

PHY 1441

ELECTROMAGNETISME

Hiver 2020

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\Delta V = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## Chapitre 2 : Charge Electrostatique et Loi de Coulomb

### Contenu

1. Historique .....	- 2 -
1.1. Thalès : l'expérience fondamentale .....	- 2 -
1.2. Gilbert : les conducteurs et les isolants .....	- 3 -
1.3. Von Guericke : les machines .....	- 3 -
1.4. Gray : Les observations. ....	- 4 -
1.5. Du Fay : la théorie à deux fluides.....	- 5 -
1.6. Franklin : la théorie à un fluide .....	- 5 -
2. Explication de l'expérience d'attraction par friction.....	- 6 -
3. Distribution de charges.....	- 7 -
3.1. Les isolants .....	- 8 -
3.2. Les conducteurs .....	- 8 -
4. Les distributions discrète et continue .....	- 9 -
4.1. Distribution discrète .....	- 9 -
4.2. Distribution continue .....	- 9 -
4.3. Densité linéique .....	- 10 -
4.4. Densité surfacique .....	- 10 -
4.5. Densité volumique.....	- 10 -
5. La force de Coulomb.....	- 10 -
6. Invariances .....	- 12 -
6.1. Invariances par translation.....	- 12 -
6.2. Invariances par rotation .....	- 13 -
7. Symétries .....	- 14 -
7.1. Principe de Curie .....	- 14 -
7.2. Symétrie plane .....	- 14 -
7.3. Antisymétrie plane.....	- 15 -
7.4. La force et la symétrie plane.....	- 15 -
7.5. La force et l'antisymétrie plane .....	- 17 -

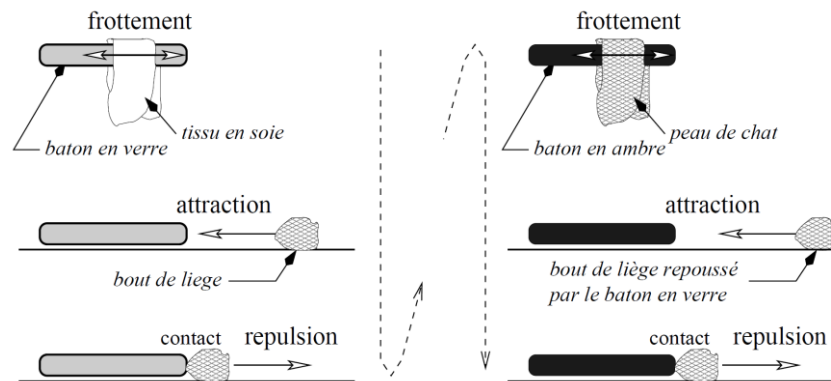
### 1. Historique

#### 1.1. Thalès : l'expérience fondamentale

Bien entendu, à l'époque de **Thalès de Milet**, au V<sup>e</sup> siècle avant J.C., les notions de charge, et à fortiori de force, électrostatiques étaient inconnues (et le resteraient pendant encore plus de 2000 ans). Thalès fut le premier à donner une description de phénomènes électrostatiques qu'il aurait lui-même ramenés d'Egypte. Il **rapporte que lorsque l'on frotte un bâton d'ambre avec une peau de chat puis qu'on l'approche de certains matériaux légers, tels des morceaux de papiers, ceux-ci sont attirés par le bâton d'ambre**. C'est l'expérience de base qui a conduit à élaborer la théorie électrostatique.

Regardons de plus près cette expérience très simple, représentée sur la figure ci-dessous, mais dont les mécanismes physiques essentiels ont résisté à la compréhension des savants pendant plusieurs siècles. Frottons un bâton en verre avec un chiffon en soie. Lorsque nous l'approchons de petites billes faites d'un matériau léger comme des morceaux de liège, nous observons alors

que les billes sont attirées par le bâton. Dès que les morceaux de liège sont en contact avec le bâton, ils sont repoussés. On dit que le bâton en verre est alors électrisé.



La première tentative d'explication de cette expérience fut donnée par **Plutarque**. Il **postule que le matériau frotté émet un effluve qui déplace l'air**. Le courant d'air se déplace loin du matériau puis revient en ramenant les objets sur son passage. Cette théorie ne s'appuie pas sur aucune observation de l'effluve (et pour cause) et pose plus de question qu'elle n'apporte de réponses.

### 1.2. Gilbert : les conducteurs et les isolants

Même si l'attraction des corps légers est connue depuis l'antiquité, le moyen âge n'a vu aucune évolution des recherches effectuées concernant ce phénomène, et l'étude scientifique de l'électrostatique n'a véritablement commencé qu'au XVI<sup>e</sup> siècle avec les travaux de William Gilbert. Il a été le premier à séparer les corps en deux groupes : les conducteurs et les isolants, et il a aussi inventé l'électroscope dont nous verrons le fonctionnement plus loin.

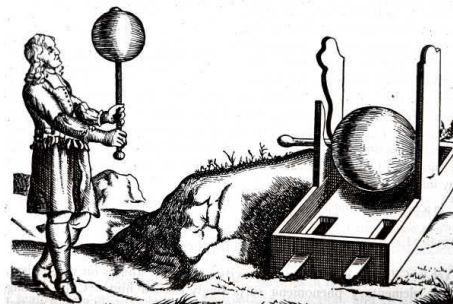
Il publia en 1600, le premier traité connu portant sur les phénomènes d'électrisation qui traitait aussi bien de l'électrostatique que du magnétisme. Dans ce document, il essaye d'expliquer l'origine de l'attraction par des corps électrisés. Tout d'abord, la notion d'action à distance n'était pas acceptable pour les savants du XVI<sup>e</sup>. Donc **il a spéculé que lorsqu'un matériau est frotté, il s'échauffe et la chaleur dégage un effluve**, comme l'a postulé Plutarque, **qui rejoint l'autre matériau et les attire mutuellement**. Il a fait de nombreuses expériences pour prouver sa théorie. Il a aussi cherché une relation entre la force attractive et la distance des matériaux et il a montré qu'elle décroît avec la distance. Il explique alors ce phénomène par sa théorie en avançant que l'effluve se diffuse dans tout l'espace et son flux à travers le corps devient faible à longue distance.

