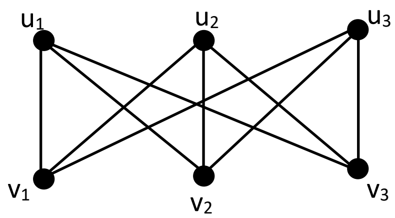
Trabajo Práctico Nº 5: Teoría de Grafos

Se llama GRAFO a un par G = (V, E), donde V es un conjunto no vacío de puntos, llamados VERTICES, y E es un conjunto de pares de vértices (no necesariamente, pares ordenados), llamados LADOS o ARISTAS.
G = (V, E) es un GRAFO SIMPLE, si G no posee lados paralelos ni bucles.
G = (V, E) es un MULTIGRAFO, si G posee lados paralelos.
G = (V, E) es un DIGRAFO o GRAFO DIRIGIDO si los elementos de E son pares ordenados de elementos de V.

1) En un torneo de fútbol, el equipo Nieve venció a los Faisanes una vez, el Rascacielos venció al Tuna una vez, el Nieve venció al Rascacielos dos veces, los Faisanes vencieron al Tuna una vez y los Faisanes vencieron al Rascacielos una vez. En cada uno de los siguientes casos, usar un grafo para modelar el torneo, siendo cada equipo un vértice del mismo. Determinar el tipo de grafo usado en cada ítem.
a) Hay una arista entre los equipos si éstos jugaron.
b) Hay una arista entre los equipos para cada juego jugado.
c) Hay una arista entre el equipo i y el j si i venció a j, al menos, una vez.
d) Hay una arista entre el equipo i y el j por cada victoria de i sobre j.

Sean los conjuntos $V = \{v_i / 1 \le i \le n\}$ y $U = \{u_j / 1 \le j \le m\}$
G es un GRAFO BIPARTIDO, si sus lados están dados por $\{v_i, u_j\}$, pero no por $\{v_i, v_k\}$, ni $\{u_j, u_s\}$.
Es decir, cada vértice del conjunto V está unido con todos los vértices de U, pero entre los vértices de un mismo conjunto no existe arista que los una.

Por ejemplo: V = $\{v_1, v_2, v_3\}$
U = $\{u_1, u_2, u_3\}$



2) Sean los conjuntos de vértices: V_1={1,2,3,4} y V_2={5,6,7}. Dibujar un grafo bipartido.

El grado o valencia de un vértice es el número de lados o aristas que incidan en él.
En cualquier grafo se verifica:
- La suma de todos sus grados es igual al doble del número de sus aristas.
- El número de vértices de grado impar es par.

3) ¿Cuántas aristas tiene un grafo si los grados de sus vértices son 4, 3, 3, 2, 2? Dibujar un grafo que verifique lo anterior.

Un grafo G = (V, E) es REGULAR de grado k o k-regular si cada vértice tiene grado k; es decir, un grafo es regular si todos los vértices tienen el mismo grado.

4) ¿Cuántas aristas hay en un grafo con diez vértices, cada uno de los cuales tiene grado seis? ¿Se puede construir un grafo regular con 10 aristas en el que cada vértice tenga grado 4?

5) Se tienen 6 ordenadores y 9 cables de conexión. Se quiere conectar cada ordenador con otros 3. ¿Existe alguna forma de conectarlos? Si existe… ¿hay diferentes modos de hacerlo?

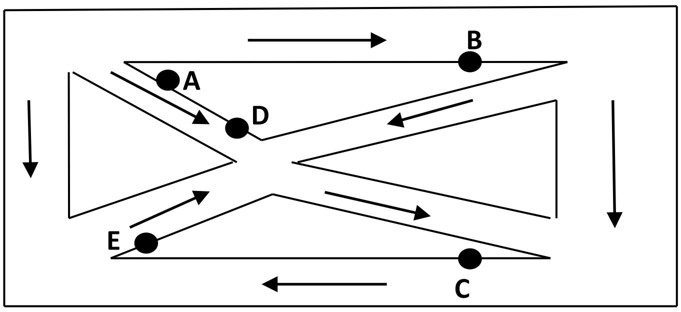
Un grafo simple de n vértices es COMPLETO y de orden n (K_n), si cada vértice es adyacente a los (n – 1) restantes.

