Lógica y Matemática Computacional
Licenciatura en Sistemas de Información

Algebra de Boole

Ing. JULIO C. ACOSTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Unidad IV. <u>Algebra de Boole</u>

Definición.

Propiedades.

Principio de dualidad.

Puertas lógicas y circuitos booleanos.

Minimización de circuitos.

Funciones booleanas.

Diagrama de Karnaugh.

Definición

$$B = (S, +, \cdot\,, {}' \,, 0, 1)$$

- Leyes asociativas

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- Leyes conmutativas

$$x + y = y + z \,, \qquad\qquad x \cdot y = y \cdot x$$

- Leyes distributivas

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

Definición

$$B = (S, +, \cdot\,, {}' \,, 0, 1)$$

- Leyes de identidad (o del neutro)

$$x + 0 = x, \qquad\qquad x \cdot 1 = x$$

- Leyes del complemento

$$x + x' = 1\,, \qquad\qquad x \cdot x' = 0$$

$$B = (S, +, \cdot\,, ´\,, 0, 1)$$

$$S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Algebra de Boole aplicado al álgebra de conjuntos

$$B = (S, \cup, \cap, \overline{}\,, \emptyset, U)$$

$$S = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Ejemplo:

$$B = (P_{(U)}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, U)$$

$$U = \{1, 2\}$$

$$P(U) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$\cup$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

$\cap$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$
$\{2\}$	ϕ	ϕ	$\{2\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$

$$B = (S, +, \cdot\,, {}' \,, 0, 1)$$

$$S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Algebra de Boole aplicado al álgebra de proposiciones

$$B = (Z_2, \vee, \wedge, \neg\,, 0, 1)$$

$$Z_2 = \{0, 1\}$$

V	0	1
0	0	1
1	1	1

^	0	1
0	0	0
1	0	1

Sea Z el conjunto de fórmulas lógicas

Z = { θ / θ es una fórmula lógica}

Desde un punto de vista estrictamente algebraico, definimos un Algebra de Boole sobre un conjunto cociente de Z

$$\theta \wedge \theta;\ \theta \vee \theta;\ \theta \wedge \theta \wedge \theta;\ \theta \vee \theta \vee \theta;\ \ldots$$

Son todas fórmulas equivalentes a θ y pertenecen al conjunto Z, lo mismo que θ

Dos fórmulas θ y ϕ son equivalentes (y pertenecen al conjunto Z), si y solo si son lógicamente equivalentes

$$\theta \;\; es\ equivqlente\ a\;\; \phi \quad \Leftrightarrow \quad \theta \leftrightarrow \phi \;\; es\ tautología$$

Llamamos la clase de fórmulas θ (y designaremos con [θ]) a las formadas por todas las fórmulas lógicamente equivalentes.

$$[\theta] = \{\theta \wedge \theta;\ \theta \vee \theta;\ \theta \wedge \theta \wedge \theta;\ \theta \vee \theta \vee \theta; \ldots\}$$

$$[\theta \rightarrow \phi] = \{\theta \rightarrow \phi; \neg\, \theta \vee \phi;\ \neg(\theta \wedge \neg\phi); \ldots\}$$

La relación de equivalencia induce una partición del conjunto Z, en el sentido que:

i) cada clase es no vacía,
ii) son disjuntas de a dos y
iii) la unión de todos es Z

El conjunto cociente Z/eq está formado por todas las clases de equivalencia generadas por esta relación

$$Z/eq = \{[\theta], \theta \ \ es\ una\ fórmula\ lógica\}$$

$$B = (Z/eq\ , \vee, \wedge, \neg, [\theta \wedge \neg\theta], [\theta \vee \neg\theta])$$

