Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

UNIDAD 9: NOCIONES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

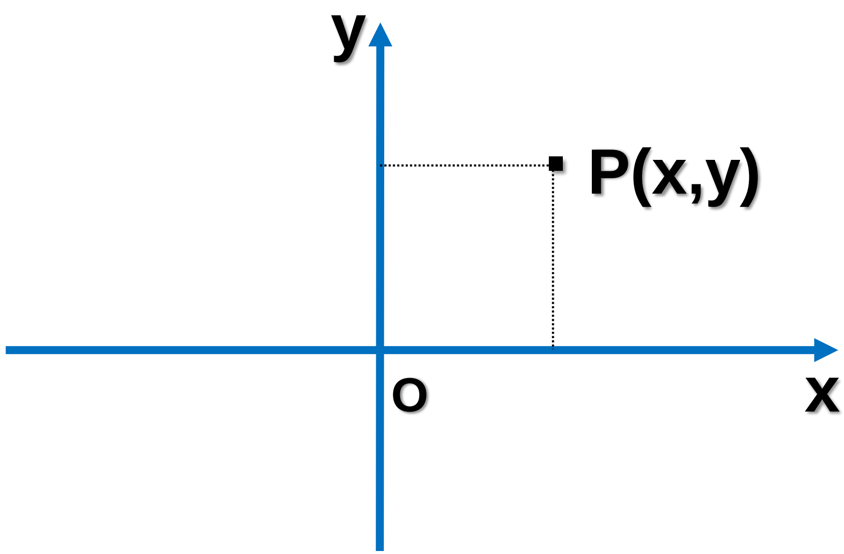
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONALES

Para fijar la posición de un punto en el plano se emplea entre otros, el sistema de coordenadas cartesianas, debido a René Descartes.

Se trazan en el plano dos ejes orientados perpendiculares x e y cuyos ceros coincidan en O (Origen del sistema).

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONALES

Las coordenadas del punto P, está dado por la abscisa x y la ordenada y.



ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Toda ecuación de la forma: $Ax + By + C = 0$

recibe el nombre de Ecuación general de la recta o Ecuación de la recta en su forma implícita.

Donde A, B y C son números constantes, es decir, independientes de x e y, tales que los dos primeros no sean nulos a la vez.

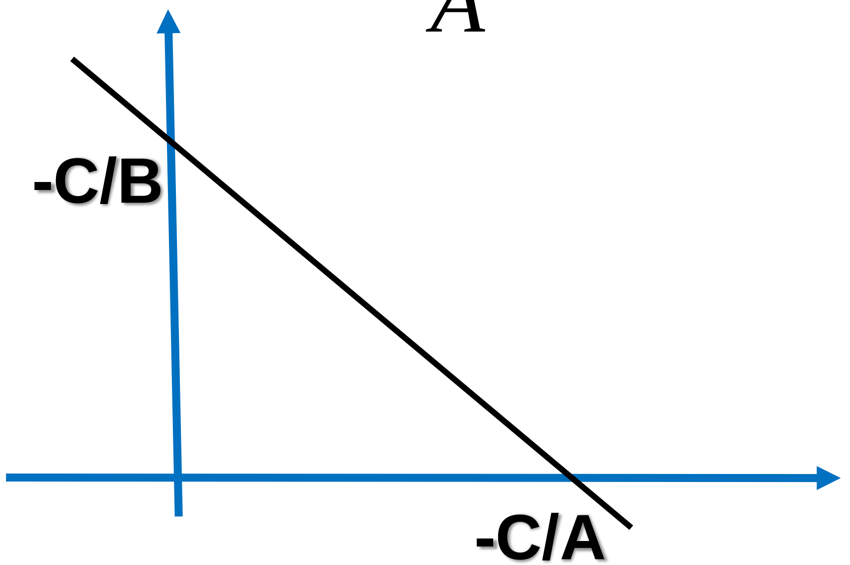
Su gráfica es una recta.

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$

$$Si\ x = 0 \Rightarrow By + C = 0 \Rightarrow y = \frac{-C}{B}$$

$$Si\ y = 0 \Rightarrow Ax + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-C}{A}$$



ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA

Partimos de la ecuación general de la recta:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

$Si\ despejamos\ y:$

$$y = \frac{-Ax - C}{B} \quad \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$Si\ llamamos \quad a = -\frac{A}{B}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Ecuación Explícita de la recta $\boxed{y = ax + b}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA

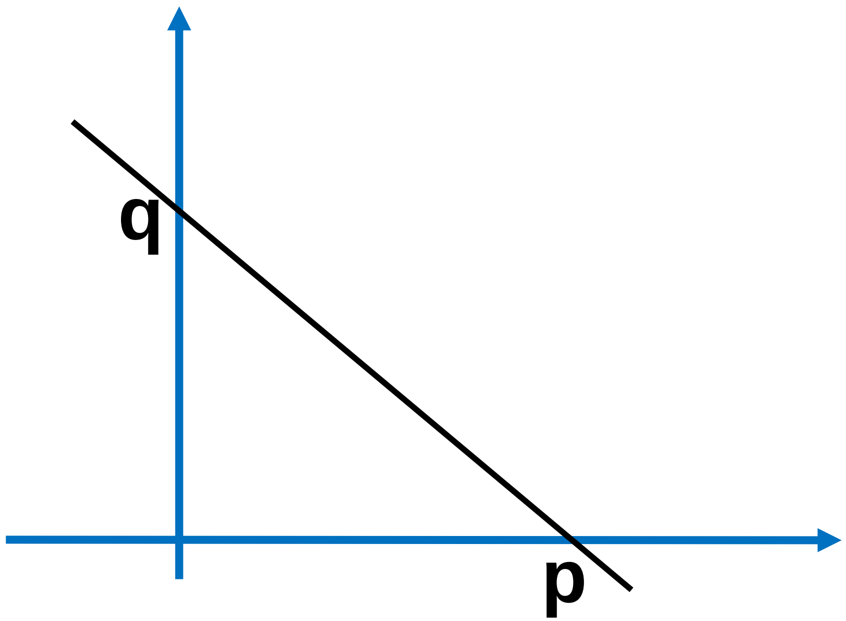
Ecuación Explícita de la recta $\boxed{y = ax + b}$

El valor a se llama pendiente de la recta y representa la tangente trigonométrica del ángulo positivo que determina la recta con el semieje positivo de las abscisas.

El valor b se llama ordenada al origen y es la ordenada del punto en que la recta intersecta al eje de las ordenadas.

