

Politechnika Warszawska

Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka

RAPORT

Wykonał:

Dominik Giżyński

Warszawa, 26.05.2016r.

1. Temat projektu – WDWR 16207

Celem projektu było rozważenie zagadnienia planowania produkcji, gdzie realizacja umowy wymagała dostawy 1100 sztuk komponentu A oraz 1200 sztuk komponentu B po upływie okresu 3 miesięcy.

Koszty produkcji komponentów (zł/szt.) określają składowe wektora losowego $R = (R_1, \dots, R_6)^T$

Koszt składowania komponentów z miesiąca na miesiąc jest stały i wynosi 2500 zł, o ile liczba składowanych komponentów nie przekroczy 300. Po przekroczeniu tej liczby koszt składowania komponentów wynosi 15 % miesięcznych kosztów wytwarzania. W celu wytworzenia komponentów firma potrzebuje zasobów pozyskiwanych z zewnątrz z ograniczoną możliwością dostaw w miesiącu.

2. Model kosztu realizacji umowy i ryzyka

2.1. Parametry i zmienne

2.1.1. Parametry zewnętrzne

Months	miesiące, $Months \in \{1,2,3\}$
Components	komponenty, $Components \in \{A, B\}$
Resources	zasoby produkcyjne, $Resources \in \{Z1, Z2\}$
CostProd _{Scenarios, Components, Months}	składowe wektora losowego, prezentujące koszt produkcji komponentu (zł/szt.) w danym miesiącu
Request _{Resources, Components}	zapotrzebowanie na sztukę danego komponentu wybranego zasobu produkcyjnego
Supply _{Resources, Months}	maksymalne, możliwe dostawy zasobu produkcyjnego w danym miesiącu
N	N – liczba rozpatrywanych scenariuszy (N = 100)

W treści zadania zadana jest wartość oczekiwana μ wektora losowego **R** (CostProd) oraz macierz kowariancji Σ niezawężonego rozkładu normalnego. Na potrzeby wyznaczenia ryzyka w modelu liniowym należało wygenerować scenariusze na podstawie powyższych parametrów rozkładu. Scenariusze (realizacje wektora losowego) wygenerowano przy użyciu funkcji *mvrnorm* z pakietu *MASS* w środowisku R-Studio. Następnie otrzymane składowe wygenerowanych wektorów zawężono do przedziału [20; 60]. Przyjęto, że prawdopodobieństwo każdego scenariusza jest jednakowe (1/N)

2.1.2. Zmienne decyzyjne

Production _{Components, Months}	Ilość wyprodukowanych komponentów wybranego typu w danym miesiącu
Use _{Resources, Components, Months}	Ilość wykorzystanego zasobu produkcyjnego do produkcji wybranego komponentu w danym miesiącu
Storage _{Months}	Ilość magazynowanego komponentu (A lub B) w danym miesiącu
StState _{Months}	Zmienna binarna, informująca o stanie magazynu w danym miesiącu (>300)

2.2. Ograniczenia

$$(1) \sum_{m=1}^{Months} Production_{A,m} = 1100$$

$$(2) \sum_{m=1}^{Months} Production_{B,m} = 1200$$

$$(3) Request_{r,c} * Production_{c,m} = Use_{r,c,m} ,$$

$$\forall r \in Resources, \forall c \in Components, \forall m \in Months$$

$$(4) Use_{r,A,m} + Use_{r,B,m} \leq Supply_{r,m}, \forall r \in Resources, \forall m \in Months$$

$$(5) Storage_m = \sum_{n=1}^m (Production_{A,n} + Production_{B,n}), \forall m \in Months$$

