Lógica y Matemática Computacional
Licenciatura en Sistemas de Información

Relaciones de Recurrencia

Ing. JULIO C. ACOSTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE

2019

Unidad II. Relaciones de Recurrencia

- Sucesiones y sumatorias.
- Definiciones por recurrencia.
- Relaciones de recurrencia.
- Clasificación de las relaciones de recurrencia.
- Resolución de los diferentes tipos de relaciones lineales – no lineales, homogéneas – no homogéneas, con coeficientes constantes – con coeficientes variables.
- Generación de números (pseudo) aleatorios.

En la obra de Gödel pueden rastrearse los inicios de la teoría de modelos y la teoría de la recursividad.

Kurt Gödel (1906-1978) Austria/Hungría (ahora República Checa) - 1978 Princeton, New Jersey.

El más destacado de sus teoremas es el de la incompletitud

En el año 1933 desarrolló ideas sobre la computabilidad y la función recursiva y sobre el concepto de verdad.

En teoría de la computación se demuestra que las funciones recursivas son funciones que pueden ser calculadas con el formalismo de cómputo más general conocido: las máquinas de Turing.

SUCESIONES

Definición 1. Una *sucesión* es una función que va de Naturales en Reales; si va de Naturales en Enteros se llama *Sucesión entera*

$S: \; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ o $S: \{a_n : n \in N\}$ o $S: \{a_n\}$

Los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son *términos* de la sucesión.

a_1 es el primer término de la sucesión, a_2 es el segundo término de la sucesión y así siguiendo a_n es el término *n-ésimo* de la sucesión.

Si se incluye el cero en el dominio de la sucesión,

a_0 será el primer elemento de la sucesión y

a_n será el término (n+1)-*ésimo* de la sucesión.

Por ejemplo: en la sucesión 2, 4, 6, … la fórmula para determinar el *n-ésimo* término es relativamente simple.

$$b_n = 2n$$

Si necesitamos calcular b_7 se resolverá $2 \cdot 7 = 14$

Es claro que para conocer b_7 no ha sido necesario conocer los términos anteriores

Consideremos las siguientes sucesiones:

S_1 *:1, 2, 3, 4, 5, 6, …*

S_2 *: 1, 4, 9, 16, 25, 36, …*

S_3 *:1, 3, 5, 7, 9, 11,…*

Sin embargo no en todas las sucesiones es posible conocer una fórmula explícita para el término n-ésimo, por ejemplo

S_4 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 . . .

Relaciones de Recurrencia

Hay series donde es posible conocer una expresión para el término *n*-ésimo, pero este no es una función explícita de *n*.

La sucesión de Fibonacci

S_5 : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

cada término es la suma de los dos anteriores

$$a_1=1, \quad a_2=1, \qquad a_n= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad n \geq 3$$

No tiene una fórmula explícita para a_n;
para conocer el valor de a_7 es necesario conocer los valores de a_6 y de a_5 ; para conocer el valor de a_6 es necesario conocer los valores de a_5 y de a_4 ; y así siguiendo.

$a_7 = a_6 + a_5$

$a_7 = a_5 + a_4 + a_4 + a_3 = a_5 + 2a_4 + a_3$

$a_7 = a_4 + a_3 + 2(a_3 + a_2) + a_2 + a_1 = a_4 + 3a_3 + 3a_2 + a_1$

$a_7 = a_3 + a_2 + 3a_3 + 3a_2 + a_1 = 4a_3 + 4a_2 + a_1$

$a_7 = 4a_2 + a_1 + 4a_2 + a_1 = 8a_2 + 5a_1$

pero: $a_1 = a_2 = 1$

entonces: $a_7 = 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 13$

Para calcular el término *n*-ésimo es necesario conocer los términos anteriores.

Fórmula de Binet
(para calcular términos de Fibonacci)

$$x_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749\ \ldots.$$

(número áureo o número de oro)

Definición 2

Si en una sucesión $S: \ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

el término a_n puede ser expresado en función de los términos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1$;

la expresión **es una *relación de recurrencia*** y se puede expresar:

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1)$$

En general, para poder calcular los términos de una sucesión, es necesario conocer al menos un término de la misma.

