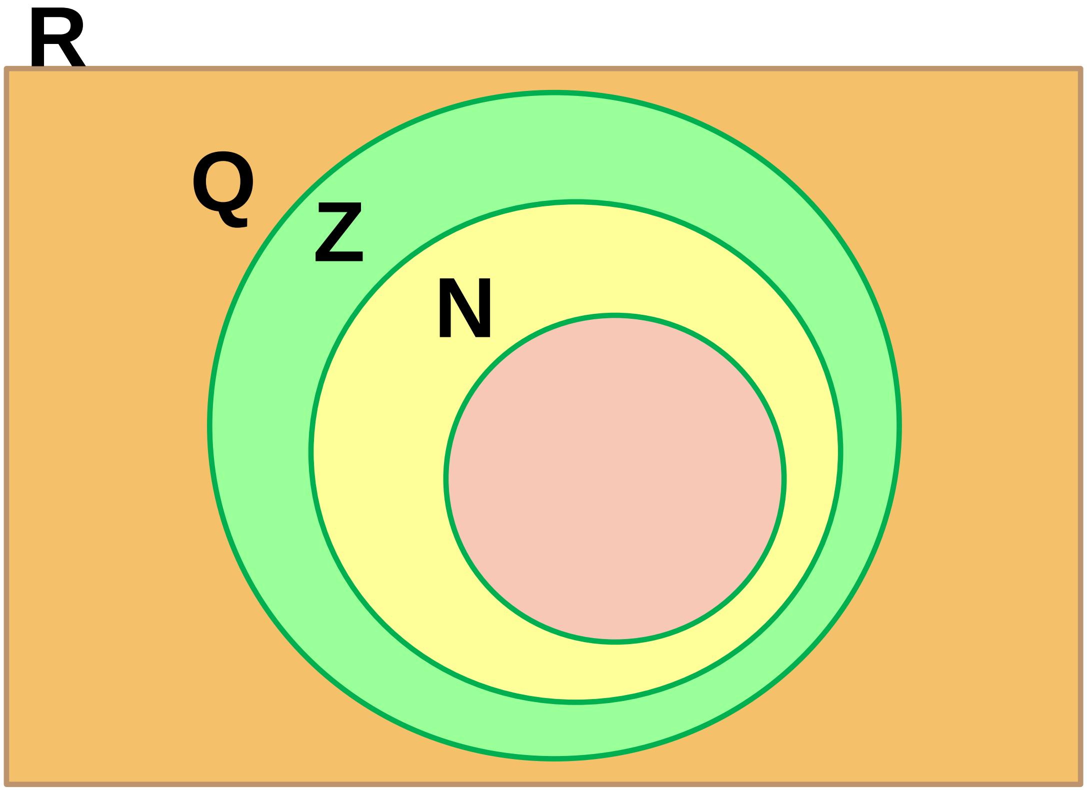
Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 4: Conjuntos Numéricos

CONJUNTOS NUMÉRICOS



N*: Conjunto de los números naturales.*

Z*: Conjunto de los números enteros.*

Q*: Conjunto de los números racionales.*

R*: Conjunto de los números reales.*

NUMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales lo representamos con el símbolo N y sirven para contar u ordenar. $N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\}$

PROPIEDADES DE N

- El conjunto de los números naturales es infinito.
- Tiene primer elemento. No tiene último elemento.

PROPIEDADES DE N

- ❖Todo número natural tiene un sucesor o siguiente. Un número natural y su sucesor se dicen consecutivos.
- ❖Todo número natural, excepto el uno, tiene un antecesor.
- ❖Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales.

PROPIEDADES DE (N,+)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in N: a + b \in N$
2. Propiedad asociativa:

   $$\forall a,b,c \in N: (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. Propiedad conmutativa:

   $$\forall a,b \in N: a + b = b + a$$

PROPIEDADES DE (N, ·)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in N$: $a.b \in N$
2. Propiedad asociativa:

$$\forall a,b,c \in N: (a.b).c = a.(b.c)$$

3. Propiedad conmutativa:

$$\forall a, b \in N: a.b = b.a$$

4. Existencia de elemento neutro:

$$\forall a \in N: a.1 = 1.a = a$$

Además de las propiedades vistas verifica:

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $\forall a,b,c \in N: (a + b).c = a.c + b.c$

EL SÍMBOLO SUMATORIA

Si a_i es un número real que depende del índice i, podemos indicar de manera abreviada la siguiente suma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

El índice i es variable de 1 a n con n $\in$ N.

