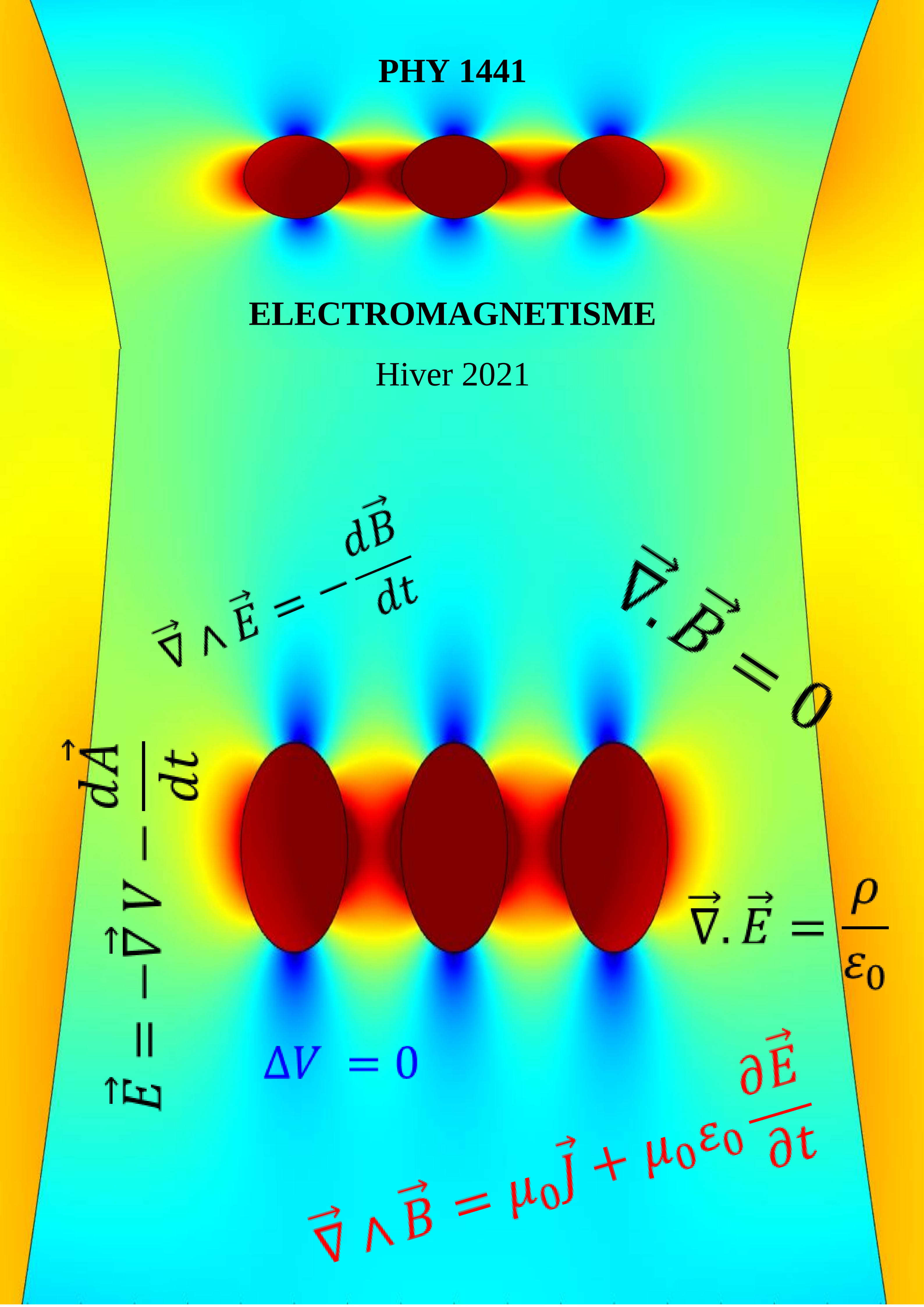
PHY 1441

ELECTROMAGNETISME

Hiver 2021



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Chapitre 5 : Le Théorème de Gauss

Contenu

1. Flux de champ électrique

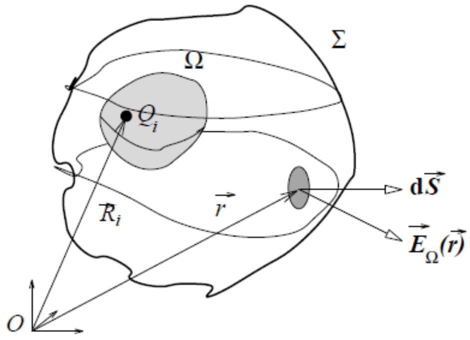
Par définition, une surface fermée défini clairement un volume intérieur et un volume extérieur. Nous considérons, maintenant, le champ électrique créé par une distribution Ω, localisée dans l'espace. Cette distribution créé un champ électrique qui peut être, en principe, déterminé en tout point de l'espace. Pour toute surface Σ fermée, on peut définir le flux du champ à travers cette surface :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \iint_\Sigma \overrightarrow{E_\Omega}(\vec{r})\overrightarrow{dS}$$

où $\overrightarrow{dS}$ est l'élément différentiel de surface, situé en $\vec{r}$ et orienté vers l'extérieur et $\overrightarrow{E_\Omega}(\vec{r})$ est le champ électrostatique créé en $\vec{r}$ par la distribution Ω.

Comme le champ électrostatique est additif, on peut écrire le flux de champ créé par la distribution Ω comme le flux de la somme des champs créés par les charges sources Q_i de Ω :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \iint_\Sigma \sum_{Q_i \in \Omega} \overrightarrow{E_{Q_i}}(\vec{r})\overrightarrow{dS}$$



De plus, comme la position des charges Q_i ne dépend pas de la surface Σ, on peut intervertir la somme sur les charges Q_i et l'intégrale de surface :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \sum_{Q_i \in \Omega} \iint_\Sigma \overrightarrow{E_{Q_\iota}}(\vec{r})\overrightarrow{dS} = \sum_{Q_i \in \Omega} \Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_{Q_\iota}})$$

La quantité qui apparait dans la somme du membre de droite est simplement le flux du champ électrique créé par la charge Q_i située en $\overrightarrow{R_\iota}$. Cette décomposition va être très utile pour établir le théorème de Gauss. Nous allons déterminer ce que vaut le flux du champ électrique créé par la charge Q_i à travers Σ puis nous sommerons ce résultat sur toutes les charges sources.

En reprenant la définition du champ électrique, le flux s'exprime simplement comme :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_{Q_\iota}}) = \sum_{Q_i \in \Omega} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \iint_\Sigma \frac{\vec{r} - \overrightarrow{R_\iota}}{||\vec{r} - \overrightarrow{R_\iota}||^3} \overrightarrow{dS}$$

Nous allons maintenant voir ce que vaut cette intégrale.