Definición 3

Sea *k* el entero menor para el cual tenemos asignados valores de $a_1, a_2, \ldots, a_k$

$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1)$

permite calcular valores únicos para a_n si $n > k$.

Los valores de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ se llaman ***condiciones iniciales*** *o* ***condiciones de frontera*** de la relación.

Las condiciones iniciales con la relación de recurrencia generan unívocamente la sucesión.

Ejemplo

S: 2, 10, 50, 250, 1250,…

S´: 3, 15, 75, 375, 1875,…

$$¿\quad a_n = 5\, a_{n-1}, \qquad n \geq 1 \quad ?$$

S:

$a_0 = 2$

$a_1 = 10 = 5*2$

$a_2 = 50 = 5*(5*2) = 5^2*2$

$a_3 = 250 = 5*(5*(5*2)) = 5^3*2$

$a_4 = 1250 = 5*(5*(5*(5*2))) = 5^4*2$

$$a_n = 2*5^n = a_0*5^n$$

$$\begin{cases} a_n = a_0 \cdot 5^n, & n \geq 0 \\ \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

S´:

$a_0 = 3$

$a_1 = 15 = 5*3$

$a_2 = 75 = 5*(5*3) = 5^2*3$

$a_3 = 375 = 5*(5*(5*3)) = 5^3*3$

$a_4 = 1875 = 5*(5*(5*(5*3))) = 5^4*3$

$$a_n = 3*5^n = a_0*5^n$$

Generalmente la relación de recurrencia está dada por

$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3},\ldots,a_1)$ para $n > k$

con condiciones iniciales $a_1, a_2,\ldots,a_k$

En este caso decimos que la sucesión

$S: a_1, a_2,\ldots, a_n$ satisface la relación de recurrencia

$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3},\ldots,a_1)$ para $n > k$,

con condiciones iniciales $a_1, a_2,\ldots,a_k$

Ejemplo

Sean las siguientes *sucesiones* con sus *condiciones iniciales*, encuentre el *término general* de cada una de las ecuaciones de recurrencia que las determinan y formule las ecuaciones de recurrencia correspondientes.

S_6: *4, 7, 10, 13, …* con $n \geq 1 \quad \wedge \quad a_1 = 4$

Rta. $a_n = a_{n-1} + 3$

$$\begin{cases} a_1 = 4, \;\; n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

S_7: *2, 5, 8, 11, …* con $n \geq 1 \quad \wedge \quad a_1 = 2$

Rta. $a_n = a_{n-1} + 3$

$$\begin{cases} a_1 = 2, \quad n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Definición 4.

La fórmula explícita para a_n que permite calcular la expresión para cada valor de *n*, sin necesidad de conocer los términos previos, se llama ***solución general*** de la relación de recurrencia.

Ejemplo

Sean las siguientes *sucesiones*, con sus correspondientes *condiciones iniciales*, encuentre la *solución general* de la ecuación de recurrencia que las determinan.

S_6: *4, 7, 10, 13, …* con $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_1 = 4, \;\; n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4, \;\; n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$a_4 = a_3 + 3 = a_2 + 3 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 = a_1 + 3 \cdot 3 = 13$$

$$a_n = a_{n-1} + 3 = a_{n-2} + 3 + 3 = \cdots = a_1 + 3 + \cdots + 3 = a_1 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = a_1 + 3(n-1)$$

$$\begin{cases} a_1 = 2, \quad n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 3 = a_2 + 3 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 = a_1 + 3 \cdot 3 = 11$$

$$a_n = a_{n-1} + 3 = a_{n-2} + 3 + 3 = \cdots = a_1 + 3 + \cdots + 3 = a_1 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = a_1 + 3(n-1)$$

Ejercicio

Una persona invierte $ 1.000 a 12% anual compuesto. Si a_n representa la cantidad obtenida al cabo de *n* años, determine una relación de recurrencia y condiciones iniciales que definan la sucesión $\{ a_n \}$.

