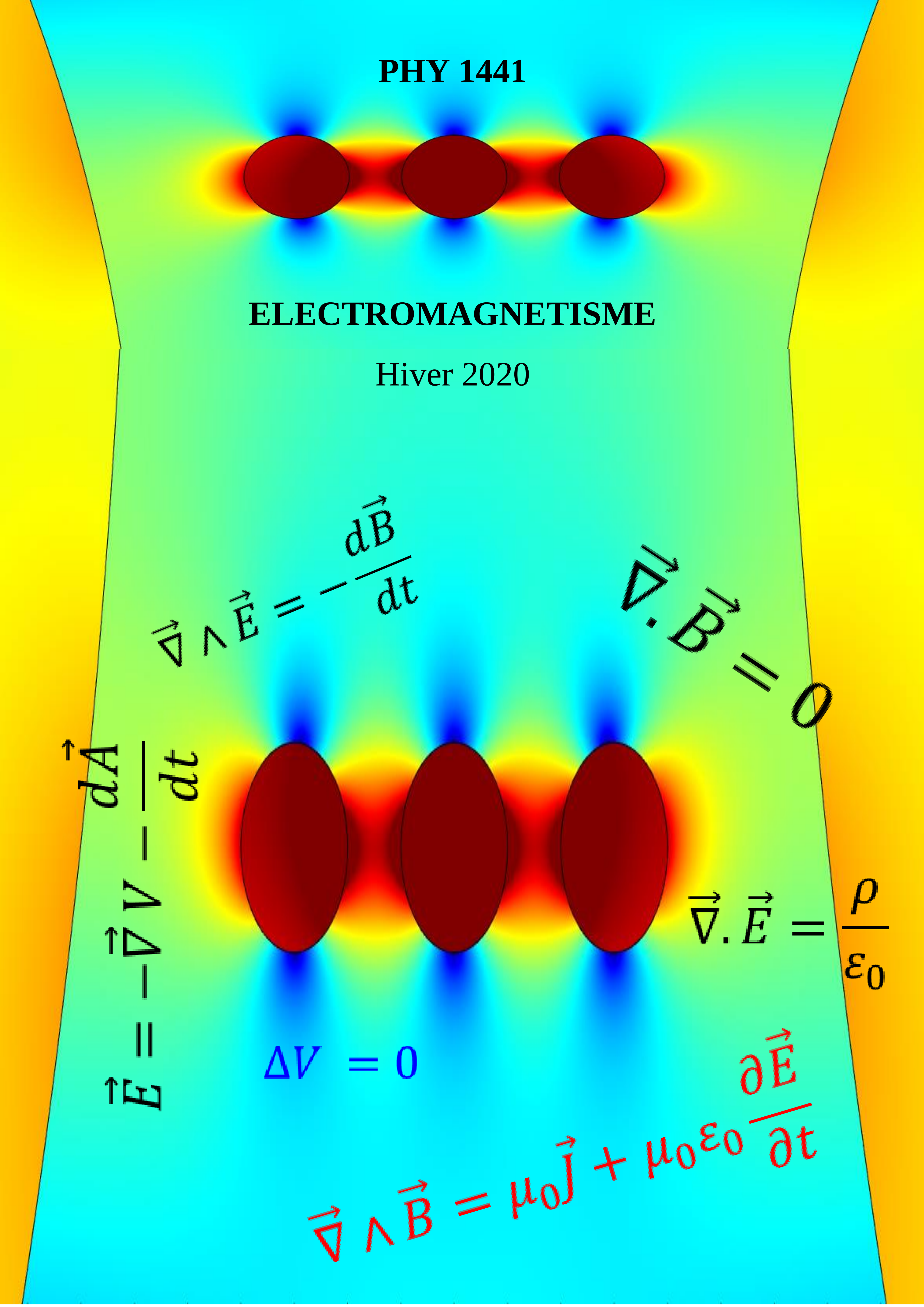
PHY 1441

ELECTROMAGNETISME

Hiver 2020



Introduction générale

Dans la nature, quatre interactions fondamentales suffisent pour décrire à l'heure actuelle l'ensemble des phénomènes physiques observables (parmi ceux qui sont compris bien entendu ! il reste heureusement encore de nombreux mystères en physique). Elles opèrent à des échelles très diverses et font intervenir des quantités fondamentales, les charges, qui ne sont pas clairement définies, mais dont on admet la pertinence en raison de leurs vertus explicatives. On donnera une description qualitative de ces interactions dans ce qui suit.

LA MECANIQUE (Newton, 1687) est une théorie de la **dynamique** qui régit l'évolution temporelle des degrés de liberté décrivant un système. On peut en formuler l'objet de manière assez générale sous la forme : **étant donnés des conditions initiales et des champs de forces, trouver les trajectoires des points matériels**.

Avec cette définition restrictive de la mécanique, la donnée des champs de forces provient d'une autre théorie, en dehors du contexte strict de la mécanique (ex. gravitation ou force de Coulomb). L'équation d'évolution temporelle est le principe fondamental de la dynamique : $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = F$, où $P = mv$ est une quantité de mouvement définie par la cinématique $v = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, et par une propriété des particules, m, la masse inertielle.

L'ELECTROMAGNETISME (Maxwell, 1864) est une théorie des **champs** (et de leur évolution dans l'espace et le temps) créés par des sources appelées charges électriques. Son objet peut s'exprimer sous la forme : étant donnée une distribution de charge q_i (et leurs positions r_i et vitesses v_i), trouver les champs électriques E et magnétique B qu'elles produisent.

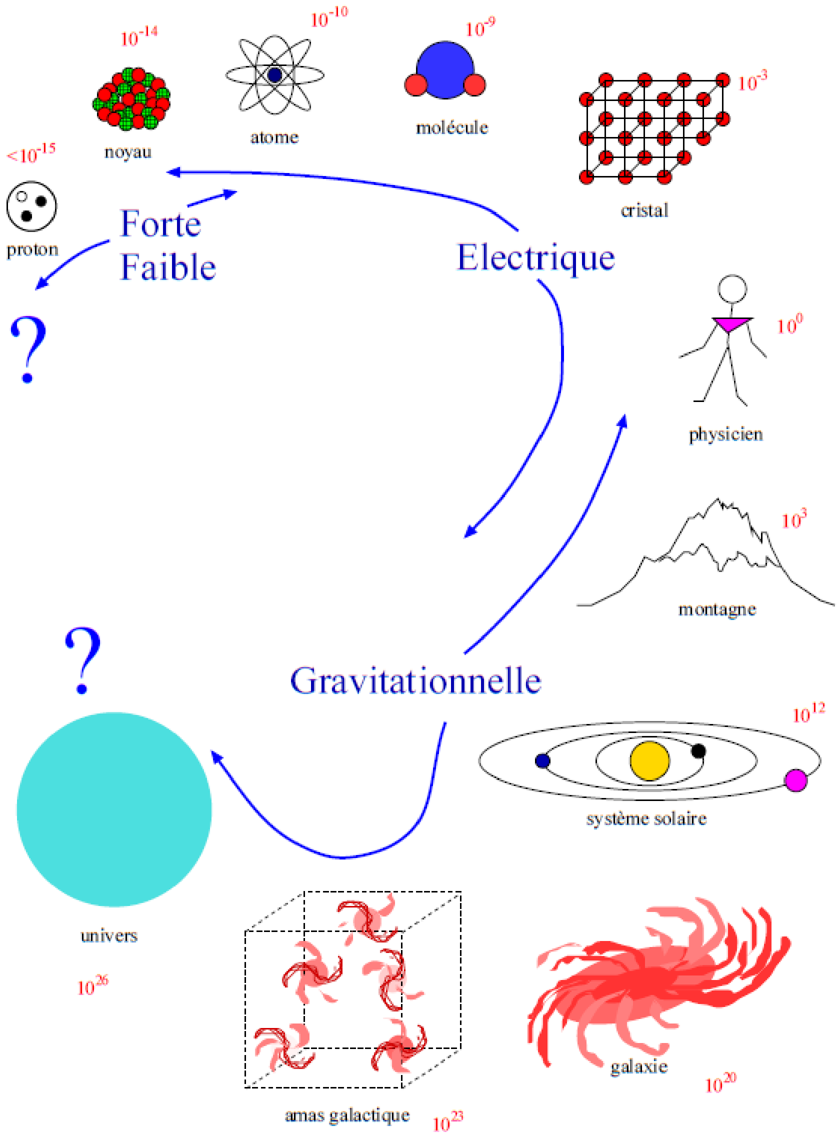
L'étude de ces champs a mené aux équations de Maxwell qui entrainent à une équation de propagation des champs. Pour connaitre l'effet des champs sur des systèmes de particules chargées et suivre l'évolution temporelle de ces particules par la mécanique, il est nécessaire d'introduire un COUPLAGE entre les deux théories. Dans le cas de l'électromagnétisme, le couplage est fourni par l'équation de Lorentz : $F = q(E + v \wedge B)$.

