Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

UNIDAD 6: POLINOMIOS

POLINOMIOS

Se llama polinomio en una indeterminada x, con coeficientes en R, de grado n, a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde: x es la indeterminada

$n \in N_0$

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in R$ y se llaman coeficientes

$a_n \neq 0$

En forma abreviada: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

POLINOMIOS

Cada una de las expresiones $a_i x^i$ se llama término del polinomio, a_n es el coeficiente principal y a_0 es el término independiente.

Ejercicio: Determinar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. Justificar.

$$a)\quad 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$$

$$b)\quad 3x^5 + 2\sqrt{x} - x + 5$$

$$c)\quad -2x^3 + \sqrt{2}x^2 - x + 3$$

$$d)\quad x^5 + 2x^4 - x + \frac{5}{x}$$

$$e)\quad (x-1).(x+1)$$

POLINOMIOS

Sea el polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Llamamos **grado del polinomio** a $"n" \; si \; a_n \neq 0$

Polinomio Nulo: es aquel en el que todos sus coeficientes son iguales a cero.

$$P(x) = 0x^n + \ldots + 0x^2 + 0x^1 + 0$$

Notación: $P(x) = 0$

POLINOMIOS

Polinomio Mónico: es aquel cuyo coeficiente principal es 1.

Por ejemplo:

$P(x) = x + 2$ es un polinomio mónico de grado 1

$P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$ Es un polinomio mónico de grado 4

POLINOMIOS

Según el número de términos, los polinomios se llaman:

- **Monomio:** si tiene un único término.

  Por ejemplo: $P(x) = -3x^2$

- **Binomio**: si tiene sólo dos términos.

  Por ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 3x^3$

- **Trinomio**: si tiene sólo tres términos.

  Por ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 3x^3 – 5$

POLINOMIOS

- **Cuatrinomio**: si tiene sólo cuatro términos.

  Por ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 3x^3 - 5x + 1$

- **Polinomio:** si tiene más de cuatro términos.

SUMA DE MONOMIOS

Monomios Semejantes:

Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal, es decir sólo se diferencian en el coeficiente.

Sólo pueden sumarse dos monomios si éstos son semejantes.

La suma es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma de los coeficientes.

SUMA DE MONOMIOS

La suma de dos monomios semejantes es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma de los coeficientes.

Por ejemplo: Sean $P(x) = 5x^2$ $Q(x) = 13x^2$

$$P(x) + Q(x) = 5x^2 + 13x^2 = 18x^2$$

$$P(x) - Q(x) = 5x^2 - 13x^2 = -8x^2$$

PRODUCTO Y DIVISIÓN DE MONOMIOS

- El producto de dos monomios siempre es otro monomio.

  Por ejemplo: $5x^4.(2x^2) = 10x^6$

- El resultado de la división de dos monomios puede ser otro monomio o una expresión algebraica fraccionaria.

  Por ejemplo: $a) \quad 10x^4 : (2x^2) = 5x^2$

  $$b) \quad 5x^4 : (2x^6) = \frac{5}{2x^2}$$

SUMA DE POLINOMIOS

Para sumar dos polinomios, se agrupan los términos semejantes y se suman sus coeficientes.

Por ejemplo: Dados los polinomios,

$$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$$

$$Q(x) = -x^3 + 5x^2 + 7x + 4$$

Hallar: $a) \quad P(x) + Q(x)$ $\qquad b) \quad P(x) - Q(x)$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta.

Se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y se suman los términos semejantes obtenidos.

Por ejemplo: Dados los polinomios,

$P(x) = 5x^4 - 2x^2 - 10$ $\quad$ $Q(x) = -x^2 + 7x + 4$

Hallar: $P(x).Q(x)$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Algoritmo de la división:

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Existen y son únicos dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$a) \quad P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$$

$$b) \quad R(x) = 0 \quad \vee \quad gr(R) < gr(Q)$$

Los polinomios P, Q, C y R se llaman, respectivamente, dividendo, divisor, cociente y resto.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La disposición usual de estos cuatro polinomios es la conocida en la división entera.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Sea $gr(P) = m$ y $gr(Q) = n$

- Si $m < n \Rightarrow C(x) = 0$ y $R(x) = P(x)$
- Si $m \geq n \Rightarrow gr(C) = m - n$ y $gr(R) \leq n - 1$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Por ejemplo

Dados dos polinomios:

$a)\quad P(x)=3x^2-2x \qquad Q(x)=x^3+1$

$b)\quad P(x)=4x^3+3-3x^2 \qquad Q(x)=-x+x^2+1$

$c)\quad P(x)=5x^4-3x^3-4x^2+6x-1 \qquad Q(x)=x-2$

Hallar el cociente y el resto de: $P(x):Q(x)$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Caso Particular: Regla de Ruffini

Si el divisor Q es un polinomio mónico y gr(Q) = 1, el proceso anterior puede simplificarse utilizando la Regla de Ruffini.