$$a_n = a_{n-1} + 0{,}12 \cdot a_{n-1} = 1{,}12 \cdot a_{n-1}, \qquad n \geq 1$$

$$\begin{cases} a_0 = 1000, & n \geq 1 \\ a_n = 1{,}12 \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

$$a_0 = 1.000$$

$$a_1 = a_0 + 0{,}12 \cdot a_0 = 1{,}12 \cdot a_0$$

$$a_2 = a_1 + 0{,}12 \cdot a_1 = 1{,}12 \cdot a_1 = 1{,}12 \cdot 1{,}12 \cdot a_0 = 1{,}12^2 \cdot a_0$$

$$a_n = a_{n-1} + 0{,}12 \cdot a_{n-1} = 1{,}12 \cdots 1{,}12 \cdot a_0 = 1{,}12^n \cdot a_0$$

Algoritmo recursivo

Calcula la cantidad de dinero obtenida al cabo de *n* años, suponiendo un capital inicial de \$ 1.000 a 12% anual compuesto.

$$a_n = 1{,}12^n \cdot a_0$$

Entrada: ***n*** , cantidad de años

Salida: ***cantidad de dinero*** al cabo de n años

```
procedure compound_interest(n)
    if n = 0 then
        return(1000)
    return (1,12*compound_interest(n-1))
end compound_interest
```

$$a_n = 1{,}12^n \cdot a_0$$

Entrada: ***n*** , cantidad de años

Salida: ***cantidad de dinero*** al cabo de n años

1. **interes** = 1000
2. **For** *i* = 0, <=n, i++
3. **interes = interes** *1,12
4. **End-For**

<u>Clasificación de las Relaciones de Recurrencia</u>

<u>*Lineales*</u> o <u>*No Lineales*</u>:
Una relación de recurrencia *es lineal cuando cada término aparece elevado a la primera potencia*. Caso contrario es no lineal.

$$\begin{cases} a_1 = 5, \quad n \geq 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Lineal

$$\begin{cases} a_1 = 2;\ a_2 = 4, \quad n \geq 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Lineal

$$\begin{cases} a_1 = 4, \quad n \geq 1 \\ a_n = {a_{n-1}}^2 + 1 \end{cases}$$

No Lineal

Clasificación de las Relaciones de Recurrencia

Con *Coeficientes constantes* o con *Coeficientes variables*: Una ecuación de recurrencia *tiene coeficientes constantes cuando los coeficientes que acompañan cada término en la expresión son constantes*. Caso contrario, cuando al menos uno de los coeficientes es una función de *n*, se considera que la relación de recurrencia tiene coeficientes variables.

$$\begin{cases} a_1 = 2, \qquad n \geq 1 \\ a_n = n \cdot a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1;\ a_2 = 2, \qquad n \geq 1 \\ a_n = n \cdot a_{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-2} \end{cases}$$

Homogéneas o *No homogéneas*: Una relación de recurrencia *es homogénea cuando la sucesión idénticamente nula la satisface*

$a_n = 0$ *para todo n satisface la relación.* Caso contrario es no homogénea.

De orden *k*, $k \in N$.

Relación de Recurrencia lineal homogénea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

$c_1, c_2, \dots, c_k$ son constantes Reales $c_k \neq 0$

Relación de Recurrencia lineal NO homogénea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n, \quad n \geq k$$

Ejemplo

a) La relación de recurrencia $a_{n+1} = 5a_n$, $n \geq 0$

es lineal,
con coeficientes constantes,
de primer orden,
homogénea.

$$a_{n+1} - 5a_n = 0$$

b) La relación de recurrencia $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$, $n \geq 2$

es lineal,
con coeficientes constantes,
de segundo orden,
homogénea.

$$l_n - l_{n-1} - l_{n-2} = 0$$

c) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $n \geq 0$

es lineal,
con coeficientes constantes,
de primer orden y
no homogénea

$a_n - a_{n-1} = (n-1)$, $n \geq 0$

d) $a_{n+1} - a_n^2 - 2n\, a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0$ $n \geq 0$

es no lineal,
con coeficientes variables,
de tercer orden y
Homogénea.

$a_{n+1} = a_n^2 + 2n\, a_{n-1} - 5a_{n-2}$

Ejemplo

Sea la relación de recurrencia dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 0, \quad n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + (n-1) \end{cases}$$

- Clasifíquela según los criterios vistos.
- Calcule algunos términos en forma directa.
- Halle y verifique la solución general.