On peut donc proposer un schéma assez général d'une théorie physique valable dans un contexte donné qui dépend de la nature du problème étudié : **une THEORIE DES CHAMPS définit des sources et les champs qu'elles créent**. Une THEORIE DYNAMIQUE régit l'évolution temporelle des degrés de liberté des particules soumis à des champs de forces. Un cadre complet est assuré dès lors que l'on sait coupler les deux théories par une INTERACTION, les forces étant définies à partir des champs créés par les sources.

Maxwell	Lorentz	Newton
Électromagnétisme	Couplage	Mécanique
$q_i,\ \mathbf{j}_i$	$\mathbf{F}_i = q_i(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B})$	$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_i$
$\downarrow$		$\downarrow$
$\mathbf{E},\ \mathbf{B}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{r}_i(t),\ \mathbf{v}_i(t)$

Evolution des théories des champs, interactions fondamentales : En dépit de l'extrême complexité des phénomènes physiques uatre interactions fondamentales et les théories des champs qui leur sont associées permettent d'expliquer la grande majorité des phénomènes physiques sur des échelles de longueur aussi variées que 10^{-15} m (taille caractéristique du noyau) à 10^{27} m (taille caractéristique de l'univers). Les quatre interactions sont : gravitationnelle (ex. terre-lune), électrique (ex. objets chargés), forte (ex. noyau atomique) et interaction faible (ex. désintégration).

	Interactions			
	gravitationnelle	**électrique**	**forte**	**faible**
Repères	Newton 1687	Coulomb 1785 Oersted 1820 Maxwell 1864	Yukawa 1930 Heisenberg 1932	Fermi 1934
Source	masse	charge électrique	charge forte	charge faible
g	m	q	g	g_F
Potentiel $V_g(r)$	$-G\frac{m}{r}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$-\frac{g}{r}\mathrm{e}^{-r/\lambda}$	
Énergie potentielle (sources ponctuelles)	$-G\frac{mm'}{r}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}$	$-\frac{gg'}{r}\mathrm{e}^{-r/\lambda}$	
Constante (U.S.I.) [(a)]	$G = 6.67\ 10^{-11}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$	$g = 9.5\ 10^{-14}$	$g_F = 5.5\ 10^{-16}$
Échelle de longueur (m)	$> 10^0$	$10^{-10} - 10^0$	$10^{-15} - 10^{-14}$	$< 10^{-15}$

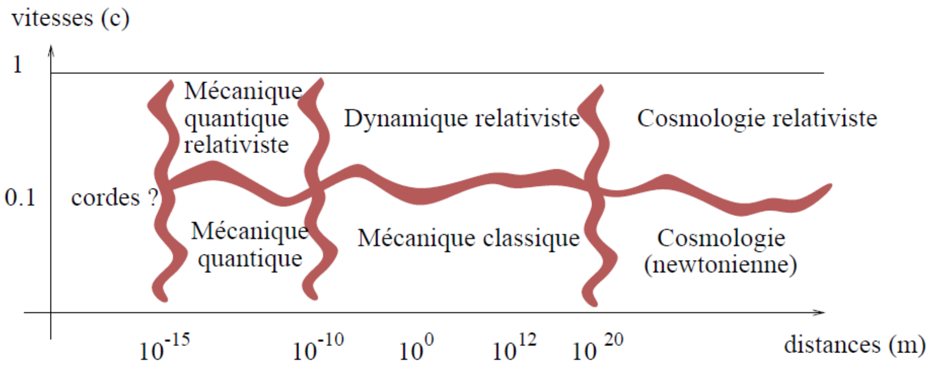


Les échelles de longueur gouvernent aussi les théories dynamiques. Historiquement, la mécanique classique est la première théorie dynamique. Elle a connu de très grands succès et est appliquée notamment au système solaire et à l'astronomie en général.

Aux très petites échelles de longueur, la mécanique classique est incapable de décrire le comportement et la structure des atomes et molécules, par exemple. Au XXème siècle, l'émergence de la mécanique quantique a surmonté cette difficulté. La mécanique quantique est une théorie dynamique au sens où elle repose sur une équation d'évolution appelée équation de Schrödinger.

De même, aux très grandes vitesses, la mécanique classique (ou quantique) est incapable de rendre compte des phénomènes physiques. Un nouveau cadre conceptuel a été élaboré par Einstein, il s'agit de la relativité restreinte qui amène une nouvelle conception de l'espace et du temps et modifie complétement la dynamique. A noter que la relativité restreinte est indépendante de la physique quantique. Une généralisation par Einstein combine les prescriptions de la relativité à celles de la gravitation. Il s'agit de la relativité générale qui inclut la relativité restreinte et qui est indispensable pour aborder les problèmes liés aux champs de gravitation intenses. Cette théorie est en particulier célèbre pour la prédiction de trous noirs aux masses très élevées.

Une théorie décrivant à la fois les phénomènes aux petites échelles de longueur et aux grandes vitesses est fournie par la physique quantique relativiste.



Systèmes	dimensions	masses	nombres d'atomes	densités
Univers	10^{26}m [a]	$10^{49} - 10^{50}$kg	10^{77}	$10^{-29} - 10^{-28}$kg.m^{-3}
Galaxie	10^{21}m	$10^{41} - 10^{42}$kg	10^{68}	10^{-25}kg.m^{-3}
Soleil	7.10^{8}m	2.10^{30}kg	$1.2\ 10^{57}$	$1.4\ 10^{3}$kg.m^{-3}
Terre	6.10^{6}m	6.10^{24}kg	$3.6\ 10^{51}$	$5.5\ 10^{3}$kg.m^{-3}
Homme	10^{0}m	10^{2}kg	6.10^{28}	10^{3}kg.m^{-3}
Protéine	10^{-7}m	$10^{-22} - 10^{-21}$kg	$10^{3} - 10^{4}$	
Molécule simple	10^{-8}m	10^{-23}kg	10^{2}	
Atome lourd	10^{-10}m	10^{-25}kg		10^{5}kg.m^{-3}
Atome H	10^{-10}m	10^{-27}kg		10^{2}kg.m^{-3}
Noyau lourd	10^{-14}m	10^{-25}kg		10^{17}kg.m^{-3}
Proton	10^{-15}m	10^{-27}kg		10^{18}kg.m^{-3}
Electron	$< 10^{-19}$m	10^{-30}kg		
Quark	$< 10^{-19}$m	10^{-29}kg		

Pour une description correcte de l’atome (10^{-10} m), il est indispensable de disposer de l’électromagnétisme et de la mécanique quantique. Si des effets liés à des vitesses élevées interviennent, il faut dépasser la mécanique quantique et travailler en mécanique quantique relativiste. Pour étudier le système solaire (10^{12} m), la gravitation et la mécanique classique suffisent, alors que pour travailler sur les trous noirs, gravitation et relativité sont indispensable et la relativité générale s’impose.

Une fois déterminées les théories nécessaires, on identifie les paramètres pertinents, indispensable à la description des phénomènes physiques considérés et des arguments dimensionnels permettent de quantifier quelques ordres de grandeur.