Es el Algebra de Boole de las fórmulas lógicas

$$x + y = X \cup Y = p \;\vee q$$

$$x \cdot y = X \cap Y = p \wedge q$$

$$x' = \bar{X} = \neg p$$

Asumiendo el orden de precedencia de los operadores del lenguaje proposicional, definimos que en el álgebra de Boole, el producto precede a la suma

$$(x \cdot y) + z = x \cdot y + z$$

<u>Unicidad del complemento</u>

Hipótesis: Si $x + y = 1 \quad y \quad x \cdot y = 0$

Tesis: $y = x'$

Demostración:

$$y = y \cdot 1 \quad \rightarrow \quad y = y \cdot (x + x')$$

$$y = y \cdot x + y \cdot x^{`} \quad \rightarrow \quad y = x \cdot y + x' \cdot y$$

$$y = 0 + x' \cdot y \quad \rightarrow \quad y = x \cdot x' + x' \cdot y$$

$$y = x' \cdot x + x' \cdot y \quad \rightarrow \quad y = x' \cdot (x + y)$$

$$y = x' \cdot 1 \quad \rightarrow \quad y = x'$$

Leyes de idempotencia

Tesis 1: $x + x = x$

Demostración:

$$x = x + 0 \quad \rightarrow \quad x = x + (x \cdot x')$$

$$x = (x + x) \cdot (x + x`\,) \quad \rightarrow \quad x = (x + x) \cdot 1$$

$$x = x + x$$

Tesis 2: $x \cdot x = x$

$$x = x \cdot 1 \quad \rightarrow \quad x = x \cdot (x + x')$$

$$x = (x \cdot x) + (x \cdot x`\,) \quad \rightarrow \quad x = (x \cdot x) + 0$$

$$x = x \cdot x$$

Leyes de acotación: Tesis 1 $\quad x + 1 = 1$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 \\
&= (x + 1) \cdot (x + x') \\
&= x \cdot (x + x') + 1 \cdot (x + x') \\
&= x \cdot x + x \cdot x' + 1 \cdot x + 1 \cdot x' \\
&= x + 0 + x + x' \\
&= 0 + x + x' \\
&= x + x' \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Leyes de acotación: Tesis 2 $x \cdot 0 = 0$

Demostración:

$$x \cdot 0 = (x \cdot 0) + 0$$

$$= (x \cdot 0) + (x \cdot x')$$

$$= x \cdot (0 + x')$$

$$= x \cdot (x' + 0)$$

$$= x \cdot x'$$

$$= 0$$

Leyes de absorción: Tesis 1 $x + x \cdot y = x$

Demostración:

$$x + x \cdot y = x \quad \rightarrow \quad x + x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y$$

$$x + x \cdot y = x \cdot (1 + y) \quad \rightarrow \quad x + x \cdot y = x \cdot 1$$

$$x + x \cdot y = x$$

Leyes de absorción: Tesis 2 $x \cdot (x + y) = x$

Demostración:

$$x \cdot (x + y) = x \quad \rightarrow \quad x \cdot (x + y) = (x + 0) \cdot (x + y)$$

$$x \cdot (x + y) = x + (0 \cdot y) \quad \rightarrow \quad x \cdot (x + y) = x + 0$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

Ley del complemento $(x')' = x$

Ley deyes del 0 y del 1 $0' = 1\,,\qquad 1' = 0$

Leyes de De Morgan

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Demostración de Leyes de De Morgan:

$$(x+y)' = x' \cdot y'$$

Si mostramos que:

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y') = 0$$

$$(x+y)+(x'\cdot y') = 1$$

Entonces:

$$(x+y)' = x' \cdot y'$$

Demostraremos que:

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y')=0$$

$$(x+y)+(x'\cdot y')=1$$

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y')=(x'\cdot y')\cdot(x+y)$$

$$=((x'\cdot y')\cdot x)+((x'\cdot y')\cdot y\,)$$

$$=\big(x\cdot(x'\cdot y')\big)+((x'\cdot y')\cdot y\,)$$

$$=\big((x\cdot x')\cdot y'\big)+(x'\cdot(y'\cdot y))$$

$$=(x\cdot x')\cdot y'+x'\cdot(y\cdot y')$$

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y') = (x\cdot x')\cdot y' + x'\cdot(y\cdot y')$$
$$= 0\cdot y' + x'\cdot 0$$
$$= y'\cdot 0 + x'\cdot 0$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

$$(x+y)+(x'\cdot y') = ((x+y)+x')\cdot((x+y)+y')$$
$$= ((y+x)+x')\cdot((x+y)+y')$$
$$= (y+(x+x'))\cdot(x+(y+y'))$$