Respuesta

$$\begin{cases} a_1 = 0, \quad n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + (n-1) \end{cases}$$

a) Clasificación:

- lineal,
- con coeficientes constantes,
- de primer orden,
- no homogénea.

b) Cálculo de algunos términos

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = a_1 + (n-1) = 0 + (2-1) = 1$$

$$a_3 = a_2 + (n-1) = 1 + (3-1) = 1 + 2 = 3$$

$$a_4 = a_3 + (n-1) = 3 + (4-1) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$a_5 = a_4 + (n-1) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + (n-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$a_n = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Solución General

Carl Gauss
(1777-1855)

c) Verificación de la Solución General

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

$$a_n - a_{n-1} - (n-1) = 0$$

$$a_n - a_{n-1} - (n-1) =$$

$$\frac{(n-1)\cdot n - (n-2)(n-1)}{2} - (n-1) = (n-1)\frac{n-(n-2)}{2} - (n-1) =$$

$$= (n-1)\frac{n-n+2}{2} - (n-1) = (n-1) - (n-1) = 0$$

Ejemplo 4

Sea la relación de recurrencia dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 2, \ \ n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

- Clasifíquela según los criterios vistos.
- Calcule algunos términos en forma directa.
- Halle y verifique la solución general.

Respuesta

a)

$$\begin{cases} a_1 = 2, \;\; n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Es una relación de recurrencia:

- lineal
- con coeficientes constantes
- de primer orden
- no homogénea.

b) $a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

$a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$

$$a_n = a_{n-1} + 3$$
$$a_n = (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 2 \cdot 3$$
$$a_n = (a_{n-3} + 3) + 2 \cdot 3 = a_{n-3} + 3 \cdot 3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = \left(a_{n-(n-1)} + 3\right) + (n-1) \cdot 3 = (a_1 + 3) + (n-1) \cdot 3$$
$$a_n = (a_1 + 3) + (n-1) \cdot 3 = a_1 + 3n$$

$a_n = 2 + 3n \qquad n \geq 0$ Solución General

Verificación

c) $a_n = a_{n-1} + 3$

$$a_n - a_{n-1} - 3 = 0$$

$$a_n - a_{n-1} - 3 = (2 + 3n) - \big(2 + 3(n-1)\big) - 3 =$$

$$= (2 + 3n) - (2 + 3n - 3) - 3 = 2 + 3n - 2 - 3n + 3 - 3 = 0$$

Un caso de solución mediante sustitución en reversa

Ejemplo

Sea la relación de recurrencia dada por:

$$\begin{cases} a_0 = 2, \quad n \geq 0 \\ a_{n+1} - a_n = 5n \end{cases}$$

a) Clasifíquela según los criterios vistos.

b) Halle y verifique la solución general.

Respuesta

Resolveremos aplicando una técnica llamada *sumas telescópicas*

$$\begin{cases} a_0 = 2, \quad n \geq 0 \\ a_{n+1} - a_n = 5n \end{cases}$$

Es una relación de recurrencia:

- lineal,
- con coeficientes constantes,
- de primer orden,
- no homogénea

(puede resolverse aplicando sustitución en reversa)

b) $a_1 - a_0 = 5 \cdot 0$
$a_2 - a_1 = 5 \cdot 1$
$a_3 - a_2 = 5 \cdot 2$
$a_4 - a_3 = 5 \cdot 3$
.
.
.
$a_{n+1} - a_n = 5 \cdot n$

sumando miembro a miembro todas estas igualdades tenemos que:

$$(a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) =$$

$$= 5n + 5(n-1) + \cdots + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0$$

$$a_{n+1} - a_0 = 5n + 5(n-1) + \cdots + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = \sum_{i=0}^{n} 5i$$

$$a_{n+1} - a_0 = 5n + 5(n-1) + \cdots + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = \sum_{i=0}^{n} 5i$$

