Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 4: Conjuntos Numéricos

NÚMEROS COMPLEJOS

Definición: Se llama número complejo a todo par ordenado de números reales. Es decir, un número complejo tiene la forma: $(a,b)\ con\ a,b \in R$

Al conjunto de números complejos se lo designa con la letra **C.**

Simbólicamente: $C = \{(a,b) / a \in R \wedge b \in R\}$

Observemos que el número complejo (1,2) es distinto al número complejo (2,1)

NÚMEROS COMPLEJOS

La primera componente de cada par se llama componente o parte real del número complejo y la segunda, la componente imaginaria del mismo.

Dado un número complejo $z = (a, b)$, se definen:

- Componente real de z : $\mathrm{Re}(z) = a$
- Componente imaginaria de z: $\mathrm{Im}(z) = b$

NÚMEROS COMPLEJOS

Definición:

- Un complejo es real si y sólo si su parte imaginaria es cero. $z=(a,0)$

- Un complejo es imaginario si y sólo si su parte real es cero. $z=(0,b)$

SUMA Y PRODUCTO EN C

Sean los números complejos $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$z_1 . z_2 = (a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Por ejemplo: Dado $z_1 = (4,-3)$ y $z_2 = (1,2)$

$$z_1 + z_2 = (4,-3) + (1,2) = (4+1, -3+2) = (5,-1)$$

$$z_1 . z_2 = (4,-3).(1,2) = (4-(-6), 8+(-3)) = (10,5)$$

SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

En **(C,+)** se verifican los siguientes axiomas:

1) Ley de Cierre:

$$\forall z_1, z_2 \in C : z_1 + z_2 \in C$$

2) Propiedad asociativa:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in C : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

3) Propiedad conmutativa:

$$\forall z_1, z_2 \in C : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

4) Existencia de elemento neutro:

$$\exists z_0 = (0,0) \in C / \forall z = (a,b) \in C : z_0 + z = z$$

$$(0,0)+(a,b)=(0+a,0+b)=(a,b)$$

5) Existencia de elemento simétrico (opuesto):

$$\forall z \in C, \exists(-z) \in C / z + (-z) = (0,0)$$

$$Si \quad z=(a,b) \Rightarrow -z=(-a,-b)/$$

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$$

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

En **(C, .)** se verifican los siguientes axiomas:

1) Ley de Cierre:

$$\forall z_1, z_2 \in C : z_1 . z_2 \in C$$

2) Propiedad asociativa:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in C : (z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3)$$

3) Propiedad conmutativa:

$$\forall z_1, z_2 \in C : z_1 . z_2 = z_2 . z_1$$

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

4) Existencia de elemento neutro:

$$\exists z_1 = (1,0) \in C \,/\, \forall z = (a,b) \in C : z_1 . z = z$$

$$(1,0).(a,b) = (1.a - 0.b, 1.b + 0.a) = (a,b)$$

5) Existencia de elemento simétrico:

$$\forall z \in C, z \neq (0,0), \exists z^{-1} \in C \,/\, z.z^{-1} = (1,0)$$

$$Si \quad z = (a,b) \Rightarrow z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \,/\, z.z^{-1} = (1,0)$$

COMPLEJOS CONJUGADOS

Definición: Dos números complejos son conjugados si y sólo si tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son números opuestos.

$$z = (a,b) \Rightarrow \overline{z} = (a,-b)$$

Ejemplo:

$$z = (2,-1) \Rightarrow \overline{z} = (2,1)$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

1) El conjugado del conjugado de cualquier número complejo es el mismo número complejo.

$$\forall z \in C : \overline{\overline{z}} = z$$

2) El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados de dichos números.

$$\forall z_1, z_2 \in C : \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de dichos números.

$$\forall z_1, z_2 \in C : \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

4) El conjugado de una potencia es igual a la potencia del conjugado.

$$\forall z \in C : \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n, \quad n \in N$$

5) Un número complejo es igual a su conjugado si y sólo si es un complejo real.

$$\forall z \in C : z = \overline{z} \Leftrightarrow b = 0$$

$$z = (a,0) \Rightarrow \overline{z} = (a,0)$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

6) La suma de un número complejo y su conjugado es el doble de la parte real.

$$\forall z \in C : z + \overline{z} = 2a$$

$$z + \overline{z} = (a,b) + (a,-b) = (a + a, b - b) = (2a,0)$$

7) El producto de un número complejo y su conjugado es igual a la suma de los cuadrados de las dos componentes.

$$\forall z \in C : z.\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$z.\overline{z} = (a,b).(a,-b) = (a^2 + b^2, -ab + ba) = (a^2 + b^2, 0)$$

LA UNIDAD IMAGINARIA. POTENCIAS.

