Demostración de que el Filtro Adaptado Maximiza la SNR

El filtro adaptado (matched filter) está diseñado para maximizar la SNR en la salida al final del período de símbolo T. Consideremos un sistema donde se transmite un símbolo $s(t)$ en presencia de ruido blanco gaussiano $n(t)$. La señal recibida $r(t)$ es:

$$r(t) = s(t) + n(t) \tag{1}$$

El filtro adaptado tiene una respuesta impulsional $h(t)$ que es una versión invertida en el tiempo de la señal transmitida $s(t)$:

$$h(t) = s(T - t) \tag{2}$$

La salida del filtro adaptado en $t = T$ es:

$$y(T) = \int_0^T r(\tau)h(T - \tau)d\tau = \int_0^T (s(\tau) + n(\tau))s(\tau)d\tau \tag{3}$$

Descomponiendo:

$$y(T) = \int_0^T s(\tau)s(\tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)s(\tau)d\tau = E_s + n_s \tag{4}$$

Donde:

$$E_s = \int_0^T [s(\tau)]^2 d\tau \tag{5}$$

Y n_s es el ruido filtrado:

$$n_s = \int_0^T n(\tau)s(\tau)d\tau \tag{6}$$

La varianza del ruido en la salida del filtro es:

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}[n_s^2] = \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(\lambda)]s(\tau)s(\lambda)d\tau d\lambda \tag{7}$$

Dado que $n(t)$ es ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$:

$$\mathbb{E}[n(\tau)n(\lambda)] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau - \lambda) \tag{8}$$

Donde δ es la función delta de Dirac. Entonces:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}\int_0^T [s(\tau)]^2 d\tau = \frac{N_0}{2}E_s \tag{9}$$

La potencia del ruido en la salida es:

$$N = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} E_s \tag{10}$$

Por lo tanto, la SNR en la salida del filtro adaptado es:

$$\text{SNR} = \frac{\text{Potencia de la señal}}{\text{Potencia del ruido}} = \frac{E_s^2}{\frac{N_0}{2} E_s} = \frac{2E_s}{N_0} \tag{11}$$

Esto demuestra que la SNR se maximiza al final del período de símbolo T.