Dados los polinomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = x + b_0$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Observemos que:

a) El cociente C es un polinomio de grado n – 1

$$gr\,(C) = gr(P) - gr(Q) = n - 1$$

b) El resto R es un número.

$$gr\,(R) < gr\,(Q) = 1 \Rightarrow gr\,(R) = 0$$

REGLA DE RUFFINI

Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots . + a_1 x + a_0$

$y \quad Q(x) = x + b_0$

Para realizar la división $P(x):Q(x)$ se procede de la siguiente manera:

REGLA DE RUFFINI

1°) En el primer renglón se escriben todos los coeficientes del dividendo completo y ordenado en forma decreciente según los exponentes de la indeterminada.

$$\begin{array}{l|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

REGLA DE RUFFINI

2°) En el ángulo de las dos rectas se escribe el opuesto del término independiente del polinomio divisor.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & + & & & & \\
-b_0 & & -a_n b_0 & & & & \\
\hline
\mathrm{x} & a_n & a_{n-1} - a_n b_0 & & & &
\end{array}
$$

REGLA DE RUFFINI

3°) El primer coeficiente del dividendo (a_n) se repite en el tercer renglón, debajo de la línea horizontal, y luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente; se coloca este resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo y se realiza la suma de los números que quedaron alineados. El resultado se escribe en el tercer renglón, debajo de la línea horizontal.

REGLA DE RUFFINI

4°) Se repite este proceso hasta el último coeficiente del polinomio dividendo.

El último valor obtenido es el resto (R) de la división y los valores que le preceden son los coeficientes del cociente C.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} \ldots. & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & + & & & \\ -b_0 & & -a_n b_0 & & & \\ \hline \text{x} & a_n & a_{n-1}-a_n b_0 & & & R \end{array}$$

REGLA DE RUFFINI

Ejemplo: Hallar el cociente y el resto de P:Q, aplicando la regla de Ruffini.

$$P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \qquad Q(x) = x - 2$$

$$\begin{array}{cc|ccccc}
 & & 5 & -3 & -4 & 6 & -1 \\
 & & & + & + & & \\
 & 2 & & 10 & 14 & 20 & 52 \\
\hline
\text{x} & & 5 & 7 & 10 & 26 & 51
\end{array}$$

$$C(x) = 5x^3 + 7x^2 + 10x + 26$$

$$\text{Resto} : 51$$

DIVISIBILIDAD

Si al dividir dos polinomios P y Q se obtiene como resto el polinomio nulo, entonces se dice que la división es exacta y que:

"P es múltiplo de Q",

o bien que: **"P es divisible por Q"**

o que: **"Q es un divisor de P"**.

En este caso se cumple que:

$$P(x) = Q(x).C(x)$$

ESPECIALIZACIÓN DE LA INDETERMINADA X

Se llama especialización de la indeterminada x por α al valor:

$$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$$

Es decir, es el valor numérico que toma el polinomio cuando se sustituye la indeterminada x, por el número α y se realizan las operaciones indicadas en el polinomio.

ESPECIALIZACIÓN DE LA INDETERMINADA X

Por ejemplo: Sea $P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1$

Si α **= 2**

$$P(2) = 5.2^4 - 3.2^3 - 4.2^2 + 6.2 - 1$$

$$P(2) = 51$$

Si α **= -1**

$$P(-1) = 5.(-1)^4 - 3.(-1)^3 - 4.(-1)^2 + 6.(-1) - 1$$

$$P(-1) = -3$$

TEOREMA DEL RESTO

Hemos visto que al dividir un polinomio P(x) por otro Q(x) mónico y de grado 1 el resto R(x) es necesariamente, de grado cero.

Teorema: El resto de dividir un polinomio P(x) por otro Q(x) = x - a, es la especialización de P por a.

Es decir: R = P(a).

TEOREMA DEL RESTO

A partir del algoritmo de la división, se tiene:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R$$

$$P(x) = (x - a).C(x) + R$$

Especializando P por a:

$$P(a) = (a - a).C(a) + R$$

$$P(a) = 0 + R = R$$

TEOREMA DEL RESTO

Por ejemplo:

$$P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \qquad Q(x) = x - 2$$

Teorema del resto:

$$P(2) = 5.2^4 - 3.2^3 - 4.2^2 + 6.2 - 1$$

$$P(2) = 51$$

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Sea P(x) un polinomio de grado n y α un número cualquiera. Se dice que **α es una raíz de P** si y sólo si la especialización de la indeterminada x por α es cero.

$$\alpha \text{ } es \text{ } raíz \text{ } de \text{ } P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Propiedad: α es raíz de P sí y solo si (x-α) es divisor de P

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Por ejemplo: $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

$$P(1) = 1^4 - 2.1^3 - 1.1^2 + 2.1 = 0$$

$\alpha = 1$ es raíz de P

$$P(1/2) = (1/2)^4 - 2.(1/2)^3 - 1.(1/2)^2 + 2.(1/2) = 9/16$$

$\alpha = 1/2$ no es raíz de P

$$P(2) = 2^4 - 2.2^3 - 1.2^2 + 2.2 = 0$$

$\alpha = 2$ es raíz de P

RAÍCES DE UN POLINOMIO: PROPIEDADES

1) **Teorema Fundamental del Álgebra**: Todo polinomio P con coeficientes en R y de grado mayor que cero, admite una raíz en C.

