INTRODUCCION

El cálculo de proposiciones estudia los esquemas de inferencia o deductivos, por ejemplo:

$$\{p, p \rightarrow q\} \vdash q$$

Es un esquema de inferencia válido, es tan válido para:
p: juan llora q: Juan tiene hambre

como para:

p: el planeta tierra no existe q: el Sena atraviesa París

Pero existen inferencias válidas que la *lógica de proposiciones* (LP) no permite expresarlas como válidas. Ejemplos:

a) Todo hombre es mortal, Sócrates es un hombre, luego Sócrates es mortal. (Aristóteles)
b) Todo caballo es animal, luego toda cabeza de caballo es una cabeza de animal. (De Morgan)
c) Juan es más grande que Pedro, Pedro es más grande que Pablo, luego Juan es más grande que Pablo.

Para estudiar estas proposiciones necesitamos *descomponerlas* pero la LP no estudia la estructura interna de las proposiciones.

Desde tiempos de Aristóteles se reconoció en el estudio de las estructuras internas de las proposiciones un *sujeto*, una *cópula* y un *predicado.* Ejemplo:

En: "Todo hombre es mortal" reconocemos *hombre* como sujeto*, es* como cópula y *mortal* como predicado (o atributo). La unión de estos elementos en la expresión: "Todo hombre es mortal" constituye una proposición donde *todo* determina la cantidad. La lógica clásica produjo una teoría bastante completa de las inferencias de este tipo en la *silogística*.

Pero en el caso b) a pesar de la analogía de la estructura de las expresiones, la silogística no es suficiente para dar cuenta de la validez del razonamiento.

En el caso c) la incapacidad de la silogística para abordar la validez del razonamiento es puesta de manifiesto con mayor evidencia. Si consideramos que las expresiones "más grande que Pedro" y "más grande que Pablo" son *predicados* el razonamiento no entra en ninguna de las inferencias válidas antes vistas; para ver la validez del razonamiento debemos tomar la expresión "es más grande que" como una *copula* dotada de una propiedad particular (la transitividad), pero esto no entra en ningún silogismo. Esto revela el límite de la lógica silogística y da inicio a la Lógica de Predicados o Cálculo de predicados (CP).

En la expresión "Juan es más grande que Pedro".

no hay un sujeto ligado a un predicado por una cópula sino que hay *dos sujetos ligados entre sí por una relación.* En este caso la relación es: *es más grande que*

El caso expuesto es una relación binaria (vincula a dos sujetos), pero las relaciones pueden ser ternarias, cuaternarias... n-arias.

Ejemplos:

8 es la suma de 6 y de 2 — es una relación ternaria

Juan y María son hijos de José y Laura — es una relación cuaternaria

Así el CP es en realidad un cálculo de relaciones, de cualquier aridad finitas y que son llamadas predicados por un abuso de lenguaje.

El objetivo del CP es estudiar los esquemas de razonamientos válidos cuyos enunciado de base son *formas relacionales*.

Ejemplo: "x es mayor que y" es una *forma relacional* que se convierte en proposición si reemplazamos x e y por dos nombres propios.

SINTAXIS DEL CALCULO DE PREDICADOS

Alfabeto del cálculo de predicados

El alfabeto del cálculo de predicados $\mathcal{L}$ está compuesto de la manera siguiente:

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} \cup K \cup \mathcal{P} \cup \mathbb{Q} \cup \mathcal{C} \cup F \cup \mathbb{P}$$

Donde:

1. $\mathcal{V}$ es un conjunto de variables de individuo $\mathcal{V} = \{x_1; x_2; x_3; \dots ; x_n\}$
2. K es un conjunto de conectores lógicos $K = \{\neg\} \cup \{\wedge; \vee; \rightarrow, \leftrightarrow\}$
3. $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos auxiliares $\mathcal{P} = \{(;)\}$

Hasta acá los símbolos propios del Lenguaje de Proposiciones. A esto le agregamos los símbolos propios del LCP

4. $\mathbb{Q}$ es un conjunto de cuantificadores $\mathbb{Q} = \{\forall; \exists\}$
5. $\mathcal{C}$ es un conjunto de constantes de individuo $\mathcal{C} = \{a_1; a_2; a_3; \dots ; a_n\}$; puede ser $\mathcal{C} = \emptyset$
6. F es un conjunto de funciones $F = \{f_1; f_2; f_3; \dots ; f_n\}$ donde el subíndice llamado aridad indica el número de variables de la función.

