

Trabajo Práctico Nº 3: Estructuras Algebraicas

1) Dada la siguiente definición:

Un grupo **(G,+)** es un conjunto cualquiera G con una operación (+) definida en él que verifica:

1) Ley de composición interna cerrada: $\forall x, y \in G : x + y \in G$

2) Propiedad asociativa: $\forall x, y, z \in G : (x + y) + z = x + (y + z)$

3) Existencia de neutro: $\exists e \in G / \forall x \in G : x + e = e + x = x$

4) Existencia de inverso: $\forall x \in G, \exists x' \in G / x + x' = x' + x = e$

- a) ¿Qué significa el par (G, +)? ¿Es la notación que se utiliza para denotar un grupo?
- b) El conjunto G debe ser ¿de números? ¿de letras? ¿de funciones? ¿de figuras geométricas?
- c) ¿qué es una operación? ¿qué significa operación binaria? ¿Es cerrada?
- d) ¿qué significa la propiedad asociativa?
- e) ¿Qué significa $\exists e \in G / \forall x \in G : x + e = e + x = x$? ¿Por qué cree que el elemento “e” recibe el nombre de neutro? ¿satisface éste elemento, la propiedad mencionada con todos los elementos de G? ó ¿para cada elemento de G, hay un neutro?
- f) ¿Qué significa $\forall x \in G, \exists x' \in G / x + x' = x' + x = e$? ¿Por qué cree que el elemento “x’ ” recibe el nombre de inverso de g? ¿satisface éste elemento la propiedad mencionada con todos los elementos de G? ó ¿para cada elemento de G, hay un inverso?

2) Dados los pares formados por un conjunto numérico y una operación ordinaria, determinar la estructura algebraica de cada par, justificando las respuestas.

- a) (N,+) b) (N, ·) c) (N,-) d) (Z,+) e) (Z, ·) f) (Z,÷)

3) Dado el siguiente conjunto A, determinar la estructura algebraica del par (A, +) y (A, ·) siendo “+” la adición y “ · ” el producto ordinario.

- a) $A = \left\{ x / x = \frac{1}{2}k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ b) $A = \{ x / x = 3^k; k \in \mathbb{N}_0 \}$ c) $A = \{ x / x = 2k + 1; k \in \mathbb{Z} \}$

4) Determinar en cada caso si el par (G, +) es grupo abeliano, donde:

- a) $G_1 = \{ x / x = 3k, k \in \mathbb{N} \}$; + es la adición.
- b) $G_2 = \{ x / x = 2^k, k \in \mathbb{Z} \}$; + es el producto ordinario.
- c) $G_3 = \{ 1; -1 \}$; + es la adición.
- d) $G_4 = \{ 1; -1 \}$; + es el producto ordinario.

~~5)~~ Sea Z es el conjunto de los números enteros, determinar si (Z, +) es grupo abeliano:

- a) Para la operación + definida mediante: $a + b = 2ab$
- b) Para la operación + definida mediante: $a + b = a + b + 3$.

6) En los ejercicios anteriores, cuando sea posible, determinar al menos un subgrupo.

- 7) El grupo de los cuatro elementos de Klein consiste en un conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ con la ley de composición $+$ definida por la tabla:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Asumiendo que $(A, +)$ es asociativo:

- i) Verificar que $(A, +)$ es grupo.
 - ii) Si $H = \{a, b\}$. ¿Es $(H, +)$ es subgrupo de $(A, +)$? Justificar.
 - iii) Si $B = \{a, b, c\}$. ¿Es $(B, +)$ es subgrupo de $(A, +)$? Justificar.
- 8) Dados los siguientes conjuntos:
- a) $G_1 = \{0, 1\}$
 - b) $G_2 = \{1, -1\}$
 - c) $G_3 = \{0, 1, 2, 3\}$
 - d) $G_4 = \{0, 1, -1\}$
- Definir si es posible una operación $+$ en cada uno de ellos, de modo que el par $(G, +)$ tenga estructura de grupo.
- ~~9)~~ Dado el conjunto $B = \{1; 3; 5; 15\}$. Determinar la estructura algebraica de $(B, +)$ donde se define $+$ mediante:
- a) $a + b = \text{mcm}(a, b) \quad \forall a, b \in B$
 - b) $a + b = \text{mcd}(a, b) \quad \forall a, b \in B$
- ~~10)~~ Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y $P(A)$ el conjunto de partes de A .
- a) Determinar la estructura algebraica del par $(P(A), \cup)$
 - b) Determinar la estructura algebraica del par $(P(A), \cap)$
- 11) Verificar que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.
- ~~12)~~ Probar que $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ es un anillo con unidad.
- 13) Sea $K = \{0, 1\}$ y las operaciones $+$ y \bullet definidos en K , según las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

\bullet	0	1
0	0	0
1	0	1

Probar que estas operaciones definen sobre K una estructura de cuerpo.

- ~~14)~~ Analice la estructura algebraica de los pares: $(\mathbb{R}, +)$ y (\mathbb{R}, \bullet) donde: $+$ es la adición y \bullet es el producto.
- ~~15)~~ Analice la estructura algebraica $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ donde: $+$ es la adición y \bullet es el producto.