Se lee "sumatoria de a_i con i variando de 1 a n"

Ejercicio:

Escribir en forma simplificada (expresarlo como sumatorias) las siguientes sumas:

a) La suma de los primeros 6 números naturales impares

b) La suma de los primeros n números naturales impares.

c) La suma del cuádruple de los 5 primeros números naturales.

d) La suma del cuádruple de los n primeros números naturales.

EL SÍMBOLO PRODUCTORIA

Del mismo modo que se usa el símbolo sumatoria para indicar una suma se utiliza el siguiente símbolo para indicar el producto:

$$a_1 . a_2 . a_3 . \ldots . a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Ejercicio:

Escribir en forma simplificada (expresarlo como productoria) los siguientes productos:

a) El producto de los cubos de los n primeros números naturales.

b) El producto de los primeros n números naturales impares.

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Sea P(n) una función proposicional en N, tal que:

1. P(1) es verdadera.
2. Si P(h) es verdadera, P(h + 1) también lo es.

Entonces, $\forall n \in N$: P(n) es verdadera.

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Ejemplo 1: Sea la siguiente función proposicional definida en N $P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

Probar que $\forall n \in N: \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

$$\forall n \in N: \quad 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

1°) Verificar que P(1) es verdadera.

$$Si\; n = 1, \quad \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1.(1+1)}{2}$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

2°) Suponiendo que P(h) es verdadera, vamos a probar que P(h + 1) también lo es.

Hipótesis Inductiva:

$$Si\ n = h,\quad \sum_{i=1}^{h} i = \frac{h.(h+1)}{2}$$

Tesis:

$$Si\ n = h+1,\quad \sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1).[(h+1)+1]}{2}$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Observemos:

$$\sum_{i=1}^{h} i = 1+2+3+4+\dots+h = \frac{h.(h+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = 1+2+3+4+\dots+h+(h+1) = \frac{(h+1).[(h+1)+1]}{2}$$

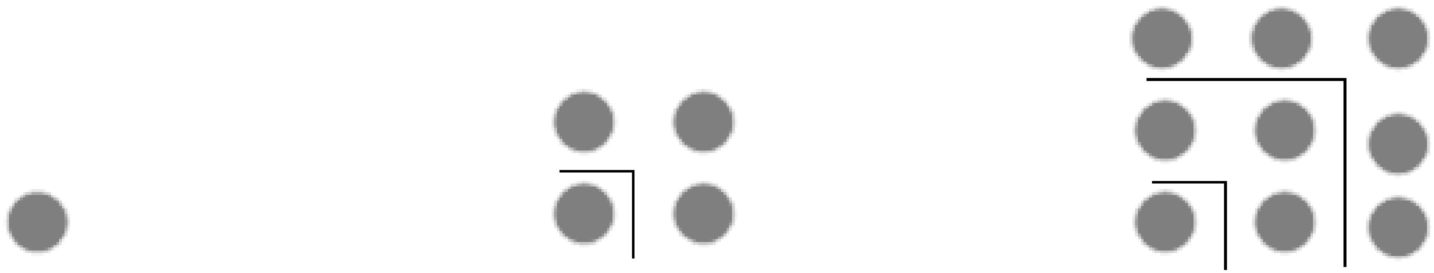
Demostración:

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \sum_{i=1}^{h} i + (h+1) = \frac{h.(h+1)}{2} + (h+1) = (h+1).\left(\frac{h}{2}+1\right) =$$

$$(h+1).\left(\frac{h}{2}+\frac{2}{2}\right) = \frac{(h+1).(h+2)}{2}$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Ejemplo 2: El matemático Pitágoras, utilizando piedras, procedió de la siguiente manera:



1 $\qquad$ $1+3=4$ $\qquad$ $1+3+5=9$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Ejemplo 2:

Probar que: $\forall n \in N: \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

1°) Verificar que P(1) es verdadera.

$$Si \quad n=1 \qquad \sum_{i=1}^{1}(2i-1)=1^2$$

$$2.1-1=1^2$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

2°) Si P(h) es verdadera, P(h + 1) también lo es.

