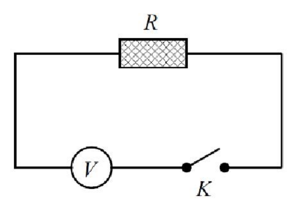
Chapitre 10 : L'énergie magnétique

Contenu

1. Energie magnétiques d'un circuit

1.1. Coefficient d'auto-induction d'un circuit

Considérons un circuit électrocinétique, C, constitué uniquement d'un générateur de courant continu, d'une résistance R et d'un interrupteur K. Lorsque l'interrupteur K est fermé, un courant circule dans le circuit. A l'équilibre, l'intensité de ce courant vaut : $I = V/R$. Ce circuit (comme tout circuit) étant fermé, il peut être assimilé à une boucle de courant qui créé un champ magnétique perpendiculaire à la surface de la boucle. Il y a alors un flux de champ magnétique à travers le circuit. Une variation de l'intensité dans le circuit entraine une variation du flux du champ magnétique qui donne naissance à une f.e.m. :



$$e = -\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}(t).\overrightarrow{dS} = -L\frac{di}{dt}$$

Ce qui permet, au moins en principe, de définir le coefficient d'auto-induction de ce circuit bien qu'il n'y ait aucune bobine dans sa constitution.

1.2. Puissance dissipée par le circuit

Considérons que l'interrupteur K est ouvert, pour $t < 0$. Il n'y a donc aucun courant qui circule dans le circuit et aucun champ magnétique produit. Cet état est l'état d'énergie de référence du système. On lui affecte une énergie magnétique nulle.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le courant s'établit dans le circuit. La tension aux bornes de la résistance est donnée par l'équation :

$$V + e = Ri(t)$$

Qui donne l'équation différentielle :

$$V - Ri(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

qu'on résout simplement

$$i(t) = \frac{V}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

et on a bien $i(t) \rightarrow I$ quand $t \rightarrow \infty$.

D'autre part, nous pouvons écrire le bilan de puissance du circuit. La puissance instantanée fournie par le générateur au temps t est :

$$P_G = Vi(t)$$

La puissance instantanée perdue par effet Joule au temps t est :

$$P_J = Ri^2(t)$$

ce qui donne une puissance instantanée de

$$P(t) = P_G - P_J = Vi(t) - Ri^2(t) = (V - Ri(t))\, i(t)$$

En utilisant l'équation différentielle ($V - Ri(t) = L\frac{di(t)}{dt}$). On a donc :

$$P(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

1.3. Energie emmagasinée par le circuit

Comme l'énergie potentielle emmagasinée par un système entre un temps t_1 et un temps t_2 est simplement donnée par :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$$

On a l'énergie emmagasinée par le système entre le temps $t = 0$ et le temps t :

$$E = \int_0^t Li(t)\frac{di(t)}{dt}dt = \int_0^t Li(t)di(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

$$t \rightarrow \infty,\ E = \frac{1}{2}LI^2.$$

Cette énergie emmagasinée par le circuit est restituée au générateur lorsqu'on ouvre l'interrupteur K. On voit que cette énergie est proportionnelle au coefficient d'auto-induction L du circuit. Elle est d'autant plus grande que la section du circuit est grande.

EXEMPLE 1 : Déterminer l'énergie magnétique emmagasinée dans un solénoïde de longueur *l* contenant n spires par *l*.

1.4. Forme local de l'énergie d'un circuit

Pour utiliser cette formule, il faut connaitre le coefficient d'auto-induction du circuit qui peut être délicat à déterminer. On peut donner une forme locale de l'énergie magnétique. Reprenons la définition du flux de champ magnétique : $\emptyset = LI$ qu'on injecte dans l'équation au-dessus, on a :

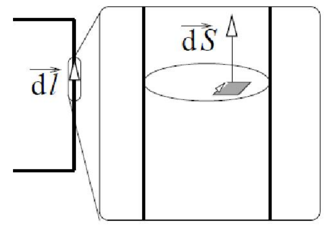
$$U = \frac{1}{2}\emptyset I$$

On va redonner la définition locale des deux grandeurs $\emptyset$ et I et les injectées dans l'équation ci-dessus. D'après le théorème de Stockes, nous avons vu que le flux pouvait être écrite avec le potentiel magnétique :

$$\emptyset = \oint \vec{A}\, d\vec{l}$$

D'autre part, l'intensité peut aussi être définie de façon intégrale :