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 5i + a_0 = 5\sum_{i=0}^{n} i + a_0 = 5\frac{n(n+1)}{2} + 2, \qquad n \geq 0$$

$$a_{n+1} = 5\frac{n(n+1)}{2} + 2 \qquad n \geq 0$$ Solución General

c) Verificación

$$a_{n+1} - a_n = 5n$$

$$a_{n+1} - a_n - 5n = 0$$

$$a_{n+1} - a_n - 5n = \left(5\,\frac{n(n+1)}{2} + 2\right) - \left(5\,\frac{(n-1)n}{2} + 2\right) - 5n$$

$$a_{n+1} - a_n - 5n = 5\,\frac{n(n+1)}{2} - 5\,\frac{(n-1)n}{2} - 5n$$

$$a_{n+1} - a_n - 5n = 5\,\frac{n(n+1)-(n-1)n}{2} - 5n$$

$$a_{n+1} - a_n - 5n = 5n\,\frac{(n+1)-(n-1)}{2} - 5n$$

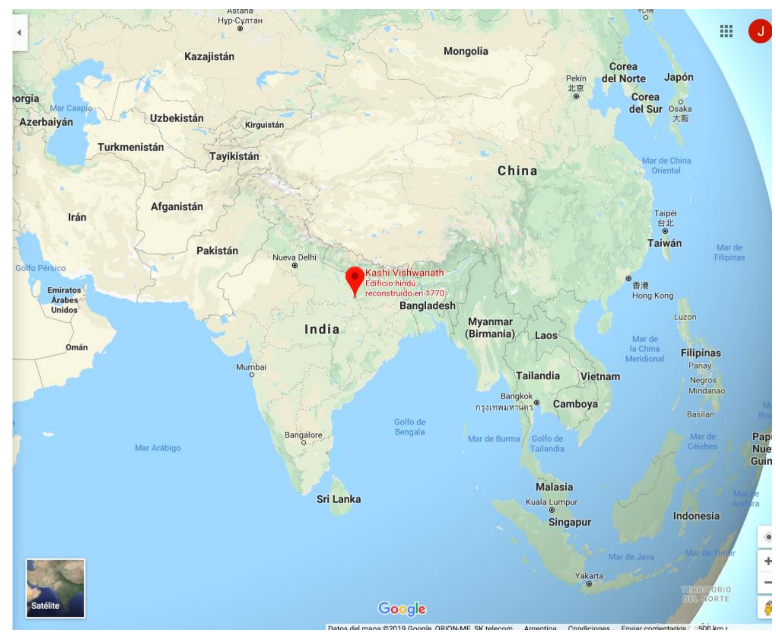
$$a_{n+1} - a_n - 5n = 5n\,\frac{n+1-n+1}{2} - 5n = 5n - 5n = 0$$