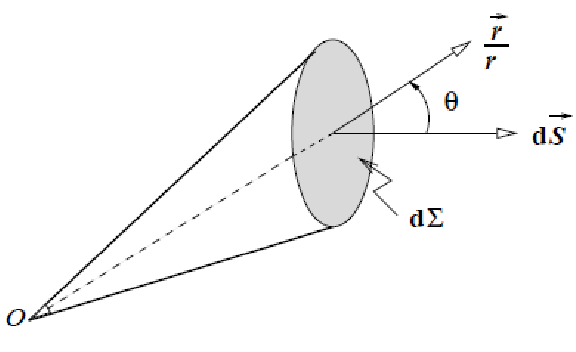
2. Angle solide

Tout d'abord, le résultat de l'intégrale précédente ne dépend pas de l'endroit où est située l'origine du repère d'espace. On place alors tout naturellement la charge $Q = Q_i$ en O (ce qui revient à écrire $\overrightarrow{R_\iota} = \vec{0}$). Le flux du champ créé par Q à travers Σ s'écrit :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_Q}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{dS}$$

L'intégrale de l'équation ci-dessus est, par définition l'angle solide sous lequel l'origine O du repère 'voit' la surface Σ :

$$d\Omega_{sol} = \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{dS} \quad avec\ \Omega_{sol} = \iint_\Sigma d\Omega_{sol}$$



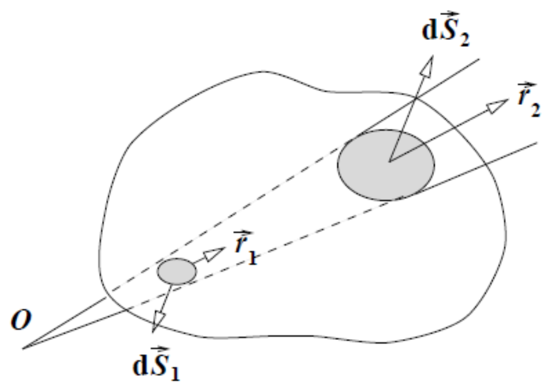
Dans l'équation ci-dessus, les vecteurs $\vec{r}$ et $\overrightarrow{dS}$ ne sont colinéaires que dans le cas très particulier où la surface est une sphère. A l'aide des notations de la figure ci-dessus, on peut exprimer le produit scalaire ($\vec{r} \,.\, \overrightarrow{dS} = r\ dS\ cos\theta$) et l'intégrale devient :

$$\Omega_{sol} = \iint_\Sigma \frac{\cos\theta}{r^2} dS$$

De plus, la surface perpendiculaire à $\vec{r}$, $d\Sigma$, s'écrit comme $\cos\theta\, dS$ (c'est la projection de la surface dS sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône). Nous allons maintenant considérer les deux cas, l'origine O du repère est soit à l'intérieur de la surface Σ soit à l'extérieur, pour calculer l'intégrale :

$$\Omega_{sol} = \iint_{\Sigma} \frac{dS_{\perp}}{r^2}$$

1. O est à l'extérieur de la surface Σ



Considérons que le faisceau qui nous sert à intégrer à une section circulaire. De plus nous notons, l'ouverture du cône dα (très petit). Ce faisceau coupe deux fois (ou zéro) la surface Σ : une fois la face avant $((\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{dS_1}) > \pi/2)$ et une fois la face arrière $(((\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{dS_2}) < \pi/2)$. La quantité dΣ est donc positive pour la face arrière et négative pour la face avant.

On a :

- pour la face avant : $dS_{\perp 1} = -\pi(r_1 d\alpha)^2$. C'est la surface du disque de rayon $r_1 d\alpha$.

- pour la face arrière : $dS_{\perp 2} = \pi(r_2 d\alpha)^2$. C'est la surface du disque de rayon $r_2 d\alpha$.

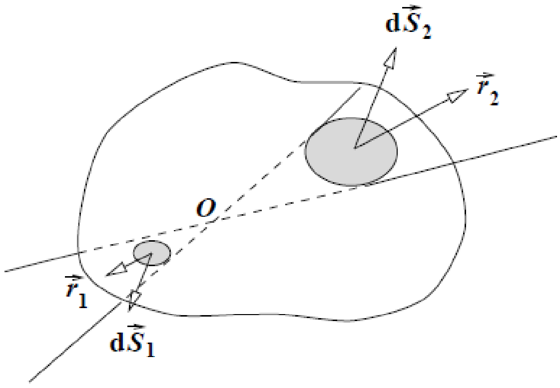
Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dS_{\perp 1}}{{r_1}^2} = -\frac{dS_{\perp 2}}{{r_2}^2}$$

Finalement, on obtient dans ce cas :

$$\Omega_{sol} = \iint_{\Sigma} \frac{dS_{\perp}}{r^2} = 0$$

2. O est à l'intérieur de la surface Σ



Si l'origine est considérée maintenant à l'intérieur de la surface Σ, on a bien $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{dS_1}) < \pi/2$ et $(\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{dS_2}) < \pi/2$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{dS_{\perp 1}}{r_1{}^2} = \frac{dS_{\perp 2}}{r_2{}^2}$$

Cette fois ci, l'intégrale ne s'annule plus. Comme $dS_\perp = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$ est l'élément différentiel de surface exprimée en coordonnées sphérique à r constant (voir chapitre 1). L'angle solide est donc :

$$\Omega_{sol} = \iint_\Sigma \frac{dS_\perp}{r^2} = \iint_\Sigma \frac{r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi}{r^2} = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2 \times 2\pi = 4\pi$$

3. Théorème de Gauss

Reprenons la forme mathématique du flux de champ électrique créé par une charge Q située en O, à travers une surface Σ :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_Q}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{dS}$$

Nous venons de voir que le résultat de l'intégrale de l'expression au-dessus ne dépend que de la position du point O par rapport à la surface Σ :

$$\iint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{dS} = \begin{cases} 4\pi \; si \; O \; est \; à \; l'intérieur \; de \; \Sigma \\ 0 \; si \; O \; est \; à \; l'exterieur \; de \; \Sigma \end{cases}$$

Donc le flux du champ électrique crée par la charge Q s'écrit :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_Q}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & si \; O \; est \; à \; l'intérieur \; de \; \Sigma \\ 0 & si \; O \; est \; à \; l'exterieur \; de \; \Sigma \end{cases}$$

Ce qui revient à dire, que seules les charges à l'intérieur de la surface Σ ont un flux non nul. De plus, ce flux est indépendant de la position de la charge à l'intérieur de la surface.

