Trabajo Práctico Nº 3: Estructuras Algebraicas

1) Dada la siguiente definición:

> Un grupo **(G,+)** es un conjunto cualquiera G con una operación (+) definida en él que verifica:
> 1) Ley de composición interna cerrada: $\forall x, y \in G : x + y \in G$
> 2) Propiedad asociativa: $\forall x, y, z \in G : (x + y) + z = x + (y + z)$
> 3) Existencia de neutro: $\exists\, e \in G / \forall x \in G : x + e = e + x = x$
> 4) Existencia de inverso: $\forall x \in G, \exists x' \in G / x + x' = x' + x = e$

a) ¿Qué significa el par (G, +)? ¿Es la notación que se utiliza para denotar un grupo?
b) El conjunto G debe ser ¿de números? ¿de letras? ¿de funciones? ¿de figuras geométricas?
c) ¿qué es una operación? ¿qué significa operación binaria? ¿Es cerrada?
d) ¿qué significa la propiedad asociativa?
e) ¿Qué significa $\exists\, e \in G / \forall x \in G : x + e = e + x = x$? ¿Por qué cree que el elemento "e" recibe el nombre de neutro? ¿satisfice éste elemento, la propiedad mencionada con todos los elementos de G? ó ¿para cada elemento de G, hay un neutro?
f) ¿Qué significa $\forall x \in G, \exists x' \in G / x + x' = x' + x = e$? ¿Por qué cree que el elemento " x´ " recibe el nombre de inverso de g? ¿satisfice éste elemento la propiedad mencionada con todos los elementos de G? ó ¿para cada elemento de G, hay un inverso?

2) Dados los pares formados por un conjunto numérico y una operación ordinaria, determinar la estructura algebraica de cada par, justificando las respuestas.
a) $(N,+)$ b) $(N,\cdot)$ c) $(N,-)$ d) $(Z,+)$ e) $(Z,\cdot)$ f) $(Z,\div)$

3) Dado el siguiente conjunto A, determinar la estructura algebraica del par $(A,+)$ y $(A,\cdot)$ siendo "+" la adición y " $\cdot$ " el producto ordinario.

a) $A = \left\{ x / x = \frac{1}{2}k ; k \in Z \right\}$ b) $A = \left\{ x / x = 3^k ; k \in N_0 \right\}$ c) $A = \left\{ x / x = 2k + 1 ; k \in Z \right\}$

4) Determinar en cada caso si el par (G , +) es grupo abeliano, donde:
a) $G_1 = \{ x / x = 3k , k \in N \}$; + es la adición.
b) $G_2 = \{ x / x = 2^k, k \in Z \}$; + es el producto ordinario.
c) $G_3 = \{ 1; -1 \}$; + es la adición.
d) $G_4 = \{ 1; -1 \}$; + es el producto ordinario.

5) Sea Z es el conjunto de los números enteros, determinar si (Z , +) es grupo abeliano:
a) Para la operación + definida mediante: a + b = 2ab
b) Para la operación + definida mediante: a + b = a + b + 3.

6) En los ejercicios anteriores, cuando sea posible, determinar al menos un subgrupo.

7) El grupo de los cuatro elementos de Klein consiste en un conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ con la ley de composición + definida por la tabla:

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Asumiendo que (A, +) es asociativo:

i) Verificar que (A,+) es grupo.

ii) Si $H = \{a, b\}$. ¿Es (H, +) es subgrupo de (A, +)? Justificar.

iii) Si $B = \{a, b, c\}$. ¿Es (B, +) es subgrupo de (A, +)? Justificar.

8) Dados los siguientes conjuntos:
a) $G_1 = \{0,1\}$ b) $G_2 = \{1,-1\}$ c) $G_3 = \{0,1,2,3\}$ d) $G_4 = \{0,1,-1\}$
Definir si es posible una operación "+" en cada uno de ellos, de modo que el par (G, +) tenga estructura de grupo.

9) Dado el conjunto B = {1; 3; 5; 15}. Determinar la estructura algebraica de (B,+) donde se define + mediante:
a) $a + b = mcm(a, b) \quad \forall a, b \in B$
b) $a + b = mcd(a, b) \quad \forall a, b \in B$

10) Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y P(A) el conjunto de partes de A.
a) Determinar la estructura algebraica del par $(P(A), \cup)$
b) Determinar la estructura algebraica del par $(P(A), \cap)$

11) Verificar que $(Z, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

12) Probar que $(K^{nxn}, +, \cdot)$ es un anillo con unidad.

13) Sea K = { 0, 1 } y las operaciones + y • definidos en K, según las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Probar que estas operaciones definen sobre K una estructura de cuerpo.

14) Analice la estructura algebraica de los pares: (R, +) y (R, •) donde: + es la adición y • es el producto.

15) Analice la estructura algebraica (R, +, •) donde: + es la adición y • es el producto.