El número de lados es: $L = \dfrac{n.(n-1)}{2}$

K_n puede representarse mediante un n–ágono y sus diagonales.

6) a) Construir un grafo completo de orden 6. (K_6).
b) Hallar el número de lados y la suma de los grados de todos los vértices.
c) Escribir la matriz de adyacencia que representa a dicho grafo.

7) El siguiente mapa muestra el sentido del tráfico de una pequeña urbanización mediante flechas continuas. ¿Se puede acceder desde cualquier punto indicado por letras mayúsculas a todos los demás? En caso negativo, intentar aportar alguna solución modificando el sentido del tráfico.



Un grafo es CONEXO si para dos vértices distintos, u y v, existe un trayecto o camino para ir de u a v.
Lado puente es aquel que, si se lo elimina, el grafo al que pertenece deja de ser conexo.

8) Dado los siguientes grafos, determinar si es conexo o disconexo, justificando la respuesta.
a) G_1 = (V ,E) donde $V = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ y $E = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,d\},\{e,f\},\{f,g\},\{e,g\}\}$
b) G_2 = (V ,E) donde $V = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ y $E = \{\{a,b\},\{b,g\},\{g,d\},\{e,f\},\{f,c\}\}$
En caso de ser disconexo, agregar el lado puente para que el mismo sea conexo.

Camino Euleriano: Es un camino que recorre todos los vértices de G, pasando por todos los lados una única vez.

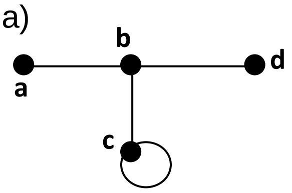
TEOREMA
- ❖ **Si un grafo G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces existe camino de Euler.**
- ❖ Si un grafo G tiene más de dos vértices de grado impar, entonces no existe camino de Euler.

Circuito Euleriano: Es el circuito que recorre todos los vértices, pasando por todos los lados una única vez.

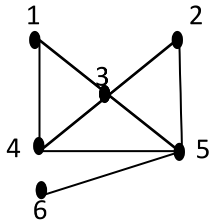
TEOREMA
- ❖ **Un grafo G tiene circuito de Euler si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.**
- ❖ Si un grafo G tiene un vértice de grado impar, entonces no existe circuito de Euler.

9) En cada uno de los siguientes grafos, determinar si existe un circuito de Euler, un camino euleriano que no es circuito, o ninguno de éstos, justificando las respuestas.

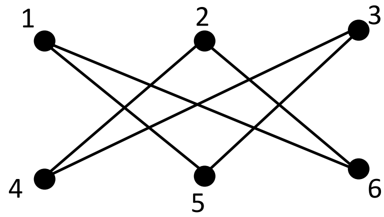
a)



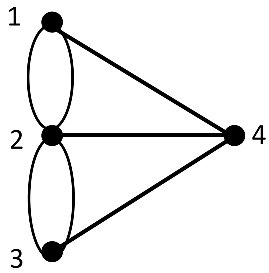
b)



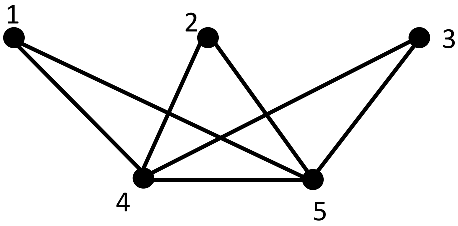
c)



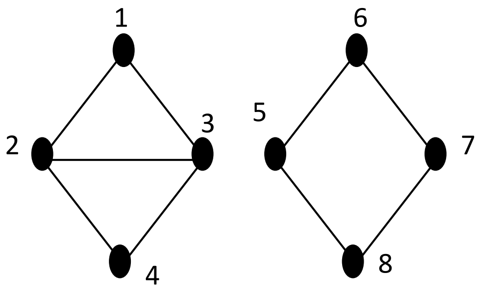
d)



