Trabajo Práctico N° 4: Álgebra de Boole. Funciones Booleanas.

A. Álgebra de Boole

1) Probar que el conjunto B, con dos operaciones binarias "$+$ y $\cdot$" una operación unaria " ´ " y dos elementos distintos 0 y 1, donde el 0 es el elemento neutro para la suma y 1 es el elemento neutro para el producto, es un álgebra de Boole.

+	x	y
x	x	y
y	y	y

·	x	y
x	x	x
y	x	y

	´
0	1
1	0

2) Dado el conjunto B = {1; 3; 5; 15} donde se definen las operaciones:

$x + y = mcm(x, y) \quad \forall x, y \in B$ y $\quad x \cdot y = mcd(x, y) \quad \forall x, y \in B$.

Probar que $(B, +, \cdot, ´, 0, 1)$ es un álgebra de Boole.

3) Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y P(A) el conjunto de partes de A. Probar que $(P(A), \cup, \cap, ´, 0, 1)$ es un álgebra de Boole.

4) Justificar la validez de las demostraciones dadas, indicando qué axioma o propiedad se ha utilizado. Luego realizar la demostración de la propiedad dual.

a) Complementarios del 0 y del 1:

1 = 1·1 = 1· (0 + 0') = 1·0' = 0'
(1) (2) (3) (4)

(1)
(2)
(3)
(4)

Probar que: 0 = 1'

b) Idempotencia respecto a la suma y al producto:

$$x \underset{(1)}{=} x + 0 \underset{(2)}{=} x + (x'\cdot x) \underset{(3)}{=} (x + x') \cdot (x + x) \underset{(4)}{=} 1 \cdot (x + x) \underset{(5)}{=} x + x$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)

Probar que: $x = x \cdot x$

c) Identidad de los elementos 0 y 1.

$$x + 1 \underset{(1)}{=} x + (x' + x) \underset{(2)}{=} (x + x) + x' \underset{(3)}{=} x + x' \underset{(4)}{=} 1$$

(1)
(2)
(3)
(4)

Probar que: $x \cdot 0 = 0$

d) Absorción

$$x+(x\cdot y)\underset{(1)}{=}x\cdot 1+(x\cdot y)\underset{(2)}{=}x\cdot(1+y)\underset{(3)}{=}x\cdot 1\underset{(4)}{=}x$$

(1)
(2)
(3)
(4)

Probar que: $x\cdot(x+y)=x$

e) Leyes de De Morgan:

$$(x+y).(x'\cdot y')\underset{(1)}{=}x\cdot(x'\cdot y')+y\cdot(x'\cdot y')\underset{(2)}{=}x\cdot(x'\cdot y')+y\cdot(y'\cdot x')\underset{(3)}{=}(x\cdot x')\cdot y'+(y\cdot y')\cdot x'\underset{(4)}{=}0\cdot y'+0\cdot x'\underset{(5)}{=}0+0\underset{(6)}{=}0$$

$$(x+y)+(x'\cdot y')\underset{(7)}{=}(x+y+x')\cdot(x+y+y')\underset{(8)}{=}(x+x'+y)\cdot(x+y+y')\underset{(9)}{=}[(x+x')+y]\cdot[x+(y+y')]\underset{(10)}{=}$$

$$(1+y)\cdot(x+1)\underset{(11)}{=}1\cdot 1\underset{(12)}{=}1$$

(1)	(7)
(2)	(8)
(3)	(9)
(4)	(10)
(5)	(11)
(6)	(12)
(*)	(**)

De (*) y (**), resulta que : $(x+y)'=x'\cdot y'$ por unicidad del complementario.

Probar que: $(x.y)'=x'+y'$

f) Propiedad sin un nombre especial

$$x+x'\cdot y\underset{(1)}{=}(x+x\cdot y)+x'y\underset{(2)}{=}x+(x\cdot y+x'\cdot y)\underset{(3)}{=}x+(x+x')\cdot y\underset{(4)}{=}x+1\cdot y\underset{(5)}{=}x+y$$

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)

Probar que: $x\cdot(x'+y)=x\cdot y$

5) Sea $(B,+,\cdot,',0,1)$ un álgebra de Boole. Hallar el complementario de los siguientes elementos de B, justificando cada paso:

a) $[(x'\cdot y')'+z]\cdot(x+z)\quad con\quad x,y,z\in B$

b) $(x+y\cdot z)\cdot x\cdot(x+z)\quad con\quad x,y,z\in B$

c) $[(x+y)\cdot z'+y\cdot w]\cdot(z+w)\quad con\quad x,y,z,w\in B$

B. Funciones Booleanas

1) Dada la siguiente tabla de verdad. Hallar la expresión de la función booleana de $f : B^3 \to \{0,1\}$ en su forma normal disyuntiva (FND) y en su forma normal conjuntiva (FNC).
FND: suma de minitérminos
FNC: producto de maxitérminos.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2) Encontrar la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función Booleana: $f : B^3 \to \{0,1\} \,/\, f(x, y, z) = xy + x\acute{}z$