ECUACIÓN SEGMENTARIA DE LA RECTA

Ecuación general de la recta: $\boxed{Ax + By + C = 0}$



$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = \frac{-C}{-C}$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

$$Si\ llamamos\ p = \frac{-C}{A}; \quad q = \frac{-C}{B}$$

Ecuación Segmentaria de la recta $\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$

Ejercicios:

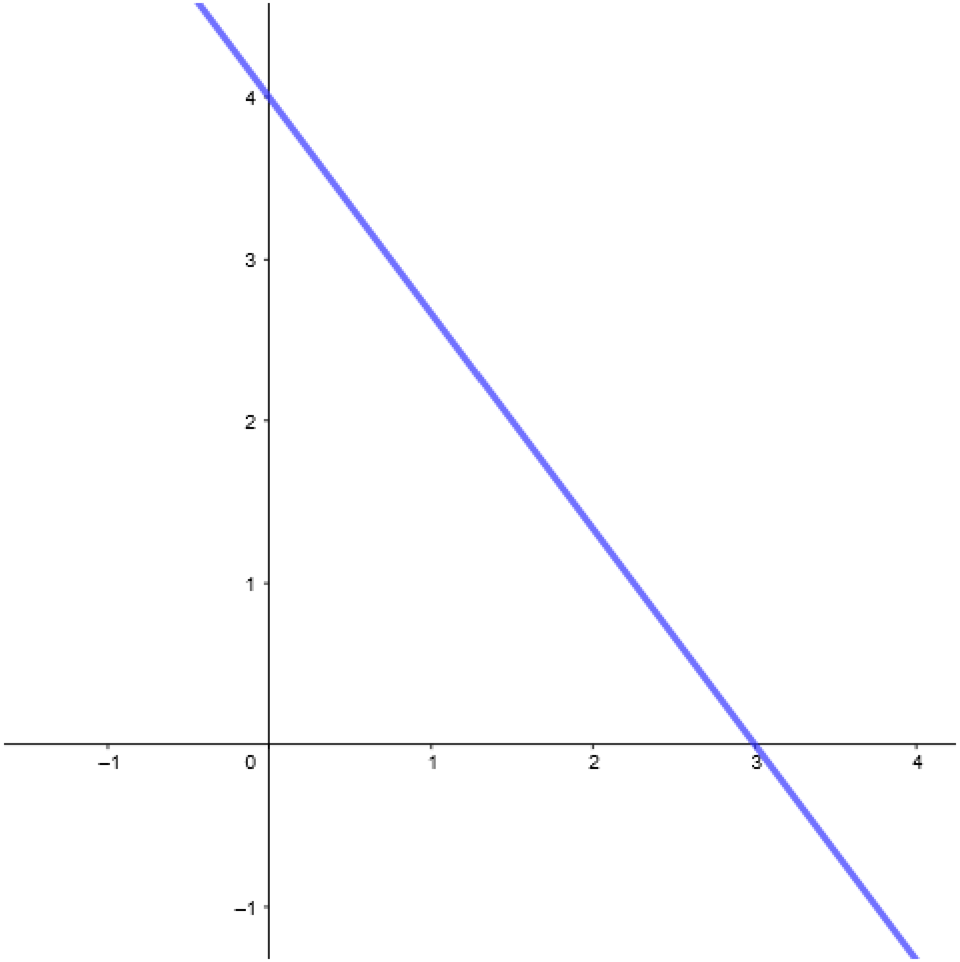
1) Dada la ecuación de la recta:

$$-2x + y - 4 = 0$$

a) Expresarla en su forma explícita y segmentaria.

b) Representar gráficamente

2) Hallar la ecuación de la siguiente recta en su forma implícita, explícita y segmentaria.

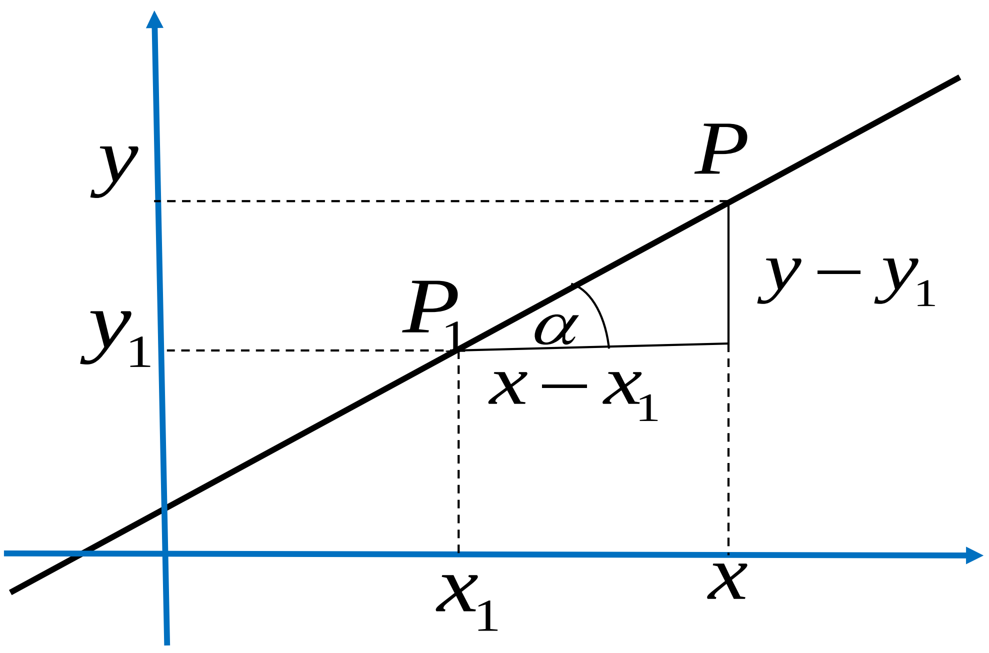


ECUACIÓN DE LA RECTA DETERMINADA POR UN PUNTO Y SU PENDIENTE

Si se conoce las coordenadas de un punto $P_1(x_1, y_1)$ que pertenece a una recta no paralela al eje y.

Además su pendiente es: $a = tg\alpha$

Consideramos un punto genérico $P(x, y)$, con $x \neq x_1$



$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)}$$

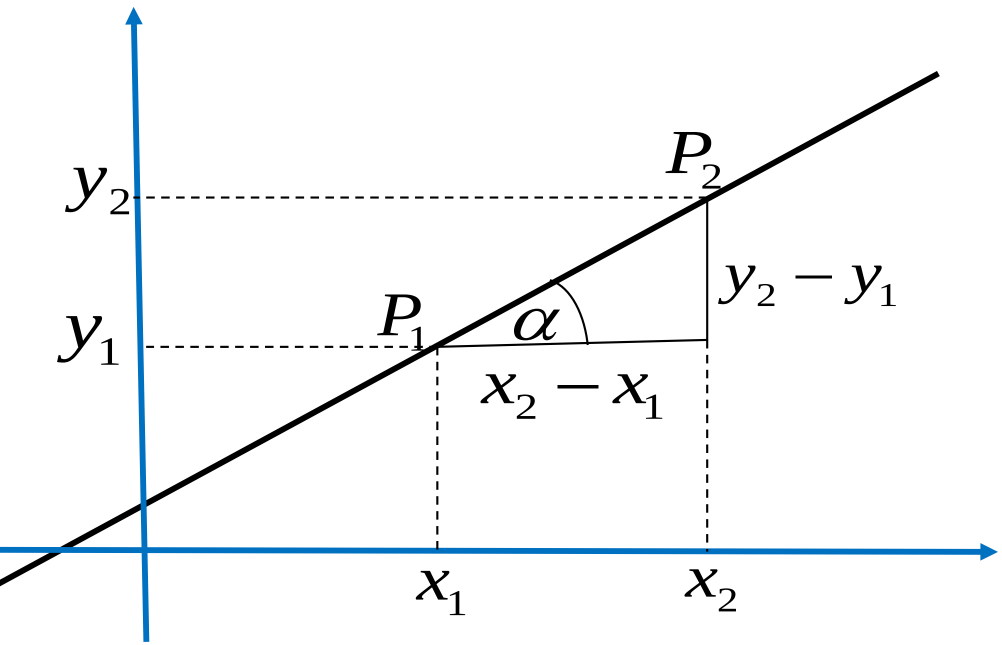
Ecuación de la recta que contiene al punto P_1 cuya pendiente es a