Cette théorie est fautive, de plus elle n'explique rien concernant la répulsion. Cependant elle a servi de base à d'autres travaux et a permis à d'autres savants d'arriver à des conclusions justes pour expliquer l'électrostatique.

### 1.3. Von Guericke : les machines

Les expériences de Gilbert furent reprises par l'allemand Otto von Guericke au milieu du XVI<sup>e</sup> siècle. Les expériences de Gilbert se déroulaient toujours dans l'air. Cependant, l'attraction ou la répulsion entre corps électrisés se manifeste beaucoup mieux dans le vide que dans l'air qui induit une force de frottement et freine donc les mouvements. Donc, Otto von Guericke inventa une machine à faire le vide afin d'améliorer la qualité des observations. Il a réalisé de nombreuses expériences concernant ce que l'on appelle actuellement l'électricité statique.

Enfin, en 1663, il a inventé le premier générateur électrique qui produisait de l'électricité statique par friction. Il a simplement repris l'idée du frottement d'un corps solide sur une peau qu'il a mécanisée.



Ce dispositif a permis d'effectuer des expériences produisant des phénomènes aux effets plus facilement observables qu'avec un simple bâton frotté. Ce générateur était constitué d'une grosse boule de soufre coulée dans un globe en verre. Ce globe était monté sur une manivelle. Lorsque l'axe de la manivelle reposait sur son socle le globe frottait sur une lame de cuir. Ainsi en tournant la manivelle, il était possible d'électriser le globe de soufre par frottement sur le cuir. Après l'électrisation, on pouvait retirer la manivelle et la boule du socle et utiliser le globe comme source pour des expériences d'électricité statique. Ces expériences l'on amené à approfondir les notions de conducteur et d'isolant. On peut noter qu'il semble qu'Otto von Guericke n'a pas eu conscience que les effets qu'il a générés étaient dus à l'électricité statique.

#### 1.4. Gray : Les observations.

Un peu plus tard, Stephen Gray apporta une contribution significative à l'explication des phénomènes électrostatiques. Il montre en 1729 que l'électricité (ou la vertu électrique selon ses termes) peut être transportée d'un corps à un autre par un fil métallique. Il fit des expériences, avec son ami Jean Desaguliers, dans lesquelles ils électrisaient par frottement un tube de verre. Puis, ils connectaient ce tube à un morceau de liège par l'intermédiaire d'un fil métallique. Ils ont constaté que le morceau de liège avait alors les propriétés des matériaux électrisés, c'est à dire qu'il était capable d'attirer d'autres objets.

De plus, ils ont constaté que tous les corps ne conduisaient pas l'électricité : en remplaçant le fil métallique par des fils réalisés avec d'autres matériaux, ils découvrent que certains corps peuvent conduire l'électricité alors que certains autres ne le peuvent pas. Les expériences effectuées avec un fil de soie à la place du fil métallique ne conduisent pas à l'électrisation du morceau de liège. Ils ont aussi remarqué que la transmission ne se faisait pas si la ligne métallique était en contact avec la Terre. Il a compris alors que la Terre conduisait la vertu électrique loin de l'objet. Enfin, ils ont aussi constaté qu'un objet métallique tenu en main ne montrait pas de signe d'électrisation. En revanche, s'il était posé sur un matériau isolant, il devenait électrisable. Ils en ont déduit que le corps humain est donc aussi un matériau conducteur qui guide l'électricité vers la Terre donc loin du morceau de Liège.

Après ces réalisations, Gray a compris qu'on pouvait électriser n'importe quel matériau sur Terre. Cependant, même si Gray a bel et bien compris que la vertu électrique pouvait s'écouler ou être retenue sur certains corps, il n'a pas expliqué ce qu'était cette vertu.

### 1.5. Du Fay : la théorie à deux fluides.

C'est ensuite Du Fay, qui fit considérablement avancer la compréhension des phénomènes électrostatiques. D'une part, Du Fay a prouvé que tous les corps sont plus ou moins conducteurs. Il suffit pour cela de les chauffer plus ou moins et de les frotter ensuite sur n'importe quelle sorte de tissus. Il observe que les conducteurs sont conducteurs à température ambiante et que les isolants le deviennent à haute température.

D'autre part, il a postulé qu'il existait deux sortes d'électricité. **Du Fay annonça que l'électricité est en fait constituée d'un fluide vitreux ou positif et d'un fluide résineux ou négatif** et il postule que **deux corps porteurs d'électricité de même nature se repoussent et deux corps porteurs d'électricité opposée s'attirent**. Il postule aussi que **les isolants ont la même quantité des deux électricités**.

Du Fay reprend alors l'expérience fondamentale avec les bâtons d'ambre et de verre et l'explique. Du Fay donne comme explication de ces phénomènes que, en général, la matière est neutre parce qu'elle contient autant des deux fluides (vitreux et résineux). Cependant si la friction sépare les fluides dans le **bâton en verre**, alors celui-ci devient porteur de fluide vitreux (positif) et il peut alors attirer des corps qui sont porteurs du fluide résineux (négatif). Quand le contact se fait entre les morceaux de liège et le bâton, le fluide du bâton est transmis aux morceaux de liège. Tous les éléments portent alors du fluide vitreux (positif) et se repoussent tous mutuellement. Si maintenant, on électrise un **bâton d'ambre**, il devient porteur de fluide résineux (négatif). Il va donc attirer les morceaux de liège électrisés par l'expérience précédente. Ce raisonnement est connu comme étant la théorie à deux fluides. Cette théorie est inexacte mais elle a permis de poser les éléments décisifs qui permettront plus tard à Benjamin Franklin de donner la vision correcte du phénomène.

### 1.6. Franklin : la théorie à un fluide

A cette époque, tout le monde se posait la question de savoir s'il existait deux fluides électriques (selon Du Fay) ou bien s'il n'en existait qu'un seul qui serait la manifestation des natures résineuse et vitreuse de l'électricité. La majorité de la communauté scientifique de l'époque se ralliait au premier point de vue.