De plus, comme le flux de champ électrique est une quantité additive, $\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_Q}) = \sum_{Q_i \in \Omega} \Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_{Q_i}})$ on peut calculer très simplement le flux d'une distribution de charges, $\{Q_i(\overrightarrow{R_i})\}$, à travers une surface donnée : les charges à l'extérieur de la surface ne contribuent pas au flux alors que les charges à l'intérieur y contribuent pour Q_i/ε_0 chacune. Ce qui nous permet d'écrire le théorème de Gauss :

$$\boxed{\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \iint_\Sigma \overrightarrow{E_{Q_i}}(\vec{r})\overrightarrow{dS} = \sum_{Q_i \text{ intérieur } \Sigma} \frac{Q_i}{\varepsilon_0}}$$

C'est le célèbre théorème de Gauss appliqué à l'électrostatique. La seule hypothèse de ce théorème est la forme du champ électrostatique en $1/r^2$, tout le reste n'est qu'une démonstration mathématique.

Ce théorème dit simplement que les charges qui contribuent au flux du champ électrostatique à travers une surface sont uniquement celles qui sont incluse dans le volume intérieur à la surface Σ. Si toutes les charges sont à l'extérieur de Σ alors le flux du champ créé par ces charges à travers Σ est nul.

ATTENTION : Cela ne veut pas dire que le champ électrostatique est nul partout sur la surface. Au contraire, il existe de positions où la valeur de champ est non nulle sur Σ. En revanche, c'est la somme des champs sur Σ qui est nul.

4. Utilisation du théorème de Gauss

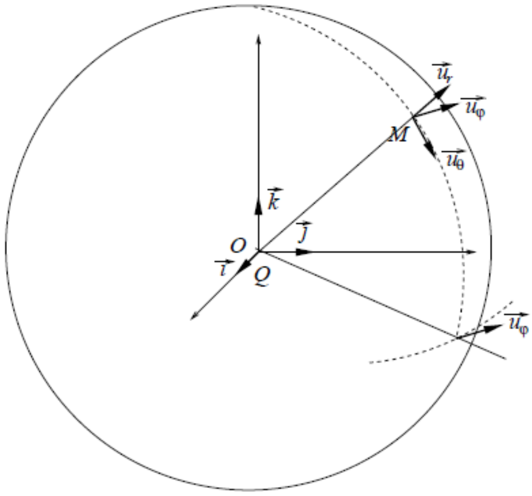
4.1. Généralités

Le théorème de Gauss est un puissant outil de calcul des champs électrostatiques dès que la distribution de charges sources présente une symétrie. On donne maintenant la démarche générale pour calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charge donnée en un point quelconque de l'espace M.

0. L'étape préliminaire et essentielle est la détermination des symétries et des invariances du problème.
1. A partir des symétries de la distribution, on déduit le système de coordonnées (cartésiennes, cylindrique ou sphérique) le plus adapté au traitement du problème.
2. On écrit alors le champ sous la forme d'un vecteur dans le système de coordonnées choisi.
3. Sachant que le champ appartient à tous les plans de symétrie, on ne garde que les contributions vectorielles dont dépend le champ.
4. On élimine les variables qui présentent une invariance.
5. On détermine la surface de Gauss sur laquelle on intègre. C'est la surface qui présente la même symétrie que le problème et qui passe par le point M. On détermine $\overrightarrow{dS}$ sur cette surface exprimé avec les vecteurs du système de coordonnées.
6. On calcule $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$. En général, le produit scalaire s'effectue bien et permet de sortir le champ électrique de l'intégrale qui devient une intégrale de surface.
7. On calcule le terme de droite qui est simplement la quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss.

4.2. Coordonnées sphériques

Champ créé en un point M par une charge ponctuelle (EXEMPLE 1)



On considère une charge ponctuelle Q placée en O.

0. Ce problème admet bien sur une symétrie sphérique si on place la charge à l'origine du repère. Un point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, φ).
1. Le champ s'écrit en symétrie sphérique :
$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_\varphi}$$
2. Les plans $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ et $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\varphi})$ passants par M sont plans de symétrie du problème. Donc pour appartenir à ces deux plans, le champ électrique est selon $\overrightarrow{u_r}$:
$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_r}$$
3. Une rotation de la distribution de charges d'un angle θ selon $\overrightarrow{u_\theta}$ laisse le problème invariant. De même pour une rotation d'un angle φ selon $\overrightarrow{u_\varphi}$. La solution ne dépend donc pas de θ ni de φ :
$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r)\overrightarrow{u_r}$$
4. La surface de Gauss, Σ, est une sphère de rayon r = OM centrée sur O. L'élément différentiel de surface est $\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{u_r}$.
5. L'intégrale dans le théorème de Gauss s'écrit alors :
$$\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{E_\Omega}\right) = \iint_\Sigma \overrightarrow{E_\Omega}\,(\vec{r})\overrightarrow{dS} = \iint_\Sigma E(r)\overrightarrow{u_r}\,dS\overrightarrow{u_r} = \iint_\Sigma E(r)\,dS\ car\ \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_r} = 1$$
$$= E(r)\iint_\Sigma dS\ \ car\ E(r)\ est\ constant\ sur\ \Sigma$$
$$= E(r)4\pi r^2$$
6. La quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement $\sum_{Q_i\ intérieur\ \Sigma} Q_i = Q$
7. On égalise les deux membres du théorème de Gauss $\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{E_\Omega}\right) = \sum_{Q_i\ intérieur\ \Sigma} Q_i/\varepsilon_0$ et donc $E(r)4\pi r^2 = \ Q/\varepsilon_0$

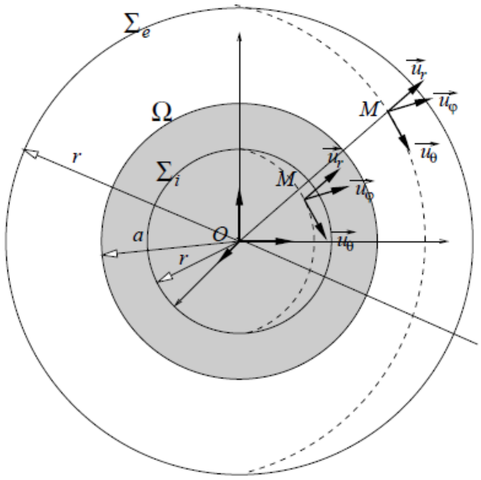
Comme $\vec{E}(r)$ est selon $\overrightarrow{u_r}$, on a la solution ci dessous :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

On reconnait bien dans ce résultat le champ créé par une charge ponctuelle Q placée en O. En fait c'est cette définition qui nous a servi pour démontrer le théorème de Gauss.

Champ créé en un point M par une boule chargée (EXEMPLE 2)

On considère une boule de rayon a, centrée sur O, portant une charge Q répartie uniformément en volume. On cherche à déterminer le champ électrostatique en un point M de l'espace. On note r = OM.