ECUACIÓN DE LA RECTA DETERMINADA POR DOS PUNTOS

Si se conocen las coordenadas de dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que pertenecen a una recta no paralela al eje y, es decir $x_1 \neq x_2$

Como la recta pasa por $P_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$



$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Ecuación de la recta que contiene a los puntos P_1 y P_2

Ejercicios:

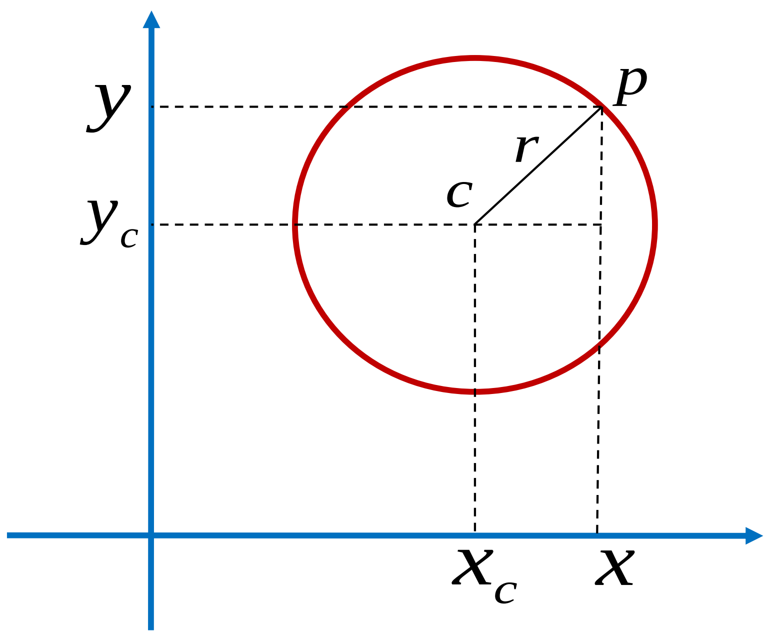
3) Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P_1=(2,5)$ y cuya pendiente es 2.

4) Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P_1=(-1,3)$ y $P_2=(3,5)$.

CIRCUNFERENCIA: DEFINICIÓN

Se llama Circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto fijo llamado centro.

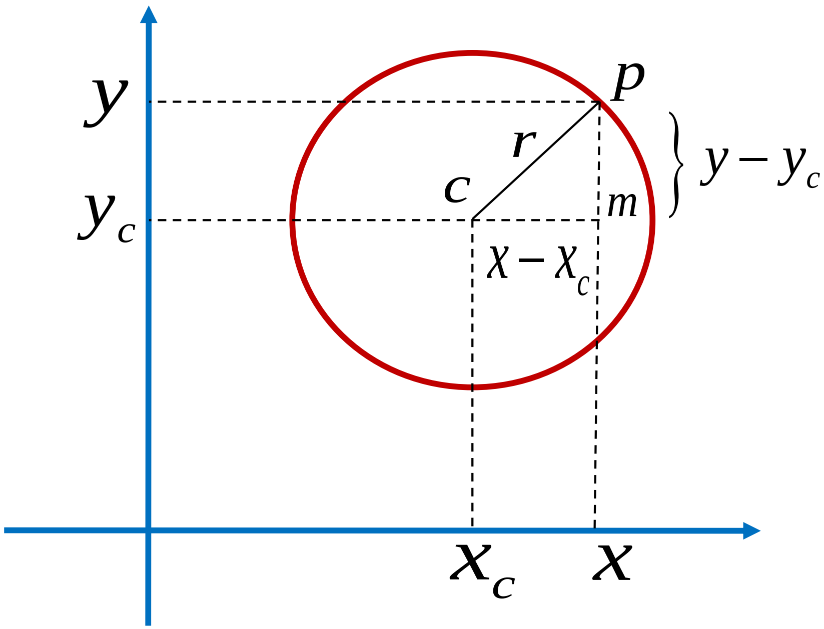
La distancia de un punto cualquiera de la circunferencia al centro recibe el nombre de radio.



CIRCUNFERENCIA: ECUACIÓN CANÓNICA

Sea C una circunferencia de centro $c = (x_c, y_c)$

$$Sea\ p \in C\ con \quad p = (x, y)$$



En el triángulo $\overset{\Delta}{cpm}$, por el Teorema de Pitágoras, se tiene:

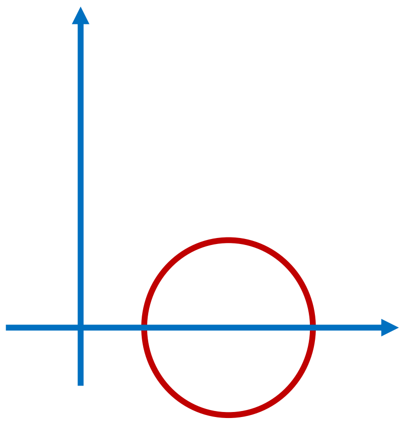
$$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$$

Ecuación canónica de la circunferencia

ECUACIÓN CANÓNICA: Casos Particulares

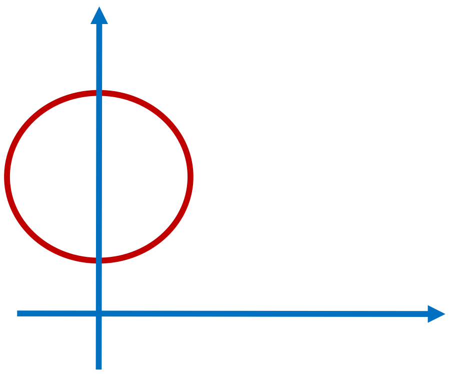
a) El centro es un punto del eje x.

$$\boxed{(x - x_c)^2 + y^2 = r^2}$$



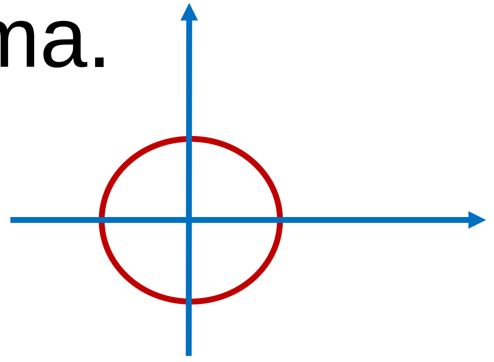
b) El centro es un punto del eje y

$$\boxed{x^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$$



c) El centro es el origen del sistema.