En 1747, **Benjamin Franklin** a présenté sa théorie du fluide unique. Il **imagina l'électricité comme étant un type de fluide invisible présent dans toute la matière. Il a posé, en principe, que le frottement de surfaces isolantes faisait changer ce fluide d'endroit et qu'un écoulement de ce fluide constitue un courant électrique**. Il a également posé en principe que quand la matière contenait trop peu de ce fluide elle était négativement chargée et quand il était excédentaire, la matière était positivement chargée. Dans l'esprit de la théorie à deux fluides de Du Fay, il identifia le terme positif avec le type de charge acquis par une tige de verre frottée sur de la soie, et négatif avec celui acquis par une tige en ambre frottée avec de la fourrure.

Il a donc posé que :

- La matière contient des charges positives et des charges négatives.
- Le courant électrique est dû au déplacement des charges négatives.
- Les charges positives restent fixes.

De plus, il a posé qu'un corps chargé négativement et un autre positivement s'attirent et que deux corps chargé négativement ou deux corps chargé positivement se repoussent.

**L'interprétation moderne des expériences avec le bâton de verre et celui d'ambre est très proche de celle de Benjamin Franklin. Il a ensuite posé que ce fluide était constitué de particules qui sont les charges électriques. Aujourd'hui nous savons que ces charges sont des électrons et en fait que le fluide est chargé négativement.**

**Il a défini la charge nette portée par un système par la somme des charges positives moins la somme des valeurs absolues des charges négatives.**

Finalement, il a été amené naturellement à poser le principe de la conservation de la charge électrique, c'est-à-dire dans un système isolé, la charge nette est une constante.

**Ce principe (comme tout principe) ne peut pas être démontré. Il tire sa validité du fait qu'on ne lui connaît pas de violation. Il constitue aujourd'hui encore une pierre angulaire de la physique.**

## 2. Explication de l'expérience d'attraction par friction

A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les expériences de Jean Perrin ont définitivement conduit à une interprétation corpusculaire de la matière. Nous savons maintenant que la matière qui nous entoure est constituée d'une centaine et quelque dizain d'éléments chimiques différents : les atomes. Au début du XX<sup>e</sup> siècle, l'expérience de Rutherford, dont les détails dépassent le niveau de ce cours, a mis en évidence **la structure interne de ces atomes** et il a démontré l'existence d'un **noyau atomique central chargé positivement et d'un cortège d'électrons gravitant autour du noyau**. L'ensemble, noyau et électrons, est électriquement neutre. Le noyau est formé de protons chargés et de neutrons non chargés. **Il y a donc autant de protons que d'électrons dans un atome**. Les atomes peuvent mettre des électrons en commun pour former des liaisons chimiques (ou covalente). L'ensemble des atomes ainsi liés constitue une molécule.

**Lorsque l'on met les deux matériaux en contact, des liaisons chimiques se forment entre des parties des deux surfaces : c'est le phénomène d'adhésion. Quand, la liaison est cassée, certains des atomes qui étaient liés ont tendance à garder des électrons supplémentaires et d'autres ont tendance à se laisser facilement arracher leurs électrons. C'est ce phénomène qui est responsable de la création de charge nette dans un matériau. Ce phénomène se déroule sans friction, juste en mettant les matériaux en contact, cependant dans ce cas son effet est très faible. L'effet est énormément renforcé en frottant les matériaux parce que dans ce cas, ils se touchent et se séparent localement un nombre gigantesque de fois. L'un des corps arrache un nombre important d'électrons à l'autre. Le corps qui possède un excès d'électrons devient chargé négativement. Le corps qui a perdu des électrons est chargé positivement.**

Revenons à l'expérience avec le bâton d'ambre et le bâton de verre.

- **Le tissu en soie avec lequel on frotte le bâton de verre lui arrache des électrons. Donc le tissu est chargé négativement et le bâton est chargé positivement.**
- **Par un phénomène de polarisation (que nous n'étudierons pas ici) le bout de liège, neutre est attiré vers le bâton.**

- **Au moment du contact, le liège donne des électrons au verre pour rétablir partiellement son déficit de charges. Il n'en donne pas suffisamment pour établir la neutralité électrique du verre (cela lui coûterait trop cher).**
- **Les deux corps sont alors chargés positivement et se repoussent.**
- **Ensuite, la peau de chat avec laquelle on frotte le bâton d'ambre perd des électrons. L'ambre est alors chargé négativement.**
- **Elle attire le bout de liège qui lui est chargé positivement.**
- **Au contact, le petit bout de liège accepte les électrons surnuméraires de l'ambre qui compense largement son manque de charges. Il devient alors chargé négativement comme l'ambre (qui ne s'est pas intégralement déchargé).**
- **Les deux corps se repoussent alors.**

Une question de taille subsiste dans l'explication qualitative donnée au-dessus. Pourquoi est ce que :

- le bâton de verre frotté par la soie est chargé positivement ?

- le bâton d'ambre frotté par la peau de chat est chargé négativement ?

Une réponse rigoureuse a cette question nécessite d'étudier les structures moléculaires de la matière en contact et leur interaction au niveau quantique. Cette description ne sera pas abordée non plus dans ce cours d'introduction à l'électrostatique. Cependant, cet effet de charge d'un matériau (et de décharge de l'autre), appelé **effet triboélectrique** peut être étudié qualitativement à l'aide de la table triboélectrique donnée ci-dessous.

Liste triboélectrique					
1	Peau humaine	10	Soie	19	Or - Platine
2	Cuir	11	Aluminium	20	Polyester
3	Peau de lapin	12	Papier	21	Styrène
4	Verre	13	Coton	22	Polyuréthane
5	Cheveux humain	14	Bois	23	Polyéthylène
6	Nylon	15	Ambre	24	PVC
7	Laine	16	Caoutchouc	25	Silicone
8	Plomb (!)	17	Nickel - Cuivre	26	Téflon
9	Peau de chat	18	Argent - Laiton		

Cette table empirique s'utilise de la façon suivante. Quand deux éléments sont frottés l'un contre l'autre, celui qui est le plus bas dans la liste arrache des électrons à celui qui est le plus haut. Ainsi le verre (n° 4) donne des électrons à la soie (n° 10) et se charge donc positivement, tandis que l'ambre (n° 15) arrache des électrons à la peau de chat (n° 9) et se charge négativement.