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y') = (y+(x+x'))\cdot(x+(y+y'))$$

$$= (y+1)\cdot(x+1)$$

$$= 1\cdot 1$$

$$= 1$$

Queda demostrado que:

$$(x+y)' = x'\cdot y'$$

Demostración de Leyes de De Morgan:

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Si mostramos que:

$$(x \cdot y) + (x' + y') = 1$$

$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0$$

Entonces:

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Demostraremos que:

$$(x \cdot y) + (x' + y') = 1$$

$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0$$

$$(x \cdot y) + (x' + y') = (x' + y') + (x \cdot y)$$

$$= ((x' + y') + x) \cdot ((x' + y') + y\ )$$

$$= (x + (x' + y')) \cdot ((x' + y') + y\ )$$

$$= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y' + y))$$

$$= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y + y'))$$

$$(x \cdot y) + (x' + y') = ((x + x') + y') \cdot (x' + (y + y'))$$

$$= (1 + y') \cdot (x' + 1)$$

$$= (y' + 1) \cdot (x' + 1)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 1$$

$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = \left((x \cdot y) \cdot x'\right) + ((x \cdot y) \cdot y')$$

$$= \left((y \cdot x) \cdot x'\right) + ((x \cdot y) \cdot y')$$

$$= \left(y \cdot (x \cdot x')\right) + (x \cdot (y \cdot y'))$$

$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = \big(y \cdot (x \cdot x')\big) + (x \cdot (y \cdot y'))$$

$$= (y \cdot 0) + (x \cdot 0)$$

$$= 0 \cdot 0$$

$$= 0$$

Queda demostrado que:

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Principio de Dualidad

El Dual de una expresión booleana, es otra expresión booleana donde se cambia
+ por • y • por + ; además
0 por 1 y 1 por 0.

Observación: Si dos expresiones boolenas son iguales, sus duales también lo son.

Verifique la validez de la siguiente expresión y de su dual.

$$(x + y) \cdot (x + 1) = x + x \cdot y + y$$

$$(x+y)\cdot(x+1)=x+x\cdot y+y$$

$$(x+y)\cdot(x+1)=x\cdot(x+1)+y\cdot(x+1)$$

$$=x\cdot x+x\cdot 1+y\cdot x+y\cdot 1$$

$$=x+x+x\cdot y+y$$

$$(x+y)\cdot(x+1)=x+x\cdot y+y$$

$$x\cdot y+x\cdot 0=x\cdot(x+y)\cdot y$$

$$x\cdot y+x\cdot 0=(x+x\cdot 0)\cdot(y+x\cdot 0)$$

$$=(x+x)\cdot(x+0)\cdot(y+x)\cdot(y+0)$$

$$=(x+x)\cdot(x+0)\cdot(y+x)\cdot(y+0)$$

$$=x\cdot x\cdot(x+y)\cdot y$$

$$x\cdot y+x\cdot 0=x\cdot(x+y)\cdot y$$

Puertas Lógicas

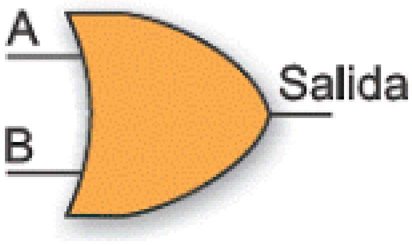
AND

A	B	Salida
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A • B

Puertas Lógicas

OR

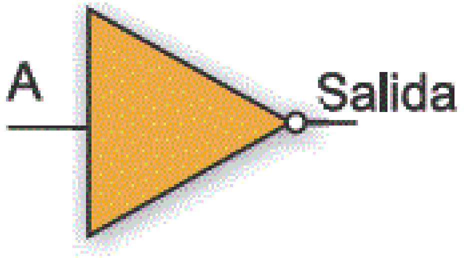


A	B	Salida
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A + B$

Puertas Lógicas

NOT

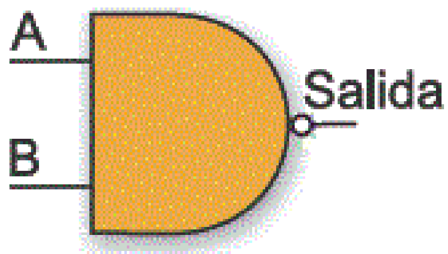


A	Salida
0	1
1	0

A ’

