

Trabajo Práctico N° 4**Números Naturales. Inducción Matemática**

1) Desarrollar las siguientes sumatorias y productorias, donde $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^n (i - 1)$

d) $\prod_{i=1}^n i^2$

b) $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i}$

e) $\prod_{i=1}^3 (1 + i)^i$

c) $\sum_{i=1}^n a$

f) $\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{i+1} - 1 \right)$

2) Expresar como sumatoria o productoria según corresponda:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots =$

c) $1.2.3.4.5.6 \dots =$

b) $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots =$

d) $(2+2.1)(2+2.2)(2+2.3) \dots$

3) Demostrar por inducción la validez de las siguientes proposiciones:

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 1 = 8k, k \in \mathbb{N}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$

e) $\forall n \in \mathbb{N}, 10^{2n} - 1 = 11k, k \in \mathbb{N}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \cdot n < n^2 + 2$

f) $\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$

4) Demostrar que la suma del cuádruple de los primeros números naturales da $2n \cdot (n + 1)$.

5) ¿La suma de tres números naturales consecutivos es siempre divisible por 3? Justificar.

6) ¿El producto de tres números impares consecutivos es siempre divisible por 6? Justificar.

Análisis Combinatorio

1) Con las letras de la palabra MESA, forme todas las palabras posibles con o sin sentido sin repetir letras, calculando previamente su número.

2) Un grupo musical grabó un nuevo disco que contiene 7 temas. Para el lanzamiento ocupará una plataforma donde los temas se encuentran en una lista ordenada:

a) ¿De cuántas maneras puede elegir la secuencia de los temas?

b) Si la plataforma requiere que dos temas en particular no se escuchen en forma consecutiva, ¿de cuántas maneras puede elegir la secuencia de los temas?

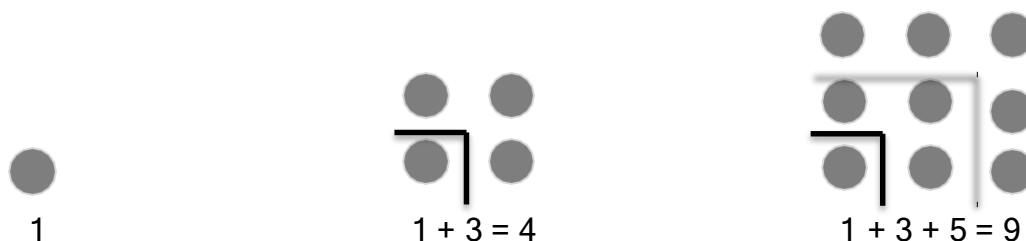
3) Un señor olvidó la combinación del candado que cierra su maletín y que consiste en cinco ruedas contiguas con los dígitos de 1 a 6 cada rueda. En el peor de los casos, ¿cuántos intentos tendrá que hacer antes de poder abrirlo?

4) Cuatro amigos se reúnen a jugar al truco. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse alrededor de la mesa?

