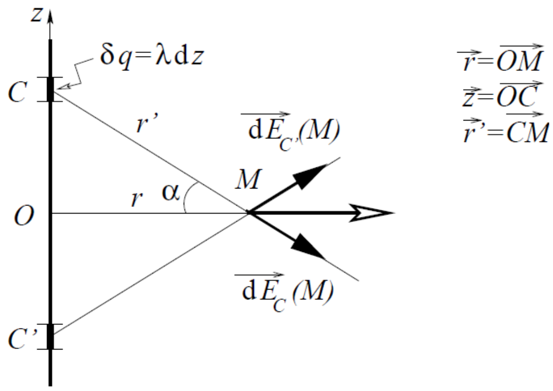
- les lignes de champ sur les axes de symétrie divergent entre $-\infty$et la première charge rencontrée ainsi qu'entre la dernière charge et $+\infty$.

- sinon, elles naissent sur les charges positives et finissent sur les charges négatives.

7. Champs électrique crée par une distribution linéique uniforme

Nous considérons ici un fil métallique très long de longueur *L*. Ce fil est extrêmement fin et nous considérons que son diamètre tend vers 0. Il porte une charge nette *Q* répartie uniformément sur la longueur du fil. Nous avons vu que d'après la définition de la distribution linéique de charges, la quantité élémentaire de charges portée par *dz* est : $\delta q = \lambda\, dz$. Cette quantité de charge crée la quantité élémentaire de champ électrostatique en M(r, θ, z) :

$$d\vec{E}(r,\theta,z) = \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r'}}{\mathrm{r'}^3}$$



avec $\vec{r'} = r\vec{u_r} - z\vec{k}$

Cette quantité est bien indépendante de θ puisque le problème admet une symétrie par rotation autour de Oz. D'où, on peut récrire l'élément différentiel de champ dû aux charges δq contenue dans le segment de longueur infinitésimale dz localisée en z :

$$d\vec{E}(r,z) = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\vec{u_r} - z\vec{k}}{(\mathrm{r}^2+\mathrm{z}^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{E}(r,z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r\vec{u_r} - z\vec{k}}{(\mathrm{r}^2+\mathrm{z}^2)^{\frac{3}{2}}}dz$$

$$= \frac{\lambda\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r}{(\mathrm{r}^2+\mathrm{z}^2)^{3/2}}dz - \frac{\lambda\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{(\mathrm{r}^2+\mathrm{z}^2)^{\frac{3}{2}}}dz = I_r + I_z$$

I_z est une fonction impaire donc son intégrale selon z entre des bornes opposées donne 0.

Pour calculer l'intégrale I_r, remarquons auparavant les relations trigonométriques suivantes sur la figure ci-dessus :

$$\cos\alpha = \frac{r}{(\mathrm{r}^2+\mathrm{z}^2)^{1/2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{z}{r} \;\rightarrow dz = r\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

L'intégrale se réécrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r}{(\mathrm{r}^2+\mathrm{z}^2)^{3/2}}dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{r} = \frac{1}{r}\sin\alpha\,|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2/r$$

On trouve donc pour le champ électrostatique :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$$

Ce résultat est en bon accord avec les considérations de symétrie et d'invariance que nous avons posées au chapitre 2.

Le champ appartient aux plans de symétrie que sont le plan contenant le fil (plan de la feuille) et le plan perpendiculaire au fil. Donc les vecteurs $\vec{E}(M)$ sont selon $\overrightarrow{u_r}$.

Le champ est fonction de la seule variable qui ne présente pas d'invariance

- le problème est invariant par translation selon Oz

- le problème est invariant par rotation autour de Oz

- le problème est dépendant de *r*

Donc le module de $\vec{E}(M)$ ne doit dépendre que de *r*.