Hipótesis Inductiva:

$$Si \quad n = h \qquad \sum_{i=1}^{h}(2i-1) = h^2$$

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1) = 1+3+5+7+9+\ldots+(2h-1) = h^2$$

Tesis:

$$Si \quad n = h+1 \qquad \sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = (h+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1) = 1+3+5+7+9+\ldots+(2h-1)+[2(h+1)-1] = (h+1)^2$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1)=1+3+5+7+9+...+(2h-1)=h^{2}$$

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1)=1+3+5+7+9+...+(2h-1)+[2(h+1)-1]=(h+1)^{2}$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{h+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{h}(2i-1)+[2(h+1)-1]$$

$$=h^{2}+[2(h+1)-1]$$

$$=h^{2}+2h+2-1 \quad =(h+1)^{2}$$

EJEMPLO 3:

Juan está haciendo las siguientes cuentas:

$$4.1 = 4$$

$$4.1 + 4.2 = 12$$

$$4.1 + 4.2 + 4.3 = 24$$

$$4.1 + 4.2 + 4.3 + 4.4 = 40$$

Y establece la siguiente conjetura:

$$4.1 + 4.2 + 4.3 + 4.4 + \ldots + 4.n = 2n^2 + 2n$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Ejemplo 3: Sea la siguiente función proposicional definida en N $P(n): \sum_{i=1}^{n} 4i = 2n^2 + 2n$

Probar que $\forall n \in N: \sum_{i=1}^{n} 4i = 2n^2 + 2n$

$$\forall n \in N: \quad 4.1 + 4.2 + 4.3 + 4.4 + \ldots + 4.n = 2n^2 + 2n$$

1°) Verificar que P(1) es verdadera.

$$Si\ n = 1, \quad \sum_{i=1}^{1} 4i = 2.1^2 + 2.1$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

2°) Suponiendo que P(h) es verdadera, vamos a probar que P(h + 1) también lo es.

Hipótesis Inductiva:

$$Si\ n = h, \quad \sum_{i=1}^{h} 4i = 2h^2 + 2h$$

Tesis:

$$Si\ n = h+1, \quad \sum_{i=1}^{h+1} 4i = 2(h+1)^2 + 2(h+1)$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Observemos:

$$\sum_{i=1}^{h} 4i = 4.1 + 4.2 + 4.3 + 4.4 + \ldots + 4.h = 2h^2 + 2h$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} 4i = 4.1 + 4.2 + 4.3 + 4.4 + \ldots + 4.h + 4.(h+1) = 2(h+1)^2 + 2(h+1)$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{h+1} 4i = \sum_{i=1}^{h} 4i + 4(h+1) = \ 2h^2 + 2h + 4(h+1)$$

$$= 2h^2 + 2h + 4h + 4$$

$$= 2h^2 + 2h + 2 + 4h + 2 \ = 2(h+1)^2 + 2(h+1)$$

EJEMPLO 4:

Probar por inducción:

$$\forall n \in N, \quad 10^{2n} - 1 = 11k, k \in N$$

1°) Verificar que P(1) es verdadera:

$$Si \quad n = 1, \quad 10^{2.1} - 1 = 11k, k \in N$$

$$99 = 11k, k \in N$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

2°) Suponiendo que P(h) es verdadera, vamos a probar que P(h + 1) también lo es.

Hipótesis Inductiva:

$$Si\ n = h, \quad 10^{2.h} - 1 = 11k, k \in N$$

Tesis:

$$Si\ n = h + 1, \quad 10^{2(h+1)} - 1 = 11k\acute{}, k\acute{} \in N$$

Demostración:

$$10^{2(h+1)}-1= \ 10^{2h+2}-1$$

$$=10^{2h}.10^{2}-1$$

$$=10^{2h}.100-1+100-100$$

$$=10^{2h}.100-100-1+100$$

$$=100.(10^{2h}-1)-1+100$$

$$\text{Por HI} \quad =100.(11k)+99$$

$$=11.(100k+9)$$

$$k'=100k+9$$

$$k'\in N$$