$$I = \iint_S \vec{J}\, d\vec{S}$$

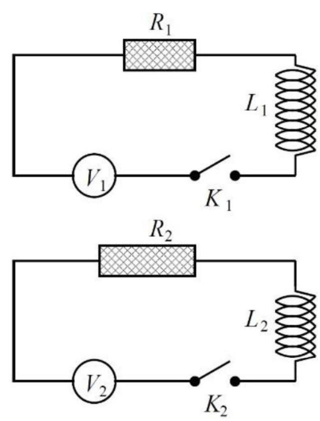


où $d\vec{S}$ est un élément de surface d'une section du circuit. Remarquons tout de suite que le produit $d\vec{l}\, d\vec{S}$ donne l'élément de volume $d\tau$ du circuit. Ce qui permet d'écrire l'énergie magnétique du circuit sous la forme :

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{vol} \vec{J}\vec{A}\, d\tau$$

2. Energie magnétique de deux circuits

Nous allons considérer maintenant un cas plus général de deux circuits magnétiques C_1 et C_2 composés de résistances R_1 et R_2 et de bobines d'inductance L_1 et L_2 et alimentés par deux générateurs de courant continu V_1 et V_2. A des temps $t < 0$, les deux interrupteurs sont ouverts. Aucun courant ne circule ni dans le circuit C_1 ni dans le circuit C_2. Cet état où il y n'y a ni courant ni champ magnétique est l'état de référence du système et son énergie est donc nulle.



Les deux interrupteurs sont fermés au temps $t = 0$. Les courants qui circulent dans les deux circuits créent des champs magnétiques partout dans l'espace. A travers la surface de chaque circuit, il y a donc un flux de champ magnétique dont une contribution vient du circuit C_1 et une autre du circuit C_2. Ce qui s'écrit :

$$\emptyset_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad et \quad \emptyset_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

Si ces flux varient (pendant l'établissement du courant par exemple), ils donnent apparition à des f.e.m. dans chaque circuit

$$e_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \quad et \quad e_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

La différence de potentiel aux bornes de chaque résistance est donc :

$$V_1 + e_1 = R_1 i_1 \quad et \quad V_2 + e_2 = R_2 i_2$$

Ce qui permet d'écrire les deux équations différentielles couplées suivantes :

$$V_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad et \quad V_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

2.1. Puissances emmagasinées par les circuits

La puissance instantanée cédée par chaque générateur est :

$$P_{G1} = V_1 i_1 \quad et \quad P_{G2} = V_2 i_2$$

La puissance instantanée perdue par effet Joule au temps t est :

$$P_{J1} = R_1 i_1^2 \quad et \quad P_{J2} = R_2 i_2^2$$

Donc la puissance emmagasinée par chaque circuit est :

$$P_1 = (V_1 - R_1 i_1) i_1 \quad et \quad P_2 = (V_2 - R_2 i_2) i_2$$

ce qui peut être récrit avec les relations au-dessus :

$$P_1 = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right) i_1 \quad et \quad P_2 = \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}\right) i_2$$

2.2. Energie emmagasinées par le système

Au temps *t* les deux circuits ont donc emmagasiné une énergie :

$$E = \int_0^t (P_1 + P_2) dt = \int_0^t L_1 i_1 di_1 + \int_0^t L_2 i_2 di_2 + \int_0^t (M i_1 di_2 + M i_2 di_1)$$
$$= \int_0^t L_1 i_1 di_1 + \int_0^t L_2 i_2 di_2 + \int_0^t M d(i_1 i_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

2.3. Puissance et énergie emmagasinées par n circuits

Le flux de champ magnétique à travers le circuit k peut s'écrire :

$$\Phi_k(t) = L_k i_k(t) + \sum_{k' \neq k} M_{kk'} i_{k'}(t)$$

La f.e.m. qui apparait dans le circuit k suite à la variation d'intensité dans n'importe quel circuit est :

$$e_k(t) = -L_k \frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} - M_{kk'} \frac{\mathrm{d}i_{k'}(t]}{\mathrm{d}t}$$

et la différence de potentielle aux bornes de la résistance R_k est :

$$V_k + e_k(t) = R_k i_k(t)$$

La puissance cédée au circuit $\mathcal{C}_k$ par son générateur est

$$P_{G_k} = V_k i_k(t)$$

et la perte de puissance par effet Joule est :

$$P_{J_k} = R_k i_k^2(t)$$

D'où la puissance emmagassinée par le circuit $\mathcal{C}_k$:

$$P_k = P_{G_k} - P_{J_k} = (V_k - R_k i_k(t)) i_k(t) = -e_k(t) i_k(t)$$

Après un temps t, le circuit a emmagasinné une énergie :

$$U_{m;k} = \int_0^t P_k \, \mathrm{d}t = -e_k(t) i_k(t) \, \mathrm{d}t$$

avec $e_k(t)$ qui a été exprimé au dessus :

$$U_{m;k} = \int_0^t \left(L_k \frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} + M_{kk'} \frac{\mathrm{d}i_{k'}(t]}{\mathrm{d}t} \right) i_k \mathrm{d}t$$