EXEMPLE 9 : Un fil mince de longueur 2 m est uniformément chargé avec une densité ρ_L (C/m).

a) Déterminer l'intensité du champ électrique à une distance a = 1 m du centre du fil.
b) Déterminer l'intensité du champ électrique à une distance a du fil si sa longueur est infinie.

Aide : $\int \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2\sqrt{a^2+z^2}}$

EXEMPLE 10 : Un fil est tourné en un demi-cercle de rayon a = 10 mm et chargé par ρ_L = 1 nC/m.

a) Calculer le champ électrique au centre du demi-cercle.
b) Déduire l'intensité du champ électrique au centre d'un cercle.

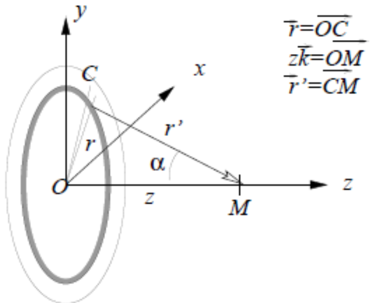
EXEMPLE 11 : Soit un anneau circulaire de rayon *R* uniformément chargé avec une densité de charge linéique λ. Calculer l'intensité de champ électrique au point P situé à une distance *z* à la verticale du centre de l'anneau. Déduire pour *z* >> *R*.

8. Champs électrique crée par une distribution surfacique uniforme

Nous considérons maintenant un disque métallique, de rayon *a*, neutre sur lequel nous transférons une quantité de charge *Q*. Le disque porte alors une densité de charge surfacique :

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

Nous allons calculer le champ électrostatique sur l'axe du disque.



Tous les plans contenant l'axe du disque sont des plans de symétrie. Le champ (qui appartient à tous les plans de symétrie du problème) est donc selon Oz (l'axe du disque). De plus comme le point M est sur l'axe on a le module de $\vec{E}(M)$ qui ne dépend que de z :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{k}$$

Donc la contribution intéressante pour calculer le champ électrostatique est seulement la projection de $\vec{E}(M)$ sur Oz ; autrement dit il suffit d'intégrer les contributions, *E(M) cos α*, dus à chaque élément de surface d*S* :

$$E(z) = \int_{disque} \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} cos\alpha$$

avec *dS = rdrdθ* que l'on peut tout de suite intégrer selon *θ* puisque nous avons une symétrie de rotation autour de *Oz : dS = 2πrdr*

Nous choisissons *α* comme variable d'intégration et nous avons les changements de variables suivants :

$$r' = z/\cos\alpha$$

$$r = z\tan\alpha \quad \rightarrow dr = zd\alpha/cos^2\alpha$$

On injecte les nouvelles variables dans l'intégrale :

$$E(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_0} \frac{cos^2\alpha}{z^2} 2\pi z^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha^3} d\alpha \cos\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_0} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\cos\alpha)_0^{\alpha_0}$$

ce qui donne

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha_0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

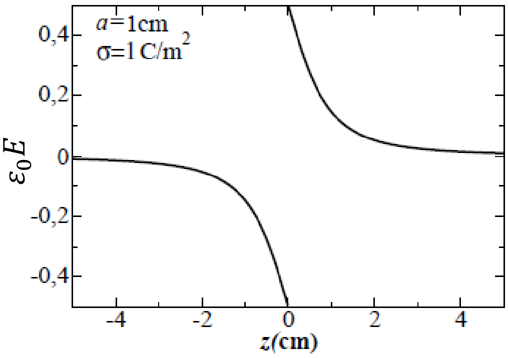
Cette solution est valable pour z > 0.

Le plan z = 0 est plan de symétrie du problème. On doit donc avoir *E*(-z) = -*E*(*z*)

Donc la solution globale du champ sur l'axe est :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \quad si\ z > 0$$

$$E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \quad si\ z < 0$$



La figure ci-dessus montre la valeur du champ électrique (multipliée par ε_0) en fonction de z (en cm) créé par un disque de 1 cm de diamètre portant une densité de charge surfacique σ = 1 C/m^2.