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Partimos de la ecuación canónica de la circunferencia

$$\boxed{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2}$$

$$x^2-2.x.x_c+x_c{}^2+y^2-2.y.y_c+y_c^2-r^2=0$$

$$Llamando: -2x_c=D; \quad -2y_c=E; \quad x_c^2+y_c^2-r^2=F$$

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

Ecuación general o implícita de la Circunferencia

Ejercicios:

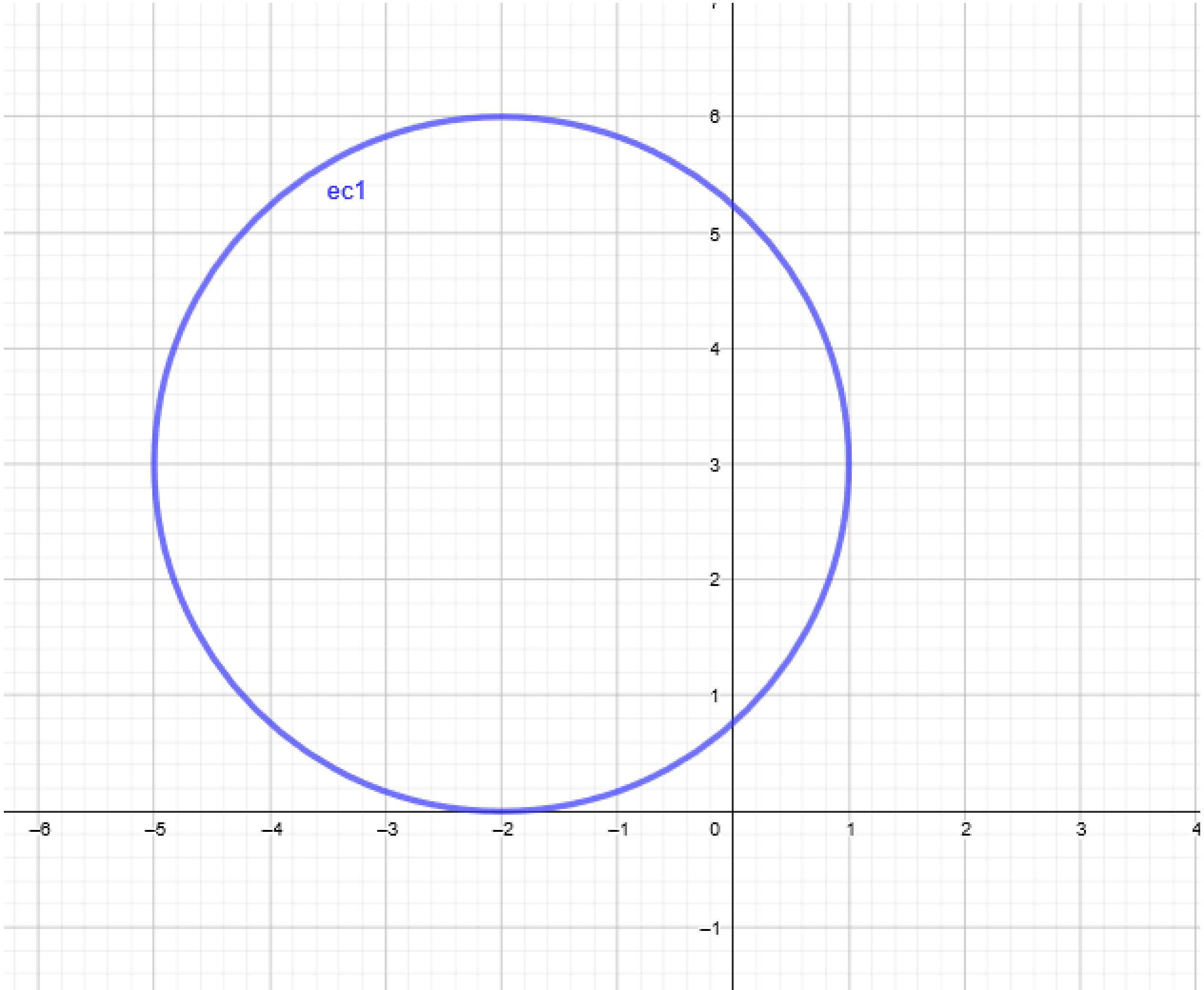
1) a) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 4.

b) Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 3 y centro en P = (-2, 1).

c) Escriba al menos tres puntos de cada una de las circunferencias halladas que no pertenezcan a los ejes.

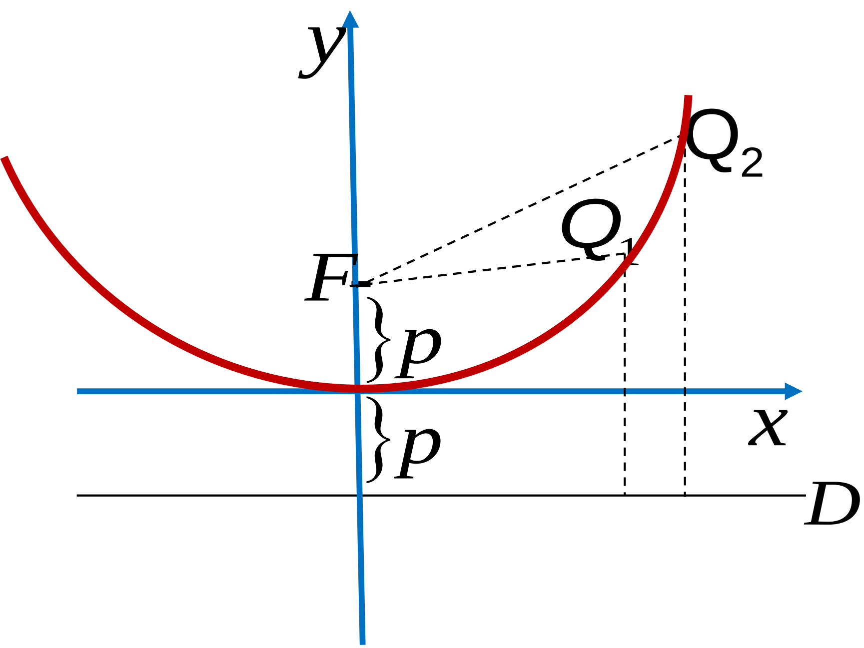
2) a) Hallar la ecuación canónica de la siguiente circunferencia.

b) Hallar la ecuación general o implícita de la misma.



PARÁBOLA: DEFINICIÓN Y CONSTRUCCIÓN.

Se llama Parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



Elementos principales:

Foco: F

Directriz: D

Vértice: $V = (x_v, y_v)$

Eje de la parábola VF

Parámetro p: distancia del foco al vértice de la parábola.