Les points de 0 à 5 du raisonnement au-dessus restent valables. On a donc :

$$\Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{E_\Omega}\right) = E(r)4\pi r^2$$

6. Nous allons considérer deux cas pour calculer $\sum_{Q_i\ intérieur\ \Sigma}$.

- si $r > a$ (c.à.d. si M est à l'extérieur de la boule), alors la boule est à l'intérieur de la surface de Gauss. On a donc $\sum_{Q_i\ intérieur\ \Sigma} = Q$

- si $r < a$ (c.à.d. si M est à l'intérieur de la boule), alors une partie de la boule est à l'extérieur de la surface de Gauss. La quantité de charge à l'intérieur de la surface de Gauss n'est plus Q. Nous allons calculer la densité volumique de charge dans la boule :

$$\rho = \frac{Q}{V_{boule}} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

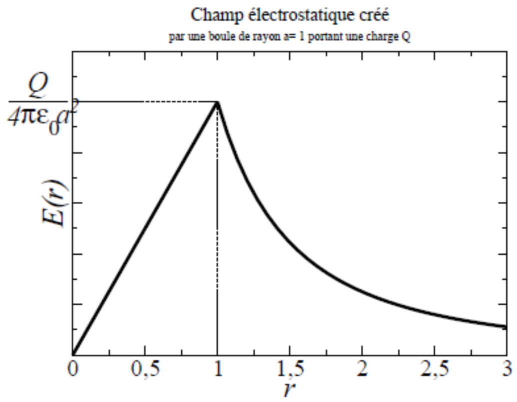
La quantité de charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc :

$$\sum_{Q_i\ intérieur\ \Sigma} = \rho V_i = \frac{3Q}{4\pi a^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{a^3}$$

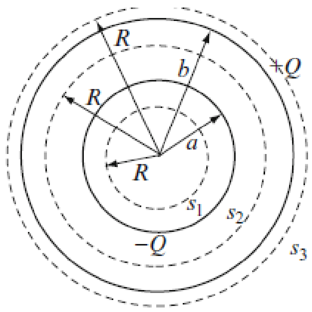
7. On égalise les deux membres du théorème de Gauss et on obtient :

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} & si\ r > a \\ \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\overrightarrow{u_r} & si\ r < a \end{cases}$$

Nous avons tracé sur la figure ci-dessous la courbe donnant le module du champ en fonction de r. On constate que, dans cet exemple, le champ est continu.



EXEMPLE 3 : Soit deux coquilles sphériques minces chargées (voir figure). La coquille intérieure a une charge totale –*Q* et la coquille externe est chargée +*Q*. Les charges sont distribuées uniformément sur les surfaces.



a) Calculer le champ électrostatique partout dans l'espace.
b) On place maintenant une charge ponctuelle +*Q* au centre de deux sphères. Recalculer le champ électrostatique partout dans l'espace.
c) Tracer les solutions.

4.3. Potentiel créé par une boule (EXEMPLE 4)

On peut facilement calculer le potentiel électrostatique créé par la boule à partir du champ :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

ce qui conduit en coordonnées sphériques à :

$$E_r\overrightarrow{u_r} + E_\theta\overrightarrow{u_\theta} + E_\varphi\overrightarrow{u_\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

Comme $\vec{E}$ ne dépend que de r, les deux dernières contributions sont nulles et on a :

$$V = -\int E(r)dr$$

Ce qui donne

- à l'extérieur de la boule (c.à.d. pour $r > a$) :

$$V_e = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_0$$

Comme dans ce problème il n'y a pas de charges à l'infini, alors on a $V_e(r) \to 0$ quand $r \to \infty$. Ce qui permet de déterminer la constante d'intégration V_0 qui est nulle.

- à l'intérieur de la boule (c.à.d. pour $r < a$) :

$$V_i = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r dr = -\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} + V_1$$

Comme dans ce cas nous avons posé $r < a$, nous ne pouvons pas déterminer la constante d'intégration avec les conditions pour lesquelles $r \to \infty$. Cependant, nous savons que les potentiels sont toujours continus. Donc nous pouvons écrire :

$$V_i(r = a) = V_e(r = a)$$

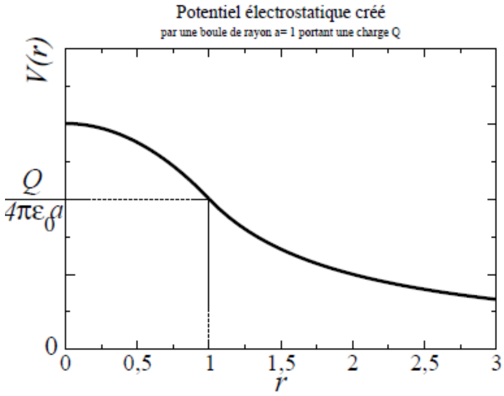
D'où on déduit V_1 :

$$-\frac{Qa^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} + V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$V_1 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

d'où le potentiel électrostatique créé par la boule partout dans l'espace

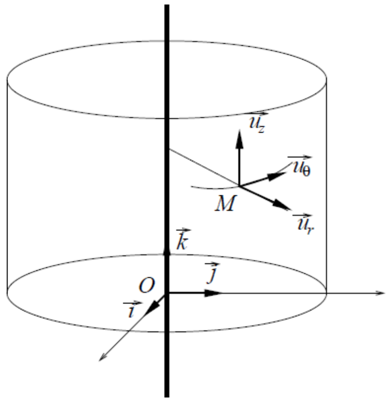
$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & si\ r > a \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}(3 - r^2/a^2) & si\ r < a \end{cases}$$



4.4. Coordonnées cylindriques

Champ créé en un point M par un fil chargé infini (EXEMPLE 5)

On considère un fil infini portant une densité de charge linéique λ.