- 5) Con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5. ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos terminan en 32? ¿Cuántos son divisibles por 5?
- 6) Con 22 consonantes y 5 vocales:
- ¿Cuántas palabras distintas de cinco letras (sin que se repitan letras) con o sin sentido se pueden formar?
 - ¿En cuántas de las palabras del ítem a) la letra central es una vocal?
 - ¿Cuántas de las palabras del ítem a) se forman con 3 consonantes y 2 vocales?
- 7) En un curso de 42 estudiantes de Lic. en Sistemas, se desea elegir 3 alumnos para formar una Comisión.
- ¿De cuántas maneras se puede elegir si los representantes tienen iguales atribuciones?
 - ¿De cuántas maneras se puede elegir si los representantes tienen diferentes atribuciones?
- 8) Entre 12 hombres y 8 mujeres debe elegirse una delegación de 5 personas.
- ¿De cuántas maneras se puede formar la delegación?
 - ¿De cuántas maneras se puede formar si dos personas determinadas deben estar siempre en la delegación?
 - ¿De cuántas maneras se puede formar si en la delegación deben haber 3 hombres y 2 mujeres?
 - ¿De cuántas maneras se puede formar si en la delegación deben haber por lo menos 3 hombres y 1 mujer?
 - ¿De cuántas maneras se puede formar si en la delegación no pueden estar juntas 2 personas que sabemos que están enemistadas?
 - ¿De cuántas maneras se puede formar la delegación si un hombre y una mujer (esposos) deben estar los dos o ninguno en la delegación?
- 9) Con las letras de las palabras INDEPENDENCIA; CATAMARCA; MONOMIO ¿Cuántas palabras con o sin sentido pueden formarse en cada caso?
- 10) Con el nuevo sistema de patentes de vehículos, formado por dos letras, luego tres números y finalmente dos letras. ¿Cuántos vehículos pueden ser patentados? (26 letras del alfabeto y 10 dígitos).
- 11) Un florista prepara para la venta ramos de 12 claveles, pudiendo estos ser rojos, blancos o rosados. ¿Cuántos ramos distintos puede ofrecer?
- 12) Determinar, si existe, $n \in \mathbb{N}$ tal que:
- $3 \binom{n}{4} = 5 \binom{n-1}{5}$
 - $7A_2^{n-1} = 6C_3^n$
 - $\frac{4}{3}A_2^{n+3} - \frac{3}{2}A_2^{n+2} = 10$
 - $4C_2^{n+2} - C_2^{n+1} + C_2^n = 56$
- 13) Desarrollar las siguientes potencias aplicando Binomio de Newton:
- $(x-3)^5$
 - $(x^3 + \frac{1}{x})^4$
- 14) Hallar si existe:
- el undécimo término de $(2x^2 - x)^{15}$ sin efectuar el desarrollo.
 - el ó los términos centrales de $(3x - 2y)^9$
 - el coeficiente de x^{32} en $(x^4 - \frac{1}{x^3})^{15}$

Actividades Complementarias

1) a) El matemático Pitágoras, utilizando piedras, procedió de la siguiente manera:



A partir de allí, generalizó la expresión de la suma de los n primeros números naturales impares. ¿Puede ud. completar la siguiente igualdad: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$?

b) Por su parte Gauss, cuando su maestro lo mandó a sumar los 100 primeros números naturales para tenerlo quieto un rato, hizo lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & & 100 \\
 2 & & 99 \\
 & \dots & \\
 & \dots & \\
 50 & & 51
 \end{array}$$

Como observó que en cada fila la suma de los números escritos en ella es 101, concluyó que tenía $101 \cdot 50$ es decir: $(100 + 1) \cdot (100/2)$. Generalizando el razonamiento de Gauss...

¿puede ud. completar la siguiente igualdad: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \underline{\hspace{2cm}}$?

2) a) Desarrollar las siguientes sumatorias y productorias:

i) $\sum_{i=1}^n \frac{2i}{i+1}$ ii) $\sum_{i=1}^n \frac{-i+1}{i+2}$ iii) $\prod_{i=1}^n (2i + 1)$

b) Expresar como sumatoria o productoria según corresponda

i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots =$

ii) $1 + 8 + 27 + 64 + \dots =$

iii) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \dots =$

3) Demostrar por inducción:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: 5^n - 1 = 4 \cdot k, k \in \mathbb{N}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: 11 | 10^{2n} - 1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}: 4 | 5^n - 1$

d) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n 2 \cdot 3^i = 3(3^n - 1)$

e) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

f) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^n (2 \cdot k + 6) = n \cdot (n + 7)$

g) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

h) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n i \cdot 5^i = \frac{5 + 5^{n+1}(4n-1)}{16}$

4) ¿De cuántas maneras distintas pueden salir alineados al campo de juego, los jugadores titulares de un equipo de fútbol? ¿De cuántas maneras distintas pueden hacerlo si el arquero debe ocupar siempre la primera posición?

5) Para confeccionar un examen, se dispone de 3 problemas de Geometría, 4 de Combinatoria y 2 de Álgebra. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse los problemas si los que corresponden a un mismo tema deben aparecer en forma consecutiva?

6) Se tienen 10 puntos a, b, c, \dots, j pertenecientes a un plano α , de los cuales no hay 3 alineados

- a) ¿Cuántas rectas determinan esos puntos?
- b) ¿Cuántas de esas rectas pasan por el punto a ?
- c) ¿Cuántos triángulos determinan esos puntos?
- d) ¿Cuántos de esos triángulos tienen un vértice en a ?
- e) ¿Cuántos de esos triángulos tienen un lado en ab ?