### 3. Distribution de charges

Dès que la théorie a un fluide a été accepté, il a fallu comprendre les caractéristiques des isolants et des conducteurs dans le cadre de cette théorie.

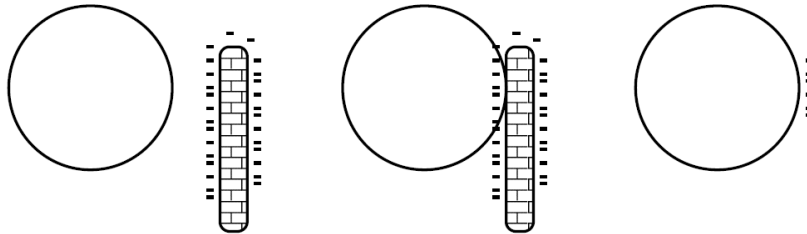
Rappelons que Gray a montré que l'électrisation peut être transmise d'un corps à un autre par l'intermédiaire d'un fil. Dans ce cas le matériau qui constitue le fil est classé dans les conducteurs. Si ce n'est pas le cas, il est isolant. Dans la théorie du fluide électrique de Franklin, cela revient à dire que les électrons peuvent passer du bâton électriser au bâton neutre s'ils sont



reliés par un fil conducteur. Au contraire, les électrons ne peuvent pas circuler dans un matériau isolant. Donc, on peut voir les propriétés microscopiques des isolants et des conducteurs comme expliqué ci-dessous.

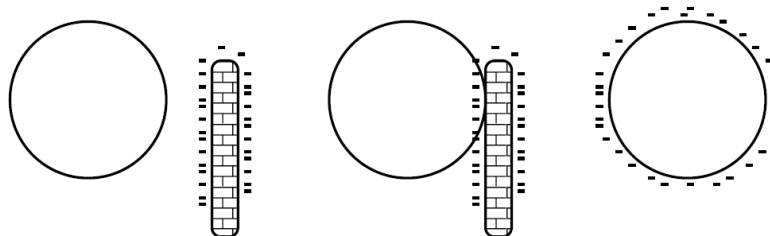
### 3.1. Les isolants

**La caractéristique des matériaux isolants est que les charges ne sont pas libres de s'y mouvoir.** Considérons une boule de matière isolante et électriquement neutre et mettons-la en contact avec un bâton électrisé portant des charges négatives. Dès que le bâton entre en contact avec la matière, les charges vont migrer pour se répartir sur la surface de contact et y rester (puisque'elles ne peuvent pas bouger dans un isolant). Elles sont localisées. Pour être plus précis, les temps caractéristiques des déplacements des charges dans le matériau isolant sont très longs devant les temps de mesures de grandeurs électrostatiques avec des appareils classiques. C'est pourquoi, on peut considérer que cette propriété est toujours vraie. Les charges sont donc localisées à l'endroit où elles ont été déposées.



### 3.2. Les conducteurs

**La caractéristique des matériaux conducteurs est que les charges sont libres de s'y mouvoir.** Considérons une boule de matière conductrice et électriquement neutre. Mettons-la en contact avec un bâton électrisé portant des électrons. Dès que le bâton entre en contact avec la matière, les charges vont migrer pour se répartir sur la surface de contact. Chaque électron ressent une force électrostatique de répulsion due à la présence de toutes les autres charges. Ici le phénomène est différent de ce que nous avons décrit pour la matière isolante. Comme les charges sont libres de bouger dans le matériau, elles vont donc se répartir en surface afin de minimiser les contraintes mécaniques de répulsion (dus aux forces). A ce moment le conducteur est à l'équilibre. Le temps caractéristique pour accéder à l'équilibre est très petit (il dépend de la taille du matériau). Il est de l'ordre quelque picosecondes ( $10^{-12}$  s). On peut donc considérer la propriété suivante comme toujours vraie : dans un conducteur les charges sont distribuées en surfaces.



Toutefois, il ne faut pas croire pour autant que dans un conducteur à l'équilibre, les charges électrostatiques sont statiques. En effet, les électrons sont soumis à l'agitation thermique. Quand un électron libre de bouger rencontre le nuage électronique d'un atome du matériau, il est dévié. Si le matériau est solide ces collisions se produisent environ  $10^{18}$  fois par secondes.



Cependant, si on moyenne ces trajectoires après un grand nombre de collisions alors les vitesses des électrons peuvent être décrites par une moyenne temporelle nulle. Si on considère une moyenne sur 1000 trajectoires, la distribution des charges dans un conducteur est considérée comme statique sur des temps caractéristiques plus long que  $10^{-15}$  secondes.

## 4. Les distributions discrète et continue

### 4.1. Distribution discrète

Nous savons maintenant grossièrement comment se répartissent les charges dans un isolant ou dans un conducteur. Mais pour résoudre un problème, il faut savoir comment représenter la distribution des charges dans le matériau.

A l'échelle microscopique, la structure de la matière apparaît discontinue. En effet, un atome a un rayon de l'ordre de quelques Angströms ( $10^{-10}$  m). Un nucléon (proton ou neutron) a une extension spatiale de l'ordre du femtomètre ( $10^{-15}$  m). L'extension spatiale d'un électron est supposée être nulle. Les lois de l'électrostatique sont valables tant que les distances auxquelles on regarde les phénomènes sont grandes devant la taille des objets chargés qu'on regarde.

Donc on peut assimiler les charges élémentaires d'un système aux points matériels chargés tout restant dans le domaine de validité de l'électrostatique. Nous pouvons alors définir une distribution  $\Omega$  comme étant, un ensemble de  $N$  charges  $q_i$  localisées (c.à.d. dont la position est fixée) en  $\sim r_i$  dans l'espace :  $\Omega = \{q_i, \sim r_i\}_{i=1}^N$ . D'une façon générale, si on étudie une distribution de charges en plaçant le point d'observation à une distance du même ordre de grandeur que l'extension spatiale des charges ou que la distance entre deux charges, il faut considérer la distribution de charges comme étant discrète et donc connaître la position de chaque charge.