Se llama **unidad imaginaria**, al número complejo imaginario, que tiene la parte real nula y de segunda componente igual a 1.

$$i = (0{,}1)$$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$i^0 = (1{,}0)$

$i^1 = i = (0 , 1)$

$i^2 = i . i = (0 , 1) . (0 , 1) = (0.0 - 1.1 , 0.1 + 1.0) = (-1 , 0)$

$i^3 = i^2 . i = (-1 , 0) . (0 , 1) = (-1.0 – 0.1 , -1.1 + 0.0) = (0 , -1)$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1 , 0) . (-1 , 0) = [-1 .(-1) – 0 . 0 , -1 . 0 + 0 . (-1)] = (1 , 0)$

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN EL PLANO

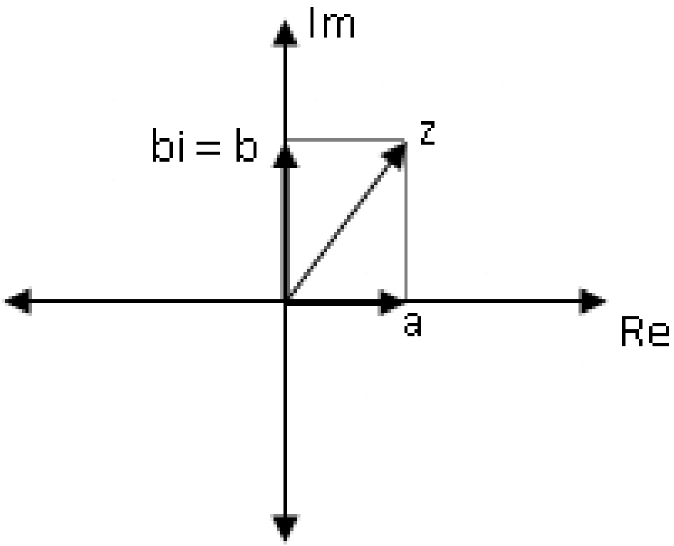
Los números complejos se representan en el plano a partir de un sistema de ejes cartesianos, de tal manera que a cada número complejo le corresponde un punto en el plano y además, a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

Dado el complejo: $z=(a,b)$

- La componente real se representa en el eje horizontal, que por eso se llama **eje real.** $\mathrm{Re}(z)$
- La componente imaginaria se representa en el eje vertical, y lo llamamos **eje imaginario.** $\mathrm{Im}(z)$

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN EL PLANO

Podemos representar un número complejo como un vector con origen en el origen del sistema y cuyo extremo es el punto determinado por el par ordenado correspondiente.



DISTINTAS FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO

FORMA DE PAR ORDENADO de un número complejo:

$$z = (a, b) \quad con\, a, b \in R$$

FORMA BINÓMICA de un número complejo

$$z = a + bi$$

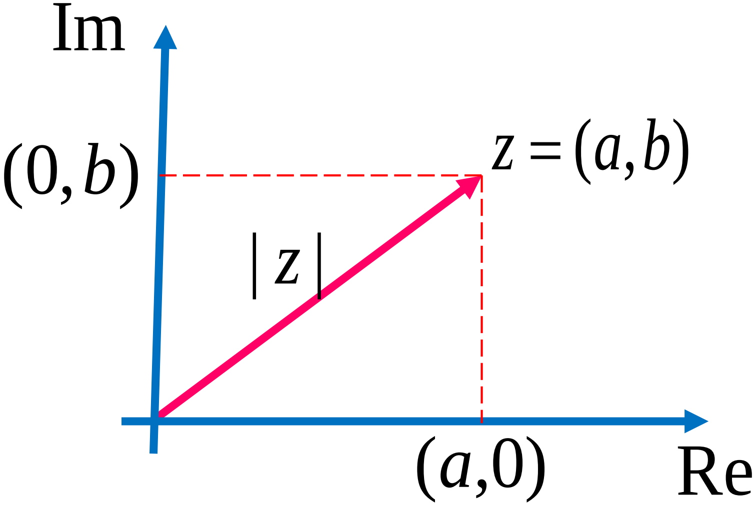
FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Módulo de un número complejo

Dado un número complejo $z = a + bi$

Se define el módulo de un número complejo como el valor positivo de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes.