L'énergie totale emmagasinnée par le circuit :

$$\begin{aligned}
U_m &= \sum_k U_{m;k} \\
&= \sum_k \int_0^{i_k(t)} L_k i_k \, \mathrm{d}i_k + \sum_k \sum_{k'} \int_0^{i'_k(t)} M_{kk'} i_k \, \mathrm{d}i_{k'} \\
&= \sum_k \int_0^{i(t)} L_k i_k \, \mathrm{d}i_k + \sum_k \sum_{k'>k} \int_0^{i(t)} (M_{kk'} i_k \, \mathrm{d}i_{k'} + M_{k'k} i_{k'} \, \mathrm{d}i_k) \\
&= \sum_k \int_0^t L_k i_k \, \mathrm{d}i_k + \sum_k \sum_{k'>k} \int_0^{i(t)} M_{kk'} (i_k \, \mathrm{d}i_{k'} + i_{k'} \, \mathrm{d}i_k) \\
&= \sum_k \frac{1}{2} L_k i_k^2(t) + \sum_k \sum_{k'>k} M_{kk'} i_k(t) i_{k'}(t)
\end{aligned}$$

Pour des temps plus long que le temps de relaxation du système, on a $i_k(t) \to I_k$ et on a alors :

$$\boxed{U_m = \sum_k \frac{1}{2} L_k I_k^2 + \sum_k \sum_{k'>k} M_{kk'} I_k I_{k'}}$$

Ce qui peut être réécrit en utilisant la définition du flux :

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k I_k}$$

2.4. Forme locale de l'énergie magnétique

On peut réécrire le flux de champ magnétique à travers le circuit k et l'intensité circulant dans le circuit k comme :

$$\Phi_k = \oint_{\mathcal{C}_k} \vec{A} \, \mathrm{d}\vec{l}_k$$

$$I_k = \iint_{S_k} \vec{J}_k \, \mathrm{d}\vec{S}_k$$

où $\mathrm{d}\vec{l}_k$ est l'élément différentiel de contour du circuit $\mathcal{C}_{||}$ et $\mathrm{d}\vec{S}_k$ est un élément différentiel de surface d'une section du fil du circuit $\mathcal{C}_{||}$. On a donc l'élément différentiel de volume du circuit $\mathcal{C}_{||}$ qui vaut : $\mathrm{d}\tau_k = \mathrm{d}\vec{l}_k \cdot \mathrm{d}\vec{S}_k$.

L'énergie magnétique peut être réécrite :

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} \sum_k \iiint_{\text{circuit } k} \vec{J}_k \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}\tau_k}$$

Considérons maintenant un point de l'espace hors des circuits. En ce point, le vecteur densité de courant est donc nul : $\vec{J} = \vec{0}$. Donc la contribution de l'intégrale ci-dessus, $\vec{J} \cdot \vec{A}$ est donc nulle aussi. On peut donc étendre l'intégrale ci-dessus à tout l'espace car les contributions hors des circuits n'apportent aucune contributions. On a donc :

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{univers}} \vec{J} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}\tau_k}$$

Cette intégrale n'est pas toujours facile à utiliser car elle nécessite d'effectuer le produit scalaire $\vec{J} \cdot \vec{A}$ qui n'est pas toujours facile à effectuer ni à intégrer. On peut remarquer que cette l'intégrale, on peut réécrire :

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}$$

qui est l'équation de Maxwell-Ampère. De plus, à l'aide de la relation :

$$\text{div}\ (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} - \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$$

on a :

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{univers}} \vec{J} \cdot \vec{A}\ \mathrm{d}\tau_k \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}\ \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \text{div}\ (\vec{A} \wedge \vec{B})\ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}\ \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \text{div}\ (\vec{A} \wedge \vec{B})\ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}\ \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