Puertas Lógicas

NAND

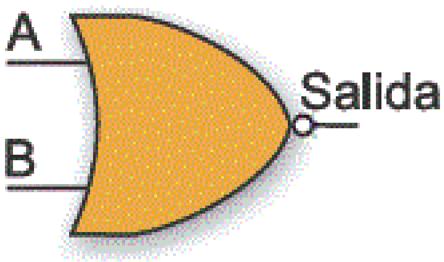


A	B	Salida
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$(A \bullet B)'$$

Puertas Lógicas

NOR



A	B	Salida
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

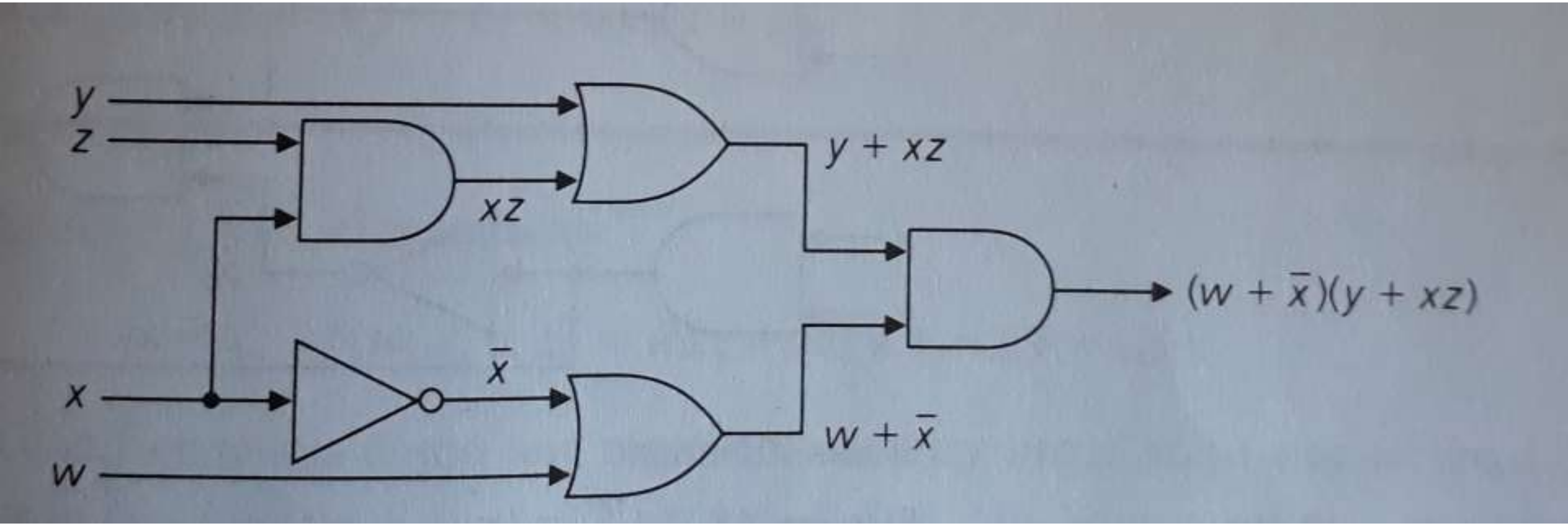
$(A + B)'$

Puertas Lógicas

X-OR

A	B	Salida
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$A \oplus B$$


y
z
x
w
xz
$\bar{x}$
y + xz
w + $\bar{x}$
(w + $\bar{x}$)(y + xz)

Lógica y Matemática Computacional
Licenciatura en Sistemas de Información

Algebra de Boole

Ing. JULIO C. ACOSTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Funciones Booleanas

$$B^2 \rightarrow B$$

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dominio = { (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) }

