



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Principios de Comunicaciones (EL4112)

Tarea 4

Prof. Cesar Azurdia

Prof. Aux. Sebastián Arancibia, Fernanda Borja, Diego
Castillo

Ayudantes: Cristóbal Allendes, Ammi Beltrán, Gonzalo
Alegría.

1. Demuestre de forma analítica y grafica:

Solución:

Un matched filter es un tipo de filtro que maximiza la relación entre la señal y el ruido (SNR) para detectar señales en presencia de ruido. Luego podemos definir su función de transferencia H como:

$$h(t) = s * (T - t) \quad (1)$$

Al analizar la ecuación podemos notar que el filtro es la versión invertida y conjugada de la señal transmitida $s(t)$. Luego podemos definir también la relación entre la señal transmitida y la energía como:

$$E = \int_0^T |s(t)|^2 dt \quad (2)$$

y la señal recibida como:

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (3)$$

con $n(t)$ el ruido blanco gaussiano. Luego la salida del filtro es:

$$y(T) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h(T - \tau) d\tau = \int_0^T r(\tau) s(\tau) d\tau. \quad (4)$$

$$y(T) = \int_0^T s(\tau) s(\tau) d\tau + \int_0^T n(\tau) s(\tau) d\tau = E_s + n_s, \quad (5)$$

$$n_s = \int_0^T n(\tau) s(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Observando el resultado de estas ecuaciones notamos que E_s es la energía de la señal transmitida y n_s es la energía del ruido en la señal recibida. Luego hablando de la potencia de la señal y el ruido tenemos:

$$S = [E_s]^2 \quad (7)$$

Donde la potencia del ruido la caracterizaremos como una variable aleatoria con media 0 y varianza σ^2 de la siguiente forma:

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}[n_s^2] = \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[n(\tau)n(\lambda)] s(\tau) s(\lambda) d\tau d\lambda. \quad (8)$$

Luego podemos escribir la función de autocorrelación de $n(t)$ teniendo en cuenta la densidad espectral de la potencia $N_0/2$:

$$\mathbb{E}[n(\tau)n(\lambda)] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \lambda). \quad (9)$$

Luego podemos escribir la varianza del ruido como:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T [s(\tau)]^2 d\tau = \frac{N_0 E_s}{2} \quad (10)$$

Con esto podemos deducir que la potencia del ruido en la salida es

$$N = \sigma_n^2 = \frac{N_0 E_s}{2} \quad (11)$$

Luego hablando sobre la SNR podemos definirla como el cociente entre la potencia de la señal y la potencia del ruido:

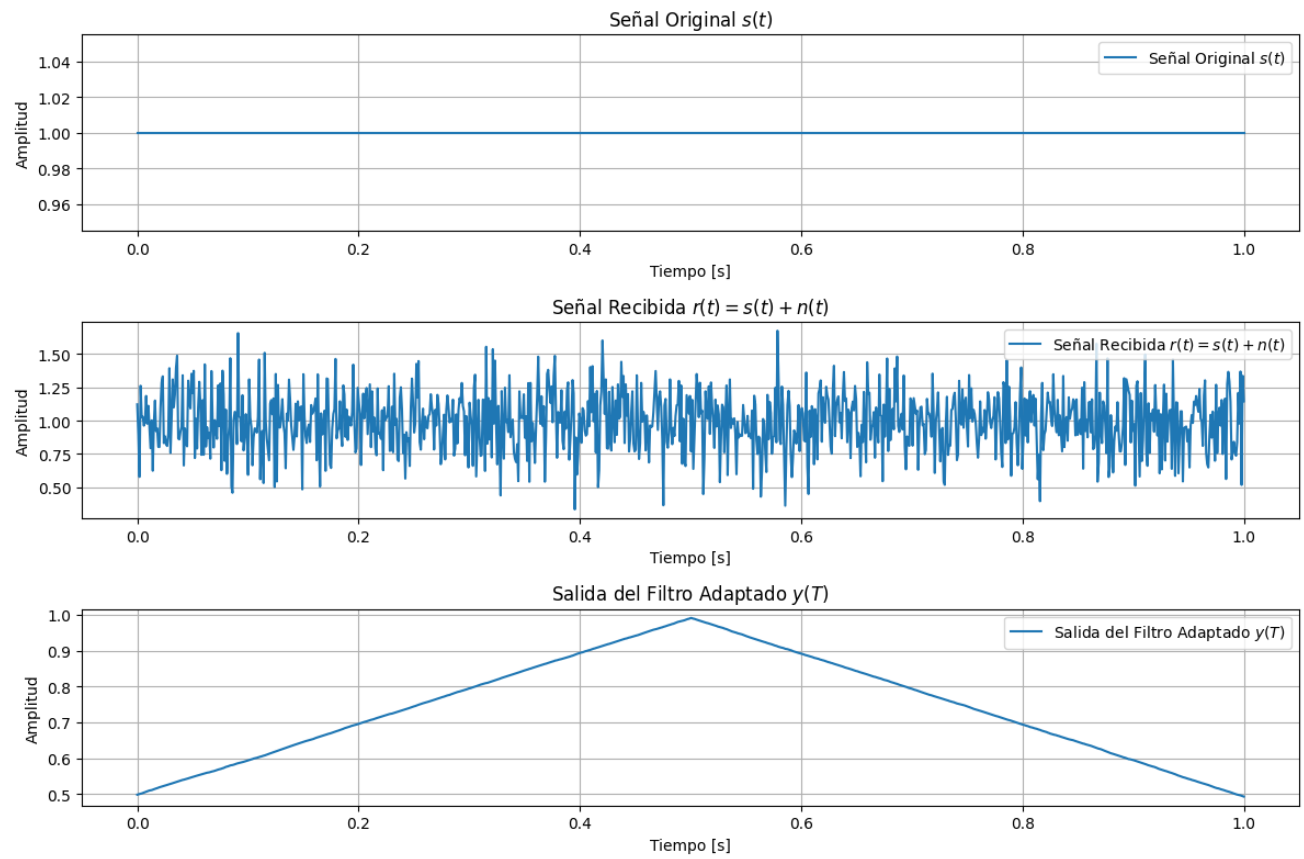
$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{E_s^2}{\frac{N_0 E_s}{2}} = \frac{2E_s}{N_0} \quad (12)$$

Luego simplificando y reordenando la ecuación obtenemos:

$$SNR = \frac{E_s}{N_0/2} \quad (13)$$

Con esto queda deducida analíticamente la relación entre la señal y el ruido en un matched filter.

La siguiente figura muestra la relación entre la potencia de la señal, la potencia del ruido y la energía del símbolo en un sistema de comunicación digital. En este sistema, la potencia de la señal S y la potencia del ruido N están relacionadas con la energía del símbolo E_s y la densidad espectral del ruido N_0 . El gráfico visualiza cómo se comporta la relación señal-ruido (SNR) al cambiar la potencia de la señal y el ruido, lo que nos permite obtener la expresión máxima de la SNR cuando se utiliza un filtro optimizado, como el “matched filter”.



Como se muestra en la pregunta 1, la relación entre las diferentes variables se establece para maximizar la SNR, lo cual es crucial para mejorar el rendimiento del sistema de comunicación.