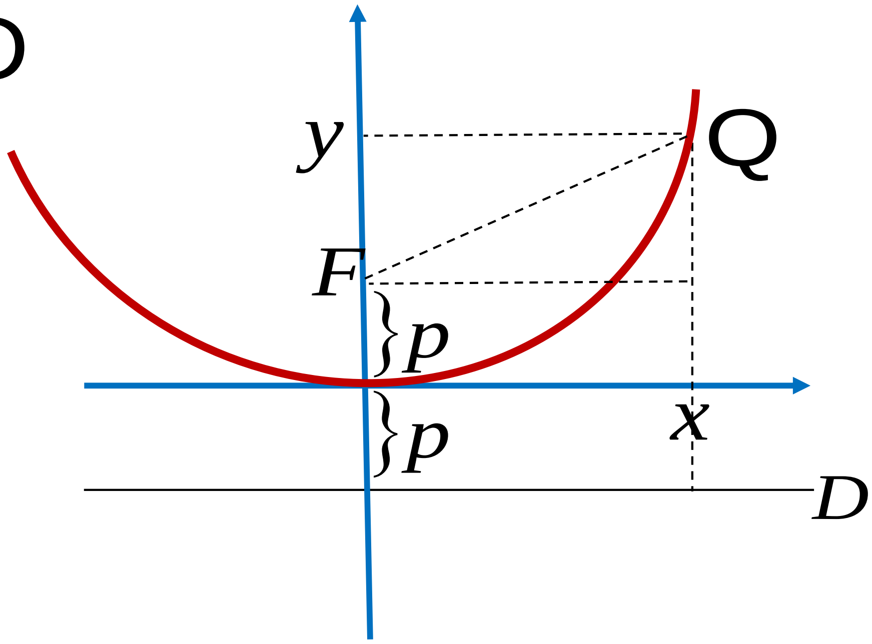
PARÁBOLA: DEDUCCIÓN DE FÓRMULA

En la parábola: $\overline{QF} = \overline{QD}$

Sea 2p = d (F,D)

Sean $F = (0, p)\ y\ D // x$

La ecuación de D: y = -p



Dado $Q = (x, y)$ un punto cualquiera de la parábola, se debe verificar que $\overline{QF} = \overline{QD}$

Como $\overline{QD} = y + p$ y $\overline{QF} = \sqrt{(y-p)^2 + x^2}$

Se tiene:

$$y + p = \sqrt{(y-p)^2 + x^2}$$

PARÁBOLA: DEDUCCIÓN DE FÓRMULA

$$y + p = \sqrt{(y-p)^2 + x^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

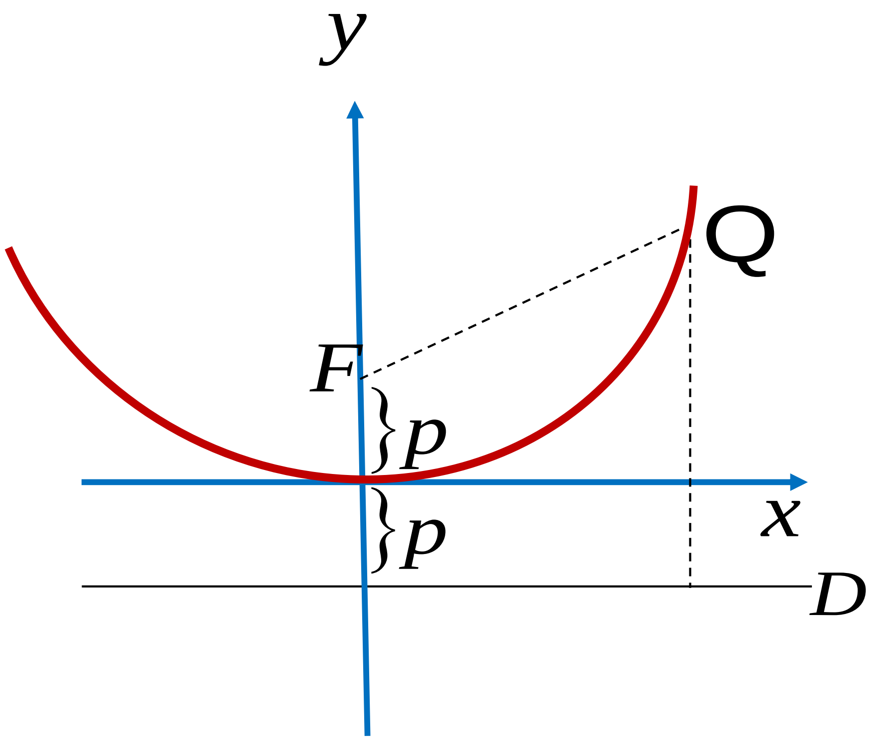
$$(y+p)^2 = (\sqrt{(y-p)^2 + x^2})^2$$

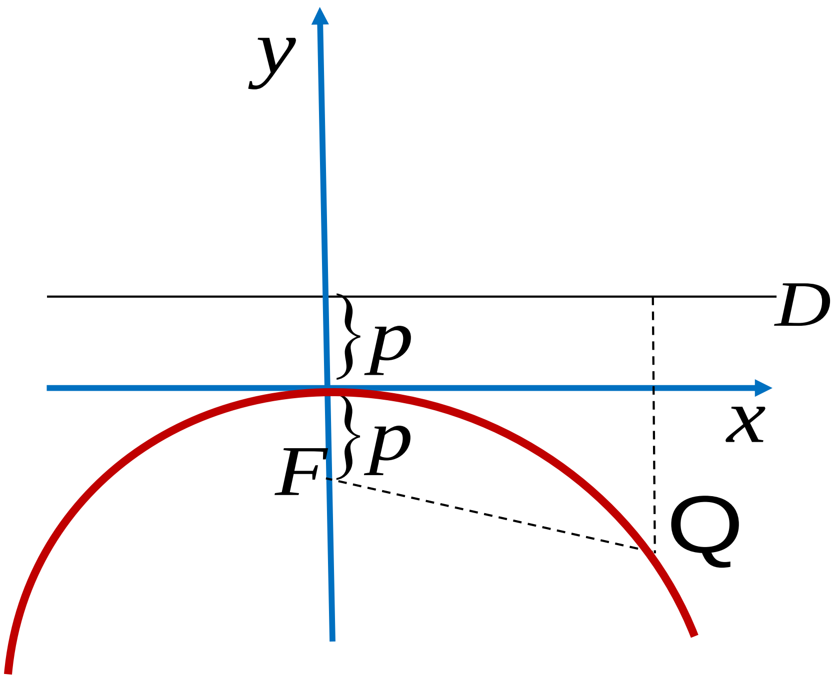
$$y^2 + 2yp + p^2 = \quad y^2 - 2yp + p^2 + x^2$$