Imagen = { 0, 1 }

$$p\Delta q = (p \wedge -q) \vee (-p \wedge q)$$

y = f(x)

$$f(x, y) = x \cdot y' + x' \cdot y$$

(x1,y1);(x2,y2)…

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_2 + x_1 + x_3$$

$$f(x_1, x_2) = x_1' \cdot x_2'$$

Son expresiones booleanas equivalentes

$$X_1(x, z) = x' \cdot x + x' \cdot \mathrm{z} \qquad X_2(x, z) = x' \cdot (x + z)$$

$$X_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_3 \qquad X_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (\ x_2' + x_3)$$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot (x_2' + x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2' + x_1 \cdot x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2'$	$x_1 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2' + x_1 \cdot x_3$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

$$x_1 \cdot (x_2' + x_3) = x_1 \cdot x_2' + x_1 \cdot x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2, x_3)$$

$$\widetilde{x_i} \quad es \;\; x_i \quad o \qquad x_i'$$

Llamamos ***minitérminos*** al producto lógico de *k* variables $\widetilde{x_i}$

Una función booleana está definida en

Forma Canónica (o normal) disyuntiva

Si la expresión de la función booleana se expresa como una ***suma de minitérminos***

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1' \cdot x_2 \cdot x_3' + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3' + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1' \cdot x_2 \cdot x_3 + {x_1}' \cdot {x_2}' \cdot x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	$\cancel{x_1{}' \cdot x_2{}' \cdot x_3{}'}$
0	0	1	0	$\cancel{x_1{}' \cdot x_2{}' \cdot x_3}$
0	1	0	0	$\cancel{x_1{}' \cdot x_2 \cdot x_3{}'}$
0	1	1	0	$\cancel{x_1{}' \cdot x_2 \cdot x_3}$
1	0	0	1	$x_1 \cdot x_2{}' \cdot x_3{}'$
1	0	1	1	$x_1 \cdot x_2{}' \cdot x_3$
1	1	0	0	$\cancel{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3{}'}$
1	1	1	1	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

$$x_1 \cdot x_2' \cdot x_3{}'$$

$$x_1 \cdot x_2' \cdot x_3$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot \ x_2' \cdot x_3{}') + (x_1 \cdot x_2{}' \cdot x_3) + (x_1 \cdot \ x_2 \cdot x_3)$$

Esta expresión es la Forma Normal Disyuntiva o suma de min-términos o *disyunciones de conjunciones.*

Minimización de funciones

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot\ x_2' \cdot x_3{}') + (x_1 \cdot x_2{}' \cdot x_3) + (x_1 \cdot\ x_2 \cdot x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot\ x_2' \cdot (x_3{}' + x_3) + (x_1 \cdot\ x_2 \cdot x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot\ x_2' \cdot 1 + (x_1 \cdot\ x_2 \cdot x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot\ x_2' + x_1 \cdot\ x_2 \cdot x_3$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2' + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2'$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2' + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

$$\tilde{x}_i \quad es \;\; x_i \quad o \qquad x_i'$$

Llamamos ***maxitérminos*** a la suma lógica de *k* variables $\tilde{x}_i$

Una función booleana está definida en

Forma Canónica (o normal) conjuntiva

Si la expresión de la función booleana se expresa como un
producto de maxitérminos

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1{}' + x_2{}' + x_3\ ) \cdot (x_1 + x_2{}' + x_3) \cdot (x_1 + x_2' + x_3{}')$$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_2)$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	$x_1+x_2+x_3$
0	0	1	0	$x_1+x_2+x_3{}'$
0	1	0	0	$x_1+x_2'+x_3$
0	1	1	0	$x_1+x_2'+x_3{}'$
1	0	0	1	$\cancel{x_1'+x_2+x_3}$
1	0	1	1	$\cancel{x_1'+x_2+x_3{}'}$
1	1	0	0	$x_1'+x_2'+x_3$
1	1	1	1	$\cancel{x_1'+x_2'+x_3{}'}$

$$x_1+x_2+x_3$$

$$x_1+x_2+x_3{}' \qquad x_1+x_2'+x_3{}'$$

$$x_1+x_2'+x_3 \qquad x_1{}'+x_2'+x_3{}'$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+x_2+x_3{}')\cdot(x_1+x_2{}'+x_3)\cdot$$
$$\cdot(x_1+x_2'+x_3{}')\cdot(x_1{}'+x_2{}'+x_3)$$

