



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Principios de Comunicaciones (EL4112)

Tarea 4

Prof. Cesar Azurdia

Prof. Aux. Sebastián Arancibia, Fernanda Borja, Diego
Castillo

Ayudantes: Cristóbal Allendes, Ammi Beltrán, Gonzalo
Alegría.

1. Demuestre de forma analítica y grafica:

Solución:

Un matched filter es un tipo de filtro que maximiza la relación entre la señal y el ruido (SNR) para detectar señales en presencia de ruido. Luego podemos definir su función de transferencia H como:

$$h(t) = s * (T - t) \quad (1)$$

Al analizar la ecuación podemos notar que el filtro es la versión invertida y conjugada de la señal transmitida $s(t)$. Luego podemos definir también la relación entre la señal transmitida y la energía como:

$$E = \int_0^T |s(t)|^2 dt \quad (2)$$

y la señal recibida como:

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (3)$$

con $n(t)$ el ruido blanco gaussiano. Luego la salida del filtro es:

$$y(T) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h(T - \tau) d\tau = \int_0^T r(\tau) s(\tau) d\tau. \quad (4)$$

$$y(T) = \int_0^T s(\tau) s(\tau) d\tau + \int_0^T n(\tau) s(\tau) d\tau = E_s + n_s, \quad (5)$$

$$n_s = \int_0^T n(\tau) s(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Observando el resultado de estas ecuaciones notamos que E_s es la energía de la señal transmitida y n_s es la energía del ruido en la señal recibida. Luego hablando de la potencia de la señal y el ruido tenemos:

$$S = [E_s]^2 \quad (7)$$

Donde la potencia del ruido la caracterizaremos como una variable aleatoria con media 0 y varianza σ^2 de la siguiente forma:

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}[n_s^2] = \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(\lambda)] s(\tau) s(\lambda) d\tau d\lambda. \quad (8)$$

Luego podemos escribir la función de autocorrelación de $n(t)$ teniendo en cuenta la densidad espectral de la potencia $N_0/2$:

$$\mathbb{E}[n(\tau)n(\lambda)] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \lambda). \quad (9)$$

Luego podemos escribir la varianza del ruido como:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T [s(\tau)]^2 d\tau = \frac{N_0 E_s}{2} \quad (10)$$

Con esto podemos deducir que la potencia del ruido en la salida es

$$N = \sigma_n^2 = \frac{N_0 E_s}{2} \quad (11)$$

Luego hablando sobre la SNR podemos definirla como el cociente entre la potencia de la señal y la potencia del ruido:

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{E_s^2}{\frac{N_0 E_s}{2}} = \frac{2E_s}{N_0} \quad (12)$$

Luego simplificando y reordenando la ecuación obtenemos:

$$SNR = \frac{E_s}{N_0/2} \quad (13)$$

Con esto queda deducida analiticamente la relación entre la señal y el ruido en un matched filter.