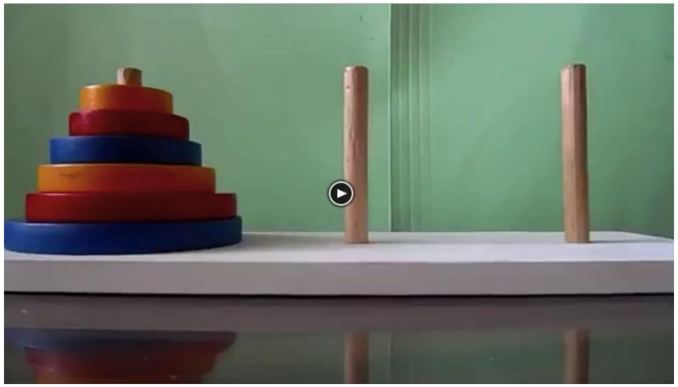
Torres de Hanoi

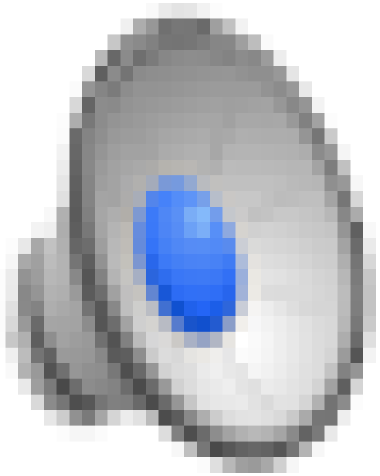
Templo Kashi Vishwanath

3 palos

64 discos

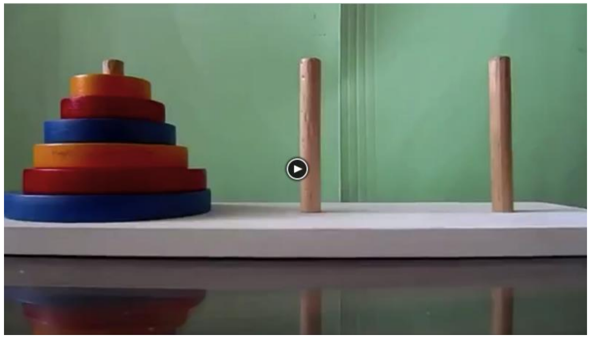






Llevar *n + 1* discos del poste 1 al poste 3

a_n Cantidad de pasos para llevar n discos del poste 1 al poste 2



Pasamos el disco n+1 del poste 1 al poste 3 (un paso mas)

a_n Cantidad de pasos para llevar n discos del poste 2 al poste 3

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 , \qquad n \geq 0 , \qquad a_0 = 0$$

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad n \geq 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

Solución general

$$y = 2^n - 1\,, \qquad n > 0$$

64 discos 1,84467x10^{19} seg. 584.942 millones de años

Algoritmo Torres de Hanói (Complejidad $\Theta(2^n)$)

Entrada: Tres pilas de números *origen*, *auxiliar*, *destino*, con la pila *origen* ordenada

Salida: La pila *destino*

1. **sí** *origen* $==\{1\}$ **entonces**
    1. **mover** el disco 1 de pila origen a la pila destino (insertarlo arriba de la pila destino)
    2. **terminar**
2. **si no**
    1. *hanoi*($\{1,...,n-1\}$,*origen*,*destino*, *auxiliar*) //mover todas las fichas menos la más grande (*n*) a la varilla auxiliar
3. **mover** disco *n* a *destino* //mover la ficha grande hasta la varilla final
4. *hanoi* (*auxiliar*, *origen*, *destino*) //mover todas las fichas restantes, 1...*n*–1, encima de la ficha grande (*n*)
5. **terminar**

Relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes

Definición: Una relación de recurrencia es una *relación lineal, homogénea con coeficientes constantes de orden k* (*k*∈*N*) si es de la forma:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes reales y $c_k \neq 0$

La Solución General tiene la forma:

$$a_n = a_0 r^n \qquad a_0 \neq 0 \;\wedge\; r \neq 0$$

$$a_n = a_0 r^n \qquad a_0 \neq 0 \quad \wedge \quad r \neq 0$$

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

$$a_0 r^n + c_1 a_0 r^{n-1} + c_2 a_0 r^{n-2} + \cdots + c_k a_0 r^{n-k} = 0$$

$$a_0 r^{n-k} (r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k) = 0$$

dado que $\quad a_0 r^{n-k} \neq 0$

$$r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k = 0$$

$$P(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

Solución de relaciones de Recurrencia Homogéneas

Relación de recurrencia homogénea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

polinomio característico de grado k asociado

$$P(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

ecuación característica

$$r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k = 0$$

Solución General

$$a_n = a_0 r^n \qquad a_0 \neq 0 \;\; \wedge \;\; r \neq 0$$

2019 46

Ejemplo

Sea la relación de recurrencia homogénea lineal de primer orden

$$\begin{cases} a_0 = 1\,, \quad n > 0 \\ a_n + 5a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Solución General

$$a_n = a_0 r^n \qquad a_0 \neq 0 \;\; \wedge \quad r \neq 0$$

$$a_0 r^n + 5a_0 r^{n-1} = 0$$

$$a_0 r^{n-1}(r + 5) = 0$$

$$r + 5 = 0 \qquad \rightarrow \qquad r = -5$$

$$\begin{cases} a_0 = 1\,, \quad n > 0 \\ a_n + 5a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Solución General