Esta expresión es la Forma Normal Conjuntiva o producto de max-términos o *conjunción de disyunciones.*

Formas Canónicas

Forma Canónica Disyuntiva

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ x_3') + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) + (x_1 \cdot x_2' \cdot x_3)$$

Forma Canónica Conjuntiva

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1{}' + x_2{}' + x_3 \ ) \cdot (x_1 + x_2{}' + x_3) \cdot (x_1 + x_2' + x_3{}')$$

Diagrama de Karnaugh (Mapas)

Consideramos una función booleana

$$f : B_2 \to B$$

	x'	x
y'	$x' \bullet y'$	$x \bullet y'$
y	$x' \bullet y$	$x \bullet y$

0 0	**1 0**
0 1	**1 1**

0	**0**
0	**1**

Tabla de la conjunción

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

	x'	**x**
y'	**1**	**0**
y	1	0

$$f(x,y) = (x' \cdot y') + (x' \cdot y) = x' \cdot (y' + y) = x' \cdot 1 = x'$$

$$f(x,y) = x'$$

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

	x'	x
y'	**1**	**1**
y	1	0

$$f(x,y) = x' \cdot y' + x' \cdot y + x \cdot y'$$

	x'	x
y'	**1**	**1**
y	1	0

$$f(x,y) = x' + y'$$

	x'	x
y'	**1**	**1**
y	1	0

$$f(x,y) = x' + (x \cdot y')$$

$$f(x,y) = x' \cdot y' + x' \cdot y + x \cdot y' = x' \cdot (y' + y) + x \cdot y' = x' + x \cdot y'$$

Consideramos una función booleana

$$f: B_3 \to B$$

	$x'y'$	$x'y$	xy	xy'
z'	$x' \bullet y' \bullet z'$	$x' \bullet y \bullet z'$	$x \bullet y \bullet z'$	$x \bullet y' \bullet z'$
z	$x' \bullet y' \bullet z$	$x' \bullet y \bullet z$	$x \bullet y \bullet z$	$x \bullet y' \bullet z$

	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0 0 0	0 1 0	1 1 0	1 0 0
1	0 0 1	0 1 1	1 1 1	1 0 1

	$x'y'$	$x'y$	xy	xy'
z'	0	0	0	0
z	0	0	1	0

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot z$$

Ejemplo:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	x’y’	**x’y**	**x y**	**x y’**
z’	1	1	1	1
z	0	0	1	0

$$f(x,y,z) = z' + (x \cdot y)$$

$$f(x,y,z) = x' \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z' + x \cdot y \cdot z$$

$$f(x,y,z) = y' \cdot z' \cdot (x' + x) + x \cdot y \cdot (z + z') + x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z'$$

$$f(x,y,z) = y' \cdot z' + x \cdot y + y \cdot z' \cdot (x' + x) = y' \cdot z' + x \cdot y + y \cdot z'$$

$$f(x,y,z) = z' \cdot (y' + y) + x \cdot y = z' + x \cdot y$$

Ejemplo:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

	x'y'	**x'y**	**x y**	**x y'**
z'	1	0	0	1
z	1	1	1	0

$$f(x,y,z) = x' \cdot y' + x' \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z'$$

$$f(x,y,z) = x' \cdot y' + y \cdot z + y' \cdot z'$$

$$f(x,y,z) = x' \cdot y' + x' \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z' + x' \cdot y' \cdot z'$$

$$f(x,y,z) = x' \cdot y' + y \cdot z \cdot (x' + x) + y' \cdot z' \cdot (x + x')$$

$$f(x,y,z) = x' \cdot y' + y \cdot z + y' \cdot z'$$

Consideramos una función booleana

$$f : B^4 \to B$$

	$x'y'$	$x'y$	xy	xy'
$z'w'$				
$z'w$				
zw				
zw'				