$$2yp + 2yp = x^2$$

$$\boxed{4yp = x^2}$$

PARÁBOLA: POSICIONES

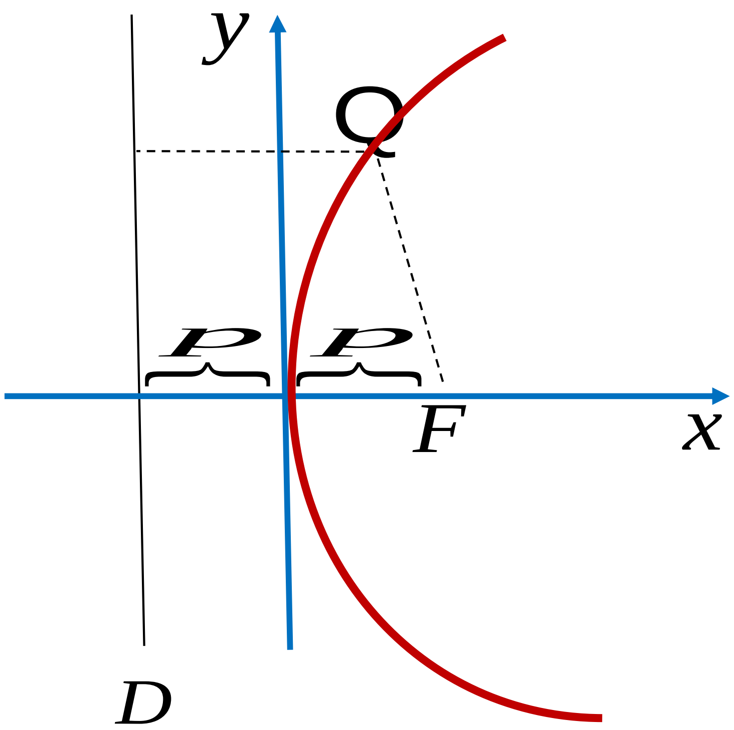


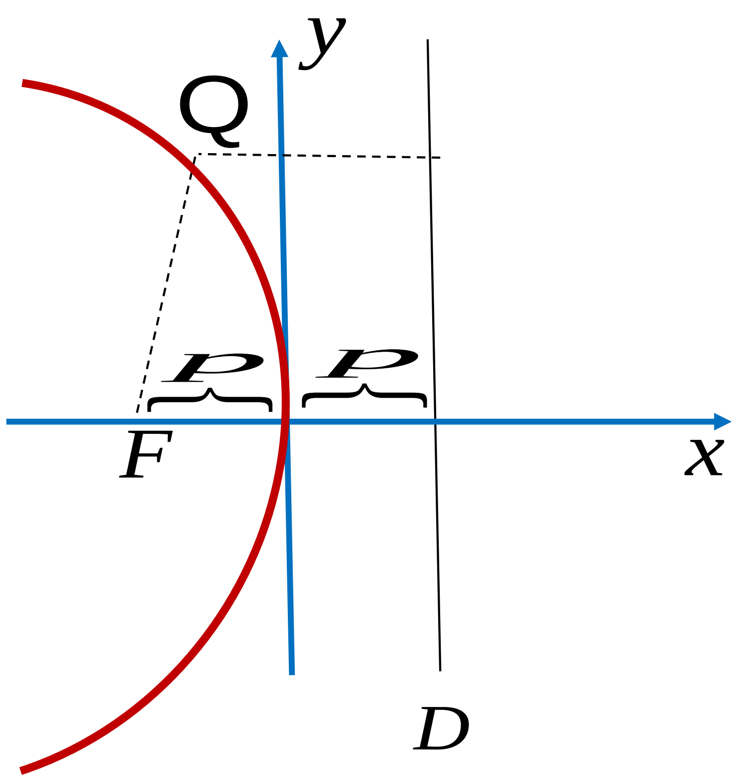


$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = -4py$$

PARÁBOLA: POSICIONES

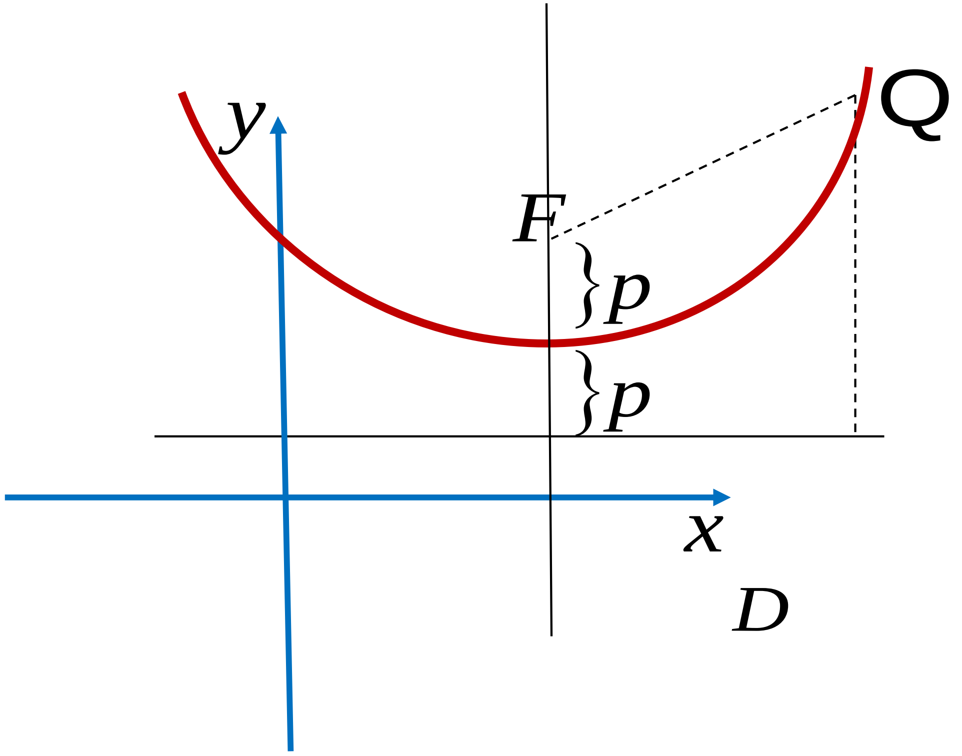




$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = -4px$$

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA DESPLAZADA DEL ORIGEN



$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$$

Ejercicios

1) Dada la ecuación de la parábola $y = x^2$

Hallar la ubicación del foco y la ecuación de la directriz.

2) Hallar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen del sistema de ejes cartesianos y su foco en el punto $F=(4,0)$.

Hallar la ecuación de la directriz.

Representar gráficamente.