Ce champ décroit très rapidement vers 0 en fonction de z, ce qui est cohérent avec le fait que, puisqu'il n'y a pas de charges à l'infini, le champ électrique doit tendre vers 0 quand z tend vers l'infini.

D'autre part, on constate une discontinuité du champ en *z* = 0, c'est à dire sur le disque chargé en surface. Nous commenterons plus loin l'origine physique de cette discontinuité.

EXEMPLE 12 : Soit un plan fin de taille 2a×2b est chargé uniformément avec une densité de charge ρ_S.

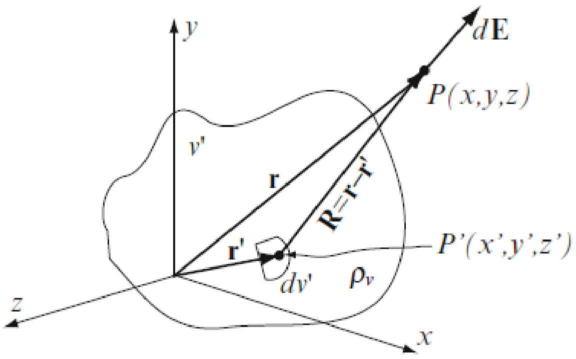
a) Calculer l'intensité du champ électrique (expression intégrale) parallèle à la surface du plan en un point quelconque (x, y).
b) Déduire l'intensité du champ électrique au centre, en x = 0 et y = 0.

EXEMPLE 13 : Soit un hémisphère de rayon *R* a une charge uniformément distribuée sur la surface avec une densité ρ_S. Calculer la force sur une charge positive *q* placée au centre de l'hémisphère.

9. Champs électrique crée par une distribution volumique uniforme

Le traitement d'une distribution de charge volumique suit les étapes identiques que les cas d'une distribution surfacique et linéique. Le champ électrique dû à un élément de charge volumique est présenté sur la figure ci-dessous. Pour un élément de volume, la charge portée par cet élément est dq = ρ_VdV' et l'intensité du champ électrique créé par cet élément de charge à une distance R est donnée par :

$$d\vec{E} = \frac{\rho_V dV'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{R}$$



Par intégration et en utilisant les relations entre les vecteurs dans la figure, on a

$$\vec{E} = \int_{V'} \frac{\rho_V(\vec{r} - \vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0 ||\vec{r} - \vec{r'}||^3} dV'$$

Vous vous étonnerez peut-être du fait que l'intégrant est un champ de vecteur et non une fonction. Il faut comprendre cette expression comme trois relations pour les trois composantes du champ, par exemple

$$\vec{E} = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{(x - x')dV'}{||\vec{r} - \vec{r'}||^3} \vec{\imath} + \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{(y - y')dV'}{||\vec{r} - \vec{r'}||^3} \vec{\jmath} + \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{(z - z')dV'}{||\vec{r} - \vec{r'}||^3} \vec{k}$$

Pour un volume avec limites, $dV' = dx'dy'dz'$ et l'élément de volume est localisé en (x', y', z') et l'intensité du champ électrique est calculée en (x, y, z). D'autre part, on a

$$||\vec{r} - \vec{r'}|| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z - z')^2}$$

et la composante du champ électrique E_x s'écrit comme :

$$E_x(x, y, z) = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{(x - x')dx'dy'dz'}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z - z')^{3/2}}$$

EXEMPLE 14 : On considère un nuage orageux qu'on le suppose cylindrique de rayon b = 1 km, de hauteur $2a$ = 4 km et il est 1 km loin du sol, comme présenté dans la figure ci-dessous. Le nuage a une densité de charge ρ_V = 1 nC/m³ et est uniformément distribuée en volume.

a) Calculer le champ électrique au niveau du sol en dessous du centre de nuage.

b) Calculer le champ électrique en bas du nuage sur son axe.