La première intégrale de la dernière ligne a été obtenu à l'aide du théorème de Stockes. La surface sur laquelle cette intégrale s'effectue est rejetée à l'infini et à une surface infinie. En d'autres termes, tout point M de la surface est tel que

$$r = |\overrightarrow{OM}| \to \infty$$

D'autre part, en ce point M, on a

$$\begin{aligned} \vec{A}(M) &\propto \frac{1}{r^2} \\ \vec{B}(M) &\propto \frac{1}{r^3} \\ \mathrm{d}\tau &= r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'intégrale de surface, à intégrer dans un domaine où pour tous les points, on a $r \to \infty$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{univers}} \text{div}\ \left(\frac{K}{r^5}\right) r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{K'}{r^4} \iiint_{\text{univers}} r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc pour l'énergie magnétique :

$$\boxed{U_m = \iiint_{\text{univers}} \frac{B^2}{2\mu_0}\ \mathrm{d}\tau}$$

3. Les équations de Maxwell

Nous sommes à présent arrivés au point où nous possédons tous les éléments permettant de décrire les relations entre le champ électrique, le champ magnétique, les densités de charge et de courant. Rappelons les équations structurelles du champ électromagnétique, l'équation de Maxwell-Faraday et l'équation locale de conservation du flux du champ magnétique :

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad et \quad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0}$$

Elles relient d'une part les contributions électriques $\vec{E}$ et magnétiques $\vec{B}$ du champ électromagnétique et d'autre part elles expriment la loi d'induction électromagnétique avec la conservation du flux de $\vec{B}$.

D'autre part, on sait qu'en régime stationnaire, le courant $\vec{J}$ est à flux conservatif, c'est-à-dire

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

$$\left[\begin{array}{c} I = \iint_S \vec{J}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V \vec{\nabla}.\vec{J}\,dV \quad et\ d'autre\ part, puisque\ la\ charge\ volumique\ \rho\ quitte\ le \\ volume\ V, la\ charge\ présente\ dans\ celui\ ci\ diminue\ de\ sorte\ que\ dans\ V, elle\ doit \\ être\ remplacée\ par\ un\ apport\ de\ charges\ entrant\ dans\ ce\ volume. Il\ en\ résulte\ que \\ I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV. On\ déduit\ alors\ que\ \vec{\nabla}.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} : équation\ de\ continuité \end{array}\right]$$

En outre, les équations reliant le champ électromagnétique aux sources, le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère, s'écrivent localement :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad et \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

En régime variable, l'équation de conservation de la charge est incompatible avec cette dernière équation puisque :

$$\vec{\nabla}.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad alors\ que\ \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) = \vec{\nabla}.(\mu_0 \vec{J}) = 0$$

Il faut donc réexaminer les deux équations reliant le champ aux sources lorsque la charge volumique ρ varie au cours du temps ; c'est dans cette partie que Maxwell a contribué.

Equation de Maxwell-Gauss : L'équation qui traduit le théorème de Gauss se généralise au cas des régimes variables car le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque ne dépend pas de l'état du mouvement des charges. On admet sa validité générale : $\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

Equation de Maxwell-Ampère : En remplaçant ρ par $\vec{\nabla}.\varepsilon_0\vec{E}$ dans l'équation de continuité, on obtient immédiatement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = \frac{\partial(\vec{\nabla}.\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = \vec{\nabla}.\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}\right) = 0$$

Le vecteur $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$ est donc à flux conservatif.

L'équation d'Ampère sera remplacée alors par :

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}}$$

Cette équation montre que le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, homogène à un courant volumique constitue une source de champ magnétique. Maxwell l'a appelé le **courant de déplacement** car $\varepsilon_0\vec{E}$ était autrefois appelé le vecteur de déplacement.

Dans le vide, il n'y a ni des charges ni de courant, donc $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$. Ce qui nous permet d'écrire

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \;\; ; \;\; \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \; ; \; \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \; ; \; \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

En conclusion de ce cours, examinons comment est générée une onde électromagnétique. Imaginons une charge au repos. Cette charge est associée à un champ électrique. Si on accélère la particule, le champ électrique varie, ce qui génère un champ magnétique variable. Ce dernier engendre à son tour un champ électrique variable et ainsi de suite. L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques et de ses interactions avec la matière constitue l'application la plus répandue des équations de Maxwell et sans doute aussi la plus excitante. Toutes les technologies de communication, visualisation, radiothérapie et beaucoup d'autres sont basées sur l'électromagnétisme. De point de vue personnel, toutes les sciences sont basées sur l'électromagnétisme, d'une manière directe ou indirecte... Je vous souhaite une très bonne continuation dans votre parcours, et on se donne rendez-vous dans un autre cours.

Le professeur