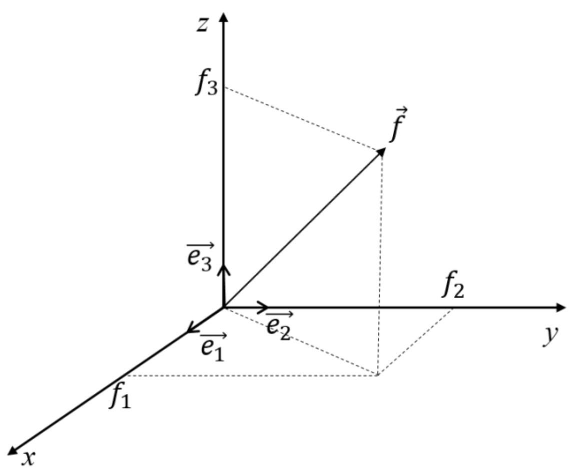
Chapitre 1 : Analyse vectorielle

Contenu

1. Les vecteurs à trois dimensions

Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel. Cet élément peut se décomposer sur une base de trois (dimensions 3) vecteurs élémentaires, orthogonaux entre eux et de même longueur (qui nous fixerons égale à 1 par définition, vecteurs unitaires). On a

$$\vec{f} = (f_1 \,;\, f_2 \,;\, f_3)$$



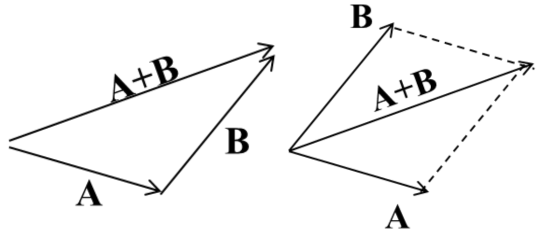
où les f_i sont les composantes du vecteur $\vec{f}$ dans la base $\{\vec{e_1} \,;\, \vec{e_2} \,;\, \vec{e_3}\}$ ou encore $\{\vec{u_x} \,;\, \vec{u_y} \,;\, \vec{u_z}\}$ ou encore $\{\vec{\imath} \,;\, \vec{\jmath} \,;\, \vec{k}\}$, c'est-à-dire

$$\vec{f} = f_1\vec{e_1} + f_2\vec{e_2} + f_3\vec{e_3}$$

$$\vec{g} = g_1\vec{e_1} + g_2\vec{e_2} + g_3\vec{e_3}$$

- Addition vectorielle

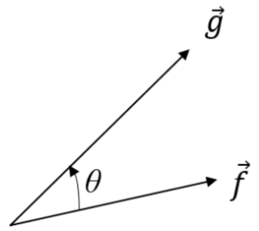
$$\vec{f} + \vec{g} = (f_1 + g_1\,;\, f_2 + g_2\,;\, f_3 + g_3)$$
$$= (f_1 + g_1)\vec{e_1} + (f_2 + g_2)\vec{e_2} + (f_3 + g_3)\vec{e_3}$$



- Multiplication par un scalaire

$$\lambda\vec{f} = (\lambda f_1\,;\, \lambda f_2\,;\, \lambda f_3)$$
$$= \lambda f_1\vec{\imath} + \lambda f_2\vec{\jmath} + \lambda f_3\vec{k}$$

- Produit scalaire de deux vecteurs :



$$\vec{f} \cdot \vec{g} = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = ||\vec{f}||.||\vec{g}||.\cos\theta$$

La norme (la longueur ou l'amplitude) d'un vecteur est donnée par (si espace vectoriel réel)

$$\left||\vec{f}|\right| = \sqrt{\vec{f} \cdot \vec{f}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} f_i^2}$$

ce produit peut être interprété comme la projection du vecteur $\vec{f}$ suivant la direction du vecteur $\vec{g}$ fois la norme de $\vec{g}$ (et réciproquement). Ainsi, si deux vecteurs sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul. S'ils sont parallèles, leur produit scalaire est simplement le produit de leurs normes.

EXEMPLE 1 : Produit scalaire de $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}$, $\vec{\imath} \cdot \vec{k}$ et $\vec{\jmath} \cdot \vec{k}$

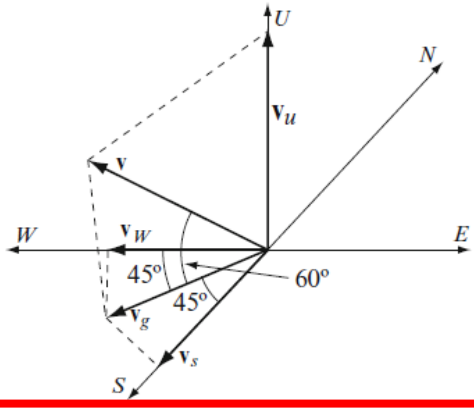
EXEMPLE 2 : Déterminer l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{B} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + \vec{k}$

EXEMPLE 3 : Déterminer l'angle entre les deux diagonales d'un cube.

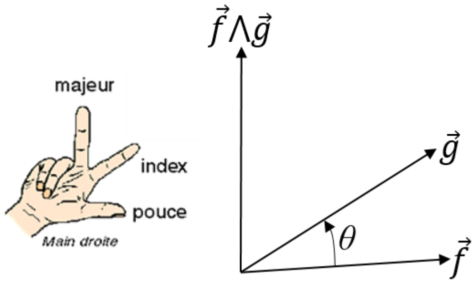
EXEMPLE 4 : Soit le vecteur $\vec{A} = -5\vec{\imath} - (3x + 2)\vec{\jmath} + \vec{k}$. Déterminer la norme de $\vec{A}$ et le vecteur unitaire $\vec{a}$ la direction de $\vec{A}$.

EXEMPLE 5 : Un avion décolle en faisant un angle de 60° avec le sol et avec une vitesse 180 km/h dans la direction West-South comme indiquée sur la figure ci-dessous.

a) Déterminer le vecteur vitesse de l'avion
b) Déterminer la direction de l'avion dans l'espace (i.e. vecteur unitaire)
c) Déterminer la vitesse terrestre (vitesse de l'ambre de l'avion)



- Produit vectoriel de deux vecteurs



$$\vec{f} \wedge \vec{g} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 g_3 - f_3 g_2 \\ -f_1 g_3 + f_3 g_1 \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur obtenu est orthogonal à ses deux parents. L'orientation de $\vec{f} \wedge \vec{g}$ est donnée par la règle de la main droite en allant de $\vec{f}$ vers $\vec{g}$.

$$\vec{f} \wedge \vec{g} = -\vec{g} \wedge \vec{f}$$

$$\vec{f} \wedge \vec{f} = \vec{0}$$

$$||\vec{f} \wedge \vec{g}|| = ||\vec{f}||.||\vec{g}||.\sin \theta_{f \to g}$$

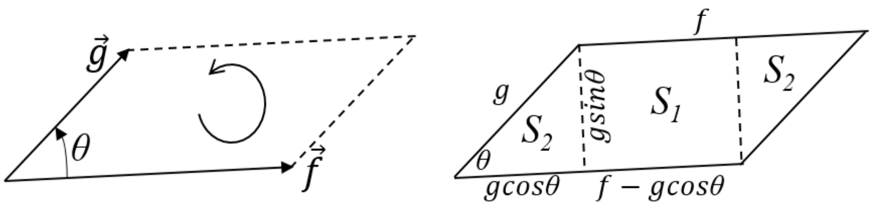
Pour les vecteurs élémentaires orthonormés $\{\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\}$ on a

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$$

$$\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

<u>Remarque :</u> Interprétation géométrique du produit vectoriel



En effet, calculons la surface du losange :

$$S_1 = (f - g\cos\theta) \times g\sin\theta$$

$$S_2 = 1/2(g\cos\theta) \times (g\sin\theta)$$

$$S_{losange} = S_1 + 2S_2 = \cdots = fg\sin\theta$$

$\vec{f} \wedge \vec{g}$ représente la surface orientée du losange issue de vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{g}$. Donc le produit vectoriel représente en réalité non pas une « longueur orientée » mais bien une surface orientée. Ce n'est qu'en dimensions 3 que l'on peut identifier cette surface orientée à un vecteur qui lui est orthogonal. On comprend à présent pourquoi $\vec{f} \wedge \vec{f} = \vec{0}$.