$$(6) Storage_m \leq 300 + M * StState_m, \forall m \in Months$$

$$(7) Storage_m \geq 300 * StState_m, \forall m \in Months$$

- (1) Ograniczenie na ilość wyprodukowanych komponentów A po okresie realizacji umowy
- (2) Ograniczenie na ilość wyprodukowanych komponentów B po okresie 3 miesięcy (realizacja umowy)
- (3) Warunek na produkcję danego komponentu z uwzględnieniem zapotrzebowania zasobów produkcyjnych do produkcji tego komponentu (w wybranym miesiącu)
- (4) Ilość wykorzystywanego danego zasobu produkcyjnego do produkcji komponentów w danym miesiącu nie może przekraczać możliwych dostaw tego zasobu
- (5) Stan magazynu jest sumą wyprodukowanych komponentów w miesiącu bieżącym i poprzednich
- (6) i (7) Ograniczenia, które ustawiają jednoznacznie wartość zmiennej binarnej zależnej od aktualnego stanu magazynu w danym miesiącu

2.3. Kryteria

2.3.1. Koszt realizacji umowy

W pierwszej kolejności modelowano fragment zadania związany z opisem problemu oraz wyliczeniem kosztu realizacji umowy. Na potrzeby zadania przyjęto, że miarą kosztu jest średnia. Kryterium zdefiniowano w następujący sposób:

$$AvgCost = \frac{1}{N} * \sum_{t=1}^N Cost_t \quad (1)$$

, gdzie $Cost_t$ oznacza realizację kosztu dla scenariusza t .

$$Cost_t = \sum_{m=1}^{Months} \left(\sum_{c=1}^{Components} (CostProd_{t,c,m} * Production_{c,m}) + (1 - StState_m) * 2500 + StState_m * 0.15 * \left(\sum_{c=1}^{Components} (CostProd_{t,c,m} * Production_{c,m}) \right) \right)$$

Optymalizacja jednokryterialna (minimalizacja) kosztu pozwoliła na wyznaczenie wartości utopii kosztu i nadiru ryzyka.

2.3.2. Minimalizacja ryzyka

Miarą ryzyka w danym zadaniu jest średnia różnica Giniego wyrażająca się wzorem:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} * \sum_{t'=1}^N \sum_{t''=1}^N |r_{t'}(x) - r_{t''}(x)| p_{t'} p_{t''} \quad (2)$$

, gdzie:

r_t - oznacza realizację dla scenariusza t (w naszym przypadku jest to realizacja kosztu dla scenariusza – $Cost_t$)

p_t – oznacza prawdopodobieństwo scenariusza (na początku rozważań przyjęto, że wszystkie scenariusze są jednakowo prawdopodobne

Kryterium ryzyka zdefiniowano zatem w następujący sposób:

$$Risk = \frac{1}{2} * \frac{1}{N^2} * \sum_{t'=1}^N \sum_{t''=1}^N |Cost_{t'} - Cost_{t''}| \quad (3)$$

2.4. Model preferencji

Celem zadania jest zaproponowanie dwukryterialnego modelu kosztu realizacji umowy i ryzyka, a następnie wyznaczenie obrazu zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko – koszt. Jest to zadanie optymalizacji wielokryterialnej, zatem istotne jest przyjęcie odpowiedniej skalaryzacji. Metoda ważenia ocen nie jest najlepszym rozwiązaniem, ponieważ może nie pozwolić na wyszukanie wszystkich możliwych punktów rozwiązań w przypadku zbiorów niewypukłych. Zdecydowano się więc wykorzystać metodę punktu odniesienia.

2.4.1. Metoda punktu odniesienia

Metoda ta została zlinearyzowana z uwzględnieniem minimalizacji indywidualnych funkcji celu. Ogólna metoda punktu odniesienia zakłada maksymalizację funkcji skalaryzującej:

$$s(y) = \min(s_i(y_i, a_i)) + \varepsilon \sum s_i(y_i, a_i) \quad (4)$$

, gdzie:

a – wektor aspiracji

s_i – indywidualna funkcja osiągnięcia i

$$s_i(y_i) = \begin{cases} \beta \lambda_i (y_i - a_i) & \text{dla } y_i \geq a_i \\ \lambda_i (y_i - a_i) & \text{dla } y_i < a_i \end{cases} \quad (5)$$