### 4.2. Distribution continue

En revanche, lorsqu'on traite un problème macroscopique, on peut rarement donner la position de chacune des charges électrostatiques concernées. Par exemple, mettons en contact une boule ou un disque ou un fil métallique non chargé avec un bâton électrisé négativement. Une quantité d'électrons gigantesque (de l'ordre du nombre d'Avogadro) peut être transférée du bâton à la boule ou au fil. Nous savons que ces charges se répartissent sur la surface du métal mais il est impossible de connaître les positions de chaque particules car le calcul de la répartition d'un grand nombre de charges sur la surface est un problème très compliqué et que, de plus, ces charges sont mobiles sur cette surface.

D'autre part, on ne pourrait calculer le champ électrostatique que si on connaissait une relation simple entre les positions des charges de sorte à pouvoir écrire le champ comme une somme de termes d'une suite mathématique et, là encore, rien ne dit qu'on pourrait effectuer cette somme simplement.

En fait, on peut facilement contourner cet inconvénient en faisant un calcul de moyenne basé sur la notion de distribution en remarquant que dans ce genre de problème, on ne cherche pas à connaître la physique du système dans l'environnement proche des charges. Ici, les dimensions caractéristiques du problème sont grandes devant les distances entre charges.

### 4.3. Densité linéique

Si nous considérons un fil métallique très long, de longueur  $L$ , extrêmement fin et que son diamètre tend vers 0. Nous transférons  $N_e$  électrons sur ce fil. Il porte donc une charge  $Q = -N_e|e|$  répartie uniformément sur la longueur du fil (parce qu'il est conducteur). Cela signifie que n'importe quel petit élément du fil de longueur  $dl$ , où qu'il soit sur le fil, porte la même quantité de charges notée  $\delta q$ . On ne sait pas et on ne cherche pas à savoir comment sont réparties les charges dans la petite longueur  $dl$ . Il suffit simplement de savoir que  $dl$  est suffisamment grand pour ne pas y voir de fluctuations de la quantité de charges et suffisamment petit pour pouvoir appliquer un traitement intégral au problème. On voit donc aisément qu'on a  $\delta q = Q \, dl/L$ .

On définit alors la **distribution linéique de charges** :  $\lambda = \delta q/dl$  (en C/m)

Si  $dl$  est suffisamment petit, cette quantité ne dépend pas de  $dl$ . En effet si  $dl$  est multiplié par 2,  $\delta q$  l'est aussi. Cette fonction  $\lambda$  donne le profil de la répartition de charge le long du fil. Ici la répartition est uniforme donc  $\lambda$  est constante et vaut  $\lambda = Q/L$ .

### 4.4. Densité surfacique

De la même façon, si on dépose une quantité de charges  $Q$  sur une surface  $S$ . Ce qui signifie en pratique que les charges sont déposées sur une épaisseur  $h$  très faible à l'échelle macroscopique. On peut définir la **densité surfacique** comme :  $\sigma = \delta q/dS$  (en C/m<sup>2</sup>)

où  $dS$  est un élément de surface élémentaire.

### 4.5. Densité volumique

Finalement si les charges peuvent se répartir en volume dans un matériau, on définit la **densité de charge volumique** par :  $\rho = \delta q/dV$  (en C/m<sup>3</sup>)

où  $dV$  est un élément de volume élémentaire.

Si la répartition des charges, en longueur, en surface ou en volume n'est pas uniforme, les quantités  $\lambda$ ,  $\sigma$  et  $\rho$  ne sont plus constantes. Elles dépendent de l'endroit où on regarde les charges.

**EXEMPLE 1 :** Une charge  $Q=10^{-9}$  C est uniformément distribuée sur les trois structures suivantes : a) un fil fin, b) un fil conducteur de rayon 10 mm et c) un cylindre isolant de rayon 10 mm. Calculer la densité de charge dans chaque cas par unité de longueur (1 m).

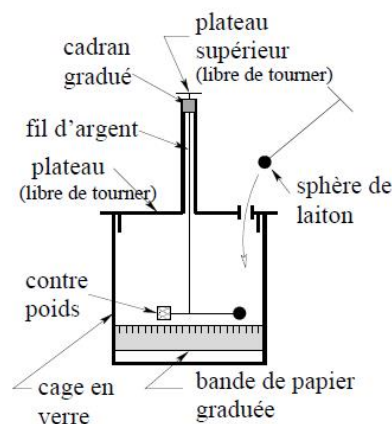
**EXEMPLE 2 :** Quelle est la distribution linéique de charges portée par un fil métallique de 1cm, sur lequel  $10^{20}$  électrons ont été transférés.

**EXEMPLE 3 :** Une charge est non-uniformément distribuée dans le volume d'une sphère. La fonction de distribution est donnée par :  $\rho_V = \rho_0 r$  (en C/m<sup>3</sup>) avec  $\rho_0 = 10^{-7}$  et  $r$  est la distance à partir du centre de la sphère. Calculer la charge totale portée par une sphère de rayon 10 m.

## 5. La force de Coulomb

En 1785, Charles Augustin de Coulomb lit son mémoire intitulé, *Construction et usage d'une balance électrique fondée sur la propriété qu'ont les fils de métal d'avoir une force proportionnelle à l'angle de torsion*, devant les membres de l'Académie des Sciences. L'usage

que Coulomb fait de sa balance se lit dans le sous-titre : Détermination expérimentale de la loi suivant laquelle les éléments des corps électrisés du même genre d'électricité se repoussent mutuellement. La *balance de Coulomb* est composée d'une cage de verre fermée par un couvercle circulaire en verre qui est donc libre de tourner. Ce couvercle est percé d'un trou excentré par lequel on pourra introduire une sphère de laiton électrisée. De plus, il est surmonté d'une colonne en verre solidaire. Cette colonne est fermée en haut par un petit plateau supérieur qui lui aussi peut tourner. Un petit index porté par le plateau et un cadran porté par le haut de la colonne permet d'avoir un point de repère de l'orientation du plateau. Un fil d'argent très fin est accroché sous le plateau supérieur de sorte à ce qu'une rotation du plateau entraîne le fil. Finalement, une aiguille est attachée à l'extrémité basse de ce fil avec un contre poids et une boule de sureau. La mesure consistait à compenser l'action exercée par une charge  $Q$ , placée à l'extrémité d'une tige verticale, sur la charge  $q$ , placée à l'extrémité d'une tige horizontale.