EXEMPLE 6 : Déterminer le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal au plan défini par $\overrightarrow{V_1} = -\vec{\imath} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{V_2} = -2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

EXEMPLE 7 : Déterminer le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal au plan contenant les trois points $P_1(0,1,0)$, $P_2(1,0,1)$, $P_3(0,0,1)$

EXEMPLE 8 : Démontrer que $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right).\vec{C}$

2. Champ de vecteurs en dimensions 3

2.1. Champ scalaire

Un champ scalaire sur $\mathbf{R}^3$ est une fonction $f(x, y, z)$ prenant des valeurs scalaire en tous points de l'espace $\mathbf{R}^3$. On peut restreindre cette définition à un domaine $\Omega \sqsubset \mathbf{R}^3$.

2.2. Dérivée partielle et différentielle d'une fonction f (x, y, z)

Dérivée partielle : La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables $f(x, y, z)$ est la dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes :

$$\partial_x f = \frac{\partial}{\partial x} f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

et de même pour $\partial_y f$ et $\partial_z f$.

Pour une fonction $f(x, y, z)$ de trois variables on obtient aussi une collection de trois nouvelles fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ décrivant chacune, au point (x, y, z), l'accroissement linéaire (infinitésimal) dans les trois directions de l'espace. En somme, elles donnent une approximation linéaire des vrais accroissements de la fonction $f(x, y, z)$.

Différentielle : L'accroissement local de $f(x, y)$ est donné par

$$\Delta f(x,y) \cong \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

pour un déplacement $\vec{u} = \Delta x\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath}$ très petit.

Pour un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

est la différentielle en (x, y) de la fonction f. En dimension 3, on a évidement

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

De manière générale, on étend cette définition à toutes fonctions Ψ de n variables $q_1, \ldots, q_n$:

$$d\Psi(q_1,\ldots,q_n) = \frac{\partial \Psi}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial q_n}dq_n$$

Gradient d'une fonction scalaire : Si on note $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$, le déplacement élémentaire, le gradient de la fonction $f(x, y, z)$ est par définition

$$df(x,y,z) = \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dl}$$

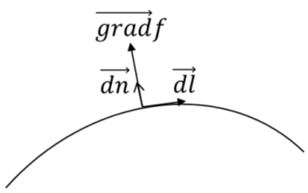
$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}f \cdot (dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

soit

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

et c'est un champ vecteur.

Interprétation du gradient : Supposons que l'on se déplace le long d'une équipotentielle, chemin sur lequel la fonction $f(x, y, z)$ prend les mêmes valeurs, alors $df = 0$ (parce que les valeurs ne varient pas) et donc $\overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dl} = 0$. Ce qui traduit le fait que le vecteur gradient est perpendiculaire à l'équipotentielle. On l'appelle pour cette raison la dérivée normale : $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$

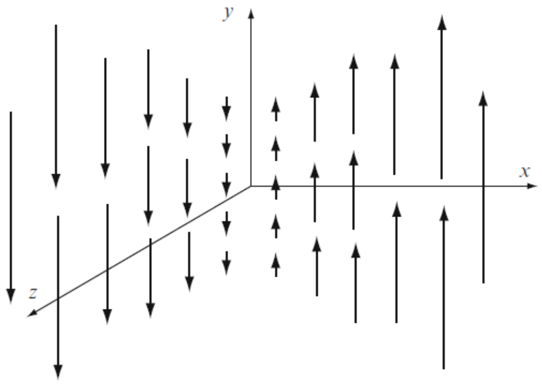


EXEMPLE 9 : Soit $\vec{r}$ le vecteur qui lie le point M'(x',y',z') au point M(x,y,z) et soit le gradient d'une fonction f défini par $\vec{\nabla}f = \partial_x f\vec{\imath} + \partial_y f\vec{\jmath} + \partial_z f\vec{k}$

a) **Déterminer $\vec{\nabla}(r^2)$.**
b) **Déterminer $\vec{\nabla}(r^n)$.**
c) **Déduire $\vec{\nabla}(1/r)$.**

2.3. Circulation d'un champ de vecteurs

Pour visualiser un champ vecteur, nous présentons en bas le champ vecteur $\vec{\boldsymbol{A}} = x\vec{\jmath}$:



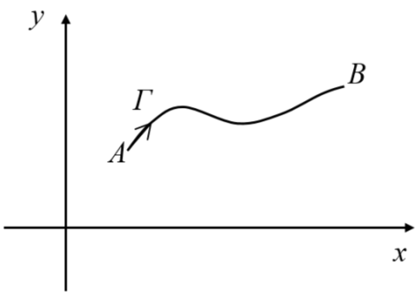
EXEMPLE 10 : Dessiner le champ vecteur $\vec{A} = x^2\vec{\jmath}$

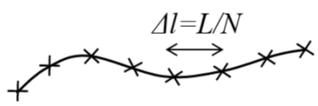
2.3.1. Intégrale curviligne

Par définition, l'intégrale curviligne d'un champ scalaire $f(\vec{r})$ le long de la courbe Γ, paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $t \in [a, b]$ est

$$\int_{\Gamma} f(\vec{r})dl = \int_a^b f(\vec{r}(t))||r'(t)||dt$$

où $r'(t) = d\vec{r}(t)/dt$ est le vecteur vitesse le long de la trajectoire Γ.





En effet, cette intégrale peut être une somme comme

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(\vec{r_n}) \frac{L}{N}$$

où L est la longueur du chemin Γ. Cette longueur élémentaire est donnée (en dimension 2) par

$$\Delta l(n) = \sqrt{\Delta x(n)^2 + \Delta y(n)^2} = \left(1 + \left(\frac{\Delta y(n)}{\Delta x(n)}\right)^2\right)^{1/2} \Delta x$$

Si on fixe l'incrément $\Delta x(n)$ à Δx, le rapport $\frac{\Delta y(n)}{\Delta x}$ est la pente locale au point n sur Γ et donc dans la limite continue ($N \to \infty$, L fixé) on a

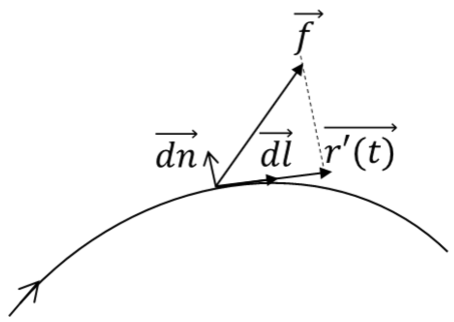
$$dl = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

ce qui donne

$$\int_{\Gamma} f(\vec{r})dl = \int_{x_A}^{x_B} f(y(x),x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

2.3.2. Circulation d'un champ de vecteur

On étend la définition précédente aux champs vectoriels en ne gardant que la composante tangente à la courbe Γ, c'est-à-dire le long du vecteur vitesse $\overrightarrow{r'}(t)$. On a



$$\int_{\Gamma} \vec{f}(\vec{r})\overrightarrow{dl} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r'}(t)dt$$

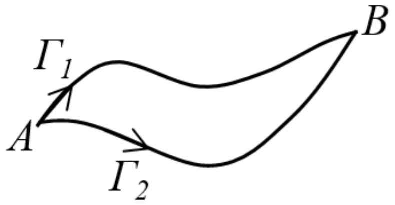
Circulation d'un champ de gradient $\vec{f} = \overrightarrow{grad}V$

Dans ce cas, on a

$$\int_{\Gamma} \vec{f}\,\overrightarrow{dl} = \int_{\Gamma} \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\Gamma} dV = V_B - V_A$$

La circulation du champ de gradient ne dépend que des points d'arrivé et de départ. La fonction $V(\vec{r})$ est appelée potentiel du champ $\vec{f}$. On aura noté ici l'analogie avec le travail des forces conservatives égale à la différence des énergies potentielles et donc indépendantes du chemin suivi.