ε – parametr regularyzacji

λ_i – mnożnik skalujący

β – czynnik, o który pomniejszane są nadmiary wartości ocen ponad poziom aspiracji

Parametr ε określany jest jako $\varepsilon = \rho / \text{liczbaKryteriow}$, gdzie $\rho = 10^{-4}$. Dodatkowo w zadaniu czynnik β przyjęto jako równy 0,001

Natomiast wartość mnożnika skalującego przejmujemy się jako $\lambda_i = \frac{1}{y_i^U - y_i^N}$, gdzie y_i^U jest wartością utopii dla kryterium, a y_i^N jest wartością nadiru dla tego kryterium. Mnożnik ten jest wprowadzany w celu zapewnienia takiego samego wpływu każdej z funkcji osiągnięcia

Aby uwzględnić minimalizację (zamiast maksymalizacji) we wzorze (5) należy zmienić znaki parametrów a_i , y_i oraz λ_i , gdyż preferowane przez nas są wartości niższe.

$$s_i(y_i) = \begin{cases} \beta \lambda_i (a_i - y_i) & \text{dla } y_i \leq a_i \\ \lambda_i (a_i - y_i) & \text{dla } y_i > a_i \end{cases} \quad (6)$$

Człon $\min(s_i(y_i, a_i))$ ze wzoru (4) oznacza, że wartość musi być mniejsza lub równa wszystkim wartościom indywidualnych funkcji osiągnięcia:

$$\min(s_i(y_i, a_i)) : z \leq s_i(y_i, a_i) \quad (7)$$

Zatem $\begin{cases} \beta \lambda_i (a_i - y_i) \geq \lambda_i (a_i - y_i) & \text{dla } a_i - y_i \leq 0 \\ \beta \lambda_i (a_i - y_i) < \lambda_i (a_i - y_i) & \text{dla } a_i - y_i > 0 \end{cases}$ jest równoważne: $\min(\beta \lambda_i (a_i - y_i), \lambda_i (a_i - y_i))$

Możemy wprowadzić pomocniczą zmienną v_i , którą należy zastąpić f. osiągnięcia we wzorze (4) wraz z następującymi ograniczeniami:

$$v_i \leq \beta \lambda_i (a_i - y_i) \quad (8)$$

$$v_i \leq \lambda_i (a_i - y_i) \quad (9)$$

2.5. Zależność nieliniowa

W analizowanym modelu wystąpiła zależność liniowa ze zmienną dyskretną, która przekształcała zadanie w zadanie programowania nieliniowego.

$$z = \mathbf{StState}_m * 0,15 * \left(\sum_{c=1}^{\text{Components}} (\text{CostProd}_{t,c,m} * \text{Production}_{c,m}) \right)$$

W celu rozwiązywania zadania liniowego niezbędne było przekształcenie powyższej zależności i modelowanie jej za pomocą warunków liniowych:

$$0 \leq z \leq M * \text{zmienna}_{\text{binarna}} \quad (10)$$

$$z \leq \text{zmienna}_{\text{ciągła}} \quad (11)$$

$$\text{zmienna}_{\text{ciągła}} - z + M * \text{zmienna}_{\text{binarna}} \leq M \quad (12)$$

gdzie M – duża liczba całkowita (ograniczająca zmienną ciągłą)

3. Rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i minimalnego kosztu

Przy minimalizacji jednego z kryteriów wyznaczono rozwiązania minimalnego kosztu oraz oddzielnie minimalnego ryzyka:

KRYTERIUM	MINIMALIZACJA KOSZTU	MINIMALIZACJA RYZYKA
KOSZT	94 415,4	114 387
RYZYKO	4241,56	840,459

Powyższe wartości pozwoliły na wyznaczenie parametru λ dla metody punktu odniesienia