Ejercicios

3) Dadas las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)^2 = 4(y-1)$

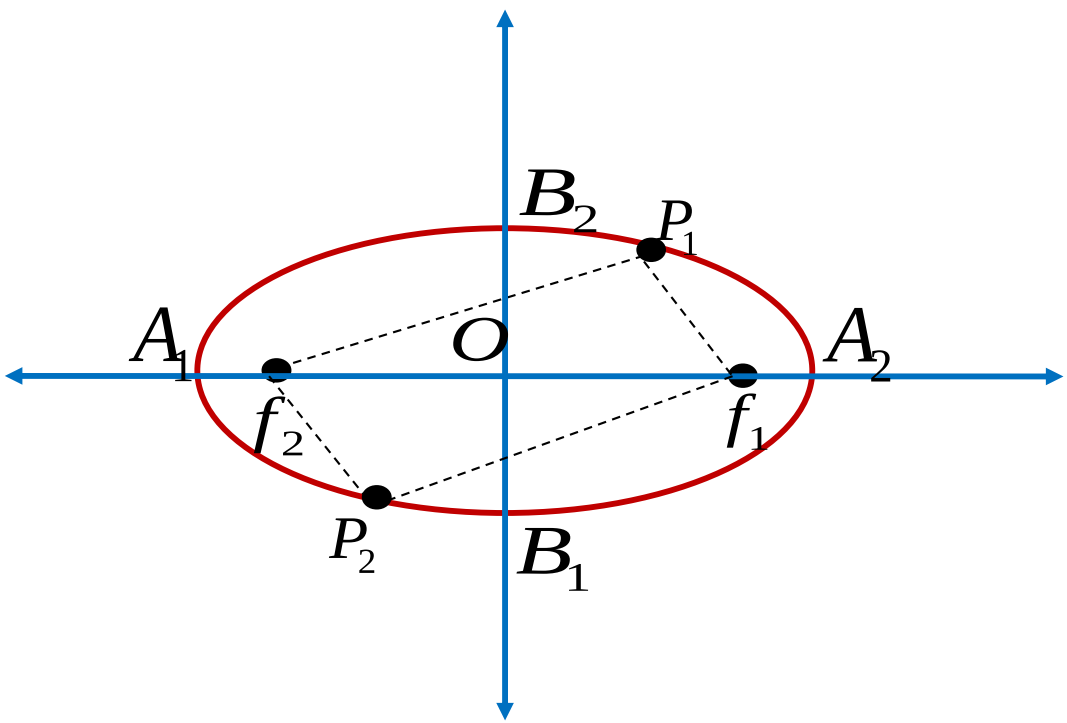
b) $(x-2)^2 = 8(y-1)$

c) $(x-2)^2 = 12(y-1)$

Representar gráficamente, hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

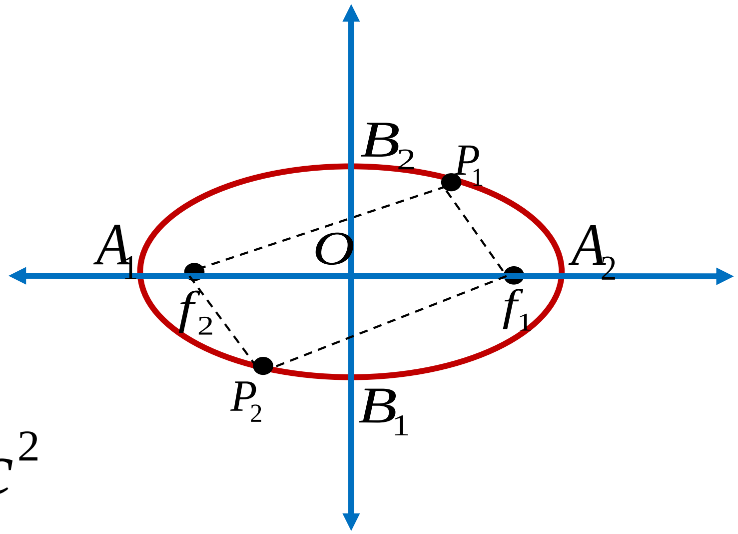
ELIPSE: DEFINICIÓN

Se llama Elipse al lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos tienen una suma constante.



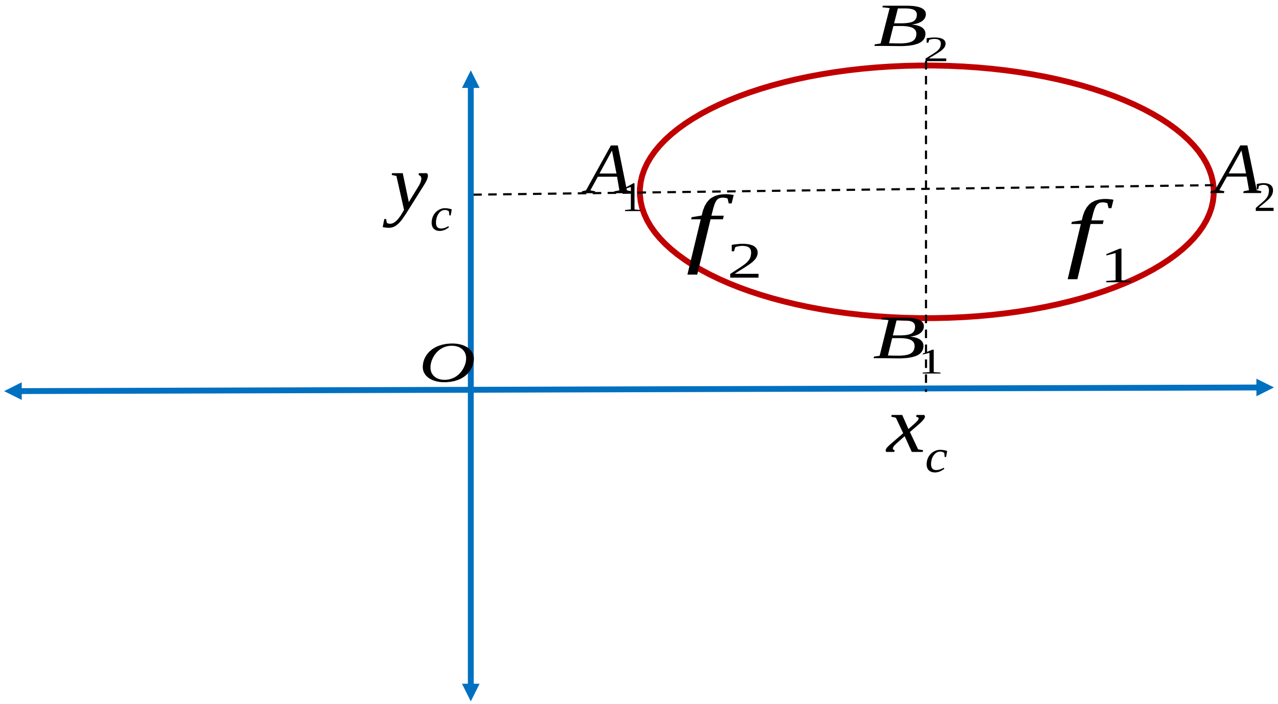
ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA ELIPSE

- *Focos*: $f_1 \;\; y \;\; f_2$
- *Centro O, punto medio de* $\overline{f_1 f_2}$
- *Vértices:* $A_1 \;\; y \;\; A_2$; $B_1 \;\; y \;\; B_2$
- *Eje mayor* $\overline{A_1 A_2}$; *Medida* $\overline{A_1 A_2} = 2a$
- *Eje menor* $\overline{B_1 B_2}$; *Medida* $\overline{B_1 B_2} = 2b$
- *Lado recto* $L_r = 2\dfrac{b^2}{a}$
- Una relación importante: $a^2 = b^2 + c^2$
- *Excentricidad:* $e = \dfrac{c}{a}$



- *Ecuación canónica de la elipse* $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE DESPLAZADA



$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1}$$

Ejercicios

Dadas las siguientes ecuaciones de la elipse, representar gráficamente, hallar la longitud del eje mayor, la longitud del eje menor y las coordenadas de los focos.

$$a)\quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$b)\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