$$a_n = a_0 r^n \qquad\qquad a_0 \neq 0 \quad \wedge \quad r \neq 0$$

$$r = -5 \qquad\qquad \rightarrow \qquad\qquad a_n = 1 \cdot (-5)^n$$

Verificación

$$a_n + 5a_{n-1} = 0$$

$$1 \cdot (-5)^n + 5 \cdot 1 \cdot (-5)^{n-1} = 0$$

$$(-5)^{n-1}[(-5) + 5] = 0$$

Teorema

Hipótesis: Sea una ecuación de recurrencia lineal, homogénea, de primer orden

$$a_n + ca_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad a_0$$

Tesis: La solución es $a_n = a_0(-c)^n, \quad n \geq 0$

Demostración: Proponemos como solución

$$a_n = a_0 r^n \qquad a_0 \neq 0 \;\; \wedge \;\; r \neq 0$$

$$a_n + ca_{n-1} = a_0 r^n + ca_0 r^{n-1} = 0$$

$$a_0 r^{n-1}(r + c) = 0 \qquad r = -c$$

$$a_n = a_0(-c)^n, \;\; n \geq 0$$

Relación de recurrencia lineal, homogénea, de segundo orden

$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0, \quad n \geq 3$ condiciones iniciales a_1 y a_2

La ecuación característica es $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$

Raíces reales y distintas S_1 y S_2

$$a_n = u \cdot s_1^n + v \cdot s_2^n$$

Raíces reales e iguales $S_1 = S_2 = S$

$$a_n = u \cdot s^n + n \cdot v \cdot s^n$$

u y v dependen de las condiciones iniciales

Raíces reales y distintas S_1 y S_2

$$a_n = u \cdot s_1^n + v \cdot s_2^n$$

$$\begin{cases} u \cdot s_1 + v \cdot s_2 = a_1 \\ u \cdot s_1^2 + v \cdot s_2^2 = a_2 \end{cases}$$

Raíces reales e iguales $S_1 = S_2 = S$

$$a_n = u \cdot s^n + n \cdot v \cdot s^n$$

$$\begin{cases} u \cdot s + v \cdot s = a_1 \\ u \cdot s^2 + 2 \cdot v \cdot s^2 = a_2 \end{cases}$$

Si la condiciones iniciales del problema son a_0 y a_1

$$\begin{cases} u + v = a_0 \\ u \cdot s_0 + v \cdot s_1 = a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = a_0 \\ u \cdot s + v \cdot s = a_1 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) Halle la solución general de la sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1\,; \;\; a_2 = 3\,; \;\;\; n \geq 3 \\ \; a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$, donde $c_1 = -1$ y $c_2 = -6$

$r^2 - r - 6 = 0$ cuyas soluciones son: $S_1 = 3$ y $S_2 = -2$

$$a_n = u \cdot s_1^n + v \cdot s_2^n \qquad a_n = u \cdot 3^n + v \cdot (-2)^n$$

$$\begin{cases} u \cdot s_1 + v \cdot s_2 = a_1 \\ u \cdot s_1^2 + v \cdot s_2^2 = a_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \cdot u + (-2) \cdot v = 1 \\ 9 \cdot u + 4 \cdot v = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot u + (-2) \cdot v = 1 \\ 9 \cdot u + 4 \cdot v = 3 \end{cases}$$

$S_1 = 3$ y $S_2 = -2$

$u = 1/3$ y $v = 0$

$$a_n = u \cdot s_1^n + v \cdot S_2^n = u \cdot 3^n + v \cdot (-2)^n$$

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n + 0 \cdot (-2)^n$$

$$a_n = 3^{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

Verificación

$$a_n - a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2} = 0$$

$$3^{n-1} - 3^{n-2} - 6 \cdot 3^{n-3} = 3^{n-3}(3^2 - 3 - 6 \cdot 1) = 0$$

b) Halle la solución general de la sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_1 = {}^{3}/_{2} \ ; \ a_2 = 3 \ ; \ n \geq 3 \\ \quad a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$, donde $c_1 = -2$ y $c_2 = 1$