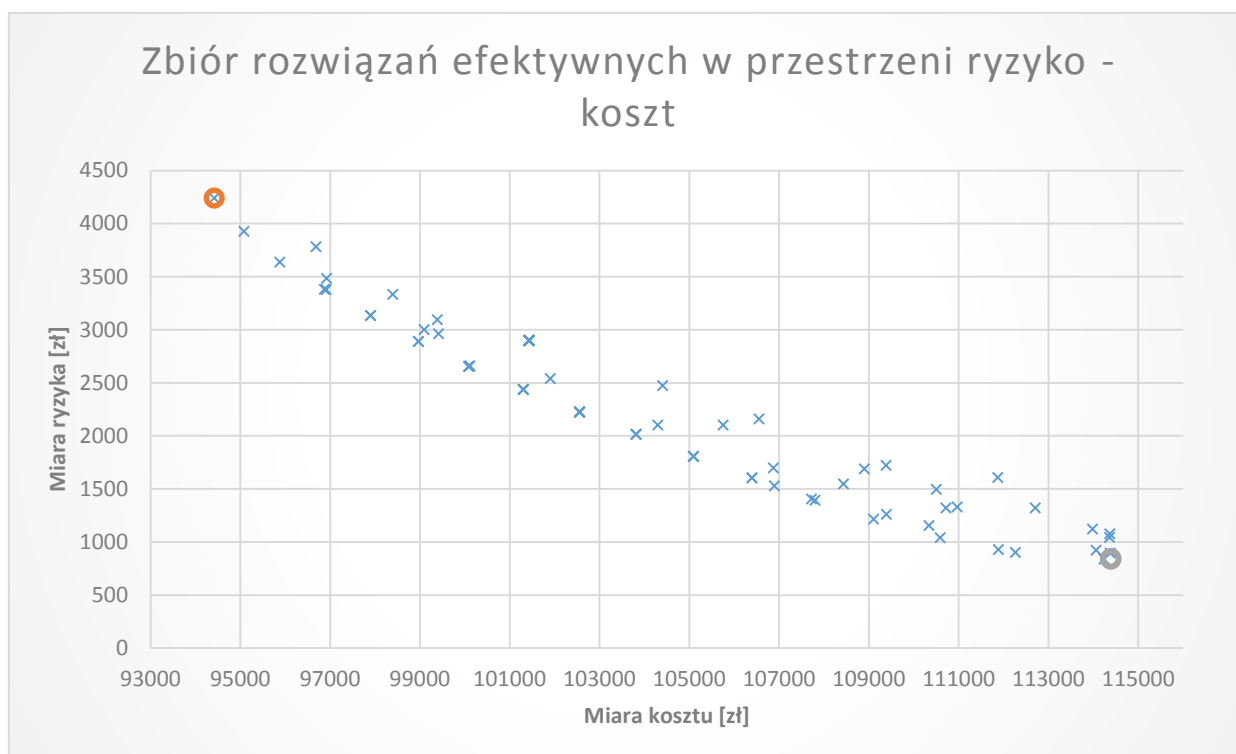
	UTOPIA	NADIR	LAMBDA
KOSZT	94 415,4	114 287	0,00005007
RYZYKO	840,459	4241,56	0,000294

Ze względu na ograniczone moce obliczeniowe komputera, wygenerowane jedynie 100 scenariuszy (wektorów losowych) i dla nich wyznaczono rozwiązania efektywne. Zastosowanie średniej różnicy Giniego jako miary ryzyka, gdzie dwa razy iterujemy po wszystkich scenariuszach nie pozwoliła nam na wygenerowanie większej liczby scenariuszy.

4. Obraz zbioru rozwiązań efektywnych

Rozwiązania efektywne wygenerowano poprzez krokowe zwiększanie wartości punktu aspiracji dla obu indywidualnych funkcji osiągnięcia. Zakres kosztu i ryzyka podzielono na 8 przedziałów, co pozwoliło na otrzymanie 81 rozwiązań efektywnych. Na potrzeby tej części zadania napisano specjalny skrypt.

Na poniższym wykresie zaprezentowano zbiór rozwiązań efektywnych oraz zaznaczono punkty utopii średniego kosztu i utopii ryzyka.



