Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 4: Conjuntos Numéricos

NÚMEROS ENTEROS

Llamamos conjunto de números enteros, Z, a la unión del conjunto de los números naturales, el cero y el conjunto de los opuestos de los números naturales.

Es decir:

$$\left.\begin{array}{c} N=\{1,2,3,\ldots\ldots\} \\ 0 \\ N^{-}=\{-n / n \in N\} \end{array}\right\} Z=N \cup\{0\} \cup N^{-}$$

PROPIEDADES DE Z

- El conjunto de los números enteros es infinito.
- No tiene primero ni último elemento.
- Todo número entero tiene un sucesor. Un número entero y su sucesor se dicen consecutivos.
- Todo número entero tiene un antecesor.
- Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros.

PROPIEDADES DE (Z,+)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in Z: a + b \in Z$
2. Propiedad asociativa:

   $$\forall a,b,c \in Z: (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. Propiedad conmutativa:

   $$\forall a, b \in Z: a + b = b + a$$

4. Existencia de elemento neutro:

   $$\forall a \in Z: a + 0 = 0 + a = a$$

5. Existencia de opuesto para cada elemento:

   $$\forall a \in Z, \exists (-a) \in Z \,/\, -a + a = a + (-a) = 0$$

PROPIEDADES DE (Z, $\cdot$)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in Z: a.b \in Z$
2. Propiedad asociativa:

$$\forall a,b,c \in Z: (a.b).c = a.(b.c)$$

3. Propiedad conmutativa:

$$\forall a, b \in Z: a.b = b.a$$

4. Existencia de elemento neutro:

$$\forall a \in Z: a.1 = 1.a = a$$

Además de las propiedades vistas verifica:

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $\forall a,b,c \in Z: (a + b).c = a.c + b.c$

ALGORITMO DE DIVISION

Sea a, b $\in$ Z y b $\neq$ 0.

Existen y son únicos q, r $\in$ Z tal que:

$$a = b.q + r, \quad \text{donde } 0 \leq r < |b|.$$

Donde a es el “dividendo”, b es el “divisor”, q es el “cociente” y r es el “resto” de dividir a por b.

ALGORITMO DE DIVISION

Tarea: Encontrar el cociente y el resto de la división entera entre a y b ($b \neq 0$) si:

1. a = 236 y b = 27
2. a = -236 y b = 27
3. a = 236 y b = -27
4. a = -236 y b = -27

$$1. \quad 236 = 27.8 + 20$$

$$2. \quad -236 = 27.(-8) + (-20)$$ Error?

$$2. \quad -236 = 27.(-9) + 7$$

$$3. \quad 236 = -27.(-8) + 20$$

$$4. \quad -236 = -27.9 + 7$$

DIVISIBILIDAD

Sea a, b $\in$ Z y b $\neq$ 0.

Si el resto de dividir a por b es cero, se dice que: “ a es múltiplo de b”, o

“ b es divisor de a” o que

“ b divide a “a” ”.

En símbolos:

$$b|a \Leftrightarrow \exists\ q \in Z \ / \ a = q.b$$

PROPIEDADES BÁSICAS DE DIVISIBILIDAD

Sean a, b y c números enteros donde $a \neq 0$. Entonces

(a) $a \mid a$, $a \mid a \cdot c$, $a \mid -a$, $-a \mid a$, $a \mid |a|$ *y* $|a| \mid a$.

(b) $1 \mid c$ *y* $-1 \mid c$.

(c) *Sea* $b \neq 0$*:* $a \mid b$ *y* $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

(d) *Sea* $b \neq 0$*:* $a \mid b$ *y* $b \mid a \Rightarrow a = b$ *o* $a = -b$.

(e) $a \mid 1 \Rightarrow a = 1$ *o* $a = -1$.

(f) $a \mid b$ *y* $a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$ *y* $a \mid b - c$.

(g) $a \mid b + c$ *y* $a \mid b \Rightarrow a \mid c$.

(h) $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$.

(i) $a \mid b \Leftrightarrow a \mid |b|$.

(j) $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid b$.

(k) $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$.