7. $\mathbb{P}$ es un conjunto de predicados (en $\mathbb{P}$ están los predicados unarios, binarios de dos argumentos, … n-arios). $\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_1; \mathbb{P}_2; \mathbb{P}_3; \dots; \mathbb{P}_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$

Cuantificadores

Cuando escribimos $\forall x P(x)$ estamos refiriendo que todas las variables x verifican la propiedad P

Cuando escribimos $\exists x P(x)$ estamos refiriendo que algunas las variables x (al menos una o todas menos una) verifican la propiedad P

Se pueden negar las expresiones que contienen cuantificadores

La negación de $\forall x P(x)$ queda:

$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

La negación de $\exists x P(x)$ queda:

$\neg \exists x P(x) \equiv \nexists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Cuantificadores anidados

a. Sea el predicado $P(x, y)$: "$x + y = 0$"

podemos escribir: $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \forall x \exists y: (x + y = 0)$

esto lo podemos pensar como: $Q(x): \exists y\ (x + y = 0)$ si asumimos que el existencial está asignando un valor particular a la variable y .

Entonces: $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \forall x Q(x)$

Así para cada x existe algún y que verifica el predicado $(x + y = 0)$

(lo cual es verdad en el conjunto de los Reales por ejemplo)

b. Ahora bien, si escribo: $\exists x \forall y P(x, y) \equiv \exists x \forall y: (x + y = 0)$

lo podemos pensar como: $R(y): \forall y\ (x + y = 0)$ si asumimos que el universal no asigna un valor particular a la variable y , la expresión

$\exists x \forall y P(x, y) \equiv \exists x R(y)$ resulta falsa, porque la afirmación es que: existe un valor de x de manera tal que no interesa cual sea el valor de y , el predicado $(x + y = 0)$ se verifica. En el contraejemplo es: si $x = 4$, y $y = 2$, el predicado no se verifica, por tanto la formula resulta falsa.

c. Otro caso, $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall x, y : (x + y = 0)$

El contra ejemplo de esta expresión se encuentra fácilmente con tal que los valores asignados a las variables no sean opuestos.

Cuantificadores en dos variables:

	La fórmula es verdadera	La fórmula es falsa
$\forall x, y: P(x, y)$ $\forall y, x: P(x, y)$	Cuando $P(x, y)$ resulta verdad sin importar cuales sean los valores asignados a las variables.	Cuando exista al menos un par de valores de las variables para los cuales $P(x, y)$ resulte falso.
$\forall x \exists y: P(x, y)$	Cuando sin importar el valor que tome la variable x , habrá algún valor de y que haga verdadera la proposición $P(x, y)$	Cuando exista al menos un valor de la variable x , para el cual cualquier valor que pueda tomar y nos lleve a que $P(x, y)$ es falsa.
$\exists x \forall y: P(x, y)$	Cuando existe algún valor de la variable x para el cual $P(x, y)$ sea verdadero con cualquier valor de la variable y .	Cuando para cualquier valor de la variable x $P(x, y)$ resulta falsa sin importar cual sea el valor de la variable y .
$\exists x \exists y: P(x, y)$	Cuando existe algún par de valores para las variables x e y de manera que $P(x, y)$ resulte verdadera.	Cuando para cualquier par de valores para las variables x e y la formula $P(x, y)$ resulta falsa.

Negación de cuantificadores anidados

Tomemos: $\forall x \exists y P(x, y)$ recordemos que lo hemos pensado como $\forall x Q(x)$ donde $Q(x)$: $\exists y P(x, y)$; entonces aplicamos la negación a la formula inicial

$$\neg[\forall x \exists y P(x, y)] \equiv \neg \forall x Q(x) \equiv \exists x \neg Q(x) \equiv \exists x \neg[\exists y P(x, y)] \equiv \exists x \forall y \neg P(x, y)$$

Siguiendo este razonamiento podemos confeccionar la siguiente tabla:

Afirmación	Negación
$\forall x \forall y P(x, y)$	$\exists x \exists y \neg P(x, y)$
$\forall x \exists y P(x, y)$	$\exists x \forall y \neg P(x, y)$
$\exists x \forall y P(x, y)$	$\forall x \exists y \neg P(x, y)$
$\exists x \exists y P(x, y)$	$\forall x \forall y \neg P(x, y)$