0. Ce problème admet bien sur une symétrie cylindrique. On place le point O sur le fil et le vecteur $\vec{k}$ selon l'axe du fil. Un point M est repéré par ses coordonnées (*r, θ, z*).
1. Le champ s'écrit en symétrie cylindrique :
$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + E_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$$
2. Les plans $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ et $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_z})$ passants par M sont des plans de symétrie du problème. Donc pour appartenir à ces deux plans, le champ électrique est selon $\overrightarrow{u_r}$.
$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r}$$
3. Une translation de la distribution de charges d'un vecteur $\vec{z}$ selon $\vec{k}$ laisse le problème invariant. De même pour une rotation d'un angle θ autour de $\vec{k}$. La solution ne dépend donc ni de z ni de θ :
$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r)\overrightarrow{u_r}$$
4. La surface de Gauss, Σ, est un cylindre de rayon r = HM (H est la projection de M sur Oz) d'axe Oz et de longueur L. Nous voyons immédiatement que la longueur L n'est pas une donnée physique du problème. Elle caractérise la surface de Gauss qui est seulement un outil mathématique pour calculer les champs. Elle peut être présente dans les calculs mais elle doit disparaitre dans le résultat final. Cette surface de Gauss n'est pas aussi simple que la précédente. Elle est l'union du cylindre ouvert Σ_1 et des deux disques qui le ferment Σ_0 et Σ'_0. $\Sigma = \Sigma_1 \; U \; \Sigma_0 \; U \; \Sigma'_0$
L'élément différentiel de surface dépend de la surface traitée :
sur Σ_1 : $\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{u_r}$
sur Σ_0 ou Σ'_0 : $\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{u_z}$
5. L'intégrale dans le théorème de Gauss s'écrit alors :
$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \iint_\Sigma \overrightarrow{E_\Omega}(\vec{r})\overrightarrow{dS} = \iint_{\Sigma_0} \overrightarrow{E_\Omega}(\vec{r})\overrightarrow{dS} + \iint_{\Sigma'_0} \overrightarrow{E_\Omega}(\vec{r})\overrightarrow{dS} + \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{E_\Omega}(\vec{r})\overrightarrow{dS}$$
$$= \iint_{\Sigma_0} E(r)dS\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_z} + \iint_{\Sigma'_0} E(r)dS\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_z} + \iint_{\Sigma_1} E(r)dS\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_r}$$
$$= \iint_{\Sigma_1} E(r)dS = E(r)\iint_{\Sigma_1} dS \;\; car\ E(r) est\ constant\ sur\ \Sigma_1$$
$$= E(r)2\pi rL \;\; avec\ la\ surface\ du\ cylindre\ ouverst\ est\ 2\pi rL$$
6. La quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement $\sum_{Q\ interieur\ \Sigma} = \lambda L$ par définition de la densité linéique de charges.
7. On égalise les deux membres du théorème de Gauss

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q/\varepsilon_0$$

ce qui donne :

$$E(r)2\pi rL \ = \ \lambda L/\varepsilon_0$$

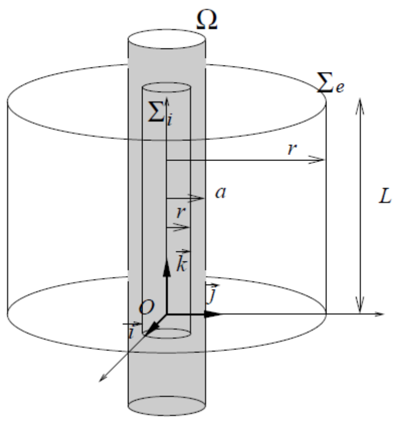
Comme $\vec{E}$ est selon $\overrightarrow{u_r}$, on a la solution ci-dessous :

$$E(r) \ = \ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$$

On reconnait bien dans ce résultat le champ créé par un fil infini calculé par intégration. De plus, la longueur L a bien disparu du résultat.

Champ créé en un point M par un cylindre chargé infini (EXEMPLE 6)

Considérons maintenant, non plus un fil mais, un cylindre infini de rayon a portant une densité de charges volumiques ρ.



Ce système a bien la même symétrie que le précédent. Les points 1 à 6 sont les mêmes qu'au-dessus et nous ne répétons que le résultat du point 6 :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = E(r)2\pi rL$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas pour calculer la quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss.

- si $r > a$ (c.à.d. si M est l'extérieur du cylindre), alors la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est celle qui est dans le cylindre de longueur L. Ce volume est :

$$V_{cyl} = \pi a^2 L$$

On a donc

$$\sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q = \rho\,\pi a^2 L$$

- si $r < a$ (c.à.d. si M est à l'intérieur du cylindre), alors la quantité de charges à prendre en compte est celle à l'intérieur de la surface de Gauss de rayon r.

$$\sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q = \rho\,\pi r^2 L$$

On égalise les deux membres du théorème de Gauss et on obtient :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q\ /\varepsilon_0$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}\ \ si\ r > a \\ \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}\ \ si\ r < a \end{cases}$$

*4.5. Potentiel créé par le cylindre (**EXEMPLE 7**)*

On peut facilement calculer le potentiel électrostatique créé par le cylindre à partir du champ :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

ce qui conduit en coordonnées cylindriques à :

$$E_r\overrightarrow{u_r} + E_\theta\overrightarrow{u_\theta} + E_z\overrightarrow{u_z} = -\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} - \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Comme $\vec{E}$ ne dépend que de *r*, les deux dernières contributions sont nulles et on a :

$$V = -\int E(r)dr$$

Ce qui donne

- à l'extérieur de la boule (c.à.d. pour $r > a$) :

$$V_e(r) = -\int \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}dr = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln r + V_0$$

Dans ce problème il y a des charges à l'infini car le cylindre est infini. On a donc un problème pour déterminer la constante V_0. Cela n'a en fait pas trop d'importance car il faut se rappeler que le potentiel (tout comme le champ) électrostatique est une grandeur mathématique qui sert soit à déterminer une force (en passant par le champ) soit à déterminer une énergie d'interaction. Si on veut déterminer une force électrostatique entre le cylindre et une charge objet, il faut calculer le champ à l'endroit où est la charge objet. Pour cela on dérive le potentiel par rapport aux variables d'espace. A ce moment du calcul la constante d'intégration disparait. Si on veut déterminer une énergie potentielle d'interaction entre une charge objet et le cylindre, on a dans le résultat une constante qui vaut qV_0. Si on veut savoir si une position est plus stable qu'une autre pour une charge objet, on calcule la différence d'énergie potentielle entre les deux positions. La constante d'intégration disparait dans cette différence. En fait, il faut garder à l'esprit que les énergies potentielle sont calculées pour être comparées afin de déterminer les états stables d'un système. D'où le fait qu'on ne puisse pas vraiment se soucier de la valeur de la constante d'intégration.

- à l'intérieur du cylindre (c.à.d. pour $r < a$) :

$$V_i(r) = -\int \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + V_1$$

On va prendre de façon complètement arbitraire une constante d'intégration qui nous donne un potentiel nul en $r = 0$. Ce qui conduit à $V_1 = 0$.