Puisque pour un champ de gradient la circulation ne dépend pas du chemin suivi pour joindre A et B, on a



$$\int_{\Gamma 1} \vec{f}\,\overrightarrow{dl} = \int_{\Gamma 2} \vec{f}\,\overrightarrow{dl} = V_B - V_A$$

soit aussi

$$\int_{\Gamma 1} \vec{f}\,\overrightarrow{dl} - \int_{\Gamma 2} \vec{f}\,\overrightarrow{dl} = 0$$

et donc

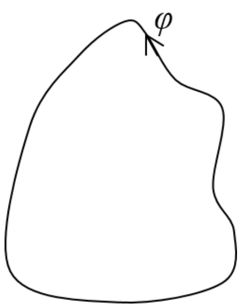
$$\oint_{\varphi(=\Gamma 1 - \Gamma 2)} \vec{f}\,\overrightarrow{dl} = \oint_{\varphi} \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

où φ est un boucle fermée.

La circulation sur toute boucle fermée d'un champ de gradient est nulle.

$$\vec{f} = \overrightarrow{grad}V \Rightarrow \oint_{\varphi} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

Circulation d'un champ de vecteur le long d'une boucle fermée (Théorème de Stokes)



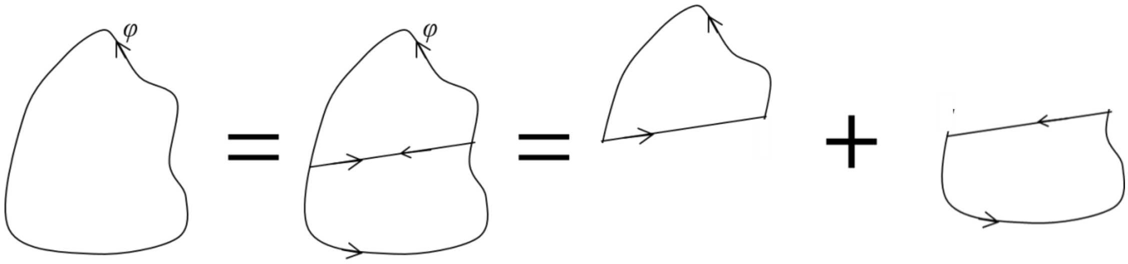
Soit une boucle fermée orientée, la circulation de $\vec{f}$ sur φ est donnée par

$$\oint_{\varphi} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r'}(t)dt$$

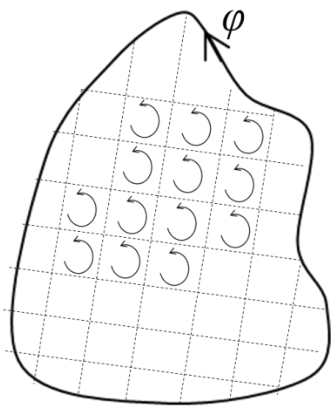
où $\vec{r}(t)$ est une paramétrisation adéquate de φ avec $t \in [a, b]$.

Bien entendu, il faut que la courbe φ soit suffisamment régulière (dérivable) pour qu'on puisse y définir une vitesse $\overrightarrow{r'}(t)$. La valeur de l'intégrale dépend en général de φ. Par ailleurs, en utilisant $\int_{\Gamma} \vec{f}\,\overrightarrow{dl} = -\int_{-\Gamma} \vec{f}\,\overrightarrow{dl}$, c'est-à-dire que le signe de l'intégrale change lorsqu'on change le sens de parcours, on voit aisément qu'on a un théorème de somme possible. En effet,

$\oint_\varphi \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl}$ est inchangé si on ajoute un chemin (intérieur) joignant deux points quelconques de φ et parcouru dans le deux sens :

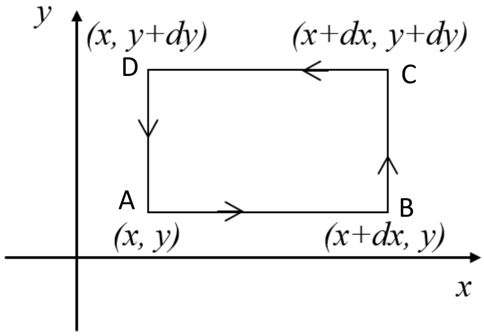


On peut ainsi afin d'évaluer l'intégrale curviligne sur φ, découper φ en petites boucles 'élémentaires' et tel que la valeur de l'intégrale soit la somme de toutes les intégrales sur les petites boucles :



$$\oint_\varphi \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = \sum_j \oint_{\varphi_j} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl}$$

Evaluons l'intégrale sur une boucle carrée, on a :



$$\oint_{\varphi_j} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} + \int_B^C \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} + \int_C^D \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} + \int_D^A \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl}$$

$$= \int_A^B \vec{f}\cdot\ dx\vec{\imath} + \int_B^C \vec{f}\cdot dy\vec{\jmath} + \int_C^D \vec{f}\cdot(-dx)\vec{\imath} + \int_D^A \vec{f}\cdot(-dy)\vec{\jmath}$$

$$= \int_A^B f_x(x,y)\,dx + \int_B^C f_y(x+dx,y)\,dy - \int_C^D f_x(x+dx,y+dy)\,dx - \int_D^A f_y(x,y+dy)\,dy$$

$$\int_A^B f_x(x,y)dx = f_x(x,y)\,dx$$

$$\int_B^C f_y(x+dx,y)\,dy = f_y(x+dx,y)dy = \left(f_y(x,y) + dx\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)dy$$

$$\int_C^D f_x(x+dx,y+dy)\,dx = f_x(x+dx,y+dy)dx = \left(f_x(x,y) + \cancel{dx\frac{\partial f_x}{\partial x}} + dy\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)dx$$

$$\int_D^A f_y(x,y+dy)dy = f_y(x,y+dy)\,dy = \left(f_y(x,y) + \cancel{dy\frac{\partial f_y}{\partial y}}\right)dy$$

$$\oint_{\varphi_j} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = f_x(x,y)dx + f_y(x+dx,y)dy - f_x(x+dx,y+dy)dx - f_y(x,y+dy)\,dy$$

$$\oint_{\varphi_j} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = f_x(x,y)dx + \left(f_y(x,y) + dx\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)dy - \left(f_x(x,y) + dy\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)dx - f_y(x,y)dy$$

$$\oint_{\varphi_j} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = \frac{\partial f_y}{\partial x}dxdy - \frac{\partial f_x}{\partial y}dxdy$$

$$\oint_{\varphi_j} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = dxdy\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

En introduisant, $\overrightarrow{dS} = dxdy\vec{k}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{f} = \left(d_y f_z - d_z f_y\right)\vec{\imath} + (d_z f_x - d_x f_z)\vec{\jmath} + \left(d_x f_y - d_y f_x\right)\vec{k}$

On voit que l'on peut écrire nos résultats sous une forme vectorielle :

$$\lim_{\substack{\varphi\to 0\\ en\ P(x,y,z)}} \oint_{\varphi} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{rot}\vec{f}\cdot\overrightarrow{dS}|_P$$

On constate donc que le rotationnel de $\vec{f}$ en P n'est autre que la circulation infinitésimale autour de point P par unité de surface.

Pour une boucle finie, en sommant sur toutes les contributions infinitésimales, on a

$$\boxed{\oint_{\varphi} \vec{f}\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} \leftrightarrow STOKES}$$

où S est n'importe qu'elle surface s'appuyant sur φ et dont l'orientation est donnée par la règle de la main droite. La quantité à droite de l'équation ci-dessus donne le flux de champ de vecteur rotationnel $\overrightarrow{rot}\vec{f}$ à travers la surface S.

Définition d'un champ de vecteurs conservatif : un champ de vecteurs $\vec{f}$ est dit conservatif si l'intégrale curviligne sur n'importe quel contour est nulle. En d'autres mots, en utilisant le théorème de Stokes, $\overrightarrow{rot}\vec{f}$=0. Dans ce cas, on dit que $\vec{f}$ donne naissance à un potentiel tel que $\vec{f} = \vec{\nabla}V$ (ou $-\vec{\nabla}V$).