EJERCICIO:

Usando propiedades de divisibilidad probar que

$$9 \mid 10^n - 1 \quad , \forall n \in N$$

1. Observemos que verifica para n = 1

   $$9 \mid 10^1 - 1 \quad \Rightarrow 9 \mid 9$$

2. Suponemos que verifica para n = h

   $$9 \mid 10^h - 1$$

3. Probemos que verifica para n = h+1

   $$9 \mid 10^{h+1} - 1$$

Demostración:

Como $9|9$ y por hipótesis inductiva $9|10^h - 1$

Se tiene:

$$9|10.(10^h - 1) + 9 \Rightarrow 9|10.10^h - 10 + 9 \Rightarrow 9|10^{h+1} - 1$$

NUMEROS PARES E IMPARES

- $x \in Z$ es par $\Leftrightarrow \exists\ k \in Z \,/\, x = 2.k$

Es decir:

$x \in Z$ es par $\Leftrightarrow 2|x$

- $x \in Z$ es impar $\Leftrightarrow x \in Z$ no es par

$x \in Z$ es impar $\Leftrightarrow \exists\ h \in Z \,/\, x = 2.h + 1$

Es decir:

$x \in Z$ es impar $\Leftrightarrow x = 2.h + 1$, para algún $h \in Z$.

NÚMEROS PRIMOS

Sea p$\in$ Z. Decimos que p es primo si, y sólo sí, p tiene exactamente 4 divisores:

1, -1, p y -p

Los números enteros que no son primos, se llaman compuestos.

Ejemplos: Son primos 2, 3, 5, 7, 11,…

Son compuestos 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12,…

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMETICA

Todo número natural, mayor que 1, se puede descomponer como el producto de un número finito de factores primos. Esta factorización es única, salvo por el orden de los factores.

Ejemplos: $1092 = 2^2.3.7.13$

$1224 = 2^3.3^2.17$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

1) Un número es divisible por 2 si y sólo si termina en una cifra par.
2) Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible 3.
3) Un número es divisible por 4 si y sólo si el doble de las decenas más las unidades es divisible por 4.
4) Un número es divisible por 5 si y sólo si la cifra de las unidades es 0 ó 5.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

5) Un número es divisible por 7, si y sólo si, al tomar el número que resulta de eliminar las unidades y restarle el doble de las unidades es divisible por 7.
6) Un número es divisible por 9, si y sólo si, la suma de sus dígitos es divisible por 9.
7) Un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan un lugar impar es divisible por 11.

EJEMPLOS

¿Es 43755 divisible por 7? ¿y 43757?

Aplicando el criterio de divisibilidad se tiene:

Veamos con **43755**

$$4375 – 2.5 = 4365$$

$$436 – 2.5 = 426$$

$$42 – 2.6 = 30$$

Como 7 no es divisible por 30, tampoco lo es por 43755.

EJEMPLOS

¿Es 713014 divisible por 11? ¿y 713020?

Aplicando el criterio de divisibilidad se tiene:

Veamos con 713014

$$(1+3+7)-(4+0+1)=7$$

Como 7 no es divisible por 11, tampoco lo es por 713014.

MAXIMO COMUN DIVISOR

Sean $a, b \in Z$

$d \in N$ es el máximo común divisor (mcd) de a y b, si, y sólo sí, se cumple:

$$\begin{cases} \quad d \mid a \quad \wedge \quad d \mid b \\ p \mid a \quad \wedge \quad p \mid b \quad \Rightarrow p \mid d \end{cases}$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Se usa para calcular el mcd de dos números.

Si r_0 y $r_1 \in Z$ / $r_1 \neq 0$. Entonces:

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2, \text{ con } 0 < r_2 < |r_1|$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \text{ con } 0 < r_3 < |r_2|$$

$$r_2 = q_3 r_3 + r_4, \text{ con } 0 < r_4 < |r_3|$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n, \text{ con } 0 < r_n < |r_{n-1}|$$

$$r_{n-1} = q_n r_n \qquad \text{con } r_{n+1} = 0$$

$\mathrm{mcd}(r_o, r_1) = r_n$ que es el último resto no nulo.

EJEMPLO

Hallar el mcd(441,725)

725=441.1+284

441=284.1+157

284=157.1+127

157=127.1+30

127=30.4+7

30=7.4+2

7=2.3+1

mcd(441,725)=1

2=1.2+0

ENTEROS COPRIMOS

Dados dos enteros no nulos a y b, diremos que a y b son coprimos ó primos entre sí, si su máximo común divisor es 1.