$r^2 - 2r + 1 = 0$ cuyas soluciones son: $S_1 = 1$ y $S_2 = 1$

$$a_n = u \cdot 1^n + n \cdot v \cdot 1^n$$

$$\begin{cases} u \cdot s + v \cdot s = a_1 \\ u \cdot s^2 + 2 \cdot v \cdot s^2 = a_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 3/2 \\ u + 2v = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 3/2 \\ u + 2 \cdot v = 3 \end{cases} \qquad S_1 = 1 \text{ y } S_2 = 1$$

$$u = 0 \quad \text{y} \quad v = 3/2$$

$$a_n = u \cdot S^n + n \cdot v \cdot S^n = u \cdot (1)^n + n \cdot v \cdot (1)^n$$

$$a_n = 0 \cdot (1)^n + n \cdot \frac{3}{2}(1)^n = \frac{3}{2}n$$

Verificación

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0\,, \quad n \geq 3, \quad a_1 = 3/2, \; a_2 = 3$$

$$\frac{3}{2}n - 2 \cdot \frac{3}{2}(n-1) + \frac{3}{2}(n-2) =$$

$$\frac{3}{2}n - 3n + 3 + \frac{3}{2}n - 3 = 0$$

c) Halle la solución general de la sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \,; \;\; a_1 = 3 \,; \quad n \geq 2 \\ a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$, donde $c_1 = -1$ y $c_2 = -6$

$r^2 - r - 6 = 0$ cuyas soluciones son: $S_1 = 3$ y $S_2 = -2$

$$a_n = u \cdot s_1^n + v \cdot s_2^n \qquad a_n = u \cdot 3^n + v \cdot (-2)^n$$

$$\begin{cases} u + v = a_0 \\ u \cdot s_1 + v \cdot s_2 = a_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 1 \\ 3 \cdot u - 2 \cdot v = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 3 \cdot u - 2 \cdot v = 3 \end{cases}$$

$S_1 = 3$ y $S_2 = -2$

$u = 1$ y $v = 0$

$$a_n = u \cdot S_1^n + v \cdot S_2^n = u \cdot 3^n + v \cdot (-2)^n$$

$$a_n = 1 \cdot 3^n + 0 \cdot (-2)^n$$

$$a_n = 3^n$$

Verificación

$$a_n - a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2} = 0$$

$$3^n - 3^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-2}(3^2 - 3 - 6 \cdot 1) = 0$$

d) Halle la solución general de la sucesión definida por:

$$\begin{cases} a_0 = 1\,; \ \ a_1 = 3\,; \quad n \geq 2 \\ a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación característica es: $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$, donde $c_1 = -4$ y $c_2 = 4$

$r^2 - 4r + 4 = 0$ cuyas soluciones son: $S_1 = 2$ y $S_2 = 2$

$$a_n = u \cdot s^n + n \cdot v \cdot s^n \qquad a_n = u \cdot 2^n + n \cdot v \cdot 2^n$$

$$\begin{cases} u = a_0 \\ u \cdot s + v \cdot s = a_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 1 \\ u \cdot 2 + v \cdot 2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 \\ 2 \cdot u + 2 \cdot v = 3 \end{cases}$$

$S_1 = 2$ y $S_2 = 2$

$u = 1$ y $v = 1/2$

$$a_n = u \cdot s^n + n \cdot v \cdot s^n = 2^n + n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

$$a_n = 2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

Verificación

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

$$2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right) - 4 \cdot 2^{n-1}\left(1 + \frac{n-1}{2}\right) + 4 \cdot 2^{n-2}\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) =$$

$$2^n\left(1+\frac{n}{2}\right)-4\cdot 2^{n-1}\left(1+\frac{n-1}{2}\right)+4\cdot 2^{n-2}\left(1+\frac{n-2}{2}\right)=$$

$$2^n\left(1+\frac{n}{2}\right)-4\cdot 2^{n-1}\left(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)+4\cdot 2^{n-2}\left(1+\frac{n}{2}-1\right)=$$

$$\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(2^n-4\cdot 2^{n-1}+4\cdot 2^{n-2}\right)+4\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}-4\cdot 2^{n-2}\cdot 1=$$

$$\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(2^n-2^2\cdot 2^{n-1}+2^2\cdot 2^{n-2}\right)+2\cdot 2^{n-1}-2^2\cdot 2^{n-2}=$$

$$\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(2^n-2\cdot 2^n+2^n\right)+2^n-2^n=$$

$$\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(2^n-2\cdot 2^n+2^n\right)+2^n-2^n=0$$

FIN