Ejercicios: Escriba las fórmulas lógicamente equivalentes aplicando las reglas de la negación de las fórmulas cuantificadas.

a. $\neg(\forall x \left(\exists y\left(P(x, y)\right) \rightarrow Q(x)\right))$

b. $\exists x \neg Q(x)$

c. $\neg(\forall x\left(\left(S(x) \vee Q(x)\right) \rightarrow R(x)\right))$

d. $\neg(\forall x \neg\left(\left(S(a) \vee Q(x)\right) \rightarrow \neg(\exists x R(x)\right)))$

e. $\forall x(S(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$

f. $\neg(\exists x \neg\left(R(x) \vee \left(\exists y \neg Q(y)\right)\right))$

g. $\neg(\forall x \exists y(R(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg P(x,y))$

h. $\neg(\exists x \forall y(\neg R(x) \vee P(x,y)))$

Reglas de buena formación para las EBF del CP

Vamos a llamar *términos* del lenguaje a las expresiones del lenguaje que identifican posibles objetos del mundo.

Las constantes del conjunto $\mathcal{C}$ identifican objetos determinados, por tanto las constantes son términos del lenguaje.

Las variables del conjunto $\mathcal{V}$ identifican objetos genéricos, por tanto las variables son términos del lenguaje.

Las funciones aplicadas a otros términos del lenguaje son también términos del lenguaje, es decir que si f es de aridad n y $t_1; t_2; t_3; \dots; t_n$ son términos del lenguaje, entonces $f(t_1; t_2; t_3; \dots; t_n)$ también es un término del lenguaje

Regla 1.

Si $\mathbb{P}_n$ es un predicado de aridad n y $t_1; t_2; t_3; \dots; t_n$ son términos del lenguaje, entonces $\mathbb{P}_n = \{t_1; t_2; t_3; \dots; t_n\}$ es una EBF. Esta es una fórmula atómica (se llama así porque no puede ser descompuesta)

Regla 2.

Si ϕ es una EBF, entonces $\neg\phi$ también es una EBF.

Regla 3.

Si ϕ es una EBF, entonces: $\forall x\, \phi$ y $\exists x\, \phi$ son EBF.

Regla 4.

Si ϕ y ψ son EBF, entonces $\phi \wedge \psi$; $\phi \vee \psi$; $\phi \rightarrow \psi$; $\phi \leftrightarrow \psi$ son EBF.

Regla 5.

Solo son EBF las obtenidas por la aplicación de las reglas precedentes

Ejemplos de EBF

$P_2(x_1, x_2)$ es una EBF

$\forall x_1 \, \exists x_2 \, P_3(x_1,\ x_2,\ x_3)$ es una EBF

$P_2\left(x_{5,}\ x_6\right) \rightarrow \exists x_5 \, P_1(x_5)$ es una EBF

$\forall a \, P(a)$ NO es una EBF porque al ser a una constante, no puede estar afectada de un cuantificador.

Asumiendo que P es de aridad 2, $P(x)$ NO es una EBF porque P es de aridad dos y en la expresión abarca a un solo término.

<u>Convenciones</u>

En adelante cuando sea posible y para simplificar las expresiones podemos eliminar los subíndices asignándoles diferentes denominaciones a las variables por ej. en vez de $x_1;\ x_2$ escribiremos $x,\ y$. Eventualmente en vez de escribir $P(x_1,\ x_2)$ se puede escribir $P(x\ y)$.

Alcance de los cuantificadores:

El alcance del cuantificador universal en $\forall x \phi$ es $\emptyset$. Análogamente el alcance del cuantificador existencial en $\exists x \phi$ es $\emptyset$

Ejemplo:

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \wedge Q(y))$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$
4. $P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

En el caso 1. el alcance del cuantificador universal es la fórmula $P(x) \rightarrow Q(x)$

En el caso 2. El alcance del cuantificador universal es la formula $\exists x P(x) \wedge Q(y)$ y el del cuantificador existencial es $P(x)$

En el caso 3. el alcance del cuantificador universal es la fórmula $P(x)$

En el caso 4. el alcance del cuantificador universal es la fórmula $Q(x)$

Ejemplo:

Dadas las siguientes oraciones:

1. Juan es amigo de Pepe
2. No es cierto que Pepe sea amigo de Luis
3. Todos los amigos de Juan son amigos de Pepe
4. Algunos amigos de Juan no son amigos de Luis
5. Ninguno es amigo de todos