0000	**0100**	**1100**	**1000**
0001	**0101**	**1101**	**1001**
0011	**0111**	**1111**	**1011**
0010	**0110**	**1110**	**1010**

	$x'y'$	$x'y$	xy	xy'
$z'w'$	1	0	0	1
$z'w$	0	1	1	0
zw	0	1	1	0
zw'	1	0	0	1

$$f(x,y,z,w) = w \cdot y + w' \cdot y'$$

	$x'y'$	$x'y$	xy	xy'
$z'w'$	1	0	0	1
$z'w$	0	1	1	0
zw	0	1	1	0
zw'	1	0	0	1

x	y	z	w	$y' \cdot w'$	$y \cdot w + y' \cdot w'$
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

x	y	z	w	$y' \cdot w'$	$y \cdot w + y' \cdot w'$	
0	0	0	0	1	1	$x' \cdot y' \cdot z' \cdot w'$
0	0	0	1	0	0	
0	0	1	0	1	1	$x' \cdot y' \cdot z \cdot w'$
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	0	0	
0	1	0	1	0	1	$x' \cdot y \cdot z' \cdot w$
0	1	1	0	0	0	
0	1	1	1	0	1	$x' \cdot y \cdot z \cdot w$
1	0	0	0	1	1	$x \cdot y' \cdot z' \cdot w'$
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	1	$x \cdot y' \cdot z \cdot w'$
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	1	0	1	0	1	$x \cdot y \cdot z' \cdot w$
1	1	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	$x \cdot y \cdot z \cdot w$

$$f(x,y,z,w) = x' \cdot y' \cdot z' \cdot w' + x' \cdot y' \cdot z \cdot w' + x' \cdot y \cdot z' \cdot w + x' \cdot y \cdot z \cdot w +$$

$$+ x \cdot y' \cdot z' \cdot w' + x \cdot y' \cdot z \cdot w' + x \cdot y \cdot z' \cdot w + x \cdot y \cdot z \cdot w$$

$$f(x,y,z,w) = x' \cdot y' \cdot (z' \cdot w' + z \cdot w') + x' \cdot y \cdot (z' \cdot w + z \cdot w) +$$

$$+ x \cdot y' \cdot (z' \cdot w' + z \cdot w') + x \cdot y \cdot (z' \cdot w + z \cdot w)$$

$$f(x,y,z,w) = x' \cdot y' \cdot (w' \cdot (z' + z)) + x' \cdot y \cdot (w \cdot (z' + z) +$$

$$+ x \cdot y' \cdot (w' \cdot (z' + z)) + x \cdot y \cdot (w \cdot (z' + z))$$

$$f(x,y,z,w) = x' \cdot y' \cdot (w' \cdot 1) + x' \cdot y \cdot (w \cdot 1) + x \cdot y \cdot (w' \cdot 1) + x \cdot y \cdot (w \cdot 1)$$

$$f(x,y,z,w) = x' \cdot y' \cdot w' + x' \cdot y \cdot w + x \cdot y \cdot w' + x \cdot y \cdot w$$

$$f(x,y,z,w) = x' \cdot (y' \cdot w' + y \cdot w) + x \cdot (y \cdot w' + y \cdot w)$$

$$f(x,y,z,w) = (y' \cdot w' + y \cdot w) \cdot (x' + x) = (y' \cdot w' + y \cdot w) \cdot 1$$

$$f(x,y,z,w) = y' \cdot w' + y \cdot w$$

	$x'y'$	$x'y$	xy	xy'
$z'w'$	1	0	1	1
$z'w$	1	0	1	1
zw	1	1	1	1
zw'	1	0	1	1

$$f(x,y,z,w) = x + y' + z \cdot w$$


DEJA QUE EL AMOR
GUÍE TU CORAZÓN
LA LÓGICA
GUÍE TU MENTE
Y LA FE
GUÍE TU ALMA.