TRABAJO PRACTICO Nº 5: NÚMEROS ENTEROS Y COMPLEJOS

Números Enteros. Teoría de Números.

1) Encontrar el cociente y el resto de la división entera entre a y b $(b \neq 0)$ si:
a) $a = 327;\ b = 49.$
b) $a = 142;\ b = -12$
c) $a = -215;\ b = -3$
d) $a = -158;\ b = 4$

2) a) Hallar todos los $m, n \in \mathbb{N} \ / \ m + n = 13$ y el resto de dividir cada uno de ellos por 3 es 2.
b) Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z} / \ a - b = 2$ y el cociente de dividir cada uno de ellos por 5 es 42.

3) Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando las respuestas:

a) $\forall n \in N, n \mid 3^n + 1$
b) $\forall n \in N, n \mid 5^n$
c) $\forall n \in N, 4 \mid 2.5^n - 1$
d) $\forall n \in N, 2 \mid n^2 + n$
e) $\forall n \in N, 11 \mid 10^{2n} - 1$
f) $\forall n \in N, 3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid n^2$

4) Utilizando las propiedades de divisibilidad, demostrar por inducción que $\forall n \in N$:
a) $3|(10^n - 1)$ b) $9|(10^n - 1)$ c) $3|4^n - 1$ d) $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$

5) Un viajante va a Rosario cada 18 días, otro va a Rosario cada 15 días y un tercero va cada 8 días. Hoy día han coincidido en Rosario los tres viajantes. ¿Dentro de cuántos días como mínimo volverán a coincidir en dicha ciudad?

6) El sistema de protección de una computadora realiza tres escaneos diferentes, el primero cada hora, el segundo cada 38 minutos y el tercero cada 42 minutos. Hoy a las 0 horas coincidieron los tres procesos. ¿A qué hora volverán a coincidir los tres? En los siguientes 15 días, ¿cuántas veces coincidirán los tres a la vez?

7) Un pequeño agricultor está organizando su producción: tiene 180 manzanas y 160 peras. Su idea es colocarlas en bolsas con la misma cantidad de frutas cada una, embolsando por separado las manzanas y las peras.
a) ¿De cuántas maneras distintas lo puede hacer?
b) ¿Cuántas unidades podrá poner como máximo en cada bolsa, y cuántas bolsas necesitará para cada fruta?

8) Utilizando el algoritmo de Euclides, determinar el $m.c.d.$ de:
a) 63 y 28 b) 56 y 27 c) 721 y 448 d) 441 y 725 e) 280 y 30

9) Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible.
a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
b) ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

Números Complejos.

1) a) Complete la siguiente tabla según lo solicitado:

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{Re(z)}$	$\boldsymbol{Im(z)}$	$\boldsymbol{-z}$	$\boldsymbol{z^{-1}}$	$\boldsymbol{\bar{z}}$	$\boldsymbol{\lvert z\rvert}$	Forma Binómica
							$-1-i$
			$\boldsymbol{2-4i}$				
$\boldsymbol{(1,-3)}$							
					$\boldsymbol{\sqrt{2}-\frac{1}{2}i}$		

b) Para cada número complejo z de la tabla, representar en un sistema de ejes cartesianos ortogonales: $z\,,-z\,,\ \bar{z}\ ,\ z^{-1}$

i)¿Se puede establecer una relación gráfica entre z y $-z$?¿Se podría anticipar en qué cuadrante se encuentra $-z$?

ii) ¿Se puede establecer una relación gráfica entre z y $\bar{z}$? ¿Se podría anticipar en qué cuadrante se encuentra $\bar{z}$?

iii) ¿Se puede establecer una relación gráfica entre z y z^{-1}? ¿Se podría anticipar en qué cuadrante se encuentra z^{-1} ?

2) Dados los números complejos: $z_1=(-5\,,3)$; $z_2=\frac{3}{2}-2i$; $z_3=2+4i$

a) Calcular:

i) $\bar{\bar{z}}_3$

ii) z_3-z_2

iii) $\overline{z_1+z_2}$

iv) $z_3+\bar{z}_2$

v) $\bar{z}_2+\bar{z}_1$

vi) $-z_2+z_3-\bar{z}_1$

b) Calcular:

i) $z_1.z_2$

ii) $\overline{z_2\,.z_3}$

iii) $-2.(z_2-z_1)$

iv) $\bar{z}_3.\bar{z}_2$

v) $\frac{\bar{z}_3-z_1}{z_2}$

vi) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

vii) $|z_3+z_1^{-1}|$

3) a) Determinar:

i) $i^0=$

ii) $i^1=$

iii) $i^2=$

iv) $i^3=$

v) $i^{4q+r}=$ con $q\in\mathbb{N}\ \wedge\ 0\le r<4$

b) Sean w_1 , w_2 , $w_3 \in \mathbb{C}$ / $w_1 = (1,-1)$; $w_2 = (2,0)$; $w_3 = (0,1)$. Calcular:

i) $(w_1 - w_2).i^2$

ii) $2.w_2.(\overline{i^3} - w_3)$

iii) $i^{28}.(4w_1 - w_2)$

iv) $\frac{2.w_1+\overline{w_3}}{w_2^2}$

v) $\frac{w_1-3.w_2}{w_3}$

Actividades complementarias

1) Sabiendo que $a: 20$ tiene resto 14, si es posible:

a) Determinar el cociente y el resto de $(a + 90): 20$. Justificar.
b) Determinar el cociente y el resto de $(2a): 20$. Justificar.
c) Determinar el cociente y el resto de $(-a): 20$. Justificar.
d) Determinar el cociente y el resto de $a: (-20)$. Justificar.

2) Dados a y b enteros, con $a \neq 0$, tales que $a|b$. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas.

a) $a|(b + 4)$
b) $a|(4b)$
c) $(4a)|b$
d) $(a + 4)|(b + 4)$
e) $a|(8b + a2\ \ )$

3) Sabiendo que $a: b$ tiene cociente c y resto $r > 0$, determinar si es posible el cociente y el resto de:

a) $(a + 4b): b$ b) $[a + 2b + (b - r)]: b$

4) Sabiendo que $m = (-11).b.(-20)$, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para cualquier valor de b:

a) m es divisible por 11
b) 2 es divisor de m
c) 44 es divisor de m
d) $2b$ es divisor de m
e) 10 divide a m
f) m es divisor de b
g) 3 es divisor de m

5) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

a) 5 es divisor del número $20.m + 5.m$ para cualquier valor de m
b) 8 es divisor del número $8m + 4m$ para cualquier valor de m
c) 6 es divisor del número $9.m + 3.(m + 2)$ para cualquier valor de m

6) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas siempre a veces o nunca

a) La expresión $6.a - 27$ es divisible por 3
b) La expresión $32.a - 20$ es divisible por 4
c) La expresión $6.a - 27$ es divisible por 9.
d) La expresión $20.a - 32$ es divisible por 8.

7) Teniendo en cuenta que $abcd$ es un número de cuatro cifras, demostrar que:

a) $9|abcd \Leftrightarrow 9|(a+b+c+d)$
b) $4|abcd$ si y solo sí, la mitad de cd es par.
c) $11|aabb$

8) Utilizando el algoritmo de Euclides, determinar el $m.c.d.$ de:

a) 133 y 38 b) 225 y 72 c) 630 y 420 d) 465 y 372 e) 1120 y 840

9) Complete la siguiente tabla según lo solicitado:

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{Re(z)}$	$\boldsymbol{Im(z)}$	$\boldsymbol{-z}$	$\boldsymbol{z^{-1}}$	$\boldsymbol{\bar{z}}$	$\boldsymbol{\lvert z\rvert}$	Forma Binómica
$\boldsymbol{(1,1)}$							
$\boldsymbol{(-4,2)}$							
$\boldsymbol{(3,-1)}$							
$\boldsymbol{(-\sqrt{3}\,,-1/3)}$							

10) Proponer un número complejo que:

a) Se encuentre en el 2do Cuadrante y cuya parte real sea menor que -3.
¿Cuántos números complejos podemos encontrar que cumplan esta condición?

b) Su parte real sea menor que el opuesto de $\frac{1}{2}$ y su parte imaginaria sea un número par.
¿Cuántos números complejos podemos encontrar que cumplan esta condición?
¿Se podrá establecer a qué cuadrante/ semieje pertenecen?

11) Dados los números complejos:

$$z_1 = (-2\,,7) \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{4} + i \quad ; \quad z_3 = 3 - 5i$$

a) Calcular:

i) $z_1 - z_3$

ii) $\overline{z_1 - z_3}$

iii) $z_1 - \overline{z_2}$

iv) $\overline{z_2} - z_3 - \overline{z_1}$

b) Calcular:

i) $-\overline{z_3}.\,z_2$

ii) $\frac{3}{2}.\,(z_1 + z_3)$

iii) $-2.\left(\frac{\overline{z_1} - z_2}{z_1}\right)$

iv) $\left|\frac{z_1.\ \overline{z_3}}{z_2^2}\right|$

v) $|z_2 + 3.\ z_1^{-1}|$