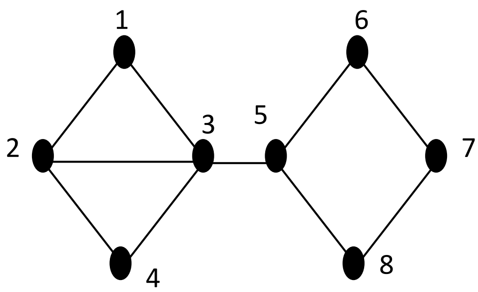
e)



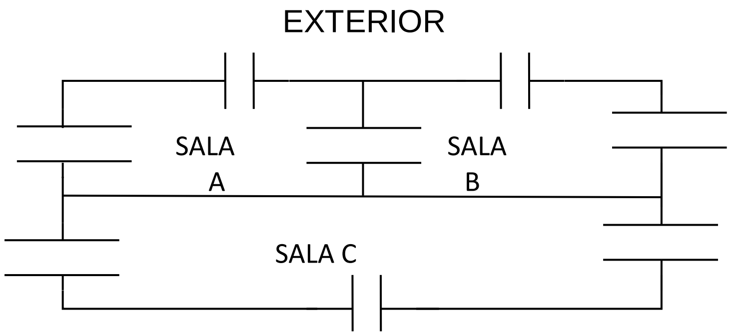
f)



g)

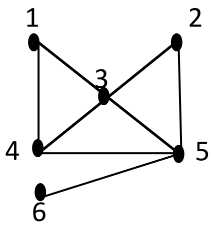


10) El plano que se presenta más abajo es el de un pequeño museo con tres salas. ¿Es posible comenzar en el exterior y visitar las 3 salas pasando por cada puerta una única vez? Justifique la respuesta.

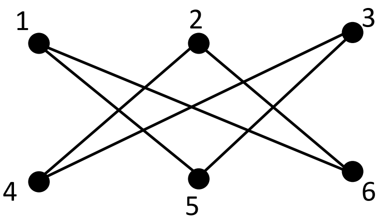


11) Utilizar el algoritmo de Fleury para obtener un camino o circuito Euleriano en cada uno de los siguientes grafos

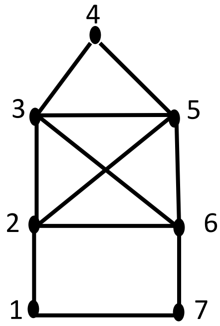
a)



b)



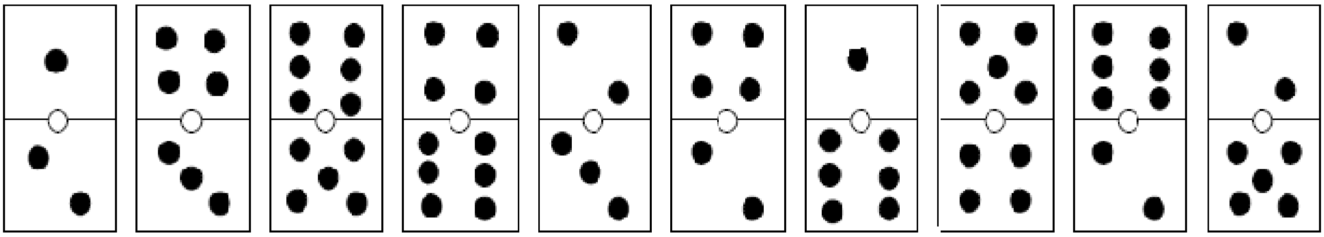
c)



12) Dadas las siguientes fichas del juego de dominó.

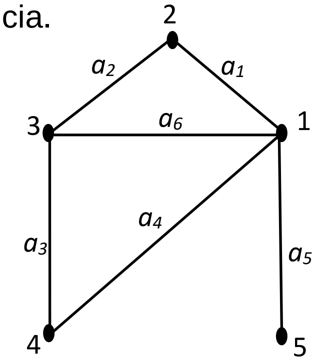
a) Determinar si en una partida de dominó las siguientes fichas pueden ser las 10 primeras en aparecer. Justifique su respuesta.

b) Determinar si en una partida de dominó las siguientes fichas pueden ser dispuestas en un rectángulo de 3x2. Justifique su respuesta.