Vamos a construir un vocabulario para expresar las oraciones dadas en CP

Si a = Juan; b = Pepe; c = Luis entonces: $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$

$\mathcal{V} = \{x, y\}$

$F = \emptyset$

$P(x, y) = x \quad es\ amigo\ de \quad y$

entonces:

1. $P(a, b)$
2. $\neg P(a, c)$
3. $\forall x P(x, a) \rightarrow P(x, b)$
4. $\exists x P(x, a) \land \neg P(x, c)$
5. $\forall x (\exists y \neg P(x, y))$

Variables libres y variables ligadas

Una variable x es ligada en una fórmula cuando la aparición de x está inmediatamente a continuación de un cuantificador o cuando la aparición de x está en el ámbito de un cuantificador que tiene a x como variable ligada.

Ejemplo: en $\forall x P(x)$ las dos apariciones de x son ligadas.

Una aparición de x que no es ligada, se dice que es libre.

Si ψ es una formula y ϕ es otra fórmula del tipo $\neg\psi$, las apariciones libres de una variable en ϕ son las apariciones libres de la misma variable en ψ.

Si ψ es una formula y x una variable, asimismo ϕ es de la forma $(\forall x \psi)$ o $(\exists x \psi)$ entonces todas las apariciones de x en ϕ son ligadas.

Ejemplo: Determinemos la aparición de variables libres y/o ligadas en las siguientes formulas.

1. $(\forall y P(x, y)) \rightarrow Q(x, z)$
2. $(\exists x P(x)) \lor Q(x, y)$
3. $R(x, y)$ y $P(y)$
4. $\forall y P(y)$
5. $(R(x, y) \lor (\forall y P(y)))$
6. $\left(\exists x R(x, y) \lor (\forall y P(y))\right)$
7. $P(a, b)$ y $R(f(a))$
8. $\exists y P(x, y)$

En 1. x y z aparecen como variables libres y las apariciones de y son como variable ligada.

En 2. las dos primeras apariciones de x son ligadas, la restante es libre al igual que la aparición de y.

En 3. Ninguna de las variables aparece ligada.

En 4. La variable y tiene dos apariciones ligadas.

En 5. Solo son ligadas las dos últimas apariciones de y .

En 6. Es ligada la variable x y la segunda y tercera aparición de la variable y , las restantes son libres.

En 7. No hay aparición de variables.

En 8. La variable y aparece dos veces ligada y x libre.

<u>Fórmula cerrada</u> (o sentencia, o enunciado)

Una EBF es una formula cerrada (o enunciado) si no contiene variables libres.

Ejemplos:

1. $\forall y Q(y,a)$ es un enunciado
2. $\forall x(P(x) \vee R(x,f(c)))$ es un enunciado
3. $(\exists x P(x)) \vee Q\big(x,f(a)\big)$ No es un enunciado (la última aparición de x es libre)
4. $\forall x \exists y(P(x,y) \leftrightarrow \forall z R(x,y,z))$ es un enunciado

<u>Fórmula básica</u>

Una fórmula se llama básica si no contiene variables. Todas las fórmulas básicas son enunciados, pero la implicación recíproca no es verdadera.

<u>Sustitución de las apariciones libres de una variable</u>

Sea s una variable o una constante en una formula ϕ , designamos $\emptyset(x/s)$ al resultado de sustituir todas las apariciones libres de la variable x por la variable (o constante) s en la formula ϕ .

Ejemplo:

1. $\emptyset = \forall x(P(x) \wedge P(y))$ $\emptyset(y/a) = \forall x(P(x) \wedge P(a))$
2. $\emptyset = \forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \rightarrow P(x,u,z))$ $\emptyset(u/x) = \forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \rightarrow P(x,x,z)$

<u>TRABAJOS PRACTICOS</u>

Trabajo Práctico Nº 1

Sea $< \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ un vocabulario de una lenguaje de primer orden donde $\mathcal{C} = \{a,b,c\}$;

$\mathcal{F} = \{f\}$; donde f es una función unaria y $\mathbb{P} = \{P, R\}$ h donde P es una predicado unario y R es un predicado binario. Diga si las siguientes expresiones son FBF de un lenguaje de primer orden. Justifique. (Asumimos que $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$).