7) De un conjunto de 5 computadoras (A, B, C, D, E) se seleccionan 3 para mandarlas respectivamente a los departamentos de Ventas, Compras y Mantenimiento. Si la primera que se selecciona es para Ventas, la segunda para Compras y la tercera para Mantenimiento, ¿De cuántas formas se pueden formar los paquetes?

8) Si se desea saber el número de formas en que se pueden ubicar las 5 computadoras, pero ahora en 5 departamentos diferentes (Dirección, Personal, Ventas, Compras y Mantenimiento) ¿De cuántas maneras se pueden formar los paquetes?

9) Un fabricante de microcomputadoras que está preparando una campaña de publicidad, está considerando seis revistas, tres periódicos, dos estaciones de televisión y cuatro estaciones de radio.

¿De cuántas maneras puede difundirse seis anuncios si...

- a) Los seis deben ser hechos en revistas?
- b) Dos deben aparecer en revistas, dos en periódicos, uno en televisión y uno por radio?

10) El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formadas por ceros y unos. Un byte u octeto es una de estas secuencias y está formada por 8 dígitos. Por ejemplo:

0	0	1	1	0	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

¿Cuántos bytes distintos se pueden formar?

11) A un congreso médico asisten 50 personas de las cuales 30 sólo hablan inglés y 20 sólo hablan francés.

- a) ¿Cuántos diálogos pueden establecerse sin intérprete?
- b) ¿Cuántos con intérprete?
- c) ¿Se puede responder a la pregunta anterior a partir del total de diálogos que pueden establecerse con o sin intérprete?
- d) En la primera jornada, se armó un grupo de discusión de 5 integrantes, referente a diferentes temas de medicina ¿de cuántas maneras diferentes se puede armar el grupo?
- e) Si en el grupo de discusión debe haber 2 personas que hablan francés y 3 que hablan inglés ¿de cuántas maneras diferentes puede armarse el grupo?
- f) Si en el grupo debe haber al menos uno que habla francés ¿de cuántas maneras diferentes puede armarse el grupo?
- g) Si en el grupo cada integrante debe cumplir un rol determinado: El moderador, el que escribe las conclusiones, el expositor, el que propone las preguntas de discusión, el que toma el tiempo ¿de cuántas maneras diferentes puede armarse el grupo?

12) Un programador tiene que armar identificadores de etiquetas para un programa de computadora y está tratando de averiguar las cantidades posibles según ciertas consideraciones. Entonces, si armara los identificadores con una determinada letra seguida de tres números distintos:

- a) ¿Cuántos identificadores distintos de etiqueta será posible tener?

- b) ¿Cuántos de esos identificadores terminan en 0?
- c) Si eligió la letra B y los números 2,3,4 para armar los identificadores de etiqueta de un cierto programa. ¿Cuántos identificadores de 4 caracteres se pueden armar?
- d) Ahora, el programador decidió que todos los identificadores deberán comenzar con la letra A. ¿De cuántas maneras se puede elegir los tres dígitos distintos para armar los identificadores de etiqueta de un cierto programa?
- e) ¿De cuántas maneras puede elegir una letra y los tres dígitos distintos para armar los identificadores de etiqueta de un cierto programa?

13) Con los dígitos 2, 3 y 9: ¿Cuántos números mayores que 300 se forman? ¿Cuántos son pares?

14) Todas las personas que asisten a una fiesta se estrechan la mano. Si se estrecharon la mano en 45 oportunidades; ¿cuántas personas asistieron a dicha reunión?

15) Hallar, si existe, $n \in \mathbb{N}$ tal que: $\frac{1}{2}A_2^n - A_2^{n-1} = A_2^{n-1}$

16) Probar que: $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)\binom{n}{k-1}}{k}$ con k y n naturales, $k \leq n$.

17) Probar que: $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$ con k y n naturales, $k \leq n$

18) En el desarrollo ordenado del binomio $(x+a)^n$, los términos T_{10} y T_{15} son equidistantes de los extremos. Hallar n .

19) Hallar, si existe:

- a) el término de grado 7 en $(x^{\frac{1}{2}} + x^3)^7$
- b) el término que contiene a^{-35} en $(a^3 - \frac{3}{a^2})^{25}$