Comme nous savons que les potentiels sont toujours continus. Donc nous pouvons écrire :

$$V_i(a) = V_e(a)$$

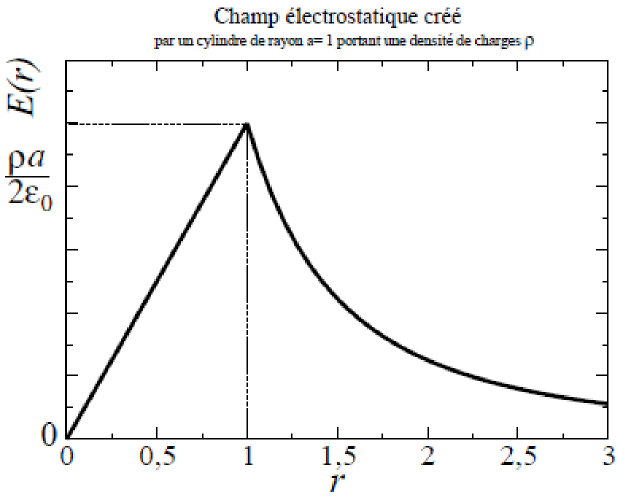
D'où on déduit V_0 :

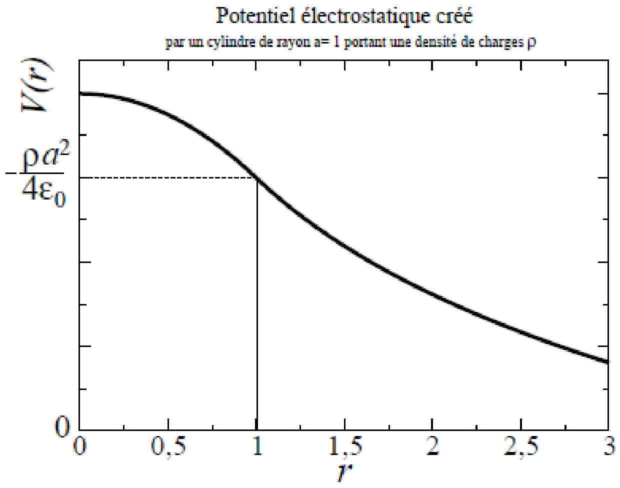
$$-\frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln a + V_0$$

$$V_0 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}(\ln a - 1/2)$$

d'où le potentiel électrostatique créé par le cylindre partout dans l'espace :

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}(\ln a/r - 1/2) & si\; r > a \\ -\dfrac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} & si\; r < a \end{cases}$$

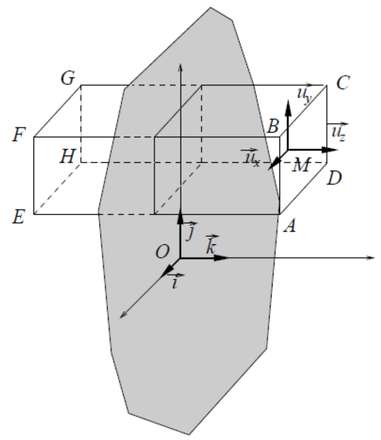




4.6. Coordonnées cartésiennes

Champ créé en un point M par un plan chargé infini (EXEMPLE 8)

On considère un plan infini portant une densité de charge surfacique σ.



0. Ce problème admet bien sur une symétrie plane. On place le point O sur le plan et les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ selon le plan chargé ($\vec{k}$ est perpendiculaire au plan).
1. Le champ s'écrit en symétrie cartésiennes :
$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\vec{\imath} + E_y(x,y,z)\vec{\jmath} + E_z(x,y,z)\vec{k}$$
2. Les plans $(\vec{\imath},\vec{k})$ et $(\vec{\jmath},\vec{k})$ passants par M sont plans de symétrie du problème. Donc pour appartenir à ces deux plans, le champ électrique est selon $\vec{k}$.
$$\vec{E}(x,y,z) = E(x,y,z)\vec{k}$$
3. Une translation de la distribution de charges d'un vecteur $\vec{x}$ selon $\vec{\imath}$ laisse le problème invariant ou d'un vecteur $\vec{y}$ selon $\vec{\jmath}$. La solution ne dépend donc pas de *x* ni de *y* :
$$\vec{E}(x,y,z) = E(z)\vec{k}$$
4. La surface de Gauss, Σ, est un parallélépipède coupé en son milieu par le plan chargé. Le parallélépipède a une section *S* dans le plan chargé et sa longueur est 2*z*. Nous voyons immédiatement que la longueur *S* n'est pas une donnée physique du problème. Elle peut être présente dans les calculs mais elle doit disparaitre dans le résultat final. L'élément différentiel de surface, des surfaces perpendiculaires au plan chargés sont selon $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$, leur contribution à l'intégrale de Gauss est nulle car on a
$$\vec{E}\overrightarrow{dS} = EdS\vec{k}\vec{\imath} = 0$$
$$\vec{E}\overrightarrow{dS} = EdS\vec{k}\vec{\jmath} = 0$$
5. Sur la surface ABCD on a $\overrightarrow{dS} = dS\vec{k}$ et sur la surface EFGH on a $\overrightarrow{dS} = -dS\vec{k}$. De plus comme les champs de deux points symétriques par rapport au plan de symétrie sont symétriques, on a :
$$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$$
L'intégrale dans le théorème de Gauss s'écrit alors :
$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \iint_{ABCD} \overrightarrow{E_\Omega}\,(\vec{z})\overrightarrow{dS} + \iint_{EFGH} \overrightarrow{E_\Omega}\,(\vec{z})\overrightarrow{dS}$$
$$= \iint_{ABCD} E\,(z)dS\vec{k}\vec{k} + \iint_{EFGH} E\,(-z)dS\vec{k}(-\vec{k})$$
$$= E(z)\iint_{ABCD} dS + E(-z)\iint_{EFGH} (-dS) = 2E(z)S$$
6. La quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement $\sum_{Q\ interieur\ \Sigma} = \sigma S$ par définition de la densité surfacique de charges.

7. On égalise les deux membres du théorème de Gauss

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q\ /\varepsilon_0$$

Ce qui donne

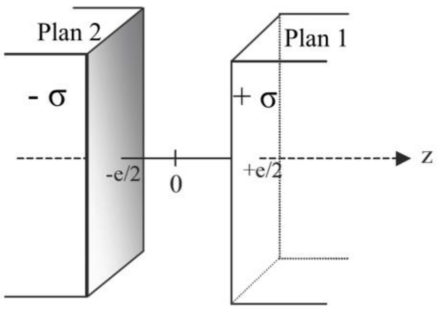
$$2E(z)S = \sigma S/\varepsilon_0$$

Comme $\vec{E}$ est selon $\vec{k}$, on a la solution ci-dessous :

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z < 0 \end{cases}$$

La surface S a bien disparu du résultat. **On voit aussi que ce résultat ne dépend pas des variables d'espace.**

Le condensateur plan est une assemblée de deux plaques chargée d'une manière opposée : + σ et – σ et séparées d'une distance e (figure ci-dessous).

