Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ecuaciones Lineales con n incógnitas

Se denomina ecuación lineal con n incógnitas, a toda expresión de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$ Llamamos coeficientes

$b \in R$ Se denomina término independiente

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ Llamamos incógnitas

En forma abreviada: $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

Se llama solución de una ecuación lineal con n incógnitas a toda n-úpla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de números reales, tal que al reemplazar ordenadamente cada incógnita por cada valor verifica la igualdad.

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Es toda expresión de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En forma abreviada: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j = b_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots m$

Notación

m: número de ecuaciones. ($m \in N$)

n: número de incógnitas. ($n \in N$)

$a_{ij} \in R$: coeficiente de la incógnita x_j en la i-ésima ecuación

$i \in N, \quad 1 \leq i \leq m$ indica la ecuación a la que pertenece el coeficiente

$j \in N, \quad 1 \leq j \leq n$ indica la incógnita de la que es coeficiente.

$x_j \in R$ son las incógnitas.

$b_i \in R, \quad 1 \leq i \leq m$: términos independientes.

Ejercicio

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 11 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_5 = 22 \\ 5x_1 + x_3 = 14 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 - 5 = 0 \end{cases}$$

Identificar:

a) el número de ecuaciones y el número de incógnitas.

b) los coeficientes $a_{23}, \quad a_{32} \quad y \quad a_{42}$

c) Los términos independientes: $b_1 \quad y \quad b_4$

Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales según el número de ecuaciones y de incógnitas

1) Sistemas cuadrados: ($m = n$).

2) Sistemas no cuadrados o rectangulares: ($m \neq n$).

Resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es determinar los valores de las incógnitas que verifican en forma simultánea las ecuaciones del sistema.

Solución del sistema de ecuaciones lineales

Es una n-úpla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, tal que al reemplazar ordenadamente las incógnitas por los α_i satisfacen **simultáneamente** todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Conjunto solución:

Es el conjunto **S** de todas las n-úplas $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ que satisfacen en forma **simultánea** todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales según el conjunto solución

Sistemas de ecuaciones

- Incompatible: No tiene solución
  - $S=\emptyset$
- Compatible
  - $S\neq\emptyset$
  - Determinado
  - Indeterminado

- **Sistema incompatible**: es aquel que carece de solución; no existe ninguna n–úpla de R^n que verifique en forma simultánea todas las ecuaciones del sistema.

- **Sistema compatible**: es aquel que tiene solución.

  - **Sistema compatible determinado**: La solución es única, existe un único valor para cada incógnita.
  - **Sistema compatible indeterminado**: El sistema tiene solución múltiple. Tiene infinitas soluciones.

Sistemas de ecuaciones equivalentes: Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes, si tienen el mismo conjunto solución.

Forma Matricial de un Sistema

Asociamos a todo sistema de m ecuaciones con n incógnitas cuatro matrices:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\ a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots\ \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\ a_{mn} \end{bmatrix}_{m\,x\,n} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\,x\,1} \qquad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\,x\,1}$$

$$A'=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\ a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\ a_{2n} & b_2 \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\ a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m\,x\,(n+1)}$$

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas; se puede escribir matricialmente de la siguiente manera

$$A_{(m x n)} \cdot X_{(n x 1)} = B_{(m x 1)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \; \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A_{(mxn)} \cdot X_{(nx1)} = B_{(mx1)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{nx1} = X$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots.. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots.. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots.. & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots.. & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{bmatrix}_{mx1} = B$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE EQUIVALENCIA

Si a un sistema de ecuaciones expresado en forma matricial se aplican operaciones elementales de filas a ambos miembros de la igualdad, el sistema de ecuaciones obtenido y el original admiten el mismo conjunto solución.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS

Sea A . X = B un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$A \, . \, X = B \text{ es compatible} \Leftrightarrow r\,(A) = r\,(A')$$

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes tienen igual rango.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS

Demostración:

$$A.X = B \; es \; compatible \Leftrightarrow \exists \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} / \; A \,.\, \alpha = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[A_1 \; A_2 \; \dots \; A_n \right] . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow \alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \dots + \alpha_n . A_n = B \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ B es combinación lineal de las n columnas de A

$\Leftrightarrow$ r (A) = r (A’)

$$A^{mxn}.X^{nx1} = B^{mx1}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{nx1} = X$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots.. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots.. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots.. & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots.. & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{bmatrix}_{mx1} = B$$

Consecuencias del Teorema

1) Si **r(A) ≠ r(A’)** el sistema de ecuaciones es incompatible y no admite soluciones.

2) Si **r(A) = r(A’) = r** el sistema es compatible.

a) Si **r = n ,** el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

b) Si ***r < n ,*** el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Ejercicios: Dados los siguientes sistemas de ecuaciones clasificarlos aplicando el Teorema de Rouché Frobenius y determinar el conjunto solución.

$$a)\quad \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 8 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y - z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y - z = 1 \\ 4x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

SISTEMAS CUADRADOS

Sistemas Cuadrados: Sea A.X=B un sistema de ecuaciones tal que A es cuadrada.

SISTEMA CRAMERIANO

Es un sistema de ecuaciones cuadrado cuya matriz del sistema (matriz de los coeficientes) es inversible.