Rysunek 1 Zbiór rozwiązań w przestrzeni ryzyko – koszt

Można zauważyć, że zależność pomiędzy miarą kosztu, a miarą ryzyka jest zbliżona do funkcji liniowej.

5. Dominacja stochastyczna pierwszego rzędu

W celu sprawdzenia, czy zachodzi dominacja stochastyczna pierwszego rzędu wyznaczono odwrotną dystrybuantę:

$$\bar{F}_Y(v) = P \{Y \geq v\} = \frac{1}{m} * \bar{h}_v(y) \quad (13)$$

A zatem:

$$Y' \succcurlyeq_{IFSD} Y'' \Leftrightarrow \bar{F}_{Y'} \leq \bar{F}_{Y''} \quad (14)$$

Przy czym odwrotna dominacja stochastyczna jest równoznaczna z dominacją stochastyczną

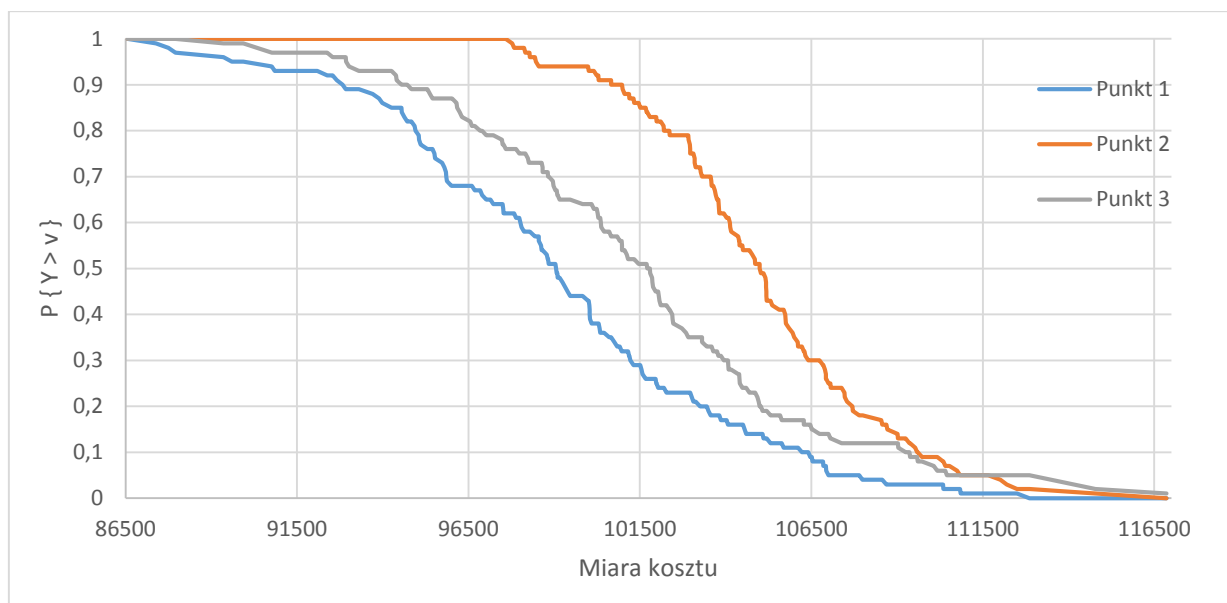
$$Y' \succcurlyeq_{IFSD} Y'' \Leftrightarrow -Y' \succcurlyeq_{FSD} -Y'' \quad (15)$$

Wybrane trzy rozwiązania efektywne zostały przedstawione w poniższej tabeli:

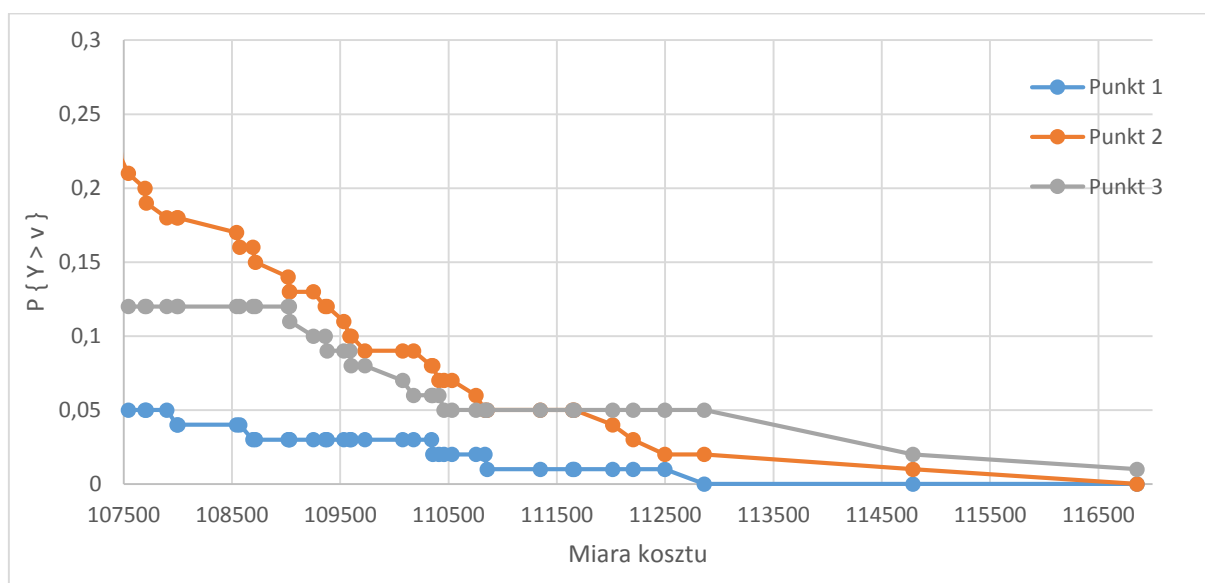
	ASPIRACJA KOSZT	ASPIRACJA RYZYKO	KOSZT	RYZYKO
PUNKT 1	99 000	3 200	98 995,8	2 944,12
PUNKT 2	106 000	2 100	105 029	1932,08
PUNKT 3	102 000	2 900	101 427	2 900,64

5.1. Koszt

Sprawdzenie dominacji stochastycznej pierwszego rzędu przy minimalizacji kosztu. Odwrotne dystrybuanty przecinają się na samym skraju wykresu.



Rysunek 2 Wykres odwrotnych dystrybant dla wybranych 3-ech rozwiązań efektywnych dla kosztu