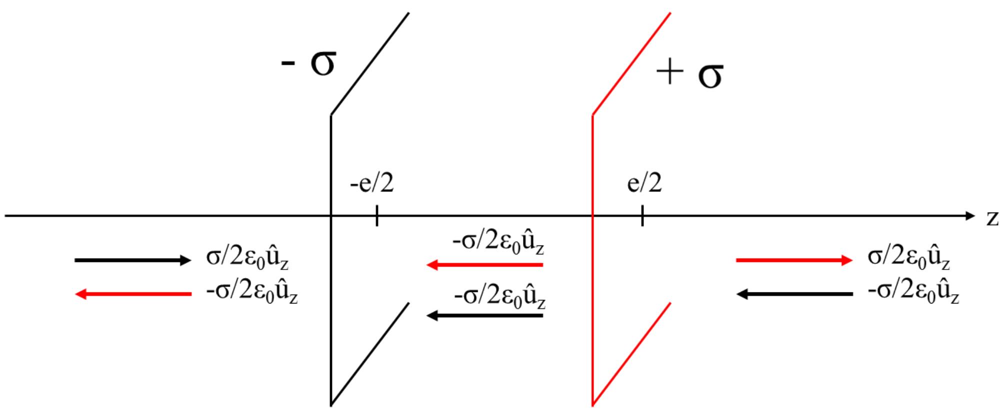


En utilisant le résultat précédent et le théorème de superposition, nous déduisons :

$$Plan\ 1 :\ \overrightarrow{E_{Plan\ 1}}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z > e/2 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z < e/2 \end{cases} \qquad Plan\ 2 : \overrightarrow{E_{Plan\ 2}}(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z > -e/2 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z < -e/2 \end{cases}$$

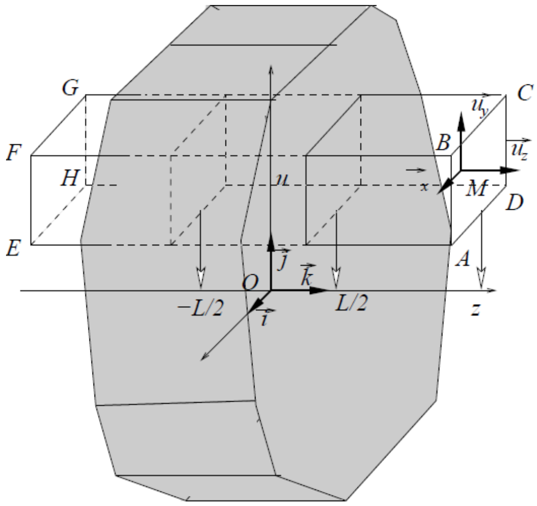
Au final :

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \vec{0} & si\ z > e/2 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k} & si - e/2 < z < e/2 \\ \vec{0} & si\ z < -e/2 \end{cases}$$



Champ créé en un point M par une lame chargée infinie (EXEMPLE 9)

On considère maintenant une lame d'épaisseur L portant une densité électrostatique de charge uniforme ρ.



Ce système a la même symétrie que le précédent. Les points 1 à 6 sont les mêmes qu'au-dessus et nous ne répétons que le résultat du point 6 :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = 2E(z)S$$

Cependant maintenant nous devons distinguer deux cas pour calculer la quantité de charges à l'intérieur de la surface de Gauss.

- si $z > L/2$ (c.à.d. si M est à l'extérieur de la lame), alors la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est celle qui est dans la lame d'épaisseur L. Ce volume est :

$$V = LS$$

On a donc

$$\sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q = \rho LS$$

- si $z < L/2$ (c.à.d. si M est à l'intérieur de la lame), alors la quantité de charge à prendre en compte est celle à l'intérieur de la surface de Gauss d'épaisseur z.

$$\sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q = \rho 2zS$$

On égalise les deux membres du théorème de Gauss et, en tenant compte de la symétrie des solutions, on obtient :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E_\Omega}) = \sum\nolimits_{Q\ interieur\ \Sigma} Q\ /\varepsilon_0$$

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{\rho L}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z > L/2 \\ \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}\vec{k} & si - L/2 < z < L/2 \\ -\dfrac{\rho L}{2\varepsilon_0}\vec{k} & si\ z < -L/2 \end{cases}$$

4.6. Potentiel créé par la Lame chargée en volume (**EXEMPLE 10**)

On peut facilement calculer le potentiel électrostatique créé par la lame à partir du champ :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

ce qui conduit en coordonnées cartésiennes à :

$$E_x\overrightarrow{u_x} + E_y\overrightarrow{u_y} + E_z\overrightarrow{u_z} = -\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{u_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{u_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Comme $\vec{E}$ ne dépend que de *z*, les deux premières contributions sont nulles et on a :

$$V(z) = -\int E(z)dz$$

Ce qui donne

- pour *z* > *L*/2 : $V_e(z) = -\int E(z)dz = -\int \frac{\rho L}{2\varepsilon_0}dz = -\frac{\rho L}{2\varepsilon_0}z + V_0$

- pour –*L*/2 < *z* < *L*/2 : $V_i(z) = -\int E(z)dz = -\int \frac{\rho z}{\varepsilon_0}dz = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} + V_1$

- pour *z* < -*L*/2 : $V_e(z) = -\int E(z)dz = \int \frac{\rho L}{2\varepsilon_0}dz = \frac{\rho L}{2\varepsilon_0}z + V_2$

Dans ce problème il y a des charges à l'infini car la lame est infinie. On ne peut pas déterminer la constante d'intégration en posant le potentiel nul à l' infini. On le pose nul en *z* = 0. Ce qui conduit à $V_1 = 0$ Comme les potentiels sont toujours continus, nous devons écrire :

$$V_i(L/2) = V_e(L/2)$$

$$V_i(-L/2) = V_e(-L/2)$$

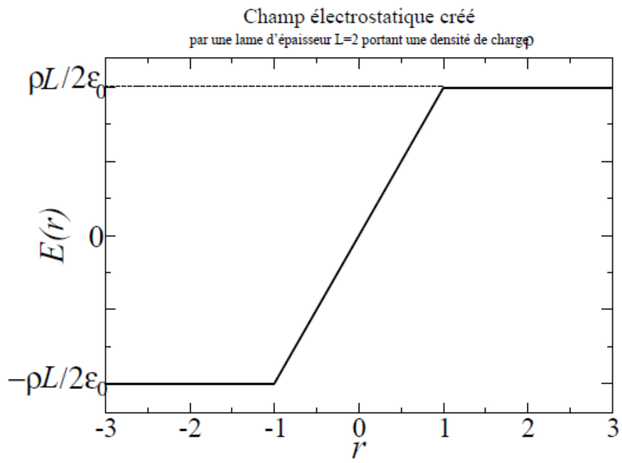
D'où on déduit V_0 et V_2 :