3) Una fábrica de gaseosas desea que un sistema automático (f) retire de la banda transportadora aquellas botellas que contengan bebidas que no cumplen con los requisitos mínimos de calidad; para esta operación, el sistema cuenta con cuatro sensores (x, y, z, w) en distintos puntos de la cinta transportadora que emiten señales {0,1}. Si el sistema emite la señal 1, la botella debe ser retirada y si emite 0 puede integrarse a la producción. Hallar la función booleana $f : B^4 \to \{0,1\}$ que permita conocer todos los casos en que la bebida debe ser retirada de la cinta transportadora. Las señales de sensores y sistema posibles están dadas en la siguiente matriz:

x	y	z	w	f
1	1	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

4) Hallar las expresiones de las funciones booleanas f y g, ambas de $B^3 \to \{0,1\}$, cuyas tablas de verdad son:

x	y	z	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

5) Dadas las siguientes funciones booleanas, simplificar utilizando las propiedades de un álgebra de Boole.

a) $f: B^2 \to \{0,1\} / f(x,y) = x\acute{}.y\acute{}+x\acute{}.y$

b) $f: B^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = \left[(x+y\acute{}).(x.y\acute{}.z)\acute{}\right]\acute{}$

c) $f: B^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = \left\{\left[(x\acute{}.y\acute{})\acute{}+z\right].(x+z)\right\}\acute{}$

d) $f: B^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = x\acute{}.y\acute{}.z\acute{}+x\acute{}.y.z\acute{}+x.y\acute{}.z$

e) $f: B^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = x\acute{}.y\acute{}.z\acute{}+x\acute{}.y.z + x\acute{}.y.z\acute{}+x.y\acute{}.z\acute{}+x.y.z\acute{}$

6) Dados los siguientes mapas de Karnaugh:

	xy	xy’	x’y’	x'y
z			1	
z'	1	1	1	

	xy	xy’	x’y’	x'y
z		1	1	1
z'	1			1

	xy	xy’	x’y’	x'y
zu			1	1
zu'			1	1
z'u’	1		1	1
z'u			1	

	xy	xy’	x’y’	x'y
zu	1	1		1
zu'	1	1		1
z'u’		1		
z'u		1		

	xy	xy’	x’y’	x’y
zu	1		1	1
zu’			1	1
z’u’				
z’u	1		1	1

	xy	xy’	x’y’	x'y
zu	1			1
zu'				
z'u’	1			1
z'u	1	1	1	1

¿Cuál es la función booleana que define cada uno de ellos? Expresarlo en la forma más simple posible.

7) Simplificar las siguientes funciones booleanas usando mapas de Karnaugh.

a) $f: B^2 \to \{0,1\} / f(x,y) = x\acute{}.y\acute{}+x\acute{}.y$

b) $f: B^3 \to \{0,1\} / f(x,y,z) = x\acute{}.y\acute{}.z\acute{}+x\acute{}.y.z\acute{}+x\acute{}.y.z + x.y\acute{}.z\acute{}+x.y.z\acute{}$

c) $f: B^4 \to \{0,1\} / f(x,y,z,u) = x\acute{}.y\acute{}.z\acute{}.u + x\acute{}.y\acute{}.z.u + x\acute{}.y.z\acute{}u\acute{}+x\acute{}.y.z\acute{}.u + x\acute{}.y.z.u + x\acute{}.y.z.u\acute{}+x.y.z.u + x.y\acute{}.z.u\acute{}$

8) A partir de las siguientes tablas elaborar el correspondiente mapa de Karnaugh y simplificar:

a)

x	y	f
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

b)

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

9) Construir el gráfico de compuertas de las siguientes funciones booleanas:

a) $f : B^3 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z) = xy' + x'z' + y$

b) $g : B^3 \to \{0,1\} / \ g(x,y,z) = (x+y)' + (y+z').x$

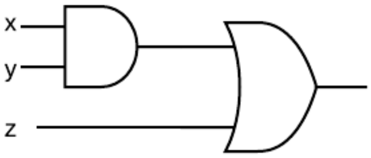
c) $f : B^3 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z) = x.y.z + (x+y).z$

d) $f : B^4 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z,u) = (x+y).z.(y+u)$

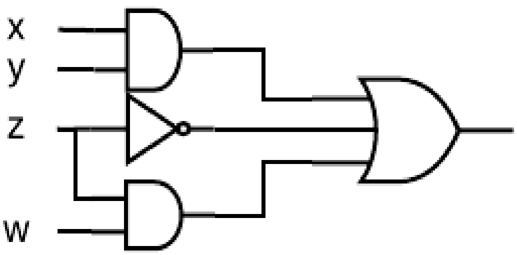
e) $f : B^4 \to \{0,1\} / \ f(x,y,z,u) = \left[(x.y)' + (z.u)'\right]'$

10) Determinar la función booleana correspondiente a los siguientes gráficos de compuertas:

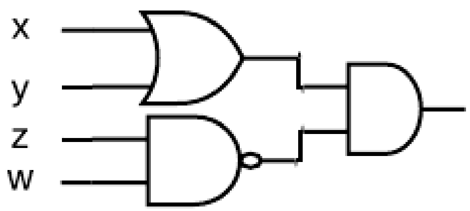
a)



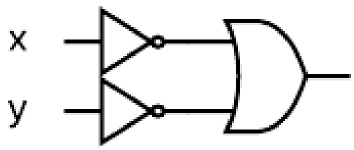
b)



c)



d)



e)