2) Todo polinomio de grado n, admite n raíces, no necesariamente distintas.

3) Si un polinomio admite una raíz compleja, entonces admite a su conjugada. Es decir, si un número complejo es raíz de un polinomio, su conjugado también lo es.

TEOREMA DE GAUSS

Si un polinomio real P de grado n, con coeficientes enteros, admite raíces racionales, de la forma $\frac{p}{q}$ (siendo p y q coprimos), entonces p es divisor del término independiente a_0 y q es divisor del coeficiente principal a_n.

TEOREMA DE GAUSS

Hallar las raíces de los siguientes polinomios:

$$a) \quad P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

$$b) \quad P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

$$c) \quad P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE POLINOMIOS REALES

Teorema: Todo polinomio real P de grado n $\geq$ 1, puede escribirse de manera única, como un producto de la forma:

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \in C$ y son las n raíces, no necesariamente distintas, de P.

En forma abreviada:

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$$

Ejercicios

Realizar la descomposición factorial del Polinomio real P:

$$a) \quad P = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

$$b) \quad P = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$$

$$c) \quad P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

$$d) \quad P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

$$e) \quad P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

$$Si\ gr\ P = 2, \quad a_2 \neq 0, \quad \alpha_1\ y\ \alpha_2\ son\ raíces\ de\ P.$$

$$P = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Por\ DF \quad P = a_2 (x - \alpha_1).(x - \alpha_2)$$

$$P = a_2 [x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) x + \alpha_1 \alpha_2]$$

$$P = a_2 x^2 - a_2 (\alpha_1 + \alpha_2) x + a_2 \alpha_1 \alpha_2$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

$$P = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P = a_2x^2 - a_2(\alpha_1 + \alpha_2)x + a_2\alpha_1\alpha_2$$

Por el teorema de identidad de Polinomios:

"Dos polinomios son idénticos si y sólo si tienen igual grado y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales"

Se tiene: $-a_2(\alpha_1 + \alpha_2) = a_1 \quad \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}$

$$a_2\alpha_1\alpha_2 = a_0 \quad \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

$$Si\ gr\ P = 3, \quad a_3 \neq 0, \quad \alpha_1, \alpha_2\ y\ \alpha_3\ son\ raíces\ de\ P.$$

$$P = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$Por\ DF \quad P = a_3(x-\alpha_1).(x-\alpha_2).(x-\alpha_3)$$

$$P = a_3[x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2].(x-\alpha_3)$$

$$P = a_3[x^3 - \alpha_3x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x^2 + (\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3x + \alpha_1\alpha_2x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3]$$

$$P = a_3[x^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3]$$

$$P = a_3x^3 - a_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2 + a_3(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2)x - a_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

Por el teorema de identidad de Polinomios

$$P = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P = a_3x^3 - a_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + a_3(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2)x - a_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Se tiene:

$$-a_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = a_2 \quad \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{-a_2}{a_3}$$

$$a_3(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) = a_1 \Rightarrow \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$-a_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = a_0 \quad \Rightarrow \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{-a_0}{a_3}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

Sea el polinomio P, de grado n:

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Su descomposición factorial es:

$$P = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots\ldots.(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in C$ son las n raíces complejas, no necesariamente distintas, de P.

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

Efectuando el producto de los polinomios mónicos irreducibles, se tiene:

$$P = a_n\left[x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)x^{n-1} + \right.$$

$$+(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1.\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2} +$$

$$-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-3} +$$

$$\left. + \ldots + (-1)^n \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 \ldots \alpha_n\right]$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

$$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Por el teorema de Identidad de Polinomios, se tiene:

$$-a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = a_{n-1}$$

$$a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1.\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n) = a_{n-2}$$

$$-a_n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) = a_{n-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^n\, a_n\, \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\ldots\alpha_n = a_0$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

De lo cual surgen las siguientes relaciones:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

....

$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

En resumen:

- La suma de las raíces es igual al segundo coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

- La suma de los productos binarios de las raíces es igual al tercer coeficiente dividido por el coeficiente principal

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

- La suma de los productos ternarios de las raíces es igual al cuarto coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal.

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

- El producto de las n raíces es igual al término independiente dividido por el coeficiente principal, con signo + o – según n sea par o impar, respectivamente.

$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Ejemplo:

1) Hallar las raíces de P sabiendo que la suma de dos de sus raíces es igual a la tercera.

$$P = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

2) Hallar las raíces de P sabiendo que el producto de dos de ellas es 1.

$$P = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$