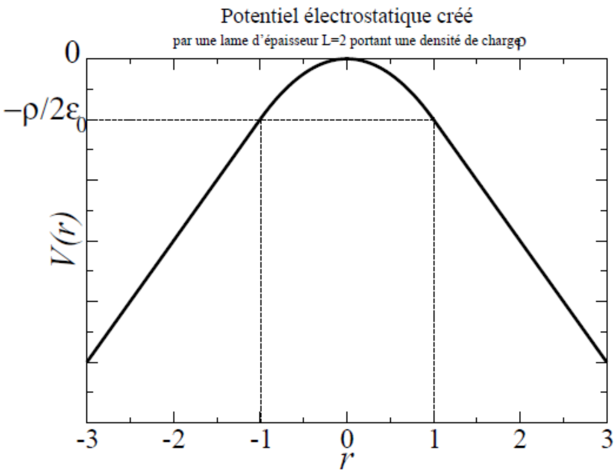
$$-\frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0} = -\frac{\rho L^2}{4\varepsilon_0} + V_0 \ \rightarrow\ V_0 = \frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0}$$

$$-\frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0} = -\frac{\rho L^2}{4\varepsilon_0} + V_2 \ \rightarrow\ V_2 = \frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0}$$

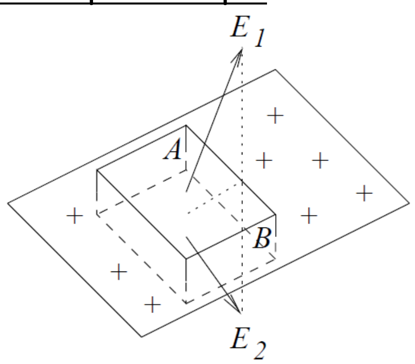
Donc finalement on a :

$$V(z) = \begin{cases} -\dfrac{\rho L}{2\varepsilon_0} z + \dfrac{\rho L^2}{8\varepsilon_0} = \dfrac{\rho L}{2\varepsilon_0}(\dfrac{L}{4} - z) \quad si\ z > L/2 \\ -\dfrac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} \quad si - L/2 < z < L/2 \\ \dfrac{\rho L}{2\varepsilon_0} z + \dfrac{\rho L^2}{8\varepsilon_0} = \dfrac{\rho L}{2\varepsilon_0}(\dfrac{L}{4} + z) \quad si\ z < -L/2 \end{cases}$$





5. Equation de passage du champ électrique



On considère une surface portant une densité de charge surfacique σ. Le flux du champ électrique à travers le parallélépipède de surface S et d'épaisseur $\varepsilon \rightarrow 0$ de la figure ci-dessus est d'après le théorème de Gauss :

$$\overrightarrow{E_1}\vec{n}S - \overrightarrow{E_2}\vec{n}S = \sigma S/\varepsilon_0$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface, $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$ sont les champs électriques respectivement au-dessus et en dessous de la surface. On a donc : $E_1^n - E_2^n = \sigma/\varepsilon_0$

C'est-à-dire la composante du champ électrique normale à la surface est discontinue et présente un saut proportionnel à la densité de charge sur cette surface.

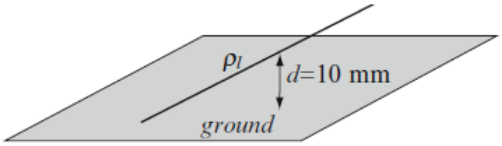
En intégrant le champ électrique sur un contour traversant la surface et dont l'épaisseur tend vers zéro, il vient

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\oint \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl} = 0 \text{ (voir chapitre 1)}$$

$$\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{AB} \quad \rightarrow \quad E_1^t = E_2^t$$

où on a utilisé la définition du potentiel. On a donc continuité des composantes tangentielles du champ électrique à travers la surface. On a finalement : $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_1} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

EXEMPLE 11 : On considère un fil très long, localisé a une distance *d* = 10 m au-dessus du sol et chargé uniformément avec une densité de charge ρL = 10^{-7} C/m. On néglige l'influence du sol.

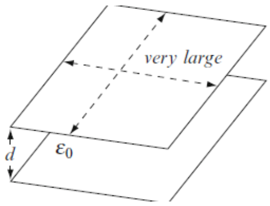


a) **Calculer l'intensité du champ électrique en tout point de l'espace.**
b) **Déterminer l'intensité du champ électrique au niveau du sol.**
c) **On se place un nouveau fil à 2 m au-dessous du premier fil et charge uniformément avec une densité de charge -ρL. Re-résoudre a) et b) en utilisant les coordonnées cartésiennes et en utilisant le théorème de Gauss.**

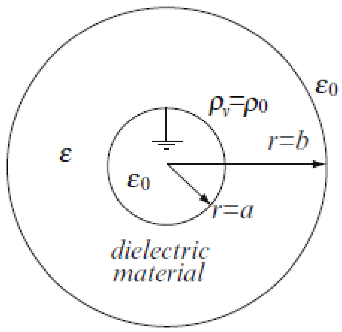
EXEMPLE 12 : Soit un nuage sphérique de rayon R_0 = 1 m produit un champ électrique dans le nuage ($r < R_0$) E = r^2.

a) **Calculer la charge totale dans le nuage**
b) **Calculer la densité de charge dans le nuage.**

EXEMPLE 13 : Soit deux plan infinis et parallèles séparés par une distance *d* = 10 mm. Calculer la densité de charge surfacique pour qu'on obtienne entre les deux plans un champ électrique uniforme et constant de 10^5 N/C.



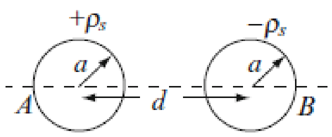
EXEMPLE 14 : Soit un très long cylindre conducteur de rayon *a* connecté à la masse (potentiel = 0) et est couvert par une couche diélectrique de permittivité ε de rayon *b*. Une densité volumique uniforme de charge ρ_0 est distribué dans la couche diélectrique. Calculer le potentiel partout dans l'espace.



EXEMPLE 15 : On considère un condensateur plan constitué de deux plans conducteurs parallèles et séparés d'une distance a. On pourra choisir les deux plans d'équation $z = a/2$ et $z = -a/2$. Ces plans portent une densité surfacique de charge respectivement $+\sigma$ et $-\sigma$.

a) **Calculer le champ électrique partout dans l'espace. Déduire la différence de potentiel U entre les deux plans.**
b) **Considérant les plans sont finis et ayant une surface S, déterminer le rapport Q/U (≡ Capacité C, par définition).**

EXEMPLE 16 : Deux cylindres conducteurs très long de rayon a, séparés par une distance d, ils ont une surface uniformément chargée par ρ_s et $-\rho_s$. Calculer la différence de potentiel entre les deux lignes.



EXEMPLE 17 : On considère une charge ponctuelle Q entourée par une sphère conductrice et creuse, voir la figure.

a) **Calculer le champ électrique et le potentiel partout dans l'espace.**
b) **Déterminer la densité de charges aux surfaces de la sphère.**