1. $(\forall y R(a, y) \rightarrow \forall x P(f(x)))$
2. $(\exists x((\forall y R(b, y) \vee P(x, f(a)))))$
3. $(P(f(a)) \wedge \neg R\big(f\big(f(a)\big), b\big)$
4. $(\forall y f(P(y)))$
5. $(\exists z R(b, z) \vee (\forall x P(x, f(c)))$
6. $((P(a) \rightarrow P(b)) \rightarrow (\exists z R(z, f(z)))$

Trabajo Práctico Nº 2

Sea $< \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ un vocabulario de una lenguaje de primer orden donde $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F} = \{f, g\}$; donde f es una función unaria y g una función binaria, $\mathbb{P} = \{P, Q, R, " = "\}$ h donde "=" y P son predicados binarios y Q y R son un predicados unarios. Diga cuales de las siguientes expresiones son términos de L y son fórmulas de L.

1. $(\exists f(x) R(g(x, y)))$
2. $g(f(x), f(y))$
3. $f(P(a, b) \wedge Q(c))$
4. $P(Q(a), b)$
5. $(\forall x(\exists c P(x, c)))$
6. $(\exists x \left(\exists y = \big(P(x, y), P(y, x)\big)\right))$
7. $P(f(x), f(y))$
8. $(\forall x(\exists y\big(P(g(x, y), y) \wedge \neg{=}\ (x, y)\big)\big)$
9. $(\exists x((x \vee y) \wedge x))$
10. $(\forall x \wedge \forall y) g(x, y)$

Trabajo Práctico Nº 3

Sea $< \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ un vocabulario de una lenguaje de primer orden donde $\mathcal{C} = \{a, b\}$; $\mathcal{F} = \{f\}$; donde f es una función binaria, $\mathbb{P} = \{P, Q\}$ donde P es un predicado binario y Q es un predicado unario. Diga cuales de las siguientes fórmulas son enunciados.

1. $(Q(a) \vee Q(b))$
2. $Q\big(f(x, a)\big)$
3. $(\forall x(Q(x) \rightarrow P(x, y)))$
4. $(\exists x(Q(x) \wedge (\forall y P(x, y))))$
5. $(\forall y(P(x, y) \wedge (\exists x P(x, y))))$
6. $(\forall y(\exists x P(f(x, b), y) \vee (\neg Q(a) \rightarrow P(x, a))))$

Trabajo Práctico Nº 4

Dadas las siguientes afirmaciones:

1. Todos los grafos completos son regulares
2. K_4 no es un grafo euleriano
3. Existen grafos regulares que no son conexos
4. Todo subgrafo de un grafo conexo es conexo
5. K_{12} es un grafo completo y tiene un número par de aristas

a) Identifique un vocabulario de un lenguaje de primer orden que permita especificarlas.

b) Teniendo en cuenta el vocabulario definido en el item anterior, exprese las oraciones en forma simbólica.

SEMANTICA DEL CALCULO DE PREDICADOS

Para determinar el valor de verdad de una EBF en la lógica de proposiciones, basta con asignar una distribución de valores de verdad (dvv) en el conjunto de las variables proposicionales. En el CP la situación es un poco mas compleja.

Consideremos la EBF $\phi = \forall x P(x)$; para saber si esto es verdadero o falso, debemos *interpretar* el predicado P. Supongamos que P significa "es argentino", entonces $\phi = \forall x P(x)$ significa "todo x es argentino"; pero con esto no podemos todavía decidir si $\phi = \forall x P(x)$ es verdadera o falsa, necesitamos saber a qué dominio se refiere la variable x . Por ejemplo si la variable x es del dominio de "ciudadanos de Santa Fe", entonces $\phi = \forall x P(x)$ resulta ser verdadera.

Ejemplo:
La existencia del neutro en el conjunto de los número naturales incluido el cero para la operación suma se escribe:

$$\forall x \in N_0 : \exists e \ / \ x + e = e + x = x$$

Esto en CP lo podemos escribir:

$$\forall x \exists c \ P(x, c)$$

Para analizar el valor de verdad de esta expresión es necesario interpretar el predicado P, determinar el dominio al que pertenece x y definir la constante c. Es decir, es necesario dar una *interpretación* a la formula $\forall x \exists c \ P(x, c)$, entonces damos la siguiente interpretación:

$$\mathcal{J} = \langle N_0, 0, + \rangle$$

bajo esa interpretación $\forall x \exists c \ P(x, c)$ resulta verdadera.