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

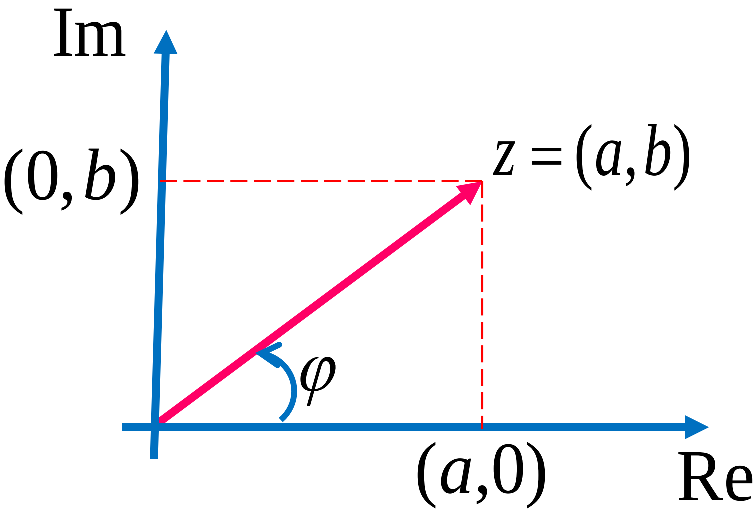


FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Argumento de un número complejo

Se llama argumento de un número complejo $z = a + bi$ al ángulo positivo menor que un giro que forma el vector que representa al complejo con el semieje real positivo; se lo simboliza con la letra griega φ.

$$tg\ \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



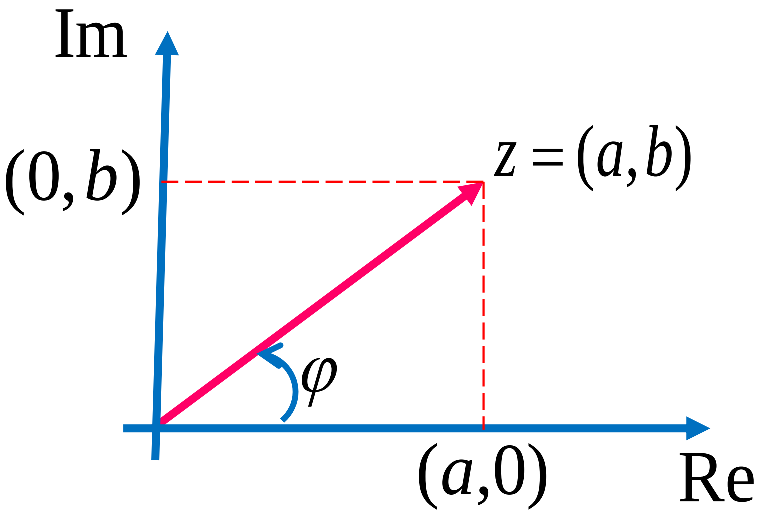
FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + bi$ un número complejo no nulo.

Las coordenadas polares del punto de coordenadas cartesiana a y b son: el módulo $\rho = |z|$ y el ángulo φ .

$$sen\ \varphi = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|.sen\ \varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|.\cos\varphi$$



$$z = a + bi = |z|.\cos\varphi + |z|.i.sen\varphi$$

$$z = |z|.(\cos\varphi + i.sen\varphi)$$

POR EJEMPLO

Sea el número complejo $z = 2 + 2i$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

z *está en el primer cuadrante*

$$tg\ \varphi = \frac{2}{2} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}(1) = 45°$$

$$z = \sqrt{8}.\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i.sen\frac{1}{4}\pi\right)$$

POR EJEMPLO

Sea el número complejo $z = 2 + 2i$

FORMA DE PAR ORDENADO: $z = (2,2)$

FORMA BINÓMICA: $z = 2 + 2i$

FORMA TRIGONOMÉTRICA:

$$z = \sqrt{8}.\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i.sen\frac{1}{4}\pi \right)$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dado los complejos: $z_1 = a + bi \quad , \quad z_2 = c + di$

Para dividir dos números complejos, siendo el divisor distinto de cero, se multiplica el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{z_2 . \overline{z_2}} = \frac{a+bi}{c+di} . \frac{c-di}{c-di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} . \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi).(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

POR EJEMPLO:

Sean: $z_1 = -2+3i \quad , \quad z_2 = 1-2i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{1-2i} = \qquad \frac{-2+3i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} =$$

$$= \frac{(-2-6)+(-4+3)\,i}{1^2+2^2}$$

$$= \frac{-8}{5} - \frac{1}{5}\,i$$