Les résultats expérimentaux dont il disposait étaient les suivants. La force électrostatique

- décroît en  $1/r^2$
- est proportionnelle à  $Q$  et à  $q$
- attractive si  $Qq < 0$  et répulsive si  $Qq > 0$

On a alors la force exercée par une charge  $Q$  sur une charge  $q$  :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r$$

avec  $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire dirigé de  $Q$  vers  $q$  et  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ .

La valeur de  $\epsilon_0$  est de  $1/(36\pi 10^9) = 8.85 \cdot 10^{-12}$  F/m ; 1 F (Farade) = 1 C<sup>2</sup>/Nm.

La formule de la force électrostatique peut être vue comme un principe indémontrable qui résulte de l'observation. Il est à la base de l'électrostatique. Toutes les autres grandeurs que nous utiliserons par la suite ne sont que des définitions qui reposent toujours sur cette pierre fondamentale de la physique.

Autre expression : soit deux charges  $q_1$  et  $q_2$  situées en de points  $M_1$  et  $M_2$  de l'espace. La force de Coulomb est alors :  $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M_1 M_2}}{||\vec{M_1 M_2}||^3}$

Si  $\vec{OM_1} = \vec{r_1}$  et  $\vec{OM_2} = \vec{r_2}$ , alors  $\vec{M_1 M_2} = \vec{M_1 O} + \vec{OM_2} = -\vec{OM_1} + \vec{OM_2} = -\vec{r_1} + \vec{r_2}$ , donc

$$\overrightarrow{F_{q_1 \rightarrow q_2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{||\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}||^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}]}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}$$

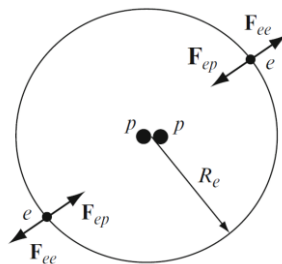
Remarquons que la force électrostatique est analogue à la force gravitationnelle entre deux masses  $m_1$  et  $m_2$  situés à deux points  $\overrightarrow{r_1}$  et  $\overrightarrow{r_2}$  :

$$\overrightarrow{F_{m_1 \rightarrow m_2}} = -Gm_1 m_2 \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{||\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}||^3}$$

Cette analogie entre les deux forces est à l'origine de la similitude entre le système solaire et l'atome. Notons toutefois deux différences importantes : la masse est toujours positive alors que la charge bien positive que négative, et deux masses s'attirent alors que deux charges de même signe se repoussent. En outre, la force électrique est une force beaucoup plus forte que la force gravitationnelle.

**EXEMPLE 4 : Deux charges  $Q_1$  et  $Q_2$  sont localisées en  $P_1(1,1,0)$  et  $P_2(3,2,0)$ . Déterminer la force sur  $Q_1$  et sur  $Q_2$  si  $Q_1 = 2 \times 10^{-9}$  C et  $Q_2 = 4 \times 10^{-9}$  C. Que ce qu'il passe si maintenant  $Q_2 = -4 \times 10^{-9}$  C**

**EXEMPLE 5 : Considérons le modèle suivant d'un atome d'hélium : l'atome a deux électrons et deux protons ; supposons que les électrons sont stationnaire (ils ne sont pas en réalité !) comme ils sont présentés sur la figure ci-dessous et les protons se trouvent en un point. On donne  $m_e = 9,107 \times 10^{-31}$  kg ; la distance électron-protons est  $0.5 \text{ \AA}$  ; charge de l'électron  $e = -1,6 \times 10^{-19}$  C.**



- Calculer la force entre les deux électrons et la force entre chaque électron et les protons.
- En négligeant toutes les autres forces, quelle est la vitesse angulaire de l'électron pour qu'il conserve la distance avec les protons, en considérant que les électrons ont toujours la même position relative ?

## 6. Invariances

### 6.1. Invariances par translation

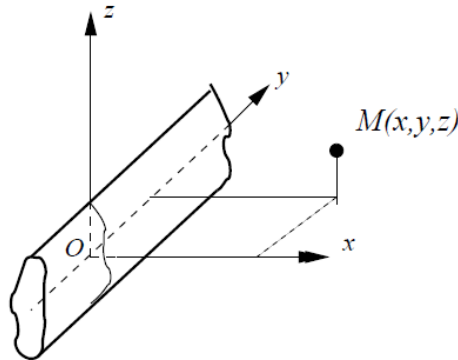
Une distribution est invariante par translation selon un axe si la densité de charge est la même en un point C et en n'importe quel point C' résultant d'une translation de C parallèlement à l'axe.

La densité de charges d'une distribution invariante par translation selon

- Ox est telle que  $\rho(x, y, z) = \rho(y, z)$

- Oy est telle que  $\rho(x, y, z) = \rho(x, z)$

- Oz est telle que  $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$



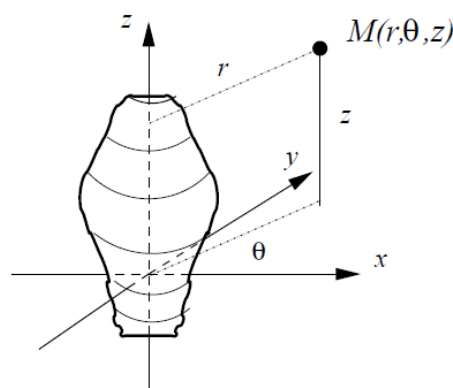
Sur la figure ci-dessus la densité de charges est indépendante par translation selon Oy. On place maintenant une charge objet  $q'$  en un point  $M(x, y, z)$  de l'espace et on cherche à déterminer la forme mathématique de la force que la distribution exerce sur cette charge. On peut tout à fait traduire la distribution de charges source selon son axe d'invariance (ici Oy) et le problème reste identique. Ce qui veut dire que traduire aussi le point M selon Oy d'une quantité opposée à celle dont on a traduit la distribution et garder la forme de force identique. Ce qui conduit dans le cas au-dessus à  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, z)$ . Cette propriété est générale :

**La force électrostatique exercée sur une charge objet par une distribution invariante par translation selon certains axes ne dépend pas des variables associées à ces axes.**

## 6.2. Invariances par rotation

Une distribution est invariante par rotation autour d'un axe si la densité de charge est la même en un point C et en n'importe quel point C' résultant d'une rotation autour de l'axe.