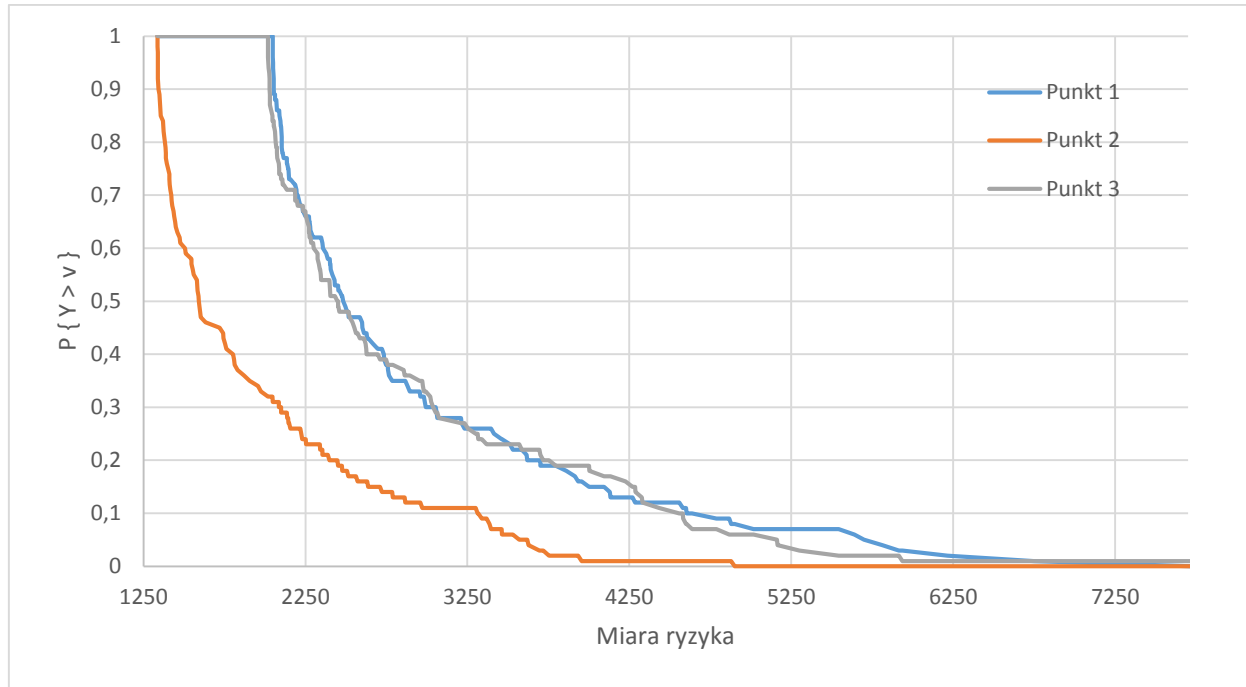
Rysunek 3 Wykres odwrotnych dystrybant dla kosztu (dla skrajnych wartości)

Na podstawie rysunku 3 można zauważyć, że nie zachodzi „ściśła” dominacja stochastyczna pierwszego rzędu przy minimalizacji kosztu. Rozwiązanie efektywne nr 3 nie dominuje rozwiązania dla punktu nr 2 w sensie IFSD. Jednak uproszczenie wymagań, co do dokładności rozpatrywanych przypadków może pozwolić na podjęcie decyzji o dominacji pewnych wektorów nad innymi. Warto również zauważyć, że wykresy dystrybant przecięły się dopiero w ostatniej fazie, dla skrajnych wartości.

5.2. Ryzyko

Ryzyko dla scenariusza t zostało wyznaczone jako:

$$RiskPerSc_t = \frac{1}{2} * \frac{1}{N} * \sum_{t'}^N |Cost_t - Cost_{t'}| \quad (16)$$



Rysunek 4 Wykres odwrotnych dystrybuant dla 3ech wybranych rozwiązań efektywnych przy minimalizacji ryzyka

Na rysunku 4 widać, że dla ryzyka rozwiązanie efektywne nr 2 dominuje pozostałe rozwiązania w sensie IFSD, natomiast odwrotne dystrybuanty dla punktów 1 i 3 przecinają na całej długości wykresu. Związane jest to z niewielką różnicą miary ryzyka dla tych punktów.

$$Risk_1 >_{IFSD} Risk_2$$

$$Risk_1 >_{IFSD} Risk_3$$

6. Wnioski

W trakcie analizy i testowania modelu zauważono, że ilość scenariuszy ma wpływ na rozwiązania zadania. Zwiększenie liczby scenariuszy sprawia, że obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko – koszt jest „bardziej zwarty” i pozwala na lepsze dopasowanie krzywą. Jednak należało wygenerować niezbyt wiele scenariuszy, ze względu na złożoność zadania i wpływ średniej różnicy Giniego na jej zwiększenie.

Ponadto zaobserwowano, że kształt obrazu zbioru rozwiązań jest także zależny od przyjętych parametrów skalaryzacji (parametr β)

Porównując wykresy dystrybuant przy minimalizacji kosztu i ryzyka wyraźnie widać „odwrotną kolejność dominacji” między modelem minimalizacji ryzyka, a modelem minimalizacji kosztu, co również możemy wywnioskować z obrazu rozwiązań w przestrzeni ryzyko – koszt.