Por ejemplo 441 y 725 son coprimos.

MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO

Sean $a, b \in Z$

$m \in N$ es mínimo común múltiplo (mcm) de $a \; y \; b$, si, y sólo sí, se cumple:

$$\begin{cases} \quad a|m \quad \wedge \quad b|m \\ a|n \quad \wedge \quad b|n \quad \Rightarrow m|n \end{cases}$$

EJERCICIO:

Probar que $4^n - 1$ es múltiplo de 3, para todo $n \in N$

1. Observemos que verifica para n = 1

$$4^1 - 1 = 3$$

2. Suponemos que verifica para n = h

$$4^h - 1 = 3k \quad \Rightarrow 4^h = 3k + 1$$

3. Probemos que verifica para n = h+1

$$4^{h+1} - 1 = 3k'$$

Demostración:

$$4^{h+1} - 1 = 4^h.4 - 1 = (3k+1).4 - 1 =$$
$$12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$$

NÚMEROS RACIONALES

En muchas ocasiones, para medir es necesario fraccionar la unidad y es así que surge la idea de número fraccionario.

Las fracciones son las expresiones numéricas de los números fraccionarios y están dadas por el cociente entre dos números enteros.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$$

PROPIEDADES DE Q

- El conjunto de los números racionales es infinito
- No tiene primero ni último elemento.
- Entre dos números racionales existe siempre un número infinito de números racionales.

NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales está formado por la unión del conjunto de los números Racionales y el conjunto de los números Irracionales.

$$\mathrm{Q} \cup I = \mathrm{R}$$

Los números Irracionales son aquellos que no son racionales, es decir aquellos que no pueden escribirse como un cociente de dos números enteros.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Sea R el conjunto de los números reales y las operaciones suma (+) y producto (.) definidas en él y una relación de orden estricto “<”.

En R se verifican los siguientes axiomas:

(R,+)

1) Ley de Cierre: $\forall x, y \in R : x + y \in R$

2) Propiedad asociativa: $\forall x, y, z \in R : (x + y) + z = x + (y + z)$

3) Propiedad conmutativa: $\forall x, y \in R : x + y = y + x$

4) Existencia de neutro: $\exists 0 \in R / \forall x \in R : x + 0 = x$

5) Existencia de opuesto: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R / x + (-x) = 0$

(R, .)

6) Ley de Cierre: $\forall x, y \in R : x.y \in R$

7) Propiedad asociativa: $\forall x, y, z \in R : (x.y).z = x.(y.z)$

8) Propiedad conmutativa: $\forall x, y \in R : x.y = y.x$

9) Existencia de neutro: $\exists 1 \in R, (1 \neq 0) / \forall x \in R : x.1 = x$

10) Existencia de inverso para cada elemento no nulo: $\forall x \in R, x \neq 0, \exists a \in R / x.a = 1$

Denotaremos a «a» como: $a = x^{-1}$

11) Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $\forall x, y, z \in R : (x + y).z = x.z + y.z$

AXIOMAS DE ORDEN

12) Ley de Tricotomía: Dados x,y ϵ R, se verifica una, y sólo una, de las siguientes posibilidades:

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x$$

13) Propiedad Transitiva: $\forall x, y, z \in R : x < y \quad \wedge \quad y < z \Rightarrow x < z$

14) Consistencia con respecto a la suma:

$$\forall x, y, z \in R : x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

15) Consistencia restringida con respecto al producto:

$$\forall x, y, z \in R : x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x.z < y.z$$

16) AXIOMA DEL SUPREMO: “Todo subconjunto real no vacío y acotado superiormente, admite supremo en R”.

Este axioma, contempla un corolario referido al ínfimo: “Todo subconjunto real no vacío y acotado inferiormente, admite ínfimo en R”.

Además de los 16 axiomas, R verifica dos propiedades:

17) “Entre dos números reales distintos existe otro número real”.

En símbolos: $x, y \in R / x < y \Rightarrow \exists z \in R / x < z < y$

18) **PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES:** “Dado un número real, siempre es posible encontrar un número natural que lo supera.” Es decir, R no es acotado superiormente.

En símbolos: $\forall x \in R, \exists n \in N / n \geq x$