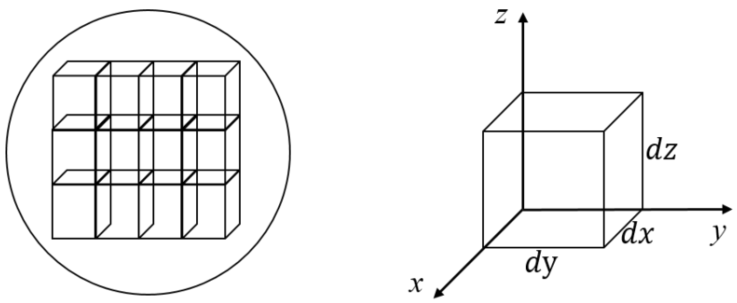
EXEMPLE 11 : En coordonnées sphériques, montrer que $\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0$ où $\vec{E}$ est un vecteur radial donné par $\vec{E} = a\hat{R}$

2.3.3. Flux d'un champ vecteur (Théorème de Gauss)

Le flux d'un champ vecteur à travers une surface S est défini par

$$flux\ de\ \vec{f}\ \text{à}\ travers\ S = \iint_S \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Lorsque la surface S est fermée, on peut établir un théorème important. On commence d'orienter le vecteur $\overrightarrow{dS}$ vers l'extérieur de S. Afin de calculer l'intégrale sur tout S, on peut là aussi, comme dans le cas précédent pour la circulation, couper notre volume enfermé par S en petits cubes. Pour chaque face des cubes à l'intérieur de S, le flux est compté deux fois : une fois positivement et une fois négativement par le cube adjacent, si bien que leurs contributions totale est nulle :



$$\iint_S \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} = \sum_j \iint_{\Sigma j} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS_j}$$

Le flux élémentaire pour un cube infinitésimal est

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma j} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS_j} = {} & [f_x(x+dx,y,z) - f_x(x,y,z)]dydz + [f_y(x,y+dy,z) - f_y(x,y,z)]dxdz \\ & + [f_z(x,y,z+dz) - f_z(x,y,z)]dxdy = (\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z)dxdydz \\ & = div\vec{f}dV\end{aligned}$$

Ce qui définit la divergence de $\vec{f}$ comme le flux élémentaire par unité de volume

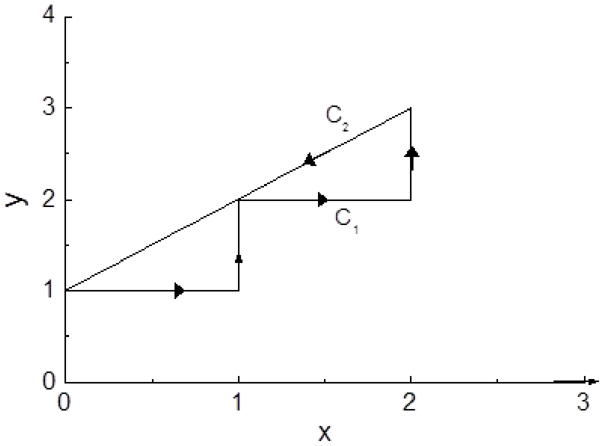
$$div\vec{f} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Pour une surface S finie, sommant sur toutes les contributions infinitésimales, on a

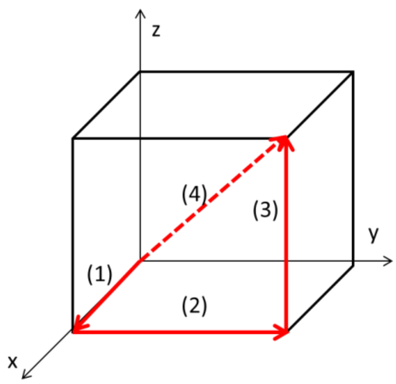
$$\boxed{\iint_S \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{f}dV \leftrightarrow GAUSS}$$

EXEMPLE 12 : En coordonnées sphériques, montrer que $div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ où $\vec{E}$ est un vecteur radial donné par $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$, avec $Q = \iiint_V \rho dV$.

EXEMPLE 13 : Soit un champ de vecteurs $\vec{A} = xy\vec{\imath} - xy\vec{\jmath}$ et $\vec{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$, Déterminer la circulation de $\vec{A}$ sur le chemin C_1 et C_2.



EXEMPLE 14 : Soit un champ de vecteurs $\vec{A} = x^2\vec{\imath} + 2yz\vec{\jmath} + y^2\vec{k}$ et $\vec{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$



a) **Déterminer la circulation de $\vec{A}$ sur le chemin (1)+(2)+(3)**
b) **Déterminer la circulation de $\vec{A}$ sur le chemin (4)**

2.3.4. Opérateur nabla $\vec{\nabla}$

En analyse vectorielle, il est commode d'introduire l'opérateur $\vec{\nabla}$, appelé nabla, et défini par

$$\vec{\nabla} \equiv \partial_x\vec{\imath} + \partial_y\vec{\jmath} + \partial_z\vec{k}$$

dont la signification est lorsqu'il est appliqué sur quelques fonctions.

- Lorsqu'on l'applique à un champ scalaire $f(x, y, z)$, on a

$$\vec{\nabla}f = \partial_x f\vec{\imath} + \partial_y f\vec{\jmath} + \partial_z f\vec{k} = \overrightarrow{grad}f$$

- Lorsqu'on l'applique à un champ vectoriel $\vec{f}(x, y, z)$, on peut le faire de deux façons :

par produit scalaire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z = div\vec{f}$$

par produit vectoriel :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \overrightarrow{rot}\vec{f}$$

L'avantage de cette notation, qui n'est valable qu'en coordonnées cartésiennes, est de voir directement certaines relations, par exemple :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = 0 \quad \equiv \quad div\,\overrightarrow{rot}\vec{f} = 0$$

La divergence d'un champ rotationnel est toujours nulle.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \vec{f} = \vec{0} \quad \equiv \quad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad} f = \vec{0}$$

La circulation d'un champ de gradient sur une boucle fermée est toujours nulle.

EXEMPLE 15 : Soit un champ de vecteurs $\vec{A} = \frac{x}{r}\vec{\imath} + \frac{y}{r}\vec{\jmath} + \frac{z}{r}\vec{k}$ et $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$; Déterminer la divergence de $\vec{A}$; $\vec{\nabla}.\vec{A}$

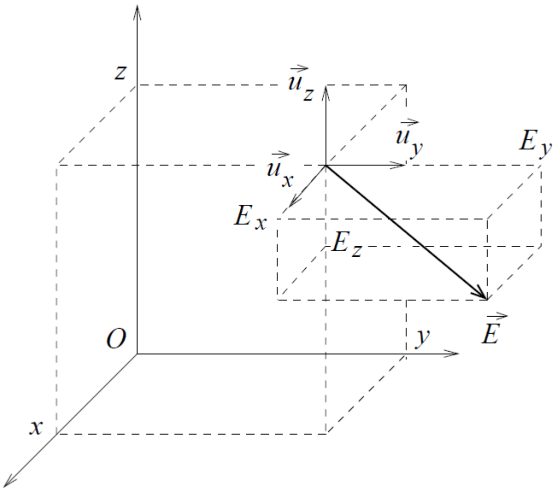
EXEMPLE 16 : Vérifier le théorème de divergence (Gauss) pour l'exercice précédente.

EXEMPLE 17 : Soit un champ de vecteurs $\vec{A} = 2y\vec{\imath} + (2x + 3z)\vec{\jmath} + 3y\vec{k}$

a) Déterminer le rotationnel de $\vec{A}$.
b) Déduire que $\vec{A}$ dérive d'un potentiel Φ et déterminer Φ.

3. Rappels sur les systèmes de coordonnées

3.1. Système de coordonnées cartésiennes



- La position du point *M* est donnée par trois coordonnées *x*, *y* et *z*.