TEOREMA DE CRAMER

Todo Sistema Crameriano: A.X = B admite solución única, es decir, es compatible determinado, siendo esta la única solución del sistema:

$$X = A^{-1}.B$$

TEOREMA DE CRAMER

Demostración:

Sea $A.X = B$ un sistema crameriano.

Premultiplicamos ambos miembros por A^{-1}

$$A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B$$

- Propiedad Asociativa: $(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$
- Por definición de matriz inversa: $I.X = A^{-1}.B$
- La matriz Identidad es el elemento neutro para producto de matrices: $X = A^{-1}.B$

Resolver el siguiente sistema mediante el teorema de cramer:

$$\begin{cases} 2x+5y=19 \\ x+3y=11 \end{cases}$$

1)La matriz de los coeficientes es: $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) Como el determinante de A es distinto de cero, decimos que A es inversible. $|A|=1$

3) La expresión matricial del sistema será: $A.X=B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será: $X=A^{-1}.B$

1) El determinante de A ≠ 0: $|A| = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Hallamos la matriz adjunta de A

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Hallamos la inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será:

$$A^{-1} .\ B = X$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

El sistema es Compatible Determinado: $S = \{(2,3)\}$

Resolver el siguiente sistema mediante el teorema de cramer:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ 3x + 4y + z = 22 \\ 5x + z = 14 \end{cases}$$

1)La matriz de los coeficientes es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) Como el determinante de A es distinto de cero, decimos que A es inversible. $|A| = -10$

3) La expresión matricial del sistema será: $A.X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será:

$$X = A^{-1}.B$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&4&1\\5&0&1\end{bmatrix}$$

1) El determinante de A ≠ 0: $|A|=-10$

2) Hallamos la matriz adjunta de A

$$Adj\ A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}4&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&1\\5&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&4\\5&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\5&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\4&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4&2&-20\\-1&-3&5\\-3&1&5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4&-1&-3\\2&-3&1\\-20&5&5\end{bmatrix}$$

3) Hallamos la inversa de A:

$$A^{-1}=\frac{Adj\ A}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}4&-1&-3\\2&-3&1\\-20&5&5\end{bmatrix}}{-10}=\begin{bmatrix}-2/5&1/10&3/10\\-1/5&3/10&-1/10\\2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será: $A^{-1}.\ B=X$

$$\begin{bmatrix}-2/5&1/10&3/10\\-1/5&3/10&-1/10\\2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}11\\22\\14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

REGLA DE CRAMER

Si un sistema es Crameriano cada incógnita se puede calcular como un cociente de determinantes.

- El Dividendo es el determinante de la matriz que se obtiene al reemplazar en la matriz del sistema, los coeficientes de la incógnita que se quiere determinar por los términos independientes.
- El Divisor es el determinante de la matriz de los coeficientes o matriz del sistema.

La regla de Cramer afirma que la única n-úpla solución de un sistema Crameriano se encuentra efectuando los n cocientes de dichos determinantes.

REGLA DE CRAMER

Sea A.X=B un sistema crameriano:

La matriz A representada por columnas:

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots. \quad A_n]$$

$$x_1 = \frac{|B \quad A_2 \quad \dots. \quad A_n|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{|A_1 \quad B \quad \dots. \quad A_n|}{|A|}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{columna} \quad j$$

$$x_j = \frac{|A_1 \quad A_2 \quad \dots B \dots \quad A_n|}{|A|}; \quad 1 \le j \le n$$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x+5y=19 \\ x+3y=11 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{2}{1}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{3}{1}=3$$

El sistema es compatible determinado y la única n-úpla solución es: $S=\{(2,3)\}$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ 3x + 4y + z = 22 \\ 5x + z = 14 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 22 & 4 & 1 \\ 14 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-10} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 3 & 22 & 1 \\ 5 & 14 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ 3x + 4y + z = 22 \\ 5x + z = 14 \end{cases}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 3 & 4 & 22 \\ 5 & 0 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-40}{-10} = 4$$

El sistema es compatible determinado y la única n-úpla solución es: $S = \{(2,3,4)\}$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Sistemas homogéneos: son aquellos en los cuales todos los términos independientes son simultáneamente nulos.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \forall i : b_i = 0$$

SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS

Sistemas no homogéneos: son aquellos en los cuales todos los términos independientes no son simultáneamente nulos. Es decir, existe al menos un término independiente no nulo.

$$\exists i \,/\, b_i \neq 0$$

Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales según el conjunto solución

- Sistemas de ecuaciones homogéneos → Compatible
  - Determinado: Única solución: trivial
  - Indeterminado: infinitas soluciones

SISTEMAS HOMOGÉNEOS CUADRADOS

Propiedad:

- Un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo.

- Un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas es indeterminado si y solo si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

Ejercicios: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} 2x+y+z=11 \\ 3x+4y+z=22 \\ 5x+z=14 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x+3y+4z=15 \\ x-y+z=1 \\ 4x+6y+8z=30 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 2x+3y+4z=15 \\ x-y+z=1 \\ 4x+6y+8z=25 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \qquad e)\begin{cases} x+3z=-2y \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y=-9z \end{cases}$$