Así entonces, toda formula del cálculo de predicados en una *forma relacional.* Para que esa forma relacional se transforme en una proposición y pueda ser declarada verdadera o falsa es necesario una *interpretación* $\mathcal{J}$ que contenga:

a) Un dominio de individuos
b) Un significado para cada símbolo de predicados
c) Una interpretación para cada símbolo de constante
d) Una asignación para los símbolos de variables

Por tanto, una interpretación en cálculo de predicados es una *Estructura relacional* o *estructura de primer orden*, el estudio de estas estructuras es el objeto de la semántica de la lógica.

Ejemplo:

Supongamos un vocabulario $\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ de un lenguaje $\mathcal{L}$ compuesto por una constante c , un símbolo de función f de aridad 1 y un símbolo de predicado R de aridad 2. Para interpretarlo debemos definir un Universo U e indicar qué es la constante c , cual es la función que representa f y qué relación binaria se establece en R -asumiendo que los pares ordenados que satisfacen la relación tienen asignados el valor 1 y los pares ordenados que no satisfacen la relación tienen asignados el valor 0-.

Sea U = {1, 2, 3}.

Existen tres elecciones posibles para el símbolo de la constante c ; c = 1 o c = 2 o c = 3.

Existen 3^3 elecciones posibles distintas para el símbolo de la función unaria f .

$f(1) = 1$	$f(2) = 1$	$f(3) = 1$
$f(1) = 2$	$f(2) = 2$	$f(3) = 2$
$f(1) = 3$	$f(2) = 3$	$f(3) = 3$

Existen 2^{3x3} elecciones posibles distintas para el símbolo de la relación binaria R. (2048 en total).

{(1,1)}	{(1,2)}	{(1,3)}	{(2,1)}	{(2,2)}
{(2,3)}	{(3,1)}	{(3,2)}	{(3,3)}	

{(1,1); (1,2)}	{(1,1); (1,3)}	{(1,1); (2,1)}	{(1,1); (2,2)}

….

{(1,1); (1,2); (1,3)}	{(1,1); (1,2); (3,1)}	{(1,1); (2,1); (1,3)}	{(1,1); (2,1); (3,1)}
{(2,2); (1,2); (1,3)}	{(2,2); (1,2); (3,1)}	{(2,2); (2,1); (1,3)}	{(2,2); (2,1); (3,1)}

…

…

En el Universo U vamos a elegir una posible interpretación I:

Hacemos c = 2 ; definimos f como: $f_I(1) = 1$; $f_I(2) = 3$; $f_I(3) = 3$

R_I = {(1,2); (2,1); (2,3)} ; es decir que R_I es un subconjunto del producto cartesiano U x U ; eso significa que a los pares ordenados (1,2); (2,1); (2,3) se les asigna el valor 1 y a los restantes pares ordenados el valor 0.

Esta interpretación permite asignarle un valor de verdad a cada formula del lenguaje. Por ejemplo, sea:

$$\phi = (\exists x \exists y R(xy) \wedge R(f(c), c))$$

Bajo la *interpretación* I antes definida, $\exists x \exists y R(xy)$ es verdadera para el par (1,2) ya que $(1,2) \in R_I$, entonces $R_I(1,2) = 1$; pero $R(f(c), c))$ resulta falsa ya que $R(f(2), 2) = R(3,2)$ y $(3,2) \ni R_I$ luego tiene valor 0. Entonces $\phi = 0$ bajo la interpretación I.

Ejemplo:

Sea la fórmula $\phi = \forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(f(x)) \wedge Q(a)$

Vamos a analizarla bajo dos interpretaciones diferentes:

1. Sea $\langle \{a\}, \{f\}, \{P, Q, R\} \rangle$ el vocabulario de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$. Sea I la siguiente interpretación: el Universo es el conjunto de los números naturales; a = 2 , la función f de aridad 1 es $f(x) = x^2$ y los símbolos de predicado P, Q y R de aridad 1 son respectivamente: $P(x)$: "x es un número impar", $Q(x)$: "$x > 0$" y $R(x)$: "x es múltiplo de 9".