- Mathématiquement :

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{u_x} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}\,;\ \vec{\jmath} = \overrightarrow{u_y} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}\,;\ \vec{k} = \overrightarrow{u_z} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}\,;$$

- Tout vecteur $\vec{E}$ se décompose de la manière suivante :

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}$$

- Un déplacement infinitésimal du point *M* s'écrira :

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$dl^2 = \overrightarrow{dl} \cdot \overrightarrow{dl} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- Elément de surface

plan défini par z constant : $dS = dxdy$

plan défini par y constant : $dS = dxdz$

plan défini par x constant : $dS = dydz$

- Elément de volume

$$d^3\vec{r} = dxdydz$$

- Le gradient d'une fonction $V(x, y, z)$ est défini par :

$$\overrightarrow{grad}V = \vec{\nabla}V = \partial_x V\vec{\imath} + \partial_y V\vec{\jmath} + \partial_z V\vec{k}$$

- La divergence d'un vecteur $\vec{E}$ est défini par :

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \partial_x(E_x) + \partial_y(E_y) + \partial_z(E_z)$$

- Le laplacien d'une fonction V est défini par :

$$\Delta V = {\partial_x}^2 V + {\partial_y}^2 V + {\partial_z}^2 V$$

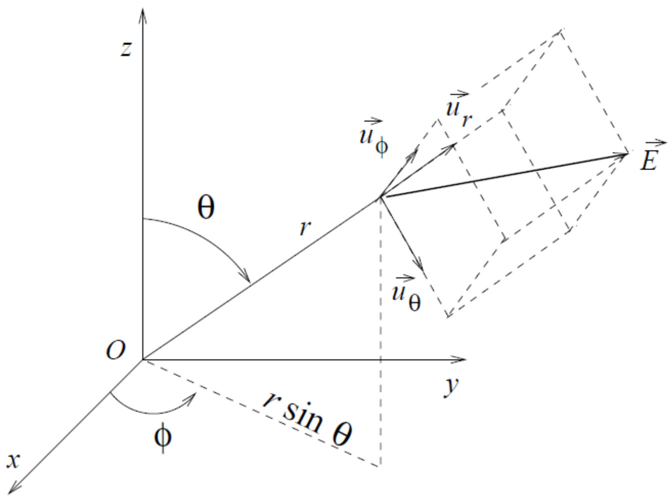
- La rotation d'un vecteur $\vec{E}$ est défini par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ -\partial_x E_z + \partial_z E_x \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$$

3.3. Système de coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est défini par le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\Phi\sin\theta \\ y = r\sin\Phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r \in [0; +\infty[\,;\ \theta \in [0; \pi];\ \Phi \in [0; 2\pi]$$



- Mathématiquement :

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r};\ \overrightarrow{u_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta};\ \overrightarrow{u_\Phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \Phi};$$

- Vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\Phi \sin\theta\, \overrightarrow{u_x} + \sin\Phi \sin\theta\, \overrightarrow{u_y} + \cos\theta\, \overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\Phi \cos\theta\, \overrightarrow{u_x} + \sin\Phi \cos\theta\, \overrightarrow{u_y} - \sin\theta\, \overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{u_\Phi} = -\sin\Phi\, \overrightarrow{u_x} + \cos\Phi\, \overrightarrow{u_y}$$

- Tout vecteur $\vec{E}$ se décompose de la manière suivante :

$$\vec{E} = E_r\overrightarrow{u_r} + E_\theta\overrightarrow{u_\theta} + E_\Phi\overrightarrow{u_\Phi}$$

- Un déplacement infinitésimal du point *M* s'écrira :

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + rsin\theta d\Phi\overrightarrow{u_\Phi}$$

$$dl^2 = \overrightarrow{dl}\cdot\overrightarrow{dl} = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\Phi^2$$

- Elément de surface

plan défini par Φ constant : $dS = rdrd\theta$

plan défini par θ constant : $dS = rsin\theta drd\Phi$

plan défini par *r* constant : $dS = r^2sin\theta d\theta d\Phi$

- Elément de volume :

$$d^3\vec{r} = r^2sin\theta drd\theta d\Phi$$

- Le gradient d'une fonction *V*(*x*, *y*, *z*) est défini par :

$$\overrightarrow{grad}V = \vec{\nabla}V = \partial_r V\overrightarrow{u_r} + (1/r)\partial_\theta V\overrightarrow{u_\theta} + (1/rsin\theta)\partial_\Phi V\overrightarrow{u_\Phi}$$

- La divergence d'un vecteur $\vec{E}$ est défini par :

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\, E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi E_\varphi$$

- Le laplacien d'une fonction V est défini par :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r V) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta V) + \frac{1}{(r\sin\theta)^2}{\partial_\varphi}^2 V$$

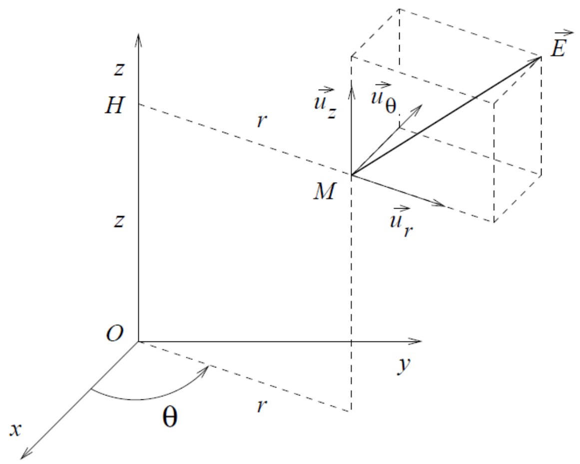
- La rotation d'un vecteur $\vec{E}$ est défini par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}(\partial_\theta(\sin\theta\, E_\Phi) - \partial_\Phi E_\theta) \\ \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\Phi E_r - \partial_r(rE_\Phi)) \\ \frac{1}{r}(\partial_r(rE_\theta) - \partial_\theta(E_r)) \end{pmatrix}$$

3.3. Système de coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques est défini par le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad r \in [0; +\infty[\,;\ \theta \in [0; 2\pi];$$



- Mathématiquement :

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r};\ \overrightarrow{u_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta};\ \overrightarrow{u_z} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial z};$$

- Vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_z}$$

- Tout vecteur $\vec{E}$ se décompose de la manière suivante :

$$\vec{E} = E_r\overrightarrow{u_r} + E_\theta\overrightarrow{u_\theta} + E_z\overrightarrow{u_z}$$

- Un déplacement infinitésimal du point M s'écrira :

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$$

$$dl^2 = \overrightarrow{dl} \cdot \overrightarrow{dl} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

- Elément de surface

plan défini par z constant : $dS = rdrd\theta$

plan défini par r constant : $dS = rd\theta dz$

plan défini par θ constant : $dS = drdz$

- Elément de volume :

$$d^3\vec{r} = rdrd\theta dz$$

- Le gradient d'une fonction $V(x, y, z)$ est défini par :

$$\overrightarrow{grad}V = \vec{\nabla}V = \partial_r V\overrightarrow{u_r} + (1/r)\partial_\theta V\overrightarrow{u_\theta} + \partial_z V\overrightarrow{u_z}$$

- La divergence d'un vecteur $\vec{E}$ est défini par :

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{r}\partial_r(rE_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta(E_\theta) + \partial_z E_z$$

- Le laplacien d'une fonction V est défini par :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r V) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta{}^2 V + \partial_z{}^2 V$$

- La rotation d'un vecteur $\vec{E}$ est défini par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\theta E_z - \partial_z E_\theta \\ \partial_z E_r - \partial_r E_z \\ \frac{1}{r}(\partial_r(rE_\theta) - \partial_\theta E_r) \end{pmatrix}$$

3.4. Transformation d'un système de coordonnées à un autre

Coordonnées cartésiennes vers coordonnées sphériques :

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ cos\theta cos\varphi & cos\theta sin\varphi & -sin\theta \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques vers coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & cos\theta cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\theta sin\varphi & cos\theta sin\varphi & cos\varphi \\ cos\theta & -sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes vers coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques vers coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques vers coordonnées sphériques :

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\theta & 0 & cos\theta \\ cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques vers coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ cos\theta & -sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 18 : On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant : $\begin{cases} x = r\cos\Phi\cos\theta \\ y = r\cos\Phi\sin\theta \\ z = r\sin\Phi \end{cases}$

a) **Calculer *dx, dy, dz*.**
b) **Vérifier que xdx+ydy+zdz=rdr.**
c) **En deduire** $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}$ **et** $\frac{\partial r}{\partial z}$.