La densité de charges d'une distribution invariante par rotation autour de l'axe Oz est telle que  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$



Sur la figure ci-dessus la densité de charges est indépendante par rotation autour de l'axe Oz. Dans ce genre de problème, on a tout intérêt à utiliser des coordonnées cylindriques. On place maintenant une charge objet  $q'$  en un point  $M(r, \theta, z)$  de l'espace et on cherche à déterminer la forme mathématique de la force que la distribution exerce sur cette charge. On peut tout à fait appliquer une rotation d'une valeur quelconque  $\Delta\theta$  à la distribution de charges objet sans

modifier le problème. La force qui s'exerce sur la charge objet est la même. Ceci est équivalent à appliquer une rotation d'un angle  $-\Delta\theta$  à la charge située au point M qui devient M'(r,  $\theta-\Delta\theta$ , z). Donc le module de la force que ressent une charge électrostatique en M est la même que celui que ressent une charge électrostatique en M' (mais bien entendu son orientation est différente).

**La force électrostatique exercée sur une charge objet par une distribution invariante par rotation autour de certains axes ne dépend pas des variables associées à ces rotations.**

## 7. Symétries

### 7.1. Principe de Curie

Pierre Curie a publié en 1894 un mémoire intitulé « Sur la symétrie dans les phénomènes physiques » dans lequel il énonce les deux propositions suivantes :

- « **Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.** »
- « **Lorsque certains effets révèlent une cause de dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.** » (Proposition inverse de la précédente)

Il faut entendre par cause le système étudié, et par effet la grandeur physique mesurée.

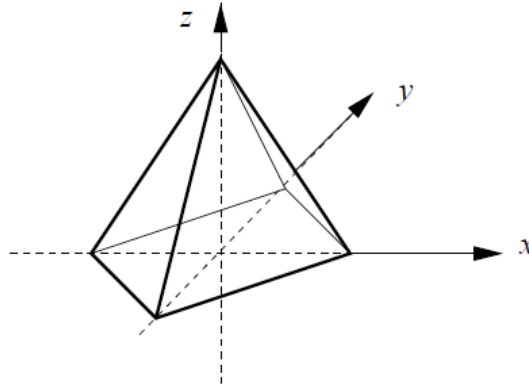
On verra par la suite que ce principe est très utile pour simplifier les formes mathématiques des solutions attendues pour certains problèmes en électrostatique.

### 7.2. Symétrie plane

Considérons une distribution de charges, notée  $\Omega$ , et un plan  $\Pi$  de l'espace. Le plan  $\Pi$  est plan de symétrie de la distribution de charge si tous les points de l'espace vérifient la propriété suivante : le plan  $\Pi$  est plan de symétrie de la distribution  $\Omega$  si à tout point C de la distribution ayant pour projection H sur le plan  $\Pi$  on peut associer le point C' donné par  $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CH}$  tel que  $\rho(C) = \rho(C')$ .

En règle générale, lorsqu'on remarque un plan de symétrie (ou plusieurs) dans une distribution, il est judicieux de placer l'origine du repère sur ce plan ainsi que deux axes du repère qu'on utilisera. La figure ci-dessous représente une pyramide à base carrée supposée chargée de façon uniforme en volume. Le repère cartésien est placé de sorte à ce que le plan yOz soit le plan de symétrie du problème. On a alors :

$$\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \quad \forall (x, y, z)$$



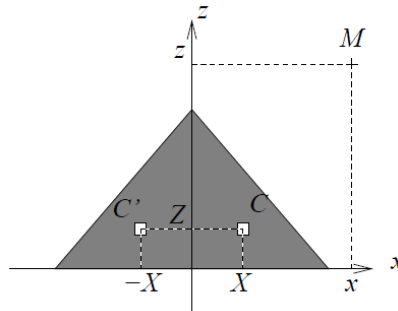
### 7.3. Antisymétrie plane

Considérons une nouvelle distribution de charges telle que pour tous les points C de la distribution, le point C' tel que  $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CH}$  porte une distribution de charges opposées alors le plan  $\Pi$  est plan d'antisymétrie. Ce qui se traduit par :

$$\rho(x, y, z) = -\rho(-x, y, z) \quad \forall (x, y, z)$$

### 7.4. La force et la symétrie plane (Exercice cours)

Considérons une charge  $Q$  située au point M(x, y, z). Pour calculer la force exercée sur  $Q$ , on découpe la distribution en élément infinitésimaux et on somme les contributions.



Considérons un élément de volume  $dV$  de la distribution autour du point C(X,Y,Z). Cet élément de volume porte une charge  $\delta q = \rho dV$ . Comme le plan  $\Pi = (yOz)$  est plan de symétrie, il existe toujours un point C' symétrique de C par rapport à  $\Pi$  (donc  $C' = (-X, Y, Z)$ ) tel que le volume infinitésimal  $dV$  autour de C' porte aussi la charge  $\delta q = \rho dV$ . De plus, on a donc :

$$\overrightarrow{CM} = (x - X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{C'M} = (x + X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k}$$

de plus notons :  $r = \|\overrightarrow{CM}\|$  et  $r' = \|\overrightarrow{C'M}\|$