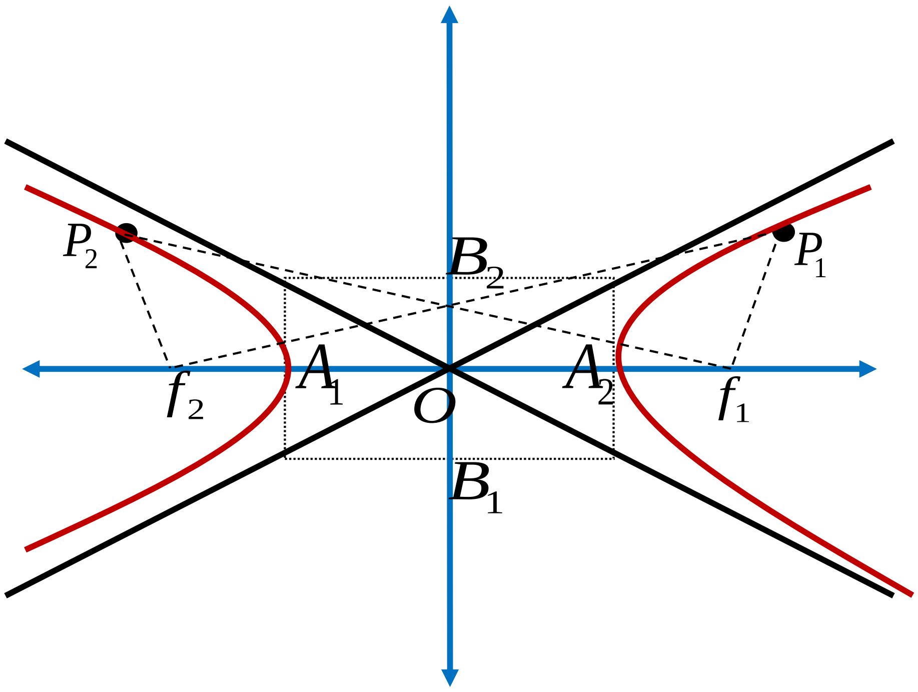
$$c)\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$d)\quad 4x^2+9y^2-16=20$$

$$e)\quad \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

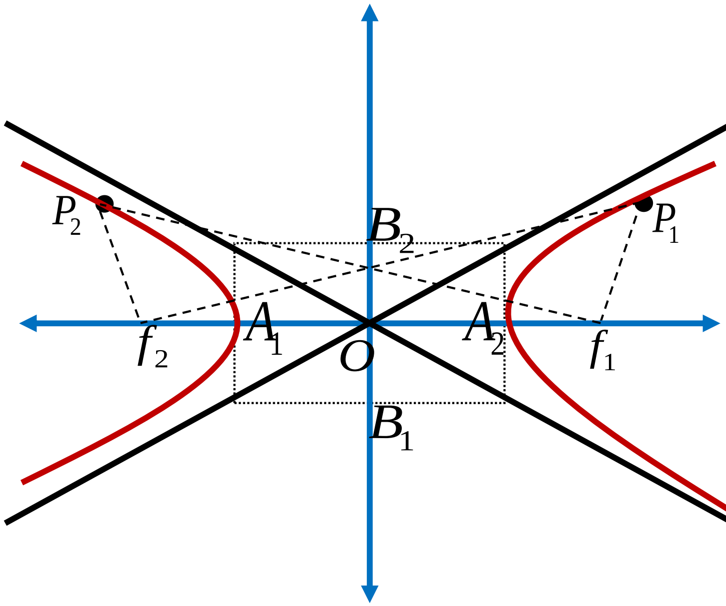
HIPÉRBOLA: DEFINICIÓN

Se llama Hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos tienen una diferencia constante.



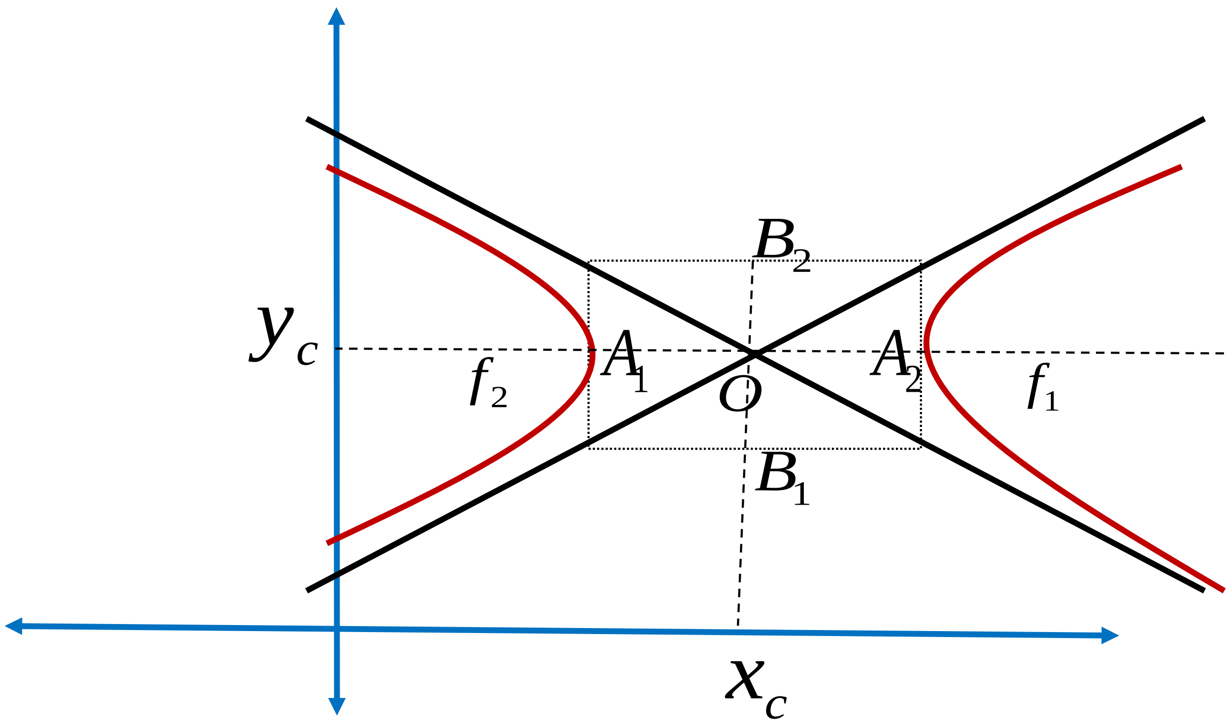
ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA HIPÉRBOLA

- *Focos:* $f_1 \ y \ f_2$
- *Centro O, punto medio de* $\overline{f_1 f_2}$
- *Vértices:* $A_1 \ y \ A_2$; $B_1 \ y \ B_2$
- *Eje transversal* $\overline{A_1A_2}$ *;Medida* $\overline{A_1A_2} = 2a$
- *Eje imaginario* $\overline{B_1B_2}$ *;Medida* $\overline{B_1B_2} = 2b$
- Una relación importante: $c^2 = a^2 + b^2$
- *Asíntotas: Son las rectas que están sobre las diagonales del rectángulo fundamental, de ecuación:* $y = \frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$
- *Ecuación canónica de la hipérbola:*



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA DESPLAZADA



$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

Ejercicios

Dadas las siguientes ecuaciones de la hipérbola, representar gráficamente, hallar la longitud del eje transversal, la longitud del eje imaginario y las coordenadas de los focos.

$a)\quad \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$

$b)\quad -\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$c)\quad \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$

$d)\quad 4x^2-9y^2-16=20$

$e)\quad \dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$