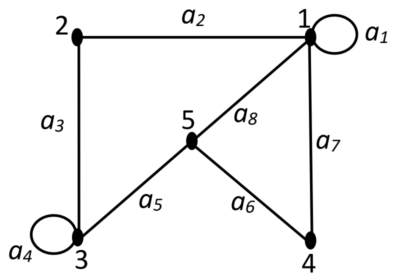


13) Dado los siguientes grafos, representarlos mediante la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia.

a)



b)



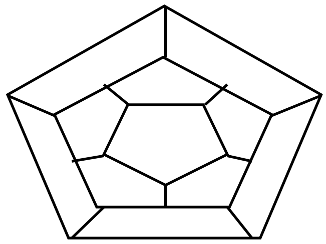
14) Dibujar el grafo representado por cada una de las siguientes matrices de adyacencia.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

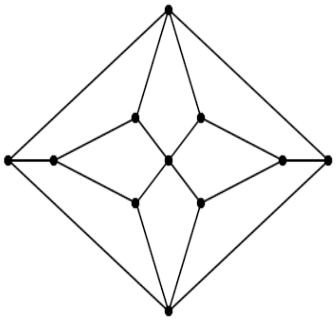
15) Dadas las siguientes matrices de incidencia, dibujar el grafo correspondiente

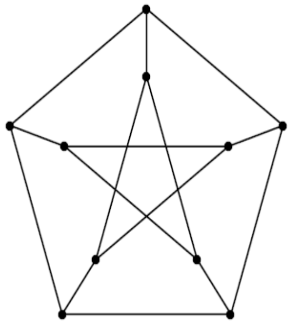
$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16) Sir William Hamilton, desarrolló y comercializó un juego que consistía en una gráfica de madera en forma de dodecaedro regular, con las instrucciones para encontrar lo que se llama circuito hamiltoniano. En la figura siguiente se muestra una versión plana de este sólido. Numere los vértices en forma consecutiva, a fin de encontrar uno de los muchos circuitos de Hamilton que admite este grafo.

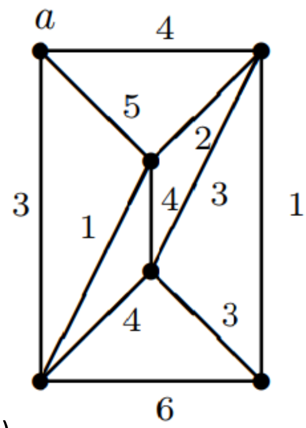


17) Determinar si los siguientes grafos, llamados Grafos Herschel y grafo de Petersen, contienen un circuito Hamiltoniano.

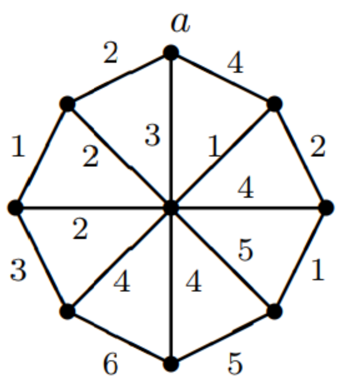




18) Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar en cada uno de los siguientes grafos, los pesos mínimos desde el vértice “a” hacia los demás. Dibujar los caminos mínimos a medida que se obtengan.



a)



b)

19) La siguiente matriz presenta los pesos conocidos entre ciertos vértices del grafo G.

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	3	9	∞	∞	∞	∞
b	3	0	2	7	1	∞	∞
c	9	2	0	7	1	∞	∞
d	∞	7	7	0	5	2	8
e	∞	1	1	5	0	9	∞
f	∞	∞	∞	2	9	0	4
g	∞	∞	∞	8	∞	4	0

a) Generar el grafo G.
b) Averiguar el camino de peso mínimo desde el vértice a hacia el vértice g.