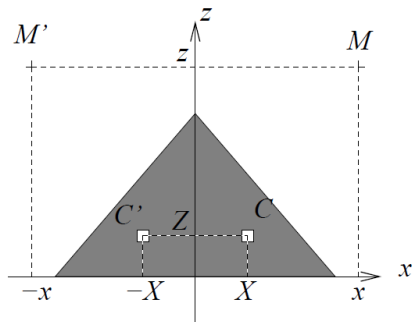
Ces deux éléments créent une force élémentaire sur la charge  $Q$  en M :

$$d\vec{F}(M) = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|^3} + \frac{\overrightarrow{C'M}}{\|\overrightarrow{C'M}\|^3} \right]$$



$$d\vec{F}(M) = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(x-X)}{r^3} \vec{i} + \frac{(y-Y)}{r^3} \vec{j} + \frac{(z-Z)}{r^3} \vec{k} + \frac{(x+X)}{r'^3} \vec{i} + \frac{(y-Y)}{r'^3} \vec{j} + \frac{(z-Z)}{r'^3} \vec{k} \right]$$

$$d\vec{F}(M) = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ x \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} - X \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} + (y-Y) \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{j} + (z-Z) \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{k} \right]$$



Considérons maintenant une charge  $q' = Q$  située au point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $\Pi$ . Ici, les coordonnées de  $M'$  sont donc  $(-x, y, z)$ . On a maintenant :

$$\overrightarrow{CM'} = -(x+X)\vec{i} + (y-Y)\vec{j} + (z-Z)\vec{k} = \text{sym}_{yOz} \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{C'M} = -(x-X)\vec{i} + (y-Y)\vec{j} + (z-Z)\vec{k} = \text{sym}_{yOz} \overrightarrow{CM}$$

de plus on a :  $r = \|\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{C'M}\|$  et  $r' = \|\overrightarrow{C'M}\| = \|\overrightarrow{CM'}\|$

Les deux éléments de volume créent une force élémentaire sur la charge  $Q$  en  $M'$

$$d\vec{F}(M') = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\overrightarrow{CM'}}{\|\overrightarrow{CM'}\|^3} + \frac{\overrightarrow{C'M}}{\|\overrightarrow{C'M}\|^3} \right]$$

$$d\vec{F}(M') = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-(x+X)}{r'^3} \vec{i} + \frac{(y-Y)}{r'^3} \vec{j} + \frac{(z-Z)}{r'^3} \vec{k} + \frac{-(x-X)}{r^3} \vec{i} + \frac{(y-Y)}{r^3} \vec{j} + \frac{(z-Z)}{r^3} \vec{k} \right]$$

$$d\vec{F}(M') = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -x \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} + X \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} + (y-Y) \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{j} + (z-Z) \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{k} \right]$$

Nous pouvons comparer les composantes selon  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  de  $d\vec{F}(M)$  et  $d\vec{F}(M')$  et nous obtenons :

$$\begin{cases} d\vec{F}_x(M) = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ x \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) - X \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \right] \vec{i} \\ d\vec{F}_x(M') = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -x \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) + X \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \right] \vec{i} \end{cases} \text{ soit } d\vec{F}_x(M) = -d\vec{F}_x(M')$$

$$\text{De même } d\vec{F}_{y,z}(M) = d\vec{F}_{y,z}(M')$$

$$\text{Ce qu'on peut écrire } d\vec{F}(M) = \text{sym}_{yOz} d\vec{F}(M')$$

Cet élément différentiel de force est symétrique par rapport au plan  $\Pi$  à celui trouvé plus haut. Si on somme sur toute la distribution, on somme des éléments donnant des forces symétriques en  $M$  et en  $M'$ . Donc, on a la propriété suivante :

**Les forces électrostatiques exercées sur deux charges localisées en des positions symétriques par rapport à un plan de symétrie de la distribution sont symétriques.**

Le corolaire de cette propriété est :

**Si une charge  $q'$  est sur le plan de symétrie d'une distribution, alors la force qui s'exerce sur  $q'$  est dans le plan de symétrie.**

### 7.5. La force et l'antisymétrie plane (Exercice cours)

Si nous reprenons la démonstration ci-dessus avec les mêmes notations, nous avons :

$$d\vec{F}(M) = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{CM}}{||\vec{CM}||^3} - \frac{\vec{C'M}}{||\vec{C'M}||^3} \right]$$

$$d\vec{F}(M) = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(x-X)}{r^3} \vec{i} + \frac{(y-Y)}{r^3} \vec{j} + \frac{(z-Z)}{r^3} \vec{k} - \frac{(x+X)}{r'^3} \vec{i} - \frac{(y-Y)}{r'^3} \vec{j} - \frac{(z-Z)}{r'^3} \vec{k} \right]$$

$$d\vec{F}(M) = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ x \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} - X \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} + (y-Y) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{j} + (z-Z) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{k} \right]$$

et pour l'élément différentiel de force en  $M'$  :

$$d\vec{F}(M') = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{CM'}}{||\vec{CM'}||^3} - \frac{\vec{C'M'}}{||\vec{C'M'}||^3} \right]$$

$$d\vec{F}(M') = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-(x+X)}{r'^3} \vec{i} + \frac{(y-Y)}{r'^3} \vec{j} + \frac{(z-Z)}{r'^3} \vec{k} - \frac{-(x-X)}{r^3} \vec{i} - \frac{(y-Y)}{r^3} \vec{j} - \frac{(z-Z)}{r^3} \vec{k} \right]$$

$$d\vec{F}(M') = \frac{Q\delta q}{4\pi\epsilon_0} \left[ x \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} - X \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right) \vec{i} - (y-Y) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{j} - (z-Z) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \vec{k} \right]$$

Nous voyons donc que :

$$d\vec{F}_x(M) = d\vec{F}_x(M')$$

$$d\vec{F}_y(M) = -d\vec{F}_y(M')$$

$$d\vec{F}_z(M) = -d\vec{F}_z(M')$$

Donc sur le plan de symétrie ( $X = 0$ ), nous avons  $d\vec{F}(M) = -d\vec{F}(M')$ . Ce qui conduit à la propriété suivante :

**Si une charge  $q'$  objet est sur le plan d'antisymétrie d'une distribution, alors la force qui s'exerce sur  $q'$  est perpendiculaire au plan d'antisymétrie.**