EXEMPLE 19 : On considère le vecteur $\vec{A}$ qui connecte le point $P_1(0,0,1)$ au point $P_2(2,1,3)$.

a. **Trouver le vecteur unitaire â en coordonnées cartésiennes**
b. **Trouver le vecteur unitaire â en coordonnées sphériques**
c. **Trouver le vecteur unitaire â en coordonnées cylindriques**

EXEMPLE 20 : Vérifier le théorème de la divergence (Gauss) pour $\vec{v} = xy\vec{\imath} + 2yz\vec{\jmath} + 3zx\vec{z}$ sur un cube de côté égal à 2 unités.

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \tag{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \tag{4}$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a} \tag{5}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \tag{6}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{9}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2}dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{11}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2| \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x}, \ a \neq b \tag{14}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2}dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| \tag{15}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{16}$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a}\,dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}}dx = 2\sqrt{x\pm a} \tag{18}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}}dx = -2\sqrt{a-x} \tag{19}$$

$$\int x\sqrt{x-a}\,dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \tag{20}$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} \tag{21}$$

$$\int (ax+b)^{3/2}dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \tag{22}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x\pm a}}dx = \frac{2}{3}(x\mp 2a)\sqrt{x\pm a} \tag{23}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \tag{24}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}}dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right] \tag{25}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \tag{26}$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)}\,dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2\ln\left|a\sqrt{x}+\sqrt{a(ax+b)}\right|\right] \tag{27}$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}\,dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}}\ln\left|a\sqrt{x}+\sqrt{a(ax+b)}\right| \tag{28}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{29}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{30}$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2\pm a^2\right)^{3/2} \tag{31}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{32}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{33}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \sqrt{x^2\pm a^2} \tag{34}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} \tag{35}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \tag{36}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{b+2ax}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{37}$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}}\Big(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times \left(-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)\right) + 3(b^3-4abc)\ln\left|b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|\Big) \tag{38}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{39}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{40}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \tag{41}$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax\,dx = x\ln ax - x \tag{42}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 \tag{43}$$

$$\int \ln(ax+b)dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x, a \neq 0 \tag{44}$$

$$\int \ln(x^2+a^2)\,dx = x\ln(x^2+a^2) + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} - 2x \tag{45}$$

$$\int \ln(x^2-a^2)\,dx = x\ln(x^2-a^2) + a\ln\frac{x+a}{x-a} - 2x \tag{46}$$

$$\int \ln\left(ax^2+bx+c\right)dx = \frac{1}{a}\sqrt{4ac-b^2}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a}+x\right)\ln\left(ax^2+bx+c\right) \tag{47}$$

$$\int x\ln(ax+b)dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2-\frac{b^2}{a^2}\right)\ln(ax+b) \tag{48}$$

$$\int x\ln\left(a^2-b^2x^2\right)dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2-\frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2-b^2x^2\right) \tag{49}$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{50}$$

$$\int \sqrt{x}e^{ax}dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\mathrm{erf}\left(i\sqrt{ax}\right), \quad \text{where } \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{51}$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x \tag{52}$$

$$\int xe^{ax}dx = \left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \tag{53}$$

$$\int x^2e^x dx = \left(x^2-2x+2\right)e^x \tag{54}$$

$$\int x^2e^{ax}dx = \left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax} \tag{55}$$

$$\int x^3e^x dx = \left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x \tag{56}$$

$$\int x^ne^{ax}\,dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx \tag{57}$$

$$\int x^ne^{ax}\,dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n,-ax], \quad \text{where } \Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt \tag{58}$$

$$\int e^{ax^2}\,dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(ix\sqrt{a}\right) \tag{59}$$

$$\int e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(x\sqrt{a}\right) \tag{60}$$

$$\int xe^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \tag{61}$$

$$\int x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\mathrm{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \tag{62}$$

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax \tag{63}$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{64}$$

$$\int \sin^n ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax \;{}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{65}$$

$$\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \tag{66}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax \tag{67}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{68}$$

$$\int \cos^p ax\,dx = -\frac{1}{a(1+p)}\cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{69}$$

$$\int \cos^3 ax\,dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \tag{70}$$

$$\int \cos ax \sin bx\,dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \tag{71}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx\,dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{72}$$

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x \tag{73}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx\,dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{74}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax\,dx = -\frac{1}{3a}\cos^3 ax \tag{75}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx\,dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \tag{76}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \tag{77}$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln \cos ax \tag{78}$$

$$\int \tan^2 ax\,dx = -x + \frac{1}{a}\tan ax \tag{79}$$

$$\int \tan^n ax\,dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \tag{80}$$

$$\int \tan^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \cos ax + \frac{1}{2a}\sec^2 ax \tag{81}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \tag{82}$$

$$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax \tag{83}$$

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| \tag{84}$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x \tag{85}$$

$$\int \sec^2 x \tan x\,dx = \frac{1}{2}\sec^2 x \tag{86}$$

$$\int \sec^n x \tan x\,dx = \frac{1}{n}\sec^n x, n \neq 0 \tag{87}$$

$$\int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{88}$$

$$\int \csc^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax \tag{89}$$

$$\int \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| \tag{90}$$

$$\int \csc^n x \cot x\,dx = -\frac{1}{n}\csc^n x, n \neq 0 \tag{91}$$

$$\int \sec x \csc x\,dx = \ln|\tan x| \tag{92}$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x\,dx = \cos x + x \sin x \tag{93}$$

$$\int x \cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax \tag{94}$$

$$\int x^2 \cos x\,dx = 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x \tag{95}$$

$$\int x^2 \cos ax\,dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax \tag{96}$$

$$\int x^n \cos x\,dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n\Gamma(n+1, ix)\right] \tag{97}$$

$$\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n\Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)\right] \tag{98}$$

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x \tag{99}$$

$$\int x \sin ax\,dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{100}$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x \tag{101}$$

$$\int x^2 \sin ax\,dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2} \tag{102}$$

$$\int x^n \sin x\,dx = -\frac{1}{2}(i)^n\left[\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n\Gamma(n+1, -ix)\right] \tag{103}$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \tag{104}$$

$$\int e^{bx} \sin ax\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax) \tag{105}$$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \tag{106}$$

$$\int e^{bx} \cos ax\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin ax + b\cos ax) \tag{107}$$

$$\int xe^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x) \tag{108}$$

$$\int xe^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(x\cos x - \sin x + x\sin x) \tag{109}$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\sinh ax \tag{110}$$

$$\int e^{ax} \cosh bx\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a\cosh bx - b\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} + \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{111}$$

$$\int \sinh ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax \tag{112}$$

$$\int e^{ax} \sinh bx\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[-b\cosh bx + a\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} - \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{113}$$

$$\int e^{ax} \tanh bx\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)}{}_2F_1\left[1+\dfrac{a}{2b}, 1, 2+\dfrac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] - \dfrac{1}{a}e^{ax}{}_2F_1\left[\dfrac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx}\right] & a \neq b \\ \dfrac{e^{ax} - 2\tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \tag{114}$$

$$\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax \tag{115}$$

$$\int \cos ax \cosh bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}[a\sin ax\cosh bx + b\cos ax\sinh bx] \tag{116}$$

$$\int \cos ax \sinh bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}[b\cos ax\cosh bx + a\sin ax\sinh bx] \tag{117}$$

$$\int \sin ax \cosh bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}[-a\cos ax\cosh bx + b\sin ax\sinh bx] \tag{118}$$

$$\int \sin ax \sinh bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}[b\cosh bx\sin ax - a\cos ax\sinh bx] \tag{119}$$

$$\int \sinh ax \cosh ax\,dx = \frac{1}{4a}[-2ax + \sinh 2ax] \tag{120}$$

$$\int \sinh ax \cosh bx\,dx = \frac{1}{b^2-a^2}[b\cosh bx\sinh ax - a\cosh ax\sinh bx] \tag{121}$$