Bajo estas interpretaciones en $\phi = \forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R\big(f(x)\big) \wedge Q(a))$ tenemos que:

En el primer caso, para la interpretación $\mathcal{I}$

$P(x) \wedge Q(x)$ es: x número natural impar mayor que 0

$R(f(x)) \wedge Q(a)$ es: x^2 es múltiplo de 9 y 2 es mayor que 0

entonces la formula dada bajo la interpretación I es:

"Los números naturales impares y mayores que cero tienen a su cuadrado múltiplo de nueve y dos es mayor que cero".

2. Sea $\langle \{a\}, \{f\}, \{P, Q, R\} \rangle$ el vocabulario de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$. Sea J la siguiente interpretación: el Universo es el conjunto de las personas; a = José , la función f de aridad 1 es "$f(x)$ = madre de x" y los símbolos de predicado P, Q y R de aridad 1 son respectivamente: $P(x)$: "x juega fútbol", $Q(x)$: "x estudia informática" y $R(x)$: "x es simpática".

En este caso, para la interpretación $\mathcal{J}$

$P(x) \wedge Q(x)$ es: x juega al fútbol y estudia informática

$R(f(x)) \wedge Q(a)$ es: la madre de x es simpática y José estudia informática

Entonces la fórmula dada bajo la interpretación $\mathcal{J}$ es "Si x juega al fútbol y estudia informática entonces la madre de x es simpática y José estudia informática" , que también puede expresarse "las madres de los estudiantes de informática que juegan al fútbol son simpáticas y José estudia informática".

Ejemplo:

1. Sea $\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ el vocabulario de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$. Sea $\mathcal{I}$ la siguiente interpretación: el Universo es el conjunto de los números naturales; $\mathcal{C} = \{a\}$ donde a = 1 , $\mathcal{F} = \{S, +.*\}$ donde S es una función de aridad 1 con $S(x) = x + 1$ y + y * son funciones de aridad 2 con $+(x, y) = x + y$ y $*(x, y) = x \cdot y$; $\mathbb{P} = \{P, Q\}$, donde ambos son predicados de aridad 2 con $P(x, y)$: $x < y$ y $Q(x, y)$: $x = y$

   Bajo la interpretación dada, evalúe las siguientes fórmulas:

1. $P(a, S(a))$
2. $P(S(a), a)$
3. $\exists x \exists y Q(y, S(x))$
4. $\varphi: \forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x) \vee Q(x, y))$

1. $P(a, S(a))$ bajo la interpretación dada se lee: "uno es menor que uno mas uno" , resulta una afirmación verdadera, luego la interpretación $\mathcal{J}$ es un modelo para la fórmula evaluada; además la formula en cuestión es satisfacible porque tiene una interpretación que la satisface.
2. $P(S(a), a)$ bajo la interpretación dada se lee: "uno mas uno es menor que uno" , resulta una afirmación falsa.
3. $\exists x \exists y Q(y, S(x))$ bajo la interpretación dada se lee: "existen números naturales x e y tales que $y = S(x)$, es decir $y = x + 1$" también puede expresarse "existen números naturales x e y tales que y es igual al siguiente de x , resulta una afirmación verdadera, luego la interpretación $\mathcal{J}$ es un modelo para la fórmula evaluada; además la formula en cuestión es satisfacible porque tiene una interpretación que la satisface.
4. $\varphi: \forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x) \vee Q(x, y))$ bajo la interpretación dada se lee: "para cualesquiera números naturales x e y , se verifica que: x es menor que y ó y es menor que x ó x es igual a y ", resulta una afirmación verdadera, luego la interpretación $\mathcal{J}$ es un modelo para la fórmula evaluada; además la formula en cuestión es satisfacible porque tiene una interpretación que la satisface.

<u>No ambigüedad semántica del Cálculo de Predicados</u>

La sintaxis del cálculo de predicados es no ambigua, en otros términos toda EBF se descompone de manera única en fórmulas de complejidad inferior que las definiciones precedentes del valor de verdad de la EBF. Es decir que dada una interpretación para una EBF, ésta puede ser igual a 1 o bien igual a 0 pero no a ambos a la vez.

<u>Formalmente:</u>

Sea ϕ una EBF cualquiera. Para toda interpretación $\mathcal{J} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ donde $\mathcal{B}$ es una conjunto no vacío llamado donimio de la interpretación; para toda asignación ψ tal que $\psi \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$, tenemos que: el $Val_{\mathcal{J}}\psi(\phi) = 1$ o bien: $Val_{\mathcal{J}}\psi(\phi) = 0$ pero no ambos a la vez.